

Petra SCHERER, Bielefeld

Diagnose ausgewählter Aspekte des Dezimalsystems bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern

1 Bedeutung des Stellenwertsystems

Das Verständnis des Stellenwertsystems repräsentiert eine fundamentale Idee der Mathematik (Winter 2001) bzw. der Arithmetik (Wittmann 1994). Ein sicheres Verständnis des STW-Systems ist erforderlich für das Dezimalsystem allgemein, für das Verständnis großer Zahlen und Zahlvorstellungen, u. a. auch für das Schätzen und Überschlagen. Es ist notwendig für die Entwicklung effektiver Rechenstrategien (um z. B. zählendes Rechnen und Fingerrechenmethoden zu ersetzen), für das Verständnis der schriftlichen Algorithmen sowie für die Zahlbereichserweiterungen etwa zu den Dezimalbrüchen. Auch für die Bezüge zu Größen mit dezimalen, aber auch nicht dezimalen Strukturen ist das Verständnis unabdingbar.

Verschiedene Studien zeigen, dass dieser Inhalt für lernschwache Schülerinnen und Schüler, auch in höheren Klassen, häufig Probleme auslöst (vgl. z. B. Moser Opitz 2007; Kamii 1986; Fuson 1990; Fuson et al. 2000).

Im Folgenden wird eine Pilotstudie zu ausgewählten Aspekten des Dezimalsystems vorgestellt, die einerseits die Schwierigkeiten lernschwacher Schülerinnen und Schüler besser verstehen, andererseits aber auch Folgerungen für die Diagnose sowie für Lehr- und Lernprozesse ableiten will.

2 Testkonstruktion und Durchführung der Studie

Für die Studie wurden Aufgaben im 1000er-Raum konzipiert, die unterschiedliche Repräsentationsebenen abdecken, daneben auch die Basis für Rechenstrategien beleuchten. Dabei wurden nicht nur typische Standardaufgaben, sondern auch unbekannte Formate oder herausfordernde Aufgaben gewählt, die im regulären Unterricht oder den Lehrwerken nicht unbedingt behandelt worden waren und die nicht mechanisch zu lösen sind.

Der komplette Test umfasst die folgende Aufgabengruppen: Zählen vorwärts/rückwärts (mit unterschiedlichen Startpunkten und Übergängen, Zehner-, Hunderter- und Tausenderübergang); Zählen in Schritten (2er/10er/100er) vorwärts/rückwärts; Zerlegen in STW (z. T. mit unbesetzten STW wie bei 209); Zusammensetzen aus STW symbolisch und ikonisch (z. T. mit unbesetzten STW, z. B. $400+8$, oder mit variierender Reihenfolge der STW, z. B. $70+200+3$); Darstellung in der Stellentafel (Zahlen mit Plättchen legen); Identifizieren von STW; Additionen & Subtraktionen (einfache Zahlenwerte ohne Überschreitungen wie bspw. $251+503$).

Die Studie wurde in Form von Einzelinterviews mit 12 Schülern des 5. und 6. Schuljahres einer Förderschule/Schwerpunkt Lernen durchgeführt (vier Mädchen, acht Jungen; jeweils zwei Sitzungen pro Schüler). Neun der Schülerinnen und Schüler wiesen einen Migrationshintergrund auf, für einige war Deutsch nicht die Erstsprache.

3 Ausgewählte Ergebnisse

Insgesamt zeigte sich bei allen Schülern ein gewisses Verständnis des Dezimalsystems, jedoch offenbarten sich auch Schwierigkeiten und Beschränkungen. Exemplarisch seien drei Bereiche genauer beleuchtet.

3.1 Zählen

Die Aufgaben zum Zählen beinhalteten spezifische Anforderungen wie 10er-, 100er- bzw. 1000er-Übergänge. Dies stellt erhebliche Anforderungen an Konzentration und Kurzzeitgedächtnis, gehört aber zu einem sicheren STW-Verständnis. Der Startpunkt 6 war beim Vorwärtszählen unproblematisch. Beim Startpunkt 96 wurden nach 100 bspw. abweichend genannt »110, 120, 130, ...« oder »200, 300, 400, ...«. Die Frage stellt sich hierbei, ob primär ein sprachliches Problem vorliegt, dass etwa bei 200 die Zahl »Hundertzwei« gemeint war. Mit größeren Zahlen und beim Rückwärtszählen tauchten größere Probleme auf.

3.2 Zerlegen in Stellenwerte & Zusammensetzen aus Stellenwerten

Mitunter fand sich lediglich die Kennzeichnung mit HZE. Hier bleibt fraglich, ob bspw. bei 209 ein wirkliches Verständnis des unbesetzten STW vorliegt oder lediglich in mechanischer Art die bekannte Abfolge der STW notiert wurde. Es fand sich auch die ikonische Zerlegung (100er-Quadrate, 10er-Streifen, Punkte). Die intendierte Lösung, z. B. $378 = 300 + 70 + 8$ als Zahlensatz, fand eher selten spontan statt. Wenn dies angeregt wurde, zeigten die unbesetzten STW interessante Notationen der Null, z. B. additiv als $209 = 200+0+9$ oder als Auflistung 200, 00, 9 entsprechend der Zehnerposition. An solchen Beispielen wäre im weiteren Unterricht zu arbeiten.

Für das Zusammensetzen aus STW wurde häufiger der schriftliche Algorithmus bemüht. Bei diesem Aufgabentyp spielte die veränderte bzw. nicht vertraute Reihenfolge der STW eine entscheidende Rolle: Während die Standardaufgabe $300+50+4$ zur richtigen Lösung führte, wurden bspw. als Fehllösung für $70+200+3$ etwa 723 oder 7023 angegeben.

Auch bei der analogen Aufgabe auf ikonischer Ebene (100er-Punktfelder, 10er-Streifen und einzelne Punkte) wurde der schriftliche Algorithmus genutzt. Z. T. mussten sich die Schüler Zwischenergebnisse der STW notie-

ren und erfassten selbst eine dargestellte Zahl wie 100 und 20 nicht direkt. Eine Schülerin hatte schon Probleme, das Punktfeld auf einen Blick zu erfassen und notierte zunächst die Unterstruktur der 25er.

Bei diesem Aufgabentyp müssen die Lösungsprozesse genau beleuchtet werden: Wenn Schüler nicht in der Lage sind, zwei oder drei Stellenwerte direkt zusammen zu fassen, sondern dafür den schriftlichen Algorithmus benötigen oder auch Strukturierungshilfen, so wird dies die Entwicklung und die Wahl von Rechenstrategien erheblich beeinflussen.

3.3 Addition & Subtraktion

Diese Aufgaben ergaben nur eine geringe Fehleranzahl, dabei mehr Fehler bei der Subtraktion als bei der Addition. Eine typische Reaktion war die Frage »Kann ich auch untereinander rechnen?«. Als Fehlermuster zeigte sich das Vergessen einzelner STW (z. B. $314+314 = 328$) oder auch eine falsche STW-Zuordnung (z. B. $251+503 = 781$). Das Interview offenbarte, dass eine am schriftlichen Produkt vermutete Fehlerstrategie nicht zutreffen musste oder mehrdeutig war und die Prozesse mehr Aufschluss gaben: So kamen zwei Schüler bei der Aufgabe 624-203 beide zur Lösung 401. Während der eine im Kopf rechnete und die Zehner einfach vergaß, nutzte der andere den schriftlichen Algorithmus. Dabei war eine vermischte Sprechweise des Ergänzens (»von 3 bis 4«) und des Abziehens an der Zehnerstelle (»0 minus 2«) mit dem Ergebnis 0 festzustellen. In vielen Fällen wurden die Operationen eher mechanisch durchgeführt, dabei nicht in Zahlen, sondern in Ziffern gesprochen. Dies scheint jedoch kein Spezifikum lernschwacher Schüler zu sein, sondern eher ein allgemeiner Trend nach der Einführung schriftlicher Algorithmen (vgl. z. B. Scherer/Steinbring 2003).

4 Abschließende Bemerkungen

Die Pilotstudie zeigte einige interessante Ergebnisse: Abgesehen von der Bearbeitungszeit gab es keine prinzipiellen Unterschiede zwischen Fünft- und Sechstklässlern. Darüber hinaus kamen einige Schüler zu korrekten *Rechenergebnissen*, obwohl ihnen offensichtlich Basiskompetenzen fehlten. Das erfolgreiche Lösen von Routineaufgaben kann also Verständnis vortäuschen. Insbesondere die nicht-Standard Aufgaben konnten helfen, Defizite bzw. eingeschränkte Vorstellungen zu identifizieren.

Folgerungen für Unterricht und Förderung betreffen einerseits zukünftige Inhalte, etwa bei der Erweiterung des Zahlenraums. Andererseits wäre auch der Zugang zu den vergangenen Inhalten (z. B. Einführung 100er- und 1000er-Raum) kritisch zu reflektieren. Generell darf sich der Mathematikunterricht nicht mit korrekten Ergebnissen zufrieden geben, sondern sollte

das Beschreiben/Begründen der eigenen Vorgehensweisen fordern, nicht zuletzt auf Grund der diagnostischen Informationen.

Der Diagnose und Förderung von Basisfertigkeiten (z. B. Verständnis des STW-Systems) muss besondere Bedeutung zukommen. Dazu sind geeignete Aufgabentypen sowohl für die Diagnostik als auch für den Unterricht erforderlich. Auch die verschiedenen Repräsentationsebenen wären zu vernetzen, und im Fokus sollten nicht nur Rechnungen und das Arbeiten auf der symbolischen Ebene stehen (vgl. z. B. Scherer 1995). Nicht zuletzt wären auch die Rolle der Sprache und die linguistischen Besonderheiten zu berücksichtigen (vgl. auch Scherer/Steinbring 2003; Thompson 1997).

Der Nutzen einer diagnostischen Überprüfung betrifft verschiedene Bereiche: Sie ermöglicht die Berücksichtigung der individuellen Schülerbedürfnisse und gibt Hinweise für differenzierte Lernangebote für den Unterricht. Die Identifizierung der Probleme kann für alle Schüler besprochen werden und damit zu einem tieferen Verständnis mathematischer Inhalte führen.

Literatur

- Fuson, K. C. (1990). Issues in place value and multidigit addition and subtraction learning and teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 273-280.
- Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Drucek, J. V. (2000). Achievement Results for Second and Third Graders. Using the Standards-Based-Curriculum *Everyday Mathematics*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 277-295.
- Kamii, C. (1986). Place Value: an explanation of its difficulty and educational implications for the primary grades. *Journal for Research in Childhood Education*, 1(2), 75-86.
- Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.
- Scherer, P. (1995). Ganzheitlicher Einstieg in neue Zahlenräume – auch für lernschwache Schüler?! In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 151-164). Frankfurt/M.: Arbeitskreis Grundschule.
- Scherer, P., & Steinbring, H. (2003). The professionalisation of mathematics teachers' knowledge – teachers commonly reflect feedbacks to their own instruction activity. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of CERME 3*. Pisa: Università di Pisa.
- Thompson, I. (1997). Mental and written algorithms: can the gap be bridged? In I. Thompson (Ed.), *Teaching and learning early number* (S. 97-109). Buckingham: Open University Press.
- Winter, H. (2001): Inhalte mathematischen Lernens. Download unter: <http://grundschule.bildung-rp.de/lernbereiche/mathematik/wissenschaftliche-artikel/inhalte-mathematischen-lernens.html> [08.03.09]
- Wittmann, E. C. (1994). Teaching aids in primary mathematics: Less is more. In L. Bazzini & H.-G. Steiner (Hrsg.), *Proceedings of the Second Italian-German Bilateral Symposium on the Didactics of Mathematics* (Vol. 39, S. 101-111). Bielefeld: IDM