

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Kirsten WINKEL, Ludwigsburg

## **Umgang mit vielfältigen Repräsentationen beim Bruchrechnen - Kompetenzen von Lernenden und professionelles Wissen von Mathematiklehrkräften**

Repräsentationen spielen eine Schlüsselrolle für mathematisches Verständnis, denn mathematische Objekte selbst sind nicht direkt zugänglich, so dass man sich nur unter Verwendung von Repräsentationen mit ihnen befassen kann (Duval, 2006). In der Regel reicht auch eine einzige Repräsentation für ein mathematisches Objekt nicht aus, weil sie nicht alle Eigenschaften direkt sichtbar machen kann, sondern nur gewisse Aspekte betont. Die Integration mehrerer Repräsentationen eines Objekts ist also nötig, um eine angemessene Begriffsvorstellung zu entwickeln (z.B. Ainsworth, 2006; Tall, 1988). Folglich ist die Fähigkeit, ein mathematisches Objekt hinter seinen verschiedenen Repräsentationen erkennen und flexibel mit ihnen umgehen zu können, ein Schlüssel für erfolgreiches mathematisches Denken und Problemlösen (z.B. Lesh, Post & Behr, 1987; Ainsworth, 2006). Diese Erkenntnis wird nicht zuletzt auch in die KMK-Bildungsstandards zum Ausdruck gebracht: *Mathematische Darstellungen verwenden* stellt eine von sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen dar und es wird dabei explizit das Erkennen von Beziehungen zwischen Darstellungsformen und das Wechseln zwischen ihnen betont (KMK, 2004). Insbesondere in Bezug auf den Inhaltsbereich der Bruchrechnung besteht weitgehend Konsens im Hinblick auf die große Bedeutung des Nutzens vielfältiger Repräsentationen und der Reflexion ihrer Zusammenhänge (z.B. Ball, 1993). Es ist daher anzunehmen, dass das Bewusstsein der Bedeutung des Nutzens vielfältiger Repräsentationen einen maßgeblichen Einfluss hat auf die Fähigkeit von Lehrkräften, begrifflich reichhaltige und kognitiv aktivierende Lerngelegenheiten zu schaffen. Vielfältige Repräsentationen sind jedoch nicht per se lernfördernd, sondern können im Gegenteil das Lernen sogar behindern: Die Integration verschiedener Repräsentationen und das Wechseln zwischen ihnen sind für Lernende sehr anspruchsvoll und stellen nicht selten eine Verständnishürde dar (Ainsworth, 2006; Duval, 2006). Der flexible Umgang mit Repräsentationen muss im Unterricht also bewusst trainiert und reflektiert werden (Sjuts, 2002).

Das Forschungsinteresse des Projekts La viDa-M bezieht sich daher auf Kompetenzen von Lernenden im Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Bereich „Brüche“, auf mögliche Einflussgrößen auf diese Kompetenzen und auf Möglichkeiten zur Förderung derselben. Im Fokus der ersten Projektphase stehen insbesondere der Entwurf und die empirische Re-

konstruktion eines Kompetenzmodells für Lernende und die Untersuchung möglicher Zusammenhänge dieser Kompetenz mit Sichtweisen der Lehrkräfte der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Mathematikunterricht.

In den hier berichteten ersten Auswertungen standen die folgenden Forschungsfragen im Mittelpunkt:

- Können Kompetenzen des Umgangs mit Darstellungen im Inhaltsbereich „Brüche“ hierarchisch anhand einer Rasch-Modellierung beschrieben werden?
- Gibt es Zusammenhänge zwischen inhaltsbereichsspezifischen Sichtweisen der Lehrkräfte zum Gestalten des Unterrichts zu Brüchen und den Klassenmittelwerten der Kompetenzscores der Lernenden?

### **Untersuchungsdesign und Stichprobe**

Die Stichprobe der Studie umfasst 29 sechste Klassen an Gymnasien in Baden-Württemberg (N = 675 Schülerinnen und Schüler) zusammen mit ihren Mathematiklehrkräften. Für die Untersuchung von professionellem Wissen und Sichtweisen der Lehrkräfte zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Mathematikunterricht konnte auf ein bereits erprobtes Befragungs- bzw. Testinstrument zurückgegriffen werden (vgl. Dreher, Kuntze & Lerman, 2012). Zur inhaltsbereichsspezifischen Kompetenzmessung wurde auf Grundlage eines theoretisch konzipierten Kompetenzmodells ein Test für Lernende zum flexiblen Umgang mit Repräsentationen im Bereich „Brüche“ entwickelt. Die Schüler(innen) bearbeiteten diesen papierbasierten Test im Rahmen einer Schulstunde unter Aufsicht eines Mitglieds des Projektteams in Einzelarbeit. Die Paper-and-Pencil-Befragung der Lehrkräfte wurde in der Regel ebenfalls im Rahmen des Schulbesuchs durchgeführt. Der Lehrer(innen)-Fragebogen besteht aus mehreren Teilen, die unterschiedliche Komponenten professionellen Wissens zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Mathematikunterricht in den Blick nehmen. Das heißt, es wird einerseits auf spezifisches fachdidaktisches Wissen und auch auf entsprechendes Fachwissen abgezielt, andererseits beinhaltet der Fragebogen aber auch Abschnitte, die eher auf Sichtweisen und Überzeugungen der Lehrkräfte fokussieren. Für die inhaltspezifischen Teile wurde dabei entsprechend des Schülertests der Inhaltsbereich „Brüche“ gewählt. An dieser Stelle wird ein besonderes Augenmerk auf Sichtweisen der Lehrkräfte zum Nutzen vielfältiger Repräsentationen in diesem Inhaltsbereich gelegt, weshalb ein einschlägiger Fragebogenteil im Folgenden et-

was genauer vorgestellt wird (vgl. Dreher, Kuntze & Lerman, 2012). Dieser Fragebogenteil im Multiple-Choice-Format basiert auf acht Skalen, die sich im Wesentlichen im Umfeld der beiden Fragen bewegen, inwiefern man beim Gestalten des Bruchrechnenunterrichts möglichst vielfältige Repräsentationen einsetzen sollte oder eher nicht und inwiefern man bildliche Repräsentationen für Brüche konsequent bis zum Ende der Unterrichtseinheit oder eher nur für die Einführung verwenden sollte.

Beispielitems für zwei der acht Skalen, nämlich die Skalen „*vielfältige Darstellungen für das Fördern von Verständnis*“ und „*Kontinuierliches Nutzen bildlicher Darstellungen*“ sind:

- “Für das Verständnis von Bruchzahlen ist es notwendig, im Unterricht viele verschiedene Darstellungen zu verwenden”(vielfältige Darstellungen für das Fördern von Verständnis)
- „Damit Bruchrechenregeln nachhaltig gelernt werden, muss man aufpassen, dass man das Nutzen bildlicher Darstellungen im Laufe der Unterrichtseinheit nicht abbricht.“ (Kontinuierliches Nutzen bildlicher Darstellungen)

Der Kompetenztest für Lernende zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen und Darstellungswechseln im Inhaltsbereich „Brüche“ besteht aus 12 Items (4 geschlossene, 8 offene Aufgaben), wobei eines der Multiple-Choice-Items ausgeschlossen werden musste, da bei diesem Item auch eine Fehlvorstellung zur korrekten Beantwortung des Items führen konnte. Die Antworten der Schüler und Schülerinnen wurden für jedes Item mit 1 (richtig), bzw. 0 (falsch) kodiert.

### **Erste Ergebnisse im Überblick**

Im Hinblick auf unser Forschungsinteresse bezüglich der Untersuchung von Kompetenzen von Lernenden im Umgang mit vielfältigen Darstellungen im Inhaltsbereich „Brüche“ haben erste Auswertungen gezeigt, dass das entwickelte Testinstrument raschskalierbar ist.

Auswertungen, die neben den gemessenen Schüler(innen)kompetenzen auch die erfassten Sichtweisen der entsprechenden Mathematiklehrkräfte in den Blick nehmen, geben bereits erste Hinweise auf bestehende Zusammenhänge: Der mit Hilfe des Kompetenztest ermittelten Durchschnittsscore einer Klasse korreliert mit mehreren der oben beschriebenen Skalen zu Sichtweisen der Lehrkräfte zum Nutzen vielfältiger Repräsentationen im Inhaltsbereich „Brüche“. So weist beispielsweise die Skala *Kontinuierli-*

ches Nutzen bildlicher Darstellungen eine signifikante Korrelation mit dem Klassendurchschnitt auf.

## **Diskussion und Ausblick**

Die Ergebnisse der Rasch-Analyse zeigen, dass die Kompetenz, vielfältige Repräsentationen im Inhaltsbereich „Brüche“ zu nutzen, eine hierarchische Struktur im Sinne des zugrundeliegenden theoretischen Modells aufweist. Die ersten Ergebnisse liefern darüber hinaus überraschend deutliche Hinweise auf Zusammenhänge von Kompetenzen von Lernenden im Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Bereich „Brüche“ mit Sichtweisen ihrer Mathematiklehrkräfte. Möglicherweise sind die vorgestellten und erhobenen Sichtweisen von Mathematiklehrkräften bezüglich der Unterrichtsgestaltung durch die Lehrkräfte sehr handlungsrelevant. Die erhobenen Daten bieten die Möglichkeit, inhaltsbereichsspezifischen Wahrnehmungen der Schülerinnen und Schüler zum Unterricht in die Untersuchungen einzubeziehen und zur Erklärung der Befunde heranzuziehen. Derartige Zusammenhänge können in der weiteren Projektarbeit auch durch eine mehrbenenanalytische Herangehensweise genauer untersucht werden.

## **Literatur**

- Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16, 183–198.
- Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twos: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, (Hrsg.), *Rational numbers: An integration of research* (S. 157-196). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Dreher, A., Kuntze, S., & Lerman, S. (2012). Pre-service teachers' views on using multiple representations in mathematics classrooms – an inter-cultural study. In Tso, T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 211-218). Taipei, Taiwan: PME.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Kultusministerkonferenz (KMK). (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. [retrieved on 10.01.2013 from <http://www.kmk.org/>].
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Sjuts, J. (2002). Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. Eine Fallstudie zur Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. *Journal für Mathematikdidaktik* 2/2002, S. 106-128.
- Tall, D. (1988). Concept Image and Concept Definition. In J. de Lange & M. Doorman (Eds). *Senior Secondary Mathematics Education*. (pp. 37-41) OW&OC Utrecht.