Henrike ALLMENDINGER, Siegen

Felix Klein und das Prinzip der Veranschaulichung – Zur Rolle der Anschauung in der Lehrerbildung

Felix Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* ist eine Vorlesungsreihe, die sich an fortgeschrittene Mathematikstudenten richtet mit dem Ziel, die viel beklagte doppelte Diskontinuität zu überwinden. Zur Entwicklung des höheren Standpunkts trägt bei, dass Klein unterschiedliche Perspektiven einnimmt – eine fachmathematische, eine mathematikhistorische, eine quasi mathematikdidaktische und eine mathematikphilosophische. Zum anderen wird der höhere Standpunkt durch Prinzipien der Vermittlung mathematischer Inhalte konstituiert, die sich als zentral für die Vorlesungskonzeption identifizieren lassen: die *innermathematische Vernetzung*, das *Prinzip der Veranschaulichung*, die *Anwendungsorientierung* und das *genetische Prinzip* (vgl. Allmendinger und Spies (2013)).

Besonders im Hinblick auf die späteren beruflichen Anforderungen räumt Klein dem Prinzip der Veranschaulichung einen großen Stellenwert ein:

„Der Lehrer muss sozusagen ein wenig Diplomat *sein, er muß auf die seelischen Vorgänge im Knaben Rücksicht nehmen, um sein Interesse packen zu können, und das wird ihm nur gelingen wenn er die Dinge in* anschaulich faßbarer Form *darbietet.“* (Klein 1908, S. 4)

Dieses Kleinsche Prinzip soll hier anhand eines typischen Beispiels der Vorlesung charakterisiert werden. Klein thematisiert (regelmäßige) Kettenbrüche. Jede positive reelle Zahl ω lässt sich folgendermaßen als Kettenbruch darstellen:

$$\omega = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \cdots}}, \qquad n_0, n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}.$$

Bei rationalem ω ist die Folge der n_i endlich; bei irrationalen Zahlen hingegen ist die Kettenbruchentwicklung „unbegrenzt fortsetzbar“ (Klein 1908, S. 46). Die Brüche, die entstehen, wenn man die Kette nach endlich vielen Schritten abbricht, ergeben besonders gute Näherungswerte:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \ \ldots$$

Unter allen Brüchen, deren Nenner nicht größer als q_r ist, liefert $\frac{p_r}{q_r}$ die beste Approximation von ω (vgl. Klein 1908, S. 46f). Zunächst verdeutlicht Klein dies am Beispiel der Kettenbruchentwicklung von π. Diese Art der Veranschaulichung mit Hilfe von prototypischen Beispielen – ohne den Anspruch, die Allgemeingültigkeit abzubilden – nutzt Klein an vielen Stellen. Insbesondere zeigt sich daran, dass Klein den Begriff der Anschauung über geometrische Darstellungen hinausgehend versteht:

„[...] muß man doch auch bei abstraktester Formulierung mit den Symbolen, mit denen man operiert, stets noch eine gewisse Anschauung verknüpfen, schon um sie nur immer wiedererkennen zu können, und sei es auch, daß man bloß an das Aussehen der Buchstaben denkt.“ (Klein 1908, S. 15)

Als weiteres Veranschaulichungsmittel zieht Klein eine geometrische Deutung heran: Man denke sich den ersten Quadranten eines Koordinatensystems mit einer Markierung an jeder Stelle mit ganzzahligen Koordinaten, einem sogenannten Punktegitter. Klein betrachtet nun statt der positiven reellen Zahl ω die Ursprungsgerade mit Steigung ω, die er als „Leitstrahl“ bezeichnet.

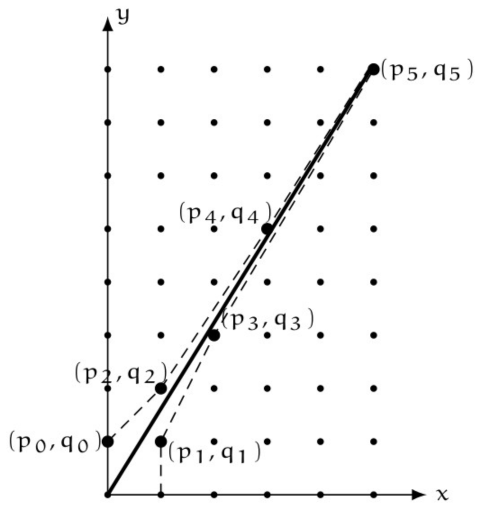

Abbildung 1: (Klein 1908, S. 48)

Das Punktegitter vergleicht Klein mit dem Anblick des Sternenhimmels, genauer der Milchstraße, und will durch diese Metapher hervorheben, wie bemerkenswert es ist, dass der Leitstrahl einer irrationalen Zahl keinen einzigen Punkt des Gitters trifft (vgl. Klein 1908, S. 48f). Dieser metaphorische Vergleich leistet damit mehr, als die geometrische Darstellung (vgl. Abb. 1) alleine, welche die dem Sachverhalt innewohnende Unendlichkeit nur andeuten kann.

In dieser geometrischen und metaphorisch ergänzten Deutung lässt sich nun eine Beziehung zu der Kettenbruchentwicklung herstellen, die Klein wieder mit Hilfe alltäglicher Assoziationen formuliert:

„Denken wir uns in alle ganzzahligen Punkte Stifte oder Stecknadeln gesteckt [...] und umschlingen wir den Stifthaufen rechts und links des ω-Strahls mit je einem Faden, den wir straff anziehen, so sind die Ecken der entstehenden, die beiden Punkthaufen begrenzenden, konvexen Fadenpolygone gerade unsere Punkte (p_r, q_r)*, welche die Zähler und Nenner der sukzessiven reduzierten Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von ω zu Koordinaten haben, und zwar gehören zu dem linken Polygon die Näherungsbrüche mit geradem, zu dem rechten die mit ungeradem Index.*“ (Klein 1908, S. 48)

Die geometrische Auslegung des Sachverhalts stellt dabei anschaulich dar, wie die gute Approximation von ω durch die Näherungswerte der Kettenbruchentwicklung erfolgt; die Rechenmethode, die der Kettenbruchentwicklung zugrunde liegt, wird naturgemäß nicht abgebildet.

Damit zeigen sich drei Facetten des Kleinschen Prinzips der Veranschaulichung mit jeweils unterschiedlicher Bedeutung für die Erfassung einer Sachlage: Anschauung anhand von *prototypischen Beispielen*, Anschauung durch *geometrische Deutung* und Anschauung mit Hilfe von *Metaphern*. Klein bemüht sich darüber hinaus (und an anderer Stelle) auch um eine von Anschauung geleitete Begriffsbildung und um anschauliche Beweise von Theoremen, die in weiten Teilen über den von ihm als elementarmathematisch bezeichneten Inhalt hinausgehen. Insgesamt verfolgt er damit das Ziel, den Dingen ein „ganz elementares, leicht faßliches Aussehen“ (Klein 1908, S. 241) zu geben.

Vor diesem Hintergrund lässt sich hinterfragen, inwiefern Felix Klein tatsächlich *Elementarmathematik von einem höheren Standpunkte aus* lehrt. Folgt man Kirsch, der das „Zugänglich-machen durch Wechseln des Mediums der Repräsentation“ (Kirsch 1977, S. 97) als einen zentralen Aspekt des Vereinfachens ansieht, muss m.E. die Kleinsche Vorlesungsreihe an vielen Stellen eher als *höhere Mathematik von einem elementaren Standpunkte aus* verstanden werden. Klein verfälscht dabei selbstverständlich die Inhalte nicht durch die von ihm gewählte anschauliche Darstellung und behält so die von Kirsch geforderte „Vollwertigkeit der Darstellungsmedien“ (Kirsch 1977, S. 99) bei.

Darüber hinaus wirkt aus heutiger Sicht die stark von Metaphern getragene Sprache der Vorlesung eher alltagssprachlich. Sie grenzt sich damit von der heute an Universitäten durch fachmathematisches Vokabular geprägten Sprache ab und scheint dadurch zugänglicher bzw. elementarer, da sie an die Erfahrungswelt der Lernenden anknüpft. Inwieweit eine solche Gegenüberstellung der Alltags- und Fachsprache als von Klein bewusst eingesetztes Veranschaulichungsmittel angesehen werden kann oder dem zu Kleins Zeit üblichen Sprachduktus geschuldet ist, bleibt noch zu klären.

Abschließend lassen sich aber auch umgekehrt einige Argumente für die Entwicklung eines *höheren Standpunktes zur Elementarmathematik* mit Hilfe des Prinzips der Veranschaulichung benennen, die somit Kleins Vorlesungstitel in gewissem Sinne rechtfertigen: Gerade durch die elementarisierte Darstellung hochschulmathematischer Inhalte wird eine Verbindung zur Schulmathematik offengelegt. Weiter wird durch verschiedene Repräsentationen und (insbesondere anschaulich-geometrische) Darstellungen ein beweglicher und facettenreicher Umgang mit Mathematik geschult, der als Element eines höheren Standpunktes, wie ihn beispielsweise Beutelspacher et al. (2011) propagieren, verstanden werden kann. Schließlich kann Veranschaulichung zur Reflexion und einem „tieferen Verständnis" eines bekannten Gegenstands führen, indem sie nach Kirsch neue Zugänge „auf der jeweils geeigneten Stufe der Repräsentation" (Kirsch 1977, S. 99) ermöglichen.

Literatur

Allmendinger, H., Spies, S. (2013): „Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt" – Das Zwischenstück in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* als Stilgeschichte und Kleinsches Programm . In: Rathgeb, M., Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G., Krömer, R.: Mathematik als Prozess. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011): Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Kirsch, A. (1977): Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: Didaktik der Mathematik, 5 (2), 87 – 101.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band I: Arithmetik, Algebra und Analysis. Berlin: Springer.