

Elisabeth LORENZ, Freydis VOGEL, Stefan UFER, Ingo KOLLAR, Kristina REISS, Frank FISCHER, München

## **Effekte heuristischer Lösungsbeispiele in kooperativen Settings auf mathematische Argumentationskompetenz bei Lehramtsstudierenden**

Der Übergang vom Sekundar- in den Tertiärbereich ist charakterisiert durch hohe Studienabbruchzahlen und niedrige Erfolgsquoten in den Anfängervorlesungen. Studienanfängern bereiten die Unterschiede in der mathematischen Arbeitsweise an der Universität, insbesondere mathematisches Argumentieren und Beweisen, häufig Probleme. Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz werden im Projekt ELK-Math<sup>1</sup> entwickelt und in einem Brückenkurs Mathematik evaluiert. Dabei konzentrieren wir uns auf kooperative Lernumgebungen, in denen selbstgesteuertes Lernen im Vordergrund steht.

Mathematische Argumentationskompetenz soll im Folgenden verstanden werden als die Fähigkeit und Bereitschaft individuell und kooperativ eine mathematische Aussage zu generieren und zu evaluieren, nach adäquaten Argumenten für und gegen diese Aussage zu suchen und schrittweise zu einem Beweis zusammenzuführen (Lorenz et al., 2011). In Anlehnung an ein Kompetenzmodell zum Beweisen in der Geometrie (Reiss et al., 2006) unterscheiden wir zwei Aspekte: Schematische Argumentationen beziehen sich auf die Anwendung von Regeln und Definitionen in einfachen Problemsituationen. Komplexe Argumentationen werden bei Beweisaufgaben gefordert, wenn eine kohärente Folge deduktiver Argumente gebildet werden soll. Dieser Aspekt enthält auch offene Argumentationsaufgaben, in denen eine mathematische Vermutung zunächst evaluiert werden muss.

### **Kooperative Lernumgebungen zur Förderung komplexer Fähigkeiten**

Heuristische Lösungsbeispiele stellen nicht nur eine Problemstellung und die Lösung dar, sondern auch eine realistische Lösungsprozedur. Die einzelnen Schritte werden durch ein Prozessmodell strukturiert und zusätzlich durch heuristische Strategien ergänzt (Reiss & Renkl, 2002). Da unser Arbeitsgedächtnis nur über eine begrenzte Kapazität verfügt, können sich Lerner bei der Bearbeitung von heuristischen Lösungsbeispielen auf die relevanten Inhalte, insbesondere die dargestellte Vorgehensweise und die verwendeten Strategien konzentrieren und in ähnlichen Situationen abru-

---

<sup>1</sup> Das Projekt wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert (Förderkennzeichen: RE 1247/9-1).

fen. Studien zum Beweisen in der Geometrie belegen positive Effekte der heuristischen Lösungsbeispiele (Reiss et al., 2006).

Eine ähnliche Unterstützungsmaßnahme zur Förderung komplexer Fähigkeiten sind prozessgestützte Lösungsbeispiele. Diese enthalten zusätzlich zu einem klassischen produktorientierten Lösungsbeispiel, prozessbezogene Informationen (van Gog, Paas, & van Merriënboer, 2006). Im Unterschied zu heuristischen Lösungsbeispielen sind die prozessbezogenen Informationen jedoch nur auf einen eingeschränkten Bereich anwendbar. Außerdem wird das Prozessmodell nicht implizit dargestellt, sondern expliziert. Studien aus dem Bereich der Physik und Rechtslehre konnten positive Effekte der prozessgestützten Lösungsbeispiele feststellen. Leitende Fragen haben nur teilweise eine positive Wirkung gezeigt. (van Gog et al., 2006; Nadolski, Kirschner, & van Merriënboer, 2006).

Beide Arten von Lösungsbeispielen sind bisher im Wesentlichen in Einzel- lernumgebungen evaluiert worden. Kooperative Lernumgebungen stellen andere Anforderungen. Damit sie effektiv sind, muss die Einsparung an Ressourcen des Arbeitsgedächtnisses, die durch die Inhaltsverteilung auf die einzelnen Gruppenmitglieder entsteht größer sein, als die Ressourcen, die für eine Kommunikation dieser Inhalte aufgewendet werden müssen (Kirschner, Paas, Kirschner, & Janssen, 2011). Die Autoren haben in einer ersten Untersuchung festgestellt, dass in kooperativen Lernumgebungen Problemlösen effektiver war, als die Bearbeitung eines Lösungsbeispiels.

Ein anderer Ansatz zur Förderung komplexer Fähigkeiten ist Problemlösen was in der Mathematik immer wieder betont und mit der Mathematik verbunden wird. Da Problemlösebedingungen oft sehr unterschiedlich gestaltet sind, beschränken wir uns im Folgenden auf problembasiertes Lernen. Im Zentrum steht dabei die kooperative, selbstgesteuerte Arbeit an einem authentischen Problem unter Entwicklung relevanter Problemlösefähigkeiten mit Hilfe eines Moderators, in Form eines Lehrers, Tutors oder computerbasierter Unterstützung (Hmelo-Silver, 2004). Positive Effekte auf die Aneignung von Problemlösefähigkeiten konnten von Dochy et al. (2003) bestätigt werden, wobei problembasiertes Lernen meist mit herkömmlichem Unterricht verglichen wird.

Zusammenfassend ist sowohl die Bearbeitung von Lösungsbeispielen, als auch problembasiertes Lernen zur Förderung komplexer Fähigkeiten geeignet. Neben einer Diskussion der Effektivität einer Instruktionsmaßnahme, sind auch die Integration sowie die Frage nach einer angemessenen Variation von Lösungsschritten in problembasierten Lernumgebungen interessant. Nach Renkl, Hilbert und Schworm (2009) können Lösungsschritte auf drei Ebenen vorgegeben sein. In Bezug auf eine mathematische Argu-

mentationsaufgabe kann das so aussehen: Die inhaltliche Ebene enthält z.B. relevante Sätze, Definitionen, Regeln oder Beispiele und deren Eigenschaften. Die allgemeine Lernebene umfasst Konzepte und Prinzipien von Argumenten und Beweisen in der Mathematik. Heuristiken zur Konstruktion von Beweisen sind der strategischen Ebene zuzuordnen.

### **Forschungsfragen**

Die Hauptfragestellung betrifft die Wirksamkeit variierender Unterstützung durch Lösungsschritte zur Förderung schematischer bzw. komplexer Argumentationsfähigkeiten. Aufgrund der ersten Ergebnisse von Kirschner et al. (2011) wird angenommen, dass Studienanfänger in kooperativen Settings am meisten profitieren, wenn sie selbstständig lernen und wenig extern unterstützt werden. Eine weitere Frage betrifft die Adaptierbarkeit von Lösungsschritten. Gerade für leistungsstarke Lerner wird vermutet, dass die selbstständige Wahl von Lösungsschritten effektiver ist als eine fixe Vorgabe. Zusätzlich werden kognitive Voraussetzungen als wichtige Einflussgröße in der Lösungsbeispielforschung berücksichtigt.

### **Studiendesign und Ergebnisse**

In einer ersten Studie wurde ein 2x2 Design eingesetzt mit den Faktoren *Schulerfolg* als Prädiktor für kognitive Voraussetzungen und *Vorgabe von Lösungsschritten*. Keine Vorgabe von Lösungsschritten wurde in einer Problemlösebedingung und die Vorgabe von Lösungsschritten auf drei Ebenen wurde durch heuristische Lösungsbeispiele realisiert. Um eine fokussierte Diskussion anzuregen, variieren Lösungsbeispiele zweier Lernpartner auf der strategischen Ebene mit zusätzlichen Selbsterklärungsprompts auf derselben Ebene. Die Lerner arbeiteten in der Problemlöse- oder heuristischen Lösungsbeispielbedingung dreimal je 45 min. an einer Argumentationsaufgabe aus der Teilbarkeitslehre, implementiert in computergestützten Lernumgebungen während eines Brückenkurses. Zur Messung mathematischer Argumentationskompetenz wurde ein Vor- und Nachtest auf Basis der beschriebenen Aspekte der Beweiskompetenz entwickelt.

Eine Kovarianzanalyse mit den unabhängigen Variablen Schulerfolg und Vorgabe von Lösungsschritten sowie den Vortestwerten als Kovariate ergab folgendes Ergebnis: Für schematische Argumentationen war die Bearbeitung heuristischer Lösungsbeispiele effektiver als Problemlösen. Für komplexe Argumentationen jedoch ist für leistungsschwache Lerner die Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen am wenigsten effektiv.

Auf Grundlage der Ergebnisse von Studie I wurde die Lernumgebung heuristische Lösungsbeispiele in Studie II angepasst. Da der Vergleich von

Strategien insbesondere für schwache Lerner eine zusätzliche Komplexität darstellt, variierten in den angepassten Lösungsbeispielen nur die Selbsterklärungsprompts. Eine weitere Lernumgebung wurde eingesetzt, die lediglich prozessgestützte Hinweise auf der strategischen Ebene einsetzt, ähnlich zu den leitenden Fragen bei Nadolski et al. (2006). Die Lernumgebung ohne Lösungsschritte wurde beibehalten. Zusätzlich konnten in einer Gruppe die Lerner selbst entscheiden, wie viel Unterstützung sie wünschen.

## Zusammenfassung und Ausblick

In einer ersten Studie konnten die Ergebnisse von Kirschner et al. (2011) nicht repliziert werden. Heuristische Lösungsbeispiele waren für den Erwerb schematischer Argumentationsfähigkeiten effektiver als Problemlösen. Für komplexe Argumentationsfähigkeiten waren jedoch für leistungsschwache Lerner die eingesetzten heuristischen Lösungsbeispiele am wenigsten geeignet. Dies zeigt die Notwendigkeit detaillierter Analysen und kontinuierlicher Anpassungen der Lernumgebungen. Weitere Erkenntnisse werden aus den laufenden Auswertungen von Studie II erwartet.

## Literatur

- Dochy, F., Segers, M., van den Bossche, P., & Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning: a meta-analysis. *Learning and Instruction, 13*, 533–568.
- Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychologist Review, 16*(3), 235–266.
- Kirschner, F., Paas, F., Kirschner, P. A., & Janssen, J. (2011). Differential effects of problem-solving demands on individual and collaborative learning outcomes. *Learning and Instruction, 21*, 587–599.
- Lorenz, E., Vogel, F., Fischer, F., Kollar, I., Reiss, K., & Ufer, S. (2011). ELK-Math: Effekte von inhaltsübergreifenden und inhaltspezifischen Ansätzen zur Förderung math. Argumentationskompetenz von Lehramtsstudierenden. In *BzMU* (S.559–562).
- Nadolski, R. J., Kirschner, P. A., & van Merriënboer, J. (2006). Process support in learning tasks for acquiring complex cognitive skills in the domain of law. *Learning and Instruction, 16*, 266–278.
- Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(1), 29–35.
- Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 194–208). Münster: Waxmann.
- Renkl, A., Hilbert, T., & Schworm, S. (2009). Example-Based Learning in Heuristic Domains: A Cognitive Load Theory Account. *Educ. Psychologist Rev., 21*, 67–78.
- van Gog, T., Paas, F., & van Merriënboer, J. (2006). Effects of process-oriented worked examples on troubleshooting transfer performance. *Learning and Instruction, 16*, 154–164.