Annika M. WILLE, Bremen

Von Schülerinnen und Schülern erdachte Dialoge im Kontext der Zahlbereichserweiterungen in Klasse 5

Abstrakt

Für die Zahlenbereichserweiterungen in einer 5. Klasse in Bremen wurde das Zahlenleitermodell eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler führten außerdem ein Forscherheft, in dem sie sowohl Reisetagebucheinträge, als auch selbst erdachte Dialoge schrieben. Die Videoaufzeichnungen der Schreibprozesse wurden dahingehend untersucht, wie die Schülerinnen und Schüler ihre Überlegungen darlegten.

Theoretischer Rahmen

Anna Sfard (2008) definiert das Denken als *individualisierte Form von (interpersonaler) Kommunikation* oder auch als *Selbstkommunikation*. Dabei prägt sie den Begriff *Commognition* und bezieht sich damit sowohl auf den *Prozess des Denkens* als auch auf das *Kommunizieren*. In dieser Sichtweise wird Mathematik als Diskurs gesehen. Dieser Diskurs ist ihm Rahmen von Commognition der Forschungsgegenstand.

Das *Schreiben im Mathematikunterricht* kann auf unterschiedliche Weise erfolgen, wie zum Beispiel in Form von *Reisetagebüchern*, *Forscherheften* und *Journals*. Borasi & Rose (1989) beschreiben Vorteile, die das Schreiben im Mathematikunterricht für das Lernen und Lehren hat. Ruf & Gallin (1998) untersuchen Reisetagebücher und führen aus, wie durch sie ein schriftlicher Dialog zwischen Lernenden und Lehrenden entsteht. Clarke, Waywood & Stephens (1993) wiederum unterscheiden zwischen drei verschieden Arten von Journal-Einträgen. Sie nennen sie *Recount*, *Summary* und *Dialogue*, wobei Dialogue einen inneren Dialog des Schreibenden mit sich selbst meint. Über diese inneren Dialoge schreiben sie, dass auf diese Weise die Schülerinnen und Schüler ihre Fehler analysieren und identifizieren und ihre Gedankengänge begründen könnten. Eine weitere Form des Schreibens im Mathematikunterricht sind *erdachte Dialoge* (Wille, 2008). Schülerinnen und Schüler schreiben hierbei einen Dialog zwischen zwei Protagonisten auf, die sich über eine mathematische Fragestellung unterhalten.

Sfard (2008) schreibt: „Mathematical self communication may be difficult to observe.“ Es stellt sich also die Frage, wie man den mathematischen Diskurs von Schülerinnen und Schülern sichtbar machen kann. Dies kann auf viele verschiedene Weisen geschehen. In Beispielen möchte ich zeigen, wie von Schülerinnen und Schülern erdachte Dialoge einen inneren Diskurs anregen konnten, dessen Spuren in den Aufzeichnungen zu sehen sind. Dabei können wir nicht erwarten, dass wir dabei direkt beim Denken zusehen. Möglich ist aber eine Untersuchung der mathematischen Ideen, die in ihnen dargestellt werden, und der inneren Dynamik der erdachten Dialoge. Die Forschungsfragen sind daher: Werden während des Schreibens erdachter Dialoge mathematische Ideen entwickelt? Welche mathematischen Ideen werden von den Schülerinnen und Schülern genannt? Kann man Typen von Darstellungen unterscheiden.

Methode des laufenden Projektes

In einem ganzen Schuljahr (2008/2009) schreiben Schülerinnen und Schüler einer 5. Klasse eines Bremer Gymnasiums regelmäßig Einträge in ihr Forscherheft. Dabei schreiben sie sowohl Reisetagebucheinträge im Sinne von Ruf & Gallin (1998) als auch erdachte Dialoge. Der Prozess des Schreibens der erdachten Dialoge wird bei sieben bis acht Schülerinnen und Schülern gefilmt. Anschließend wird mit den Schülerinnen und Schülern ein Interview, bzw. ein Stimulated Recall durchgeführt und ebenfalls auf Video aufgenommen.

Lernumgebung

Der Bremer Lehrer Klaus Lies entwickelte für seinen Unterricht (2002 bis 2006) ein Leitermodell, das den Zahlenstrahl aufrecht stellt und mit Sprossen versieht. Das Modell wurde später von Stefan Halverscheid ebenfalls eingesetzt und untersucht (Halverscheid, Henseleit & Lies 2006). Bei Bruchzahlen können dabei neue Sprossen eingezogen werden. Bei Vielfachen werden Sprossen ausgelassen. Zu der unten stehenden Aufgabe war Folgendes inhaltlich vorausgegangen: ganze Zahlen, kleinstes gemeinsames Vielfaches, größter gemeinsamer Teiler, Bruchzahlen erkennen, erweitern, kürzen, vergleichen. Außerdem besaßen die Schülerinnen und Schüler selbst gemachte Bruchzahlleitern aus Papier. Die Aufgabestellung war diese:

Führe das unten stehende Gespräch zweier Schülerinnen oder Schüler fort. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Die beiden wollen im Gespräch so viel wie möglich mathematisch entdecken. Schreibe mindestens eine Seite.

S1: Ich denke gerade über Bruchzahlen nach. Möchtest du mir dabei helfen?
S2: Ja, gerne! Worüber denkst du denn nach?
S1: Ich versuche gerade herauszufinden, wie ich zwei Bruchzahlen addieren kann.
S2: Spannend!
S1: Wenn ich innerhalb einer Leiter bleibe, ist es einfach.
S2 denkt nach...
S2: Stimmt! $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{6}$ kann ich auch leicht zusammenzählen.

S1: Aber was mache ich, wenn ich zwei Leitern habe?
S2: Lass uns einmal ein Beispiel angucken! Vielleicht bekommen wir so eine Idee.

Ergebnisse

Eine Schülerin, die wir hier Kathrin nennen, entwickelt verschiedene mathematische Ideen während des Schreibens ihres erdachten Dialogs. Zunächst findet sie zwei Zahlenpaare, bei denen überkreuzt gerechnet der Zähler plus Nenner gleich dem anderen Zähler plus Nenner ist. Diese Idee verwirft sie wieder anhand eines Gegenbeispiels und sagt dazu im Stimulated Recall:

„Aber das hat mich dann doch nicht weitergebracht, als ich gemerkt habe, dass mir noch eine Idee kam.“

Die nächste Idee ist das Addieren von gleichnamigen Bruchzahlen durch das Addieren des Zählers. Als letztes fällt ihr mit Hilfe ihrer Leitern auf, dass bei gleichnamigen Brüchen der Bruch, der aus Zähler plus Zähler und Nenner plus Nenner besteht, *genau in der Mitte* zwischen den anderen beiden liegt. Sie entdeckt also das arithmetische Mittel bei zwei gleichnamigen Bruchzahlen. Es folgt ein Ausschnitt aus Kathrins erdachten Dialog:

S2: Ja, aber mir ist noch etwas anderes aufgefallen. $\frac{3}{3}$ und $\frac{7}{3}$?
S1: Was denn? Nächste Seite geht's weiter →

S2: Na mir ist aufgefallen dass das Ergebnis von $\frac{3}{3}$ und $\frac{7}{3}$, also $\frac{10}{6}$ genau in der Mitte von $\frac{3}{3}$ und $\frac{7}{3}$ ist.
S1: Wirklich? Stimmt. Ist das denn immer so?
S2: Mal gucken. Nehmen wir mal $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$.
Das Ergebnis ist $\frac{4}{4}$. Ja, auch hier stimmt es.
S1: Und bei $\frac{8}{2}$ und $\frac{12}{2}$?
S2: Ja auch hier geht es.
S1: Cool dann haben wirs ja kapiert!

Bei einer anderen Schülerin, die wir hier Fatma nennen, kann man im erdachten Dialog ahnen, wo sie nachgedacht hat. Sie schreibt beispielsweise an einer Stelle: „Ich muss jetzt mal nachdenken.“ In der Videoaufzeichnung ist an dieser Stelle zu sehen, dass die Schülerin 37 Sekunden mit dem Schreiben aufhört, bevor sie weiterschreibt.

In vorherigen Untersuchungen über erdachte Dialoge kristallisierten sich drei Formen von erdachten Dialogen heraus: Die erste Form besteht aus einer kurzen Frage, einer langen Antwort und einem kurzen Dank. Bei der zweiten Form haben die beiden Protagonisten eine Art Lehrer-Schüler-Verhältnis, bei der einer viel mehr weiß als der andere. Die dritte Form ist ein sich entwickelnder Dialog, der an die inneren Dialoge wie bei Clarke, Waywood & Stephens (1993) erinnert. Bei dem hier vorgestellten Projekt war immer ein Anfangsdialog gegeben. Es ist bisher zu beobachten, dass die erste Form überhaupt nicht auftritt. Die zweite Form tritt vor allem dann auf, wenn der Schreibende etwas verstanden hat und noch einmal reflektiert. Die dritte Form tritt häufig dann auf, wenn die Schülerin oder der Schüler selbst versucht, während des Schreibens etwas herauszufinden.

Zusammenfassung

Die Schülerinnen und Schüler entwickelten während des Schreiben erdachter Dialoge mathematische Ideen. Unter den Ideen waren verschiedene Arten, die vier Ziffern der beiden Bruchzahlen miteinander zu verrechnen. Andere erhielten das korrekte Ergebnis entweder durch das Aneinanderlegen ihrer Zahlenleitern oder durch Rechnungen. Bei manchen erdachten Dialogen, wie bei dem von Fatma, kann man durch die Formulierung darauf schließen, an welchen Stellen nachgedacht wurde. Schließlich entdeckte Kathrin das arithmetische Mittel bei Bruchzahlen.

Literatur

Borasi, R. & Rose, B. J. (1989). Journal writing and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 347-365.

Clarke, D. J., Waywood, A. & Stephens, M. (1993). Probing the structure of mathematical writing. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 235-250.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Seelze: Kallmeyer.

Halverscheid, S., Henseleit, M. & Lies, K. (2006). Rational numbers after elementary school: realizing models for fractions on the real line. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (Eds.) *Proc. 30 th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 255-232). Prague: PME.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communication: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York, USA: Cambridge University Press.

Wille, A. M. (2008). Aspects of the concept of variable in imaginary dialogues written by students. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sépulveda (Eds.) *Proc. 32 th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 417-424). Cinestav-UMSNH, Mexico: PME.