Andrea SCHINK, Dortmund

„Und was ist jetzt das Ganze?!“ – Vom Umgang mit der Bezugsgröße bei Brüchen

1. Befunde zu Schwierigkeiten beim Umgang mit Brüchen

Empirische Untersuchungen belegen, dass die Bruchrechnung und speziell die Multiplikation von Brüchen vielen Lernenden Probleme bereiten (vgl. Wartha 2007, Padberg 2002, Fischbein u.a. 1985). Dabei lässt sich feststellen, dass ein epistemologisches Hindernis für ein inhaltliches Verständnis der Multiplikation für viele Lernende die Bezugsgröße ist. Wenn ein Anteil-vom-Anteil bestimmt wird, wechselt fast stillschweigend das Ganze, auf das sich ein Anteil bezieht, wie z.B. hier: Mara hat noch 3/4 vom Kuchen übrig. Von den 3/4 isst sie 2/3. Welchen Anteil des Kuchens hat sie gegessen? Hier bezieht man 3/4 auf den ganzen Kuchen, die 2/3 auf die 3/4, einen Teil des Ganzen, und das Ergebnis 6/12 wieder auf den ganzen Kuchen. Dieser Wechsel der Bezüge ist für Lernende nicht selbstverständlich, zumal er auch nicht immer explizit gemacht wird. Zu erkennen, dass die Wahl des Ganzen nicht beliebig ist, ist daher schwierig.

Die Kenntnis dieses Phänomens an sich ist nicht neu (vgl. z.B. Wartha 2007, Mack 2000), jedoch zeigte sich im Laufe unserer Untersuchung, dass die Interpretation der Bezugsgröße eine wichtige Voraussetzung für das inhaltliche Verständnis der Multiplikation von Brüchen darstellt: Nur wer den Anteil-vom-Anteil auf das richtige Ganze beziehen kann, kann die Multiplikation als Anteil-vom-Anteil-Nehmen sinnvoll deuten (vgl. Schink 2008).

2. Eine Lernumgebung im Modell der Didaktischen Rekonstruktion

Als Modell für den noch nicht abgeschlossenen Forschungs- und Entwicklungsprozess zur Untersuchung der Vorstellungsentwicklung zur Multiplikation von Brüchen wurde das Modell der Didaktischen Rekonstruktion nach Kattmann u.a. (1997) gewählt. Es hat die Veränderung von Unterricht durch didaktische Strukturierung von Lernarrangements vor dem Hintergrund einer konstruktivistischen Lerntheorie zum Ziel und verschränkt dazu wechselseitig zwei weitere Arbeitsbereiche: fachliche Klärung (intensive Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand) und Lernendenperspektive (Erfassung individueller Vorstellungen). Dabei wird davon ausgegangen, dass die Inhalte des Unterrichts nicht alleine von der Fachwissenschaft normativ vorgegeben werden, sondern erst durch konsequente Einbeziehung der Lernendenperspektive konstruiert werden können. Das beinhaltet, die individuellen Vorstellungen und Schwierigkeiten der Lernenden bei der

Didaktischen Strukturierung der Lerninhalte als Ressourcen für den Lernprozess anzusehen (vgl. Kattmann u.a. 1997, Prediger 2005).

Ein erster Schritt zur Erhebung der Lernendenperspektive ging von den in der Literatur beschriebenen Schwierigkeiten (oft nur begrenzt vorhandene inhaltliche Deutung der Operation und Fehlvorstellungen wie „Multiplizieren vergrößert stets"; vgl. z.B. Prediger 2008) aus und nutzte im ersten Zugriff einen aus unserer Sicht überzeugenden Zugang über das Anteil-vom-Anteil-Nehmen aus dem Zahlenbuch 6 (Affolter u.a. 2004) in leicht abgeänderter Fassung (vgl. Schink 2008). Dabei zeigte sich das eingangs beschriebene Bezugsgrößenproblem. Auf diese Hürde für das inhaltliche Verständnis wurde im nächsten Schritt eingegangen: Durch Einbeziehung von Fach- und Lernendenperspektive wurden Aufgaben entwickelt, die diese aus Lernendensicht schwierige, aber zugleich wichtige fachliche Voraussetzung aufgreifen und verstehen helfen sollen (Didaktische Strukturierung). Dabei sollen die sensible Wahrnehmung und der Bezugswechsel bereits weit vor der Multiplikation aufgegriffen werden. Eine Aufgabe der Lernumgebung wurde im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion aus Lernendenperspektive beleuchtet und in halbstandardisierten klinischen Partnerinterviews in einer 6. Gesamtschulklasse eingesetzt. Dabei interessierten folgende Forschungsfragen:

- Was können die Aufgaben für einen sensiblen Umgang mit der Bezugsgröße in Vorbereitung auf die Multiplikation von Brüchen leisten?
- Welche individuellen Vorstellungen zum Ganzen und zur Bezugsgröße lassen sich aus den Bearbeitungen der Aufgaben rekonstruieren?

3. Ergänzen zum Ganzen und Reflektion wechselnder Bezüge

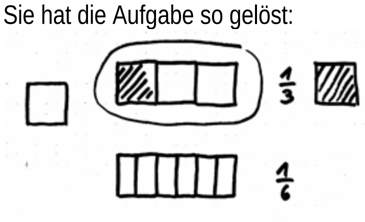
Den Kindern wurde die Aufgabe in Abb. 1 in zwei Schritten vorgelegt. Der erste Teil stellt die Umkehrung der Standardaufgabe dar, ein Ganzes in Anteile zu zerlegen. Er knüpft aus Lernendenperspektive an Vorerfahrungen an (bekannte geometrische Formen und Strukturierung eines Ganzen in Anteile). Allerdings enthält die Aufgabe mit der Neustrukturierung der Situation eine wichtige neue Anforderung, denn das Ganze ist nicht gegeben und viele Aspekte müssen bedacht werden: Wie viele Teile braucht man insgesamt? Wie viele fehlen? Darf man ein einmal gefundenes Ganzes weiter nutzen? Was bleibt gleich (Stückgröße)? Was ändert sich (Größe des Ganzen)? Kommt es nur auf die Anzahl der Teile an? Die im zweiten Aufgabenteil aufgegriffene Fehlvorstellung mit der sich die Kinder auseinander setzen sollen, zielt auf diese Fragen ab. Dass damit ein Anlass geschaffen wurde, über das Problem der Bezüge zu argumentieren, zeigt z.B. Simons Begründung: *„Wenn das der Kuchen ist* [deutet auf das obere Rechteck] *und das ist ja ein Drittel. Und hier unten das Sechstel - Da sind entweder die Stücke kleiner, oder der Kuchen muss kleiner werden damit die Stücke genau…äh, der Kuchen muss dann* ***größer*** *werden, damit die Kästchen genauso groß sind.“*. So differenziert können nicht alle Kinder an dieser Aufgabe argumentieren: Dazu müssen sie erkennen, was hier die veränderbare Größe ist, und dass Theas Lösung nicht nur eine ungenaue Skizze ist, sondern dass dort ein konzeptionelles Problem besteht. Helfen kann ihnen der Impuls, auf Anteile zu achten, um die Reflektion von Zeichenungenauigkeiten zum inhaltlichen Kern zu lenken. Die Argumentation ist nicht trivial, wie auch Simons Erklärung zeigt: Der Bezugswechsel und die wechselseitige Größenbeziehung sind anspruchsvoll. Simon vertut sich hier zunächst auch mit der Veränderungsrichtung. Trotz möglicher Schwierigkeiten ist das Reflektieren und Argumentieren über Beziehungen zwischen Teil und Anteil jedoch eine sinnvolle Tätigkeit, die für die Wahrnehmung dieser Relation sensibilisieren kann.

Hier ist ein Drittel: □ Wie könnte das Ganze aussehen? Zeichne es auf! Wie könnte das Gan-ze aussehen, wenn die Figur ein Sechstel des Ganzen ist? Zeichne es!

Thea findet die Aufgabe doof:

Aber das macht doch keinen Sinn! Die Aufgabe ist doch total doof! Das kann doch gar nicht sein, dass das Quadrat da gleichzeitig ein Drittel ***und*** *ein Sechstel ist! Die Stücke sind doch beide Male gleich groß…. Und $\frac{1}{6}$ ist doch immer kleiner als $\frac{1}{3}$, oder nicht?!*

Sie hat die Aufgabe so gelöst:



Was sagst du dazu?

Abb. 1

Abb. 2

Neben der Argumentation kann man an der Aufgabe auch einiges über Vorstellungen der Kinder vom Ganzen lernen. So wird es z.T. als „ganz“ gedacht, d.h. als eine möglichst symmetrische, „schöne“ und „prototypische“ Form (vgl. Abb. 2; das rechte Bild wurde z.T. eher akzeptiert als das linke, da dort „etwas fehlt“). Darüber hinaus verwendeten manche Kinder das zuerst gefundene Ganze weiter und verteilten es, wenn ein neuer Anteil gegeben war; das entspricht der im zweiten Teil aufgegriffenen Fehlvorstellung. Solche Lösungen analoger Aufgaben sind in Abb. 3 aufgeführt und zeigen verschiedene Aspekte: Während bei den Dreiecken der Prozess der Konstruktion erkennbar ist (vier wurden erst später ergänzt damit das Ausgangsdreieck das verlangte 1/8 des Ganzen ist), lässt sich beim

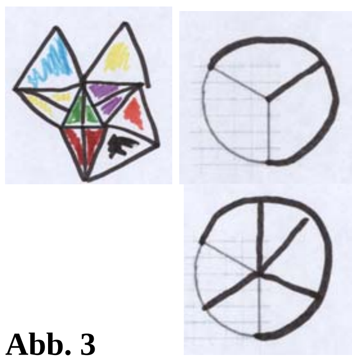


Abb. 3

Kreis (das Segment soll 1/3, bzw. 1/6 sein) die Dominanz eines prototypisch gedachten Ganzen erahnen. Beide Lösungen lassen vermuten, dass das Verändern der Größe des Ganzen aus Sicht dieser Kinder abwegiger als die Größenvariation des (hier eigentlich fest vorgegebenen) Anteils ist.

4. **Vom Umgang mit dem Ganzen hin zur Multiplikation**

Der reflektierte Umgang mit der Bezugsgröße schon vor der Behandlung der Multiplikation erscheint sehr wichtig im Hinblick auf eine Flexibilisierung des Denkens in Bezügen und inhaltliche Deutungen. Argumentieren über Fehlvorstellungen oder konträre Konzepte kann hier produktiv sein. Weitere wichtige Schritte hin zu einer vorstellungsorientierten Multiplikation von Brüchen wären das Sensibilisieren für Bezüge und „das Ganze" auch bis hin zur Multiplikation, das Abgrenzen von konzeptionell unterschiedlichen, aber für Lernende nicht so leicht unterscheidbaren Konzepten und Situationen, wie z.B. beim Signalwort „von", und das Vernetzen von Konzepten zur Multiplikation von Brüchen (als Anteil-vom-Anteil-Nehmen und als Multiplikation von Anteilen von Größen) z.B. über geeignete graphische Darstellungen. Hier ist im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion eine erneute Strukturierung anzusetzen.

Literatur

Affolter, W. u.a. (2004). *Das Zahlenbuch 6*. Zug: Klett und Balmer.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *JRME, 16*, 3 - 17.

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H., Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 3(3)*, 3 - 18.

Mack, N. K. (2000). Long-term effects of building on informal knowledge in a complex content domain: the case of multiplication of fractions. *J. Math. Behav.,19(3)*, 307 - 332.

Padberg, F. (2002). *Didaktik der Bruchrechnung.* Heidelberg: Spektrum-Verlag.

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica, 28(2)*, 23 - 47.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18 (1)*, 3 - 17.

Schink, A. (2008). Vom Falten zum Anteil vom Anteil – Untersuchungen zu einem Zugang zur Multiplikation von Brüchen. In: E. Vasarhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, (S. 697 - 700). Münster: WTM Verlag.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim / Berlin: Franzbecker.