

Christian DOHRMANN, Halle, Ana KUZLE, Paderborn

Auf der Suche nach Grundvorstellungen zum Winkel

Winkelmessung und Trigonometrie spielen eine wichtige Rolle im Geometrieunterricht der Sekundarstufe und im Alltag. Untersuchungen zur Entwicklung und Ausbildung des Winkelbegriffs zeigen, dass Schüler Schwierigkeiten beim Verständnis von Winkeln und im Denken haben. SchülerInnen besitzen keine adäquaten Vorstellungen zu Winkelgrößen und Winkelkonzepten (Krainer, 1989; Mitchelmore & White 2000). In einer eigenen Studie wurden ca. 300 SchülerInnen der Klassenstufen 5 bis 10 hinsichtlich ihrer allgemeinen Grundkenntnisse zum Thema Winkel und speziell zur ihren individuellen mathematischen Vorstellungen zur Winkelgröße 1° untersucht. Dabei konnten fundamentale Probleme auf Verständnis- und Vorstellungsebene identifiziert werden.

Über Vorstellungen und Begriffsbildung zum Winkel

Die systematische Begriffsentwicklung zum Winkel erfolgt in Deutschland nach dem Grundschulübergang. In der Grundschule lernen die SchülerInnen den rechten Winkel kennen, zu zeichnen, zu markieren und zu identifizieren. Ausgehend von 5 Schuljahren nach Grundschulübergang, in denen die Entwicklung von Grundkenntnissen und Grundverständnis stattfindet, sollten SchülerInnen ein solides Wissen und Konzeptverständnis zum Winkelbegriff besitzen. Dazu gehört das Identifizieren, Markieren, Vergleichen, Bezeichnen, Schätzen, Messen, Zeichnen von Winkeln und Winkelgrößen in der Ebene, Kenntnis über Winkelarten mit entsprechend ausgebildeter Fähigkeit, Winkel der Ebene korrekt zu klassifizieren. Ein interessanter Zusammenhang lies sich in unserer Untersuchung zum Identifizieren und Markieren von Winkeln feststellen. So konnten wir häufiger beobachten, dass SchülerInnen einen für sie plausiblen Zusammenhang zwischen der Existenz eines Winkels und der Winkelmarkierung sehen. Die SchülerInnen sind es gewohnt, dass Winkelmarkierungen durch einen Kreisbogen repräsentiert werden. In ihrer Vorstellung begrenzt der Kreisbogen den Winkel zwischen den beiden Schenkeln. Auf die Nachfrage, wo die SchülerInnen anhand dieser Darstellung den eingeschlossenen Winkel erkennen würden, deuteten nicht wenige auf den „vorderen, spitzen“ Abschnitt.

Dieses Beispiel macht bereits deutlich, dass hier ein Problem zwischen einem mathematischen Konzept und der verwendeten Repräsentation existiert. Ein wesentlicher Grund für diese Art von Problemen besteht durch den Fakt, dass mathematische Konzepte und Symbole von SchülerInnen häufig mit einer anderen Bedeutung bzw. Vorstellung verknüpft werden

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 301–304).
Münster: WTM-Verlag

und diese sich fundamental von der normativen Bedeutung unterscheidet. Das Verständnis bzw. die Vorstellung der SchülerInnen weicht von dem vom Lehrer zu vermittelnden Verständnis ab (vom Hofe, 1998).

Um diesem Problem entgegenzuwirken, soll es den SchülerInnen ermöglicht werden, zu bestimmten mathematischen Konzepten passende „mentale Modelle“ zu entwickeln. Diese Modelle bzw. Grundvorstellungen können interpretiert werden als „Elemente des Übergangs zwischen mathematischer und individueller Welt des Denkens“ (vom Hofe, 1998, S. 320). Grundvorstellungen können nicht direkt beobachtet werden. Sie entwickeln sich in einem konstruktiven, individuellen Prozess, der sich aus drei Aspekten konstituiert; dem *normativen* Aspekt (Grundidee), dem *deskriptiven* Aspekt (individuelle Vorstellung) und dem *konstruktiven* Aspekt (Brücke zwischen Grundidee und individueller Vorstellung).

Die *normativen Ideen* repräsentieren den mathematischen Kern. Beispielsweise kann eine Grundidee von einem 1° Winkel als „Öffnungsweite“ zwischen zwei Strahlen aufgefasst werden, welche dem 360. Teil des Kreisumfangs eines Vollkreises entspricht. Die Öffnungsweite eines 1° Winkels ist dabei so klein, dass sich die beiden Strahlen auf Papier nur sehr schwer voneinander unterscheiden lassen. Erst in einiger Entfernung vom Scheitelpunkt wird der Unterschied erkennbar. Aus Elemente der Mathematik, 2007 (G8): Der Winkel α (Abb. 1) hat die Größe 34° . Das bedeutet: Der Winkel α ist so groß, wie 34 Winkel von 1° zusammen ergeben. 34° ist ein Maß für die Öffnungsweite des Winkels.

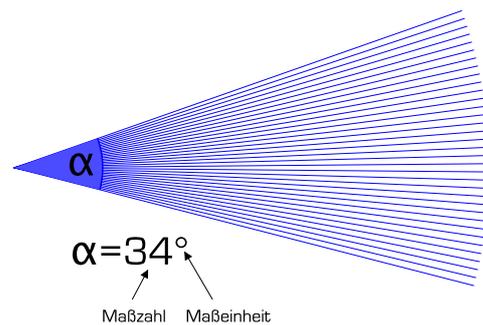


Abbildung 1: Winkel als Öffnungsweite

Der *deskriptive* Aspekt setzt den Fokus darauf, die aktuellen mathematischen Ideen und Vorstellungen der SchülerInnen zu beschreiben, welche mehr oder weniger von den zu vermittelnden mathematischen Ideen abweichen. Deshalb ist es im Lehr-Lern Kontext wichtig, dass der Lehrer eine adäquate Grundidee (normativ) vom 1° Winkel vermitteln kann und die SchülerInnen keine von der Grundidee losgelöste Vorstellung entwickeln, wie die, den 1° Winkel als Abstand (im euklidischen Sinne) zwischen zwei Strahlen zu verstehen, oder ihn lediglich durch „Spitze“ und „Winkelmarkierung“ zu identifizieren, wie eingangs dargestellt.

Die dritte Perspektive (*konstruktiver* Aspekt) setzt den Fokus auf die Weiterentwicklung bereits vorhandener Schülervorstellungen, indem die SchülerInnen mit neuen Lernsituationen konfrontiert werden, die es ihnen erlau-

ben, ihre individuellen Vorstellungen zu ändern, neu aufzubauen und zu verfeinern.

Untersuchung zu Schülervorstellungen zur Winkelgröße 1°

Unsere Untersuchung wurde an einem Montessori-Gymnasium in Sachsen durchgeführt. Für den ersten Teil der Untersuchung kam ein schriftliches Testinstrument für ca. 300 SchülerInnen der Klassenstufen 5 bis 10 zum Einsatz. Die Testitems wurden in Anlehnung an den sächsischen Lehrplan entwickelt. Der Fokus lag dabei auf zwei Aspekten: (1) Abfrage von innermathematischem Wissen zu stufenspezifischen, als auch stufenübergreifenden Winkel-Inhalten, sowie (2) Denkmustern und Vorstellungen zu Winkelkonzepten. Zudem nutzten wir mit dem „Anna-Brief“ (basierend auf einer Idee von von Prof. Dr. Thomas Jahnke) ein spezielles Item, um auf qualitativer Ebene Einsichten in die individuellen Denkmuster und Vorstellungen der SchülerInnen zur Winkelgröße 1° zu gewinnen.

Die Analyse der Anna-Brief Antworten zeigte ein sehr breites Spektrum an Vorstellungen zur Winkelgröße 1° . Zur Kategorisierung der Vorstellungen nutzten wir induktive und deduktive Methoden. Die „Abstands-Vorstellung“ konnten wir so ca. 10% der SchülerInnen (über allen untersuchten Klassenstufen hinweg) zuordnen. Diese Vorstellung wurde immer dann zugewiesen, wenn in den verbalen Beschreibungen das Wort „Abstand“ im Zusammenhang mit der euklidischen Abstandsmessung verwendet wurde (Beispiel: „ $1^\circ = 1\text{mm}$ “, oder „ 1° entspricht dem Abstand zwischen zwei Strahlen“). Um diese Erklärungen zu bestätigen und ein besseres Verständnis für die individuelle Abstands-Vorstellung zu gewinnen, wurden 9 SchülerInnen zusätzlich zum Test interviewt (zweiter Teil der Untersuchung). Im Interview wurden die SchülerInnen aufgefordert, den Anna-Brief zunächst verbal ohne Vorlage ihrer Lösung noch einmal zu beantworten. Anschließend wurde ein Anna-Video vorgeführt, in dem ein junges Mädchen (Anna, ca. 13 Jahre alt) beim Messen eines 1° Winkels beobachtet werden konnte.

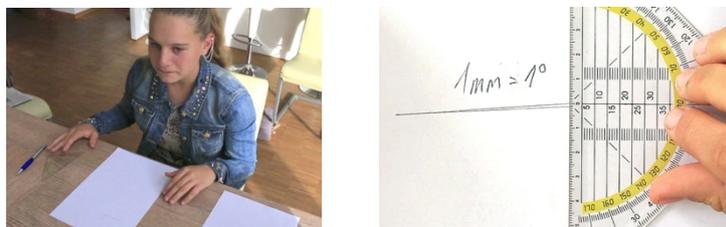


Abbildung 2: Anna-Video

Im Video benutzt Anna eine Messmethode, bei der der Abstand mit Hilfe der beiden Schenkeln zunächst mit dem Lineal am Geodreieck bestimmt und anschließend als Winkel gedeutet wird („1mm Abstand bedeu-

tet 1°). Den SchülerInnen wurde vor dem Abspielen des Videos gesagt, dass Anna diese Methode aufgrund ihrer Anna-Brief Antwort angewendet hat. Sie wurden anschließend dazu aufgefordert, das Gesehene zu kommentieren. Uns interessierte dabei, wie die SchülerInnen damit umgehen, wenn sie mit der Idee von Anna konfrontiert werden, welche implizit ihre eigene Idee aufgreift. Die Analyse der Interview-Antworten und Anna-Video Reaktionen wurde mit Hilfe der Conceptual Change Theorie (Posner et al., 1982) durchgeführt. Dabei konnte herausgestellt werden, ob die SchülerInnen das Gezeigte bspw. grundsätzlich ablehnen, oder es mit ihrem Verständnis übereinbringen und für plausibel oder als mathematisch korrekte Möglichkeit erachten. Interessanterweise lehnten nur 3 der 9 SchülerInnen die gezeigte Methode grundsätzlich ab. 2 SchülerInnen nahmen die Methode widerstandslos als korrekt an, 4 betrachteten sie als alternative Methode, da ihnen keine mathematische Gegenargumentation möglich war. Darüber hinaus konnten bereits durch den Test identifizierte kritische Schülervorstellungen weiter bestätigt werden, wie die Identifikation des Winkels durch Fixierung auf die Winkelmarkierung, oder die Bestimmung der Winkelgröße durch Fixierung auf den Abstands-Begriff.

Fazit

Die hier dargestellten Ergebnisse zeigen, dass die SchülerInnen heterogene und vom normativen Verständnis kritisch abweichende Vorstellungen zu Winkelgröße- und -konzepten besitzen. Die Begriffsentwicklung von Klasse 5 bis 10 zum Thema Winkel erzeugt nach wie vor große Schwierigkeiten im Denken. Als Konsequenz ist es den SchülerInnen nicht möglich, die Bedeutung eines 1° Winkels zu begreifen, sowie ihn mathematisch korrekt zu beschreiben und zu identifizieren. Verschiedene Fehlvorstellungen behindern den Aufbau adäquater Begriffsvorstellungen.

Literatur

- Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie: Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes*. Frankfurt a.M: Peter Lang.
- Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209–238.
- Posner, G., Strike, K., Hewson, P., & Gertzog, W. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66(2), 211–227.
- vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: Normative, descriptive and constructive aspects. In J. Kilpatrick and A. Sierpiska (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (Vol. 2, pp. 317 – 331). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.