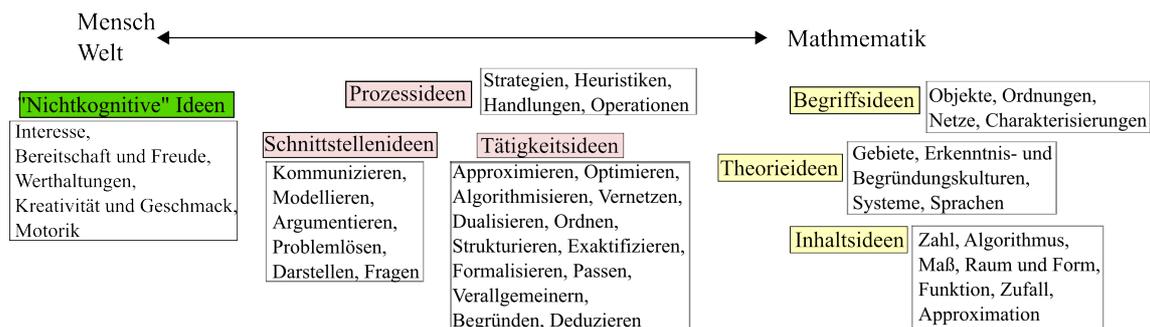


Marie-Christine VON DER BANK, Saarbrücken

## Fundamentale Ideen – (Weiter)Entwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung

### 1. Fundamentale Ideen im Spannungsverhältnis *Mensch/Welt* – *Mathematik*

Seit der deutschen Übersetzung des Buches „The Process of Education“ von BRUNER wird das Konzept der Fundamentalen Ideen erneut in der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Forschung diskutiert (vgl. von der Bank 2013). Auffällig ist dabei, dass Fundamentalen Ideen in fast allen Forschungsarbeiten eine große Bedeutung bei der lebensweltlichen Verankerung von Mathematik zukommt. BENDER und SCHREIBER sprechen von „Sinn“ (Bender/Schreiber 1985), SCHWEIGER von „Archetypen“ (Schweiger 2010) und HEYMANN von „Stiftung kultureller Kohärenz“ (Heymann 1995). Das so in den Fokus rückende Spannungsverhältnis *Mensch/Welt* – *Mathematik* kann durch den Ideenkatalog von LAMBERT in ganzer Breite ausgefüllt werden (Lambert 2012). Sein Ideensystem leitet sich zum einen aus schon bestehenden Ideenkatalogen ab und gliedert diese stärker in abstrakt(er)e Ideenkategorien wie Begriffs-, Theorie-, Prozess- und „Nichtkognitive“ Ideen und konkret(er)e Ideenkategorien wie Inhalts-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen (vgl. von der Bank 2013). Zum anderen schließt es mit den „Nichtkognitiven“ Ideen eine Auslassung im bisherigen Forschungsstand. Diese Ideenkategorien werden somit zur theoretischen Basis für die im Folgenden vorgestellte unterrichtliche Nutzung Fundamentaler Ideen.



Im genannten Spannungsverhältnis lassen sich die Begriffs-, Inhalts- und Theorieideen auf der Seite *Mathematik* verorten. Begriffs- und Inhaltsideen enthalten mathematische Inhalte verschiedener Gebiete und Ideen, die bei mathematischen Begriffen bedeutsam sind, wie beispielsweise die Objekte, die diese Begriffe definieren und deren Ordnungen zu (Begriffs-)Netzen. Diese beiden Ideenkategorien dienen also einer direkten Beschreibung und Ordnung von Mathematik. Gebiete und Erkenntnis- und Begründungskul-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1271–1274). Münster: WTM-Verlag

turen, die in den Theorieideen zusammengefasst sind, beschreiben hingegen nicht in erster Linie Inhalte von Mathematik sondern deren Rahmen. Sie enthalten wissenschaftshistorische Veränderungen und bildungspolitische Einflüsse auf Mathematik. Bspw. unterliegt es einem stets wandelbaren wissenschaftlichen Zeitgeist, bestimmte Inhalte zu Gebieten zusammenzufassen und einem bildungspolitischen Zeitgeist, aus den Gebieten der Mathematik jene für den Mathematikunterricht auszuwählen. Auch der geforderte Grad von Strenge bei Begriffsdefinitionen oder Beweisen kann sich verändern (Bsp. Strukturmathematik). Die Theorieideen liegen daher auf einer Meta-Ebene, die sowohl Begriffsideen als auch Inhaltsideen beeinflusst.

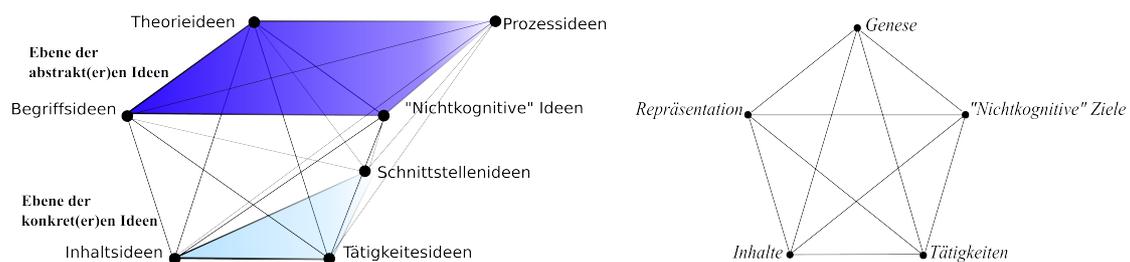
Bei den Theorieideen deutet sich schon der Einfluss der Seite *Mensch/Welt* auf die Seite *Mathematik* an. Das direkte Zusammenspiel dieser beiden Seiten wird in obigem Modell durch Prozess-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen beschrieben. Die abstrakt(er)en Prozessideen stehen dafür, dass (Nicht-)Mathematiker bei der Beschäftigung mit Mathematik typische Vorgehensweisen entwickeln, die sich in Strategien, Heuristiken, Handlungen und Operationen (als umkehrbar denkbare Handlungen) einteilen lassen. Schnittstellen- und Tätigkeitsideen umfassen den konkreten Umgang von Menschen mit Mathematik. Die Schnittstellenideen gehen dabei eher von der Mathematik aus, in dem Sinne, dass der Mensch ein konkretes mathematisches Problem löst und dazu modelliert, kommuniziert, fragt etc. Tätigkeitsideen sind (eher) umgekehrt gerichtet. Hier wirkt der Mensch auf Mathematik, indem er Operationen mit und auf mathematischen Inhalten (z. B. das Optimieren einer Zielfunktion) oder mit und auf Mathematik selbst (z. B. beim Formalisieren seines Sachverhaltes) ausführt.

Die „Nichtkognitiven“ Ideen können auf der Seite *Mensch/Welt* eingeordnet werden. Diese Ideenkategorie ist der Diskussion um Fundamentale Ideen zumindest in solch expliziter Form neu und bedarf daher einer Begründung. Zunächst ist unstrittig, dass Mathematik und der Prozess des Mathematiktreibens (ob als Wissenschaft oder im Unterricht) nicht nur aus kognitiven Komponenten besteht. Bspw. stellte HARDY 1940 in seinem Buch „A Mathematician's Apology“ heraus, dass zum Mathematiktreiben Kreativität und Geschmack - typische Ziele eines ästhetischen Faches - gehören. Er verglich damals Mathematiker mit Künstlern und Poeten, deren Aufgabe es sei, schöne Muster zu kreieren. Auch in (manchen) kompetenzorientierten Bildungsstandards spielen „Nichtkognitive“ Aspekte eine Rolle, wie ein Blick in die österreichischen Standards für die AHS Oberstufe zeigt. Dort findet sich der „Schöpferisch-kreative Aspekt“ von Mathematik, der Mathematik als Schule des Denkens,

die Phantasie anregt und Kreativität fördert, betont (BMUKK 2004, S. 1). BRUNER wusste ebenfalls um die Bedeutung „Nichtkognitiver“ Ideen. Er weist darauf hin, dass es zusätzlich zum inhaltlichen Erfassen auch bestimmter Einstellungen, Freude beim Lernen und Kreativität beim Entdecken von Zusammenhängen bedarf, um einen Lerngegenstand ganzheitlich zu verstehen (vgl. von der Bank 2013, S. 102). Sich BRUNER anschließend haben andere Fachwissenschaften die Wichtigkeit „Nichtkognitiver“ Ideen längst erkannt und diskutieren sie in ihren Theorien Fundamentaler Ideen mit. Bspw. enthält der Ideenkatalog von SCHWILL, der für die Informatikdidaktik prägend ist, die Idee „Teamarbeit“ (Schwill 1993). Weiter findet sich im Vorschlag für Bildungsstandards für das Fach Informatik der GESELLSCHAFT FÜR INFORMATIK der Inhaltsbereich „Informatik, Mensch und Gesellschaft“, der einen verantwortungsvollen Umgang mit digitalen Medien und Daten enthält und so auf bestimmte Werthaltungen abzielt (GI 2008). Eine Betonung von „Nichtkognitiven“ Ideen ist aus diesen (hier nur unvollständig aufzählbaren) Gründen auch in der Mathematikdidaktik angebracht.

## 2. Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie

Die so entstandene Theorie ist für eine direkte unterrichtliche Nutzung zu komplex. Sie bedarf einer Reduktion auf ihren unterrichtspragmatischen Kern, bei der die Frage nach den wesentlichen Aspekten und Funktionen Fundamentaler Ideen im Unterricht leitend ist. Eine Antwort auf diese Frage ist, ganz in Sinne der Forschungstradition Fundamentaler Ideen, dass Fundamentale Ideen auch im Mathematikunterricht Vernetzungen ermöglichen sollen u. a. zwischen den Knoten dieses (in der Abbildung rechts stehenden) Vernetzungspentagrammen.



Die Knoten des Vernetzungspentagrammen können aus den oben vorgestellten Ideenkategorien wie folgt hergeleitet werden (vgl. von der Bank 2013).

Die eher abstrakten Prozessideen konkretisieren sich im Unterricht als Tätigkeiten, beispielsweise als Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten (Heuristiken) oder gezieltes Termumformen (Strategien). Weiterhin sind, ausgehend vom eingennommenen pragmatischen Standpunkt, Schnittstellenideen und Tätigkeitsideen zusammenzufassen. So entsteht der Knoten „Tätigkeiten“ aus Prozess-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen.

Der Knoten „*Inhalte*“ umfasst die Inhaltsideen (als Konkretisierung mathematischer Gebiete) sowie inhaltliche Aspekte der Begriffsideen wie Objekte und deren Charakterisierung. Von den Begründungskulturen der Theorieideen gehören Beweise zum Knoten „*Inhalte*“.

Im Mathematikunterricht spielt der Umgang mit Inhalten und Begriffen eine wichtige Rolle. Gemeint sind die Verwendung unterschiedlicher Darstellungsformen von Objekten und Begriffen aber auch wichtige Aspekte von Begriffsbildung wie zum Beispiel die Unterscheidungen zwischen Vorstellung und Darstellung, zwischen kognitiven Präferenzen bzw. Darstellungsebenen. Diese Aspekte leiten sich aus den Inhalts- und Begriffsideen ab und werden im Knoten „*Repräsentation*“ zusammengefasst.

Um ein angemessenes Bild von Mathematik als Prozess und Produkt zu vermitteln, sollte an geeigneten Problemen und Lösungen auch auf deren Genese eingegangen werden. Die oben beschriebenen Einflüsse der Theorieideen auf Begriffs- und Inhaltsideen werden daher im Knoten „*Genese*“ für den Unterricht wirksam gemacht.

„Nichtkognitive“ Ideen enthalten im Wesentlichen „*Nichtkognitive*“ Ziele von Unterricht und bilden daher diesen Knoten.

Der so entstandene Vernetzungspentagraph kann von Lehrpersonen als (individuelle) didaktische Brille zur Analyse von Vernetzungsmöglichkeiten, die in Unterrichtsmaterialien (beispielsweise Schulbüchern) vorhanden oder ausgelassen sind, genutzt werden. Dabei dienen die Knoten dem Erfassen der im Material angesprochenen Fundamentalen Ideen. Die Kanten ergeben sich aus Vernetzungen, die im analysierten Material zwischen den Knoten des Vernetzungspentagraphen angeregt werden. Solche Analysen sind anhand verschiedener Schulbücher in (von der Bank 2014) demonstriert.

## Literatur

- von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler et al. (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Bericht über die 29. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Geometrie“ vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83-124). Hildesheim: Franzbecker. Darin zitiert: (Bender/Schreiber 1985), (BMUKK 2011), (Heymann 1995), (Lambert 2012), (Schweiger 2010), (Schwill 2004).
- von der Bank, M.-C. (2014). Vernetzung mit Diskreter Mathematik. Erscheint in U. Kortenkamp et al. (Hrsg.), *Diskrete Mathematik. Bericht über die 31. Arbeitskreistagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ vom 27. bis 29. September 2013 in Saarbrücken*. Hildesheim: Franzbecker. Darin zitiert (GI 2008).