SEBASTIAN WARTHA, Bielefeld

Aufbau von Grundvorstellungen: Ein Förderkonzept

„[Der] Modellierungskreislauf hat aber die Tücke, dass gerade der Prozess der Modellierung von der Sachebene auf die Ebene der Mathematik weiterhin unklar bleibt. Damit hat man aber didaktisch wenige Möglichkeiten, den „modellierenden Schülern" Hilfestellungen zukommen zu lassen. […] Die Mathematikdidaktik belässt die kognitive Modellierung von Sachkontexten als Blackbox und unterstellt eine kognitive Fähigkeit des Modellierens. Die Funktionsweise, d.h. die Transformation und damit der Lösungsprozess bleiben unklar." (Lorenz, 2009, S. 289 f.)

1. Grundvorstellungen

Wenn Modellierungsprozesse analysiert werden sollen, ist eine allgemeine unspezifische „Modellierungskompetenz" ein weder normativ noch deskriptiv in befriedigender Weise nutzbares Konstrukt. Es bietet sich hingegen an – dem Konzept der (sekundären) Grundvorstellungen nach vom Hofe (1995) und vom Hofe & Jordan (2009) folgend – diese Prozesse mit *bereichsspezifischen Übersetzungen* zu beschreiben. Diese können sowohl für sachanalytische Überlegungen (Welche Grundvorstellungen beschreiben einen mathematischen Inhalt und welche Übersetzungen werden hierüber ermöglicht bzw. gefordert?) als auch für die Dokumentation von individuellen Begriffskonstruktionen (Welche Grundvorstellung kann das Kind bei Übersetzungsaufgaben nutzen, welche Übersetzungsprozesse gelingen nicht?) herangezogen werden (vgl. Wartha, 2009).

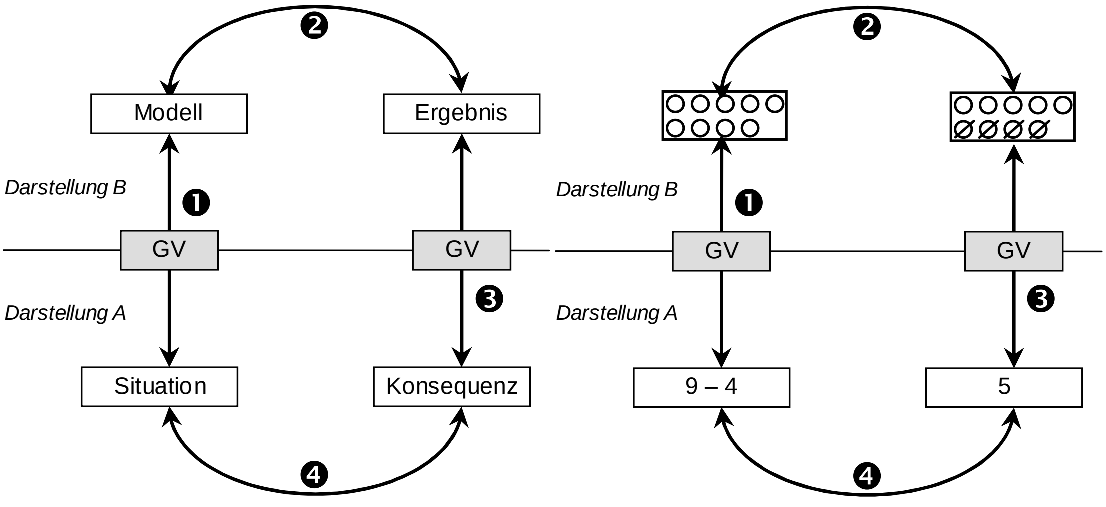

Abb. 1: Grundvorstellungskreislauf (links allgemein, rechts 9 − 4)

Da Grundvorstellungen nicht nur die Übersetzung zwischen „Realität und Mathematik" ermöglichen, bietet es sich an, den klassischen Modellierungskreislauf zu verallgemeinern, indem die Übersetzung zwischen verschiedenen Darstellungen (symbolisch – ikonisch, algebraisch – geometrisch, …) näher betrachtet wird (Abb. 1). Häufig können Aufgaben, die beispielsweise auf symbolischer Ebene ($9 - 4$) gestellt werden, ohne Übersetzungsprozesse innerhalb einer Darstellung gelöst werden (Abruf auswendig verfügbaren Wissens ❹). Ein Verständnis des mathematischen Inhalts wird erst dann unterstellt, wenn eine Lösung auch über die Aktivierung von Grundvorstellungen in einer anderen Darstellung möglich ist. Im Falle der Aufgabe $9 - 4$ bedeutet dies, dass eine Grundvorstellung zur Subtraktion (z. B. Wegnehmen) aktiviert wird (❶), anschließend auf ikonischer (oder enaktiver Ebene) von 9 Objekten 4 entfernt werden (❷) und über eine Grundvorstellung zur Kardinalzahl die verbleibende Menge als „5" auf die symbolische Ebene zurückübersetzt wird (❸). Während diese Beschreibung in Bezug auf die Aufgabe $9 - 4$ vergleichsweise trivial erscheint, kann der entsprechende Prozess beispielsweise für die Berechung des Terms $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ zur Untersuchung eines zu Grunde liegenden „Verständnisses" herangezogen werden. Obwohl die Berechnung vielen Lernenden auf rein symbolischer Ebene durch Regelanwendung gelingt, ist der Weg über die ikonische oder enaktive Darstellung über die Aktivierung von entsprechenden Grundvorstellungen (Bruch als Anteil, Finden einer gemeinsamen Unterteilung, Verfeinerung der Einteilung, Addieren als Zusammenfassen) vergleichsweise schwierig zu bewältigen.

In diesem Kontext werden Grundvorstellungen nicht nur zur Beschreibung von *Operationen* (Addieren als Hinzufügen oder Zusammenfassen, Dividieren als Auf- oder Verteilen) verstanden, sondern auch als mentale Modelle, die Übersetzungen zwischen symbolischer und nichtsymbolischer Ebene von *Zahlen* (Bruch als Anteil, natürliche Zahl als Menge) und *Strategien* (Schrittweise über den Zehner rechnen, finden einer gemeinsamen Unterteilung als „gemeinsamen Nenner bei Brüchen bilden").

Die Frage nach dem Vorhandensein, der Aktivierung und dem Aufbau mathematischer Grundvorstellungen kann daher zielführend für zentrale unterrichtliche Aktivitäten sein – auch für Planung und Umsetzung von Diagnose und Förderung bei problematischen Lernprozessen.

2. Aufbau von Grundvorstellungen

Der Aufbau von Grundvorstellungen soll über ein theoretisch abgesichertes und praktisch umsetzbares Konzept einfach kommunizierbar sein. In der gebotenen Kürze können hier die theoretischen Einflüsse nicht im Einzelnen diskutiert werden. Zentral sind Konzepte von Aebli (1980), die auf das Verinnerlichen von Handlungen abzielen. Im vorgestellten Modell soll dies nicht in Stufen geschehen, die generell beschritten werden, sondern in Phasen, die für jeden Lerninhalt gesondert durchlaufen werden. Der Sprache (Gal'perin und Leontjev) wird eine zentrale Rolle beim Aufbau von Wissen zugesprochen, ebenso der gezielten Auswahl von geeigneten Materialien (vgl. z. B. Lorenz (2009) und Schipper (2009)).

Der Aufbau von Grundvorstellungen wird über vier Phasen umgesetzt:

Phase (1): Das Kind handelt am geeigneten Material und versprachlicht diese Handlung – auch auf mathematischer Symbolebene.
Phase (2): Das Kind diktiert der Lehrkraft die Handlung am Material und kontrolliert, wie diese nach seinen Anweisungen durchgeführt wird.
Phase (3): Wie bei (2), nur dass die Handlung der Lehrkraft hinter einem Sichtschirm durchgeführt wird und das Kind gezwungen wird, sich nicht nur die Handlung vorzustellen, sondern diese auch so zu formulieren, dass sie tatsächlich durchgeführt werden kann.
Phase (4): Üben und Automatisieren auf symbolischer Ebene, ggf. Aktivierung der Handlung in der Vorstellung.

Diese vier Phasen werden in der Förderarbeit in Bezug auf verschiedene Grundvorstellungen durchlaufen. Der Prozess ist hierbei keineswegs stets linear von Phase (1) bis (4) zu verstehen. Auch wenn ein Kind Phase (4) bei einer Aufgabenstellung erreicht hat, so ist es häufig nötig, in anderen Situationen zum gleichen Inhalt noch einmal auf Phase (3) zurückzukommen. Es sollte jedoch keine Phase übersprungen werden – weder nach oben noch nach unten.

Die Leitfragen und Beobachtungsschwerpunkte in den Phasen bei der Förderarbeit sind:

Phase (1): Beobachtung und Bewertung der Schülerhandlung mit Hinblick auf die mentale Fortsetzbarkeit. Hierbei findet die Thematisierung und Erarbeitung eines gemeinsamen Vokabulars statt.

Phase (2): Nutzung des gemeinsamen Handlungsvokabulars und Thematisierung von Missverständnissen und Unklarheiten.

Phase (3): Aktivierung mentaler Handlungen durch ein gemeinsames Vokabular und eines „inneren Bildes" der Operationen. Dabei wird berücksichtigt, dass immer noch auf verschiedenen Darstellungsebenen operiert und die Handlungsebene nicht vorschnell verlassen wird, indem auf die hinter dem Sichtschirm tatsächlich durchgeführte Handlung fokussiert wird.

Phase (4): Es wird immer wieder der Rückbezug zu Phase (3) hergestellt, um eine Verselbstständigung der symbolischen Ebene zu vermeiden.

3. Ausblick

Das beschriebene Konzept wird nicht nur in universitären Lehrveranstaltungen und Schulpraktika vermittelt und umgesetzt, sondern auch in zahlreichen Fort- und Weiterbildungsmaßnahmen (Schul- und Schuladministrationsebene). Es zeigt sich, dass die Kommunikation über Lernprozesse durch die Verbindung des Vierphasenmodells und den Grundvorstellungen im Modellierungskreislauf erheblich erleichtert wird – sowohl um Lernumgebungen zu planen, als auch um individuelle Lernprozesse zu beschreiben und zu analysieren.

Es ist möglich, dass an Hand dieses Kernmodells weitere zentrale didaktische Fragen bzgl. der Förderarbeit diskutiert werden: Welche Grundvorstellungen – zu Zahlen, Operationen und Strategien – gilt es bezüglich eines mathematischen Inhalts aufzubauen? Welchen Kriterien muss Material genügen, um überhaupt „geeignet“ zu sein? Schließlich: Wie sieht die Übersetzung durch die Grundvorstellung eines mathematischen Inhalts auf konkreter Ebene aus – wie kann beispielsweise die Division von Brüchen an einem geeigneten Modell enaktiv durchgeführt werden?

Es ist geplant, die Frage zu evaluieren, ob sich über dieses Modell der Ausbildungsgrad von Grundvorstellungen empirisch erfassen lässt. Eine weitere Zielsetzung bzw. Konsequenz ist die Analyse, ob Fördermaßnahmen hierüber erfasst und dokumentiert werden können – sowohl auf individueller als auch auf vergleichender Ebene. Dem voraus gehen muss freilich die Erörterung, ob dieses Modell überhaupt den theoretischen und praktischen Ansprüchen genügen kann. Hierzu soll im vorliegenden Beitrag ein erster Schritt gegangen werden.

Literatur

Aebli, H. (1980). *Denken – das Ordnen des Tuns*. Stuttgart: Klett.

Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Hofe, R. vom & Jordan, A. (2009). Wissen vernetzen. *Mathematik lehren, 154*, 4 – 9.

Lorenz, J. H. (2009). Zur Relevanz des Repräsentationswechsels für das Zahlenverständnis und erfolgreiche Rechenleistungen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmid (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 230 - 247). Weinheim: Beltz.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel.

Wartha, S. (2009). Rechenstörungen in der Sekundarstufe: Die Bedeutung des Übergangs von der Grundschule zur weiterführenden Schule. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.): *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium*. (S. 157 - 180) Münster: Waxmann.