Ingrida VEILANDE, Riga

Die Strukturen von Einheitswürfeln in die kombinatorischen Aufgaben.

Einfürung. Schon seit ferner Zeit haben die Menschen verschiedene Spiele, wo man Logik braucht, so auch Findigkeitsaufgaben fasziniert. Dank Computertechnologien sind heutzutage für viele Spiele interaktive Modelle geschafft. Um mögliche Lösungen zu finden, kann man mit Hilfe von Komputerprogrammen komplizierte Berechnungen machen. Deshalb kann man bei den Findigkeitsaufgaben die sichtbaren Gesetzmässigkeiten und deren Verallgemeinerungen manchmal als Mathematikaufgaben formulieren.

Eine Art von logischen Spielen ist die Zusammenstellung von räumlichen Figuren mit ziemlich einfachen Blöcken. Bei Lösung solcher Aufgaben muss man sowohl räumliche Vorstellungskraft als auch Findigkeit haben. Als Beispiel kann man hier den Erfinder des Soma Kubus den Dänen Piet Hein nennen. Das Spiel besteht aus 7 Steinen aus welchen den Kubus zusammenstellen muss. Das kann man in 240 verschiedenen Arten machen.

Wenn wir uns nicht nur auf den Kubus beschränken, dann kann man aus gegebenen Figuren tausend unterschiedliche Formen bilden. Wenn man mehrere gleiche Figuren oder noch andere Figuren, die nach ähnlichen Prinzipien gebildet sind, benutzt, dann sind die verschiedenen Varianten unbegrenzt viel (Thorleif's SOMA Page).

Wenn man ähnliche Aufgaben betrachtet, wo man die räumliche Figur aus farbigen Teilen zusammenstellen muss, dann wird nicht immer die Fehler- und Versuchsmethode genügen. Es scheint, zum Beispiel, die Aufgabe des Spiels "Verrückte vier" einfach (Jaap's Puzle Page). Es sind vier Kuben gegeben, deren jede Fläche in einer von vier Farben gefärbt ist. Die Aufgabe ist sie in ein Stäbchen 1 x 1 x 4 so zu ordnen, damit in jeder Fläche 1 x 4 alle Farben vertreten sind. Es gibt nur zwei Lösungen, aber die gegebenen Kuben kann man in der Reihe auf 41472 Arten stellen. Die richtige Kombination kann man mit der Lösung der theoretischen Aufgabe von entsprechenden Graphen bekommen.

Kombinatorische Aufgaben. Ähnlich kann man eine Reihe von kombinatorial geometrischen Aufgaben betrachten, wo man aus Kuben zusammengestellte Figurenkonfigurationen und deren Eigenschaften betrachten kann. Die Aufgaben können unterschiedlich sein, zum Beispiel:

- Entsprechend den definierten Umstellungsbedingungen, muss man den Block aus der gegebenen Position auf eine andere Position umstellen, oder auch klären, ob die genannte Umstellung möglich ist;
- Klären, ob man die Figur aus den gegebenen Blöcken zusammenstellen kann;
- Ergründen irgendwelche bestimmte Eigenschaften, die der Figur eigen sind, die aus gegebenen Blöcken zusammengestellt ist;
- Bestimmen die Rundgangsmöglichkeiten der gegebenen Konfiguration;
- Begründen die Eigenschaften der Figuren bei unterschiedlicher Färbung.

In den Aufgabensammlungen von Mathematikolympiaden von verschiedenen Ländern kann man ähnliche Zweidimensionsaufgaben über die karierte Papiergitter und Figuren der poliominen Art finden. Aufgaben mit orthogonalen räumlichen Figuren sind ziemlich selten zu finden. Aber sie sind sehr wichtig für die Entwicklung der räumlichen Einstellungskraft.

Lösungsmethoden. Bei der Lösung solcher Aufgaben sind gewöhnlich kombinatorische Beurteilungen sowie allgemeine Urteilsmethoden verwendbar. Die Verwendung der Methode der Invarianz ist anschaulicher, wenn man die gegebene Konfiguration mit entsprechender Färbung vervollkommnet. Die Interpretationsmethode ermöglicht die gegebene geometrisch kombinatorische Aufgabe als theoretische Aufgabe der abstrakten Graphen zu betrachten. Die Methode des extremalen Elements dient bei der Lösung von Beweisaufgaben, bei welchen der Beweis mit Hilfe von entgegengesetztem konstruiert wird. Um qualitative zahlenmässige Beurteilung durchzuführen, ist das bekannte Schubfachprinzip (Aigner, Ziegler, 2010) als wichtige Argumentation zu betrachten, das bei der Lösung verschiedener Beweisaufgaben dient.

Beispiele. Die Aufgaben über die Zusammenstellung von Figuren. Bei solchen Aufgaben muss man feststellen, um die Figur aus den gegebenen Blöckenarten zusammenstellen kann oder muss man feststellen, wie der Mass der entsprechenden Figur möglich ist. Um zu begründen, dass die entsprechende Figur nicht zusammenstellbar ist, lässt eine besondere Färbung (zum Beispiel, Schachbrettfärbung) bei dem Beweis die Invarianzmethode mit dem Schubfachprinzip kombinieren.

<u>1. Aufgabe.</u> Der Kubus besteht aus 27 Würfeln. Kann man die äussere Schicht mit den Blöcken ersetzen, dessen Dimension 1 x 1 x 2 ist?

Aus Blöcken zusammengestellten Figureneigenschaften. In die Aufgaben dieser Weise wird das Schubfachprinzip gebraucht, um die Anzahl der gesuchten Figuren mit speziellen Eigenschaften zu bewerten.

2. Aufgabe. Der Kubus mit der Dimension 3 x 3 x 3 ist aus 8 Blöcken zusammengestellt. Kann es vorkommen, dass alle Blöcke unterschiedliche Grösse des Oberflächen haben?

3. Aufgabe. Der Block mit der Dimension 1 x 2 x 2 besteht aus vier zusammengeklebten Einheitskuben. Aus solchen Blöcken ist ein Kubus zusammengestellt, dessen Dimension 20 x 20 x 20 Einheiten sind. Man muss beweisen, dass man den Kubus mit der Nadel so durchstechen kann, dass keiner von den gegebenen Blöcken durchgestochen wird.

Rundgangsaufgaben. Die Aufgaben über die dreidimensionale orthogonale Gitter sind seinem Wesen nach den Aufgaben über die Figuren gleichwertig, die aus Würfeln zusammengestellt sind. Zum Beispiel, beim Paralellepiped kann isomorph solche orthogonale gitterförmige Figur sein, wo jedem Würfel ein Gitterknoten entspricht, und zwei Knoten sind mit der Kante verbunden, wenn entsprechende Würfeln eine gemeinsame Fläche haben.

5. Aufgabe. Aus dem orthogonalen dreidimensionalen Gitter ist ein Turm geschnitten mit der Dimension 1 x 1 x n. Der beinhaltet 4(n + 1) Knoten und entsprechende rechtwinkelige Gitterkanten. Eine Ameise kriecht auf die Turmkanten. Jede Kante besucht sie wenigstens einmal. Wie lang wird der kürzeste Weg der Ameise sein, wenn man annimmt, dass sie alle Kanten begangen hat?

Bemerkung. Die Hauptfrage der Aufgabe ist – die Existenz der Eulertour (Lovasz, Pelikan, Vesztergombi, 2005). Der kürzeste Weg von Ameise wäre in dem Fall, wenn sie jede Kante einmal begehen konnte. Die Eulertour ist durchführbar, wenn es nicht mehr als zwei Knoten mit ungerader Anzahl von ausgehenden Kanten gäbe. Aber die untere und obere Turmfläche hat 8 Ecken, die miteinander verbunden sind. Das bedeutet, dass es einige Kanten gibt, die die Ameise wenigstens zweimal begehen wird. Die Route der Ameise wird 8n + 7 Kanten lang sein.

Die Aufgaben über die Färbung. Man kann verschiedene Aufgaben über die Färbung betrachten:

- Die Figur aus bemalten Blöcken zusammenstellen, wo jeder von Blöcken mit einer bestimmten Farbe bemalt werden kann oder die Befärbung der Oberfläche unterschiedliche Farben hat.
- Wie kann man die Figurenblöcke bemalen, damit die gestellten Bedingungen erfüllt werden.
- Welche Eigenschaften hat die Figur, wenn ihre Blöcke auf eigene Faust bemalt sind.

8. Aufgabe. Es ist ein orthogonales Gitter in die Form eines Kubus gegeben, das n^3 Knotenpunkte (wo $n > 1$) beinhaltet. Jeder Knotenpunkt

ist in einer von drei Farben gefärbt – rot, gelb oder grün. Man muss beweisen, dass man unter ihnen drei Punkte finden kann – rot, gelb und grün, die die Ecken des rechtwinkeligen Dreiecks definieren!

Bemerkung. Diese Aufgabe ist vom Typ Ramsey, bei welchen die Existenz einer speziellen Art von der Elementenstruktur beweisen kann (Andzans, Chakste, 1996). Die Lösungsidee ist die Gitterstrecken, die paralell den äusseren Kanten sind, zu betrachten. Auf einem von diesen Strecken sind wenigstens zwei Punkte unterschiedlicher Farbe. Betrachten wir die Ebenen, die perpendikulär dieser Strecke sind, und beide Punkte beinhalten. Dann können wir verschiedene Spezialfällen analysieren und die Behauptung beweisen.

9. Aufgabe. Der Kubus ist aus 27 Würfeln zusammengestellt. Einige Würfel sind gefärbt. Keine Kubenschicht beinhaltet 3 oder 4 solche bemalten Würfeln, die in dieser Schicht in die Ecken des orthogonal aufgestellten Rechtecks sich befinden. Welche ist die maximal mögliche auf diese Weise gefärbter Würfelanzahl? (Die Kubenschicht ist der Kubenkante paraleller Block mit der Dimension 1 x 3 x 3.)

Schluss. Aufgaben dieser Art sind für Schüler verschiedenes Alters geeignet. Natürlich, man muss die Stufe der Aufgabenkompliziertheit für jede Altersgruppe beachten. Mit Hilfe von speziellen Klötzchen kann man sich mit den Möglichkeiten von Blöcken- oder Kuboiden - Zusammenstellungen bekanntmachen. Eine andere Möglichkeit besteht bei der Benutzung entsprechender interaktiver Programmen die im Internet vorhanden sind. Die Aufgaben über räumliche Figuren kann man in Mathematikzirkeln und bei Mathematikwettbewerben lösen. Um verschiedene Konfigurationen zu forschen, kann man sie auch bei den wissenschaftlichen Arbeiten von Schülern benutzen, sowie auch beim Finden allgemeiner Formeln und bei der Ausarbeitung spezieller Algorythmen.

Literatur

Aigner, M., Ziegler, G. M. (2010). *Das Buch der Beweise.* Berlin: Springer – Verlag.

Andzans, A., Chakste, J., Larfelds, T., Ramana, L., Seile, M. (1996) *Videjas vertibas metode*. Riga: Macibu Gramata.

Lovasz, L., Pelikan, J., Vesztergombi, K. (2005). *Discrete Mathematik.* Berlin: Springer – Verlag.

Jaap's Puzle Page. Erhalten am März, 2010 von: http://www.jaapsch.net/puzzles/insanity.htm

Thorleif's SOMA Page. Erhalten am März, 2010 von: http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/FIGURES/FIGURES.HTM