

Daniel WAGNER, Kiel

Entwicklung eines Modells zur Beschreibung mathematischer Kompetenz beim Übergang Schule-Hochschule

Übergänge im Bildungsverlauf stellen potenzielle Bruchstellen in der individuellen Lernbiographie von Jugendlichen dar. Insbesondere der Übergang von der Schule an die Hochschule bereitet jungen Studierenden durch die Veränderung des sozialen Umfeldes und der Lernkultur große Probleme. Nicht zuletzt in Studienfächern mit hohem Mathematikanteil haben die Studentinnen und Studenten zu Beginn ihres Studiums mit erheblichen Schwierigkeiten zu kämpfen. Belege hierfür sind einerseits hohe Studienabbruchquoten, andererseits häufige Beschwerden über mangelhafte Leistungen der Studentinnen und Studenten seitens der Dozentinnen und Dozenten sowie Beschwerden seitens der Studierenden selbst.

1. Stand der Forschung

Zum Stand der Forschung im Gebiet des Übergangs von der Schule in den Tertiärbereich gibt es unterschiedliche Forschungsperspektiven. Empirische Ergebnisse zu diesem Thema, vor allem zu den Ursachen für die genannten Probleme, sind nur in sehr geringem Maße vorhanden. Beispielsweise liegen Ergebnisse zum Studienabbruch vor (Schiefele, Streblov & Brinkmann, 2007), wobei die in diesem Zusammenhang betrachteten Determinanten nur sehr allgemein und nicht fachspezifisch für Studiengänge mit signifikantem Mathematikanteil untersucht wurden. Des Weiteren existieren Untersuchungen zur mathematischen Kompetenz Studierender: einerseits zur Permanenz mathematischer Basiskompetenzen bei Studentinnen und Studenten (Roppelt, 2009), andererseits zur mathematischen Kompetenz in gewissen Teilbereichen der höheren Mathematik, z.B. zum Begriffsverständnis in der Analysis (Tall, 1991) und zur Linearen Algebra (Fischer, 2006). Fischer (2006) legt in ihrer Studie den Probanden Aufgaben aus der Sekundarstufe I vor, die mit den Mitteln der Hochschulmathematik dargestellt und deshalb nicht wiedererkannt werden. Es treten also durch die veränderte Darstellung des im Prinzip bekannten Inhalts erhebliche Probleme beim Lösen dieser Aufgaben auf. Hier zeigt sich, dass beim Übergang ins Studium auftretende Probleme auch noch an anderer Stelle als auf inhaltlicher Ebene zu suchen sind.

2. Ziele

Die trotz vergleichbarer Inhalte (bezüglich der Sekundarstufe II) auftretenden Probleme im ersten Studiensemester sind Hinweise auf eine veränderte Art der Mathematik an der Hochschule. Dies manifestiert sich in einer for-

maleren Darstellung und in einem veränderten Charakter der Mathematik, weg von der beispiel- und kontextgeleiteten bzw. kalkülorientierten Schulmathematik, hin zu einer Wissenschaft, bei der zunächst der formal-axiomatische Aufbau einer Theorie im Mittelpunkt steht. Zur Identifizierung der Unterschiede in den Kompetenzanforderungen der Sekundarstufe II und des ersten Studiensemesters wird im Rahmen des vorliegenden Disserationsprojektes ein Kompetenzmodell erstellt. Dieses soll die gemeinsamen Inhalte der Sekundarstufe II und des ersten Studiensemesters im Bereich der Analysis umfassen und wird in zwei Schritten erstellt: Zunächst erfolgt die theoretische Fundierung, welche auf der Kombination zweier verschiedener Ansätze, nämlich der entwicklungs- und kognitionspsychologischen Perspektive und der philosophisch-mathematikdidaktischen Perspektive, in die im Wesentlichen die Analyse verschiedener Theorien zum *Advanced Mathematical Thinking* einfließt, basiert. Der zweite Schritt ist die empirische Validierung an einer geeigneten Stichprobe von Schülerinnen und Schülern bzw. Studienanfängerinnen und Studienanfängern. In seiner Konzeption soll das Modell an die *Länderübergreifenden Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss* im Fach Mathematik (KMK, 2003) anschlussfähig sein.

3. Entwicklung des Kompetenzmodells

Das gemeinsame Kompetenzmodell für die Sekundarstufe II und das erste Studiensemester ist ein normatives Strukturmodell mit drei Dimensionen, der Inhalts-, Prozess-, und Anspruchsdimension.

Die Inhaltsdimension setzt sich aus vier für die Analysis charakteristischen Leitideen zusammen. Diese sind: „Zahl und Struktur“, „Grenzwert und Approximation“, „Funktionaler Zusammenhang“ und „Messen“.

Die Prozessdimension ist eng angelehnt an die Handlungsdimension der *Bildungsstandards* (KMK, 2003). Im vorliegenden Modell setzt sich die Prozessdimension aus den sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Mathematisch argumentieren“, „Probleme mathematisch lösen“, „Mathematisch modellieren“, „Mathematische Darstellungen verwenden“, „mit Mathematik symbolisch, technisch und formal umgehen“ und „Mathematisch kommunizieren“ zusammen.

Zur Beschreibung und Einordnung der veränderten Art und Darstellung der Mathematik an der Universität wird ein zusätzliches Konstrukt benötigt, das man mit „Formalem Denken“ umschreiben kann. Dieses „Formale Denken“ stellt im vorliegenden Modell einen zusätzlichen Anforderungsbereich in der Anspruchsdimension dar, was im Einklang mit verschiedenen Theorien aus der Psychologie steht. Dort wird formales oder axiomatisches

Schließen stets als Endniveau einer hierarchisch angeordneten Stufenskala verstanden (z.B. Piaget, 1972; van Hiele, 1986).

Komponenten Formalen Denkens

Unter Zuhilfenahme verschiedener philosophisch-mathematikdidaktischer und entwicklungs- und kognitionspsychologischer Aspekte, lässt sich das Konstrukt „Formales Denken“ genauer beschreiben. Die einzelnen Komponenten sind:

Deduktion, d.h. Erkenntnisgewinn auf rein logischem Wege: Aus gegebenen Prämissen werden die notwendigen Schlüsse gezogen (Johnson-Laird, 1983). In diesem Zusammenhang spielt auch das Arbeiten in einem Axiomensystem (van Hiele, 1986) eine wichtige Rolle.

Umgang mit mathematischer Sprache im Sinne von Tall (1991). Dazu gehören der Umgang mit den Bausteinen mathematischer Theorie (Definitionen und Sätze), der Umgang mit Quantoren und das Verwenden einer strengen Aussagenlogik.

Loslösung von der Anschauung (van Hiele, 1986), d.h. es wird beispielsweise in einem Beweis nicht mit der Anschauung (z.B. anhand eines Graphen), sondern mit den mathematischen Eigenschaften des Objektes argumentiert.

Generalisierung, worunter Tall (1991) einerseits Prozesse, in denen Begriffe und Konzepte in einem allgemeineren Kontext betrachtet werden, andererseits Schlussfolgerungen vom Speziellen zum Allgemeinen, versteht.

Die *Abstraktion* (Tall, 1991) beinhaltet u.a. die Konstruktion mentaler Strukturen aus mathematischen Strukturen sowie die Klassifizierung von Objekten bezüglich ihrer Eigenschaften und Beziehungen zueinander.

Einordnung Formalen Denkens in die Kompetenzstruktur

Bei der Konstruktion des Modells wird von der Annahme ausgegangen, dass der Hauptunterschied in den Kompetenzanforderungen zwischen Sekundarstufe II und erstem Studiensemester darin besteht, bestimmte allgemeine Kompetenzen auf einem höheren Niveau, dem „Formalen Denken“, einzusetzen. Dies sind in erster Linie die Kompetenzen *Argumentieren*, *Problemlösen*, *Kommunizieren* und *mit Mathematik symbolisch, technisch und formal umgehen*. Insofern ist, wie oben bereits erwähnt, „Formales Denken“ als zusätzlicher Anforderungsbereich aufzufassen. Damit besteht die Anspruchsdimension des Modells aus den drei klassischen Komponenten der Bildungsstandards (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren) sowie dem „Formalen Denken“.

4. Methode und Design

Der zweite Schritt bei der Erstellung des Kompetenzmodells ist die empirische Validierung. Aufgrund des Umfangs der einzelnen Dimensionen ist es nicht möglich, das gesamte Modell zu validieren, sondern es wird lediglich eine Teilvalidierung vorgenommen (zu dieser Problematik vgl. auch Schecker & Parchmann, 2006). Diese Teilvalidierung des Modells beschränkt sich auf die Leitideen *Grenzwert* und *Funktionaler Zusammenhang* in den allgemeinen Kompetenzen *Argumentieren*, *Problemlösen*, *Kommunizieren* und *mit Mathematik symbolisch, technisch und formal umgehen*. Hierfür wurden insgesamt 30 Items entwickelt, die den zu validierenden Teil des Modells hinreichend gut abbilden. Dabei wird in der Anspruchsdimension lediglich unterschieden, ob ein Item Komponenten des „Formalen Denkens“ aufweist, oder nicht.

Die 30 Items werden als verschiedene, untereinander durch Ankeritems verlinkte, Testhefte an Schülerinnen und Schülern der 13. Jahrgangsstufe und an Studierenden des ersten oder zweiten Studienseesters getestet.

Als Ergebnis wird vor allem erwartet, dass sich der Bereich „Formales Denken“ von den drei anderen Anforderungsbereichen der Anspruchsdimension trennen lässt.

Literatur

- Fischer, A. (2006). *Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und –ergebnisse von Studierenden*. Dissertation. Dortmund: Universität Dortmund.
- Johnson-Laird, P. (1983). *Mental Models*. Cambridge: University Press.
- Kultusministerkonferenz (KMK) (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Bonn: KMK.
- Piaget, J. (1972). *Das mathematische Denken*. Stuttgart: Klett.
- Roppelt, A. (2009). Mathematische Grundkompetenzen von Studierenden. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium – Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht*. (S. 235-244) Münster: Waxmann.
- Schecker, H. & Parchmann, I. (2006). Modellierung naturwissenschaftlicher Kompetenz. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 12, 45-66.
- Schiefele, U., Streblow, L. & Brinkmann, J. (2007). Aussteigen oder Durchhalten – Was unterscheidet Studienabbrecher von anderen Studierenden? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, 39, 127-140.
- Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press.