

Markus VOGEL, Heidelberg, Andreas EICHLER, Freiburg

Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe I

Mit den Bildungsstandards, welche die Kultusministerkonferenz im Jahr 2003 beschlossen hat, wurde die Leitidee Daten und Zufall verbindlicher Inhalt des Mathematikunterrichts für alle Bundesländer. Im Unterschied zur internationalen stochastikdidaktischen Diskussion nahm der Datenaspekt im deutschen Mathematikunterricht bis dahin gegenüber der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur eine untergeordnete Rolle ein. Es stellt sich die Frage, wie die didaktische Schwerpunktverschiebung hin zu den Daten im Mathematikunterricht umgesetzt werden kann und wie Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung zu der einen Leitidee *Daten und Zufall* verknüpft werden können. Exemplarisch werden zentrale Beispiele und didaktische Überlegungen vorgestellt.

Inhalte der Leitidee Daten und Zufall

In den KMK-Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss aus dem Jahr 2003 (KMK, 2003) heißt es:

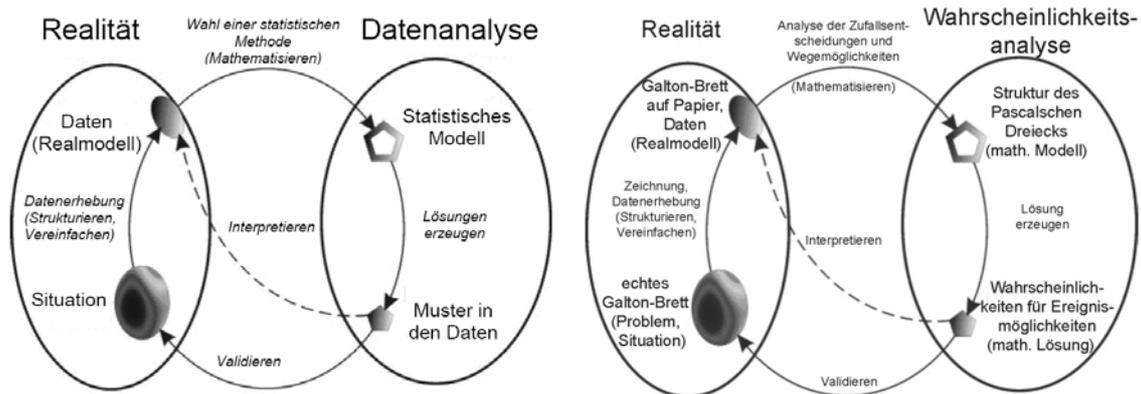
„Die Schülerinnen und Schüler

- werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,
- planen statistische Erhebungen,
- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),
- interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,
- reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,
- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.“

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es grundsätzlich darum geht, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, Fragen an empirische Phänomene ihrer erlebten Umwelt zu stellen und mit den elementaren mathematischen Mitteln der Sekundarstufe I zu beantworten. Die Daten sind der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgeordnet und der statistische Aspekt geht über das bloße Erstellen von Grafiken als Teil des Sachrechnens deutlich hinaus. Der Zufall wird ebenfalls empirisch erfahrbar über die phänomenologische Wahrnehmung und experimentelle Untersuchungen eingebunden. Das didaktische Muster der phänomenologisch verankerten Leitidee Daten und Zufall basiert paradigmatisch auf dem Begriff der Mathematical Literacy (Deutsches PISA-Konsortium, 2001) als Grundverständnis mathematischer Bildung. Dies führt direkt zur Leitidee Modellieren.

Modellieren als prozessbezogene Komponente

Da nahezu jede mathematische Modellierung (realer Situationen) mit der Analyse von Daten verbunden ist, lässt sich die Datenanalyse (fast idealtypisch) im Modellierungskreislauf beschreiben. Mittlerweile wurde dieser in verschiedener Form und verschiedenen Spezifikationen seit den Veröffentlichungen von TIMSS und PISA diskutiert.



Spezifiziert man den Modellierungskreislauf nach Förster (Eichler & Förster 2008) als stochastischen Modellierungskreislauf ergibt sich – egal, ob allgemein als Datenanalyse oder exemplifiziert am Galton-Brett als Wahrscheinlichkeitsanalyse (Eichler & Vogel 2009) betrachtet: Die Daten bilden die Informationen, die aus Beobachtung, Umfrage oder Experiment hervorgehen, als Kontextzahlen in einem Realmodell der Situation ab. Über Mathematisierungsprozesse des Visualisierens, Simulierens und Formalisierens wird ein mathematisches Modell erstellt, das die Grundlage für statistische Bewertungen oder wahrscheinlichkeitstheoretische Voraussagen bildet. Lösungen, die sich aus Berechnungen auf dieser mathematischen Modellgrundlage ergeben, bilden ein mathematisches Muster ab, das sich im Kontext der Realmodellebene (ggf. unter Hinzunahme neuer Daten) zu bewähren hat.

Charakterisierung von Aufgaben

Nimmt man den Anspruch des Modellierens als genuine prozessbezogene Komponente der Leitidee Daten und Zufall ernst, kann sich Stochastikunterricht keinesfalls in Hieb- und Stichaufgaben (Eichler & Vogel, 2009) der Wahrscheinlichkeitsrechnung erschöpfen. Dies ist z. B. bei der Berechnung einer Wahrscheinlichkeit der Fall, bei der aufgrund der gestellten Textaufgabe das enthaltene Modell der Binomialverteilung mitsamt der notwendigen Parameter geliefert wird, so dass die bloße Berechnung bleibt. Solche Rechenaufgaben sind notwendig, sie haben ihren Platz bei der innermathematischen Berechnung eines stochastischen Modells, allerdings erfüllen sie alleine nicht den inhaltlichen Anspruch, der sich mit der

Leitidee Daten und Zufall verbindet: Das Beantworten von echten Fragen der Schülerinnen und Schüler an die Realität. Dabei lassen sich drei Ebenen unterscheiden (vgl. Eichler & Vogel, 2009):

- Aufgaben zur „realen“ Realität. Hier geht es um die Beantwortung gesellschaftlich relevanter Fragen, wie z. B. „Ist der Ärzteprotest hinsichtlich des vermeintlich zu geringen Einkommens dieser Berufsgruppe gerechtfertigt?“
- Aufgaben zu konstruierten realen Situationen. Hier geht es um die Anwendung von stochastischen Methoden und Verfahrensweisen anhand leicht handhabbarer realer Fragestellungen, wie z. B. „Springen kleine Papierfrösche weiter als große Papierfrösche?“
- Aufgaben zu konstruierten Situationen. Hier geht es um das mathematische Verständnis stochastischer Begriffe und Verfahren, wie z. B. „Wie verändert sich der Median, wie das arithmetische Mittel bei Hinzunahme eines extrem großen Wertes?“

Bei allen Aufgaben geht es weniger um das Abarbeiten von Algorithmen, sondern um die Beantwortung von Schülerfragen mit den ihnen zur Verfügung stehenden elementarmathematischen Mitteln. Deren Reichweite soll geschöpft werden, um die Grundideen, auf denen nachfolgende stochastische Verfahren basieren, schon auf dieser Ebene heraustreten und im Sinne des Spiralprinzips (Bruner, 1973) bedeutsam werden zu lassen (z.B. *zählender Korrelationskoeffizient* (Eichler & Vogel, 2009) als Vorbereitung für den *Korrelationskoeffizient nach Pearson*).

Daten und Zufall

Mit der einfachen Schülerfrage „Ist das jetzt immer so?“ lässt sich die elementarstatistische Beurteilung aus einer vorausgehenden Datenanalyse in die prognostische Aussage eines mathematischen Modells wenden, das auf dem Wahrscheinlichkeitsbegriff basiert. So werden die Leitidee Daten und die Leitidee Zufall zu der *einen* Leitidee Daten und Zufall verknüpft. Dies lässt sich an einfachen Beispielen, wie der Frage nach der farbspezifischen Gleichbefüllung von Schokolinsen-Tüten, auch für die Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I entdecken: Wenn nach der Datenanalyse eines Klassensatzes von Schokolinsen sich die Vermutung der Gleichbefüllung ergibt, so lässt sich dies am Inhalt einer Modelltüte mit einem durchschnittlichen Farbanteil an der durchschnittlichen Gesamtzahl an Schokolinsen festmachen. In diesem mathematischen Modell kann mit Hieb- und Stichaufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mit computergestützten Simulationen gearbeitet werden (z. B. die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, höchstens 2 rote Linsen in einer Tüte zu erhalten). Übertragen auf die reale

Modellebene ergeben sich daraus Ansatzpunkte für die Fragen eines informellen Hypothesentests: Ab welcher Anzahl von roten Kugeln in einer Packung könnte/sollte man an dem Modell der Gleichbefüllung zweifeln? Welche Fehler könnte man begehen? So lassen sich bereits auf elementarmathematischer Ebene der Sekundarstufe I die Grundideen der Hypothesentests der gymnasialen Oberstufe veranschaulichen.

Aspekte statistischen Denkens

Didaktische Grundideen, die hinter der Leitidee Daten und Zufall stehen, kristallisieren sich in den fünf Aspekten statistischen Denkens nach Wild & Pfannkuch (1999), die bei Schülerinnen und Schülern auszubilden sind:

- Daten bilden die Grundlage eines „guten“, weil nicht ausschließlich subjektiven Erkenntnisgewinns (Voraussetzung sind gute Daten).
- Unterschiedliche Datendarstellungen eröffnen unterschiedliche Perspektiven.
- Einsicht in und Akzeptieren von statistischer Variabilität ist Gegenstand stochastischen Denkens.
- Datenanalyse besteht im Suchen, Identifizieren und Beschreiben von Mustern in den Daten. Sie folgt der Modellierungsgrundgleichung $\text{Daten} = \text{Trend} + \text{Zufall}$ (Eichler & Vogel, 2009).
- Statistik und realer Kontext stehen in einem sich gegenseitig bedingenden Verhältnis: Ergebnisse stochastischer Verfahren legitimieren sich durch ihre Bewährung im realen Kontext, Fragen der Realität lassen sich mit Mitteln der Statistik objektiv(er) beantworten.

Literatur

Bruner, J. S. (1973). *Der Prozess der Erziehung*. Düsseldorf: Schwann.

Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.). (2001). *Pisa 2000 -Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske+Budrich.

Eichler, A. & Förster, F. (2008). Ein Märchenspiel – Stochastische Modellbildung bei einem merkwürdigen Brettspiel. In A. Eichler & F. Förster (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Bd. 12 (S. 107-140). Hildesheim: Franzbecker.

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall*. Heidelberg: Vieweg.

KMK (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Online erhältlich unter (Stand 28.03.2010): „<http://www.kmk.org/bildung-schule/>“.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.