Frauke ULFIG, Oldenburg

Hauptschülerinnen und Hauptschüler lösen Geometrieaufgaben der PISA-Studie 2003 – eine Triangulation qualitativer und quantitativer Analysen

Was PISA nicht zeigt… – besondere Schwierigkeiten von Hauptschülerinnen und Hauptschülern

Eine bekannte und vielfach diskutierte Konsequenz aus PISA, dem Programme for International Student Assessment, ist der besondere Förderbedarf im unteren Leistungsbereich. Der Anteil der Schülerinnen und Schüler im unteren Leistungsbereich ist in Deutschland so hoch wie in kaum einem anderen west- und nordeuropäischen Land (Blum u.a. 2004).

Wo genau liegen die besonderen Schwierigkeiten dieser Schülerinnen und Schüler?

Wie gehen sie beim Lösen der Aufgaben vor?

Welche Vorstellungen haben sie von den vorkommenden Begriffen?

Diese Fragen lassen sich allein anhand der PISA-Ergebnisse nicht ausreichend beantworten. Denn PISA liefert globale Daten über Bildungssysteme und diese Ergebnisse darf man nicht ohne weiteres auf einzelne Schülerinnen und Schüler beziehen. Die Beantwortung von Fragen nach besonderen Schwierigkeiten und individuellen Vorstellungen und Denkweisen ist allerdings unverzichtbar, wenn man aus PISA Konsequenzen hinsichtlich einer inhaltlichen Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts ableiten will.
An dieser Stelle setzt mein Forschungsvorhaben an, welches im Rahmen einer Dissertation durchgeführt wird. Während bei PISA meist nur die Ergebnisse der Aufgaben betrachtet werden können, stehen daher in einer ergänzenden, qualitativen Studie die Lösungsprozesse im Vordergrund. Ich habe Hauptschülerinnen und -schüler ausgewählte Geometrieaufgaben der PISA-Studie bearbeiten lassen und sie anschließend zu ihrem Vorgehen und zu den vorkommenden Begriffen „Umfang“ und „Fläche“ befragt.

Orientierungsrahmen: Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion

Als Teilnehmerin des Promotionsstudiengangs Didaktische Rekonstruktion an der Universität Oldenburg bietet mir das Modell der Didaktischen Rekonstruktion einen Orientierungsrahmen. Mit diesem Modell wird ein Forschungsparadigma verfolgt, das fachliche Vorstellungen mit Schülerperspektiven so in Verbindung setzt, dass daraus ein Lerngegenstand didaktisch entwickelt werden kann. Kattmann (1997) spricht in diesem

Zusammenhang von einer „Wechselwirkung von fachlicher Klärung und Untersuchung der Schülerperspektiven“.

Triangulation qualitativer und quantitativer Daten

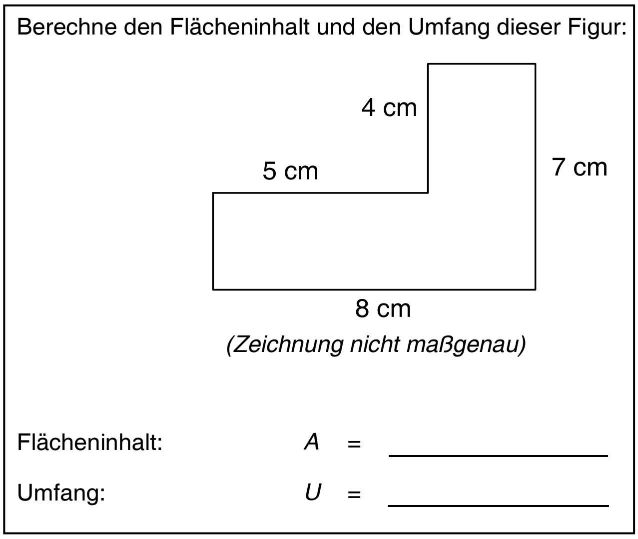
Die Ergebnisse der Erhebung werden in enger Verbindung mit den PISA-Ergebnissen im Sinne einer Triangulation ausgewertet. Diese Verbindung qualitativer und quantitativer Ansätze ist vor allem durch einen wechselseitigen Nutzen gekennzeichnet (Flick 2004). Einerseits können die Ergebnisse der qualitativen Erhebung in den PISA-Daten wieder gefunden werden. Dadurch bekommen sie den Charakter des Exemplarischen und gewinnen an Aussagekraft. Andererseits können die PISA-Ergebnisse in Verbindung mit den qualitativen Daten besser interpretiert werden.

Ein vierstufiges Design zur Erfassung geometrischer Denkweisen

Für die Erhebung wurde ein mehrstufiges Design angewendet. In der mathematikdidaktischen Forschung bereits mehrfach erprobt ist das Dreistufendesign von Busse und Borromeo Ferri 2003. Auf eine Aufgabenbearbeitung folgt ein Nachträgliches Lautes Denken. Abschließend wird ein Interview durchgeführt. Dieses dreistufige Design habe ich für meine Erhebung weiter modifiziert und um eine Phase der Nachbearbeitung ergänzt.

Einige erste Ergebnisse

„Da muss es doch eine Formel geben – Sollen wir da eine Skizze machen??“



Die Untersuchungsaufgabe L-Fläche stammt, wie auch die nachfolgend beschriebene Aufgabe Wandfläche, aus der nationalen Erweiterung der PISA-Studie 2003. 36% der Hauptschülerinnen und Hauptschüler in Deutschland berechneten den Flächeninhalt der Figur korrekt. 38% konnten den Umfang berechnen. Bestimmte falsche Lösungen kommen in den PISA-Daten auffällig oft vor:

$A = 8cm \cdot 7cm \cdot 4cm \cdot 5cm = 1120cm^2$ $\quad$ $U = 5cm+4cm+8cm+7cm = 24cm$

Auch in der qualitativen Erhebung finden sich diese Vorgehensweisen:

„Flächeninhalt, das war a·b.“
„a · b · c · d“
„Du muss alles mal nehmen.“

„Umfang, 24, glaube ich, oder?“
„24+6“

Die Schülerinnen und Schüler berechnen den Flächeninhalt, indem sie alle vorgegebenen Größen multiplizieren. Um den Umfang zu bestimmen, addieren sie alle vorgegebenen Größen. Zudem wurde häufig das Verwenden von Variablen beim Lösen der Aufgabe beobachtet.
Die Interviews untermauern die These einer rechnerischen und formelorientierten Sichtweise. Im Nachträglichen Lauten Denken begründen zwei Schüler ihre Lösung der Aufgabe: „Flächeninhalt bedeutet mal und Umfang heißt plus.“ Auf die Frage nach dem Umfang einer Figur antwortet eine Schülerin:„Umfang? Das ist a + b + c + d.“
Ein weiterer Schüler beschreibt seine besonderen Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe so: „Ich kenne L-Fläche nicht. Hatte ich noch nicht. Da muss es doch bestimmt eine spezielle Formel geben, für L-Fläche.“

Diese rechnerische und formelorientierte Sichtweise findet sich auch bei anderen Untersuchungsaufgaben, beispielsweise der Aufgabe „Wandfläche“.

Peter will die Wände und die Decke seines Zimmers mit weißer Wandfarbe streichen. Sein Zimmer, mit rechteckiger Grundfläche, ist 4 m breit, 5 m lang und 2,50 m hoch. Das Zimmer hat eine Tür und ein Fenster, die natürlich nicht gestrichen werden müssen. Die Fläche von Tür und Fenster zusammen ist 6 m².

Wie groß ist die Fläche, die Peter streichen muss?

Bitte kreuze die richtige Lösung an.

- ☐ 22,5 m²
- ☐ 36,5 m²
- ☐ 39 m²
- ☐ 44 m²
- ☐ 50 m²
- ☐ 59 m²

Weniger als 8% der deutschen Hauptschülerinnen und Hauptschüler konnten diese Aufgabe lösen. Knapp 40% entschieden sich für 44m², rechneten also $4 \cdot 5 \cdot 2{,}5 - 6$. Die Vorgehensweisen während der qualitativen Erhebung bestätigen die Vermutung, dass die Schülerinnen und Schüler das Ergebnis ausrechnen, ohne sich eine Vorstellung von der Situation zu machen.
Die Analyse der PISA-Daten deutet darauf hin, dass gute Skizzen zum erfolgreichen Lösen der Aufgabe beitragen. Das Anfertigen solcher Skizzen bereitet allerdings große Schwierigkeiten, wie die Ergebnisse der qualitativen Erhebung zeigen.
„Wie wird das hoch, so ne?“, fragt ein Schüler seinen Partner und zeichnet zunächst ein Rechteck und dann eine Senkrechte durch die Mitte der

Grundseite. Im Nachträglichen Lauten Denken äußert er: „Ja ich hab, ich hab mich am Anfang immer gefragt, warum wir die Höhe nehmen sollten, bis ich dann endlich mal begriffen habe, dass er ja Wände streicht nicht irgendwie Decke oder Boden, aber dann ging das eigentlich." Daraufhin rechnet dieser Schüler $4 \cdot 5 \cdot 2{,}5 - 6 = 44$, kreuzt 44m² an und ist von der Richtigkeit seiner Lösung überzeugt.

Ausblick

Abschließen möchte ich diesen Bericht mit einem Denkansatz aus der Mathematikdidaktik, der nicht nur einen wichtigen Hintergrund der PISA-Konzeption darstellt, sondern auch einen wesentlichen theoretischen Grundsatz für meine Arbeit. Hans Freudenthal beschreibt seine Auffassung von Lehren und Lernen von Mathematik:
„Unsere mathematischen Begriffe, Strukturen und Vorstellungen sind erfunden worden als Werkzeuge, um die Phänomene der natürlichen, sozialen und geistigen Welt zu ordnen" (Freudenthal 1983). Freudenthals Sichtweise zielt darauf ab, dass nicht eine vorweggenommene Abstraktion und die anschließende Anwendung fertiger Konzepte, sondern der verständige, reflektierte Gebrauch in geeigneten Situationen das Lernen mathematischer Begriffe bestimme. Mathematische Begriffe werden aus vielfältigen außer- und innermathematischen Situationen heraus gebildet und tragen umgekehrt „als Werkzeuge" zur Erschließung „der Welt" bei. Auf diese Weise kann es gelingen, dass Begriffe bei den Schülerinnen und Schülern nicht (nur) rechnerisch und formelorientiert, sondern vielmehr anschaulich, beziehungsreich und an Inhalte gebunden repräsentiert sind.

Literatur

Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Senkbeil, M., Jordan, A., Ulfig, F. und Carstensen, C. (2004). *Mathematische Kompetenz.* In: Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rolff, H.-G., Rost, J. und Schiefele, U. (Hrsg.). (2004). PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Münster: Waxmann.

Busse, A. und Borromeo Ferri, R. (2003). Agieren, kommentieren, reflektieren – ein Beitrag zur Methodendiskussion in der Mathematikdidaktik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003*. S. 169-172.

Flick, U. (2004). *Triangulation. Eine Einführung.* Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht.

Kattmann, U. Duit, R., Gropengießer, H. und Komorek, M (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftliche Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* 3 (3), 3-18.