Jürgen Roth, Judith Ames (Hrsg.)

# Beiträge zum Mathematikunterricht 2014

## Band 2

Beiträge zur 48. Jahrestagung der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 10. bis 14. März 2014 in Koblenz

**Tagungsleitung**
Engelbert Niehaus
Renate Rasch
Jürgen Roth
Hans-Stefan Siller
Wolfgang Zillmer

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

**Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnd.ddb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Barsdorf
www.winterwork.de


ISBN 978-3-942197-27-4

# Inhaltsverzeichnis

**Band 1** **Seite 1 bis Seite 698**




In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. i–xxx). Münster: WTM-Verlag

# 4 Beiträge zu den Einzel- und Sektionsvorträgen (Teil 2)

Silke LADEL, Saarbrücken, Ulrich KORTENKAMP, Halle

# „Ist das dann noch ein Zehner oder ist das dann ein Einer?“ – Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten

Ein flexibles Verständnis von Stellenwerten stellt die Grundlage für das Verständnis vieler weiterer mathematischer Inhalte, wie z.B. der schriftlichen Addition und Subtraktion oder der halbschriftlichen Division dar. In unserem Beitrag diskutieren wir die Ergebnisse einer qualitativen und quantitativen Studie mit Schülerinnen und Schülern der zweiten und dritten Klasse.

## 1. Kennzeichen unseres Zahlensystems

Große Anzahlen sind unstrukturiert nur schwer zu ermitteln. Die unserem Zahlensystem zugrunde liegende Strukturierung über das *fortgesetzte Bündeln* stellt eine große Hilfe dar. Im *g*-adischen System werden die Elemente einer Menge in Bündel der Größe *g* gebündelt, diese Bündel wieder in größere Bündel von je g Bündeln, diese dann wiederum, … Stets werden gleich große Bündel so lange wiederum gebündelt, bis nicht mehr ausreichend Elemente (oder Bündel) für ein neues Bündel zur Verfügung stehen. So werden üblicherweise 10 einzelne Objekte in einen „Zehner“, 10 Zehner in einen „Hunderter“, usf. gebündelt. Aus der Bündelungsgröße geht der Wert eines Bündels eindeutig hervor, so dass bei der Anzahlangabe die Reihenfolge der Bündel und somit die Stelle, an der ein Bündel steht, keine Rolle spielt. Gibt man nur noch die Anzahl an, so ergibt sich der Wert dann nicht mehr durch die Angabe der Bündelungseinheit, sondern durch die Position, an der eine Ziffer steht (Prinzip des Stellenwerts). Die Stellen einer Zahl sind aufsteigend von rechts nach links den Zehnerpotenzen zugeordnet. Den Zahlenwert einer Ziffer erhält man, indem man die Ziffern mit dem Wert ihrer Stelle multipliziert (*multiplikatives Prinzip*) und die einzelnen Werte anschließend addiert (*additives Prinzip*) (vgl. Ross 1989). Die Zahl 324 ergibt sich also aus $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. Das Bündeln stellt dabei eine notwendige Voraussetzung für die Beachtung von Stellenwerten dar, ist jedoch von diesem separiert zu betrachten. Betrachtet man unterschiedliche Zahldarstellungen, wie Zahlen unter Angabe von Bündelungseinheiten, Zahlwörter, Punkte oder Zahlen in der Stellenwerttafel und letztlich die Zahlen, so ist festzuhalten, dass die Stelle ausschließlich bei den Zahlen von Bedeutung ist, da alle anderen Darstellungen den Wert über andere Hilfsmittel angeben (z.B. mit E, Z, H als Angabe entweder in der Stellentafel oder als Suffix zur Zahl). Ausschließlich bei der – dann eindeutigen! – Zahldarstellung ist es auch notwendig, die Stellen einziffrig zu besetzen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 699–702). Münster: WTM-Verlag

Eine Angabe wie 35E 13Z 2H verdeutlicht die in anderen Darstellungen vorhandene Flexibilität. Je nach Zahl kann es viele Möglichkeiten geben diese darzustellen, z.B. 14E 7Z = 7Z 14E = 8Z 4E – in der Tat sind nur die Zahlen 0 bis 9 in jeder Darstellung eindeutig! Die Relevanz solcher flexiblen Darstellungen wird auch dadurch unterstrichen, dass solche Darstellungen im Rahmen einer Schulbuchanalyse zu jeder Zahldarstellungsart in Schulbüchern gefunden wurden.

## 2. Arbeitsmittel

Da das Prinzip des Stellenwerts zwar auf dem Prinzip der fortgesetzten Bündelung aufbaut, dennoch aber getrennt von ihm, als eigenständiges Prinzip zu betrachten ist, stellt sich die Frage, wie dieser Übergang für die Kinder verständnisvoll erarbeitet werden kann. Als geeignetes Arbeitsmittel zur Erarbeitung der fortgesetzten Bündelung bietet sich Mehrsystemmaterial an; für die Stellenwerte die Stellenwerttafel. Beim Übergang zwischen diesen Darstellungen werden häufig die Bündelungsmaterialien in die Stellenwerttafel gelegt. Das kann zum Einen zu mathematischen Fehlvorstellungen der Kinder führen und ist zum andern nach Anwendung des multiplikativen sowie additiven Prinzips (2 Platten in der H-Spalte, 3 Stangen in der Z-Spalte und 6 Würfel in der E-Spalte ergeben $200 \cdot 10^2 + 30 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 200306$) nicht korrekt. Da die Spalten in der Stellenwerttafel die Bündelgröße ersetzen, sollten sich diese schlussendlich nicht mehr im Volumen des Materials widerspiegeln. Eine Möglichkeit ist es über verschiedenfarbige Zählmarken, je nach Bündelungseinheit, in der Stellenwerttafel zu gleichartigen Zählmarken überzugehen.[1] Bei der Arbeit mit Material können Handlungen ganz unterschiedliche Bedeutung haben (Ladel & Kortenkamp 2013). So kann das Verschieben eines Plättchens in der Stellenwerttafel von einer Spalte in eine andere eine *Wertänderung* bedeuten, wenn das Plättchens erhalten bleibt und sich der Wert des Bündels ändert (z.B. wird aus einem Zehner ein Einer). Mit geeignetem (virtuellen) Material kann aber auch eine werterhaltende Handlung unterstützt werden, bei der ein Zehner-Plättchen automatisch in zehn Einer-Plättchen umgewandelt wird. In Interviews mit Schülerinnen und Schülern der zweiten Klasse fiel auf, dass diese bis auf eine Ausnahme von einer Wertänderung ausgingen, nur eine Schülerin fragte zurück, ob es sich dann noch um einen Zehner handle oder ob es nun ein Einer sei.

[1] Die Unterscheidung zwischen Objekt und Zeichen ist u.E. für Lehrkräfte und Schülerinnen und Schüler schwer zu erfassen. Stehen die beiden Platten in der H-Spalte als zwei Zeichen für jeweils einen Hunderter, so ist die Darstellung korrekt. Stehen sie für die Zahl zweihundert (also in der Objektsicht), so entsteht die Fehlinterpretation. Die von uns beobachteten „Mehrsystemfehler“ unterstreichen diese Schwierigkeit.

## 3. Untersuchung

Neben der Analyse aktueller Schulbücher wurde eine quantitative Untersuchung mit insgesamt 255 Drittklässlern aus Halle, Luxembourg und Saarbrücken, sowie eine qualitative Untersuchung mit 52 Kindern Ende der zweiten Klasse durchgeführt. In der qualitativen Untersuchung wurden den Kindern Vergleichsaufgaben zu Anzahlen, die über Bündelungen angegeben wurden, gestellt. Aufgrund der gegebenen Begründungen konnten vier Hauptfehlertypen ausgemacht werden: (1) es wird nicht gebündelt, wobei hier häufig die Zehnerziffer nicht beachtet wurde, z.B. 5Z 3E sind größer als 4Z 15E. (2) Das additive Prinzip wird nicht beachtet, z.B. 5Z 3E sind größer als 4Z 15 E, weil 5Z größer sind als 3E. (3) Bündelungseinheiten werden nicht beachtet, z.B. bei der Aufgabe 4Z 9E oder 1Z 29E als Antwort „29 ist am größten." Die Kinder haben hier das multiplikative Prinzip nicht angewandt, häufig in Kombination mit (2), der Nicht-Beachtung des additiven Prinzips. (4) Es wird nur die größte Bündelungseinheit betrachtet, z.B. 5Z sind größer als 4Z. Die Begründungen (1) und (4) sind dann korrekt, wenn alle Stellen einziffrig besetzt sind. D.h. hier besteht durchaus die Möglichkeit, dass die Kinder Strategien, die für „Zahlen" gelten, auf diese flexiblen Zahldarstellungen fälschlicher Weise übertragen haben. In der quantitativen Untersuchung bearbeiteten die Kinder einen dreiteiligen Arbeitsbogen. Für jeden Teil standen 10 Minuten zur Verfügung. Im ersten Teil sollten die Kinder Aufgaben der Art „Was ist mehr? Kreise ein! 34Z 14E oder 3H 7Z 3E?", sowie Aufgaben, bei denen sie aufgefordert wurden die Zahl aufzuschreiben, z.B. 7E 31Z, bearbeiten. Die Aufgaben unterschieden sich dabei in der Anzahl der zu tätigenden Bündelungen (0-2 Mal bündeln) und darin, ob nach dem Bündeln noch addiert werden musste (wie z.B. bei 5Z 23E = (5+2)Z 3E) oder nicht. Des Weiteren standen die Zahlen unter Angabe der Bündelungseinheiten nicht immer der Größe nach, sondern mussten teilweise erst noch in die korrekte Stellung gebracht werden. Nicht-besetzte Stellen bzw. Bündelungseinheiten stellten eine weitere Schwierigkeit dar. Im zweiten Teil sollten sie Zahlen aus Darstellungen in der Stellenwerttafel ablesen sowie selbst Zahlen in Stellenwerttafeln eintragen. Dabei kamen flexible Stellenwertdarstellungen zum Einsatz und es wurde explizit danach gefragt, ob auch andere Darstellungen möglich seien. Der Hälfte der Kinder stand für die Bearbeitung dieser Aufgaben eine Stellenwert-App als Hilfsmittel (Ladel & Kortenkamp 2013; 2014) zur Verfügung, allerdings ohne weitere Anleitung oder Instruktionen. Im dritten Teil wurden die gleichen Aufgaben wie im ersten Teil mit anderen Zahlen gestellt.

## 4. Auswertung

Für die Auswertung der quantitativen Untersuchung wurden die Darstellungen von Zahlen in der Stellenwerttafel in Kategorien eingeteilt. Hierbei traten die folgenden Typen auf: flexibel (56), flexibel mit Fehlern (31), Mehrsystemfehler (19), andere Symbole (24), Vertauschung (69), eine Darstellung (16), nicht bearbeitet (5), andere Anordnung (5), wertverändernd (4), wirre Fehler (26). Die Kategorien und die Bearbeitung der anderen Aufgaben wurden mittels *statistical implicative analysis* (Gras 2008) analysiert. Die Untersuchung ergab, neben der inneren Konsistenz der Items in Teil 1 und 3, dass es wenig überraschend ist, wenn Schülerinnen und Schüler in den Kategorien „Flexibel“ und „Flexibel mit Fehlern“ die Items in Teil 1 und 3 korrekt lösen, sowie Schülerinnen und Schüler aus der Kategorie „Vertauschung“ (hier wurden 3 1 4 und Vertauschungen dieser Ziffern in die Stellenwerttafel eingetragen) diese falsch beantworten.

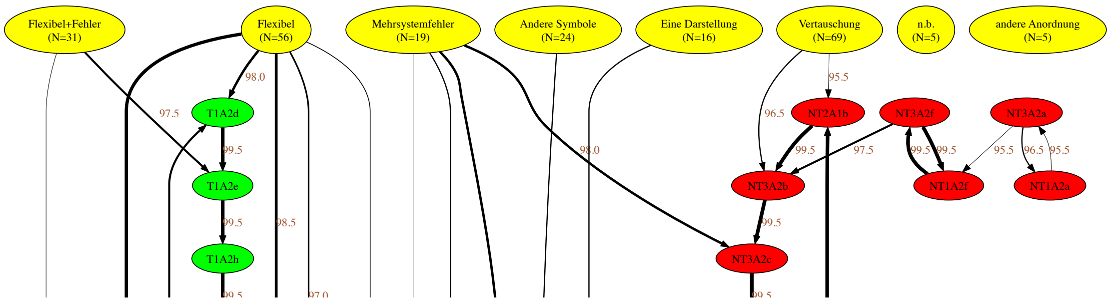



**Abbildung 1: Auszug aus der statistischen Analyse**

Die Kategorie „Mehrsystemfehler“ beinhaltet Schülerinnen und Schüler, die bei der Zahl 314 zehn einzelne Plättchen in die Zehnerstelle der Stellenwerttafel gemalt haben. Dieses Fehlverständnis führt laut statistischer Analyse ebenfalls zur erwartbar falschen Beantwortung der anderen Items, was die oben angesprochene Verständnisschwierigkeit zwischen Zeichen und Objekt bei der Verwendung von Mehrsystemmaterial in einer Stellenwerttafel illustriert.

## Ausgewählte Literatur

Gras, R. et al. (2008). *Statistical Implicative Analysis*. New York: Springer.

Ross, S.H. (1989). Parts. Wholes, and Place Value: A Developmental View. In *The Arithmetic Teacher*, Vol. 36. No. 6 (S. 47-51).

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2013). Designing a technology based learning environment for place value using artifact-centric Activity Theory. Research Forum Activity Theory, In: Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). Proceedings of PME 37, Vol. 1. Kiel, Germany: PME (S. 188-192).

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014). Flexible use and understanding of place value via traditional and digital tools. *(submitted)*

Angela LAGING, Kassel

# Selbstüberschätzung bei Studienanfänger/innen

## Theoretischer Hintergrund

Eine „realistische“ und somit möglichst exakte Selbsteinschätzung ist wichtig für selbstreguliertes Lernen (u. a. Boekaerts & Rozendaal, 2010), was wiederum zentral für das Studium ist. Genau zu wissen, welche Bereiche/Aufgaben noch nicht beherrscht werden, ermöglicht ein gezielteres Lernen und führt somit zu einer besseren Prüfungsvorbereitung mit besserem Zeitmanagement (Hacker et al., 2000). Innerhalb der Prüfungssituation können Aufmerksamkeit und Zeit effektiver eingeteilt werden (Nietfeld et al., 2005).

Für die exakte Selbsteinschätzung werden in der Literatur diverse Begriffe verwendet (u. a. monitoring accuracy, judgment accuracy), wobei sich hier an den Begriffen *Calibration Accuracy* (*CA*) und *Bias* orientiert wird. Im Gegenzug zur *CA*, welche die Exaktheit der eigenen Einschätzung angibt, liefert der *Bias* zusätzlich Informationen zur Ausrichtung, wodurch Über- und Unterschätzung unterschieden werden können. Als Grundlage wird die Definition von Nietfeld et al., (2006) herangezogen: „Calibration is the process of matching perception of performance with actual level of performance“ (S. 161). Die Erfassungen der *CA* variieren in einigen Aspekten (u. a. Zeitpunkt, Antwortskala, Fachgebiet, Art des Testmaterials, Berechnung). Da sowohl die Testbedingungen, externe Bedingungen als auch Personeneigenschaften die Exaktheit beeinflussen (Nietfeld & Schraw, 2002), sind nicht alle Operationalisierungen vergleichbar.

Eine Mehrzahl an Studien konnte folgende Ergebnisse nachweisen: Schüler/innen bzw. Studierende neigen häufiger dazu sich zu überschätzen als zu unterschätzen (u. a. Pajares & Kranzler, 1995; Pajares & Miller, 1994). Leistungsstarke Lerner schätzen sich in der Regel exakter ein als leistungsschwächere, wobei sich die Leistungsschwachen eher überschätzen (u. a. Bol et al., 2005; Hacker et al., 2000). Die Exaktheit der Einschätzung ist nicht nur personenabhängig, sondern auch aufgabenabhängig. So werden schwierigere Items ungenauer eingeschätzt und vor allem stärker überschätzt (u. a. Schraw & Roedel, 1994; Nietfeld et al., 2005). Die Überschätzung von schweren Aufgaben sollte jedoch vorsichtig interpretiert werden, da von systematischen Beurteilungsfehlern ausgegangen werden muss (Schraw & Roedel, 1994). So ist eine Unterschätzung bei schweren Aufgaben kaum möglich, da im Extremfall eine von niemandem gelöste Aufgabe maximal „richtig“ eingeschätzt werden kann, jedoch nie unter-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 703–706). Münster: WTM-Verlag

schätzt. Ähnliches gilt für die Überschätzung leistungsschwacher Lerner. Unabhängig vom Schwierigkeitsgrad kann auch der Aufgabentyp die Exaktheit beeinflussen, so haben die Befragten bei Boekaerts und Rozendaal (2010) Berechnungsaufgaben exakter eingeschätzt als Anwendungsaufgaben.

## Forschungsfragen und Datengrundlage

Es ergeben sich folgende Forschungsfragen, die innerhalb dieser Studie untersucht werden:

- Bei welchen Aufgaben über-/unterschätzen sich Studienanfänger/innen besonders stark?
- Bei welchen Aufgaben schätzen sich Studienanfänger/innen relativ exakt ein?
- Wie entwickelt sich die Selbsteinschätzung innerhalb des ersten Semesters?

Die Datengrundlage liefert ein Teilprojekt des Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik, in dem Erhebungen in der Veranstaltung „Mathematik für Wirtschaftswissenschaften I" an der Universität Kassel durchgeführt wurden, die in der Regel im ersten Semester belegt wird. Zu Beginn (T1) und zur Mitte (T2) des Wintersemesters 2011/12 wurden Daten in Form von Selbsteinschätzungen, Leistungstests zu mathematischen Grundlagen und weiteren Befragungen erhoben. Zu T1 haben 447 Studierende teilgenommen und zu T2 237 Studierende.

Im Rahmen dieser Studie wird die Selbsteinschätzung auf lokaler und auf globaler Ebene erfasst. Vor der Bearbeitung der Leistungstests werden den Studierenden die Aufgaben kurz gezeigt und sie schätzen jeweils auf einer achtstufigen Likert-Skala ein wie sehr sie sich zutrauen diese Aufgabe richtig zu lösen (lokale Ebene). Der *Bias* berechnet sich für jedes Item aus der Differenz der eingeschätzten und der tatsächlich erbrachten Leistung. Positive Werte zeigen eine Überschätzung und negative Werte eine Unterschätzung. Der Betrag davon ergibt die *CA* für jedes Item. Auf globaler Ebene geben die Studierenden nach Bearbeitung des Tests an wie viele der 30 möglichen Punkte sie glauben erreicht zu haben. Die Differenz ergibt den zugehörigen *Bias* und der Betrag davon die *CA*.

## Erste Ergebnisse und Diskussion

Im Schnitt überschätzen sich die Studierenden bei fast allen der 30 Aufgaben zu T1 und schätzen nur vier Aufgaben relativ exakt ein, siehe Abbildung 1. Zu T2 ist die Selbsteinschätzung bereits etwas exakter.

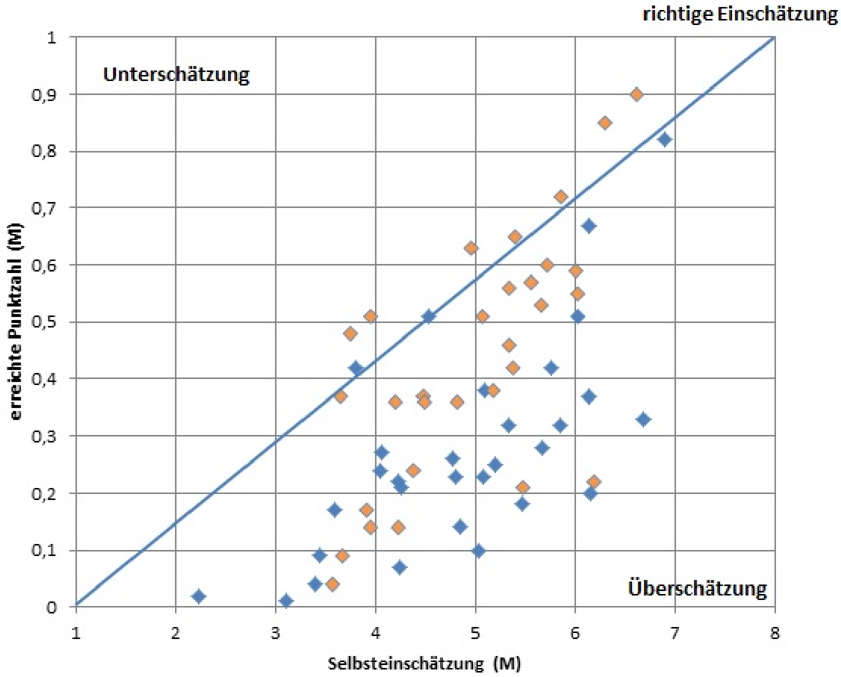



**Abbildung 1: Selbsteinschätzung der Aufgaben zu T1 (blau/dunkel) und T2 (orange/hell)**

Am stärksten haben sich zu T1 die Studierenden bei der Lösung folgender quadratischen Gleichung überschätzt: $(x-2)^2 - 2 = -1$. Die Aufgabe wurde von 95 Prozent der Studierenden bearbeitet, jedoch nur von 19 Prozent vollständig richtig gelöst. Studierende, die die Vorlesung bereits in einem vergangenen Semester besucht haben, überschätzten sich weniger. Ein Blick auf die Lösungswege zeigt, dass diese Aufgabe viele Fehlermöglichkeiten offenbart (u. a. bei Vorzeichen, binomischer Formel, pq-Formel, Wurzelziehen). Eine weitere Ursache der starken Überschätzung könnte in der Vertrautheit der Aufgabe liegen, die nach Hattie (2013) häufig bei der Einschätzung als nicht valider Indikator herangezogen wird. Die vier relativ exakt eingeschätzten Aufgaben entstammen unterschiedlichen Themenbereichen, unterschiedlicher empirischer Schwierigkeit und unterschiedlicher Formulierung. Sie beinhalten jedoch ein geringeres Fehlerpotential, da die Lösung mit wenigen Schritten erfolgt.

| | **M zu T1** | **M zu T2** | **Mittlere Differenz** |
|---|---|---|---|
| Leistung | 8,17 | 12,98 | 4,81*** |
| Selbstwirksamkeit | 5,18 | 4,98 | -0,14 |
| *Bias* (lokal, vorher) | 2 | 0,93 | -1,08*** |
| *CA* (lokal, vorher) | 3,02 | 1,51 | -1,53*** |
| *Bias* (global, nach) | 3,14 | 0,53 | -3,01*** |
| *CA* (global, nach) | 4,12 | 3,77 | -0,54 |

**Tabelle 1: Veränderungen von T1 zu T2 mit gruppierten t-Tests, *** p < 0,001**

Im Laufe der ersten Wochen des Semesters steigert sich die Leistung signifikant und die Selbstüberschätzung nimmt sowohl auf lokaler als auch globaler Ebene signifikant ab, wie in Tabelle 1 abzulesen ist. Die *CA* verbessert sich jedoch nur auf lokaler Ebene signifikant. Besonders positiv zu bewerten ist, dass die exaktere Selbsteinschätzung nicht über eine geringere Selbstwirksamkeit, sondern über eine Steigerung der Leistung erzielt wurde. Ein Absinken der Selbstwirksamkeit wäre nach Pajares und Kranzler (1995) problematisch anzusehen.

Im weiteren Verlauf sind genauere Analysen der einzelnen Aufgaben geplant, wobei Daten aus dem Wintersemester 2012/13 einbezogen werden. Diese weisen ein breiteres Spektrum an Aufgabentypen auf. Es sollen Zusammenhänge zwischen Aufgabencharakteristika wie u. a. Schwierigkeitsgrad, benötigte Rechenschritte sowie geforderte Kompetenzen mit der *CA* und dem *Bias*, insbesondere der Überschätzung, geprüft werden.

## Literatur


Boekaerts, M., & Rozendaal, J. (2010). Using multiple calibration indices in order to capture the complex picture of what affects. *Learning and Instruction*, 20(5), 372-382.

Bol, L., Hacker, D., O'Shea, P., & Allen, D. (2005). The Influence of Overt Practice, Achievement Level, and Explanatory Style on Calibration. *The Journal of Experimental Education*, 73(4), 269-290.

Hacker, D. J., Bol, L., Horgan, D. D., & Rakow, E. A. (2000). Test Prediction and Performance in a Classroom Context. *Journal of Educational Psychology*, 92(1), 160-170.

Hattie, J. (2013). Calibration and confidence: Where to next? *Learning and Instruction*, 24, 62-66.

Nietfeld, J. L., Cao, L., & Osborne, J. W. (2005). Metacognitive Monitoring Accuracy and Student Performance in the Postsecondary Classroom. *The Journal of Experimental Education*, 74(1), 7-28.

Nietfeld, J. L., Cao, L., & Osborne, J. W. (2006). The effect of distributed monitoring exercises and feedback on performance, monitoring accuracy, and self-efficacy. *Metacognition Learning*, 1(2), 159-179.

Nietfeld, J. L., Schraw, G. (2002). The Effect of Knowledge and Strategy Training on Monitoring Accuracy. *The Journal of Educational Research*, 95(3), 131-142.

Pajares, F., & Kranzler, J. (1995). Self-Efficacy Beliefs and General Mental Ability in Mathematical Problem-Solving. *Contemporary Educational Psychology*, 20, 426-443.

Pajares, F., & Miller, D. (1994). Role of Self-Efficacy and Self-Concept Beliefs in Mathematical Problem Solving. A Path Analysis. *Journal of Educational Psychology*, 86(2), 193-203.

Schraw, G., & Roedel, T. (1994). Test difficulty and judgment bias. *Memory & Cognition*, 22(1), 63-69.

Diemut LANGE

# Die Simulation eines Internationalen Kongresses – Ein Pilotprojekt zum bilingualen Mathematikunterricht

Zwar hat mittlerweile eine Ausweitung des bilingualen Unterrichts auf andere Fächer stattgefunden, das Fach Mathematik taucht im Kanon der bilingual unterrichteten Fächer jedoch nicht oder als ganz neues Fach auf. Gründe können in Vorbehalten von Mathematiklehrern bezüglich der Eigung des Faches gesehen werden: Mathematik sei eine neutrale Wissenschaft ohne interkulturelle Bezüge, biete kaum Kommunikationsanlässe und sei schwerer, wenn es in der Fremdsprache unterrichtet wird (Rolka 2004).

## 1. Theoretischer Hintergrund und Fragestellung

Blickt man genauer auf die in der Literatur genannten Chancen und Grenzen eines bilingualen Mathematikunterrichts, relativiert bzw. revidiert sich dieses Bild: So zeigt der Vergleich bilingual lernender und nicht-bilingual lernender Schüler, dass ein bilingualer Sachfachunterricht sowohl für das Sachfach (Vámos 2010) als auch für die Fremdsprache (Klieme et al. 2006) *lernförderlich* sein kann. Darüber hinaus kann ein bilingualer Sachfachunterricht mit Blick auf mögliche Auslandsaufenthalte oder Assessment Center *berufsvorbereitend* und durch den anderen Zugang auch v.a. für mathematisch schwächere Schüler *motivierend* wirken (z.B. Rolka 2004). *Interkulturelle Erfahrungen* ermöglicht der bilinguale Mathematikunterricht z.B., indem die deutsch- und fremdsprachliche Verwendung der Mathematik (z.B. andere Kommasetzung im deutsch- und englischsprachigen Raum) miteinander verglichen wird. Bilingualer Unterricht stellt einen weiteren *Anlass* dar, über Mathematik zu *kommunizieren* und bietet damit eine Möglichkeit, dem sprachlichen Manko vieler deutscher Schüler beim Sprechen über Mathematik (Maier 2003) zu begegnen. Zugleich wäre denkbar, dass die Fremdsprache eine <u>zusätzliche Hürde</u> im Mathematikunterricht und damit neben fehlender Materialien oder anderweitiger <u>organisatorischer Hürden</u> eine Grenze des bilingualen Mathematikunterrichts darstellt.

In der Literatur werden also sowohl Chancen als auch Grenzen eines bilingualen Sachfachunterrichts genannt – auf Studien zum bilingualen Mathematikunterricht kann zu dem jetzigen Stand allerdings kaum zurückgegriffen werden. Insofern soll zunächst im Rahmen einer Pilotstudie gefragt werden, inwiefern ein bilingualer Mathematikunterricht derartige Chancen realisieren kann. Da der Kommunikationsbegriff in der Literatur vielfältig ausgelegt wird, wurde dieser Begriff dazu in Form verschiedener Kommunikationsfacetten anhand der Kerncurricula der Fächer Englisch und Ma-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 707–710). Münster: WTM-Verlag

thematik operationalisiert, wobei die Facetten Präsentieren, Hörverstehen sowie Bezugnehmen im Vordergrund standen.

## 2. Design und Auswertungsmethode

Für die Pilotstudie wurde eine 10. Klasse eines Gymnasiums (N=21) ausgewählt, da eine Lerngruppe auf dieser Klassenstufe verglichen mit Oberstufenkursen Englisch noch im Klassenverbund erhält. Zugleich haben Schüler dieser Stufe bereits konkretere Berufsvorstellungen als jüngere Schüler.

Um bikulturelles Lernen zu ermöglichen, wurde als Kontext der Unterrichtsreihe die Bevölkerungsentwicklung in verschiedenen Ländern gewählt (mathemat.: exponentielles Wachstum). Da das Kommunizieren im Vordergrund stehen sollte, bot sich bezogen auf die zu fördernden mathematischen Kompetenzen das Modellieren und damit das Vergleichen und gegenseitige Abwägen verschiedener mathematischer Modelle sowie das Hinterfragen der getroffenen Modellannahmen an. Vor dem Hintergrund eines bilingualen Sachfachunterrichts als Kombination und nicht als bloße Addition beider Fächer (Otten & Wildhage 2003) wurden sprachliche Phänomene bei der Materialaufbereitung einbezogen: Es wurden englischsprachige Quellen verwendet, inhaltliche Zwischenüberschriften formuliert, nonverbale Aufgabenteile (z.B. Graphen, Diagramme zeichnen) eingebaut sowie Hilfen für Fachvokabeln und Phrasen zur Strukturierung des Vortrages angeboten. Eines der Arbeitsblätter beginnt wie folgt:

**Bevölkerungsentwicklung in der Zukunft**

Im Juni 2013 veröffentlichten die Vereinten Nationen folgende Zahlen über die Weltbevölkerungsschätzungen in den Jahren 2000 und 2010 (Tab. 1):

| Major area, region, country or area | Total population, both sexes combined, as of 1 July | |
|---|---|---|
| | 2000 | 2010 |
| WORLD | 6127720,428 | 6916183,482 |

**Aufgaben**:

1. *Angaben verstehen und deuten*:
   a) Erläutert die Zahlen in der oben stehenden Tabelle. Berücksichtigt dabei, dass auf der Welt zur Zeit etwa 7,1 Mrd. Menschen leben.
   b) Nehmt zu der folgenden Aussage kritisch Stellung!
   *„Die Weltbevölkerung überschritt 2010 die Zahl von 6,9 Mrd. Menschen."*
2. *Prognosen erstellen*:
   a) Stellt eine Funktion auf, die das in Tab. 1 beschriebene Wachstum modelliert.
   b) Berechnet, wie viele Menschen 2010, 2020, 2030, 2040, 2050, 2060, 2070, 2080, 2090 und 2100 demzufolge auf der Welt leben werden.

In der ersten Doppelstunde bearbeiteten die Zehntklässler in Kleingruppen Modellierungsaufgaben zur Bevölkerungsentwicklung auf Deutsch. In der zweiten Doppelstunde bereiteten die Kleingruppen eine englische Präsentation vor, die sie in der dritten Doppelstunde hielten. Die Wahl von Deutsch als Sprache für die erste Doppelstunde lässt sich damit begründen, dass in der Literatur zu einer vorwiegend muttersprachlichen ersten Phase des bilingualen Sachfachunterrichts geraten wird (z.B. Krechel 2003).

Als methodischer Rahmen wurde die Simulation eines Internationalen Kongresses gewählt, da eine Simulation motivierend sein kann, für bilinguale Situationen im späteren Berufsalltag sensibilisieren und eine natürliche Kommunikationssituation darstellen kann und damit zur Realisierung der oben genannten Chancen in besonderer Weise dienlich sein kann (z.B. Arendt 2003). Da es sich bei der Simulation nach Arendt (2003) um ein „Probe-Handeln in [einer] realitätsnahen Situation (...)“ (S. 88) handelt, wurde die Kongresssimulation so weit wie möglich an den Ablauf der PME-Konferenzen angelehnt (z.B. Logo; Namensschilder; Scientific program), v.a. jedoch mit Blick auf die Präsentationen (Kürze, Hilfen etc.) der Lerngruppe angepasst.

Um bei der Darstellung der Ergebnisse zwischen leistungsschwächeren und -stärkeren Schülern unterscheiden zu können, wurden die Fachlehrer (Ma, Eng) gebeten, die Leistungen der Schüler (mündlich / schriftlich / hinsichtlich der Kommunikationsfacetten s.o.) einzuschätzen. Um beurteilen zu können, inwiefern die Fremdsprache ggf. eine zusätzliche Hürde beim Kommunizieren über Mathematik dargestellt hat, wurden nach der 1. Doppelstunde schriftliche Ausarbeitungen der gestellten Aufgaben auf Deutsch erbeten und in der 3. Doppelstunde jede englische Präsentation im Anschluss von drei Experten hinsichtlich der inhaltlichen und sprachlichen Verständlichkeit eingeschätzt sowie das Verstehen der Präsentationen in Form von Kurzzusammenfassungen durch jeden Schüler geprüft. Wurden die mathematischen Hintergründe des Vortrags auf Deutsch von der Kleingruppe zwar verstanden, die Inhalte auf Englisch jedoch inhaltlich oder sprachlich schwer verständlich präsentiert (Vortrag wurde von mind. 2 Experten als inhaltlich oder sprachlich schwer verfolgbar eingeschätzt), wurde bei dieser Kleingruppe von der Fremdsprache als zusätzlicher Hürde ausgegangen. Hatten mathematisch stärkere Schüler Vorträge, die nicht von den Experten als schwierig verfolgbar eingestuft wurden, nicht verstanden, wurde auch in diesen Fällen von einer zusätzlichen Hürde ausgegangen. Die Faktoren Berufsvorbereitung, interkulturelle Erfahrungen und Motivation wurden mit Hilfe eines Schülerfragebogens erhoben.

## 3. Ergebnisse und Ausblick

Etwa die Hälfte aller Schüler schätzten das Projekt als berufsvorbereitend oder zumindest als eine gute Erfahrung darstellend ein. Bei der Angabe der Gründe für die berufsvorbereitende Wirkung wurde sowohl auf Kommunizieren in Englisch als Schlüsselkompetenz als auch auf spezifisch mathematisch-bilinguale Facetten (z.B. Lernen von Fachvokabeln) eingegangen. Von fast allen Schülern wurden der Bevölkerungskontext sowie das Verwenden englischsprachiger Quellen als sowohl interkulturelle Einsichten ermöglichend als auch als motivierend eingeschätzt. Nach den oben genannten Kriterien kann bei etwa der Hälfte der Schüler von der Fremdsprache als zusätzlicher Hürde ausgegangen werden. Nicht für alle Schüler motivierend wirkten das Sprechen auf Englisch sowie die Kongresssimulation. Insbesondere mathematisch stärkere, aber im Englischen schwächere Schüler schätzten das Sprechen in der Fremdsprache als weniger interessant ein.

Für jeden Schüler wirkte die Reihe in gewisser Weise motivierend, auch wenn viele der mathematisch schwächeren Schüler bilingualen Unterricht als schwerer und für sie nicht geeignet beurteilten. Möglicherweise führte der Reiz der Andersartigkeit des Mathematikunterrichts zu dieser Einschätzung, so dass zukünftig andere Formen des bilingualen Mathematikunterrichts ausprobiert werden sollten. Da insbesondere der Bevölkerungskontext und die Verwendung englischer Originalquellen motivierend wirkten und interkulturelle Einsichten ermöglichten, sich derartige Kontexte und Materialien jedoch nicht bei jedem mathematischen Thema anbieten, erscheint die projektartige Durchführung eines bilingualen Mathematikunterricht bei sich dafür anbietenden Themen als sehr sinnvoll.

## Literatur


Arendt, M. (2003). Aktives Sprachenlernen durch den Einsatz erprobter Unterrichtsverfahren (2). das Verfahren ‚Simulation'. *Fremdsprachenunterricht, 2*, 88-101.

Klieme, E., Eichler, W., Helmke, A., Lehmann, R.H., Nold, G., Rolff, H.-G., Schroder, K., Thome, G. & Willenberg, H. (2006) (Hrsg.). *Unterricht und Kompetenzerwerb in Deutsch und Englisch. Zentrale Befunde der Studie Deutsch-Englisch-Schülerleistungen-International (DESI)*, Frankfurt a.M.: DIPF.

Krechel, H.-L. (2003). Bilingual Modules. Flexible Formen bilingualen Lehrens und Lernens. In M. Wildhage & E. Otten (Hrsg.). *Praxis des bilingualen Unterrichts* (S. 194-216), Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Maier, H. (2003). Eine kaum beachtete Beziehung. Mathematik und Sprache. *Schüler 2003. Lesen + Schreiben*, 74-77.

Otten, E. & Wildhage, M. (2003). Content and Language Integrated Learning. Eckpunkte einer „kleinen“ Didaktik des bilingualen Sachfachunterrichts. In M. Wildhage & E. Otten (Hrsg.). *Praxis des bilingualen Unterrichts* (S. 12-45), Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Rolka, K. (2004). Bilingual lessons and mathematical world views – a German perspective. In D.E. McDougall & J.A. Ross (Hrsg.). *PME* (Bd. 4: S. 105-112), Kanada: Toronto.

Vámos, A. (2010). The function of foreign language at the school-leaving examination and language pedagogy in bilingual education. *IAEA, September 13-18. 1-10.*

Ingmar LEHMANN, Berlin

# Jeder macht Vehler – na und?

Im Mathematikunterricht werden Fehler gemacht. Wir können nicht darauf hoffen, sie (alle) zu vermeiden. Erst wenn wir sie analysieren, werden wir solche Erfahrungen sammeln, um einen geeigneten und produktiven Umgang mit Fehlern zu entwickeln.

Es geht darum, Fehler zu erkennen, sie zu nutzen, ohne sie zu diffamieren, ohne den Verursacher zu blamieren. Das Fehlermachen darf im Unterricht kein Tabu sein; die Angst vor Fehlern muss abgebaut werden. Ob harmlose, ungeschickte, vertrackte oder auch tückische Fehler auftreten, sie sollten keinen beschämen, schon gar nicht sollten sie im Regelfall zu schlechten Noten führen. Für das Lernen sollten Fehler als Chance begriffen werden, erst für das Leisten geht es dann um das Vermeiden von Fehlern. Lernen und Leisten in der Sekundarstufe voneinander zu trennen, setzt den Mut voraus, nicht immer nur an die Abiturprüfung zu denken.

Will man die Ursachen aufspüren, kostet das Zeit – Zeit die nicht vergeudet ist. Das Spektrum der Fehler ist jedoch riesig; manche Fehler wird man erst einmal akzeptieren, andere sofort entlarven. Im Einzelfall sollte es auch erlaubt sein, einen Fehler zu zelebrieren und zu genießen!

Zum Umgang mit Fehlern – auch in reformpädagogischen Ansätzen oder in der konstruktivistischen Didaktik – verweise ich auf die einschlägige Literatur (Lorenz & Radatz, 1993; Althof, 1999; Furdek, 2002; Führer, 2004; Käser, 2011).

Wir werden sowohl typische als auch skurrile Beispiele aus den verschiedenen Teilgebieten betrachten und dabei auch nicht vor Fehlern oder Irrtümern zurückschrecken, die selbst großen Mathematikern unterlaufen sind:

– Fehler (nicht nur) zum Schmunzeln,

– intelligente Fehler,

– Fehler und Irrtümer berühmter (und weniger berühmter) Mathematiker,

– arithmetische und algebraische Fehler,

– geometrische Fehler,

– Fehler im Umgang mit Reihen,

– Fehler in der Differential- und Integralrechnung,

– stochastische Fehler.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 711–714).
Münster: WTM-Verlag

Die im Folgenden vorgestellten Fehler können – zum Teil ausführlich – in dem Buch *Magnificent Mistakes in Mathematics* (Posamentier & Lehmann, 2013) nachgelesen werden. Pate standen die bekannten „Klassiker“ von Lietzmann (1913; 1963) und Maxwell (1959).

Schon aus früheren Zeiten ist überliefert, dass Fehler mitunter honoriert worden sind – nämlich mit einem kaiserlicher Dukaten pro Fehler, so man einen solchen in der Logarithmentafel findet, die Georg Freiherr von Vega (1754-1802) aufgestellt hat.

*Kommafehler*

Die Mär vom hohen Eisenanteil des Spinats geht auf einen Schreibfehler zurück.

*Rügen-Zeit*

Die St. Marienkirche der Stadt Bergen auf der Insel Rügen ist wahrscheinlich die einzige Kirche in Deutschland – oder sogar weltweit, auf deren Uhr 61 Minuten angezeigt werden.

*Zählfehler*

Gesucht ist die maximale Anzahl von Gebieten innerhalb eines Kreises, die man erhalten kann, wenn man auf dem Kreisrand $n$ Punkte auswählt und alle Punkte paarweise durch Strecken miteinander verbindet.

*Schildbürger*

1999 musste die NASA den Verlust der Sonde *Mars Climate Orbiter* beklagen. 2003/04 wurde eine neue Brücke über den Rhein gebaut. Die Bauleitung funkte in die Zentralen: „Laufenburger – wir haben ein Problem“. Was war passiert?

*Kreativer Analogieschluss*

Grenzwerte von Folgen aus Schülersicht

*Dimensionsfehler*

Sobald Größen im Spiel sind, geben uns die zugehörigen Maßeinheiten wichtige Hinweise.

**Fehler und Irrtümer berühmter Mathematiker**

Der Irrtum des Pythagoras (um 570 - nach 510 v. Chr.)

Der Irrtum des Galileo Galilei (1564-1642)

Der Irrtum des Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Der Irrtum des Leonhard Euler (1707-1783)

Der Fehler des William Shanks (1812-1882)

Diese Beispiele lassen sich jeder Zeit ergänzen, etwa durch Fehler und Irrtümer von Marin Mersenne (1588-1648), Pierre Fermat (1607-1665), Chevalier de Méré (1607-1684), Christian Goldbach (1690-1764), Gianfrancesco Malfatti (1731-1807), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Alphonse de Polignac (1817-1890), Henri Poincaré (1854-1912), David Hilbert (1862-1943), Albert Einstein (1879-1955), George Pólya (1887-1985), Nikolai Grigorevich Chebotarev (1894-1947) oder Enrico Fermi (1901-1954), insbesondere auch durch Fehler und Irrtümer zum *Vier-Farben-Problem* (1852).

**Arithmetische und algebraische Fehler**

Falsches Runden

Dezimalbrüche mit Tücken: $0,\overline{6}\cdot 0,\overline{3}$, $\frac{5}{7}-0,\overline{75}$, $\frac{3}{7}-0,0\overline{037}$, $1-0,\overline{9}$

Mutiges Kürzen: $\frac{16}{64}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$, $\frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}$, $\frac{19}{95}=\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}$, …

Division durch null und Logarithmus-Pleiten

Taschenrechner-Unfälle: $\frac{729^{35}-81^{52}}{27^{69}}$

Prozent-Probleme: Wie viel sind 45 % von 57 € und 57 % von 45 €?

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Unzulässiges Linearisieren – oder: Alles ist additiv?

Missverständnisse rund um die Potenz- und Wurzelgesetze

**Geometrische Fehler**

Ein rechter Winkel ist gleich einem stumpfen.

Jeder Winkel ist ein rechter Winkel.

Ein Dreieck besitzt zwei rechte Winkel.

Alle Dreiecke sind gleichschenklig.

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich seinem nichtanliegenden Innenwinkel.

Das Rad des Aristoteles (384-322 v. Chr.)

Das Paradoxon des Proklos (412-485 n. Chr.)

Das Paradoxon von Heinrich C. Schumacher (1780-1850)

Jeder innere Punkt eines Kreises liegt auch auf dem Kreisumfang.

Ein einem Quadrat einbeschriebenes Rechteck ist ebenfalls ein Quadrat.

Die Summe der zwei zueinander parallelen Seiten eines Trapezes ist null.

Fibonaccis Erbe: 64 = 65

Eine elegante Konstruktion des Inkreismittelpunktes eines Drachenvierecks

Rollende Münzen

Gesucht ist das Bild dieses Dreiecks, das an einem gegebenen Kreis gespiegelt wird.

*Thomsons Lampe* – James F. Thomson (1921–1984)

Ein Dreieck im Quadrat – minimal und maximal

Zwei Pyramiden werden genau an- bzw. aufeinander geklebt.

Das Logo eines Mathematikwettbewerbes

Stolpersteine *unendlich* und *Grenzwert*, *Statistik* und *Wahrscheinlichkeit*

## Literatur


Althof, W. (1999) (Hrsg.), Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Opladen: Leske + Budrich.

Führer, L. (2004). Fehler als Orientierungsmittel. Vom respektvollen Umgang mit Fehlleistungen. Mathematik lehren, 125, S. 4-8.

Furdek, A. (2002): Fehler-Beschwörer Typische Fehler beim Lösen von Mathematik-Aufgaben. Books on Demand.

Käser, U. (2011). Fehler begehen – Mathematik verstehen. Über die Bedeutung von Fehlern für das Verstehen. In: M. Helmerich et al. (Hrsg.), Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven. (S. 167-178). Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Lietzmann, W. (1963). Wo steckt der Fehler? Mathematische Trugschlüsse und Warnzeichen. Leipzig/Stuttgart: Teubner, 3., durchgesehene und erw. Aufl. [gemeinsam mit V. Trier (1913): Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler. Leipzig und Berlin: Teubner.]

Lorenz, J.-H. & Radatz, H. (1993). Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel.

Maxwell, E. A. (1959). Fallacies in Mathematics. Cambridge; Cambridge University Press.

Posamentier, A. S. & Lehmann, I. (2013). Magnificent Mistakes in Mathematics. Amherst (New York): Prometheus Books. Also available in ebook format.

Malte LEHMANN, Bettina RÖSKEN-WINTER, Berlin

# Studie zur Untersuchung von Problemlösekompetenzen bei Ingenieursstudierenden im ersten Studienjahr

Ingenieursstudierende sind zu Beginn ihres Studiums in Mathematik gefordert, neben deklarativem und prozeduralem Wissen, besonders ihre Problemlösekompetenzen zu entwickeln. Die Ausbildung dieser Kompetenzen wird oftmals durch eine Asynchronität mathematischer und ingenieurwissenschaftlicher Inhalte erschwert. Insbesondere stellt die Anwendung des in den Mathematikvorlesungen erworbenen Wissens die Studierenden in den Vorlesungen zur Technischen Mechanik, aber auch zur Konstruktionstechnik und zur Werkstofftechnik, vor große Herausforderungen. Für den Bereich der universitären Ingenieurausbildung liegen derzeit weder umfassende Kompetenzmodellierungen noch Messinstrumente vor. Im Zentrum des Projektes KoM@ING steht deshalb die Kompetenzmodellierung, -entwicklung und -erfassung in den Studiengängen Maschinenbau und Elektrotechnik. Das Projekt unterteilt sich dabei in quantitative und qualitative Teilprojekte. Während in den quantitativen Teilprojekten auf Grundlage psychometrischer und testtheoretischer Modellierungen (IRT) Eingangs- und Ausgangstest zur Höheren Mathematik und Technischen Mechanik entwickelt werden, konzentrieren sich die qualitativen Teilprojekte auf Detailanalysen von Modellierungs- und Problemlöseprozessen der Studierenden. In diesem Beitrag werden die Ergebnisse aus dem qualitativen Teilprojekt Berlin, welches den Problemlöseprozess von Studierenden genauer analysiert, vorgestellt.

## Theoretischer Rahmen

Aufbauend auf dem dänischen KOM-Projekt (Niss & Højgaard, 2011) wurde von SEFI (2013, S.13) ein Katalog mit acht mathematischen Kompetenzen für Ingenieursstudierende erstellt: *Thinking mathematically*, *Reasoning mathematically*, *Posing and solving mathematical problems*, *Modeling mathematically*, *Representing mathematical entities*, *Handling mathematical symbols and formalism*, *Communicating in*, *with and about mathematics* und *Making use of aids and tools*. Dabei wird die Kompetenz des Darstellens und Lösens von Problemen sehr allgemein beschrieben, sie „umfasst auf der einen Seite die Fähigkeit mathematische Probleme zu identifizieren und zu spezifizieren […] und auf der anderen Seite die Fähigkeit mathematische Probleme zu lösen […]“ (SEFI, 2013, S.13f, Übersetzung durch Autor). Für eine detailliertere Beschreibung des Problemlöseprozesses kann auf die klassischen Arbeiten von Polya (1945) zurückge-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 715–718). Münster: WTM-Verlag

griffen werden, welcher den Problemlöseprozess in vier Teilschritte unterteilt: *Verstehen des Problems*, *Entwickeln eines Plans*, *Ausführen des Plans* und *Rückschau*. Einen spezifischeren Blickwinkel ermöglichen die Arbeiten zu Heuristiken von Bruder und Collet (2011), in denen zwischen heuristischen Hilfsmitteln (*Informative Figuren*, *Gleichungen*, *u.a.*), Strategien (*Analogieschluss*, *Systematisches Probieren*, *u.a.*) und Prinzipien (*Zerlegungsprinzip*, *Symmetrieprinzip*, *u.a.*) unterschieden wird. Die beiden Ansätze ermöglichen eine differenzierte Analyse von Aufgabenbearbeitungen von Studierenden. Insbesondere verfolgen wir die folgenden Forschungsfragen:

- Können über Phasen und Heuristiken Schwierigkeiten bei Aufgaben beschrieben werden?
- Wie können mit einem Kategoriensystem Heuristiken hinsichtlich ihrer Popularität, ihrer Universalität und ihres Potenzials eingestuft werden?
- Welche Faktoren wirken auf die Leistungen von Studierenden bei der Bearbeitung von Aufgaben aus physikalischen Kontexten?

## Methodologie

Die Untersuchung ist als Längsschnittstudie konzipiert. Sie umfasst drei Messzeitpunkte, die vor Beginn des Studiums, nach dem ersten Semester und nach dem zweiten Semester durchgeführt werden. Zum ersten Zeitpunkt füllten die Teilnehmer (n=37, männlich= 20, weiblich =17) die Eingangstests zur Höheren Mathematik und zur Technischen Mechanik und einen Grundintelligenz-Test aus. Zur Erhebung des physikalischen Verständnisses zur Mechanik wurde zudem der Force Concept Inventory (FCI) eingesetzt. Dieser setzt keine besonderen Kenntnisse physikalischer Formeln oder mathematische Fähigkeiten voraus. Zusätzlich bearbeiteten die Teilnehmer in Gruppen von zwei oder drei Personen die fünf leichtesten und fünf schwersten Aufgaben sowohl aus dem Eingangstest zur Höheren Mathematik als auch zur Technischen Mechanik. Die Studierendengruppen lösten diese gemeinsam und waren gehalten, durch die *Think-Aloud*-Methode ihre Gedanken zu verbalisieren. Die videographierten Aufgabenbearbeitungen wurden transkribiert und mit Hilfe eines Kategoriensystems zu Polyas Phasen und den Heuristiken von Bruder und Collet codiert und analysiert.

## Ergebnisse

Heuristiken kommen bei den leichten und schweren Aufgaben unterschiedlich häufig zur Anwendung. Die Auftretenshäufigkeit beträgt bei den heuristischen Hilfsmitteln 22% bei der Bearbeitung leichter Aufgaben und 78% bei der Bearbeitung schwerer Aufgabe (heuristische Strategien: leicht: 30%, schwer: 70%; heuristische Prinzipien: leicht: 0%, schwer 100%). Auch für das Auftreten der Phasen nach Polya konnten Unterschiede zwischen leichten und schweren Aufgaben gefunden werden. Während in 65% der leichten Aufgaben höchstens eine Phase erkennbar war, beschränkten sich nur 4% der Bearbeitungen der schweren Aufgaben auf eine Phase. Das vollständige Durchlaufen aller vier Phasen geschah ausschließlich bei schweren Aufgaben und zwar in 40% der Fälle.

Die IRT-skalierten Tests zur Höheren Mathematik (HM) und Technischen Mechanik (TM) ermöglichen es, jedem Teilnehmenden einen Personenfähigkeitsschätzer zuzuordnen. Die Teilnehmer an der Untersuchung sind vergleichbar mit den Pilotierungsstichproben der quantitativen Teilprojekte: $M_{HM}$= -0,11, $SD_{HM}$= 1,38, $M_{TM}$= -0,86, $SD_{TM}$= 1,01. Im FCI erzielten die Studierenden im Durchschnitt einen Wert von $M_{FCI}$= 11,35, $SD_{FCI}$= 5,78 von 30 möglichen Punkten.

Um zu klären, welche Faktoren auf die Leistungen von Studierenden bei der Bearbeitung von Aufgaben aus physikalischen Kontexten wirken, wurden mehrere multiple lineare Regressionen und die dazugehörigen Korrelationsmatrizen berechnet. Für die Korrelationen der Testergebnisse und des Vorwissens, hier durch die Abiturnote repräsentiert, ergab sich:

**Tabelle 1: Korrelationsmatrix**

| | *Ergebnis TM* | *Ergebnis HM* | *Ergebnis FCI* | *Abiturnote* | *Ergebnis IQ-Test* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Ergebnis TM* | 1 | | | | |
| *Ergebnis HM* | .676** | 1 | | | |
| *Ergebnis FCI* | .744** | .696* | 1 | | |
| *Abiturnote* | -.382* | -.612* | -.372* | 1 | |
| *Ergebnis IQ-Test* | .072 | .354* | .050 | -.167 | 1 |

** p < .01, * p< .05

Die multiple lineare Regression unter Einbezug aller Prädiktoren zeigte einen sehr kleinen, nicht signifikanten Einfluss des Prädiktors *Abiturnote* (β=.004, p=.98) auf das Kriterium *Ergebnis TM*. Eine anschließende Kollinearitätsdiagnose ergab, dass die Faktoren *Ergebnis HM* und *Abiturnote* auf die gleiche Dimension laden, wohingegen der Faktor *Ergebnis FCI* alleine auf eine Dimension lädt. Somit trägt der Faktor *Abiturnote* die gleichen Informationen wie *Ergebnis HM* und ist deswegen redundant. Eine multiple lineare Regression mit den Prädiktoren *Ergebnis HM* und *Ergebnis FCI* und dem Kriterium *Ergebnis TM* führte zu nachstehendem Ergebnis:

**Tabelle 2: Ergebnis der multiplen linearen Regression**

| *Prädiktoren* | *B* | *SE B* | *β* | *Signifikanz* |
|---|---|---|---|---|
| *(Konstante)* | -1.883 | .326 | | $p = .00$ |
| *Ergebnis HM* | .236 | .116 | .306 | $p = .05$ |
| *Ergebnis FCI* | .093 | .026 | .531 | $p < .01$ |

$R^2$=0.602

Das Modell klärt 60% der Varianz in den Testergebnissen TM auf. Insbesondere das physikalische Verständnis hat einen hohen Einfluss auf die Ergebnisse im TM-Test.

## Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass sich objektiv schwierigere Aufgaben durch einen deutlich häufigeren Gebrauch an heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien charakterisieren lassen. Eine Beschreibung der subjektiven Schwierigkeiten durch die Anwendung von Problemlösestrategien und –phasen ist möglich und sinnvoll. Bei den Zusammenhangsuntersuchungen zeigt sich, dass sich die Ergebnisse im TM-Test in einem zufriedenstellenden Maße durch die Ergebnisse im HM-Test und im FCI vorhersagen lassen. In weiteren Untersuchungen wird der gefundene Zusammenhang zwischen den HM- und TM-Tests auf Ebene der Heurismen vertieft.

## Literatur


Bruder, R., Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Niss, M., Højgaard, T. (Hrsg.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde University.

Polya, G. (1945). *How To Solve It*. Princeton: Paperback Printing.

Schecker, H., Gerdes, J. (1999). Messung von Konzeptualisierungsfähigkeit in der Mechanik – Zur Aussagekraft des Force Concept Inventory. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 5, 75–89.

SEFI (2013). *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education*. Brussels: European Society for Engineering Education (SEFI).

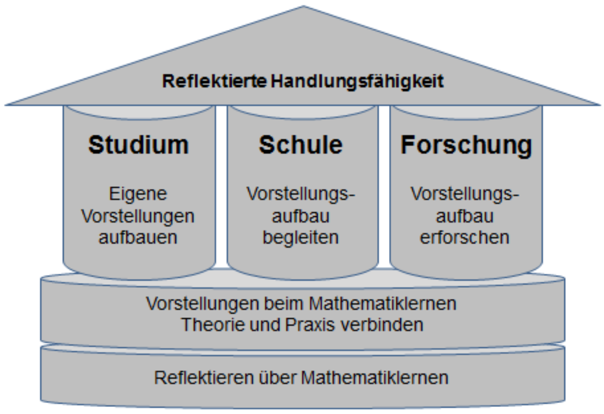
Katja LENGNINK, Gießen

# Lern- und Forschungsort Lernwerkstatt Mathematik – Vorstellungsorientiertes Mathematiklernen an Schule und Hochschule

Die Lernwerkstatt Mathematik in Gießen verfolgt das Ziel, Studierende, Schülerinnen und Schüler, Lehrkräfte und Hochschullehrkräfte zu einem gemeinsamen Lernen, Lehren und Forschen zusammenzubringen. In dem Beitrag wird zunächst die Konzeption vorgestellt und durch die derzeitigen Lernformate in der Lernwerkstatt konkretisiert. Es werden Forschungsfragen zur Arbeit in der Lernwerkstatt formuliert und erste Untersuchungsansätze vorgestellt. Mit der Lernwerkstatt ist die Hoffnung verbunden, über einen höheren Theorie-Praxis-Bezug im Studium das Lernverhalten der Studierenden positiv zu beeinflussen und wichtige konzeptionelle Ansätze der Fachdidaktik in ihrer Relevanz für den Lehrberuf erlebbar zu machen.

## 1. Konzeptioneller Rahmen der Lernwerkstatt Mathematik

Die Lernwerkstatt Mathematik erfüllt verschiedene Funktionen, die in der nebenstehenden Abbildung zu sehen sind. Zum einen werden zukünftige Mathematiklehrkräfte aller Lehrämter zum eigenen Arbeiten mit Materialien (wie z.B. Geobrett,…) angeregt und bauen dabei substanziell eigene fachliche Vorstellungen auf.




Als Konkretisierung der zweiten Säule werden Schulklassen der Grundschule und der Sekundarstufen in die Lernwerkstatt Mathematik eingeladen, um dort in handlungsorientierten Lernumgebungen Mathematik zu erleben und zu begreifen. Studierende eines Seminars im fünften bzw. sechsten Studiensemester bereiten diese Lernumgebungen in Kleingruppen vor, gestalten einen Vormittag für ihre Schulklasse und führen diesen durch. Die Lernwerkstatttage werden videografiert. Durch die spätere Betrachtung der Videos wird die Wirkung der Lernumgebung in Bezug auf den Vorstellungsaufbau, die Begriffsbildung und die Reflexion evaluiert.

Über diese direkte Verwendung der Videos zur Analyse und Reflexion des Vormittags hinaus werden die videografierten Lehr-/Lernsituationen be-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 719–722). Münster: WTM-Verlag

forscht, um daran mehr über den Aufbau von Vorstellungen, die Begriffsbildungsprozesse und die Lernschwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern zu bestimmten fachmathematischen Themen zu erfahren.

Grundlegend für die Arbeit in der Lernwerkstatt Mathematik sind die in vielfältigen didaktischen Forschungsprozessen untersuchten Fragen nach Grundvorstellungen zu mathematischen Themen (vom Hofe, 1995), Begriffsbildungsprozessen (Weigand et al., 2009) und auch die Frage nach dem Stellenwert des Reflektierens beim Mathematiklernen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Reflektierte Handlungsfähigkeit bei den Studierenden im Bereich des Planens, Begleitens und Reflektierens von Lernumgebungen und Schülerhandlungen zu erreichen.

Zusätzlich zur Arbeit mit Studierenden werden durch die Besuche von Schulklassen Lehrkräfte mit in den Lernort Lernwerkstatt einbezogen und können den Einsatz von Materialien in einem vorstellungsorientierten Lernsetting sowie die Notwendigkeit von Reflexionen erfahren. Ein Einbezug der zweiten Phase der Lehrerbildung mit dem Schwerpunkt Diagnose und Förderung (Studienseminar Gießen) sowie Materialeinsatz (Studienseminar Main Kinzig) ist derzeit in Planung.

## 2. Schulklassen in der Lernwerkstatt Mathematik

Im Folgenden werde ich nur auf eine Nutzungsform der Lernwerkstatt eingehen. Pro Semester kommen jeweils 5-6 Schulklassen für einen halben Tag in die Lernwerkstatt. Die Studierenden arbeiten in 6er-Gruppen Projektvormittage aus, die im Vorfeld thematisch mit der Klassenleitung abgesprochen werden. Die dafür ausgearbeiteten Lernumgebungen sollen *vorstellungsorientiert und handlungsorientiert sein*, d.h. dass die wesentlichen mathematischen Grundvorstellungen eines Themenfeldes angeregt werden können, sie sollen *offen sein und heterogene Lernausgangslagen und unterschiedliche Interessen und Zugänge berücksichtigen*, dabei aber auch lernzielorientiert sein, sie sollen *den Aufbau wichtiger prozessbezogener und inhaltsbezogener Kompetenzen* im jeweiligen Themenfeld anregen, sie sollen *Begriffsbildungsprozesse anregen und begleiten* und sie sollen *neben dem individuellen Lernen auch Phasen des gemeinsamen Lernens sowie Austausch und Reflexion ermöglichen*.

Als Grundlage für die Lernumgebungen können oft gute Anlässe aus Lehrwerken verarbeitet und in die gewünschte Richtung weiterentwickelt und angepasst werden (s. etwa Lengnink 2012). Dies entlastet die Studierenden bei der Planung, die sich dann auf eine Analyse, Auswahl und Adaption beschränkt.

## 3. Szenen aus den Projekten *Symmetrie* sowie *Mathe und Kunst*

Exemplarisch wird die Arbeit an zwei Szenen vorgestellt.

**Szene 1:** Im Projekt *Symmetrie* mit einer 1. Jahrgangsstufe wurden die Kinder aufgefordert zu falten, zu klecksen, zu priggeln. Nach diesem handlungsorientierten Einstieg wurden sie zum Begriff „Symmetrie“ und „symmetrisch“ befragt. Es wurden Alltagsgegenstände auf dem Tisch verteilt und die Kinder wurden aufgefordert, zu sagen, welcher Gegenstand symmetrisch sei. Der Student in der Szene erinnert zunächst als Gedächtnisstütze noch einmal an das Klecksen:

St: „Wie haben wir das denn gemacht vorher?“

M: „Geknickt“

St: „Kannst du das denn mit dem T-Shirt auch machen?“

M: „Ja.“

St: „Zeig mir’s mal.“

Das Mädchen nimmt das T-Shirt und knickt es so, dass die beiden Seiten genau übereinander liegen. Es werden hieran erneut die Begriffe „symmetrisch“ und „Symmetrieachse“ (als Faltlinie) beim T-Shirt herausgestellt.

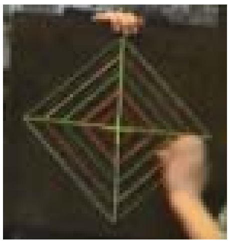
Die Kinder wenden sich den anderen Gegenständen auf dem Tisch zu.

St: „Was meint ihr bei der Brille, schaut sie euch mal an.“

Ein Junge nimmt die Brille am Bügel und zeigt, wie sie sich dort knicken lässt. Der Student legt die Brille wieder weg und arbeitet an anderen Objekten mit der Gruppe weiter (eine Hose, ein Buch). Später kommen sie auf weitere Gegenstände zurück, die sich gar nicht knicken lassen. Hieran wird erarbeitet, dass es um ein Knicken im Kopf geht, also auch wenn es nicht so durchzuführen sei, so könnte man in Gedanken so knicken, dass beide Seiten genau aufeinanderpassen würden (Studentin). Die Kinder zeichnen dann sowohl beim Löffel als auch bei der Brille eine Symmetrieachse ein. Sie haben den Begriff „Symmetrie“ augenscheinlich erfasst.

War in dieser Szene die Handlung des „Knickens“ beim Klecksen und Priggeln für die korrekte Vorstellung zur Symmetrie hinderlich? Oder ist es ganz normal, dass beim Lernen Hürden auftreten, egal wie man den Begriff einführt? Diese Fragen beschäftigen die Studierenden bei der Auswertung und sie sehen, dass alleine durch eine ausgeführte Handlung der Begriff in seiner Abstraktion noch nicht erfasst sein muss. Es bedarf der Reflexion und der gezielten Abstraktion, um mathematische Begriffe aufzubauen.

**Szene 2:** Zum Abschluss der Arbeit einer fünften Klasse an der Lernumgebung *Mathe und Kunst* sollten die Kinder ihre Arbeit im Projekt und ihre Lernfortschritte im Bereich geometrischer Grundbegriffe beschreiben. Ein Junge zeigt sein mit Gummis gespanntes Objekt an einem Nagelbrett:



S1: „Aber hier haben wir hauptsächlich so geraden Viere… Äh Quadrate gemacht" (Bild 1)

S2: „Rauten" (Bild 1)

S1: „Ja, Rauten kann man auch s… Nein, Quadrat. Wenn wir es so halten, sehen wir, dass das hier ein schönes Quadrat ist…" (Bild 2)

S2: „Und so ist es ne Raute" (Bild 1)

Der Prozess, der eine mathematisch-begriffliche Klärung der Verwendung von „Raute" und „Quadrat" im Sinne einer Oberbegriff-Unterbegriff-Beziehung beinhalten würde, ist hier nicht so weit vorangeschritten, dass die Kinder das Problem selbst klären könnten. Schüler 1 blickt hilfesuchend eine Studentin an, die Situation wird jedoch nicht weiter aufgegriffen und genutzt.

Die Studierenden analysieren solche Prozesse, um Anknüpfungspunkte für weiteres begriffliches Lernen und Handlungsoptionen zu finden.

## 4. Forschungsfragen und Untersuchungsansätze

Derzeit werden im Rahmen einer Abschlussarbeit eingängige Szenen zur Begriffsbildung aus den Videos extrahiert und ausgewertet. Wo sind die Kinder in ihrem Begriffsverständnis? Welche Begriffe fallen ihnen schwer beim Lernen? Wie kann begriffliches Lernen unterstützt werden? Diese und andere Fragen des Lokalisierens und Weiterentwickelns mathematikdidaktischer Theorien in Lernprozessen (etwa zu Grundvorstellungen und Schülervorstellungen) können bearbeitet werden. Zudem ist eine Begleitforschung geplant, die zeigen soll, wie ein solches Lehrveranstaltungssetting im Rahmen der Lehrerprofessionalisierung zu bewerten ist.

## Literatur


Lengnink, K. (2012). *Spürnasen Mathematik – Mathekartei I/II*. Berlin: Duden Schulbuchverlag.

vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Weigand, H.-G. et al. (2009): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Heidelberg, Spektrum, S. 99 – 122.

http://www.uni-giessen.de/cms/fbz/fb07/fachgebiete/mathematik/idm/lernwerkstatt

Denise LENZ, Halle an der Saale

# Untersuchung zum relationalen Denken als Komponente algebraischen Denkens bei Vor-und Grundschulkindern

Aus der Bedeutung der Algebra für die Mathematik einerseits und den Schwierigkeiten zahlreicher Schüler im Algebraunterricht andererseits, die zum Teil auf dessen späten Beginn zurückgeführt werden, ergibt sich die Forderung, algebraisches Denken schon im Grundschulunterricht zu fördern sowie Arithmetik- und Algebraunterricht stärker zu verbinden.
Ein wichtiger Aspekt algebraischen Denkens ist dabei das relationale Denken. In klinischen Interviews mit Vor und Grundschulkindern wurde untersucht, ob und in welcher Weise sie Beziehungen zwischen Mengen, Zahlen und Operationen herstellen. Das Untersuchungsdesign und ausgewählte erste Ergebnisse werden in diesem Beitrag vorgestellt.

## Relationales Denken

Algebraisches Denken lässt sich in verschiedene Teilbereiche untergliedern, worunter auch das Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen zählt (vgl. Fritzlar & Karpinski-Siebold 2012). Auch das Erkennen und Nutzen von Operationseigenschaften soll in dieser Komponente aufgehoben sein. Relational werden Terme und Gleichungen von einer strukturalen statt einer prozeduralen Perspektive betrachtet. Damit hilft relationales Denken, ein tieferes Verständnis der Arithmetik aufzubauen. Außerdem stellt es eine Voraussetzung für den verständnisvollen Umgang mit der Algebra in den späteren Schuljahren dar (vgl. Carpenter et al. 2003, S.40; Steinweg 2004, S.573).

## Forschungsdesign

Jeweils knapp 30 Kindergartenkinder kurz vor dem Schuleintritt, sowie Schüler der zweiten und vierten Grundschulklassen wurden in klinischen Interviews Aufgabenstellungen zur Bearbeitung gegeben. Die Grundschulkinder erhielten dabei in einem ersten Teil Termvergleichs- und Platzhalteraufgaben, mit denen das Erkennen und Nutzen von Relationen zwischen Zahlen und Operationen untersucht wurde. Alle drei Altersgruppen erhielten zudem einen Aufgabenteil, in dem Mengen in Form von kleinen Kisten und Murmeln präsentiert wurden. Dabei wurde untersucht, welche Relationen die Kinder zwischen den teils unbekannten Mengen beschreiben und welche Bearbeitungswege sie im Umgang mit den Aufgaben nutzen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 723–726). Münster: WTM-Verlag

Der Untersuchungsgruppe wurde zunächst eine kleine Rahmengeschichte von den Kindern Tino und Anna erzählt, die Kisten und Murmeln bekommen, wobei gleichfarbige Kisten immer gleich viele Murmeln enthalten. Die Kinder sollen dann bestimmen, wie viele Murmeln sich in den Kisten befinden müssen, damit beide Kinder insgesamt gleich viele Murmeln haben. Dabei ist es bei den ersten Aufgaben möglich, mit konkreten Mengenangaben zu antworten. Später müssen dann für eine allgemeingültige Antwort Beziehungen zwischen zwei unbekannten Mengen hergestellt werden.

Die folgende Aufgabe stellt einen wichtigen Übergang zwischen beiden Aufgabenformaten dar, da noch mit konkreten Mengenangaben zu antworten ist (in den grünen Kisten ist jeweils eine Murmel). Gleichzeitig befindet sich in beiden Schalen eine rote Kiste, deren Inhalt den Kindern nicht bekannt ist.

Folgende Frage wurde den Kindern gestellt: „Wie viele Murmeln müssen in einer grünen Kiste sein, damit beide Kinder gleich viele Murmeln haben?“

**Erste Ergebnisse**

Bei der Auswertung der Aufgabenbearbeitungen der Kinder zeigten sich bestimmte Vorgehensweisen, von denen drei exemplarisch an oben genannter Aufgabe dargestellt werden.

**Strukturieren**

Beim Strukturieren werden gleichwertige bekannte und auch unbekannte Teilmengen in Beziehung zueinander gesetzt. Dabei werden je gleiche Mengen benannt und/oder gezeigt. Anhand diesen Zuordnungen ermitteln die Kinder die Anzahl der Murmeln in der gefragten Kiste. Dabei können gleiche Mengen jeweils benannt, gezeigt oder auch aus den Schalen herausgenommen werden.

<u>Anton, Klasse 4</u>
Anton: „Eine.“ Interviewer: „Wie bist du darauf gekommen?“ Anton: „Also...gleicher Wert (*tippt gleichzeitig beide roten Kisten an*)...gleicher Wert (*tippt gleichzeitig die hinteren grünen Kisten an*)...gleicher Wert (*nimmt aus jeder Schale je eine Murmel in die Hand*)...dann müsste das gleicher Wert sein (*behält Tinos Murmel in der linken Hand und tippt damit auf Annas vordere grüne Kiste*).“

Anton bezieht sich jeweils gleichzeitig auf gleichwertige Mengen und ordnet diese einander zu. Daran schlussfolgert er, dass sich in Annas vorderer grünen Kiste eine Murmel befinden muss.

**Strukturnutzendes Rechnen**

Kinder, die den Bearbeitungsweg des strukturnutzenden Rechnens zeigen, strukturieren einen Teil der präsentierten Mengen, greifen aber in ihrer Erklärung auf die Angabe einer Rechnung zurück. Diese Rechnung wird auf einer Argumentationsebene angegeben, um die Lösung zu legitimieren. Mit Unbekannten wird wie beim Strukturieren als solche operiert. Die roten Kisten mit unbekanntem Inhalt werden dabei als gleich angesehen.

Robin, Klasse 4

Auf die Frage, wie er auf die Lösung, dass sich in den grünen Kisten eine Murmel befindet, gekommen ist, erklärt Robin:

„Weil... (*schaut 10s. zwischen den Schalen hin und her)* eins *(zeigt auf Annas hintere grüne Kiste*) plus eins (*zeigt auf Annas vordere grüne Kiste*) plus die eine Kugel (*zeigt auf Annas Murmel*) drei sind und hier (*zeigt auf Tinos grüne Kiste*) is ja auch eine Kugel drin und (*zeigt auf Tinos Kugeln*) plus zwei lose Kugeln und das is ja dann gleich (*zeigt von Annas roter Kiste auf Tinos rote Kiste*)."

Robin beginnt die Beschreibung seiner Bearbeitung mit „weil...", was eine Argumentationsebene eröffnet. Dann berechnet er die Teilsummen, die sich bei Anna und Tino aus dem Inhalt der grünen Kisten und den einzelnen Murmeln ergeben. Die beiden roten Kisten stellt er als „gleich" heraus. Die angegebene Rechnung scheint Robin nur zur Legitimation seiner Lösung anzugeben, wobei unklar bleibt, wie er seine Lösung letztlich ermittelt hat.

**Zahlengebundenes Arbeiten**

Beim zahlengebundenen Arbeiten beschreiben die Kinder eine rechnerische Lösungsfindung. Dabei werden alle Kisten mit Anzahlen belegt und die Gesamtsummen der Murmeln beider Kinder berechnet. Im Vergleich zu den anderen beiden Bearbeitungswegen wird auch für die roten Kisten mit unbekanntem Inhalt ein Zahlenwert angegeben.

Doreen, Klasse 4

„Da sind gleich viel (*zeigt gleichzeitig auf beide rote Kisten*). Ich schätze mal, da sind drei drinne. […] Nee, da ein, da zwei (*tippt Annas rote Kiste an*). Zwei (*tippt Tinos rote Kiste an*), das sind vier (*zeigt auf Tinos einzelne Murmeln*). Da ein (*zeigt auf Tinos grüne Kiste*), da doch eine, das sind fünf (*zeigt auf Tinos Schale*). Eine (*hebt Annas einzelne Murmeln kurz an*), zwei...drei (*tippt Annas rote Kiste an*), vier (*tippt Annas hintere grüne Kiste an*), fünf (*tippt Annas vordere grüne Kiste an*). Müssten in den grünen eine sein und in der roten zwei."

Doreen stellt zunächst die roten Kisten als gleich heraus, belegt diese dann aber mit einem Zahlenwert, den sie anschließend noch ändert. Anhand der angenommenen Werte (zwei Murmeln für die roten Kisten, eine Murmel für die grünen Kisten) berechnet sie die Gesamtsumme von fünf Murmeln bei beiden Kindern. Ebenso wie bei Robin bleibt unklar, wie Doreen die Zahlenwerte - besonders den richtigen Wert der grünen Kisten - ermittelt hat. In ihrer Beschreibung beruft sie sich aber auf diese Zahlenwerte, um die geforderte Gleichheit der Murmelsummen beider Kinder anzugeben.

## Ausblick

Nachfolgend steht die Untersuchung an, welche Bearbeitungswege die Kinder im Umgang mit den Aufgaben zeigen, bei denen Beziehungen zwischen unbekannten Mengen in beiden Schalen hergestellt werden müssen und deshalb Antworten mit konkreten Anzahlen nicht mehr möglich sind. Dabei wird die These untersucht, dass Kinder, die vorwiegend strukturierend vorgehen, eher in der Lage sind Beziehungen anzugeben, als Kinder, die Unbekannte mit Zahlenwerten belegen. Ebenso wird untersucht, welche Zahl-und Operationsbeziehungen die Grundschulkinder im Umgang mit dem ersten formalen Aufgabenteil nutzen.

## Literatur


Carpenter, T., Franke, M. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School*. Portsmouth: Heinemann.

Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2012). Algebraisches Denken und mathematische Begabungen im Grundschulalter. In: BzMU 2012, S. 261-264.

Steinweg, A.-S. (2004) Vom Reiz des Ausrechnen-Wollens oder Warum 25+4 auch 54 sein kann... In: BzMU 2004, S. 573-576.

Svenja LESEMANN, Bielefeld

# Effekte von Lehrerfortbildungen zum schulischen Umgang mit rechenschwachen Kindern

„Die Förderung von Kindern mit Rechenschwäche ist eine genuine Aufgabe der Schule!“ (Lorenz 2003, 108). Aus dieser Forderung wird deutlich, dass der Umgang mit Rechenschwäche und Rechenstörungen als ein schulisches Problem betrachtet werden soll. Dem steht entgegen, dass eine Verankerung in der Lehrerausbildung häufig fehlt und Lehrerinnen und Lehrer selten auf die Arbeit mit rechenschwachen Kindern vorbereitet werden. Eine häufige Folge ist, dass die Diagnose und Förderung von außerschulischen Einrichtungen übernommen und aus der Schule ausgelagert werden. Wenn jedoch rechenschwachen Kindern in der Schule geholfen werden soll, müssen Lehrkräfte dabei unterstützt und ihre Kompetenzen im Umgang mit rechenschwachen Kindern gestärkt werden. Auch wenn der Fortbildungsbedarf groß ist (vgl. Lenart 2003), weiß man noch wenig über die tatsächliche Qualifikation von Lehrkräften im Umgang mit rechenschwachen Kindern sowie über wirksame Unterstützungsmaßnahmen für Lehrkräfte. Deshalb wird im vorliegenden Dissertationsprojekt eine einjährige Lehrerfortbildung zur Diagnose, Förderung und Prävention von Rechenstörungen evaluiert.

## 1. Hintergrund: Das Bielefelder Förderkonzept zur Diagnose und Förderung bei Rechenstörungen sowie das Fortbildungskonzept FörSchL

An dieser Stelle können und sollen nicht die zahlreichen Theorien zum Thema Rechenstörung diskutieren werden, sondern lediglich *ein* Konzept zur Diagnose und Förderung bei Rechenstörung vorgestellt werden. Dieses wurde in der Bielefelder Beratungsstelle für Kinder mit Rechenstörungen entwickelt und orientiert sich an den folgenden Punkten. Es gibt drei Hauptsymptome für Rechenstörungen: (1) verfestigtes zählendes Rechnen, (2) Probleme beim Stellenwertverständnis sowie (3) unzureichende Grundvorstellungen zu Zahlen, Operationen und Rechenstrategien. Die Diagnostik folgt einem prozessorientierten Ansatz. Es soll nicht darum gehen, eine „Dyskalkulie“ zu attestieren, sondern in einem Gespräch mit dem Kind die Lösungswege zu erfahren, um auf der Basis dieser Kenntnisse einen Förderplan zu entwickeln. Dazu werden leitfadengestützte klinische Interviews durchgeführt (vgl. Schipper 2009). Das Förderkonzept verfolgt das Ziel, Grundvorstellungen aufzubauen, was durch die Verinnerlichung von Handlungen am Material unterstützt werden soll. Für die Unterstützung der Ent-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 727–730). Münster: WTM-Verlag

wicklung mentaler Modelle wurde ein Konzept entwickelt, bei dem sich der Prozess vom konkreten Handeln zur Vorstellung im Kopf durch eine schrittweise Ablösung vom Material in vier Phasen gliedert (vgl. Wartha/Schulz 2012).

Das Bielefelder Förderkonzept ist die inhaltliche Grundlage der Fortbildung FörSchL, welche im Rahmen dieser Arbeit evaluiert wird. FörSchL steht für Förderung rechenschwacher Schülerinnen und Schüler im Kreis Lippe und hat im Schuljahr 2011/2012 stattgefunden. Das Ziel der Fortbildung ist die Förderung der Kompetenzen der Grundschullehrerinnen und -lehrer im Umgang mit rechenschwachen Kindern. Von den 21 Teilnehmerinnen und Teilnehmern erklärten sich 11 für die Evaluation bereit. Die Fortbildung erstreckte sich über das gesamte Schuljahr. Jeder Teilnehmer richtete an seiner Schule eine Fördergruppe ein, in der wöchentlich bis zu vier rechenschwache Kinder aus der Schule gefördert wurden. In den Förderstunden arbeiteten die Lehrkräfte nach dem oben beschriebenen Förderkonzept. Für die Umsetzung der Förderungen bekamen sie folgende Unterstützung: Zu Beginn der Fortbildung fanden Inputveranstaltungen statt, in denen theoretische Grundlagen zum Thema Rechenstörung behandelt und das Förderkonzept vermittelt wurden. Weiterhin wurden Kleingruppen gebildet, in denen regelmäßige Supervisionstreffen mit einem Moderator (bereits fortgebildete Lehrkräfte) stattfanden. Außerdem wurde jede Förderstunde von den Teilnehmern schriftlich vor- und nachbereitet, wozu es ein Feedback durch die Moderatoren gab.

## 2. Ziele und Methoden der Untersuchung

Mit der Evaluation ist das Ziel verbunden, Aussagen zur Wirksamkeit von FörSchL treffen zu können. Dafür werden mit Prä- und Posttests sowie einer Kontrollgruppe die vier Ebenen des Fortbildungserfolgs nach Lipowsky (2004) in den Blick genommen. In diesem Beitrag liegt der Fokus auf der zweiten Ebene, der Veränderung des Wissens der Lehrerinnen und Lehrer. Die Veränderung des Wissens über Rechenstörungen wurde mittels eines Fragebogens und leitfadengestützten Interviews erhoben. Um die Daten aus den Interviews den weiterführenden Auswertungen zugänglich zu machen, wurden die Interviewtranskripte kodiert. Eine quantitative Messung des Fortbildungserfolgs wurde durch die Bewertung der Codes hinsichtlich des Bielefelder Förderkonzepts realisiert. Dazu wurde jeder Code bewertet, inwieweit er dem Konzept entsprich (weiß=entspricht dem Konzept; grau=entweder ist der Code sehr unpräzise oder er entspricht nur weitläufig dem Konzept; schwarz= entspricht nicht dem Konzept). Dieses Vorgehen hat keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit, sondern dient der Messung des Fortbildungserfolgs.

In der Studie wird weiterhin nach der Einschätzung und Bewertung der Fortbildung durch die teilnehmenden Lehrkräfte (Ebene 1) gefragt, die Veränderungen des Handelns im Mathematik- und Förderunterricht (Ebene 3) untersucht sowie die Veränderungen der Leistungen der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der Symptome für Rechenstörungen (Ebene 4) ermittelt.

## 3. Ergebnisse

Abbildung 1 zeigt das Ergebnis der quantitativen Auswertung des gesamten Interviews. In den Säulen ist sowohl für die Untersuchungsgruppe (UG) als auf für die Kontrollgruppe (KG) für beide Messzeitpunkte (MZP) der prozentuale Anteil der weißen, grauen und schwarzen Codes angegeben. N gibt die Anzahl der Codes an, die zur Berechnung herangezogen wurden. Dieses Diagramm spiegelt, auch wenn es sehr allgemein ist, die anderen Befunde wider. Es gibt zwar Ausnahmen, aber in sehr vielen Fällen liefern die Auswertungen das folgende Muster: Die UG und KG unterscheiden sich vor der Fortbildung nicht wesentlich voneinander. Bei der UG lässt sich ein großer Anstieg des Anteils weißer Codes beobachten. Somit ist nach der Fortbildung der Anteil der Äußerungen, die dem Konzept entsprechen, deutlich höher und mit durchschnittlich 80% generell sehr hoch. Bei der KG lassen sich dagegen kaum Veränderungen vom 1. zum 2. MZP beobachten. Daraus resultiert, dass sich die UG und KG zum 2. MZP deutlich unterscheiden.

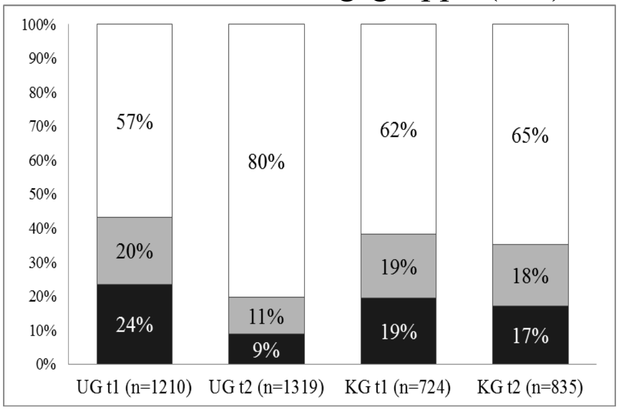


**Abbildung 1: Auswertung des gesamten Interviews**

Differenzierte Auswertungen wurden hinsichtlich der Symptome für Rechenstörungen vorgenommen. Das beschriebene Muster zeigt sich beim Erkennen von Anzeichen für Probleme beim Stellenwertverständnis, beim Herleiten von Fördermaßnahmen zur Unterstützung des Stellenwertverständnisses sowie bei der Kenntnis von Fördermaßnahmen zur Ablösung vom zählenden Rechnen. Das gleiche Muster, jedoch mit anderen Anteilen der Codes, zeigt sich bei den Fragen zum Materialeinsatz im Mathematikunterricht. Hier ist der Anteil schwarzer Codes beim 1. MZP auffällig höher (UG: 47%, KG: 52%). Nach der Fortbildung liegt der Anteil schwarzer Codes bei der UG bei 15%, bei der KG weiterhin bei 50%.

Ein abweichendes Muster existiert bei der Diagnose von verfestigtem zählenden Rechnen (vgl. Abb. 2). Wenn es um das Erkennen vom zählenden Rechnen geht, scheinen die teilnehmenden Lehrkräfte bereits vor der Fortbildungsmaßnahme ein großes Vorwissen zu haben. Dieses gilt für die UG und die KG gleichermaßen. Für die UG ist in diesem Kontext der Unterschied zwischen *Anzeichen erkennen* und *Fördermaßnahmen herleiten* hervorzuheben. Während zum 1. MZP der Anteil weißer Codes bei der Diagnose recht hoch ist, ist er bei den Fördermaßnahmen sehr viel geringer (52%). Die Lehrkräfte können die Probleme erkennen, aber nicht unbedingt passende Fördermaßnahmen herleiten. Nach der Fortbildung sieht das anders aus: Der Anteil weißer Codes ist dann bei der Förderung (84%) sogar höher als bei der Diagnose.

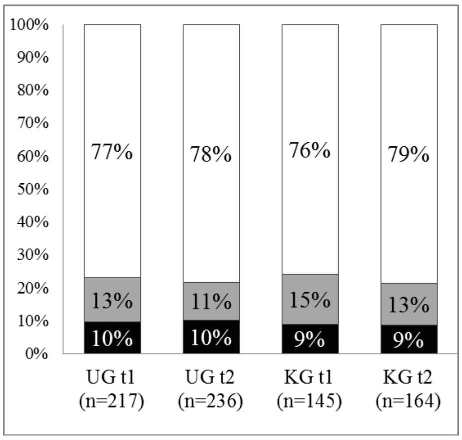



**Abbildung 2: Anzeichen für verfestigtes zählendes Rechnen erkennen**

## 4. Fazit

Durch die quantitativen Auswertungen der Interviews wird deutlich, dass bezüglich des Wissens über Rechenstörungen von einem Fortbildungserfolg gesprochen werden kann. Auf dieser Grundlage kann der Schluss gezogen werden, dass es sich bei FörSchL um ein wirksames Fortbildungskonzept handelt. Differenzierte und tiefer gehende Erkenntnisse zu den Effekten von FörSchL sollen die qualitativen Analysen der Interviews, bei denen die Veränderungen in den genannten *Inhalten* fokussiert werden, sowie die Auswertungen der anderen, oben genannten Ebenen aufzeigen.

## Literatur


Lenart, F.; Holzer, N.; Schnaupp, H. (2003): Dyskalkulie: Wahrnehmungen und Fakten. Ergebnisse und Ausblicke. In: F. Lenart, N. Holzer und H. Schaupp (Hg.): *Rechenschwäche - Rechenstörung - Dyskalkulie. Erkennung, Prävention, Förderung.* (S. 15-31). Graz: Leykam.

Lipowsky, F. (2004): Was macht Fortbildungen für Lehrkräfte erfolgreich? Befunde der Forschung und mögliche Konsequenzen für die Praxis. In: *Die Deutsche Schule,* 96 (4), S. 462–479.

Lorenz, J. H. (2003): *Lernschwache Kinder fördern.* Berlin: Cornelsen.

Schipper, W. (2009): *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W./ Wartha, S./ von Schroeders, N. (2011): *BIRTE 2. Handbuch zur Diagnostik und Förderung.* Braunschweig: Schroedel.

Wartha, S.; Schulz, A. (2012): *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen

Timo LEUDERS, Juliane LEUDERS, Kathleen PHILIPP, Freiburg

# Fachbezogene diagnostische Kompetenzen - Forschungsstand und Forschungsdesiderata

Als diagnostische Kompetenz werden Fähigkeiten von Lehrpersonen verstanden, welche sie in die Lage versetzen, korrekte Urteile über Lernvoraussetzungen, Lernprozesse und Lernergebnisse von Lernenden zu treffen (z.B. Schrader, 2011). Um dieses Kernverständnis von diagnostischer Kompetenz herum finden sich unterschiedliche Forschunsgtraditionen. Zur Bedeutung diagnostischer Kompetenzen als wesentliche Facette professioneller Kompetenzen von Lehrkräften besteht ein breiter Konsens. Zu ihrer Wirkung, vermittelt über die adaptive Gestaltung von Lehr-Lernprozessen, gibt es emprische Belege (z.B. Anders et al., 2010), klare Befunde über die Genese solcher Kompetenzen oder die genauen Wirkmechanismen im Unterricht besitzen wir zurzeit jedoch nicht. Hingegen findet man viele Studien zur Struktur diagnostischer Kompetenzen. Dieser Beitrag stellt die unterschiedlichen Forschungszugänge gegenüber und fokussiert dabei, soweit möglich, auf *fachbezogene* Aspekte. Eine ausführliche Publikation ist in Vorbereitung (Leuders, Leuders & Philipp, i. Vorb.).

## 1. Ansatz: Kompetenzmodellierung

Seit drei Jahrzehnten befassen sich viele Forschergruppen mit der theoretischen und empirischen Fundierung von *pedagogical content knowledge (PCK)* (Depaepe, et al. 2013). Der deutsche Begriff „fachdidaktische *Kompetenzen*“ weist darauf hin, dass es nicht nur um Wissen, sondern um die Anwendung von Wissen und Überzeugungen in jeweils zu spezifizierenden Problemsituationen handelt. Im Falle fachbezogener diagnostischer Kompetenzen sind diese Problemsituation solche, bei denen Urteile über Lernprozesse oder Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern im Fach Mathematik zu fällen und Konsequenzen zu formulieren sind. Die von Ball, Thames & Phelps (2008) unternommene *job analysis* zur Konzeptualisierung fachdidaktischer Kompetenzen umfasst auch fachbezogene diagnostische Kompetenzen. Diese sind z.B. nötig, um das Denken und die Schwierigkeiten von Lernenden zu interpretieren oder zu antizipieren (ebd., S. 401). Die empirische Erfassung diagnostischer Kompetenzen vollzieht sich in diesem Ansatz in der Regel über die Entwicklung von Kompetenzmodellen, welche diagnostische Leistungen als latente kognitive Variablen modellieren und über Papier-und-Bleistift-Items Diagnosesituationen möglichst valide zu operationalisieren versuchen (s. Abb.1). Obwohl dieser Ansatz eine kontextnahe Modellierung diagnostischer Kompetenz vertritt,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 731–734). Münster: WTM-Verlag

3. Mr. Fitzgerald has been helping his students learn how to compare decimals. He is trying to devise an assignment that shows him whether his students know how to correctly put a list of decimals in order of size. Which of the following sets of numbers will best suit that purpose?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *a)* | .5 | 7 | .01 | 11.4 |
| *b)* | .60 | 2.53 | 3.14 | .45 |
| *c)* | .6 | 4.25 | .565 | 2.5 |

*d)* Any of these would work well for this purpose. They all require the students to read and interpret decimals.

**Abb.1.: Item zur Erfassung diagnostischer Kompetenz nach Hill, Shilling & Ball (2004)**

wird kritisiert, dass er die Einbettung in komplexe Handlungsgefüge im Unterricht nicht hinreichend widerspiegelt und der Vernetzheit fachdidaktischer Kompetenzen nicht genüge Rechnung trägt (Depaepe et al., 2013).

## 2. Ansatz: Urteilsgenauigkeit

Weit verbreitet, aber eher noch stärker analytisch und noch weniger fachbezogen ist der Ansatz, diagnostische Kompetenz über die Genaugkeit von Urteilen von Lehrpersonen über Schülerleistungen zu modellieren (Helmke & Schrader, 1987). Der Forschungsstand zweier Jahrzehnte ist in zwei Überblicksartikeln festgehalten (Hoge & Colardaci, 1986, 16 Studien; Südkamp, Kaiser & Möller, 2012, 75 Studien). Gemeinsam ist diesen Studien, dass sie die Urteilsgenauigkeit (Veridikalität) über quantitative Korrespondenzmaße erfassen und daher Metaanalysen erlauben: Durchschnittliche Korrelationen von 0.63 bis 0.65 zeigen, dass Lehrpersonen durchaus die Leistungen ihrer Schüler einschätzen können, wenn auch mit beträchtlicher Streuung (typischerweise 0.3 bis 0.9). Analysen von Einflussfaktoren auf die Urteilsgenauigkeit durch Charakteristika der Schüler, der Lehrkräfte, der Urteilsarten oder der Testformen zeigen bislang kaum kohärente Befunde (ebd.), allenfalls, dass es unabhängige Komponenten zu geben scheint (Spinath, 2005).

Auch wenn dieser Ansatz eine quantitative Erfassung diagnostischer Kompetenz im Rahmen von Surveys oder Experimentalstudien begünstigt, zeigt er ein Defizit auf: Die verwendeten Urteilsmaße können nur als Indikatoren angesehen werden und sind meist nicht explizit in theoretische Modelle über Urteilssituationen oder kognitive Urteilsprozesse eingebettet.

## 3. Ansatz: Kognitive Prozesse

Diagnostische Urteile lassen sich auch in der langen Tradition psychologischer Urteilsforschung sehen (Hastie & Dawes, 2001). Die hier erforschten kognitiven Verzerrungen (*cognitive biases*) sind im pädagogischen Feld bereits vor vielen Jahren im Bereich der Leistungsbeurteilung rezipiert worden. Von besonderem Interesse sind kognitive Theorien, deren Ziel ist, das Zustandekommen diagnostischer Urteile nicht nur zu beschreiben, sondern zu erklären. Nickerson (1999) legt ein Modell vor zur

Genese von Wissen von Personen (Experten) über das Wissen anderer (Laien) (s. Abb.2).

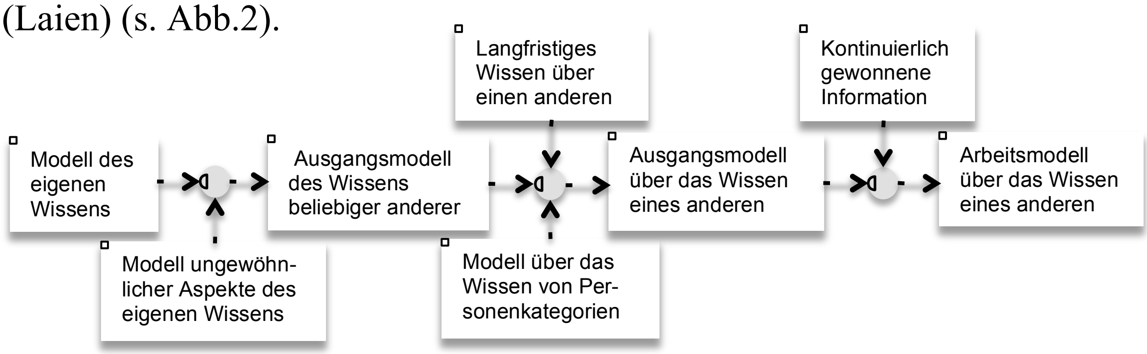



**Abb.2: Prozessmodell zur Genese von Wissen über das Wissen anderer (Nickerson, 1999)**

Dabei dient zunächst das eigene Wissen als Anker, welches sukzessive durch das Wissen über Besonderheit des eigenen Wissens, durch Wissen über Besonderheiten von Personengruppen und schließlich durch Erfahrungen mit spezifischen Personen modifiziert wird. Dieser Ansatz erklärt eine Vielzahl von Urteilsphänomenen (z.B. den so genannten *expert blind spot*), wurde aber bisher nicht auf das pädagogische Feld angewendet. Morris, Hiebert & Spitzer (2009) zeigen im Einklang mit diesem Modell auf, wie Prozesse der Dekomprimierung von Wissen (Analysieren von Teilzielen einer Aufgabe) diagnostische Urteile verbessern können.

Kognitive Modelle zu Urteilsprozessen bieten in der Tat eine Chance, diagnostische Urteile und deren vielfältige Zusammenhänge systematisch in experimentellen Studien zu untersuchen. Um hierbei die Rolle von Erfahrungen in der Unterrichtspraxis oder von fachdidaktischem Wissen aufzuklären, braucht es allerdings eine Verknüpfung mit Theorien des fachlichen und des fachdidaktischen Wissens.

## Diskussion

Diese Übersicht zeigt, dass bisher kein zufriedenstellender theoretischer Rahmen für die Untersuchung diagnostischer Kompetenzen von Mathematiklehrkräften zur Verfügung steht. Jenseits des pädagogischen Feldes gibt es seit vielen Jahren Anwendungen von Modellen diagnostischer Urteilsbildung. Dies ist der Bereich klinischer Urteile in der medizinischen Diagnostik (Chapman & Sonnenberg, 2000). Hier wurden über viele Jahrzehnte intuitive und analytische Prozesse der Urteilsbildung untersucht, welche sich in ein *dual process* Modell integrieren lassen (Crosskerry, 2009). Die Analogien diagnostischer Urteile im pädagogischen und medizinischen Bereich – Entscheidung bei Unsicherheit und begrenzter Information, Zusammenspiel von explizitem (wissenschaftlichem) Wissen und impliziten (Praxis)Erfahrungen – lassen vermuten, dass die Forschung zu diagnostischen Kompetenzen hier profitieren kann.

Dennoch: Einfache, universelle Theorien zur diagnostischen Kompetenz sind nicht zu erwarten, denn: (1) Die interpretierende Diagnose von Lern*prozessen* verlangt nicht nur einfache Urteile, sondern komplexe Inferenzen auf der Basis von Einsichten in die Eigenschaften der Lernenden und der Situation (Aufgabe). (2) Kategoriale Urteile über Schülerlösungen sind an theoretisches fachdidaktisches Wissen eingebunden, welches sehr bereichsspezifisch ist. (3) Die Handlungssituation von Lehrpersonen, die mit diagnostischen Tätigkeiten verbunden sind, sind ausgesprochen vielfältig.

## Literatur


Anders, Y., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2010). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften und ihre Auswirkungen auf die Leistungen ihrer Schülerinnen und Schüler. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 57,* 175–193.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelbs, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, (59), 389–407.

Chapman, G.B. & Sonnenberg, F.A. (2000). Decision making in health care: theories, psychology and applications. Cambridge series on judgment and decision making. Cambridge: Cambridge University Press

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. Teaching and Teacher Education 34, 12-25.

Hill, H. C., Schilling, S. G. & Ball, D. L. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hoge, R. D., & Coladarci, T. (1989). Teacher-based judgments of academic achievement: A review of literature. *Review of Educational Research, 59*, 297–313.

Leuders, Leuders & Philipp (i. Vorb.). Diagnostic Competence of Mathematics Teachers – Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice. Erscheint bei: Springer

Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. M. (2009). Mathematical Knowledge for Teaching in Planning and Evaluating Instruction: What Can Preservice Teachers Learn? *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(5), 491–529.

Nickerson, R. S. (1999). How We Know-and Sometimes Misjudge-What Others Know: Imputing One´s Own Knowledge to Others. *Psychological Bulletin, 125*(6), 737–759.

Schrader, F.-W. (2011). Lehrer als Diagnostiker. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 683–698). Münster: Waxmann.

Spinath, B. (2005). Akkuratheit der Einschätzung von Schülermerkmalen durch Lehrer und das Konstrukt der diagnostischen Kompetenz. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *19*, 85– 95.

Südkamp, A., Kaiser, J. & Möller, J. (2012). Accuracy of teachers' judgments of students' academic achievement: A Meta-Analysis. *Journal of Educational Psychology, 104*(3), 743–762.

Juliane LEUDERS, Timo LEUDERS, Freiburg

# Diagnostische Kompetenzen von Lehramtsstudierenden bei der Beurteilung von Schülerlösungen

Unter den vielen Aufgaben, die Lehrerinnen und Lehrern in ihrer Praxis begegnen, kommt diagnostischen Aktivitäten eine wichtige Rolle zu. Solche Aktivitäten beinhalten das Sammeln und Interpretieren von Daten, sei es aus formalen Tests, durch Beobachtung, die Analyse von Schülerprodukten oder das Führen und Auswerten Gesprächen mit Lernenden. Das Ziel von Diagnose im Unterricht ist die Erhebung von validen Informationen über Leistungen und Schwierigkeiten von einzelnen Lernenden oder auch der ganzen Klasse. Wissen, Fähigkeiten und Einstellungen der Lehrenden, die mit diesen diagnostischen Aktivitäten in Verbindung stehen, können als diagnostische Kompetenz bezeichnet werden (s. Leuders, Leuders & Philipp, 2014).

## Zielsetzung

In unserer Studie untersuchen wir eine eng umrissene Facette von diagnostischer Kompetenz. Wir fokussieren auf die Analyse von Schülerlösungen zu Lernumgebungen, also auf die post-aktionale Phase, in der kein Zeitdruck herrscht. Im theoretischen Rahmen der Michigan-Group (z.B. Hill, Shilling & Ball, 2004) lässt sich dieser Aspekt als *knowledge of content and students* (KCS) fassen. Dadurch entsteht ein Instrument, das diagnostische Kompetenz in einer typischen Praxissituation erfasst. Um auch den Einfluss von fachwissenschaftlichen Fähigkeiten einzubeziehen, untersuchen wir die Auswirkung von eigenen Lösungsversuchen zu den konkreten Aufgaben und die Bedeutung des fachwissenschaftlichen Vorwissens. Unsere Fragestellungen sind: (1) Liefert das von uns entwickelte Instrument zur Erfassung diagnostischer Kompetenz reliable Ergebnisse? (2) Verbessern eigene Lösungsversuche der Studierenden ihre diagnostischen Urteile? (3) Welche weiteren Faktoren beeinflussen die diagnostische Kompetenz?

## Methode

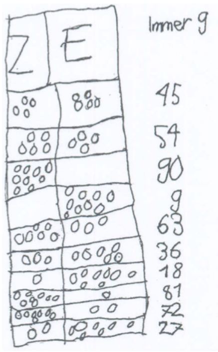
**Teilnehmer:** Die Hauptstudie wurde mit 110 Lehramtsstudierenden durchgeführt. Sie waren Teilnehmer einer Lehrveranstaltung zu Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht and der Pädagogischen Hochschule Freiburg, zu der Studierende ab dem 4. Semester zugelassen sind. Der Test wurde vor Beginn der Veranstaltung durchgeführt. Die Studierenden stammen aus unterschiedlichen Studiengängen, die sich in drei Gruppen

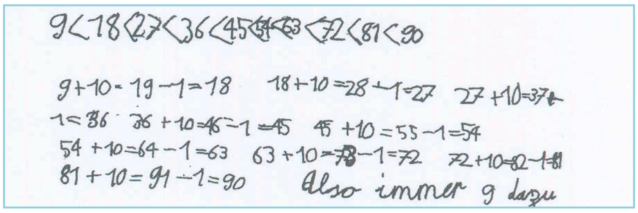
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 735–738). Münster: WTM-Verlag

einordnen lassen: Primarstufe, Hauptfach Mathematik (23%); Primarstufe, fachfremd (ca. 6 SWS Mathematikdidaktik, 38%); Sekundarstufe, Haupt- oder Nebenfach Mathematik (36%).

**Material:** Das Instrument enthält authentische Lösungen von Zweitklässlerinnen zu zwei Lernumgebungen (Hengartner et al. 2007, Bild 1). Die Aufgaben und Lösungen sind ausreichend unterschiedlich, so dass Überschneidungen minimiert sind. Die Probanden werden gebeten, bis zu 5 kurze Aussagen zu diesen Lösungen zu notieren.

Aufgabe 1: Nimm immer 9 Plättchen. Welche Zahlen kannst du darstellen? Ordne sie nach der Größe. Wie viele verschiedene Zahlen sind es?




Instruktion für die Probanden: Tanja ist Zweitklässlerin. Beurteilen Sie Tanjas Lösung. Was fällt Ihnen auf? Formulieren Sie eine oder mehrere unterschiedliche Aussagen zu der Lösung (z.B. „Die Lösung ist...“, „Tanja hat....“, „Vielleicht wurde....“).

**Bild 1: Aufgabe, Schülerlösung und Instruktion zu Aufgabe 1**

**Design:** Die Teilnehmer wurden randomisiert auf zwei Gruppen verteilt. Gruppe A löste zunächst Aufgabe 1 selbst, analysierte dann die Schülerlösung zu Aufgabe 1 und anschließend die Schülerlösung zu Aufgabe 2, ohne diese zweite Aufgabe selbst bearbeitet zu haben. Bei Gruppe B war es umgekehrt. Zusätzlich wurde Semesterzahl, Abiturnote in Mathematik und Studiengang erfasst.

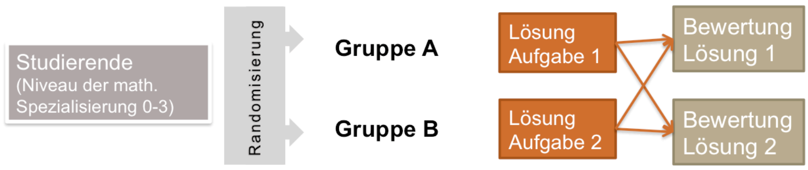



**Bild 2: Studiendesign**

Aus den diagnostischen Aussagen konnten induktiv ca. 20 Kategorien für jede Aufgabe entwickelt werden, die sich in 4 Typen gliedern lassen:

- spezifische Aussagen, z.B. “Ordnen nach Größe“: *„Um eine gewisse Ordnung in die Darstellung zu bekommen, hat Tanja die dargestellten Zahlen aufsteigend geordnet.“*
- unspezifische, nicht konkret auf die Lösung bezogene Aussagen, z.B. „systematisch“: *„Tanja ist sehr systematisch vorgegangen und hat alle möglichen Kombinationen gefunden.“*

- defizitorientierte Aussagen, die nur beschreiben, was in der Schülerlösung fehlt, z.B. *„Erklärung zu der Rechnung fehlt“*
- nicht-mathematische Aussagen, z.B. *„nicht mit Lineal gezeichnet“*

## Ergebnisse

(1) Liefert das Instrument reliable Ergebnisse? Dies konnte bestätigt werden: Die Daten der Hauptstudie wurde durch zwei Rater kategorisiert, die im Rahmen der Pilotstudie bereits ein Ratertraining erhalten hatten. Nach dem Rating der ersten 20 Fälle ergab sich für die Interrater-Reliabilität ein Cohen’s κ von 0.67. Nach einem weiteren Ratertraining konnte dies bei 23 weiteren Fällen auf Cohen’s κ=0.76 gesteigert werden.

(2) Verbessern eigene Lösungsversuche die diagnostischen Urteile der Studierenden? Diagnostische Kompetenz wird hier operationalisiert als Reichhaltigkeit von diagnostischen Aussagen, gemessen als Summe von spezifischen und unspezifischen Aussagen. Aussagen, die sich nicht auf Mathematik beziehen, und defizitorientierte Aussagen, die nur beschreiben, was die Schülerlösung nicht beinhaltet, wurden nicht gewertet. Die Hypothese war, dass für die Schülerlösung zu einer selbst bearbeiteten Aufgabe reichaltigere Aussagen gemacht werden.

Für Aufgabe 1 (absteigende Linie) konnte die Hypothese bestätig werden: Die Probanden, die diese Aufgabe zuvor selbst gelöst hatten, formulierten reichhaltigere diagnostische Aussagen ($F=5,1$; $p<0,001$, partielles $\eta^2=0,12$) Für Aufgabe 2 (ansteigende Linie) zeigte sich eine ähnliche Tendenz, allerdings nicht auf signifikantem Niveau ($p=0,19$).

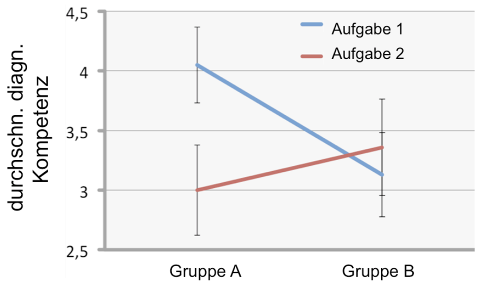



**Bild 3: Effekt eigener Lösungsversuche auf die Reichhaltigkeit der diagnostischen Aussagen**

(3) Welche weiteren Faktoren beeinflussen die diagnostische Kompetenz? Bezüglich des Studiengangs wäre zu erwarten, dass Primarstufenstudierende mit Hauptfach Mathematik am besten abschneiden sollten, da sie sowohl mit dem Fach als auch mit den Fähigkeiten von Zweitklässlern vertraut sind. Diese Hypothese konnte im Bezug auf Aufgabe 1 bestätigt werden: fachfremde Primarstufenstudierende schnitten schlechter ab, Sekundarstufenstudierende lagen sogar noch unter den Fachfremden. (Varianzanalyse: $F=3,56$; $p=0,017$). Es gab allerdings zwischen diesen Gruppen keine signifikante Variation des Effekts eigener Lösungen: Keine der

Gruppen profitierte mehr als die anderen von eigenen Lösungsversuchen. Bezüglich der Abiturnote zeigte sich ein marginal signifikanter Effekt in der Gruppe der fachfremden Primarstufenstudierenden: Bei einer niedrigen Abiturnote (N=17) zeigten sich auch geringere Leistungen beim Beurteilen der Schülerlösung zu einer nicht selbst bearbeiteten Aufgabe und profitierten am meisten von eigenen Lösungen (F=3,93, p=0,052).

## Diskussion

Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass sich die diagnostischen Aussagen zu den Schülerlösungen reliabel kategorisieren lassen. Für Aufgabe 1 konnte ein signifikanter Effekt eigener Lösungsversuche nachgewiesen werden. Eine genauere Analyse zeigt, dass dieser Einfluss vor allem auf einem Anstieg in den *spezifischen* Aussagen beruht. Allerdings fanden wir für Aufgabe 2 kein vergleichbares Ergebnis. Bei Betrachtung der Kategorien deutet sich hier ein Deckeneffekt an: die interessanten Aspekte der entsprechenden Schülerlösung waren leichter zu erkennen als in Aufgabe 1, auch ohne eigens Durchdringen der Aufgabe. Die Qualität von diagnostischen Urteilen zu Schülerlösungen kann also durch eigene Lösungen verbessert werden. Dies steht im Einklang mit dem Phänomen der "Dekomprimierung" bei Morris et al. (2009).

Außerdem zeigt sich, dass die Primarstufenstudierenden mit Hauptfach Mathematik auch ohne eigenes Lösen die meisten sprezifischen Aussagen formulieren, während bei fachfremden und bei Sekundarstufenstudierenden ein höherer Anteil an unspezifischen Aussagen auftritt. Da die gewählten Aufgaben relativ komplex sind, ist dies nicht überraschend. Dass die fachfremden Proimarstufenstudierenden am meisten von eigenen Lösungen profitierten (marginal signifikant) erinnert an das Ergebnis von El Mouhayar und Jurdak (2013), nach dem specialized content knowledge eine hohe Bedeutung für diagnostische Kompetenz hat.

## Literatur


El Mouhayar, R.R., & Jurdak, M.E. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 379–396.

Hengartner, E., Hirt, U., Wälti, B., & Primarschulteam Lupsingen (2007). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Zug: Klett und Balmer.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 491-529.

Michael LIEBENDÖRFER, Reinhard HOCHMUTH, Stephan SCHREIBER, Lüneburg, Robin GÖLLER, Jana KOLTER, Kassel, Rolf BIEHLER, Jörg KORTEMEYER, Laura OSTSIEKER, Paderborn

# Vorstellung eines Fragebogens zur Erfassung von Lernstrategien in mathematikhaltigen Studiengängen

Die Nutzung geeigneter Lernstrategien gilt als wichtig für den Lernerfolg, insbesondere im Studium (Wild, 2005). In Untersuchungen an der Universität zeigten sich die theoretisch erwarteten und in labornahen Studien nachgewiesenen positiven Effekte auf den Lernerfolg allerdings nicht immer. Es wird diskutiert, inwieweit Probleme bei der Operationalisierung der Strategien (Selbstberichte, soziale Erwünschtheit, Zeitpunkt der Befragung) oder des Lernerfolgs (z.B. keine Messung des langfristigen Lernerfolgs durch Klausuren) dabei eine Rolle spielen (Schiefele, Streblow, Ermgassen, & Moschner, 2003). Bezüglich der Mathematik zeigte sich z.B., dass unterschiedliche Erhebungsverfahren (Fragebögen und Lerntagebücher) zu verschiedenen Ergebnissen führen (Vogel, 2001). Bei Ingenieuren konnten Griese, Glasmachers, Kallweit, & Roesken (2012) zwar die Nutzung von Lernstrategien effektiv fördern, Effekte auf Leistung waren aber nicht messbar. Ähnlich zeigte sich bei Kolter et al. (eingereicht) kein kurzfristiger, wohl aber ein langfristiger Effekt der Lernstrategienutzung auf die Mathematikleistung. Die drei letztgenannten Quellen nutzten jeweils den LIST-Fragebogen (Schiefele & Wild, 1994), der Lernstrategien über alle Studienfächer hinweg erfassen soll. Mit einer anderen Operationalisierung konnten Rach & Heinze (2013) den Studienerfolg gut vorhersagen. Abgefragt wurde, inwieweit Studierende ihre Übungsblätter selbst lösen oder sich die Lösungen selbst erklären. Dabei wird besonders deutlich, dass die Nutzung gewisser Strategien fachliches Vorwissen verlangt und deshalb schwer trennbare Wechselwirkungen bestehen.

## Zur Entwicklung des Instrumentes

Um Lernstrategien spezifisch für Mathematik an der Hochschule zu erfassen wurden im Rahmen des khdm (Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik, www.khdm.de) ausgehend vom LIST-Fragebogen Skalen erweitert oder modifiziert (vgl. Göller u. a., 2013) von denen hier Teile vorgestellt werden. Das Elaborationskonstrukt wurde in Subskalen aufgeteilt: **Vernetzen** (6 Items) von Wissen beschreibt Tätigkeiten, bei denen Bezüge zwischen dem neuen Wissen und bereits bekanntem hergestellt werden. **Beweise lernen** (8 Items) beinhaltet die Beachtung von Beweisen als Lerninhalt und das Nachvollziehen der Argumentation. **Runterbrechen** (6 Items) beschreibt das eigene Formulieren vereinfachter Aussagen und die

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 739–742). Münster: WTM-Verlag

Verbindung zur **Praxis** (4 Items) wird hergestellt, indem Bedeutung und Nutzen der Konzepte in der realen Alltagswelt gesucht werden. Die LIST-Skala zur Anstrengung wurde dahingehend überarbeitet, dass die Aufwendung von **Zeit** (5 Items) von **Frustrationstoleranz** (3 Items) unterschieden wurde. Die Skalen wurden mit 6-stufigen Likertskalen (1= trifft gar nicht zu, 6= trifft völlig zu) im paper&pencil-Verfahren bei Studierenden verschiedener Studiengänge pilotiert: Ingenieure (N=153), Bachelor Mathematik und gymnasiales Lehramt (N=26+48) und Primarstufenlehramt (N=118). Dabei zeigten sich insgesamt gute Reliabilitäten (Cronbachs α) der einzelnen Skalen Vernetzen (.76 - .78), Beweise (.81 - .89), Praxis (.79 - .85), Zeitaufwand (.69 - .77, ohne Ingenieure), Frustrationstoleranz (.80 - .83, ohne Ingenieure). Die Skala zum Runterbrechen wurde nach der Pilotierung bei Ingenieuren und Bachelor/Gymnasiallehramt (α=.63/.71) um zwei Items ergänzt. Die Reliabilität war dann bei den Primarlehramtsstudierenden zufriedenstellend (.72).

Weiter wurde untersucht, inwieweit sich die Skalen empirisch trennen, indem die Korrelationen der verwandten Konstrukte untereinander betrachtet wurden. Dafür wurde zwischen den verschiedenen Studierendgruppen unterschieden, insbesondere auch zwischen Bachelor- und Gymnasiallehramtsstudierenden. Die Ergebnisse sind tabellarisch dargestellt, signifikante Korrelationen sind markiert (*p < .05, **p < .01).

| *Konstrukte / Stichprobe* | *Beweise vs. Vernetzen* | *Praxis vs. Vernetzen* | *Beweise vs. Praxis* | *Zeit vs. Frust* |
|---|---|---|---|---|
| Ingenieure | .25** | .35** | .14 | .58** |
| Bachelor | .59** | .47* | .32 | .20 |
| Gymn.-LA | .48** | .27 | .36* | .55** |
| Prim.-LA | .37** | .34** | .15 | .46** |

Die einzelnen Skalen trennen sich dahingehend gut voneinander, dass die Korrelationen stets unter .60 liegen. Positive Korrelationen sind dabei überall zu erwarten, da die Skalen ja als Formen von Elaboration bzw. Anstrengung konzipiert wurden. Auch in der unterschiedlichen Höhe sind die meisten Werte erwartungskonform. Der Unterschied zwischen Ingenieuren und Fach-Bachelorstudierenden bei der Korrelation von Beweisen und Vernetzen wirkt z.B. plausibel, da die Ingenieure durch ihre Fachveranstaltungen neben den innermathematischen noch viele weitere Vernetzungsmöglichkeiten haben. Dazwischen bewegt sich das Lehramt mit Vernetzungen z.B. zur Fachdidaktik. Etwas überraschend scheinen bei den Fachstudierenden die Anstrengungskomponenten Zeit und Frust geringer zusammenzuhängen als bei den anderen Studiengängen, insbesondere den Gymnasiallehramtsstudierenden, die in der gleichen Veranstaltung lernen.

**Beispielhafte Anwendung des Instrumentes**

Zur Illustration der Einsatzmöglichkeiten wurden die Daten aus der Pilotierung ausgewertet. Ein Vergleich der Mittelwerte bei der Nutzung einzelner Elaborationsstrategien ist tabellarisch dargestellt, die Standardabweichungen sind in Klammern angegeben.

| *Konstrukte / Stichprobe* | *Vernetzen* | *Beweise* | *Praxis* |
|---|---|---|---|
| Ingenieure | 4,16 (0,71) | 3,05 (1,02) | 3,37 (1,14) |
| Bachelor | 4,36 (0,68) | 4,13 (0,78) | 3,34 (1,25) |
| Gymn.-LA | 4,08 (0,65) | 3,55 (0,87) | 3,26 (0,99) |
| Prim.-LA | 4,09 (0,65) | 4,14 (0,67) | 3,30 (1,06) |

Eine ANOVA zeigt nur bei der Nutzung der Beweise signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen ($p < .001$). Entsprechend den Erwartungen liegen die Ingenieure nicht nur hinter den anderen Gruppen, sondern auch unterhalb des theoretischen Mittels von 3,5. Es überrascht dagegen, dass die Gymnasiallehramtsstudierenden deutlich hinter den Fachstudierenden zurückbleiben, obwohl die Daten in der gemeinsamen Vorlesung Analysis 1 im ersten Semester erhoben wurden. Es überrascht außerdem, dass die Primarstufenlehramtsstudierenden in der selbsteingeschätzten Auseinandersetzung mit Beweisen nicht nur die Studierenden aus dem Gymnasiallehramt, sondern auch die Fachstudierenden knapp übertreffen. Wir können nicht sicher sagen, inwieweit die Selbstberichte tatsächliche Unterschiede wiedergeben oder z.B. von unterschiedlicher Selbstwahrnehmung geprägt sind. Die Beschäftigung mit den Beweisen wird von den Dozenten in allen Veranstaltungen empfohlen.

Weiter wurde die Frage untersucht, inwieweit die Nutzung verschiedener Strategien über Korrelationen mit der Selbstwirksamkeitserwartung (SWE) zusammenhängt, der ein hoher Einfluss auf das Lernen zugesprochen wird (Bandura, 1993). Die Korrelationen sind erneut tabellarisch dargestellt. Bei den Elaborationsstrategien zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang der SWE mit dem Vernetzen und dem Nutzen von Beweisen, insbesondere bei den Fachstudierenden. Dagegen zeigt sich kein signifikanter Zusammenhang beim Herstellen von Praxisbezügen. Bemerkenswert ist, dass bei den

Primarstufenlehramtsstudierenden die SWE kaum mit dem Vernetzen zusammenhängt. Mit Blick auf die Anstrengung lässt sich sagen, dass SWE deutlich stärker mit der Bereitschaft zusammenhängt, Frustration auszuhalten, als mit dem Aufwenden von Zeit.

| *Korr. mit SWE / Stichprobe* | *Vernetzen* | *Beweise* | *Praxis* | *Zeit* | *Frust* |
|---|---|---|---|---|---|
| Ingenieure | .36** | .22** | .11 | --- | --- |
| Bachelor | .63** | .60** | .27 | .01 | .19 |
| Gymn.-LA | .47** | .31** | .07 | .13 | .45** |
| Prim.-LA | .14 | .48** | -.01 | .18 | .27** |

Das Instrument soll zukünftig weiter entwickelt und eingesetzt werden.

## Literatur


Bandura, A. (1993). Perceived Self-Efficacy in Cognitive Development and Functioning. *Educational Psychologist, 28*(2), 117–148.

Göller, R., Kortemeyer, J., Liebendörfer, M., Biehler, R., Hochmuth, R. K., Krämer, J., Ostsieker, L., Schreiber, S. (2013). Instrumentenentwicklung zur Messung von Lernstrategien in mathematikhaltigen Studiengängen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM-Verlag.

Griese, B., Glasmachers, E., Kallweit, M., & Roesken, B. (2012). Lerntagebücher als Interventionsinstrument in der Studieneingangsphase. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*. Münster: WTM-Verlag.

Kolter, J., Blum, W., Schukajlow, S., Bender, P., Biehler, R., Haase, J., & Hochmuth, R. (eingereicht). Zur Messung, zum Erwerb und zur Förderung studentischen (Fach-) Wissens in der „Arithmetik für die Grundschule" im KLIMAGS-Projekt. *Tagungsband der Fachtagung Grundschullehrerausbildung der gemeinsamen Kommission der MNU; GDM und DMV.*

Rach, S., & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? *Journal für Mathematik-Didaktik, 34*(1), 121–147.

Schiefele, U., Streblow, L., Ermgassen, U., & Moschner, B. (2003). Lernmotivation und Lernstrategien als Bedingungen der Studienleistung. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 17*(3/4), 185–198.

Schiefele, U., & Wild, K.-P. (1994). Lernstrategien im Studium: Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 15*, 185–200.

Vogel, R. (2001). *Lernstrategien in Mathematik: eine empirische Untersuchung mit Lehramtsstudierenden*. Hildesheim: Franzbecker.

Wild, K.-P. (2005). Individuelle Lernstrategien von Studierenden. Konsequenzen für die Hochschuldidaktik und die Hochschullehre. *Beiträge zur Lehrerbildung, 23*(2), 191–206.

Edith LINDENBAUER, Linz

# Mathematikunterricht mit Technologieeinsatz zur Unterstützung des funktionalen Denkens in der Sekundarstufe 1

„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 1989, S. 6). Der Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten wiederum ist typisch für die Mathematik. Malle formuliert (2000) folgende Aspekte des funktionalen Denkens:

- **Zuordnungsaspekt**: Jedem Argument x wird genau ein Funktionswert f(x) zugeordnet.
- **Kovariationsaspekt**: Wird das Argument x verändert, so ändert sich der Funktionswert f(x) in einer bestimmten Weise und umgekehrt.

## Kovariationsaspekt von Funktionen

Für das praktische Arbeiten mit Funktionen ist der Kovariationsaspekt sehr wichtig. Empirische Untersuchungen zeigen jedoch, dass vor allem dieser Aspekt des funktionalen Denkens bei Schülerinnen und Schülern unterentwickelt ist (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Malle, 2000; Hoffkamp, 2011).

Im Unterricht kommen Funktionen, die nicht explizit durch Terme dargestellt werden, selten vor. Die Termdarstellung betont dabei den Zuordnungsaspekt von Funktionen. Zudem werden Funktionsgraphen im Unterricht häufig nur statisch betrachtet und dadurch die dynamische Sichtweise, die der Kovariationsaspekt beinhaltet, nicht gefördert.

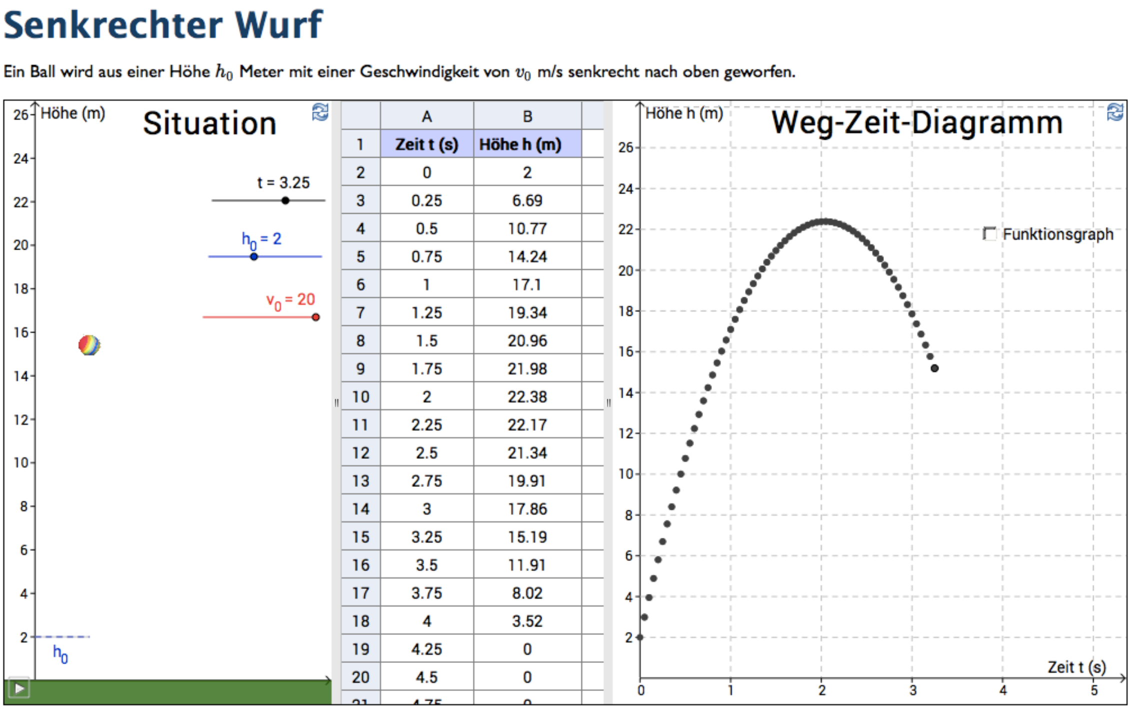
Empirische Untersuchungen scheinen darauf hinzudeuten, dass der Kovariationsaspekt in situativen Einkleidungen leichter erwerbbar ist als im Rahmen von abstrakten Aufgabenstellungen (Malle, 2000; De Bock u.a., 1998).

Dynamische Mathematiksoftware (DMS) wie GeoGebra vereint dynamische Geometrie, Tabellenkalkulation sowie Computeralgebra und ermöglicht die Förderung des funktionalen Denkens (Hohenwarter, 2006). Sie eignet sich durch ihre interaktiven Darstellungen besonders, um den Kovariationsaspekt von Funktionen hervorzuheben. Dadurch soll die Entwicklung des funktionalen Denkens und der Erwerb von Kompetenzen im Zusammenhang mit Funktionen unterstützt werden.

Die folgende Abbildung zeigt die Simulation eines senkrechten Wurfs. Für die Darstellung werden drei Fenster gewählt: eine Situationsdarstellung sowie eine Darstellung der Funktion in Form einer Tabelle und eines Funk-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 743–746). Münster: WTM-Verlag

tionsgraphen. Während die Animation abläuft entsteht parallel dazu im Koordinatensystem eine Darstellung des Funktionsgraphen. Dadurch wird sowohl der Zuordnungsaspekt als auch der Kovariationsaspekt ersichtlich.

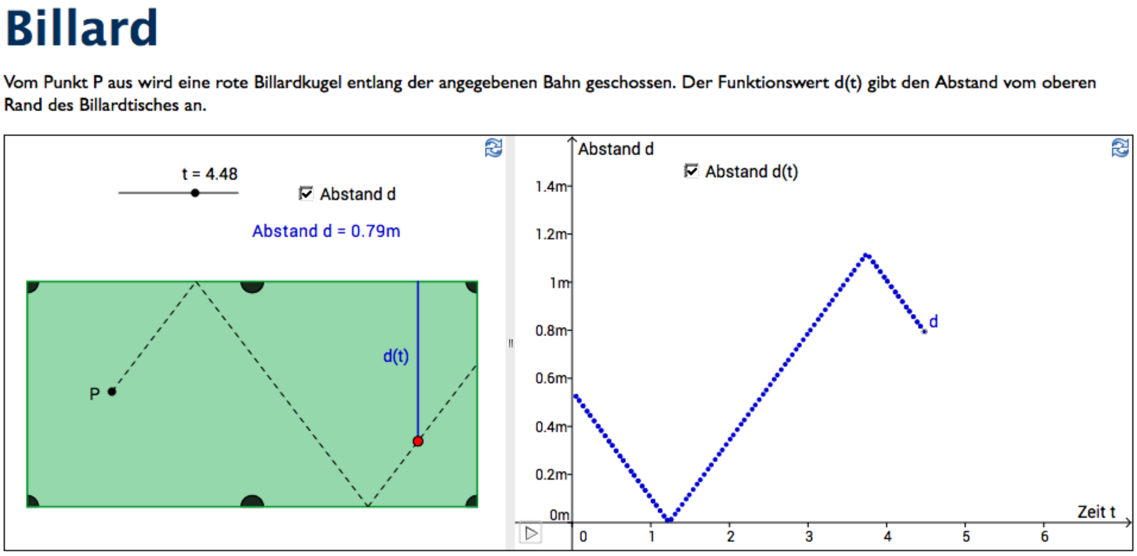



Dieses Applet (siehe http://ggbtu.be/b95856) ermöglicht die Variation innerhalb dieser Anwendungssituation als auch, durch Verändern der Ausgangswerte mit Hilfe der Schieberegler, die Variation der Situation. Ganz bewusst wird dabei nicht die Funktionsgleichung in den Mittelpunkt der Betrachtungen gestellt.

### Graph-als-Bild Fehler

Ein mangelhaft entwickelter Kovariationsaspekt von Funktionen ist unter anderem auch erkennbar am Auftreten des Graph-als-Bild Fehlers (Clement, 1989; Schlöglhofer, 2000; Hoffkamp, 2011). In diesem Fall sehen Schülerinnen und Schüler Funktionsgraphen als photographisches Abbild einer Realsituation. Derartige Fehler werden durch den dargestellten Sachkontext entsprechend provoziert und treten daher situationsabhängig auf.

Durch eine bewusste Auseinandersetzung mit solchen Aufgaben soll das Verständnis für die Interpretation von Funktionsgraphen vertieft werden. Ausgangspunkt für ein weiteres dynamisches Arbeitsblatt ist eine Aufgabe von Schlöglhofer (2000).




Dieses GeoGebra-Applet (siehe http://ggbtu.be/b95856) enthält sowohl eine Situationsdarstellung als auch ein Grafikfenster mit dem zugehörigen Funktionsgraphen. Durch eine entsprechende Umsetzung haben Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, zuerst nur die Bewegung der Billardkugel zu betrachten und anschließend eine Hypothese über den Verlauf des Funktionsgraphen zu bilden. Zum Abschluss kann der Funktionsverlauf im Koordinatensystem angezeigt und damit die gebildete Hypothese überprüft werden.

### Illusion of linearity

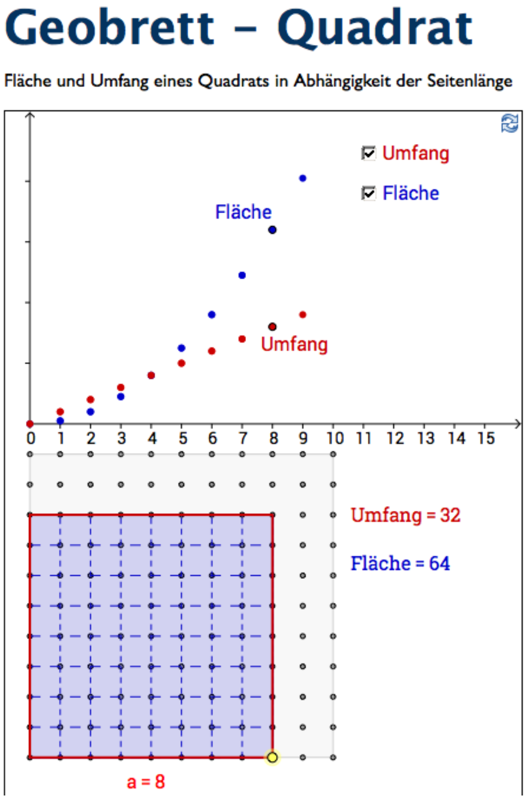
Eine weitere Schwierigkeit von Schülerinnen und Schülern ist die sogenannte „Illusion of linearity“. Damit ist gemeint, dass lineare oder direkt proportionale Modelle bevorzugt für die Beschreibung von Relationen verwendet werden (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002; Hoffkamp, 2011). Vielfältige Erfahrungen mit diesen Modellen, vor allem in der Sekundarstufe 1, führen zu der Fehlvorstellung, dass lineare Modelle sozusagen universal anwendbar sind.

Diese Fehlvorstellung der „Illusion of linearity“ kann einigermaßen leicht überwunden werden, wenn es um Aufgaben in einem realistischen Kontext geht (De Bock u.a., 1998). Auch hierzu eignen sich die oben beschriebenen dynamischen Arbeitsblätter.

### Förderung funktionalen Denkens

Als Vorstufe zum Arbeiten mit Funktionen können bereits in der Primarstufe beziehungsweise zu Beginn der Sekundarstufe 1 funktionale Abhängigkeiten etwa an geometrischen Objekten betrachtet werden.

Im "Geobrett" Applet (siehe http://ggbtu.be/b95856) wird durch Variation der Seitenlänge die Abhängigkeit des Flächeninhalts bzw. des Umfangs eines Quadrats von seiner Seitenlänge dynamisch betrachtet. Damit können Erfahrungen zum Kovariationsaspekt gesammelt werden und durch die Betrachtung des Flächeninhalts zudem ein nichtlinearer funktionaler Zusammenhang untersucht werden.




In einer nun folgenden empirischen Studie möchte ich den Einfluss derartiger dynamischer Arbeitsblätter auf die individuellen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe 1 untersuchen.

## Literatur


Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1-2),* 77–87.

De Bock, D., Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35(1),* 65–83.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50(3),* 311–334.

Hoffkamp, A. (2011). *Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen: Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse.* Unveröffentlichte Dissertation, Technische Universität Berlin.

Hohenwarter, M. (2006). Funktionales Denken mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra. In R. Grothmann (Hrsg.), *Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik.* Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt, Deutschland.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren, 103,* 8–11.

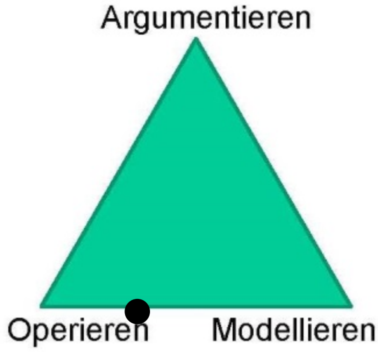
Schlöglhofer, F. (2000). Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *Mathematik lehren, 103,* 16–17.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10*, 3–37.

Torsten LINNEMANN, Basel

# Elementare mathematische Handlungsaspekte

In aktuell diskutierten Kompetenzmodellen zum Mathematikunterricht zum Lehrplan 21 in der Schweiz, zur gemeinsamen Reifeprüfung in Österreich  werden jeweils drei Handlungsaspekte aufgeführt. Hier wird gezeigt, wie sich mit den drei Aspekten Operieren, Argumentieren und Modellieren Mathematikaufgaben typologisieren lassen. Dabei bedienen fokussierte Aufgaben nur jeweils einen Handlungsaspekt, komplexere Aufgaben, zum Beispiel Problemlöseaufgaben, umfassen alle Handlungsaspekte.




Instrument für die Typologisierung ist das „mathematische Handlungsdreieck“. Dieses zeigt an den drei Eckpunkten die „elementaren mathematischen Handlungsaspekte“ (Elmhas). Eine Aufgabe lässt sich als Punkt in der Fläche dieses Dreiecks darstellen.

## 1. Mathematische Handlungsaspekte

Im letzten Jahrzehnt wurden in der Schweiz, Österreich und Deutschland Kompetenzmodelle für den Mathematikunterricht verabschiedet.  Diese enthalten jeweils inhaltliche Leitideen und prozesshafte Kompetenzen, jeweils mit wechselnden Bezeichnungen und Anzahlen. Im Folgenden werden die Tätigkeiten mit „Handlungsaspekten“  bezeichnet. Der zurzeit in der Schweiz diskutierte Lehrplan 21 enthält 3 Handlungsaspekte: „Operieren und Benennen“,  „Mathematisieren und Darstellen“ und „Erforschen und Argumentieren“. Das für das Standardsetting für die österreichische Reifeprüfung diskutierte Modell (Siller et al 2014) enthält die drei Aspekte „Operieren“, „Argumentieren“ und „Modellieren“. Hier zeigt sich eine weitgehende Übereinstimmung. Im österreichischen Modell werden das Kommunizieren und das Darstellen in die anderen Handlungsaspekte bewusst integriert. Sie müssen bei jeder Aufgabe mitgedacht werden. Im Schweizer Modell sind diese Handlungen in die doppelt bezeichneten Aspekte integriert.

Wichtig ist ein weiterer Unterschied: Mathematisieren umfasst in der Schweiz auch innermathematische Situationen, Modellieren in Deutschland und Österreich nicht. Die innermathematischen Situationen sind im österreichischen Modell ins Argumentieren integriert.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 747–750). Münster: WTM-Verlag

## 2. Elementare mathematische Handlungsaspekte

In Siller et al (2014) wird ein Kompetenzstufenmodell für die österreichische Reifeprüfung vorgeschlagen. Die Stufen orientieren sich wie bei Meyer (2007) an der Komplexität der Handlungen und der Selbststeuerung. Insbesondere die erste  Stufe kann als erste Definition für die Elmhas verwendet werden:

| Stufen | Operieren | Argumentieren | Modellieren |
|---|---|---|---|
| 1 | - Identifizieren der Anwendbarkeit eines gegebenen bzw. vertrauten Verfahrens<br>- Abarbeiten / Ausführen einer gegebenen bzw. vertrauten Vorschrift | - Einfache fachsprachliche Begründungen ausführen<br>- das Zutreffen eines Zusammenhangs oder Verfahrens bzw. die Passung eines Begriffes auf eine gegebene (innermathematische) Situation prüfen | - Durchführung eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation<br>- Verwendung vertrauter und direkt erkennbarer Standardmodelle zur Beschreibung einer vorgegebenen Situation mit entsprechender Entscheidung |

Die weiteren Stufen benötigen typischerweise ein Zusammenspiel mehrerer Handlungsaspekte. Zu beachten ist, dass die Elmhas nicht einfach verschiedene Handlungsaspekte der Modelle mit mehr Handlungsaspekten zusammenfassen, vielmehr teilen sich die Handlungsaspekte auf: So wird der Kompetenzaspekt „Wissen, Erkennen und Beschreiben“, aus dem Schweizer HarmoS-Modell in die drei Elmhas integriert: Beim Elhma Operieren wird beispielsweise die Kenntnis von Verfahren benötigt, beim Elmha Argumentieren das Wissen um Begriffe und Sätze.

## 3. Komplexe mathematische Handlungsaspekte

In Bruder (2014) wird vorgeschlagen, Kompetenztrainingslager einzurichten, in denen sich bewusst mit Argumentieren, Modellieren und Problemlösen beschäftigt wird. Bei dieser Methode der Kompetenzentwicklung werden typischerweise mindestens zwei Elmhas angesprochen, wie prototypisch am Beispiel des Problemlösens gezeigt werden soll.

Problemlöseaufgaben beginnen typischerweise mit einer Situation. Ist diese innermathematisch, wird das Argumentieren angesprochen, ist sie ausser-mathematisch das Modellieren. Aus dieser Situation ergibt sich eine mathematische Darstellung, die mit den für das Problemlösen typischen Heuristiken (z.B. Polya 1995) bearbeitet wird. Hier wird argumentiert und operiert. Schliesslich werden die Ergebnisse interpretiert, also nach den obigen Darlegungen wieder argumentiert bzw. modelliert. Hier zeigt sich ein Vorteil des Modells des Lehrplans 21: Beginn und Ende der Problemlöseaufgabe wären hier eindeutig im Mathematisieren zu verorten.

## 4. Handlungsdreieck

Durch die Einfachheit des vorgeschlagenen Modells lassen sich die drei Elmhas in einem Dreieck graphisch darstellen. Die Bearbeitung einer Aufgabe kann nun als Punkt innerhalb dieser Handlungen beschrieben werden. Dies wird im Folgenden an Beispielen diskutiert.

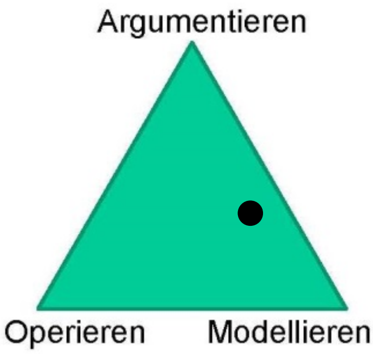
**Handytarife, (KMK 2014)**

„Katja kauft sich ein Handy. Ihr werden verschiedene Tarife angeboten:

Normaltarif N: Monatsgrundpreis 10,95 €, Kosten pro Minute 0,15€, sekundengenaue Abrechnung

Spezialtarif S: Monatsgrundpreis 0€. Kosten pro Minute 0,39€, sekundengenaue Abrechnung.

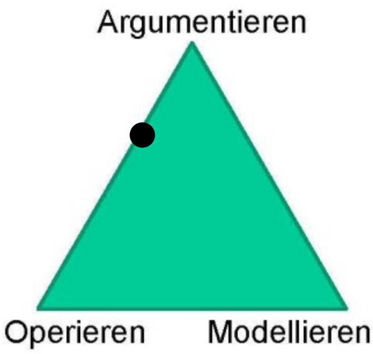
… c) Berate Katja bei der Wahl des Tarifs.“




Es braucht eine Modellierung der Gesprächsgewohnheiten von Katja, diese wird bezogen auf die Tarife (modellieren). Dabei wird operiert, bei der Entscheidung dann argumentiert. Diese Aufgabe ist also eine komplexere Aufgabe, die mehrere Handlungsaspekte anspricht, mit Schwerpunkt auf dem Modellieren.

**Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen**

Ist die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen durch drei teilbar?




Hier muss zunächst experimentiert werden, ob die Aussage bestätigt werden kann (Operieren, 1). Dann wird entschieden, wie die Aufgabe bearbeitet werden soll, beispielsweise operativ durch Betrachtung dreier verschieden hoher Säulen, oder durch allgemeine Beispiele. Schliesslich muss eine Beweisidee gebracht werden – Argumentieren.

Im Schweizer HarmoS-Modell wäre der erste Entscheidungsprozess Mathematisieren, die Mathematisierung müsste also, um die Aufgabe eindeutig einem Handlungsaspekt zuzuordnen, die Mathematisierung vorgeben und ausserdem das Experimentieren zu Beginn einschränken – Das Handlungsdreieck kann dazu dienen, das Profil einer Aufgabe in der Diskussion zu schärfen. In HarmoS (Linneweber, 2009) wird die folgende Variante der Aufgabe formuliert, die vollständig in der Ecke Argumentieren liegt:

„Die Summe n+(n+1)+(n+2) ist immer durch 3 teilbar. (…) Zeige, dass die Behauptung für alle Zahlen stimmt.“

## 4. Ausblick

In der jetzigen Form kann das Handlungsdreieck in Aus- und Weiterbildungen eingesetzt werden, um den Blick auf Handlungsaspekte zu richten. Klassenarbeiten können darauf untersucht werden, ob sie verschiedene Elmhas abdecken. Die Einfachheit des Modells sollte die Akzeptanz erhöhen. Zurzeit sind die Setzungen des Handlungsdreiecks rein normativ. Das ist, wie in Siller et al (2014) argumentiert wird, zunächst notwendig. Mit den im Frühjahr 2014 in Österreich im Rahmen der schriftlichen Reifeprüfung eingesetzten Aufgaben steht aber eine empirische Prüfung eines Modells mit drei Handlungsaspekten bevor. Zu beobachten wäre dabei, wie sich das innermathematische Mathematisieren einordnen lässt – eher nahe beim Modellieren oder nahe beim Argumentieren.

## Literatur


Bruder, R., Bergmann, L., Krüger, U.-H. (2014): LEMAMOP - ein Kompetenzentwicklungsmodell für Argumentieren, Modellieren und Problemlösen wird umgesetzt. Erscheint in: In J. Roth & J. Ames (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Münster: WTM-Verlag

Eidgenössische Erziehungsdirektorenkonferenz EDK (2011): Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards. http://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf (14.01.2014)

Deutschschweizer Erziehungsdirektorenkonferenz D-EDK (2013): Vernehmlassungsentwurf Lehrplan 21 Mathematik. http://konsultation.lehrplan.ch/downloads/check_pdf.php?b2=1&b3=1&code=5|0&druckzyklus=0 (07.03.2014)

KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. In: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf. (20.03.2014).

Linneweber, H., Wälti, B., Moser-Opitz, E. (2009): HarmoS Mathematik. Wissenschaftlicher Kurzbericht und Kompetenzmodell. http://www.edudoc.ch/static/web/arbeiten/harmos/math_kurzbericht_2009_d.pdf (07.03.2014)

Meyer, H. (2007). Leitfaden Unterrichtsvorbereitung. Berlin: Cornelsen Scriptor

Siller, H.-S., Bruder, R. , Linnemann, T. , Hascher, T., Sattlberger, E. , Steinfeld, J., Schodl, M. (2014): Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II – Konkretisierung einer Stufenmodellierung. Erscheint in: In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Münster: WTM.

Torsten LINNEMANN, Basel

# Mathematikmaterialien mit Berufsfeldbezug in der Sekundarstufe II

Welche mathematikhaltigen Situationen haben Berufspersonen in Gesundheitsberufen, sozialen Berufen und pädagogischen Berufen zu gewärtigen? Dieser Forschungsfrage wurde in Interviews mit Ausbildenden und Praktizierenden in der Schweiz nachgegangen. Die sich ergebenden Themen lassen sich beispielsweise den Inhaltsbereichen „Umgang mit Potenzen", „nichtlineare Prozesse" und „Umgang mit Graphiken und Tabellen" zuordnen – also längst nicht nur den zu erwartenden Kompetenzen bei proportionalen Zusammenhängen und Überschlagsrechnungen.

## 1. Beschreibung des Projekts

Die Fachmittelschule (FMS) ist eine Schweizer Schulform, deren Abgängerinnen und Abgänger Berufe beispielsweise im Gesundheitswesen (z.B. Pflegefachpersonen) und in der Pädagogik (z.B. Primarschullehrpersonen) ergreifen. „Die Fachmittelschule ist eine allgemein bildende Schule, vermittelt ein berufsfeldbezogenes Angebot und betont intensiv die Persönlichkeitsbildung."(EDK, 2004). Das Projekt „kognitiv aktivierender Mathematikunterricht in der Mittelschule, KAMM" (Linnemann 2012, 2013, 2013b) hat zum Ziel, ein Konzept für den Mathematikunterricht in der FMS zu entwickeln. Beschrieben werden hier Ergebnisse des Teilprojekts „KAMM 4 – Desiderata abnehmender Institutionen", in dem untersucht wird, was in den an die FMS anschliessenden Bildungsgängen in Mathematik erwartet wird. KAMM 4 wurde gefördert vom Kanton Basel-Landschaft.

Im Projekt KAMM 4 wurden Studienbeschreibungen, Lehrmittel und Skripten zu Berufsausbildungen und Studiengängen zur sozialen Arbeit, den Life Sciences, Pflegefachpersonen und Primarlehrpersonen analysiert. Mit diesem Hintergrund wurden Interviews mit Ausbildenden und Praktizierenden der entsprechenden Berufe geführt. Besonders intensiv wurde in Zusammenarbeit mit Dr. Kaiser (Kaiser, 2012) der Pflegeberuf betrachtet.

## 2. Berufsfeld Gesundheit

Zunächst wurden zwei Interviews mit Ausbildnerin und Ausbildner an «Höheren Fachschulen» geführt: Die Mathematkausbildung umfasst das „Pflegerechnen" – nur 12 Stunden. In anderen Ausbildungsbereichen und im Beruf selber gibt es dann einige potenziell mathematikhaltige Situationen. Diese Situationen wurden in Bereichen zusammengefasst. In zwei In-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 751–754). Münster: WTM-Verlag

terviews mit mehreren Ausbildnerinnen und Ausbildnern, Praktikern und Praktikerinnen wurden die Ergebnisse vertieft und verifiziert. Die Interviewten beschrieben jeweils kritische Pflegesituationen, in dem Mathematikkenntnisse zentral waren. Danach wurde die Liste der Bereiche durchgearbeitet.

**Fachrechnen Pflege**

Für das „Fachrechnen Pflege“ werden benötigt: Grössenvorstellungen, Konzentrationen, Umrechnungen (Vorsilben, %, ml; Einschätzung von Ampullengrössen); Umgang mit Graphiken und Tabellen; Statistik, Messungen (Bandbreite, Variabilität); Umgang mit Proportionalität; Überschlagsrechnung.

Insbesondere konnten Ergebnisse von Hoyles (2001) bestätigt werden: alle Pflegefachpersonen konnten mit proportionalen Zusammenhängen flexibel umgehen – und hatten jeweils unterschiedliche Vorgehensweisen.

**Pflegespezifische mathematikhaltige Situationen**

Es werden vier Beispiele aufgeführt, eine ausführliche Darstellung findet sich in Linnemann (2014).

In der Onkologie und auch bei der Behandlung von Kindern erfolgt die Medikamentenabgabe oft nicht pro kg Körpergewicht, sondern orientiert sich an der Körperoberfläche. Hier gibt es Berechnungsformeln – die Potenzrechnung erfordern, also Kenntnisse bei nichtlinearen Zusammenhängen. Ein weiteres Beispiel in diesem Bereich ist der Body-Mass-Index.

Kritisch ist hier die Reservemedikation: um wie viel darf die Dosis erhöht werden, wenn ein Medikament nicht anspricht. Dafür verschreibt der Arzt eine „Reservemedikation“, die aber verständig eingesetzt werden muss – und allenfalls mit dem Arzt diskutiert werden muss.

Potenzen spielen weiterhin beim Setzen von Injektionen eine Rolle: Der Durchfluss durch eine Röhre vergrössert sich bei laminaren Strömungen mit der vierten Potenz des Durchmessers (Gesetz von Hagen-Poiseuille). Eine Nadel, die nur 0.8mm Durchmesser wirkt fast genauso gross wie eine mit 1mm Durchmesser. Sie hat aber bei gleichem Kraftaufwand nur die Hälfte des Durchflusses. Beispielsweise bei einem port-a-cath, der kurz vor dem Herzen angeschlossen ist, kann das schnell zu Problemen führen. Hier muss ein Bewusstsein des nichtlinearen Zusammenhangs vorhanden sein.

Wirkstoffkonzentrationen im Körper haben oft einen „therapeutischen Bereich“, unterhalb dessen sie nicht wirken und oberhalb dessen sie toxisch sind. Besonders schmal ist dieser Bereich bei Digoxin, einem Wirkstoff aus der Fingerhutpflanze. Digoxin muss oft in Tablettenform eingesetzt werden. Der Wirkstoff braucht Zeit, bis er im Blut ist – und die Konzentration erhöht sich zunächst weiter, verringert sich dann exponentiell. Wichtig ist also, wann die nächste Tablette verabreicht wird. Wünschenswert ist in diesem Bereich eine Kenntnis von Zerfallsprozessen.

Schliesslich arbeiten Pflegefachpersonen viel mit Tabellen und Graphiken, in ausgedruckter Form oder immer häufiger elektronisch. Ein Verständnis der zugrundeliegenden Modellierungen und eine grosse Flexibilität beim Umgang mit Statistiken erscheinen wichtig.

### 3. Berufsfelder Soziales und Kunst

In diesen Berufsfeldern war es schwierig, Kontakte herzustellen. Im Bereich Kunst gab es keine Antworten der Institutionen auf die Anfragen. Im Bereich soziale Arbeit wurde einzig ein Interview mit einer Berufsperson durchgeführt. Als mathematikhaltiger Bereich spielt hier die Budgetberatung eine Rolle. Vom Autoren wird künftig versucht, sich an Projekte aus der Berufspädagogik anzuschliessen.

### 4. Berufsfeld Pädagogik

Hier wurden die Vorlesungsverzeichnisse und Skripten der Ausbildung zur Kindergarten- Unterstufen Lehrperson und zur Primarlehrperson der Pädagogischen Hochschule der Fachhochschule Nordwestschweiz (PH FHNW) analysiert. Es wurden zwei Interviews mit Dozierenden durchgeführt.

Die PH FHNW orientiert sich in diesen Studiengängen am curricularen Wissen, dass Lehrpersonen benötigen. Themen für Primarlehrpersonen sind zum Beispiel Primzahlen, natürliche Zahlen, rationale Zahlen und Zahlsysteme.

Festzustellen sind dabei verbreitete Mängel beim Bruchrechnen, Prozentrechnen, elementaren Flächenberechnungen und Funktionen. Oft verwenden die Studierenden unverstanden Formeln und Rechenregeln, beispielsweise beim Bruchrechnen, quadratischen Funktionen und Kombinatorik.

Wichtig sind vor allem Einstellungen zur Mathematik: Eine Vorstellung von Mathematik nicht als Anwendung von Rezepten sondern die Betonung von kreativen Aspekten. Es braucht eine Bereitschaft, Aufgaben zu lösen, die sich nicht sofort aus den bekannten Techniken erschliessen. Verschiedene Lösungswege müssen anerkannt und begrüsst werden. Mathematische Werkzeuge sollten als Möglichkeiten des Entdeckens gesehen werden, nicht zur Verwendung eines Rezepts. Implizite Vereinbarungen, beispielsweise über Zahlenräume, müssen bewusst werden. Beispielsweise ist 3:2 nicht lösbar in den natürlichen Zahlen, 2 ist kein Teiler von 3. Im Zahlraum der rationalen Zahlen lassen sich aber durchaus 3kg Mehl in zwei gleich grosse Teile aufteilen.

Mit den bisher bereits entstandenen Lernumgebungen im Projekt KAMM (Linnemann 2012, 2013, 2013b) bestehen bereits einige Materialien, die die Flexibilität im Umgang mit Mathematik fördern sollten.

## 5. Weitere Arbeiten

Aus den Ergebnissen des Projekts werden nun Unterrichtsmaterialien für den Einsatz in der Fachmittelschule entwickelt. Diese werden in Fortbildungen mit Lehrpersonen dargestellt.

Die Materialien sollen auf einer Online-Plattform veröffentlicht werden. Möglicherweise wird ein Lehrmittel für die Fachmittelschule erstellt.

Die Ergebnisse des Projekts KAMM werden dargestellt auf der Homepage http://web.fhnw.ch/ph/mathematikdidaktik/forschungs-und-entwicklungsprojekte/kamm.

## Literatur


EDK, Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (2004): Rahmenlehrplan für Fachmittelschulen. http://edudoc.ch/record/2033/files/5-1d.pdf

Hoyles, C., Noss, R., & Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. Journal for Research in Mathematics Education, S. 4-27.

Kaiser, H. (2013): Ansätze für eine berufsbildungsspezifische Didaktik des Fachrechnens. Berufs- und Wirtschaftspädagogik – Online. www.bwpat.de/ausgabe24/kaiser_bwpat24.pdf (04.02.2014)

Linnemann, T. (2012): Innermathematisches Experimentieren in Lernumgebungen in der Sekundarstufe II. In: Ludwig, M. und Kleine, M.: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik, S. 557-560. Münster: WTM.

Linnemann, T. (2013): Mathematikunterricht in der Fachmittelschule mit Lernumgebungen. Bulletin des Vereins schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte. Nr. 121, S. 27-32. Luzern.

Linnemann, T. und Turina, M. (2013b): Lernumgebungen differenziert begleiten. In: Ludwig, M. und Kleine, M.: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik. S. 616-619. Münster: WTM.

Linnemann, T. (2014): Projektbericht zum Projekt „KAMM 4 – Desiderata abnehmender Institutionen“. http://web.fhnw.ch/ph/mathematikdidaktik/forschungs-und-entwicklungsprojekte/kamm/artikel-ergebnisse

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Basel

# Testitems zur mathematischen Sprachkompetenz

2016 findet ein erster landesweiter Test (dt./fr./it.) zur Überprüfung der Erreichung mathematischer Bildungsstandards in der Schweiz statt. Dieser Test betrifft die Grundkompetenzen (Mindeststandards) im Fach Mathematik der Jahrgangsstufe 11 (Ende der obligatorischen Schulzeit) und wird als „Computer Based Test" („CBT") konzipiert. Der Beitrag thematisiert den Übergang von der Beschreibung mathematischer Kompetenzen zur Konstruktion von CBT-Items und die Schwierigkeiten (und Chancen), die sich dabei bezüglich der sprachlich-kommunikativen Komponenten mathematischer Kompetenz ergeben.

Das HarmoS-Kompetenzmodell Mathematik, welches die Grundlage für die mathematischen Bildungsstandards in der Schweiz bildet (EDK, 2011), wurde 2007 empirisch validiert – an diesem Validierungstest nahmen insgesamt ca. 12'000 Lernende aus den drei Sprachregionen (ital., frz., dt.) teil. In der Jahrgangsstufe 11 haben rund 6500 Lernende etwa 15'000 Testhefte bearbeitet, so dass jedes der 34 Testhefte im Durchschnitt von 440 Lernenden bearbeitet wurde. Die eingesetzten 273 Testitems sollen nun - soweit möglich - in eine CBT-Aufgabendatenbank überführt werden und für den landesweiten Test 2016 und kantonale Tests zur Verfügung stehen. Beim Validierungstest wurden allerdings aus organisatorischen Gründen in der Jahrgangsstufe 11 keine Items zu den Kompetenzaspekten „Verwenden von Instrumenten und Werkzeugen" und „Darstellen und Kommunizieren" sowie zum Kompetenzbereich „Daten und Zufall" eingesetzt. Immerhin enthält der Kurzbericht des Konsortiums (2009, S. 92ff.) aber auch Itembeispiele zu diesen Kompetenzaspekten und -bereichen.

Da die 2007 für die Validierung generierten Items zwar in einem „Paper-Pencil-Test" („PPT") eingesetzt, gleichzeitig aber bereits in einer Datenbank erfasst wurden, ist man leicht geneigt, die Probleme zu unterschätzen, welche bei der Überführung der Items in eine CBT-Aufgabendatenbank auftauchen. Tatsächlich sind sowohl grundsätzliche als auch vom einzelnen Item abhängige Entscheidungen zu treffen, die nicht nur organisatorische, psychologische, testtheoretische oder technische, sondern auch – mit diesen eng verzahnte - mathematikdidaktische Überlegungen erfordern. Da der Wechsel von PPT zu CBT das Medium betrifft, das (i) die Aufgabenstellung, (ii) die Bearbeitung der Aufgabe, (iii) die Lösung und (iv) die Bewertung ermöglicht, ist es nicht erstaunlich, dass sprachlich-kommunikative Komponenten mathematischer Kompetenz und ihrer Erfassung hier eine wichtige Rolle spielen. Dabei erkennt man schnell, dass der Wechsel des

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 755–758). Münster: WTM-Verlag

Mediums sowohl Barrieren als auch (auf die Zukunft gerichtet) Chancen in allen vier Bereichen mit sich bringen kann. Unter den Barrieren, die zur Zeit existieren, sich aber durch geeignete Maßnahmen und zukünftige Entwicklungen einschränken lassen, sind zu nennen:

(i) Verständnisschwierigkeiten aufgrund fehlerhafter Darstellung von: Sonderzeichen (Umlaute, Akzente, mathematische Symbole); Tabellen; Formatierungen; Bildauflösungen; oder aufgrund schwerverständlicher Navigation durch den Test.

(ii) Schwierigkeiten, das Medium als Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe zu benutzen, insbesondere: die Lösung durch eine Mischung von Text und Skizzen zu entwickeln; Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durchzuführen; Freihandzeichnungen, Tabellen, Zuordnungen, Formeln etc. in einfacher Weise zu notieren; u.a.m.

(iii) Schwierigkeiten, die Lösung verständlich darzustellen: durch kommentierte Zeichnungen und Skizzen; durch Formelsprache; durch Tabellen; durch Funktionsgraphen; durch Diagramme; durch Darstellung von Mengenverhältnissen, u.a.m.

(iv) (sofern eine automatische Auswertung z.B. zur Selbstevaluation der Lernenden intendiert ist:) ein Verzicht auf Aufgabenformate, die eine Analyse und Bewertung durch eine Lehrkraft nötig machen oder eine rechnerische Nachprüfung erfordern, die in der CBT-Software nicht programmiert werden kann.

Diese Barrieren können (durch Verbesserungen der Soft- und Hardwareorganisation und verstärkter ICT-Kompetenz der Lernenden) bereits heute oder in naher Zukunft abgebaut oder verkleinert werden, zusätzlich bieten sich neue Möglichkeiten:

(i) Durch Audio- und Videofiles: Möglichkeit zur Erfassung des mathematischen Hörverstehens; des Vorstellungsvermögens; des Verständnisses mathematischer Prozesse.

(ii) Durch Tablets, andere Eingabegeräte und modifizierte Tools: Möglichkeit, Gedankengänge aufgrund der zeitlichen Einordnung der Notizen zu rekonstruieren; durch den Einsatz angepasster Algebra- und Geometriesoftware die Kompetenz zum Verwenden von Instrumenten und Werkzeugen zu erfassen.

(iii) Durch Algebra- und Geometriesoftware und Feedbackfunktion: Möglichkeit (auf Seiten der Lernenden), die Kompetenz zur Darstellung einer mathematischen Problemlösung durch Kombination von beschreibendem und erläuterndem Text, Formeln, Berechnungen, Diagrammen, Tabellen, Funktionsgraphen, Skizzen, etc. sichtbar zu machen; durch Reaktionen auf Feedback, die Kompetenz zum Interpretieren und Reflektieren der Resultate zu zeigen.

(iv) Durch Protokoll- und interne und externe Auswertungstools: Möglichkeit (auf Seiten der MathematikdidaktikerInnen), auf der Basis eines ausführlichen zeitlich geordneten Protokolls eine differenzierte Kompetenzeinschätzung vornehmen zu können.

Welche Testitems bieten sich für die Überprüfung mathematischer Kompetenzen an, die sprachlich-kommunikative Kompetenzen umfassen, und welche CBT-Itemtypen stehen dafür zu Verfügung oder wären wünschenswert?

Beim *Kompetenzaspekt „Wissen, Erkennen und Beschreiben“* geht es vor allem darum, zwischen den 3 Ebenen des semantischen Dreiecks flexibel wechseln zu können: beispielsweise ausgehend vom Fachausdruck „Trapez“ zur Trapezfigur und zur Beschreibung/Definition eines Trapezes überzugehen, von der Trapezfigur zur Bezeichnung und zur Beschreibung/ Definition, von der Beschreibung/Definition zur Trapezfigur und zum Fachausdruck. Entsprechend ausgehend von der Fachbezeichnung „Satz des Pythagoras“ zu Anwendungsbeispielen und zur Beschreibung/Erläuterung/Begründung der Behauptung, usw. Bei leichteren Testaufgaben sind die Elemente der drei Ebenen sowie zahlreiche Distraktoren vorgegeben und müssen nur richtig zugeordnet oder eingesetzt werden, respektive Multiple-Choice-Fragen richtig beantwortet werden. Für beides stehen im QTI-Standard mehrere Itemtypen zur Verfügung, bei denen die Auswertung, da es sich um gebundene Antwortformate handelt, jeweils automatisch erfolgen kann. Bei schwierigeren Testaufgaben ist jeweils nur ein Element vorgegeben, die jeweils gesuchten Bezeichnungen, Figuren oder Beschreibungen hingegen müssen selbst erstellt werden. Da es sich um ein offenes Antwortformat handelt, ist eine automatische Beantwortung nur möglich, wenn die Menge richtiger Antworten abschließend angegeben werden kann. Nicht alle Itemtypen mit offenem Antwortformat, welche in PPTs möglich sind (z.Zt.) auch in CBTs möglich, eine befriedigende Möglichkeit für die Lernenden, Formeln, Zeichnungen oder Skizzen einzugeben fehlt noch.

Beim *Kompetenzaspekt „Darstellen und Kommunizieren“* geht es um die Fähigkeit, relevante mathematische Informationen in geeigneter Form aus unterschiedlichen Medien zu entnehmen und sie so aufzubereiten, dass sie für andere verständlich sind und von ihnen weiter verwendet werden können. CBT-Items bieten die Möglichkeit, durch Videoclips in mathematische wie kommunikative Situationen und Kontexte einzuführen und daran

Schreibaufträge im Stil der obigen Kompetenzbeschreibung zu knüpfen. Hier fehlt zur Zeit jedoch noch die für anspruchsvolle Darstellungen nötige Implementation von Geometrie- und Algebrasoftware, wie etwa Geogebra, sowie reichere Möglichkeiten der Textgestaltung (Tabellen, Symbole, Formeln) für die Lernenden. Die Fähigkeit, die für eine Problemstellung relevante Informationen aus kontinuierlichen und diskontinuierlichen Texten zu entnehmen, kann mit Multiple Choice und Hot Spot Itemformaten getestet werden.

Beim *Kompetenzaspekt „Interpretieren und Reflektieren der Resultate“* bieten sich Items an, in denen die Richtigkeit und Kohärenz einer Problemlösung mit einer Problemstellung beurteilt und die Beurteilung begründet werden soll, sowie Fragen zur Übertragbarkeit des Lösungswegs auf andere Problemstellungen (jeweils offene Antwortformate).

Das Erstere bietet sich auch für den *Kompetenzaspekt „Argumentieren und Begründen“* an, wobei es hier um die Richtigkeit und Kohärenz einer Begründung resp. Argumentation geht. Daneben können Lückentexte benutzt werden, in denen teils die Begründung für einen Gedankenschritt teils der Gedankenschritt selbst ergänzt werden muss (offene Antwortformate).

## Literatur


EDK (Schweizerische Konferenz der Erziehungsdirektoren) (2011). *Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards.* Retrieved from: http://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf (March 2012).

Konsortium Mathematik (2009): *HarmoS Mathematik. Wissenschaftlicher Kurzbericht und Kompetenzmodell*. (Manuskript) Retrieved from: http://www.edudoc.ch/static/web/arbeiten/harmos/math_kurzbericht_2009_d.pdf (March 2014).

Linneweber-Lammerskitten, H. and Wälti, B. (2008). HarmoS Mathematik: Kompetenzmodell und Vorschläge für Bildungsstandards. *BZL, 26 (3),* 326–337.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2014a). Mathematikdidaktik, Bildungsstandards und mathematische Kompetenz. In Linneweber-Lammerskitten, H. (Ed.) (2014). *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II.* (pp. 9-27). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2014b). Darstellen und Kommunizieren, Argumentieren und Begründen, Interpretieren und Reflektieren von Resultaten. In Linneweber-Lammerskitten, H. (Ed.) (2014). *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II.* (pp. 179-200). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2012). Sprachkompetenz im Mathematikunterricht. In Ludwig, Matthias and Kleine, Michael (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 561–564). Münster: WTM-Verlag

Carolin LOCH, Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE, Kiel

# Elementare Validität der KiL-Maße für fachdidaktisches Wissen und Fachwissen im schulischen Kontext von Lehramtsstudierenden der Mathematik

In der KiL-Studie (Messung professioneller Kompetenzen in mathematischen und naturwissenschaftlichen Lehramtsstudiengängen) wurde fachspezifisches Wissen von Lehramtsstudierenden als Fachwissen (FW), fachdidaktisches Wissen (FDW) und Fachwissen im schulischen Kontext (FWsK) konzeptualisiert und entsprechende Instrumente zur standardisierten Erhebung dieser Wissensbereiche entwickelt. In diesem Beitrag wird ausgehend von den quantitativen Befunden zur Struktur dieser Tests ($N = 505$) eine ergänzende Interviewstudie vorgestellt. Diese untersucht die inhaltliche Validität der beiden schulnahen Maße auf Aufgabenebene um ambivalente quantitative Befunde einordnen zu können. Dabei gelingt es aufzuzeigen wie Lehramtsstudierende ($N = 18$) auf unterschiedliches Wissen zur Lösung der Aufgaben mit schulischem Bezug (FDW, FWsK) zurückgreifen.

## 1. Zum Begriff der Validität

Die Validität stellt ein wichtiges Gütekriterien für Tests dar: „Ein Test gilt dann als valide (‚gültig'), wenn er das Merkmal, das er messen soll, auch misst und nicht irgendein anderes." (Moosbrugger & Kelava 2008). In der Literatur finden sich verschiedene Aspekte die zur Validierung von Instrumenten beachtet werden sollten. In diesem Beitrag fokussieren wir auf die die Inhaltsvalidität. Diese befasst sich – aus im Folgenden noch zu erläuternden Gründen – damit inwiefern theoretisch angenommene Wissensarten tatsächlich bei der Bearbeitung der Aufgaben eines Tests angewendet werden.

## 2. Konzeptualisierung des fachspezifischen Professionswissens in KiL

Die KiL-Studie hat zum Ziel reliable und valide Testinstrumente zur Erfassung des professionellen Wissens von Lehramtsstudierenden, u. a. der Mathematik, zu entwickeln. Dabei unterscheidet die der Testentwicklung zugrundeliegende Konzeptualisierung des fachspezifischen Professionswissens von Lehrkräften nicht nur zwischen den von Shulman (1986) geprägten Komponenten *Fachwissen* (FW) und *fachdidaktisches Wissen* (FDW), sondern es wurde eine dritte Komponente eingeführt: das *Fachwissen im schulischen Kontext* (FWsK). In diesem Modell wird unter *Fachwissen* universitäres mathematisches Fachwissen verstanden. *Fachdidaktisches*

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 759–762). Münster: WTM-Verlag

*Wissen* umfasst in Anlehnung an die Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissens in der COACTIV-Studie Wissen über Instruktionsstrategien, Schülerkognitionen und Aufgabenpotenzial (Krauss et al., 2011). *Fachwissen im schulischen Kontext* beschreibt eine Art anwendungsbezogenes mathematisches Wissen von Lehrkräften. Es wird in Abgrenzung zum Fachwissen als mathematisches Wissen mit deutlichem Schulbezug oder in Abgrenzung zum fachdidaktischem Wissen als schulmathematisches, aber nicht speziell mit dem Lernen von Mathematik verbundenes Wissen verstanden. Hierzu gehört z. B. in Anlehnung an Ball, Thames und Phelps (2008) das Wissen über die Anordnung der mathematischen Inhalte im Curriculum aufgrund ihrer mathematischen Struktur und der daraus resultierenden Abhängigkeiten. Ferner das Wissen über mathematische Ungenauigkeiten, die aufgrund fachdidaktischer Reduktionen mathematischer Inhalte für den Schulunterricht entstehen (Loch, Lindmeier & Heinze, 2013).

## 3. Quantitative empirische Befunde zur Struktur des Wissens

Um zu überprüfen, inwiefern sich die angenommene dreidimensionale Struktur tatsächlich zur Beschreibung des professionellen Wissens von Mathematiklehramtsstudierenden eignet wurden diese drei Komponenten operationalisiert und im Rahmen der KiL-Hauptstudie ($N = 505$ Mathematiklehramtsstudierende, 27 FDW-Aufgaben, 31 FWsK-Aufgaben, 42 FW-Aufgaben) eingesetzt. Als Analysemethode wurden mehrdimensionale between-item Raschmodellierungen gewählt, wobei relative Modellvergleiche mit Hilfe der informationstheoretischen Indizes AIC, BIC und CAIC herangezogen wurden. Es zeigt sich, dass das dreidimensionale Modell, in dem zwischen FDW, FWsK und FW unterschieden wird, nur geringfügig besser zu den Daten passt als das zweidimensionale Modell, in dem die schulnahen Konstrukte FWsK und FDW zu einer Wissenskomponente zusammengefasst werden. Entsprechend ergibt sich eine starke latente Korrelation zwischen FDW und FWsK von $r = .84$, so dass diese beiden Wissenskomponenten einen hohen Zusammenhang aufweisen.

Auf Grundlage dieser Daten lässt sich somit nicht unbedingt legitimieren, dass die beiden schulnäheren Wissenskonstrukte (FDW, FWsK) voneinander zu unterscheidende Wissensbereiche sind. Dies könnte allerdings zwei Ursachen haben: Zum einen könnten die Konstrukte nicht hinreichend scharf trennbar sein, so dass das schulnahe mathematikspezifische Wissen von Lehrkräften nur analytisch aber nicht praktisch in die beiden Konstrukte zu differenzieren ist. Andrerseits könnte der empirische Befund auf unzureichend inhaltsvalide Maße zurückzuführen sein, so dass die Konstrukte nicht hinreichend spezifisch abgebildet werden. Um letzteres untersuchen zu können wurde für diese Instrumente die in Folgenden berichtete Interviewstudie zur Überprüfung der Inhaltsvalidität durchgeführt.

## 3. Beschreibung und Ergebnisse der Interviewstudie

Mathematiklehramtsstudierende (N = 18) wurden gebeten je 14 Aufgaben der KiL-Teilttests (6 FDW, 8 FWsK Aufgaben) zu bearbeiten. Anschließend wurden sie in einem standardisierten retrospektiven Interview nach Begründungen für die von ihnen gegebenen Lösungen befragt. Diese Begründungen wurden pro Aufgabe zum einen bezüglich der fachlichen Richtigkeit (falsch, richtig) und zum anderen bezüglich der Art der Begründung codiert, wobei zwischen Begründungen die (1) überwiegend FDW, (2) überwiegenden FWsK, (3) ausgewogen FWD und FWsK oder (4) konstrukt-irrelevantes Wissen nutzen, unterschieden wurde. In die letzte Kategorie fiel beispielsweise Raten oder das ausschließliche Nutzen von Testbearbeitungsstrategien. Dabei wurde als Indikatoren für Inhaltsvalidität gewertet, wenn:

- **I1** richtige Lösungen fachlich richtig begründet werden,
- **I2** Aufgaben eines Wissensbereichs durch Rückgriff auf das zugehörige Wissen begründet werden (d. h. FDW-Aufgaben durch FDW begründet; FWsK durch FWsK begründet)

Zur Überprüfung dieser Indikatoren wurden die 18 mal 14 Aufgabenbearbeitungen als Analyseeinheiten gewählt, wobei sichergestellt wurde, dass es keine Hinweise auf personenspezifische Auffälligkeiten in den Bearbeitungen gab, die gegen dieses Vorgehen sprechen würden. Die Aufgabenlösungen, Kodierungen der fachlichen Richtigkeit der Begründung sowie der Begründungsart wurden zur Untersuchung der oben genannten Sichtweisen in 4-Feldertafeln kontrastiert und die Verteilungen mit Hilfe von $\chi^2$-Tests auf Unabhängigkeit überprüft (Tafelstruktur I1: Aufgabe richtig/falsch x Begründung fachlich richtig/falsch; I2a: Aufgabentyp FDW/FWsK x Begründungstyp mit FDW/nicht-FDW; I2b: Aufgabentyp FDW/FWsK x Begründungstyp mit FWsK/nicht-FWsK). Es konnten 242 (I1) bzw. 250 (I2) der 252 Analyseeinheiten berücksichtigt werden, da nur wenige Daten fehlten. Dabei werden die *p*-Werte der Prüfgrößen in allen Fällen hoch signifikant (Tabelle 1). Es besteht also ein signifikanter Zusammenhang sowohl zwischen der Richtigkeit der Aufgabenlösung und der fachlichen Richtigkeit der Begründung (I1), als auch der Art der Aufgabe und der Art der Begründung für beide Konstrukte (I2a, I2b). Zudem zeigen sich mittlere bis starke Effekte. Damit konnte über die gewählten Indikatoren die Inhaltsvalidität der Maße bestätigt werden.

**Tabelle 1: Ergebnisse der Zusammenhangsanalysen nach I1 und I2**

| *Indikator* | | *$\chi^2(1)$* | *Effektstärke $V_C$* |
|---|---|---|---|
| fachliche Korrektheit | **I1** | $171.80^{***}$ | $.84^{***}$ |
| Begründungsart | **I2a: FDW** | $39.91^{***}$ | $.40^{***}$ |
| | **I2b: FWsK** | $100.12^{***}$ | $.63^{***}$ |

$^{***}$1 %- Signifikanzniveau

## 4. Fazit

Mit Hilfe der vorgestellten Interviewstudie konnte gezeigt werden, dass richtige Lösungen bei Aufgaben zu den unterschiedlichen schulnahen Wissensbereichen des KiL-Test fast immer auf konstrukt-adäquate Antwortprozesse zurückzuführen sind. Dies ist insofern erfreulich, als die theoretisch angenommene dreidimensionale Struktur zur Beschreibung des professionellen Wissens von Mathematiklehramtsstudierenden, die sich empirisch zwar als haltbar, aber nicht als vorbehaltlos legitimierbar abbildet, damit inhaltlich begründet werden kann. Somit steht in KiL ein differenziertes Instrument zur Erhebung fachspezifischen Wissens von Lehramtsstudierenden in den drei Konstrukten *Fachwissen*, *fachdidaktisches Wissen* und *Fachwissen im schulischen Kontext* zur Verfügung. Insbesondere kann zwischen zwei schulnahen Konstrukten unterschieden werden: Das mathematische Wissen mit deutlichem Bezug zur Schulmathematik und das fachdidaktische Wissen, das stärker die Lernenden in den Blick nimmt.

## Literatur


Ball, D. L., M. H. Thames & G. Phelps (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Krauss S., Blum W., Brunner M., Neubrand M., Baumert J., Kunter M., Besser M. & Elsner J. (2011). Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Profes-sionswissen von Mathematiklehrkräften. In: Kunter M., Baumert, J & Blum, W. (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 135-161). Münster: Waxmann.

Loch, C., Lindmeier, A. & Heinze, A. (2013). Instrumententwicklung zur Erfassung professionellen Wissens von Lehramtsstudierenden. In: Greefrath, G., Käpnick, F. & Stein, M. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (Bd 1, 624-627). Münster: WTM.

Moosbrugger, H. & Kelava, A. (2008). Qualitätsanforderungen an einen psychologischen Test (Testgütekriterien). In Moosbrugger H. & A. Kelava (Hrsg.), *Test- und Fragebogenkonstruktion* (S. 7-26). Berlin: Springer.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Joachim LOTZ, Bertolt LAMPE, Bielefeld

## Mathematische Vorkenntnisse von Studienanfängern – Was kann man fordern, wo muss man unterstützen?

In mathematikhaltigen Studiengängen verlangt der Übergang Schule-Hochschule vor allem in den ersten Semestern von den Lehrenden eine schwierige Verbindung zweier Aspekte: zum einen, an schulische Vorkenntnisse anzuknüpfen (Zech, 2002, S.130), zum anderen aber auch hochschulspezifische Denk- und Arbeitsformen, sowie fachtypische Wissensstandards neu zu entwickeln. Es wird eine differenziertere Sicht auf mathematische Kenntnisse und Defizite von Studienanfängern vorgeschlagen, die es ermöglichen soll, Eigenverantwortung und Selbständigkeit beim Überwinden dieser Defizite, aber auch beim Erarbeiten von Neuem einzufordern, andererseits durch angemessene Gestaltung der Lehr- und Unterstützungsangebote ihnen den Einstieg in fachtypisches, wissenschaftliches Arbeiten von Beginn an weitgehend optimal zu ermöglichen.

In nahezu allen mathematikhaltigen Studiengängen, neben Mathematik also auch z.B. Physik, Wirtschaftswissenschaften oder Psychologie, wird die Beziehung der Studienanfänger zur Mathematik von allen Beteiligten als problematisch gesehen: Studierende selbst beschreiben die Mathematik als zu schwierig oder als weitgehend irrelevant für ihr Fach (Studierendenbefragung Universität Bielefeld, 2014). Die Fakultäten beklagen hohe Durchfallquoten in den mathematikhaltigen Prüfungen und in einigen Fällen mangelnde Qualität studentischer Arbeiten (Universität Bielefeld „Richtig Einsteigen!“, 2012). Die Universitäten als übergeordnete Institution befürchten aus denselben Gründen hohe Abbrecherquoten und einen hohen Anteil von Studierenden, die nicht im vorgesehenen Zeitrahmen ihr Studium abschließen. Gleichzeitig erleben viele Fachwissenschaften einen anhaltenden Trend zu eher stärkerer Mathematisierung (Porter, 1996, *passim*). Potentielle Arbeitgeber beklagen, dass Berufsanfänger trotz abgeschlossenen Studiums häufig eklatante Mängel in ihren mathematischen Kenntnissen aufweisen (IHK Braunschweig, 2012). Auch Hochschullehrende selbst wissen zuweilen nicht, wo sie beim mathematikhaltigen fachlichen Arbeiten ansetzen sollen, wenn Studienanfänger nicht einmal die Bruchrechnung sicher beherrschen. Entsprechend kommen Heise und Zaepernick-Rothe (2012, S.124) zu dem Ergebnis, dass Lehrende der mathematisierten Fächer deutlich unzufriedener mit ihrer Lehrtätigkeit sind als die Lehrenden aus den Fächergruppen Geistes- und Kulturwissenschaften.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 763–766). Münster: WTM-Verlag

Aus Sicht der Hochschulen bieten sich zwei scheinbare Auswege an: Sie können das System Schule auffordern, gezielter auf das Studium von und mit Mathematik vorzubereiten, und so eine Mitverantwortung für die Problemlösung ablehnen. Dies erscheint uns bestenfalls als Teillösung, da sich die Schulen sehr bewusst einer breiteren Allgemeinbildung zugewandt haben und zudem der Besuch einer (gymnasialen) Oberstufe längst nicht mehr der einzige Weg ins Studium ist: Studienanfänger haben viel heterogenere Bildungsbiographien als dies noch vor einigen Jahrzehnten der Fall war. Dabei spielt die gymnasiale Bildung nur noch eine Rolle unter vielen.

Die zweite Möglichkeit, der Situation Herr zu werden, böte die Einführung eines Nullten Semesters. Das hieße, dass die Studierenden fachunspezifisch zunächst ausführlich auf die Anforderungen im Hinblick auf mathematische und weitere fundamentale Kompetenzen vorbereitet werden, wie etwa Argumentationstheorie oder das Schreiben wissenschaftlicher Texte. Erst danach starten sie ins Fachstudium. Dies kann unserer Ansicht nach keine Lösung der beschriebenen Ausgangsproblematik sein, da es aus didaktischer Forschung hinlänglich bekannt ist, dass ein solches *Lernen auf Vorrat* wenig erfolgsversprechend ist. Es ist geradezu charakteristisch für die Anwendung der Mathematik im Hochschulkontext, dass sie einen konkreten, fachlichen Sachbezug herstellt und nicht bei allgemeinen Übungsbeispielen verharrt, wie es zumeist in der Schule der Fall ist (Devlin, 2012).

Eine genauere Analyse der Studieneingangsphase in verschiedenen Fächern (basierend auf Befragungen von Studierenden und Lehrenden, der Analyse von studentischen Arbeiten, Lehrmaterialien und Studienverlaufsplänen) legt nahe, dass die beschriebenen Probleme beim Einstieg in das Hochschulstudium und insbesondere in die damit verbundene Mathematik in der Regel nicht auf einen bloßen Mangel an Kenntnissen der Schulmathematik zurückzuführen sind. Vielmehr werden die Studierenden mit gravierenden, qualitativen Änderungen konfrontiert. Wir sehen hier die Notwendigkeit einer schrittweisen Hinführung der Studienanfänger zum wissenschaftlichen Denken und Arbeiten; es sollte ihnen nicht, wie Felix Klein in diesem Zusammenhang schreibt, „mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht" gesprungen werden (Klein, 1933, S. 289). Auf der anderen Seite liegen die angesprochenen mangelhaften Schulkenntnisse bestimmter Teilbereiche der Mathematik tatsächlich vor. Wir schlagen daher vor, die zu kompensierenden Defizite wie auch die neu zu lernenden Inhalte in drei Kategorien mathematischen Wissens bei Studienbeginn einzuteilen:

1. Schulwissen – Dabei handelt es sich um mathematische Inhalte, auf die von Beginn an aufgebaut werden kann. Diese werden von den Studienanfängern zwar nicht unbedingt spontan beherrscht, können aber jederzeit mit überschaubarem Aufwand von ihnen selbstständig aufgefrischt werden; z.B. die Bruch- und Prozentrechnung, proportionale Zuordnungen oder das Lösen quadratischer Gleichungen.

2. Schulnahe, kalkülorientierte Standardverfahren – Hier sind mathematische Verfahren gemeint, die kurzfristig entwickelt oder vertieft werden können. Es handelt sich nicht um verbindliche Inhalte des Mathematikunterrichts, wohl aber um Inhalte, die in früheren Zeiten (oder in einzelnen Bundesländern) auf Schulniveau behandelt wurden bzw. werden, zu denen also für Schüler_innen verständliches Lernmaterial vorliegt. Dazu gehören z.B. das Operieren mit dem Summenzeichen, Logarithmus- und Potenzrechnung, das Rechnen mit elementaren Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder einfache Beweisstrukturen, wie z.B. die vollständige Induktion.

3. Axiomatisches oder wissenschaftlich-systematisches Arbeiten – Zu dieser Kategorie gehören alle mathematischen Inhalte, die in der Schule nicht oder nur in Ausnahmefällen behandelt werden, von denen also im Normalfall auch ein sehr guter Mathematikschüler noch nie etwas gehört haben kann. Diese müssen von Grund auf neu entwickelt werden. Beispiele wären hier: logische Operatoren, Mengenlehre, Abbildungsbegriff, partielle Ableitungen, einfache Differenzialgleichungen, Regression und Fehlerrechnung und alle Arten von fachbezogener, mathematischer Modellbildung.

Diesen drei Kategorien ordnen wir Verantwortlichkeiten und Handlungsempfehlungen für Hochschullehrende zu. Im Fall des Schulwissens sollten die Studierenden lediglich nachdrücklich über die konkreten Anforderungen orientiert werden und es sollte ihnen ggf. geeignetes Material zum Selbststudium zur Verfügung gestellt werden. Die Verantwortung für den Lernerfolg liegt hier weitgehend bei den Studierenden. Wünschenswert wäre eine Kontrolle durch die Lehrenden und eine Beratung in den Fällen, in denen auch nach Monaten noch keine Besserung eingetreten ist.

Die mittlere Kategorie von schulnahen Inhalten bildet entsprechend auch eine Mischform bezüglich der Verantwortung für das Gelingen des Lernprozesses, die in stärkerem Maße, beispielsweise in Form eines Vorkurses, vom Lehrenden nun mitübernommen werden muss. Hier können sich Studierende auch neue Inhalte in großen Teilen selbst aneignen.

Der Lehrende sollte sie dabei jedoch begleiten und fördern und nicht, im Stile einer Vorlesung, die volle Selbstorganisation des Lernprozesses vom Studienanfänger verlangen.

In der dritten Kategorie des axiomatischen bzw. wissenschaftlich-systematischen Arbeitens übernehmen die Lehrenden einen wesentlichen Teil die Verantwortung für den Lernprozess und sollten dem durch geeignete, vielfältige Darstellungen des Inhalts, viele Übungsmöglichkeiten und engmaschige Begleitung des Verstehensprozesses der Studierenden Rechnung tragen. Von den Studierenden darf von Anfang an Engagement und Selbständigkeit erwartet werden, aber innerhalb der Einstiegsphase ins hochschultypische Arbeiten sollte auch von den Lehrenden in besonderem Maße auf einen sauberen Anschluss der Lehrinhalte an Vorkenntnisse, ein sorgfältiges Umgehen mit neuen Begriffen und zahlreiche Hilfen bei der Sinngebung geachtet werden. Diese höhere Verantwortung auf Seiten der Lehrenden zu übernehmen, erscheint uns als wesentlicher Schritt zur Verbesserung des Übergangs Schule-Hochschule.

Wir plädieren also dafür, dass das Lernen von Mathematik im Hochschulkontext von Beginn an fachgebunden erfolgen sollte, dass beim Fördern mathematischer Kompetenzen insbesondere nach mathematisch-inhaltlichen Kriterien zu differenzieren ist und dass wissenschaftliches Denken und Arbeiten nicht von Anfang an in vollem Umfang gefordert werden kann, sondern sich - mit zunehmendem Anspruch - entwickeln sollte.

## Literatur

Devlin, K. (2012). Introduction to Mathematical Thinking. Palo Alto. Keith Devlin.

Heise, E. & Zaepernick-Rothe, U. (2012). Zufriedenheit von Lehrenden an deutschen Universitäten mit ihrer Lehrtätigkeit. In F.G. Becker et al. (Hrsg.), *Gute Lehre in der Hochschule: Wirkungen von Anreizen, Kontextbedingungen und Reformen.* (S. 115-135). Bielefeld: Bertelsmann.

Industrie- und Handelskammer (IHK) Braunschweig (2012). *Mathematik-Initiative*. url: http://www.braunschweig.ihk.de/kopfnavigation/features/mathematik-initiative.html. Abgerufen am 07.03.2014.

Klein, F. (1933). Elementarmathematik I. In: Courant, R. (Hrsg.) (1933). Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Bd. XIV. Berlin. Julius Springer.

Porter, T. (1996). *Trust in Numbers – The Pursuit of Objectivity in Science and Public Life.* Princeton: Princeton UP.

Universität Bielefeld (2012) *„Richtig Einsteigen!" - Antrag im Rahmen des Qualitätspakts Lehre.* url: http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/intranet/richtig-einsteigen/Richtig_Einsteigen18_1_12.pdf. Abgerufen am 07.03.2014.

Universität Bielefeld (2014). *Studierendenbefragung der Universität Bielefeld 2014* – unveröffentlichter Bericht.

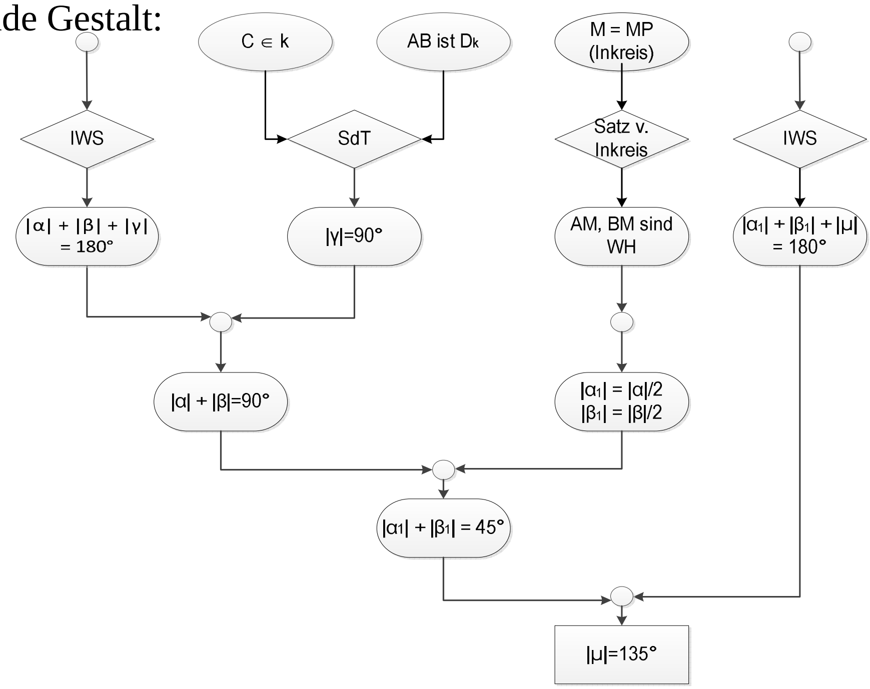
Zech, F. (2002). Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim und Basel. Beltz.

Elisabeth LUCYGA, Hannover

# Gegenüberstellung von Bearbeitungsergebnissen und –prozessen von K10 im HeuRekAP-Projekt

Zur Strukturierung der Bearbeitungsergebnisse sowie –prozesse der Probanden werden Lösungsgraphen sensu Pólya (1919) und König (1992) verwendet. Dies sind gerichtete Multigraphen, in denen mittels Knoten und Kanten Operatoren, Teilziele und Verknüpfungen zwischen diesen dargestellt werden. Die Startgrößen werden dabei durch Ellipsen, die Operatoren mittels Rauten, die Teilziele durch sogenannte Parovale und der Zielzustand als Rechteck dargestellt.

Mittels Transformation der Probandenlösungen in einen normierten Musterlösungsgraphen kann eine Vergleichbarkeit dieser gewährleistet werden. Der Musterlösungsgraph, in denen die meisten der 119 schriftlich erhobenen Schülerlösungen der TIMSS-Aufgabe K10 einbetten, hat folgende Gestalt:



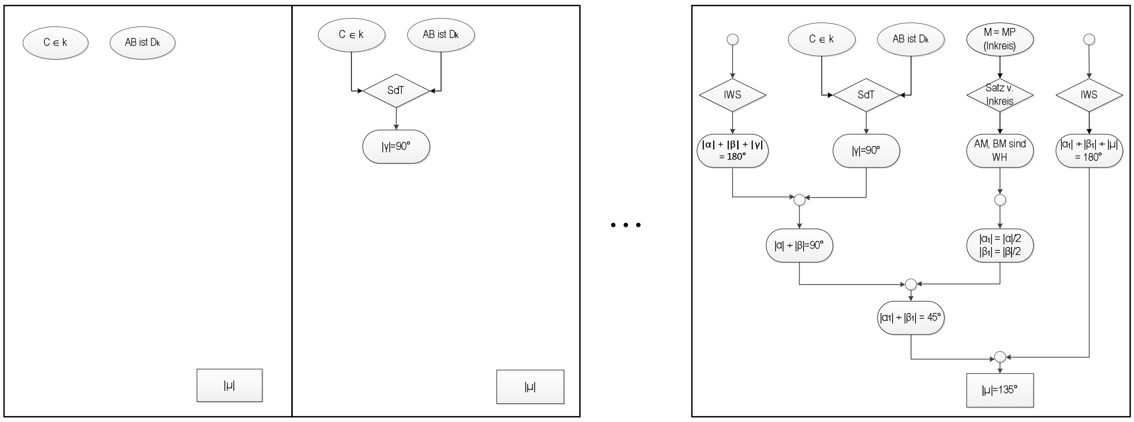

IWS bezeichnet die Innenwinkelsumme und SdT den Satz des Thales.

Die Bearbeitungsergebnisse der schriftlichen Erhebung wurden in diesem Sinne in Lösungsgraphen transformiert.

Analog dazu können die videographierten Lösungen in Lösungsgraphenfolgen transformiert werden. Dabei wird bei jedem Phasenwechsel (Pilous in diesem Band) der bereits bestehende Lösungsgraph um die im Lösungsweg neu hinzukommenden Elemente und/oder Verknüpfungen erweitert.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 767–770). Münster: WTM-Verlag

Diese werden in den Lösungsgraphen aufgenommen, sofern der Proband diese laut ausspricht und /oder verschriftlicht:



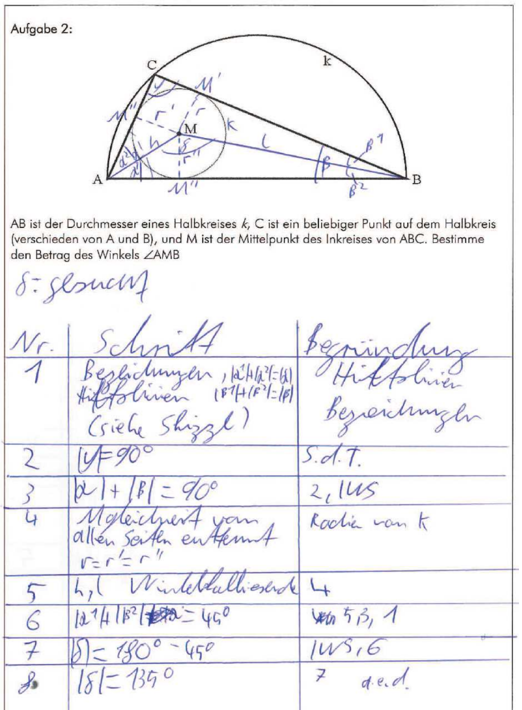

Anschließend erfolgt die Bewertung der erhobenen Schülerdaten an Hand des Lösungsgraphen (bei nur schriftlicher Erhebung) bzw. der Lösungsgraphenfolge (bei videographierter Erhebung). Hierbei werden Punkte für die im Lösungsgraphen vorhandenen Elemente und Verknüpfungen vergeben.

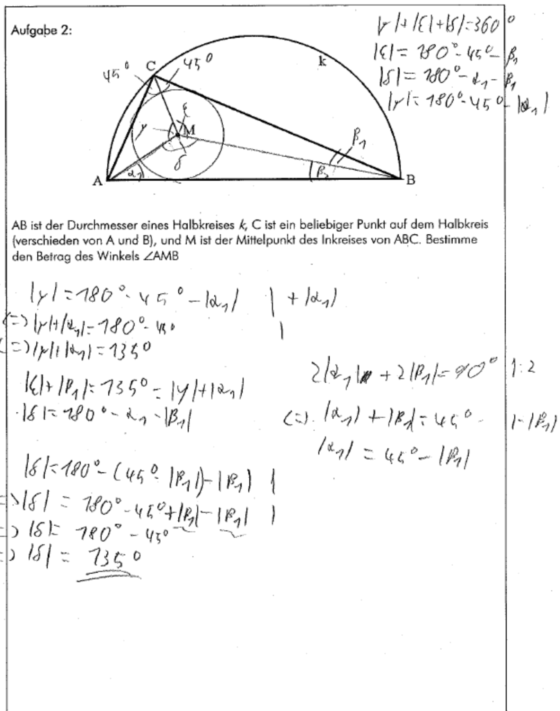
Jeder richtige Knoten wird mit einem Punkt bewertet, jedes teilweise erreichte Teilziel mir einem halben Punkt und bei falschen, fehlenden, zusammenhangslosen oder zusätzlichen Knoten werden keine Punkte vergeben. Ebenso wird jede korrekte Verknüpfung mit einem Punkt bewertet, jede korrekte Verknüpfung zwischen Voraussetzung und Resultat bei fehlendem Operator wird mit einem halben Punkt bewertet und bei ungeeigneter, zusätzlicher oder falscher Verknüpfung werden keine Punkte vergeben.

Somit können maximal 15 Punkte für die Knoten und 20 Punkte für die Kanten erreicht werden, insgesamt 35 Punkte. Bei den Bearbeitungsprozessen mit lautem Denken erhalten wir auf Grundlage der Lösungsgraphenfolge eine Punktefunktion in Form einer Treppenfunktion. Im Gegensatz dazu resultiert aus den schriftlichen Bearbeitungsergebnissen ausschließlich ein Gesamtpunktwert.

Um den Stellenwert der Lösungsgraphen zu verdeutlichen, seien im Folgenden die Eigenproduktionen des Probanden D11 aus beiden Erhebungsformaten gegenübergestellt.

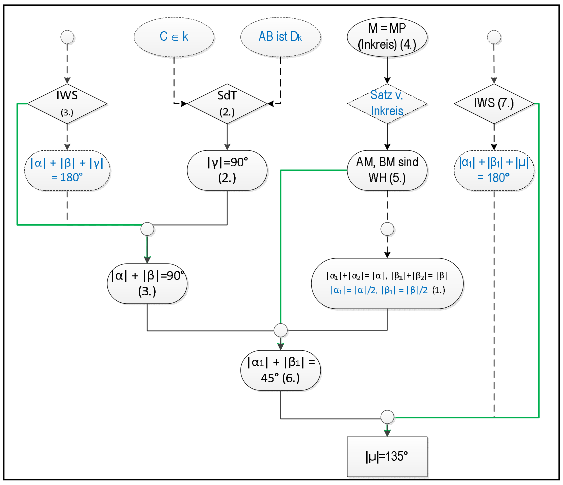
Zunächst scheinen diese beiden Bearbeitungen wenig gemeinsam zu haben, erst die genaue Durchsicht des videographierten Lösungsprozesses sowie die genaue Betrachtung beider Bearbeitungen lassen auf einen ähnlichen Lösungsweg schließen.

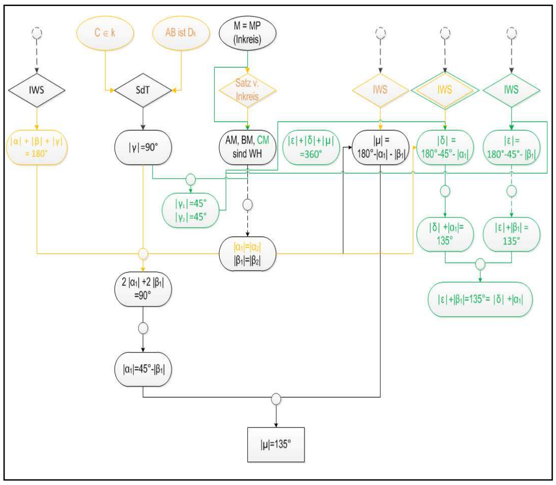



**schriftliche Erhebung** **videographierte Erhebung**

Betrachtet man hingegen den Lösungsgraphen der nur schriftlichen Erhebung sowie den finalen Lösungsgraphen der Lösungsgraphenfolge des videographierten Prozesses, so ist sofort ersichtlich, dass es sich um einen ähnlichen Lösungsweg handelt.




**schriftliche Erhebung** **videographierte Erhebung**

Alle sich im Lösungsgraphen befindlichen Linien, die nicht durchgezogen sind, symbolisieren die im Musterlösungsgraphen vorgesehenen Elemente und/ oder Verknüpfungen, die vom Probanden nicht genannt oder verschriftlicht wurden. Die orange eingefärbten Graphenelemente symbolisieren vom Probanden gewusste, jedoch erst auf Nachfrage (Teil 2 der videographierten Erhebung) kommunizierte Elemente und/ oder Verknüpfungen. Grüne Elemente hingegen symbolisieren zusätzliche Graphenelemente, welche zwar mathematisch korrekt sind, jedoch nicht zur Erreichung des Zielzustandes verwendet wurden.

Unter Berücksichtigung dieser Konventionen wird ersichtlich, dass der Proband wahrscheinlich bereits bei der schriftlichen Erhebung die Voraussetzungen für den Satz des Thales gekannt hat. In der videographierten sowie schriftlichen Erhebung benennt der Proband diese zwar nicht, auf Nachfrage seitens des Versuchsleiters („Erkläre mir, was du an dieser Stelle gemacht hast.“) erfolgt jedoch eine umfassende Erklärung („Also ich habe das, mir das Dreieck angeschaut und da es ein Halbkreis ist heißt das dass A und B ein Durchmesser sein muss und das heißt dass laut dem Satz des Thales der Winkel bei C neunzig Grad sein muss. Denn der Satz des Thales sagt aus dass wenn A und B ein Durchmesser des Kreises ist der Winkel bei C sofern er auf dem Kreis liegt und verschieden von A und B ist ein neunzig Grad Innenwinkel hat wenn man das Dreieck zeichnet.“). Selbiges gilt für den Satz vom Inkreis. Auch hier lässt sich vermuten, dass der Proband über dieses Hilfsmittel bereits bei der schriftlichen Erhebung verfügte.

Es ist deutlich zu erkennen, dass der Proband im Rahmen der schriftlichen Erhebung erheblich mehr Teilziele mit einander verknüpft hat. Grund dafür könnte zum einen das veränderte Erhebungsformat oder auch die bei der schriftlichen Erhebung verwendete Systematisierungshilfe in Form des Zwei-Spalten-Beweises sein. Dieser Sachverhalt schlägt sich vor allem bei der Bewertung der Lösungsgraphen nieder. Bei der schriftlichen Erhebung erreichte der Proband insgesamt 20 Punkte (jeweils 10 Punkte für Knoten und Kanten), bei der videographierten Erhebung hingegen erreicht der Proband 16,5 Punkte (10 Punkte für die Knoten und 6,5 Punkte für die Kanten). Die zusätzlichen grün markierten Knoten und Verknüpfungen, haben keinen Einfluss auf den hier notierten Punktwert, da diese zwar mathematisch korrekt sind, vom Probanden jedoch nicht für den endgültigen Lösungsweg verwendet wurden. Das Notieren dieser zusätzlichen Elemente entspricht einer heuristischen Strategie des Probanden („Also eigentlich. Früher hab ich immer erst mal die ganzen Formeln hingeschrieben damit ich schon mal einen ersten Überblick bekomme und hab mir dann überlegt wie ich weiter arbeiten kann.“). Folglich erfahren diese eine gesonderte Betrachtung und werden als heuristische Elemente gewertet.

## Literatur

König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. In: *Der Mathematikunterricht, 38 (3).* S. 24-38.

Pólya, G. (1919). Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. *Schweizerische pädagogische Zeitschrift*, 29(2), 53–63.

Sabrina LÜBKE, Dortmund

# Flexibles Überschlagsrechnen in der Grundschule – Ausgewählte Ergebnisse einer Interviewstudie im vierten Schuljahr

In diesem Beitrag werden ausgewählte Ergebnisse meines abgeschlossenen Promotionsprojekts zum Lösungsverhalten von Kindern beim Überschlagsrechnen (vgl. Hunke, 2012) präsentiert. Im Fokus steht dabei die Forschungsfrage: Inwiefern lassen sich bei Kindern des vierten Schuljahres flexible Rechenkompetenzen beim Überschlagsrechnen beobachten?

Bevor ein Einblick in die Interviewstudie erfolgt, wird zunächst geklärt, was unter den Begriffen des Überschlagsrechnens und des flexiblen Rechnens verstanden wird und es wird aufgezeigt, was Flexibilität in Bezug auf das Überschlagsrechnen heißt.

## Theoretischer und empirischer Hintergrund

Überschlagsrechnen wird hier in Anlehnung an Lorenz (2005) als die Vereinfachung einer Aufgabe verstanden, mit dem Ziel das Ergebnis einer arithmetischen Operation ungefähr zu bestimmen. Eine genauere Betrachtung macht deutlich, dass es ähnlich wie beim halbschriftlichen Rechnen zahlreiche Strategien gibt einen Überschlag durchzuführen. Hervorzuheben ist dabei, dass – anders als häufig angenommen – die Anwendung der konventionellen Rundungsregeln nur eine von vielen Möglichkeiten darstellt eine Aufgabe zu vereinfachen (vgl. z.B. Hunke, 2012; Reys et al., 2009). Es gilt solche Überschlagsstrategien flexibel anzuwenden oder zu entwickeln. Unter Flexibilität wird hier anknüpfend an Selter (2009) die „Fähigkeit zur bewussten oder unbewussten Auswahl oder Entwicklung geeigneter Vorgehensweisen, abhängig von der Aufgabe, dem Individuum und vom soziokulturellen Kontext“ (Hunke, 2012, S. 84), verstanden.

Betrachtet man mögliche Lösungsprozesse beim Überschlagsrechnen (Abb. 1), so sollten für das flexible Überschlagsrechnen nicht nur die Überschlagsstrategien selbst in den Blick genommen werden. Vielmehr heißt flexibles Überschlagsrechnen

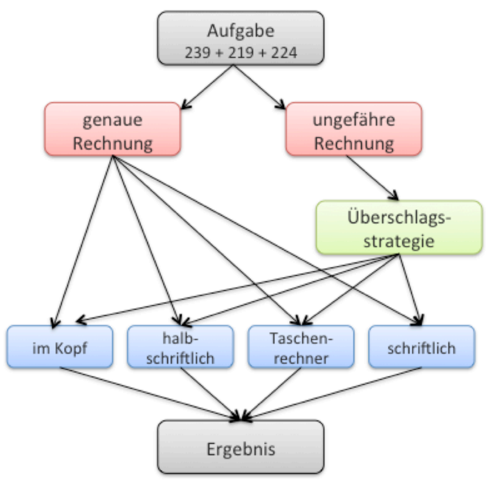



**Abb. 1: Lösungsprozess beim Überschlagsrechnen (vgl. Reys et al. (2009))**

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 771–774). Münster: WTM-Verlag

flexibel auf drei Entscheidungsebenen zu handeln: Der Lösungsstrategie (genau oder ungefähr), der Überschlagsstrategie und der Rechenmethode (ebd.).

Es haben sich bereits einige wenige Studien mit Flexibilität beim Überschlagsrechnen auseinander gesetzt (vgl. z.B. Lemaire & Lecacheur, 2002). Diese konzentrieren sich jedoch auf die Ebene der Überschlagsstrategien und testen im Rahmen quantitativ angelegter Untersuchungsdesigns die flexible Anwendung vorgegebener Strategien. Lemaire & Lecacheur (2002) konnten dabei erste Hinweise auf Flexibilität liefern, was jedoch im Gegensatz zu Ergebnissen von Studien wie z.B. der von Schoen et al. (1987) steht, die eine Dominanz der unverstandenen Anwendung der Rundungsregeln aufzeigen konnte. Offen bleibt die Frage, inwiefern Aufgaben zum Überschlagsrechnen flexibel gelöst werden, wenn kein Lösungsweg vorgegeben ist. Vor diesem Hintergrund hat sich im Rahmen meiner Dissertation folgende Teilforschungsfrage ergeben: „Inwiefern äußern sich flexible Rechenkompetenzen bei ausgewählten Kindern sowohl hinsichtlich der Lösungs- und Überschlagsstrategien als auch der Rechenmethoden?" (Hunke, 2012, S. 111ff).

Im Rahmen der Untersuchung wurden 42 Kindern des vierten Schuljahres im klinischen Interview am Beispiel der Addition und Multiplikation je zwölf Aufgaben des Typs „Reicht das Geld?" oder „Wie viel ungefähr?" vorgelegt. Zur Beantwortung der o.g. Forschungsfrage wurden dann die Interviews von vier ausgewählten Kindern aus derselben Klasse für eine vergleichende Fallinterpretation herangezogen.

## Untersuchungsergebnisse

Bei der Fallinterpretation wurde herausgearbeitet, inwiefern sich bei den Kindern auf den verschiedenen o.g. Ebenen Hinweise auf Flexibilität beobachten ließen. Dazu wurde analysiert, welche Kriterien für die Kinder maßgeblich bei der Wahl oder Entwicklung ihrer Vorgehensweise waren. Die Analyse zeigte, dass die flexiblen Rechenkompetenzen der vier ausgewählten Kinder höchst unterschiedlich ausgeprägt sind (vgl. Tab 1.) – von gar keinen Hinweisen auf Flexibilität (Felix) über Flexibilität auf einzelnen Ebenen (Paul und Guido) bis hin zu Flexibilität auf alle Ebenen des Lösungsprozesses (Henry).

Am Beispiel von den sehr unterschiedlichen Kindern Felix und Henry wird nun angedeutet, welche Kriterien für sie jeweils leitend waren. Eine ausführliche Darstellung findet sich in Hunke (2012).

**Tab. 1: Ebenen von Flexibilität (Hunke, 2012, S. 236)**

| | **Lösungsstrategien (genau vs. ungefähr)** | **Überschlagsstrategien** | **Rechenmethoden** |
|---|---|---|---|
| * = Orientierung an Rundungsregeln, + = Hinweise auf Flexibilität vorhanden, - keine Hinweise auf Flexibilität vorhanden | | | |
| **Felix*** | - | - | - |
| **Paul*** | + | - | + |
| **Guido** | - | + | - |
| **Henry** | + | + | + |

Felix steht als Beispiel für ein Kind, das auf keiner der Ebenen Hinweise auf Flexibilität liefert. Er hat die Aufgabenserie „Wie viel ungefähr?“ vorgelegt bekommen und löst alle Aufgaben erwartungskonform mit einem Überschlag (so dass hier über das Nichtvorhandensein von Flexibilität nur gemutmaßt werden kann). Diesen führt er stets gemäß der Rundungsregeln durch, was sich in Äußerungen wie z.B. „also hier 50 rechnen wir hoch und ab… …und ab… und bei 0 rechnen wir runter […]“ zeigt. Diese scheinen für ihn auch *das* maßgebliche Kriterium in seinem Vorgehen zu sein. Dies wird nicht nur an der Stabilität seines Lösungsverhaltens deutlich, sondern insbesondere auch bei der Aufgabe 12,59€ + 14,59€ (Der Sachkontext wird hier aus Platzgründen weggelassen). Hier rechnet er zunächst 13,00€ + 14,00€, korrigiert sich dann aber (Abb. 2): „Da hab ich was Falsches gerechnet. […] Da kommt eigentlich ne 5 hin (rundet 14,59€ nun auf 15€ auf, und korrigiert folglich die Summe). Da ne 8. So.“ Hier wird deutlich, das Felix rein syntaktisch vorgeht – die Rundungsregeln müssen genau nach Vorgabe angewendet werden. Aufgabenmerkmale oder persönliche Merkmale spielen für ihn keine Rolle.

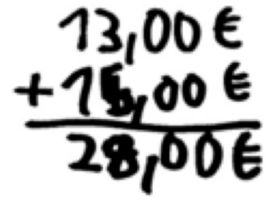


**Abb. 2: Felix korrigiert seinen Überschlag**

Henry hingegen argumentiert eher inhaltlich und reagiert dabei z.T. individuell auf die Aufgabenmerkmale. So löst er einen Großteil der Aufgaben erwartungskonform mit einem Überschlag, weicht bei einzelnen Aufgaben aber davon ab, z.B. bei 7 · 3,35€. Hier rechnet er genau, „weil das ist ja schon fast wie so ein Überschlag mit 35, weil 40 sind dann wieder viel zu viel dazu getan und bei 30 auch“. Bei der Aufgabe 8 · 63 kommt er schließlich zu der ungewöhnlichen Überschlagsrechnung 8 · 62 „weil […] 60 ist ja jetzt nicht so schwer zu rechnen und 2€ kann ich besser als 3€ rechnen.

[…] Und wenn ich 5€ genommen hätte, dann wäre das ja 2€ dazu getan, das wäre dann ein bisschen viel. So hab ich nur 1€ weggenommen".

Aus diesen Beispielen wird deutlich, dass zwei Kriterien für Henry maßgeblich sind: Er verändert Aufgaben nur dann, wenn so eine für ihn leichter zu rechnende Aufgabe entsteht. Und er verändert die Aufgaben so, dass das Ergebnis noch möglichst genau bleibt. Er nimmt also die spezifischen Aufgabenmerkmale in den Blick und reagiert individuell auf diese, so dass hier (zumindest in Ansätzen) von flexiblen Rechnen gesprochen werden kann.

Abschließend lässt sich festhalten, dass es innerhalb der untersuchten Klasse eine große Spannbreite hinsichtlich der flexiblen Rechenkompetenzen einzelner Kinder gab. Vor allem zeigte sich, dass gerade die Rundungsregeln, als Rezept angewendet, zu einem starren Lösungsverhalten führen, während die Idee vom Überschlag als Vereinfachung mehr Spielraum für individuelles Reagieren lässt. Sicherlich besteht hier noch weiterer Forschungsbedarf, da die vorliegende Untersuchung nur erste Hinweise zur Flexibilität beim Überschlagsrechnen liefern kann. Für die Unterrichtspraxis ergibt sich aber bereits jetzt die Forderung nach einer stärkeren Betonung des Überschlagsrechnens auf eigenen Wegen sowie der Idee des Überschlagsrechnens als Vereinfachung einer Aufgabe.

## Literatur

Hunke, S. (2012): Überschlagsrechnen in der Grundschule. Lösungsverhalten von Kindern bei direkten und indirekten Überschlagfragen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lorenz, J. H. (2005a): Überschlagen - Schätzen - Runden: Drei Begriffe, eine Tätigkeit? *Grundschule Mathematik*, 4, 44-45.

Reys, R. E.; Lindquist, M. M.; Lambdin, D. V. & Smith, N. L. (2009): *Helping Children Learn Mathematics* (9. Aufl.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Selter, C. (2009): Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 41 (5), 619-625.

Schoen, H. L.; Blume, G. & Hart, E. (1987): *Measuring Computational Estimation Processes.* A Research Paper Presented at the 1987 Annual Meeting of the AERA. Washington, DC.

Lemaire, P. & Lecacheur, M. (2002): Children's strategies in computational estimation. In *Journal of Experimental Child Psychology*, 82, S. 281-304.

Miriam M. LÜKEN, Bielefeld

# Rot, gelb, blau, rot, gelb, blau – und weiter?! Inhalte, Bedeutung und Unterrichtsideen für den Kompetenzbereich „Muster und Strukturen"

Dieser Artikel ist eine Zusammenfassung des Theorieteils eines Workshops am Lehrertag der GDM-Tagung. Ziel des Workshops war es, die anwesenden Lehrer für das Thema „Muster und Strukturen" zu sensibilisieren.

## Muster und Struktur – eine Begriffsschärfung

Die Begriffe Muster und Struktur werden häufig verwendet, sie lassen sich jedoch schwer voneinander trennen und werden oft synonym verwendet. Vielen Lehrern ist unklar, was genau – und auch was alles – mit Muster und Struktur gemeint ist und vor allem, welche Aspekte für das Mathematiklernen von Kindern wichtig sind.

In der Diskussion der Teilnehmer des Workshops wurde klar, dass sich in einem Muster etwas wiederholt und ihm eine Struktur zugrunde liegt. Unter einem mathematischen Muster soll deshalb das geordnete Ganze, jegliche numerische oder räumliche Regelmäßigkeit verstanden werden. Das Bildungsgesetz des Musters und damit die Beziehungen zwischen den verschiedenen Bestandteilen eines Musters stellen seine Struktur dar (vgl. auch Mulligan & Mitchelmore 2009). Die Teilnehmer des Workshops arbeiteten heraus, dass sich die Struktur eines Musters auf verschiedene Eigenschaften beziehen kann (Form, Farbe, Anzahl, …).

Inwiefern gehen Kinder aber mit Mustern und Strukturen um? Sie strukturieren und erkennen Muster. Mit „Muster erkennen" sind zweierlei Aktivitäten gemeint: Zum einen bedeutet ein Muster zu erkennen, eine Regelmäßigkeit zu entdecken, eine Wiederholung gleichbleibender Merkmale. Zum anderen wird aber auch das Wiedererkennen einer bestimmten räumlichen Anordnung, beispielsweise eines Würfelmusters, als Mustererkennung bezeichnet (vgl. Lüken 2012a). Auch das Strukturieren kann in zwei Vorgehen unterschieden werden. Um die Struktur eines vorgegebenen Objekts zu erfassen, müssen die räumlichen Bestandteile dieses Objekts identifiziert, zu Untereinheiten zusammengefasst und miteinander in Beziehung gesetzt werden (vgl. Battista et al. 1998). Eine Menge „loser" Objekte muss durch konkrete oder mentale Operationen miteinander in Beziehung und so in eine räumliche Ordnung gebracht werden, um die Anzahl und damit das Ganze erfassen zu können, ohne alle Elemente einzeln abzuzählen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 775–778). Münster: WTM-Verlag

## Muster im Mathematikunterricht der Grundschule

Die Muster, denen Kinder in der Grundschule begegnen, können grob in vier Musterarten kategorisiert werden: sich wiederholende Musterfolgen, wachsende Musterfolgen, Muster als funktionale Beziehungen und räumliche Muster.

Eine *sich wiederholende Musterfolge* ist eine Folge aus Gegenständen, geometrischen Formen, farbigen Objekten oder Symbolen. Die kleinste Einheit der Elemente dieser Musterfolge, die sogenannte Grundeinheit, wird unverändert aneinandergereiht und erzeugt so die Musterfolge. Beim Arbeiten mit sich wiederholenden Musterfolgen geht es also um das Erkennen einer Regelmäßigkeit, die Regel ist in diesem Fall die Wiederholung der Grundeinheit in Form einer Translation. Die Musterfolge *ABABAB*… beispielsweise besitzt eine Grundeinheit der Länge 2 (*AB*), die Musterfolge *ABCABC*… hingegen hat eine Grundeinheit der Länge 3 (*ABC*). In einer *AB*-Musterfolge treten demnach abwechselnd zwei Objekte oder Symbole auf wie *Kreis, Dreieck, Kreis, Dreieck,* … oder *X, O, X, O,* …. Dieses grundlegende Prinzip eines periodischen Aufbaus hat Auswirkungen auf die Bestimmung eines weiteren Folgengliedes. Für eine sich wiederholende Musterfolge mit einer Grundeinheit der Länge 3 (*ABC*) bedeutet die periodische Struktur, dass jedes Element der Musterfolge einem der ersten drei Elemente gleicht und dass jedes Element der Musterfolge gleich dem Element drei Positionen vorher ist. Musterfolgen mit der gleichen Länge der Grundeinheit sind also miteinander „verwandt“: sie besitzen die gleiche Struktur. Die Musterfolge *ABAB*… ist z.B. verwandt mit *Kreis, Dreieck, Kreis, Dreieck,* …. Eine Übersetzung einer Musterfolge von einer Darstellungsform in eine andere verändert nicht ihre entscheidende strukturelle Beschaffenheit. (vgl. Liljedahl 2004) Bandornamente und Parkette sind spezielle und für den Grundschulunterricht typische Beispiele für sich wiederholende Musterfolgen.

Bei einer *wachsenden Musterfolge* wächst die Grundeinheit systematisch bei jeder Wiederholung. Hier liegt das Augenmerk weniger auf einer Einheit als Grundbaustein, sondern auf der Beziehung aufeinanderfolgender Folgenglieder und dem Vergleich ihrer Veränderung, um die Regel der Veränderung zu finden. Wachsende Musterfolgen sind z.B. Zahlenfolgen, strukturierte Aufgabenfolgen („schöne Päckchen“) oder geometrische Darstellungen elementarer Zahlenfolgen. Eine arithmetische Analyse der Folgenglieder ist bei wachsenden Musterfolgen unumgänglich.

Wird jedem Folgenglied einer wachsenden Musterfolge eine Position zugeordnet, entsteht ein neues Muster im Sinne einer *funktionalen Beziehung*. Für jede beliebige Position n kann das Folgenglied t der Musterfolge in

Abhängigkeit voneinander bestimmt und in einer allgemeinen Form ausgedrückt werden. Wachsende Musterfolgen und Muster als funktionale Beziehungen werden häufig mit einem Verständnis von Funktionen und dem Lernen von Algebra in Verbindung gebracht (vgl. Warren & Cooper 2006; Steinweg 2006).

Gerade der mathematische Anfangsunterricht nutzt Muster auch, um Zahlen mit Hilfe spezieller geometrischer Anordnungen zu veranschaulichen. Bei solchen *räumlichen Mustern* sind die Elemente in der Ebene durch unterschiedliche Abstände, Farben oder andere äußere Merkmale gegliedert. Zahlbilder wie Würfelbilder, Fingerbilder, Gitter, Punktefelder, etc. sind räumliche Muster. Sie versuchen, die den Zahlen innewohnenden Strukturen abzubilden. Dies gilt auch für die dekadisch gegliederten Anschauungsmittel des sich erweiternden Zahlenraumes (Zwanzigerfeld, Hunderterfeld, Zahlenstrahl …), die besonders dekadische Strukturen veranschaulichen. Mit Hilfe der Zahlbilder sollen Kinder innere Vorstellungsbilder von Zahlen als geeignet gegliederte Quantitäten entwickeln. Indem die Kinder sinnlich wahrnehmbare Mengen gliedern, erhalten sie die Gelegenheit, Zahlen als strukturierte Ganzheiten anstatt ausschließlich als Zählreihe wahrzunehmen (vgl. Gerster 2005). Zahlbilder besitzen eine regelmäßige, geometrische Anordnung. Sie sind so aufgebaut, dass sie quasi-simultan erfassbar sind, also leicht in überschaubare Teilportionen zerlegt werden können. Das Erkennen der vorgegebenen Gliederung und das eigene Strukturieren der Zahlbilder ist damit eine Voraussetzung für die Ausbildung strukturierter mentaler Mengenvorstellungen. Im Zusammenhang mit räumlichen Mustern geht es also um das Mustererkennen im Sinne von bekannten Bildern, dem Erkennen einer räumlichen Ordnung.

### Bedeutung von Muster und Strukturen für das Mathematiklernen

Warum ist das bewusste Umgehen von Kindern mit mathematischen Mustern und Strukturen so wichtig? In der mathematikdidaktischen Literatur findet man viele gute Gründe, die im Folgenden übersichtsartig aufgelistet sind (für die Primärquellen siehe Lüken 2012a, 80ff.).

Die Auseinandersetzung von Kindern mit mathematischen Mustern und Strukturen fördert allgemeine (mathematische) Kompetenzen wie Sortieren, Ordnen, Vergleichen, Beziehungen erkennen, Regelmäßigkeiten wahrnehmen, Regeln abstrahieren, Verallgemeinern, Vorhersagen treffen, ein Verständnis abstrakter zeitlicher und räumlicher Sequenzen, mathematisches und logisches Denken, die Entwicklung heuristischer Strategien beim Problemlösen, mathematisches Modellieren und geometrisches Denken.

Ein Muster- und Strukturverständnis ist *Voraussetzung* für die quasi-simultane Zahlerfassung, den Umgang mit mathematischen Anschauungsmitteln, das Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen Zahlen, Einsicht in das dekadische Zahlsystem, Verständnis von Zahleigenschaften und mathematischen Gesetzmäßigkeiten, die Ablösung vom zählenden Rechnen, das Teil-Ganzes-Verständnis, Zählen in Schritten, ein Verständnis von Multiplikation, Zahlenfolgen, Algebra und Funktionen.

Muster- und Strukturfähigkeiten stehen darüber hinaus in einem Zusammenhang mit der arithmetischen Leistung (vgl. Lüken 2012a), Leistung in allen anderen mathematischen Inhaltsbereichen (Mulligan & Mitchelmore 2009) sowie dem späteren Schulerfolg (vgl. Burton 1982).

## Aufgaben zur Förderung kindlicher Muster- und Strukturfähigkeiten

Für die im Workshop besprochenen und durchgeführten Übungen sei auf Lüken 2011 und 2012b verwiesen.

## Literatur


Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K. & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532.

Burton, G.M. (1982). Patterning: Powerful Play. *School Science and Mathematics, 82*(1), 39-44.

Gerster, H.-D. (2005). Anschaulich rechnen – im Kopf, halbschriftlich, schriftlich. In M. von Aster & J.H. Lorenz (Hg.), *Rechenstörungen bei Kindern* (S. 202-236). Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: the distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(3), 24-42.

Lüken, M.M. (2011). Wie geht's weiter? Zur Kompetenz des Fortsetzens eines geometrischen Musters. *Mathematik differenziert*, H.1, S. 36-40.

Lüken, M.M. (2012a). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern.* Münster: Waxmann.

Lüken, M.M. (2012b). Welcher Teil wiederholt sich? Geometrische Muster entdecken und herstellen – Unterrichtsideen für Klasse 1 und 2. *Grundschulunterricht Mathematik,* H.1, S. 4-7.

Mulligan, J.T. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Steinweg, A.S. (2006). Kinder deuten geometrische Strukturen und Gleichungen. „Ich sehe was, was du auch sehen kannst …". In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hg.), *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht* (S. 71-86). München: Oldenbourg.

Warren, E. & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9-14.

Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Berlin

# Was macht forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus?

Ein wichtiges Ziel von Mathematikunterricht (MU) sollte sein, dass er ein authentisches Erleben von Mathematik ermöglicht. Dabei soll die Authentizität auf drei Ebenen erreicht werden: in der Begegnung der Lernenden (und Lehrenden) mit Mathematik, in den verwendeten mathematischen Methoden/Arbeitsweisen und in den Inhalten/Kontexten (vgl. Lutz-Westphal, 2006). Forschendes Lernen sollte diesem Anspruch gerecht werden.

## 1. Ein Blick auf die Charakteristik mathematischen Forschens

Forschendes Lernen in Bezug auf Mathematik zu charakterisieren ist eine schwierige Aufgabe, da mathematische Forschung eher einem kreativen Prozess gleicht als einem festgelegten Ablauf. Aussagen von Mathematiker/inne/n belegen dies, z.B. schreibt Hardy „mathematicians sit around making patterns of ideas" (in: Lockhart, 2009, S. 23). Borcherds beschreibt das Forschen als ein Herumsuchen: „My own research reminds me of someone picking over a large junkyard to find something valuable that has been overlooked by all the other scavengers. Every now and then one finds a new diamond, but most of the time anything one examines closely is yet another piece of junk" (in: Cook, 2009, S. 24). Der Ablauf Beobachtung – Hypothese – Planung einer Untersuchung – Durchführung der Untersuchung – Auswertung und Diskussion – Ergebnisse, den man in unterschiedlicher Ausprägung in Forschungskreisläufen für den naturwissenschaftlichen Unterricht findet (z.B. in: Messner (2009), S. 81), lässt sich somit nicht einfach auf den MU übertragen. Dieser kreative Prozess des mathematischen Forschens hantiert mit nicht real existierenden Objekten. Conway beschreibt es so: „What‘s the ontology of mathematical things? How do they exist? In what sense do they exist? There‘s no doubt that they do exist but you can‘t poke and prod them exept by thinking about them. It‘s quite astonishing and I still don‘t understand it, being a mathematician all my life. How can things be there without actually being there?" (in: Cook, 2009, S. 18). Anders als in den Naturwissenschaften werden Beobachtungen daher meist nicht unmittelbar gemacht, sondern erst durch aktives Erkunden möglich, z. B. durch Erzeugen von vielen Beispielen. Forschendes Lernen im MU sollte das Erkunden besonders betonen und ermöglichen.

## 2. Unverzichtbare Elemente eines forschenden Mathematikunterrichts

Ein Modell, das forschendes Lernen in der Mathematik beschreibt, kann keinen festgelegten Ablauf vorschreiben. Es gibt aber Elemente, die einem

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 779–782). Münster: WTM-Verlag

Unterricht das Charakteristikum des forschenden Lernens erst verleihen. Somit gelingt eine Abgrenzung von verwandten Unterrichtsprinzipien wie z.B. dem entdeckenden Lernen (das im forschenden Lernen durchaus enthalten sein kann) oder dem Projektunterricht. Diese Elemente sind:

- Anregung und Anleitung zum selbstständigen Finden von Fragen,
- der breite Raum für Erkundungen,
- das Öffnen des Unterrichts für fächerübergreifende oder dem Lehrplan vorausgreifende Inhalte,
- das Sichtbarmachen, also „Publizieren" der erarbeiteten Mathematik,
- sowie die kritische Diskussion der Ergebnisse und Vorgehensweisen.

Dabei darf der Ansatz des forschenden Lernens nicht in der Weise missverstanden werden, dass die Schüler/innen sich vollkommen alleine durch ein Thema bewegen. Ein gut gewählter inhaltlicher Rahmen und Unterstützung durch die Lehrkraft sind – wie in der wissenschaftlichen Forschung – Voraussetzungen für ein erfolgreiches forschendes Vorgehen. Vor allem wird die initiale Fragestellung im Unterricht nur ganz selten von Schülerseite kommen können, sondern meist von der Lehrkraft als Ausgangspunkt für einen dann beginnenden Forscherprozess präsentiert werden.

## 3. Erfahrungen aus dem Programm Mathe.Forscher

Im Rahmen der wissenschaftlichen Begleitung des Programms Mathe.Forscher (Stiftung Rechnen und Deutsche Kinder- und Jugendstiftung, Beginn 2010, www.matheforscher.de), in dem Lehrer/innen sich verpflichten, forschendes Lernen in ihrem MU umzusetzen, wurde das Problem der begrifflichen Ausschärfung besonders deutlich. Die Lehrkräfte gestalteten sehr engagiert meist fächerübergreifenden handlungsorientierten Unterricht, der häufig dem Prinzip des entdeckenden Lernens folgte. Die Frage, ob dieser Unterricht die Kriterien forschendes Lernens erfüllt, führte zu einer ausführlichen Auseinandersetzung mit dieser Problematik und zum Herausarbeiten der unter 2. genannten unverzichtbaren Elemente. Im Folgenden werden zwei dieser Elemente genauer beschrieben: Das Fragenstellen und das Sichtbarmachen der Mathematik.

## 4. Das Fragenstellen lernen als Basis für eine forschende Haltung

„Anlass forschenden Lernens bieten Widerstände, Phänomene und Probleme, die herausfordern und die es zu überwinden gilt. Im Idealfall stellen die Schüler und Schülerinnen die Fragen [...]" (Villotti (2010, S. 23). Das Fragen gehört unabdingbar zum Forschen. Ein forschender Blick entlockt auch dem banalsten Gegenstand unerwartete Erkenntnisse und generiert immer neue

Fragen. Substantiell mathematische Fragen zu finden fällt Novizen allerdings oft schwer, daher wird hier eine Heranführung und Unterstützung im Unterricht benötigt. Aber auch die Lehrer/innen, die sich auf den Weg machen, forschendes Lernen zu realisieren, brauchen zunächst oft Anregung zum Fragenstellen. Unterricht, der zum forschenden Lernen anregt, benötigt einen weit tragenden Anfangsimpuls, der das Thema umreißt, der neugierig macht und der im besten Fall erste Fragen provoziert. Um gute Initialfragen für ihren forschenden Unterricht zu finden, können Lehrer/innen mit dem Ansatz der Kernideen aus dem Konzept des dialogischen Lernens arbeiten (Ruf & Gallin, 1998). Kernideen formulieren aus einem persönlichen Blickwinkel heraus zentrale Aspekte eines Themengebietes. Aus Kernideen, die auch das Interesse der Lehrkraft an einem Thema widerspiegeln, können ansprechende, offen gestellte Arbeitsaufträge formuliert werden, die das Fragenstellen der Schüler/innen anregen. Arbeitet man ausgehend von einem solchen Impuls mit Lerntagbüchern, so werden meist von selbst auch die ganz einfachen Fragen, die Schüler/inne/n spontan durch den Kopf gehen, dokumentiert und gewürdigt. Die Ermutigung für diese ersten Fragen ist wichtig und kann durch eine Fragensammlung an einer großen Fragenwand unterstützt werden. Diese kann nach und nach weiter ergänzt, strukturiert und inhaltlich sortiert werden. Ein Werkzeug zum Sortieren von Fragen sowie auch zum Anregen zu weiteren Fragen ist die folgende Liste der Fragentypen im forschenden Lernen:

- **Quantifizierungsfragen** (Wie viel Hagel fällt bei einem Hagelschauer? Wie viel Wasser ist in einem Schwimmbad?)
- **Erkundungsfragen** (Wie verändert sich die Zahlenmauer, wenn ...? Gibt es verschiedene Möglichkeiten, diese Pflastersteine zu verlegen?)
- **Kausalfragen** (Warum darf man nicht durch Null teilen? Warum gibt es keine Pflasterung mit regelmäßigen Achtecken?)
- **Strukturfragen** (Nach welcher Regel ist dieses Muster entstanden? Gibt es wiederkehrende Auffälligkeiten? Wie könnte man eine beobachtete Regelmäßigkeit beschreiben?)
- **Werkzeug-/Methodenfragen** (Mit welchem mathematischen Werkzeug kann man hier weiterkommen? Wie wurde das konstruiert?)
- **Anwendungsfragen** (Wo braucht man lineare Funktionen? Wo finden sich ähnliche Strukturen wieder? Kommt der Satz des Pythagoras auch im täglichen Leben vor?)
- **Kontextfragen** (Aus welchem Anlass wurde früher einmal darüber nachgedacht? Wer hatte die Idee? In welchen gesellschaftlichen und historischen Kontexten spielte das Thema eine Rolle?)

Das vielfältige Fragenstellen sollte mit Hilfe der Fragenwand und der Fragentypen-Liste explizit thematisiert werden. So kann es immer selbstverständlicher werden und sich eine forschende Haltung entwickeln.

### 5. Die erarbeitete Mathematik sichtbar machen

In einem Unterrichtsdesign, das im oben beschriebenen Sinn das selbstständige Erkunden, Befragen und Erarbeiten in den Mittelpunkt stellt, passiert es leicht, dass am Ende zwar sehr ansehnliche Erkenntnisse und Produkte entstehen, die Mathematik selber aber schließlich in den Hintergrund gerät. Beispielsweise wurde bei den Mathe.Forschern ein Projekt zu Mathematik und Kunst durchgeführt, an dessen Ende eine Ausstellung mit selbst gestalteten Kunstwerken der Schüler/innen stand. Um sowohl den Ausstellungsbesuchern als auch den Schüler/inne/n selbst zu verdeutlichen, auf welchen mathematischen Überlegungen die gezeigten Kunstwerke basieren, ist es hier, ebenso wie in anderen Unterrichtszusammenhängen notwendig, dass die zugehörige Mathematik dokumentiert und „publiziert" wird. Durch das gezielte Dokumentieren der im Forscherprozess erarbeiteten Mathematik werden diese Inhalte auch für den weiteren Unterricht verfügbar gemacht. Dies ist insbesondere wichtig, wenn das forschende Lernen innerhalb des Curriculums angewendet werden soll und nicht nur für inhaltliche „Inseln". Es ist eine Antwort auf die Frage, „[...] wie die Sicherung des Wissens bei den Schüler/inne/n gelingt. Können sie das Gelernte übertragen und an späterer Stelle wieder in den Zusammenhang bringen?" (Lehrer/in in interner Unterrichtsdokumentation Mathe.Forscher, 2013). Zudem ergibt sich noch ein weiterer Aspekt. In dem Bemühen, aus den erarbeiteten Erkenntnissen die Mathematik herauszulösen, kann es gelingen, einen Eindruck von der Universalität mathematischer Modelle, Methoden und Beschreibungen zu bekommen, einer charakteristischen Eigenschaft von Mathematik.

## Literatur


Cook, M. (2009). *Mathematicians. An Outer View of the Inner World.* Princeton: Princeton Universitiy Press.

Lockhart, P. (2009). *A Mathematician's Lament: How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form*. New York: Bellevue Literary Press.

Lutz-Westphal, B. (2006). *Kombinatorische Optimierung. Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht.* Dissertation TU Berlin.

Messner, R. (Hrsg.) (2009). *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen.* Hamburg: edition Körber-Stiftung.

Ruf, U. & Gallin, P. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen.* Seelze: Kallmeyer.

Villotti, C. (2010). *Forschendes Lernen. Eine Begriffsklärung und Analyse der Anwendbarkeit für den Mathematikunterricht*. Diplomarbeit Universität Wien.

Jürgen MAASZ, Linz (Österreich)

# SchülerInnenwettbewerb "MathEyes" in Oberösterreich

Anlässlich eines Aufenthaltes als externer Gutachter und Prüfer für eine mathematikdidaktische Dissertation in Dublin (Irland) habe ich von einem sehr erfolgreichen mathematisch-künstlerischen Projekt an irischen Schulen erfahren: „Maths Eyes“ (http://www.haveyougotmathseyes.com) Die Initiatorin des Projektes, Terry Maguire, hat im Juni 2013 in Linz und Koblenz über das Projekt vorgetragen. Der im Anschluss daran von mir initiierte oberösterreichische SchülerInnenwettbewerb "MathEyes" für SchülerInnen aller Schulstufen und Schultypen wurde als Kooperationsprojekt der beiden Linzer Pädagogischen Hochschulen und des Instituts für Didaktik der Mathematik an der Johannes Kepler Universität Linz durchgeführt. Die gesammelten Informationen inklusive eingereichten und ausgezeichneten Beiträge und des Kataloges, der anlässlich der SiegerInnenehrung am 27.3.2014 gedruckt wurde, finden sich auf der Projekthomepage: http://www.jku.at/idm/ content/e83438/e209929. In diesem Text skizziere ich ein wenig von den Hintergrundüberlegungen. Zuvor jedoch ein paar Impressionen von Wettbewerbsbeiträgen.


Dieses Mädchen hat nach Dreiecken gesucht.

Andere SchülerInnen haben Dreiecke gefunden, die sie zum Nachdenken gebracht haben: Was passiert mit Winkeln beim Photographien?


In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 783–786). Münster: WTM-Verlag


Auch hier wurde eine mathematikhaltige Frage gesehen und beantwortet.

## Die Welt mit mathematischen Augen sehen

Wenn ein Mensch die Welt mit mathematischen Augen sieht, kann das auf sein Verhältnis zur Mathematik in zwei Richtungen wirken. In der einen Richtung kann dieser Mensch in der Welt bestimmte mathematische Objekte wieder erkennen, etwa Dreiecke oder Vierecke oder andere geometrische Formen. Viele technische Produkte, aber auch Pflanzen und Tiere sind sichtbar aus solchen Formen zusammengesetzt. In der anderen Richtung kann eine auffällige Form, etwa ein Muster oder eine Struktur, Neugier und Interesse auslösen. Hat dieser Kristall ausschließlich sechseckige Strukturen? Woran liegt das? Aus der engen Verbindung von Naturwissenschaft und Technik entsteht bisweilen die Frage: Können wir das Wachsen eines Kristalls so beeinflussen, dass eine gewünschte Struktur entsteht? Etwa ein Chip mit integrierten elektronischen Schaltungen? Oder ein Industriediamant? Die Welt mit mathematischen Augen zu sehen, soll aber nicht nur eine interessante Perspektive auf die Welt ermöglichen und das Tor zu vielen nützlichen Technologien eröffnen, sondern auch Freude bereiten. Die Bilder der Kinder und Jugendlichen, die an diesem Wettbewerb teilgenommen haben, zeigen Schülerinnen und Schüler, denen es ganz offensichtlich Freude gemacht hat, sich auf diese - ungewohnte - Art mit Mathematik zu beschäftigen. Freude am Mathematikunterricht ist aber leider im Schulalltag nicht so häufig, wie es wünschenswert wäre.

## 1. Der „mathematische Blick“

Wie sehen wir die Welt? Mit den Augen! Das ist aber nur ein Teil der Wahrheit. Die Augen nehmen optische Informationen (hell/dunkel, Farbe, Kontraste etc.) wahr und übersetzen sie in Signale, die durch die Sehnerven ins Gehirn gehen. Dort werden sie ausgewertet. Das eigentliche Sehen, das

Interpretieren der von den Augen aufgenommen optischen Informationen, findet im Gehirn statt. Wie geht das? Zum Verstehen dieses sehr komplexen und noch nicht vollständig erforschten Vorgangs helfen einige recht einfache Überlegungen. Zunächst fasst das Gehirn einzelne Daten, also von den Augen in Nervensignale übersetzte optische Reize, zu Gruppen zusammen und setzt sie mit vorhandenen, im Gehirn gespeicherten Mustern in Beziehung: Das ist ein Ball, ein Mensch, ein Haus, ein Auto usw. Wenn ein Dreieck, eine Spirale oder eine andere mathematische Struktur gesehen wird, muss demnach ein Urbild, ein Vergleichsmuster bereits im Gehirn vorhanden sein.

Dann sortiert das Gehirn „unwichtige" Informationen aus. Was ist „unwichtig"? Das kann ein parkendes Auto (=keine Gefahr) sein, ein Baum, der nicht auf unserem Weg steht, oder ein uns unbekannter Mensch unter vielen auf der anderen Straßenseite (=keine Bedeutung). Eine andere Gruppe von Informationen ist zwar wichtig, wird uns aber nicht bewusst. Ein Beispiel dafür sind optische Eindrücke über den Weg, den wir gerade gehen wollen. Ist er eben? Gibt es Stufen oder Löcher? Liegt etwas auf dem Weg? Diese Informationen werden vom Gehirn verarbeitet, die Muskeln und Sehnen werden entsprechend gesteuert. Zum Glück brauchen wir uns um die Koordination nicht bewusst kümmern - das Bewusstsein, die Aufmerksamkeit wären hoffnungslos überlastet.

Wenn wir in einer Fußgängerzone oder im Kaufhaus gehen, bewegen wir uns meist ohne darüber nachzudenken so, dass wir niemandem auf den Fuß treten oder mit jemandem zusammenstoßen. Die unbewusste, routinemäßige Verarbeitung von Informationen kann auch gelernt oder antrainiert werden; Ski fahren oder Auto fahren sind Beispiele dafür. Eine routinierte Autofahrerin hält die Spur, sieht ein Bremslicht aufleuchten und bewegt den Fuß auf die Bremse, ohne darüber nachzudenken. Ebenso wird ein akustisches Signal, erzeugt durch eine bestimmte Drehzahl des Motors, vom Gehirn automatisch übersetzt in „die Geschwindigkeit passt in etwa (= nichts ändern) oder „ist zu laut" (= ich muss mal bewusst auf den Tacho schauen oder einen Gang höher schalten).

Für das Lernen und das bewusste und zielgerichtete Anwenden von etwas Gelerntem sind offenbar jene Informationen besonders wichtig, die all diese Filter passieren und tatsächlich bewusst wahrgenommen werden. Interesse und Motivation wirken dabei als zusätzlicher Filter oder als Schleuse. Was uns nicht interessiert, nehmen wir kaum wahr, wenn wir es nicht müssen. Eine Stopptafel am Straßenrand hingegen müssen wir beachten, auch wenn sie uns nicht interessiert. Beim Lernen hängt das Interesse und damit der Filter für die Aufmerksamkeit stark von der Motivation ab: Wenn nur die Angst vor einer schlechten Note zum Aufpassen motiviert, sind die Lernerfolge geringer, als wenn das Interesse von innen kommt, wenn wir etwas wirklich wissen wollen. Selbstverständlich lernen wir alles schneller und nachhaltiger, wenn wir es aus innerer Motivation lernen wollen.

Genau um ein solches Interesse an Mathematik ging es bei diesem Wettbewerb. Wer sein Augenmerk mit Absicht darauf richtet, in der Welt rundherum Mathematik zu entdecken, sieht die Welt auf einmal mit anderen Augen - also mit einer anderen Fokussierung des Interesses als üblich. Wer dann tatsächlich überall Mathematik entdeckt, braucht nicht zu fragen: Wozu lernen wir denn das? - Es ist ja offensichtlich, dass Mathematik überall vorkommt. Dann liegt auch die Schlussfolgerung nahe, dass es in dieser Welt sehr nützlich sein kann, Mathematik zu lernen und zu verstehen.

## 2. Die Welt mit Hilfe der Mathematik besser verstehen und verändern

Das Gehirn erkennt etwas Mathematisches in den Informationen wieder, die von den Augen aufgenommen werden, wenn es schon etwas über Mathematik gelernt hat. Ein Sechseck wird in einer Bienenwabe (wieder-) erkannt, wenn es aus dem Geometrieunterricht bekannt ist. Geht es auch anders herum? Ein nachdenklicher Blick auf eine Bienenwabe kann neugierig machen und zu der Frage führen: Weshalb bauen die Bienen etwas mit dieser Form? Wären Dreiecke oder Quadrate oder Kreise nicht einfacher und besser? Eine genauere mathematische Analyse ergibt, dass Sechsecke in gewisser Hinsicht optimal sind: Sie bilden mit minimalem Materialwand eine stabile Struktur.

Ein anderes Beispiel aus dem Alltag ist Bekleidung. Wer schon einmal versucht hat, aus einer Stoffbahn einen einfachen Rock zu schneidern, hat auch erfahren, dass das nicht ganz einfach ist. Welche Form muss in der Ebene (der Stoffbahn) ausgeschnitten werden, damit im Raum ein Rock daraus wird? Mathematisch ist das in etwa der Mantel eines Kegelstumpfs. So wird das beim Schneidern aber nicht mathematisiert; stattdessen werden Schnittmuster verwendet, die z.B. in Zeitschriften zu finden sind. Wer aber erstellt komplizierte Schnittmuster von Abendkleidern oder Trachtenanzügen? Wie in sehr vielen Fällen in Handwerk und Technik wird Mathematik hier versteckt eingesetzt; sie wird verwendet, ohne explizit benannt und bekannt zu sein. Wer aber nicht nur nachmachen und anwenden will, kann dabei mit bewusstem Einsatz von Mathematik erstaunliche Erfolge erzielen. Denn alle Neuen Technologien sind im Kern mathematische Technologien.

Elisabeth MANTEL, Erfurt

# Zweitklässler bezeichnen Wege in Eckenhausen

Orientierung in der Umwelt ist eine fundamentale Fähigkeit, die in Kindheit und Jugend erlernt werden muss. Je nach Situation erfolgt Orientierung unterschiedlich, beispielsweise können Stadtpläne zu Hilfe genommen werden. Um einen Weg vom Standpunkt zum Zielort zu finden, kann der Suchende eine Wegbeschreibung von einem Ortskundigen erfragen, die mit Hilfe des Stadtplans leichter nachvollziehbar ist. Für Wegbeschreibungen verwendet man Lageeigenschaften und Lagebeziehungen. Lageeigenschaften kennzeichnen die Lage von einzelnen Objekten. Eine Lagebeziehung kennzeichnet die Position von zwei Objekten zueinander. Im Forschungsprojekt liegt der Schwerpunkt auf den Lageeigenschaften rechts/ links, oben/ unten und vorn/ hinten und den dazu gehörenden Lagebeziehungen, also auf den drei Richtungen des Raumes. Es werden Wegbeschreibungen auf Plänen  betrachtet. Konkret wird unter anderem der Stadtplan Eckenhausen verwendet. Eckenhausen ist dem Zahlenbuch Klasse 1 entnommen (Das Zahlenbuch 2012b, S. 84, siehe Abbildung 2). Die Forschungsfrage hierzu lautet: Wie **verstehen** Zweitklässler Wegbeschreibungen in Bezug auf kartengebundene oder bewegungsgebundene Bezugssysteme?

## Bezugssysteme

Man hat bisher in den Sprachen der Welt drei verschiedene Bezugssysteme identifiziert (Bender und Beller 2013, S. 126, Levinson 2003, S. 32).

Beim **absoluten** (oder umweltzentrierten) Bezugssystem werden Himmelsrichtungen oder feste Orientierungspunkte der Welt (der Umgebung) herangezogen. Beispiel: Der Ball befindet sich östlich vom Auto (siehe Abbildung 1). Vor allem die Seefahrer haben sich früher an den Sternen orientiert, um ihre Wege auf dem Meer zu finden. Die Sterne sind Orientierungspunkte im absoluten Bezugssystem. Heutige Navigationssysteme nutzen Satellitensignale und ermitteln daraus eine Position im Gradnetz der Erde, ebenfalls ein absolutes Bezugssystem.

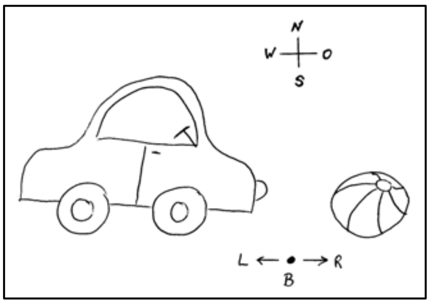


**Abbildung 1: Bezugssysteme**

Beim **intrinsischen** (oder objektzentrierten) Bezugssystem erfolgt der Bezug auf den eigenen Standort oder auf ein Objekt. Beispiel: Der Ball liegt vor dem Auto. Dieses Bezugssystem ist eng mit der eigenen Körperwahrnehmung verbunden und wird von Kindern in ihrer Entwicklung zuerst verwendet. Kleine

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 787–790). Münster: WTM-Verlag

Kinder beschreiben alles aus ihrer eigenen Sicht. Sie können sich (noch) nicht in eine andere Person hineinversetzen. Dies zeigen auch die Versuche von Piaget mit dem Drei-Berge-Versuch (Piaget et al. 1993).

Beim **relativen** (oder betrachterzentrierten) Bezugssystem kommt eine Beobachterperspektive hinzu. Die Person, die einen Weg oder die Lage eines Objektes beschreibt, bezieht den eigenen Standort, die eigene Position mit ein (B in Abbildung 1). Beispiel: Der Ball liegt rechts vom Auto.

Bei Wegbeschreibungen auf Plänen werden nur das intrinsische oder das relative Bezugssystem verwendet. Das intrinsische Bezugssystem bedeutet ein sich hineinversetzen in eine (imaginäre) Figur. Diese läuft auf dem Plan als kleiner Punkt entlang. „Gehe geradeaus, drehe dich nach links, gehe weiter bis zur nächsten Kreuzung, biege dann nach rechts ab etc.“ sind Beschreibungen, die das intrinsische Bezugssystem zugrunde legen. Eine solche Wegbeschreibung wird **bewegungsgebunden** genannt (Walther et al. 2008, S. 135). Beim relativen Bezugssystem, das auf den Betrachter bezogen ist, ist der Plan die feste Bezugsgröße. Der Betrachter verwendet Beschreibungen wie: „Gehe nach oben, nach rechts, nach unten.“. Diese Richtungen beziehen sich auf den Plan, der beispielsweise fest auf dem Tisch liegt. Eine solche Wegbeschreibung wird **kartengebunden** genannt (Walther et al. 2008, S. 135).

## Forschungsprojekt

Im Forschungsprojekt wurde eine schriftliche Untersuchung mit 204 Schülerinnen und Schülern im Klassenverband durchgeführt. Von den elf teilnehmenden Schulklassen waren acht Klassen reine Zweitklässler und drei Klassen gemischt Klassenstufe 1 und 2. Sechs Klassen wurden in den Städten Erfurt und Jena untersucht, die anderen fünf Klassen in kleineren Thüringer Orten. Da die Leseleistung von Zweitklässlern nicht sicher vorausgesetzt werden kann und teilweise Erstklässler daran teilnahmen, wurden die Aufgaben vorgelesen. Den Interviewerinnen lag ein Manual vor. In der schriftlichen Untersuchung wurden Aufgaben aus folgenden Themenbereichen erfasst: Lageeigenschaften/ Lagebeziehungen; Wege zeichnen; Ansichten. In diesem Beitrag wird über die Aufgaben zum Wege zeichnen in Eckenhausen berichtet.

Bei der ersten Wegbeschreibung wird eine kartengebundene Beschreibung verwendet. Die Richtungsangaben nach links, nach unten, nach oben beziehen sich immer auf die Lage des Plans. Die Aufgabe lautet: Nimm deinen roten Stift und zeichne den folgenden Weg ein: Suche, wo das Eiscafe ist. *(Kontrolle per Folie)* Von dort male nach links ein Wegstück, (*Pause*) dann nach unten drei Wegstücke, (*Pause*) nach links zwei Wegstücke (*Pau-*

*se*) und nach oben ein Wegstück. Wo bist du angekommen? Mache ein Kreuz!

Die zweite Wegbeschreibung im Stadtplan Eckenhausen ist eine bewegungsgebundene Beschreibung. Der Weg soll wieder direkt in den Plan eingezeichnet werden. Im Manual steht dazu folgende Anweisung:

Suche wo Ina wohnt. (*auf Folie zeigen zur Kontrolle*) Du stehst an Inas Haus und schaust in Richtung Taxistand. Nun gehst du ein Wegstück geradeaus, (*Pause*) drehst dich nach rechts und gehst drei Wegstücke geradeaus. (*Pause*) Dort drehst du dich nach links und gehst zwei Wegstücke geradeaus, (*Pause*) drehe dich wieder nach links und gehe ein Wegstück geradeaus. (*Pause*) Wo bist du angekommen? Mache ein Kreuz!

**Abbildung 2: Stadtplan Eckenhausen**

Jede Aufgabenstellung wird zweimal vorgelesen. Die bewegungsgebundene Beschreibung erfordert vom Kind ein sich hineinversetzen in die räumliche Situation des Plans, um der Beschreibung korrekt zu folgen. In der Wegbeschreibung werden bewusst Worte gewählt: „Du stehst…“, „schaust in Richtung…“, „gehst…“, um das Kind auf diese veränderte Position und Betrachtungsweise hinzuweisen.

## Erste Ergebnisse

Von 204 teilnehmenden Schülerinnen und Schülern sind bei der kartengebundenen Beschreibung fast 70% der Wege vollkommen richtig eingezeichnet. Etwa 7% der Schüler und Schülerinnen haben falsche Ergebnisse oder sind mit der Aufgabe nicht zu Recht gekommen.

Ganz anders stellt sich das Ergebnis bei der Umsetzung der bewegungsgebundenen Beschreibung dar: Fünf Kinder haben diese Aufgabe nicht bearbeitet. Von 199 Schülerantworten sind ca. 10% der Wege vollkommen richtig eingezeichnet. 22% der Schüler und Schülerinnen haben falsche Ergebnisse oder sind mit der Aufgabe nicht zu Recht gekommen. 45% haben das erste Wegstück richtig eingezeichnet.

Die Bearbeitungen der Schüler und Schülerinnen wurden auf ihre Fehler hin untersucht. Bei der bewegungsgebundenen Beschreibung wurde ein Fehler besonders deutlich: die kartengebundene Interpretation der Beschreibung. Eine beispielhafte Schülerlösung ist in Abbildung 3 dargestellt. Der kartengebundene Weg von der Eisdiele zum Parkhaus ist korrekt eingezeichnet. Der bewegungsgebundene Weg beginnt an Inas Haus Richtung Taxistand. Die weiteren Anweisungen werden kartengebunden interpretiert, so dass das Kind einen Weg entlang der Straße zwischen Inas Haus und der Post einzeichnet und als Ziel den Taxistand vermerkt. Dieser Fehler kommt mit einer Häufigkeit von ca. 45% vor.


**Abbildung 3: Lösung Schüler 22**

Verwechslungen der Richtungen rechts – links waren etwa genauso oft zu verzeichnen wie Fehler in der Anzahl der Wegstücke, d.h. einzelne Wegabschnitte wurden zu lang oder zu kurz gezeichnet. Beide Fehler tauchten in etwa 10 % der Fälle auf.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Umsetzung der kartengebundenen Beschreibung in Eckenhausen den Kindern überwiegend gelungen ist, an der Umsetzung der bewegungsgebundenen Beschreibung im Plan Eckenhausen scheitern die Kinder mehrheitlich. Die bewegungsgebundene Beschreibung wurde häufig kartengebunden interpretiert.

Dieses Ergebnis ist von besonderer Bedeutung für die Lehrerbildung und für die tägliche Schulpraxis, das Bewusstsein der Lehrerinnen und Lehrer im Umgang mit Wegbeschreibungen und räumlichen Bezugssystemen gilt es präzise zu schärfen.

## Literatur


Bender, Andrea; Beller, Sieghard (2013): Die Welt des Denkens. Kognitive Einheit, kulturelle Vielfalt. 1. Aufl. Bern: Huber (Psychologie).

Levinson, Stephen C. (2003): Space in language and cognition. Explorations in cognitive diversity. Cambridge, New York: Cambridge University Press.

Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel; Aebli, Hans (1993): Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Unter Mitarbeit von Rosemarie Heipcke. 2. Aufl. Stuttgart: Klett (Gesammelte Werke, Studienausgabe / Jean Piaget ; Bd. 6).

Walther, Gerd; Heuvel-Panhuizen, Marja van den; Granzer, Dietlinde; Köller, Olaf (2008): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. 2. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor (Lehrer-Bücherei).

Das Zahlenbuch. Klasse 1 (2012b). 1. Aufl. Stuttgart, Leipzig: Klett (Mathe 2000).

Günter MARESCH, Salzburg

# Erfolgreiche Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben (Forschungsprojekt GeodiKon)

## Das Forschungsprojekt und die Forschungshypothese

Das Forschungsprojekt GeodiKon (Entwicklung eines didaktischen Konzepts für den Geometrieunterricht) des österreichischen Unterrichtsministeriums und der PH Salzburg wird in den Jahren 2013 und 2014 im Pretest-Posttest-Design durchgeführt. Es nehmen 46 Klassen mit insgesamt 896 SchülerInnen im Alter von 12 bis 13 Jahren aller österreichischen Schultypen der Sekundarstufe I (Hauptschule, Neue Mittelschule, Allgemeinbildende Höhere Schule) in drei Bundesländern teil. Die Forschungshypothese der Untersuchungen lautet: Schulung (Bewusstmachung, Kategorisierung, Verinnerlichung) jedes einzelnen der vier Faktoren der Intelligenzfacette Raumvorstellung und Training des Strategierepertoires bewirken eine Verbesserung des Raumvorstellungsvermögens.

## Die Ziele des Projektes

1. Entwicklung von Lernmaterialien für 12 Lernwochen zur Schulung der vier Faktoren (Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, räumliche Beziehungen, mentale Rotation und räumliche Orientierung) der Raumvorstellung (Linn & Petersen, 1985; Maier, 1994; Maresch, 2014) mit dem Ziel, bei den SchülerInnen eine ausgewogene und umfassende Entwicklung der Raumvorstellung zu fördern
2. Entwicklung eines strukturierten Modells von anwendbaren Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben (Barratt, 1953; Just & Carpenter, 1985; Schultz, 1991) mit dem Ziel, das Strategierepertoire der Lernenden zu erweitern
3. Zusammenstellung der entwickelten Lernmaterialien und der gewonnenen Erkenntnisse des Projekts zu einer Handreichung für LehrerInnen
4. Schulung von Lehrenden und Studierenden im Umgang mit den Lernmaterialien im Rahmen von Fortbildungsseminaren und Workshops
5. Dissemination der Erkenntnisse des Projekts

## Der Ablauf des Projekts

Während der ersten Phase des Projekts (Jän. bis Sep. 2013) wurden vom Projektteam (Projektmitwirkende aus folgenden Institutionen: PH Salzburg, KPH Wien-Krems, PH Wien, PH Niederösterreich, PH Steiermark, Uni-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 791–794). Münster: WTM-Verlag

versität Salzburg, Universität Innsbruck, TU Wien und der Arbeitsgruppe Didaktische Innovation) spezielle Lernmaterialien für 12 Wochen Geometrie-Unterricht zusammengestellt. Das strukturierte Modell der „Vier Strategiepaare zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben“ wurde entwickelt und die Testbatterie (mit Unterstützung der Universität Wien und der TU Wien) zusammengestellt.

Die zweite Phase (Sep. 2013 bis Feb. 2014) war die Test- und Lernphase an den Schulen. Im Sep. und Okt. 2013 fanden die Pretests statt. Danach schloss direkt die Lernphase (12 Wochen), wo die entwickelten Lernmaterialien im Unterricht eingesetzt wurden und die Schulung des Strategierepertoires erfolgte, an.

Im Jän. und Feb. 2014 wurden die Posttests an den Schulen durchgeführt. Danach erfolgt in der dritten Phase des Projekts (Mär. bis Dez. 2014) die Auswertung der Daten, die Aufbereitung der Erkenntnisse, die Zusammenstellung der Strategieinformationen und der Lernmaterialien zu einer Handreichung für Lehrende der Sekundarstufe und die Dissemination der Ergebnisse und Lernmaterialien im Rahmen von Workshops, Tagungen und mittels Publikationen.

## Die Testbatterie

Die Testbatterie der Pretests und Posttests bestand aus vier Raumvorstellungstests (Dreidimensionaler Würfeltest (3DW-Test)(Gittler, 1984), Differential Aptitude Test (DAT)(Bennett et al., 1973), Mental Rotation Test (MRT)(Peters et al., 1995) und Spatial Orientation Test (SOT)(Hegarty & Waller, 2004)) und sechs Fragebögen, welche Fragen zu den verwendeten Strategien, abgeleitet vom Modell der vier Strategiepaare zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben, beinhalten und Informationen über Geschlecht, Alter, Lerntyp und Interessen erhoben.

## Erste Ergebnisse der Analyse der Pretests

An den Pretests nahmen insgesamt mit 896 SchülerInnen teil. Die statistische Aufbereitung der Ergebnisse der Pretests wurde von Erich Svecnik (Svecnik, 2013) durchgeführt. Nach jedem durchgeführten Test erhielten die SchülerInnen eine beliebige Aufgabe des jeweiligen Tests nochmals zum Bearbeiten. Beim Lösen der Aufgabe sollten sich die Probanden selbst beobachten, mit welcher Strategie sie die jeweilige Aufgabe lösen. In einer achtstufigen Skala waren direkt nach dem Lösen des jeweiligen Beispiels vier Fragen zwischen den beiden Polen (Holistische Strategie – Analytische Strategie; Räumliches Denken – Flächendenken; Objekte werden bewegt –

BearbeiterIn bewegt sich; Verifizierende Strategie – Falsifizierende Strategie) zu beantworten.

## Gibt es erfolgversprechende Lösungsstrategien für Raumvorstellungsaufgaben?

Um den Einfluss der Lösungsstrategien auf die erfasste Leistung zu ermitteln, wurden Regressionsmodelle aufgestellt, in die neben Geschlecht, Schulform und Schulstufe die Items zu Lösungsstrategien einbezogen und deren zusätzlicher Beitrag zu Varianzaufklärung ermittelt wurden (Svecnik, 2013). Beim 3DW-Test steigt die Varianzaufklärung von 16,3% auf 18,0%, die Strategien tragen also ihrer Gesamtheit statistisch signifikant bei (F=4,73; p=0,001), wobei zwei Strategien signifikante Beiträge leisten: Wenn SchülerInnen sich auf Teile des Objekts konzentrierten (ß=0,096; p=0,005) und wenn sie sich das Objekt räumlich vorgestellt hatten (ß=0,078; p=0,025).

Beim DAT steigt die Varianzaufklärung durch Hinzunahme der Lösungsstrategien statistisch signifikant von 11,8% auf 15,6% (F=9,48; p<0,001). Wie beim 3DW-Test tragen beim DAT zwei Strategien zu einer Steigerung der erfassten Leistung bei: Wenn nur Teile des Objekts betrachtet werden (ß=0,109; p=0,002) und wenn das Objekt sich räumlich vorgestellt wird (ß=0,169; p<0,001).

Beim MRT steigt die Varianzaufklärung von 16,4% auf 23,7% (F=18,68; p<0,001). Zurückzuführen ist dies bis auf die Ausschlussstrategie (p=0,438) auf alle drei anderen abgefragten Strategien, allerdings ist hier die holistische Betrachtung des Objekts (ß=0,115; p=0,001) relevant, zudem das Raumdenken (ß=0,202; p<0,001) und die Bewegung des Objekts (ß=0,098; p=0,003).

Schließlich steigert auch noch beim SOT die Hinzunahme der Lösungsstrategien die Varianzaufklärung statistisch hochsignifikant von 15,7% auf 18,7% (F=7,58; p<0,001). Verantwortlich dafür sind die Strategie des Bewegen des Objekts (ß=0,093; p=0,007) und des Ausschlussverfahrens (ß=0,150; p<0,001)(Svecnik, 2013).

## Zusammenfassung und Ausblick

Die Analyse der Ergebnisse der Pretests ergab, dass die zusammengestellte Testbatterie konsistent und valide ist und somit als wissenschaftlich korrekt erachtet werden kann. Es zeigt sich deutlich, dass SchülerInnen unterschiedliche Tests mit unterschiedlichen Strategien bearbeiten. Diese Erkenntnis gibt Hinweise darauf, dass die Intention des Projektes – durch Bewusstmachung eines großen Strategierepertoires bei den SchülerInnen eine Verbesserung der Raumvorstellung zu bewirken – passend gewählt ist. Die Auswertung der Ergebnisse der Posttests wird Aufschluss in der Frage bringen, ob die Kenntnis über unterschiedliche Bearbeitungsstrategien von Raumvorstellungsaufgaben, deren Bewusstmachung und Training tatsächlich zu einem besseren Raumvorstellungsvermögen bzw. zu einer besseren Lösekompetenz von Raumvorstellungsaufgaben führt oder ob die Antwort auf diese Frage differenziert gegeben werden muss.

*Ausblick*: Nach der Durchführung der Posttests (Jän. und Feb. 2014) erfolgt die Digitalisierung und die Analyse der Daten, die Aufbereitung der Erkenntnisse, die Zusammenstellung der Strategieinformationen und der Lernmaterialien zu Handreichungen für LehrerInnen der Sekundarstufe I und die Exploration der Ergebnisse und Lernmaterialien bei Workshops, Tagungen und Publikationen.

## Literatur


Barratt, B. S. (1953). An analysis of verbal reports of solving problems as an aid in defining spatial factors. In: *The Journal of Psychology*, 36.

Bennett, G. K.; Seashore, H. G.; & Wesman, A. G. (1973). *Differential aptitude tests, forms S and T*. New York: The Psychological Corporation.

Gittler, G. (1984). Entwicklung und Erprobung eines neuen Testinstruments zur Messung des räumlichen Vorstellungsvermögens. In: *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie*, 2, 141-165.

Hegarty, M., & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. In: *Intelligence*, 32, 175-191.

Just, M. A., Carpenter, P. A. (1985). Cognitive Coordinate Systems: Accounts of Mental Rotation and Individual Differences in Spatial Ability. In: *Psychological Review*, 92.

Linn, M. C., Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences on spatial ability: a meta-analysis. In: *Child Development*, 56, 1479-1498.

Maier, H.P. (1994). Räumliches Vorstellungsvermögen: Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. In: *Europäische Hochschulschriften*: Reihe 6, Psychologie, Band 493.

Maresch, G. (2014). Spatial Ability – The Phases of Spatial Ability Research. In: *Journal for Geometry and Graphics*, Heldermann, http://www.heldermann.de/JGG/JGG17/JGG172/jgg17020.htm .

Peters, M., Laeng, B., Latham, K., Jackson, M., Zaiyouna, R., & Richardson, C. (1995). A Redrawn Vandenberg & Kuse Mental Rotations Test: Different Versions and Factors that affect Performance. In: *Brain and Cognition*, 28, 39-58.

Schultz, K. (1991). The contribution of solution strategy to spatial performance. In: *Canadian Journal of Psychology*, 45.

Michael MARXER, Gerald WITTMANN, Freiburg

# Aufgabenadäquates Rechnen bei Dezimalbrüchen oder Warum vermeintlich einfache Aufgaben so fehlerträchtig sind

In diesem Beitrag werden in Bezug auf das flexible Rechnen mit Dezimalbrüchen zwei Aspekte beschrieben: Einerseits typische Fehler von Schülerinnen und Schülern, die auf ein nicht aufgabenadäquates Arbeiten hindeuten, und andererseits Ansätze zur Entwicklung von Aufgaben, die das flexible Rechnen mit Dezimalbrüchen fördern können.

## 1. Typische Fehler beim Multiplizieren von Dezimalbrüchen

Typische Fehler beim Rechnen mit Dezimalbrüchen lassen sich exemplarisch am Beispiel der Aufgabe 2,4 · 0,5 illustrieren. In einer eigenen Erhebung löste weniger als die Hälfte der betreffenden Schülerinnen und Schüler an Haupt-, Werkreal- und Realschulen in Baden Württemberg diese vermeintlich einfache Aufgabe richtig. Es kann ein breites Spektrum an Fehlerphänomenen und -ursachen rekonstruiert werden:

- Im Bereich der Einmaleinsfehler treten häufigen Fehler beim Rechnen mit 0 auf (Nullfehler), beispielsweise 2 · 0 = 2 oder 2,4 · 0 = 2,4.
- Das Komma-trennt-Muster zeigt sich in 2,4 · 0,5 = 0,20 oder auch in 2,4 · 0,5 = 2,20, dort in Verbindung mit einem Nullfehler.
- Das Ergebnis 12,0 weist darauf hin, dass das Setzen des Kommas im Anschluss an die Rechnung 24 · 5 = 120 so erfolgt, dass das Ergebnis wie die beiden gegebenen Faktoren eine Nachkommastelle aufweist.
- Hinter dem Ergebnis 0,12 kann die (richtige) Überlegung stehen, dass das Ergebnis zwei Nachkommastellen besitzen muss, es wird aber die die Endnull nicht beachtet oder falsch behandelt.
- Ein „Ziffernrechnen“ ohne jegliche Beachtung von Stellenwerten ist exemplarisch in 2,4 · 0,5 = 2,0 zu erkennen (Komma-trennt-Muster, Nullfehler, auf eine Nachkommastelle zielende Kommasetzung).

Die Lösungen deuten darauf hin, dass nur wenige die Aufgabe 2,4 · 0,5 inhaltlich lösen („die Hälfte von ...“) und damit die Besonderheiten der gegebenen Zahlen nicht nutzen (vgl. Marxer & Wittmann 2013). Stattdessen rechnen viele Schülerinnen und Schüler schriftlich oder halbschriftlich, was sich als fehleranfällig erweist. Die Kommasetzung erfolgt auch aufgrund von Oberflächenmerkmalen, so nach Einheitlichkeit („alle Zahlen mit einer Nachkommastelle“) oder einer vereinfachten Regel („wenn zwei Zahlen mit einer Nachkommastelle multipliziert werden, hat das Ergebnis zwei

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 795–798). Münster: WTM-Verlag

Nachkommastellen“). Ferner werden Verfahrensschritte in wenig sinnvoller Weise und ohne Bezug zum Stellenwertystem kombiniert („Ziffernrechnen“).

## 2. Zahlenblick bei Dezimalbrüchen

Die Aufgabe 2,4 · 0,5 belegt, dass es nicht sinnvoll ist, stets schematisch entsprechend den jeweils bekannten kalkülhaften Verfahren zu rechnen. Stattdessen ist eine *aufgabenadäquate Vorgehensweise* angebracht. Sie zeichnet sich insbesondere aus durch

- das Erkennen und Bewerten der jeweils spezifischen Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen einer Aufgabe im Hinblick darauf, ob sie für die Lösung hilfreich sein können,
- das gezielte Wählen von Lösungswegen, die den aufgabenspezifischen Gegebenheiten gerecht werden, indem die jeweils besonderen Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen einer Aufgabe genutzt werden.

Ein aufgabenadäquates Rechnen ist ein Ziel der *Förderung des Zahlenblicks* der Schülerinnen und Schüler (vgl. Marxer & Wittmann 2011; 2012, 2013), in Anlehnung an entsprechende Konzepte aus dem Mathematikunterricht der Grundschule (vgl. Schütte 2004; 2008; Rathgeb-Schnierer 2006). Die Förderung des Zahlenblicks zielt weniger auf das Rechnen als solches, denn auf das *Reflektieren von Rechenwegen*, also auf eine Meta-Ebene zum eigentlichen Rechnen. Ein Zahlenblick entwickelt sich nicht automatisch durch das Bearbeiten („Rechnen“) *vieler* Aufgaben, sondern benötigt gezielte Impulse, „spezielle Anreize, den Rechendrang aufzuhalten und den Blick auf die Art der Aufgabe zu lenken“ (Schütte 2004, S. 144). Geeignete Aufgabenformate werden in Abschnitt 3 vorgestellt.

Diesem Ansatz liegt die Überzeugung zugrunde, dass das *Rechnen* im engeren Sinne auch bei Dezimalbrüchen nur eine geringe Alltagsbedeutung besitzt. Es wird schon bald vom Taschenrechner, dem Smartphone oder einer Tabellenkalkulation übernommen. Deshalb wird es hier anders akzentuiert: *Das Rechnen mit Dezimalbrüchen bildet den Anlass, dass Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der für sie neuen Zahlen erfahren können.* Beim Rechnen beschäftigen sie sich mit Dezimalbrüchen, sie können deren Eigenschaften erfahren und verstehen. Insbesondere können sie die Verbindungen zu gemeinen Brüchen und die dahinter stehenden Grundvorstellungen vertiefen.

## 3. Aufgabenformate

Um dieses Ziel zu erreichen, bedarf es Aufgabenformate, die den Zusammenhang von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen immer wieder herstellen und das Bewusstsein dafür schärfen, dass es sich lediglich um unterschiedliche Darstellungen derselben Zahl handelt. Besonders eingängig sind dabei solche Aufgaben, bei denen das Wechseln zwischen den Darstellungen Vorteile erbringt. Wenn die Darstellung „passt", lässt sich das Ergebnis oft schon auf den ersten Blick „sehen" oder kann einfacher ermittelt werden als mit dem Standardverfahren. Das Nutzen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen kann also einen deutlichen (Zeit-)Gewinn bringen und gegenüber dem ziffernweisen Rechnen den Blick für die Größenordnungen von gegebenen Zahlen und Ergebnissen bewahren.

Beispiel 1: *Welche dieser Aufgaben haben das gleiche Ergebnis?*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $77\,777 \cdot 0{,}5$ | $77\,777 \cdot \frac{1}{3}$ | $77\,777 : 5$ | $77\,777 \cdot 2$ |
| $77\,777 \cdot 0{,}2$ | $77\,777 : 2$ | $77\,777 \cdot \frac{1}{5}$ | $77\,777 \cdot 5$ |
| $77\,777 \cdot 0{,}3$ | $77\,777 : 3$ | $77\,777 \cdot \frac{1}{2}$ | $77\,777 \cdot \frac{3}{10}$ |

Das Suchen ergebnisgleicher Aufgaben beruht hier auf dem Erkennen wirkungsgleicher Operationen, weil der erste Faktor bei allen Aufgaben derselbe ist. Der Wechsel zwischen den Darstellungsformen bei den Brüchen bringt hinsichtlich des Lösungsaufwands entscheidende Vorteile gegenüber dem Standardalgorithmus. Dabei macht der relativ große Faktor 77 777 die schriftliche Multiplikation unattraktiv. Wenn auch der Einsatz des Taschenrechners vermieden werden soll, kann diese Zahl auf 12 Stellen vergrößert werden.

Beispiel 2: *Aufgaben nach günstigen Lösungswegen sortieren*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0{,}5 \cdot 2$ | $48 : 0{,}5$ | $6{,}4 \cdot 1{,}5$ | $\frac{3}{4} : 0{,}75$ |
| $25 \cdot 0{,}73$ | $0{,}25 \cdot 3$ | $12{,}5 \cdot 7{,}3$ | $1{,}5 : \frac{3}{4}$ |
| $1 : 0{,}25$ | $7{,}3 \cdot 6{,}9$ | $0{,}25 \cdot 100$ | $\frac{1}{2} \cdot 1{,}5$ |

Hier besteht das Ziel darin, einen aufgabenadäquaten – die Besonderheiten der jeweils gegebenen Zahlen nutzenden – Lösungsweg zu finden. Verhindert werden soll, dass voreilig ausschließlich auf die schriftliche Multiplikation zurückgriffen wird. Auch hier wird die oben genannte Forderung, „den Rechendrang aufzuhalten" (Schütte 2004, S. 122) dadurch erfüllt, dass der Blick auf die Zahlen die Lösungsfindung beschleunigt, allerdings auf völlig unterschiedlichen Wegen. Hilfreich hierzu ist das *Sortieren* von gegebenen Aufgaben nach günstigen Lösungswegen:

- Ich „sehe“ das Ergebnis oder weiß es auswendig.
- Eine kleine Umformung hilft entscheidend weiter, damit die Aufgabe im Kopf gelöst werden kann. (Beispiele hierfür sind das Umwandeln eines Bruchs in einen Dezimalbruch oder umgekehrt, s. oben).
- Diese Aufgabe kann ich nicht anders lösen, hier muss ich wirklich (schriftlich) „rechnen“.

Typisch für diese Aufgabenformate ist, dass sie immer wieder neue kognitive Herausforderungen mit sich bringen. Die bekannten Probleme klassischer Automatisierungsübungen wie das Einschleifen falscher oder suboptimaler Lösungsverfahren (vgl. Wartha & Wittmann 2009, S. 81ff.) sollen damit vermieden werden. Dabei wird – über das Thema „Dezimalbrüche“ hinaus – auch bei anderen mathematischen Inhalten ein Bewusstsein gefördert, das darauf abzielt, bestimmte Bedingungen und Voraussetzungen in die Entscheidung über den Lösungsweg einzubeziehen und adäquat zu nutzen.

## Literatur


Marxer, M. & Wittmann, G. (2011). Förderung des Zahlenblicks – Mit Brüchen rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. *Der Mathematikunterricht*, 57(2), 25–34.

Marxer, M. & Wittmann, G. (2012). Den Stellenwerten eine Bedeutung geben. Dezimalbrüche multiplizieren jenseits der Kommaverschiebungsregeln. *mathematik lehren*, 171, 44–48.

Marxer, M. & Wittmann, G. (2013). Auch Dezimalbrüche sind Brüche. Mit Dezimalbrüchen flexibel rechnen, um ihre Eigenschaften zu verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 55(4), 30–34.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*. Hildesheim: Franzbecker.

Schütte, S. (2004). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 25(2), S. 130–148.

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. München: Oldenburg.

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In: A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg): *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Lernschwierigkeiten erkennen und überwinden*. Weinheim, Basel: Beltz, 73–108

Andreas MATT, David GRÜNBERG, Oberwolfach

# IMAGINARY-Entdeckerbox für Schulen

IMAGINARY ist eine Wanderausstellung und offene Plattform für interaktive Mathematik des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach gefördert von der Klaus Tschira Stiftung. IMAGINARY wurde in über 120 Städten in 28 Ländern veranstaltet und verzeichnet über 1 Million BesucherInnen, siehe zum Beispiel eine Ausstellung in Hannover in Abbildung 1. IMAGINARY-Exponate werden in großen Wissenschaftsmuseen gezeigt, u.a. im Deutschen Museum in München, im Museum of Mathematics (MoMath) in New York, in den CosmoCaixa-Museen in Madrid und Barcelona und in Técnopolis in Buenos Aires.

Das Ziel der Plattform „IMAGINARY – open mathematics“ ist es, einen Ort für die Präsentation und Entwicklung von Mathematikausstellungen anzubieten. Hier werden alle IMAGINARY-Inhalte einem breiten Publikum unter einer freien Lizenz zur Verfügung gestellt, und können so leicht für eigene Ausstellungen und Veranstaltungen verwendet werden. Darüber hinaus bietet die Plattform allen BenutzerInnen die Möglichkeit, mit eigenen Inhalten beizutragen, und dient so als Basis für den Austausch der sich in den letzten Jahren verstärkt entwickelnden Mathematikvermittlung. Die Zielgruppe der Plattform sind neben Museen und Universitäten vor allem Schulen und die breite Öffentlichkeit.

Abbildung 1: IMAGINARY-Ausstellung in Hannover, 2008

Insbesondere hat es sich herausgestellt, dass IMAGINARY junge Leute im Schüleralter interessieren kann. Das zeigt sich durch den Besuch der Aus-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 799–802). Münster: WTM-Verlag

stellungen durch Schulklassen und die Benutzung der IMAGINARY Programme, Erklärungs-Materialien und Filme auf der Plattform durch Lehrende und Lernende. Nun bemüht sich IMAGINARY verstärkt darum, moderne Mathematik für Schulen zu vermitteln. Seit Dezember 2013 bietet IMAGINARY für Schulklassen eine IMAGINARY-Entdeckerbox an, die einen Klasseneinstieg in die interaktive und spielerische Welt von IMAGINARY ermöglicht. Diese Box beinhaltet eine Sammlung an verschiedenen Ideen, Programmen, Filmen und Bildern, die zum Entdecken und Experimentieren mit Mathematik anregen sollen. Ziel der Box ist es, einer "Spielesammlung" gleich, eine Vielzahl an Bausteinen anzubieten, die untereinander kombiniert und alleine oder in einer Gruppe entdeckt werden können. Dabei geht es nicht darum, vorgegebenen Anweisungen strikt zu folgen, sondern der Neugier und Kreativität freien Lauf zu lassen. Die Mathematik hinter den einzelnen Inhalten kann spielerisch und interaktiv entdeckt, erarbeitet, erfunden, konstruiert und verstanden werden. Die Module laden zum Weiterdenken ein und dazu, sich selbst auch über den Rahmen der Box hinaus aktiv mit Mathematik zu beschäftigen.

Die Entdeckerbox beinhaltet 25 verschiedene Module. Einige Highlights werden hier vorgestellt:

1. Eine Live-DVD mit den besten Programmen der beiden Ausstellungen »IMAGINARY – mit den Augen der Mathematik« und »Mathematik des Planeten Erde«, darunter auch erstmals die von Jürgen Richter-Gebert zusammengestellen Cinderella-Experimente der IMAGINARY-Installation im Deutschen Museum in München, siehe Abbildung 2. Mit besonderem Hintergrundmaterial für Schulen ergänzt wurde das Programm SURFER, mit dem algebraische Flächen in Echtzeit erstellt werden können und man einen interaktiven und ästhetischen Einblick in die algebraische Geometrie erhält.

2. Die erste deutsche Übersetzung des Buches »Denkaufgaben für Kinder von 5 bis 15« des berühmten russischen Mathematikers W. I. Arnold

3. Vier mathematische Skulpturen (3D-Drucke) von Oliver Labs, darunter die Sextik von Barth und die Dini-Fläche, in Zusammenarbeit mit der Firma trinckle.com

4. Die beiden prämierten Filme »Dimensions« und »Chaos« von Aurélien Alvarez, Étienne Ghys und Jos Leys aus Frankreich und Belgien auf DVD

5. Kostenlos solange der Vorrat reicht: ein IMAGINARY-Katalog und ein IMAGINARY-Posterset mit 12 A2-Postern von algebraischen Flächen

6. Bastelbögen zum Erstellen einer Herz- und Torus-Kartonskulptur durch Ineinanderstecken von Schnitten der beiden Körper

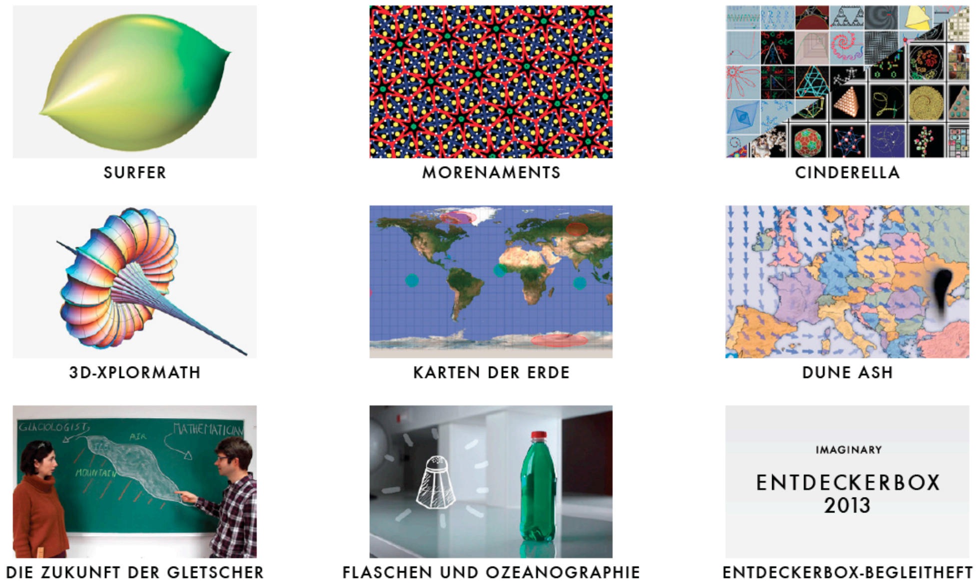



Abbildung 2: Programme der IMAGINARY-Entdeckerbox-DVD

Alle Inhalte der IMAGINARY-Entdeckerbox sind unter einer nichtkommerziellen freien Lizenz erhältlich. Das heißt: die digitalen Inhalte können kostenlos heruntergeladen werden und die Inhalte selbst ausgedruckt oder produziert werden. Die Entdeckerbox selbst kann auch für den reinen Produktionskostenpreis – der durch Partner und Sponsoren auch noch möglichst gering gehalten wird – erworben werden. Der Preis hängt von den aktuellen Kosten und Bestellmengen ab und beträgt zur Zeit 99 Euro.

Für das Projekt IMAGINARY insgesamt und speziell für die Entdeckerbox interessant und wichtig, wäre es, eine Studie über die Vermittlung von Wissen durch die jeweiligen Inhalte durchzuführen. Die Erfahrungen bisher zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler sich sehr stark involvieren und großes Interesse an einem kreativen Zugang zu Mathematik haben, z.B. beim „Erfinden“ von polynomialen Gleichungen in 3 Variablen, deren Lösungsmengen eine schöne Fläche im Raum ergeben können. Insbesondere hat sich auch herausgestellt, dass die IMAGINARY-Entdeckerbox fächerübergreifende Schulprojekte motiviert. So wurde am 10. März 2014 am Max-Planck-Gymnasium in Göttingen eine IMAGINARY-Ausstellung selbst organisiert, zusammen mit dem Fach Kunst, siehe Abbildung 2. Die Ausstellung ist noch bis Ende Juni 2014 zu sehen.

Abbildung 2: IMAGINARY-Entdeckerbox-Ausstellung im Max-Planck-Gymnasium in Göttingen

Im Moment planen wir auch ein größeres Projekt der Integration von IMAGINARY-Software auf den kostenfreien Laptops für alle Schülerinnen und Schüler in Uruguay. Im März 2014 werden die ersten 24.000 Computer mit den beiden Programmen SURFER und Morenaments ausgeliefert. Weitere 150.000 Computer sollen in den nächsten Monaten noch aufgerüstet werden.

Gerne laden wir Didaktikerinnen und Didaktiker ein, sich mit der offenen und interaktiven Mathematik-Vermittlung des Projekts IMAGINARY zu befassen und die Zusammenhänge der Inhaltsvermittlung in Ausstellungen und Museen mit der Vermittlung in Schulen näher zu erforschen.

Web-Referenzen:

www.imaginary.org
www.imaginary.org/entdeckerbox

Dagmar MELZIG, Essen

# Vom Konkreten zum Abstrakten. Der Variablenbegriff im Mathematikunterricht

In diesem Beitrag gebe ich anhand eines Fallbeispiels einen Einblick in Teilergebnisse meiner Dissertation (Melzig 2013). Hierbei nehme ich den Nutzen von konkretem Anschauungsmaterial bei der Einführung des Variablenbegriffs in den Fokus.

## Die Aufgabe „Knack die Box“

Die folgende Aufgabe nutzt konkretes Material zur Darstellung einer Gleichung mit zwei Unbekannten. Schwarze und weiße Boxen sind im gegebenen Kontext Stellvertreter für ihre gesuchten, unbekannten Befüllungen mit Bohnen – also die Symbole für die Unbekannten in der materiell repräsentierten Gleichung. Getrocknete weiße Bohnen werden als Zählobjekte verwendet. Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus dem mathbu.ch 7 (Affolter, W. u. a. 2003, S. 32 f.). Dort liegt sie in ähnlicher Form vor.

*Legt mit Bohnen und leeren Boxen die beiden folgenden Anordnungen:*

| Anordnung A | Anordnung B |
|---|---|
| ■ ■ • • • • • | □ □ □ • • • |

*Nehmt Bohnen aus dem Bohnenvorrat und füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:*

- *In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt).*
- *In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen.*

*Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen?*

*Erfindet selbst solche Paare von Anordnungen! Versucht die Boxen so zu füllen, dass die beiden Bedingungen von oben erfüllt sind. Gibt es immer (mehrere) Möglichkeiten die Boxen entsprechend zu füllen?*

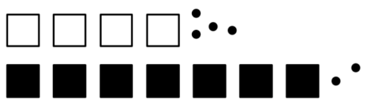
*Vielleicht helfen Euch Tabellen der folgenden Art beim übersichtlichen Aufschreiben Eurer Ergebnisse!*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box | | | | | | |
| Anz. der Bohnen in einer weißen Box | | | | | | |

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 803–806). Münster: WTM-Verlag

**Ein Fallbeispiel**

Im Folgenden sollen Transkriptausschnitte der Arbeitsphase einer Jungengruppe einer siebten Klasse eines Gymnasiums näher betrachtet werden, in der sich die Schüler mit einer selbsterdachten Boxensituation beschäftigen. Die Schüler haben ihre Boxensituation mit konkreten Boxen (Streichholzschachteln) und Bohnen auf ihrem Tisch aufgebaut, wobei sie die beiden Anordnungen in zwei Zeilen gelegt haben:



Die Schüler verwenden ein systematisches Verfahren zur Ermittlung der Lösungen, welches durch folgende Schritte gekennzeichnet ist:

- Anzahl der Bohnen in einer schwarzen Box festlegen;
- Gesamtzahl der Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen bestimmen;
- die vier einzelnen Bohnen aus der Anordnung mit den weißen Boxen von dieser Gesamtzahl abziehen;
- überprüfen, ob sich die verbliebene Anzahl Bohnen glatt auf die vier weißen Boxen aufteilen lässt und ggf. das Ergebnis der Aufteilung ermitteln.

Die Schüler nutzen hier zwar keine symbolische Darstellung, wenden aber ein sehr elaboriertes Verfahren zur Lösung des Problems an. Wenn sie eine Festlegung für die Befüllung der schwarzen Boxen treffen, arbeiten sie hypothetisch, da sie noch nicht wissen können, ob diese Befüllung tatsächlich zu einer Lösung führen wird. Anhand ihrer Wortwahl lässt sich belegen, dass ihnen dabei bewusst ist, dass ihre Festlegung zunächst hypothetisch ist und sich noch bewähren muss, auch wenn man zunächst einfach mit ihr arbeitet (vgl. Melzig 2013, S. 115 f.).

Anhand von zwei Transkriptausschnitten soll im Folgenden der Umgang der Schüler mit dem Material näher betrachtet werden. Wir beginnen mit der Äußerung von Nils, in welcher er eine erste Lösung findet. Während dieser Äußerung liegen auf jeder schwarzen Box zwei Bohnen. Zunächst wird nur der verbale Anteil der Äußerung wiedergegeben:

> Nils: „Ok, wieviel sind das, zwei, 14, 16 minus vier 12, dann muss hier drei. Zwei, drei.“

Auf der sprachlichen Ebene gibt es hier keine expliziten Verweise auf das Material – es wird nicht von Boxen und / oder Bohnen gesprochen. Lediglich indirekte Verweise durch ein Demonstrativ-Pronomen („das“) und ein ortsbestimmendes Adverb („hier“) sind zu finden. Dass diese tatsächlich auf das Material verweisen, lässt sich auch nur aus unserem Vorwissen schließen – aus der Äußerung allein kann man nicht auf die Existenz von irgendwelchem Material schließen. Um das Gesagte für Mit-Lernende und Beobachterin also überhaupt erst interpretierbar zu machen, müssen die auf das Material bezogenen Gesten und Handlungen mitbetrachtet werden. Also noch einmal die diesbezüglich vervollständigte Äußerung:

Nils: „Ok, wieviel sind das *(macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung)*, zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)*, 14 *(zeigt entlang der schwarzen Boxen; legt eine Bohne, die offenbar auf die Nachbarbox gekullert ist, wieder zurück, so dass auf allen schwarzen Boxen je zwei Bohnen liegen)*, 16 *(zeigt auf die Anordnung mit den schwarzen Boxen)* minus vier *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen)* 12, dann muss hier drei *(zeigt auf eine weiße Box)*. Zwei, drei.“

Es lässt sich feststellen, dass das Material stark in die Äußerung miteinbezogen wird. Die Situation mit zwei Bohnen auf jeder schwarzen Box wurde im Vorfeld handelnd hergestellt und wird nun durch Alltagssprache und Zeigegesten miteinbezogen. So lässt sich nun die verbale Äußerung nachvollziehen, lassen sich die Bezüge der indirekten sprachlichen Hinweise erkennen.

In der anschließenden Szene möchte Nils ausprobieren, ob drei Bohnen pro schwarzer Box eine Lösung liefern, und beginnt je eine dritte Bohne auf jede schwarze Box zu legen. Er bricht seine Aktion jedoch ab (bei # im folgenden Beitrag von Nathan), nachdem er auf vier schwarze Boxen Bohnen gelegt hat, da Nathan in der Zwischenzeit begonnen hat, gedachte Bohnen zu zählen:

Nathan: „Mit dre. Ok, dre, drei, sechs, neun, zwölf, 15 #, 18, 21 *(zeigt nacheinander auf die schwarzen Boxen)* minus zwei *(zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen)* sind“[1]

Auch hier lassen sich Zeigegesten beobachten. Allerdings haben diese einen anderen Charakter als jene im ersten Beitrag. Dort zeigte Nils auf die Bohnen und bezog sich auch auf die Bohnen. Hier jedoch zeigt Nathan auf die Boxen, ermittelt aber die Gesamtzahl der Bohnen. Seine Geste ist also in einem übertragenen bzw. abstrakten Sinne zu verstehen. Daher spreche

[1] Nathan macht am Ende einen Fehler, der für die hier vorgenommene Erörterung aber nicht relevant ist.

ich in diesem Zusammenhang von *am Material verankerten abstrakten Zeigegesten* (abgeleitet von *abstrakte*n *Zeigegesten* nach McNeill (2005, S. 40) und unter Einbeziehung der Idee des *material anchor* (Hutchins 2005); vgl. Melzig 2013, S. 120 f.).

Sowohl im ersten Beitrag als auch hier wird deutlich, dass die Möglichkeit zu gestikulieren, den Schülern die Kommunikation im Lösungsprozess wesentlich erleichtert, da sie keine sprachlichen Ausdrucksmittel finden müssen. Diese Verringerung des kognitiven und sprachlichen Aufwands durch Gestik wird in der Gestik-Forschung betont. Gesten werden aus diesem Grund von Goldin-Meadow (2005, S. 57) als Eingangstor zu neuen Lerngebieten bezeichnet.

Die Schüler nutzen das konkrete Material zum einen also in großem Umfang als Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe, ihnen wird zum anderen aber auch schnell klar, dass es letztlich nicht um die konkreten Boxen und Bohnen geht, sondern um die durch sie dargestellte Struktur. Sie betrachten die Boxensituation metaphorisch (i. S. der Metapher als Denkfigur nach Lakoff & Núñez (2000, S. 39)), lösen sich vom Auslegen der Bohnen und arbeiten mit gedachten Bohnen bzw. auf der Zahlenebene weiter. Vor diesem Hintergrund werden die Boxen zu Metaphern für eine sich entwickelnde Vorstellung von Variablen als gesuchte Unbekannte und Platzhalter (vgl. Melzig 2013, S. 119). Die Gestik ermöglicht die metaphorische Verwendung der Boxen und verankert den sich entwickelnden Variablenbegriff am Material, wodurch wiederum die Box als Metapher gestärkt wird. Auf diese Weise kann die Verwendung der Boxen zu einer Fundierung des Variablenbegriffs beitragen.

## Literatur


Affolter, W. u. a. (2003). mathbu.ch 7. Schulverlag blmv AG und Klett und Balmer AG, Bern/Zug.

Goldin-Meadow, S. (2005). Hearing Gesture. How our hands help us think. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambrigde, Massachusetts, und London, England.

Hutchins, E. (2005). Material anchors for conceptual blends. Journal of Pragmatics, 37, 1555–1577.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). Where Mathematics Comes From. How the embodied mind brings mathematics into being. Basic Books, New York.

McNeill, D. (2005). Gesture and Thought. The University of Chicago Press, Chicago und London.

Melzig, D. (2013). Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff. Dissertation Universität Duisburg-Essen. Verfügbar über: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=32831

Nadine MERTZ, Erfurt

# Ist eine E-Learning-Plattform geeignet als mathematischer Brückenkurs für Lehramtsstudierende?

Der Übergang von der Schule zur Hochschule beinhaltet einige Probleme gerade in der Mathematik und den mathematikhaltigen Ingenieurwissenschaften. Mehr als die Hälfte der Studienanfänger bricht laut dem Bildungsbericht 2012 das Bachelorstudium in diesen Studienrichtungen ab. Ein Hauptgrund liegt hierbei im Bereich Mathematik in einer Überforderung in Hinblick auf die Studienanforderungen und falschen Erwartungen an ein Studium, die von der Schulmathematik geprägt sind (Heublein, Hutzsch, Schreiber, Sommer & Besuch, 2010).

An den meisten Hochschulen werden zur Erleichterung des Übergangs von der Schule zur Hochschule Brücken- oder Einführungskurse angeboten (Biehler, Bruder, Hochmuth & Koepf, 2014). Im Nachfolgenden soll ein Projekt vorgestellt werden, dessen Ziel die Implementation und Evaluation eines online basierten E-Learning-Angebots als Einführungskurs für Lehramtsstudienanfänger mit dem Fach Mathematik zu Beginn ihres Studiums ist. Mit einem adaptiven E-Learning-Angebot wird die Erwartung verbunden, dass der Heterogenität der Studierenden besser entsprochen werden kann, um die Studieneingangsvoraussetzungen zu verbessern.

## Der Übergang von der Schule zur Hochschule

In Deutschland liegt gerade im MINT-Bereich eine Herausforderung in der Sicherung der Qualitätsstandards und des Fachkräftebedarfs (BMBF, 2012). Wenn man sich jedoch die Fertigkeiten der Studienanfänger eines Mathematikstudiums betrachtet, so häufen sich die Klagen der Dozenten über unzureichende Einstiegsvoraussetzungen (u.a. Bruder, Elschenbroich, Henn, Kramer & Pinkernell, 2010). Diese ungenügenden Zugangsvoraussetzungen erschweren den Einstieg in die Anfängervorlesungen. Knospe (2012) konnte in einer langfristigen Trenderhebung sogar die rückläufigen mathematikbezogenen Studieneingangsvoraussetzungen zeigen. Die unzureichend gefestigten Inhalte der Schulmathematik umfassen hierbei Inhalte der beiden Sekundarstufen. Themengebiete wie beispielsweise die Bruchrechnung der Sekundarstufe I wurden nicht ausreichend gefestigt (Bruder et al., 2012). Als ein beeinflussender Faktor wird die Abschaffung der Einteilung in Leistungs- und Grundkurse gesehen, da dadurch mathematikaffine Schüler nicht mehr in entsprechender Weise gefördert werden und sich das scheinbar „erhöhte Niveau“ dem Durchschnittskönnen aller Schüler annähert (Bruder et al., 2010). Unabhängig von den mathematischen Ausgangs-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 807–810). Münster: WTM-Verlag

voraussetzungen erfordert ein Studium an der Hochschule ein selbstregulierteres Lernen, wobei die Lernprozesse selbstständig organisiert und strukturiert werden müssen, was ebenfalls zu Problemen bei den Studierenden führen kann (Biehler, Fischer, Hochmuth & Wassong, 2011).

Eine weitere Beobachtung ist, dass die Studienanfänger im Bereich Mathematik sehr heterogene Studieneingangsvoraussetzungen haben (u. a. Biehler et al., 2011). Ungefähr ein Drittel der Hochschulzugangsberechtigten entstammt nicht mehr einem allgemeinbildenden Gymnasium (Autorengruppe Bildungsberichterstattung, 2012). Des Weiteren nimmt der Anteil der Studienanfänger zu, die ohne schulische Studienberechtigung über den dritten Bildungsweg ein Hochschulstudium aufnehmen (Autorengruppe Bildungsberichterstattung, 2012). Man findet ebenfalls große Unterschiede in den mathematikbezogenen Studienvoraussetzungen der Abiturienten zwischen unterschiedlichen Bundesländern und Richtungen der gymnasialen Oberstufe (Trautwein, Köller, Lehmann & Lüdtke, 2007).

Wie kann man nun als Hochschule diesen Problemen einer immer heterogener werdenden Studierendenschaft bei teilweise eingeschränkten finanziellen, zeitlichen und personellen Ressourcen begegnen?

## Adaptive E-Learning-Angebote als mögliche Problemlösung

Zur Überwindung der Übergangsschwierigkeiten werden an vielen Hochschulen Einführungs- beziehungsweise Brückenkurse angeboten, wobei Blended-Learning-Formate vorherrschen, was eine Kombination aus Präsenz- und Selbststudienphasen unter der Nutzung von online bereitgestellten Materialien meint (Biehler et al., 2014). Gerade mit E-Learning-Angeboten wird die Hoffnung der besseren Unterstützung des zeit- und ortsunabhängigen Selbstlernens trotz begrenzter personeller und zeitlicher Ressourcen verbunden. Benutzer multimedialer Lernangebote weisen aber genauso wie die Studienanfänger eines mathematikhaltigen Studiengangs eine hohe Heterogenität auf (Leutner, 2002). Sogenannte „Experten" und „Novizen" unterscheiden sich hinsichtlich des Unterstützungsbedarfs beim Start eines Lernangebots, auch muss beachtet werden, dass sich ein Lerner im Lauf der Zeit vom Anfänger zum Fortgeschrittenen entwickeln wird, was einen sinkenden Unterstützungsbedarf impliziert. Aus diesem Grund sollte bei der Gestaltung von E-Learning-Angeboten neben der Benutzerfreundlichkeit, auch die Lernerfreundlichkeit durch angemessene Anpassungen des Systems an veränderte Bedingungen (Adaptivität) im Vordergrund stehen (Leutner, 2002). Aber nur wenige mathematische E-Learning-Angebote unterstützen einen adaptiven Ansatz und reagieren auf den aktuellen Lernstand der Nutzer (Neuhold, 2013). Mit adaptiven E-Learning-

Umgebungen werden positive Erwartungen wie die Verhinderung einer kognitiven Überbelastung beim Lerner, eine Reduzierung der Lernzeit, die Verbesserungen der Behaltensleistungen und eine Erhöhung der Lernerzufriedenheit verknüpft (Rey, 2009). Jedoch kann das Verhalten adaptiver Systeme für den Lernenden auch als nicht nachvollziehbar erscheinen und den subjektiv wahrgenommenen Kontrollverlust begünstigen. Eventuelle Fehleinschätzungen des Systems über den Lernenden können ebenfalls zu Frustration führen (Rey, 2009). Die empirisch-experimentelle Befundlage zu adaptiven E-Learning-Systemen ist als eher uneinheitlich zu bewerten.

**Das Forschungsprojekt**

In dem konkreten Forschungsprojekt soll ein Kurs eines bereits extern erprobten E-Learning-Angebots in einer adaptiven Variante hinsichtlich der Aufgabenschwierigkeit mit einer nicht-adaptiven Variante bezüglich dieser Systemeigenschaft bei gleichen Inhalten verglichen werden. Inhaltlich wird eine Wiederholung ausgewählter Themengebiete der beiden Sekundarstufen fokussiert. Das online basierte Lernangebot soll als Einführungskurs für die Studierenden des ersten Semesters dienen, um ihnen den Einstieg in das Mathematikstudium zu erleichtern und relevante Inhalte der Schulmathematik zu wiederholen.

Im Wintersemester 2013/14 erfolgte eine Bedarfs- und Adressatenanalyse mit den Lehramtsstudierenden mit der Nebenstudienrichtung Mathematik an der Universität Erfurt. Hierzu wurden relevante Personenmerkmale (Niegemann, 2008) für die didaktische Gestaltung und Implementation der online basierten Lernumgebung erfasst. Die Bedarfs- und Adressatenanalyse soll zur Priorisierung innerhalb der Gestaltung des Lernangebots dienen und Daten zur Beurteilung der Wirksamkeit der Maßnahme liefern.

Des Weiteren wird ein Experteninterview mit den Dozenten der Erstsemesterstudierenden durchgeführt. Es soll ebenfalls dazu dienen, durch die Expertise der Lehrenden das Lernangebot besser auf die Zielgruppe anzupassen und dadurch den Lernerfolg der Studierenden zu erhöhen.

Im Wintersemester 2014/15 werden innerhalb eines Pretest-Posttest-Designs vor und nach der Bearbeitung der Inhalte des E-Learning-Angebots die gleichen Personenmerkmale in den beiden Gruppen erhoben, um eventuelle Unterschiede untereinander festzustellen. Ein weiterer Schwerpunkt der Studie ist die Beantwortung der Frage, ob es Unterschiede in der Zufriedenheit mit dem E-Learning-Angebot zwischen der Experimental- und der Kontrollgruppe gibt. Mit der Forschungsarbeit soll ein Beitrag zur Beantwortung der Frage geleistet werden, inwieweit sich der zusätzliche Adaptationsaufwand lohnt, um der Heterogenität der Lerner gerecht zu werden.

## Literatur


Autorengruppe Bildungsberichterstattung (2012). *Bildung in Deutschland 2012. Ein indikatorengestützter Bericht mit einer Analyse zur kulturellen Bildung im Lebenslauf*. Bielefeld: Bertelsmann Verlag.

BMBF (2012). *Perspektive MINT. Wegweiser für MINT-Förderung und Karrieren in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik*. Bielefeld: Bertelsmann Verlag.

Biehler, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Wassong, T. (2011). Self-regulated learning and self assessment in online bridging courses. In A.A. Juan, M.A. Huertas, S. Trendholm & C. Steefmann (Hrsg.), *Teaching Mathematics Online. Emergent Technologies and Methodologies* (S. 216-237). Hershey, PA : Information Science Reference.

Biehler, R., Bruder, R., Hochmuth, R. & Koepf, W. (2014). Einleitung. In I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. R, Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf, S. Schreiber, T. Wassong (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 1-6). Wiesbaden: Springer.

Bruder, R., Elschenbroich, J., Greefrath, G., Henn, H.-W., Kramer, J., Pinkernell, G. (2010). Schnittstelle Schule – Universität. In. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 75-82). Münster: WTM-Verlag.

Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D., & Besuch, G. (2010). *Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen. Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08*, (HIS: Forum Hochschule 2/2010). Hannover: HIS.

Knospe, H. (2012). *Zehn Jahre Eingangstest Mathematik an Fachhochschulen in Nordrhein-Westfalen*, 10. Workshop Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge. Hochschule Ruhr-West, Mülheim an der Ruhr.

Leutner, D. (2002). Adaptivität und Adaptierbarkeit multimedialer Lehr- und Informationssysteme. In L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia und Internet* (3.Aufl.) (S. 115-126). Weinheim: Beltz

Neuhold, B. (2013). *Learning-Analytics. Mathematik Lernen neu gedacht.* Norderstedt: BoD.

Niegemann, H. M., Domagk, S., Hessel, S., Hein, A., Hupfer, M., Zobel, A. (2008): *Kompendium multimediales Lernen*. Berlin: Springer.

Rey, G. D. (2009). *E-Learning. Theorien, Gestaltungsempfehlungen und Forschung.* Bern: Verlag Hans Huber.

Trautwein, U., Köller, O., Lehmann, R., Lüdtke, O. (2007). *Schulleistungen von Abiturienten. Regionale, schulformbezogene und soziale Disparitäten.* Münster: Waxmann.

Michael MEYER, Köln

# Zum Gebrauch der Erstsprache für das Lernen von Mathematik

In vielen Studien konnte nachgewiesen werden, dass der Einsatz der Erstsprache dem Mathematiklernen zuträglich sein kann (s. Überblick in Barwell 2009). Beispielsweise konnten Setati & Duma (2009) in Südafrika und Moschkovich (2007) in Kalifornien zeigen, dass die Lernenden durch den Einsatz der Erstsprache erhöhte Partizipationschancen haben. In anderen Studien (z.B. Clarkson 2007, Kern 1994) wird der (meta-)kognitive Wert des Gebrauches bzw. der Berücksichtigung der Erstsprache hervorgehoben.

Die Übertragbarkeit der internationalen Ergebnisse kann nur unter Berücksichtigung der spezifischen Situation in Deutschland gelingen, die unter anderem durch die Existenz diverser Erstsprachen pro Klasse geprägt ist, die nur in den seltensten Fällen von allen geteilt werden. Dass ca. ein Fünftel der Lernenden einen Migrationshintergrund haben (Closta & Ostermann 2008) und schwächere Testergebnisse (z.B. PISA) aufweisen, zeigt die Bedeutung dieses Forschungsfeldes.

Im Folgenden werden drei aufeinander aufbauende Studien und die daraus generierten ersten qualitativen und quantitativen Ergebnisse präsentiert. Die Forschungsfragen aller Studien sind gleich: (Wie) Kann man vor dem Hintergrund der Bedingungen des deutschen Bildungssystems (nicht-geteilte Erstsprachen zwischen den Lernenden sowie zwischen diesen und Lehrpersonen, Existenz diverser Erstsprachen pro Klasse, ...) die originäre Ressource der Lernenden mit Migrationshintergrund, ihre nicht-deutsche Erstsprache, produktiv für das Lernen von Mathematik verwenden?

## 1. Von der Alltagssprache zur Fachsprache – methodische und methodologische Überlegungen

Ist von Erstsprache die Rede, so sei hiermit die von den Lernenden in ihrem Alltag bevorzugt gesprochene Sprache bezeichnet. Die mathematikdidaktische Literatur bietet viele Anlässe zu der Vermutung, dass die Alltagssprache der Lernenden eine nutzbare Ressource für das Mathematiklernen ist. Beispielsweise betont Bauersfeld (1983) unter Verwendung des Begriffs „subjektive Erfahrungsbereiche“ (SEB), dass mathematisches Wissen – insbesondere in einem frühen Stadium – stets an einen Kontext gebunden ist. Wenn die Lernenden diesen Kontext jedoch in ihrer Alltagssprache erfahren und somit auch in dieser präsent haben, so ist es sinnvoll, zur Aktivierung der SEB auch diese Sprache zu verwenden. Im gleichen Sinne lassen sich auch die Ergebnisse von Carraher et al. (1985) verstehen, die von

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 811–814). Münster: WTM-Verlag

deutlich höheren Lösungsquoten berichten, wenn den Probanden Aufgaben in einem vertrauten (Straßen-)Kontext gegeben wurden, statt den aus mathematischer Sicht äquivalenten in rein symbolischer Präsentation.

Um die Nutzbarkeit der Alltagssprache und somit der Erstsprache (L1) der Lernenden mit Migrationshintergrund im einem Unterricht, der üblicherweise in deren Zweitsprache (L2) abläuft, zu überprüfen, wurden in den Studien verschiedene Optionen der Sprachproduktion und -rezeption an „sprachlastigen" Aufgaben eingesetzt. Fokussiert wurde bei der Studie auf Lernende mit türkischem Hintergrund, zumal diese die größte Migrantengruppe in Deutschland darstellen.

In drei Studien (eine Vor- und zwei Hauptstudien) hatten die Lernenden die Möglichkeit, die Aufgabenstellung in Türkisch und in Deutsch zu bearbeiten. Dies wurde entweder durch gleichzeitige Darbietung beider Texte realisiert oder indem ein Text nach der vollständigen Bearbeitung des ersten unter dem Vorwand des „Nicht-Verstehen-Könnens" hereingegeben wurde.

Hinsichtlich der Sprachproduktion hatten die Lernenden jederzeit die Möglichkeit, ihre Arbeitssprache frei zu wählen. Nachdem sich in der Vorstudie herausgestellt hatte, dass die Lernenden dies nur selten realisieren, wurden die späteren Interviews mit einer Übersetzungsphase eingeleitet: Unter dem Vorwand, dass die Interviewer Urlaub in der Türkei machen würden, ließen sie sich das Zählen sowie kurze Sätze auf Türkisch beibringen. Vermutlich durch diese Wertschätzung der Erstsprache konnte ein wesentlich höherer Anteil von auf Türkisch realisierter Kommunikation während der mathematischen Arbeitsphasen beobachtet werden. Weiterhin wurden nach Bearbeitung der Aufgaben die Präsentation der Lösung auf Türkisch gefordert bzw. (nur in der Vorstudie) ein Dolmetscher für die Kommunikation zwischen Interviewer und Lernenden bereitgestellt.

Die Vorstudien bestanden aus 21 Interviews (42 Lernende der Klasse 6). In der ersten Hauptstudie wurden 31 (62 Lernende vorrangig der Klasse 6), in der zweiten 73 Interviews (146 Lernende der Klassen 3-6) durchgeführt.

## 2. Erste Ergebnisse qualitativer Art

Die qualitative Analyse beider Hauptstudien ergab u.a. folgende Merkmale der Erstsprachverwendung, die hier nur in Stichworten präsentiert werden (für eine ausführlichere Darstellung s. Krägeloh & Meyer 2012). Es zeigte sich, dass die Verwendung der Erstsprache einherging mit ...

- der Erarbeitung auch schwieriger mathematischer Inhalte,
- einer geringeren Verwendung von Fachwörtern (wenige Ausnahmen bzw. Eins-zu-Eins-Übersetzungen wie „dörteck"- dt.: Viereck),

- der Forderung und Erlangung auch anderer Erklärungen für geometrische Objekte und mathematische Zusammenhänge,
- der Erhöhung von Partizipationschancen,
- umfangreichen Gesprächen über die Arbeitsorganisation und
- einem Sprechen auch ohne die Interviewer.

## 3. Erste Ergebnisse quantitativer Art

Zur quantitativen Analyse wurden lediglich die Interviews der zweiten Hauptstudie herangezogen, insofern hier die gleichen Aufgaben und das gleiche Setting verwendet wurden. Insgesamt wurden 94 Items erhoben, die sich zusammensetzen aus den Items der Sprachlernbiographie (Grießhaber 2003), ausgewählten Items aus HAVAS 5 (Reich & Roth 2004) und vereinzelten Items diverser Sprachanalysen (Entlehnungen von Wörtern aus der einen Sprache in die andere, Produktivität der Erstsprachnutzung, ...).

Bisher wurde eine Reliabilitätsprüfung an ca. 20% der Daten durchgeführt und Kreuztabellen erstellt. Die Kreuztabellen wurden in Relation von den Items (interaktive) Produktivität der Erstsprachnutzung und den übrigen Items erstellt. „Produktivität" wurde dabei zunächst aus normativer Sicht definiert: Mathematisch tragfähige Aussagen werden zum ersten Mal geäußert. Wurden diese Aussagen auch vom Interaktionspartner aufgegriffen, so wurde eine interaktive Produktivität konstatiert. Auf der Basis beobachteter Phänomene in den Kreuztabellen wurden Mittelwerte gebildet, die zeigen, dass ein produktiver Gebrauch der Erstsprache im Vergleich zu einem nicht-produktiven einhergeht mit ...

- einer eher geringeren Anzahl an verwendeten Fachwörtern in L1,
- einer höheren Anzahl sprachlicher Joker (in L1 und L2),
- einer höheren Anzahl von Entlehnungen von Wörtern (von L2 in L1),
- einer höheren Anzahl längerer Entlehnungen (von L2 in L1),
- einer höheren Anzahl von Turns in L1 und
- einer eher verständlichen und kontinuierlichen Erstsprache (L1).

## 3. Diskussion

In allen Studien zeigte sich, dass die türkische Sprachrezeption kaum erfolgversprechend ist. Bei freier Wahl entschieden sich bis auf wenige Ausnahmen alle für die deutschsprachige Aufgabenstellung. Ob dies eingetreten wäre, wenn die Erstsprachrezeption von Beginn der schulischen Sozialisation an verwendet worden wäre, lässt sich natürlich nicht beantworten.

Die qualitativen Ergebnisse verdeutlichen, dass die Erstsprache der Lernenden bei der Erarbeitung mathematischer Begriffe und Zusammenhänge hinsichtlich verschiedener Funktionen genutzt werden kann. Diese sind nicht nur inhaltlich bedingt, sondern auch sozial geprägt.

Während hinsichtlich der quantitativen Ergebnisse die höhere Anzahl an erstsprachlichen Turns bei produktiver Erstsprachnutzung die durchschnittlich höhere Anzahl an sprachlichen Jokern (z.B. „sey" – dt.: Dings) bzw. an Entlehnungen aus der Zweitsprache Deutsch zu erklären vermag, ist die durchschnittlich geringere Anzahl an verwendeten erstsprachlichen Fachwörtern ungewöhnlich. Die Ergebnisse lassen die These zu, dass die Lernenden sehr wohl in der Lage waren, in ihrer Erstsprache zu kommunizieren, jedoch die Eloquenz des Erstsprachgebrauches der Produktivität der mathematisch-inhaltlichen Kommunikation unterordneten. Anders formuliert: Die Flexibilität der Sprachnutzung scheint ein Merkmal produktiven Sprachgebrauches zu sein.

Auch wenn detailliertere Analysen und weitere Studien noch folgen, lässt sich auf der Basis der Ergebnisse konstatieren, dass die Erstsprache – unter Vermeidung von Segregationserscheinungen – eine sinnvolle und nutzbare Ressource für einen Unterricht bietet, in dem die Sprache vorrangig der Mathematik dienen sollte.

## Literatur


Barwell, R. (Hrsg., 2009). *Multilingualism in Mathematics Classrooms - Global Perspectives*. Bristol: Multilingual Matters.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In Ebd. (Hrsg.), *Analysen zum Unterrichtshandeln* (S. 1-56). Köln: Aulis.

Chlosta, C. & Ostermann, T. (2008). Grunddaten zur Mehrsprachigkeit im deutschen Bildungssystem. In B. Ahrenholz (Hrsg.), *Deutsch als Zweitsprache* (S. 17-30). Baltmannsweiler: Schneider.

Clarkson, P. C. (2007). Australian Vietnamese students learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 191-215.

Grießhaber, W. (2003). *(Sprach-)Lernbiographie*. Online: http://spzwww.uni-muenster.de/~griesha/sla/mix/lernbiografie.schubs.pdf (letzter Abruf: 5.12.2013).

Kern, R. G. (1994). The role of mental translation in second language reading. *Studies in second language acquisition*, 16, 441-461.

Krägeloh, N. & Meyer, M. (2012). 'Erkläre es mal auf Türkisch'. Anknüpfen an die Ressource Erstsprache im MU. *Praxis der Mathematik*, 45 (54), 25-28.

Moschkovich, J. (2007). Using two languages when learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 121-144.

Reich H. H. & Roth, H. J. (2004). *Hamburger Verfahren zur Analyse des Sprachstands Fünfjähriger - HAVAS 5*. Hamburg: LI.

Alexander MEYER, Dortmund

# Aktivitäten des regelgeleiteten Umformens in Algebra – was macht sie aus?

Schülerinnen und Schüler müssen aus verschiedenen Gründen das regelgeleitete Umformen von algebraischen Ausdrücken erlernen. So ist das regelgeleitete Operieren z.B. ein Element von Algebra und bietet Schülerinnen und Schülern Zugang zu innermathematischen Argumentationen.

Das regelgeleitete Umformen von algebraischen Ausdrücken ist jedoch kein mechanisches Manipulieren. So stellt etwa Kieran heraus, dass es stattdessen eine Ressource für das Herstellen von Bedeutungen in Algebra ist (Kieran 2004). Hefendehl-Hebeker zeigt auf, dass in Algebra Probleme mithilfe interpretationsfreier regelgeleiteter Umformungen bearbeitet werden können, d.h. durch das Resultat einer Umformung können Schlussfolgerungen über ein gegebenes Problem gezogen werden (Hefendehl-Hebeker 2001). Wenn ein Problem entsprechende Strukturen bereitstellt, kann das regelgeleite Umformen auch durch diese Strukturen angeleitet werden (Meyer & Fischer 2013). Die beiden letztgenannten Studien stellen einen Bezug zwischen regelgeleitetem Operieren und strukturgebenden Elementen her. Was aber leitet die regelgeleiteten Umformungen von Schülerinnen und Schülern an, wenn keine strukturgebenden Elemente vorgegeben sind? Dieser Frage soll hier nachgegangen werden. Es wird herausgearbeitet, was kognitive Aktivitäten des regelgeleiteten Umformens kennzeichnet, die unter alleinigen Bezug auf die Strukturen von Termen und von Umformungsregeln erfolgen.

## 1. Was macht das Umformen algebraischer Ausdrücke aus?

Das regelgeleitete Umformen algebraischer Ausdrücke wird zum einen durch Symbolsinn und zum anderen durch Struktursinn angeleitet. Schülerinnen und Schüler mit Symbolsinn können sich die möglichen Symbol- und Termbedeutungen erschließen, die ein algebraischer Ausdruck annehmen kann. Dies kann dann das Umformen anleiten (Arcavi 1994). Weiter gefasst beinhaltet Symbolsinn auch das situationsadäquate Vorhersehen der Beschaffenheit eines algebraischen Ausdrucks beim regelgeleiteten Umformen. Erst dies ermöglicht zielgerichtete Umformungen (Boero 2002).

Struktursinn wird hier aufbauend auf Hoch & Dreyfus (2005) und Rüede (2005) als ein spiralförmiger Prozess konzipiert, in dem Schülerinnen und Schüler abwechselnd die *Elemente eines Terms* und die *Termstruktur* individuell rekonstruieren (vgl. Abb. 1).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 815–818). Münster: WTM-Verlag

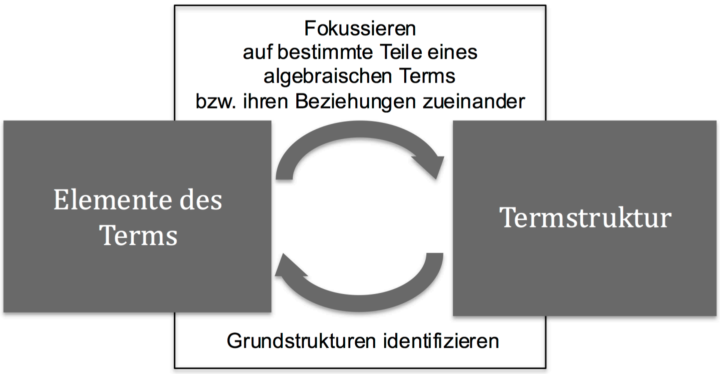



**Abbildung 1: Kognitive Aktivitäten bei der individuellen Rekonstruktion der Struktur von Ausdrücken**

Die Aktivität des Rekonstruierens der *Elemente eines Terms* wird durch die Identifikation von Grundstrukturen angeleitet. Eine Grundstruktur ist eine fachlich tragfähige ‚kleinste' Struktur, auf die Strukturen in algebraischen Ausdrücken zurückführbar sind, z.B. $a\ (b + c)\ [= ab + ac]$. Wie in diesem Term kann eine Grundstruktur zugleich mit einer Umformungsregel verknüpft sein, hier signalisiert durch die eckigen Klammern. Wenn eine Schülerin oder ein Schüler eine Grundstruktur unpassend mit einer Umformung verbunden hat, kann dies dazu führen, dass auch die *Elemente eines Terms* unpassend rekonstruiert werden.

Die Aktivität des Rekonstruierens der *Termstruktur* wird hingegen durch das Fokussieren auf bestimmte Teile eines algebraischen Ausdrucks bzw. ihren Beziehungen untereinander angeleitet. Wenn beispielsweise die Regel $ab + ac = a\ (b + c)$ auf den Ausdruck $ab + ac + ad$ übertragen werden soll, so kann man darauf fokussieren, dass der Teilterm den gleichen Status wie die übrigen beiden Teilterme hat. Auf diese Weise kann die *Termstruktur* als eine Beziehung von drei Teiltermen rekonstruiert werden.

Der Struktursinn besteht somit aus zwei Aktivitäten:

1. Das Identifizieren von Grundstrukturen, um eine Vorstellung von den *Elementen des Terms* und ihren Beziehungen zu gewinnen.
2. Das Fokussieren auf bestimmte Elemente eines Terms, um eine Vorstellung von der *Termstruktur* zu gewinnen.

Während die *Termstruktur* bzw. die *Elemente des Terms* als individuell rekonstruierte Vorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern vorliegen, stellen diese beiden Aktivitäten die Schnittstellen zum Fachlichen dar, an denen eine Anbahnung von Struktursinn ansetzen kann. Das hier entworfene Modell des Struktursinns erlaubt es, im Folgenden die kognitiven Aktivitäten des regelgeleiteten Umformens im Hinblick auf Struktursinn zu analysieren. Der Symbolsinn steht hier nicht im Fokus der Analysen.

## 2. Designexperiment zu Aktivitäten des Rekonstruierens der Struktur von algebraischen Ausdrücken

Die oben aufgeworfene Frage wurde im Rahmen einer Entwicklungsforschung durch zwei aufeinander aufbauende Designexperimente adressiert. In einem Laborsetting nahmen im ersten Experiment drei, im zweiten Experiment vier Schülerinnen und Schüler teil. Diese Schülerinnen und Schüler waren zum Zeitpunkt des Experiments in der achten Klasse einer Gesamtschule. Sie wurden vom Lehrenden aufgrund ihres regelmäßigen Engagements ausgewählt. In Absprache mit dem Lehrenden wurden die Designexperimente genau nach Behandlung der Gleichheit von algebraischen Ausdrücken im Kontext geometrischer Darstellungen vorgenommen. So konnten die Schülerinnen und Schüler beim regelgeleiteten Umformen auf geometrische Darstellungen zurückgreifen, um einem Ausdruck Bedeutung zu geben. Die Experimente wurden videografiert und das entstandene Material transkribiert. Die Daten wurden durch eine sequentielle Interpretation qualitativ analysiert.

Im Designexperiment werden zunächst Umformungsregeln eingeführt: „Vertauschen", „Klammern auflösen oder einbauen" und „gleiche Terme zählen". Diese Regeln werden durch algebraische Symbole dargestellt. Die Aufgaben beinhalten algebraische Ausdrücke, die den eingeführten, symbolsprachlich formulierten Umformungsregeln ähnelten. Die erste eigenaktive Auseinandersetzung mit regelgeleiteten Umformungen in der zweiten Aufgabe des Designexperiments wird gestützt durch bestimmte Aufgabenelemente wie z.B. eine Tabelle. In dieser Aufgabe sollen Schülerinnen und Schüler mit den Grundstrukturen hinter den Umformungen vertraut werden. Die dritte Aufgabe erfordert das operative Durcharbeiten von strukturähnlichen, aber schwieriger werdenden algebraischen Ausdrücken. Diese Aufgabe soll die Aktivität des  Fokussierens anleiten.

## 3. Empirische Einsichten in die individuellen kognitiven Aktivitäten des Übertragens einer Umformungsregel

Im folgenden Transskriptauszug sind Daniela, Bianca und Andreas aus dem ersten Designexperiment zu sehen. Sie haben gerade den Ausdruck $ab + ac$ zu $a\ (b + c)$ umgeformt. Nun arbeiten sie am Ausdruck $ab + ac + ad$. Andreas schlägt eine korrekte Umformung vor und begründet sie.

| | | |
|---|---|---|
| 351 | Andreas: | a mal Klammer auf b plus c plus d. [...] |
| 355 | Andreas | Das ist das Gleiche wie a mal Klammer auf b plus c nur eine Zahl mehr halt. Das geht auch. |

Mithilfe des Modells wird sichtbar, wie Andreas eine regelgeleitete Umformung vornimmt und wie dabei sein Struktursinn aktiv wird. In Zeile 355 identifiziert Andreas eine Grundstruktur, indem er einen Bezug zu einer vorherigen Umformung herstellt („Das Gleiche wie...“). Dies führt dazu, dass er die Teilterme *ab*, *ac* und *ad* als drei zueinander gleichartige *Elemente des Terms* identifizieren kann („... nur eine Zahl mehr halt“). Er fokussiert darauf, dass diese drei Elemente den gleichen Status haben, was ihm erlaubt, die *Termstruktur a (b + c + d)* zu rekonstruieren. Hier zeigt sich also die folgende kognitive Aktivität: ‚Umformen durch Analogieherstellung, angeleitet durch das Betrachten des Status der Teile des Ausdrucks und unter Berücksichtigung einer identifizierten Grundstruktur'.

## 4. Diskussion und Ausblick

Die Analysen der Designexperimente zeigen auf, dass beim regelgeleiteten Umformen von algebraischen Ausdrücken verschiedenartige kognitive Aktivitäten ablaufen. Dabei sind die in der Analyse gefundenen kognitiven Aktivitäten im Vergleich zu den recht einfach strukturierten algebraischen Ausdrücken in den beiden Aufgaben erstaunlich verschiedenartig. Das Modell des *Fokussierens* und *Grundstruktur-Identifizierens* hat sich für die Herausarbeitung derjenigen kognitiven Aktivitäten des regelgeleiteten Umformens bewährt, die primär auf Struktursinn fußen. Es stellt sich in folgenden Untersuchungen die Frage, wie die Schnittstellen zum Fachlichen durch geeignete Unterstützungsmaßnahmen besser adressiert werden können. Auch ist offen, wie Schülerinnen und Schüler im Aktivieren ihres Symbolsinns unterstützt werden können.

## Literatur


Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Boero, P. (2002). Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Hrsg.), *Perspectives on School Algebra* (Vol. 22, S. 99-119): Springer Netherlands.

Hefendehl-Hebeker, L. (2001). Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt* (S. 83-98). Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' Difficulties with Applying a Familiar Formula in an Unfamiliar Context. In H. L. Chick (Hrsg.), *Proc. of the 29$^{th}$ Conf. of the IG-PME.* (Vol. 3, S. 145-153). Melbourne: University of Melbourne.

Meyer, A. & Fischer, A. (2013). Wie algebraische Symbolsprache die Möglichkeiten für algebraisches Denken erweitert – eine Theorie symbolsprachlichen algebraischen Denkens, JMD, 34(2), 177-208.

Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *JMD, 33*, 113-141.

Regina D. MÖLLER, Erfurt

# Gibt es Mathematik im Rest der Welt?

## 1. Zum Modell des Modellierungskreislaufes

Seit mehreren Jahren wird für den idealtypischen Modellierungskreislauf ein Diagramm verwendet, das der Mathematik einen weiteren Bereich, nämlich den Rest der Welt (oder Reale Situation, Realität, Realwelt, Wirklichkeit), gegenüberstellt. Unter Rest versteht man im Allgemeinen das, was übrig bleibt. Was bleibt also übrig, wenn Mathematik als Werkzeug zum Modellieren verwendet wird? Und woraus besteht dieser Rest? Das Diagramm und die Wortwahl suggerieren, dass es sich um zwei voneinander verschiedene Bereiche handelt, selbst wenn in der Literatur (oft in Fußnoten) erwähnt wird, dass dem so nicht sei (z.B. Holzäpfel, 2014).

Aufschluss über die Verwendung der Begriffe „Mathematik" und „Rest der Welt" könnten einschlägige Modellierungsbeispiele geben, so z.B. die seit langem zitierte Tankaufgabe (Blum, 2005) und der Adenauerkopf (Herget, u.a., 2001). Bei der Tankaufgabe geht es mathematisch um das Aufstellen zweier linearer Funktionen, deren gemeinsamer Schnittpunkt angibt, ab wann sich die Fahrt für günstigeres Benzin lohnt würde. Gegeben sind gewisse Größen; Zeitangaben und Benzinverbrauch fehlen. Zum Modellierungsprozess gehören einerseits das Identifizieren weiterer relevanter Größen und andererseits das Finden konkreter Maße durch Recherche. Der Modellierungsprozess der Schüler ist dadurch charakterisiert, dass sie die gegebene Situation wie durch einen mathematischen Filter so zu fassen suchen, dass sie zu einer mathematischen Lösung durch Größen und Zahlen kommen. Schüler geben allerdings auch Antworten, die ahnen lassen, dass ihnen eine andere Sichtweise nicht fremd ist: "… angenommen Herr Stein hat viel Zeit…. z. B. als Rentner".

Beim zweiten Beispiel ist die hypothetische Nachbildung eines Körpers Gegenstand und Ziel des Modellierens. Auch in diesem Fall ist die sogenannte Realproblemstellung bereits (vor-) mathematisiert. Es sind nämlich für die Größe „Länge" verschiedene Daten gegeben, aus denen andere Daten für die Gesamtlänge zu ermitteln sind. Auch hier soll vermittels der zu bestimmenden eine Antwort gefunden werden, die der „realen" Welt zuzuordnen sind.

Auf der Suche nach Modellierungsbeispielen, die den „Rest der Welt" näher beleuchten könnten, bieten Landkarten reichhaltige und sehr unterschiedliche Modellbeispiele zum Charakterisieren von Modellierungsprozessen. Landkarten stellen die Erdoberfläche (oder andere Himmelskörper) analog (klassische Landkarten) oder digital (im Raster- oder Vektorformat) dar, sind

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 819–822). Münster: WTM-Verlag

ein verkleinertes mit Beschreibungen und Zeichen versehenes Abbild und dienen ganz verschiedenen Zwecken. Karten sind das Ergebnis sehr komplexer Arbeits- und Modellierungsprozesse und basieren auf geologischen Basisdaten wie Raumphänomenen (z.B. Gelände, Meerestiefen, Küstenverläufe, Verkehrswege) und weiteren Eigenschaften (wie Bodenarten und -nutzung, Niederschlagsmengen und Wasserständen). Karten unterscheiden sich thematisch: z.B. Luftfahrt-, See- oder Wirtschafts- Karten mit ihren typischen deskriptiven Merkmalen. Unter der Perspektive mathematischer Modellierungsaufgaben für den Mathematikunterricht stellen Karten verschiedene Modelle mit diversen Abstraktionen für verschiedene Zwecke und dementsprechend auch für verschiedene Lösungen dar. Sie repräsentieren für jegliche, auch nicht mathematischen Zwecke, Modellierungen. Auch anhand dieser Beispiele wird deutlich, wie problematisch eine Trennung ist.

Nimmt man weiter solche Entscheidungsprobleme in den Fokus, die nun vordergründig nichts mit Mathematik zu tun haben, etwa „Soll eine Brücke über einen Fluss gebaut werden?“ oder „Soll Frau X die Leitung einer bestimmten Abteilung übernehmen?“, wird die Situation mindestens durch Codierungen so mathematisiert, dass sie sich nicht „im Rest der Welt“ und keineswegs außerhalb der Mathematik befindet.

Aus den in den Blick genommenen Modellierungsaufgaben wird ersichtlich, dass der „Rest der Welt“ in einem hohen Maße mathematikhaltig ist. Sie zeigen insbesondere, dass eine Trennung von Mathematik und der sogenannten Realität kein sinnvolles Konzept darstellt.

## 2. Bemerkungen zum Modell

1. Es ist weiterhin erstaunlich, dass in der einschlägigen Literatur bei diesem Diagramm ganz verschiedene Begriffe der Mathematik gegenübergestellt werden. Was könnte ihnen gemeinsam sein? Der Begriff der Realität, ein weitgehend etablierter Begriff in Philosophie und Wissenschaftstheorie, kann je nach Lesart die Mathematik vollständig enthalten. Weiter wird als Abwandlung auch der Begriff der Realwelt verwendet. Dass allen Begriffen Gemeinsame besteht darin, dass man sie der Mathematik gegenüberstellt. Offen bleibt, warum unterschiedliche Begriffe verwendet werden, obwohl sie Unterschiedliches bedeuten. Deshalb ist die Verwendung des Begriffes „Realität“ im Modellierungskreislauf weil genügend umfassend angebracht.

2. Zu Beginn der Bemühungen, das Anwenden von Mathematik im Unterricht zu strukturieren, glaubte man, die Mathematik von „jener ‚Realität‘, [trennen zu müssen] auf die die Mathematik angewendet wird“ (Fischer/Malle, 1985, S.99). Dabei bezeichnen die Autoren den Verzicht auf die

Trennung als naiv: „Bei dieser ‚naiven‘ Auffassung ergeben sich mathematische Begriffe und Verfahren unmittelbar aus der außermathematischen Realität und werden unmittelbar in dieser interpretiert“ (Fischer/Malle, 1985, S.104). Mehr Beachtung erfahren jedoch diejenigen Modellierungsschemata, welche eine Trennung von Mathematik und Realität voraussetzen. Allerdings ist diese Trennung nicht notwendige Voraussetzung für eine Strukturierung von Modellierungsprozessen.

3. Wenn an der Gegenüberstellung von Mathematik und der Realität festgehalten wird, welchen mathematikdidaktischen Zweck - im Mathematikunterricht (modellieren), in der Lehrerausbildung (Modellieren lehren) - soll sie erfüllen? Wenn es darum geht, die Modellierungsschritte zu differenzieren, dann wird aus dokumentierten Schülerverhalten ersichtlich, dass sie nicht dem im Diagramm angezeigten Verlauf stringent folgen. Hält man am Diagramm fest, dann kann es zur Orientierung dienen. Bei oberflächlichem Gebrauch hätte es die Rolle einer Schablone; sowohl für den Unterricht als auch in der Lehrerausbildung.

4. Schon bei Sachaufgaben wurden Lösungsschemata aufgestellt, die im Prinzip bereits zyklisch waren, primär aber zwei Ebenen (Sachebene, mathematische Ebene) voneinander unterschieden. Dabei sprach Winter (1989) vom Mathematisieren, wenn das in der Sachebene gestellte Problem auf die mathematisierte Ebene abstrahiert wurde. Bei diesem Prozess wurde die Mathematik nicht gegenübergestellt, sondern blieb Teil der Realität, wenn auch auf abstrakterem Niveau.

5. Beim Modellierungskreislauf spricht man von einem Prozess, der aus Teilprozessen besteht, nämlich den Übergängen zwischen den einzelnen Stadien z.B. Realität, Situationsmodell, mathematisches Modell. Prinzipiell besteht dabei das Problem, dass man Prozesse nur durch ihre „Produkte“, d.h. Schülerhandlungen, registrieren kann.

## 3. Erweiterte Sichtweise des Modellierens

1. Obwohl Fischer/Malle die Sichtweise, Mathematik nicht von der Realität getrennt wahrzunehmen, als naiv bezeichnen, kann man diese auch als wohlbegründet ansehen. Eine prinzipielle Trennung zwischen der Mathematik und der Realität ist nicht aufrechtzuerhalten, denn das Mathematisieren und Modellieren setzt ja Mathematik in der Realität voraus. Ganz offensichtlich ist dies in den Fällen, in denen aufgrund vorgegebener Größen weitere Größen zu berechnen sind. Hier ist eine Vormathematisierung, gewissermaßen eine Vormodellierung, evident. In anderen Fällen muss dies nicht so offensichtlich sein, etwa wenn es um qualitative Kategorien geht. So sind zum

Beispiel Schulnoten ordinal skalierte Daten, die entsprechend geordnete (von sehr gut bis ungenügend) Qualifizierungen benennen. Die Grundannahme, dass Schülerleistungen vergleichbar sind, birgt bereits eine mathematische Struktur, hier im Sinne einer Ordnungsrelation. Weitere Beispiele sind solche, die auf eine Entscheidungsfindung abzielen. Das Entscheidungskriterium kann sowohl von Größen abhängen (Verkehrsfrequenz bei einer Ampelinstallation) als auch von abstrakteren Strukturen wie etwa Präferenzrelationen im Falle wirtschaftlicher Entscheidung. Hier müssen subjektive Kriterien - Präferenzen - formalisiert werden, mathematisch als Ordnungsrelation, bevor eine sinnvolle Problemstellung formuliert werden kann.

Das heißt: Jegliche Realität, auf die Mathematik angewendet werden kann, enthält per se mathematische Strukturen. Diese Sichtweise geht konform mit dem historischen Verhältnis zwischen mathematischem Wissen und der Realität.

2. Jedes Bild, was wir uns von der Realität machen können, kann als Modell angesehen werden, weil uns das Erkennen der gesamten Realität verwehrt ist. Ein solches Bild enthält zwangsläufig mathematische Strukturen: Die elementare Wahrnehmung des Raumes und der Gegenstände (Geometrie), die Möglichkeit des Zählens (Äquivalenzklassenbildung), das Messen mittels Größen (wobei beispielsweise Unterschiede beim Phänomen Zeit auftreten), das Ordnen und Klassifizieren, um nur Einiges zu nennen.

Daher beziehen sich die im Unterricht vorzunehmenden Modellierungen streng genommen stets auf „Vormodellierungen". So können z.B. Größen ihrerseits als Resultate früherer Modellierungen der Realität aufgefasst werden. Wo also fängt Modellieren an?

## Literatur


Blum, W., Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"- Aufgabe, mathematik lehren, 128, 18-21

Fischer R., Malle G. (1985): Mensch und Mathematik, BI, Zürich

Herget, Jahnke, Kroll (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, Berlin, Cornelsen

Winter, H.(1985): Sachrechnen in der Grundschule, Bielefeld: CVK (Neuauflage Frankfurt/M. 1992

Renate MOTZER, Wolfgang SCHNEIDER, Augsburg

# Umfrageergebnisse zur Gestaltung von Übungen zu fachlichen Vorlesungen

An der Uni Augsburg werden seit einiger Zeit Übungen zu den Veranstaltungen „Analytische / Synthetische Geometrie“ und „Elementare Zahlentheorie“ in Form von Expertenpuzzles angeboten. Dies soll die Tatsache ändern, dass Mathematikstudierende offiziell fast nie über Mathematik reden müssen, auch künftige Lehrpersonen nicht. Vorlesungen sind rein deduktiv. Nur Nachvollziehen ist gefragt, kein selbstständiges Entdecken. Übungsaufgaben werden von vielen als unlösbar empfunden. Auch in den Übungen ist oft nur Nachvollziehen gefragt. Klausuren werden evtl. dennoch bestanden, oft aber nur durch fleißiges „Auswendiglernen.“ Die Studierenden erleben zu wenig das Gefühl der Selbstwirksamkeit. Diese Situation soll dadurch verbessert werden, dass Studierende in den Übungen nun dafür Verantwortung tragen, sich gegenseitig die Aufgaben und ihre Lösungen zu erklären. Sie werden Experte für eine der Übungsaufgaben und bekommen die anderen von den gleichen Kommilitonen erklärt, denen sie ihre Aufgabe erklären. So entsteht im Idealfall eine Gruppe von 4 Studierenden, die gemeinsam jedes Übungsblatt besprechen. Sollte es einem Experten nicht möglich gewesen sein, die im zugedachte Aufgabe selbst zu lösen, so wird ihm im Zeitraum zwischen der Abgabe der Übungsblätter und der Sitzung der Übung, in der diese Blätter zurückgegeben und behandelt werden, eine Musterlösung zur Verfügung gestellt.

Umfragen in den letzten Semestern zeigen, dass die Zustimmung zu dieser Art der Auseinandersetzung mit den Übungsaufgaben bei den Studierenden unterschiedlich ausfällt. Einige schätzen diese eigenständige Art, sich mit den Aufgaben auseinander zu setzen. Etliche würden es aber vorziehen, die Aufgaben vorgerechnet zu bekommen, so wie sie es von den anderen Vorlesungen her kennen. Viele sehen bei beiden Übungsformen Vor- und Nachteile. Daher stellt sich uns die Frage: Können die Studierenden durch diese Art der Übungsgestaltung mehr Verständnis für die Vorlesungsinhalte erlangen und besser auf ihre künftige Rolle als Lehrende vorbereitet werden?

Im letzten Jahr wurde die Studierenden in den Vorlesungen zur „Elementaren Zahlentheorie“ und zur „Analytischen Geometrie“ in einem Fragebogen nach ihren Erfahrungen / Vorlieben gefragt. Die Befragungen zu den beiden Vorlesungen zeigen ähnliche Tendenzen.

Hier sollen einige Befragungsergebnisse vorgestellt werden:

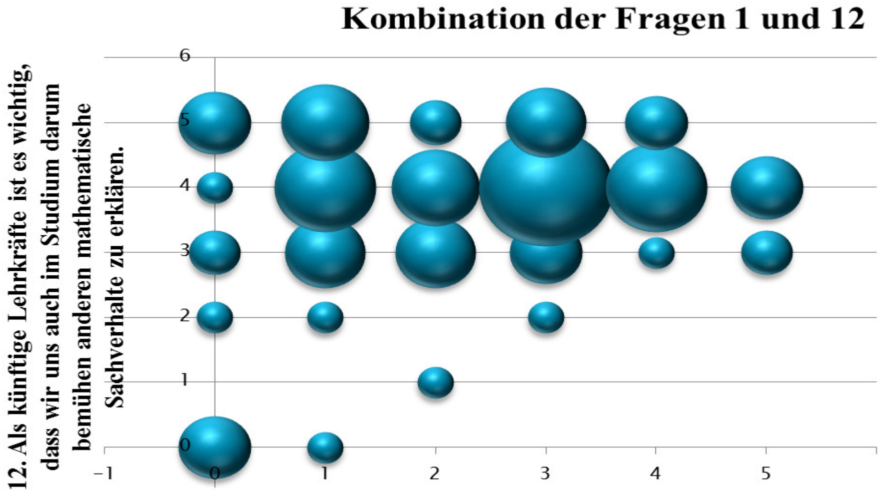
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 823–826). Münster: WTM-Verlag

Zunächst geht es um den Schwierigkeitsgrad und den Umfang der Aufgabenstellungen: „Der Schwierigkeitsgrad und der Umfang der Aufgabenstellung sind angemessen.“ Rund ein Viertel der Studierenden sieht das nicht so. Da der Umfang der Aufgabenstellung zumindest in der analytischen Geometrie faktisch eher gering ist, erscheint wohl der Schwierigkeitsgrad zahlreichen Studentinnen und Studenten zu hoch.

Vor allem diese Studierenden sind oft auch mit der Übungsform „Expertenpuzzle“ nicht glücklich. Zu dem Item „Als künftige Lehrkraft ist es für mich wichtig, auch im Übungsbetrieb Gelegenheit zu haben, anderen mathematische Sachverhalte zu erklären“ gibt es leider keine durchgehende Zustimmung. Zwar schätzen über 40% diese Gelegenheit, aber 26% lehnen sie (eher) ab. Obwohl die klare Mehrheit bei „Wir arbeiten in meiner Übungsgruppe gut zusammen“ zustimmt (nur 7% widersprechen hier), wird die Tatsache des Sich-Gegenseitig-Erklärens von vielen als negativ gesehen (38%). Dabei wird die Unterstützung durch die Übungsleiter durchaus positiv gewertet (nur 3% verneinen dies). Die Studierenden fühlen sich also mit den Aufgaben nicht allein gelassen. Dennoch haben 50% nicht das Gefühl, dass es ihr Verständnis stärkt, wenn sie anderen Aufgaben erklären und von den Kommilitonen Aufgaben erklärt bekommen.

Prinzipiell stimmen die Studierenden der Aussage schon zu, dass es für sie als Lehramtsstudierende wichtig ist, sich gegenseitig mathematische Sachverhalte zu erklären, im Bezug auf eine regelmäßige Praxis in den Übungen zu den fachlichen Vorlesungen sehen das viele aber nicht so:

**1. Ich fand es gut, dass wir uns die Aufgaben gegenseitig erklärt haben.**




.

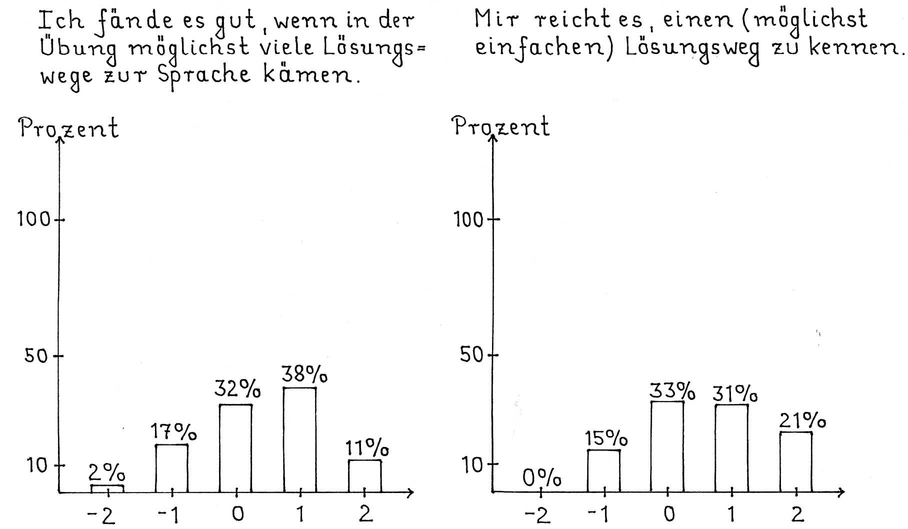
(Hinweis zum Lesen des Diagramms: 0 bedeutet Enthaltung in dieser Frage, 5 ist die höchste Zustimmung, 1 die höchste Ablehnung)

Man sieht, dass es Studierende gibt, denen Frage 12 („sich mathematische Sachverhalte erklären“) sehr wichtig erscheint, die solch ein Erklären aber für die Aufgaben der Vorlesungen ablehnen. Eine Studentin (Lehramt Grundschule) bemerkt dazu, dass sie gerne Grundschulmathematik erkläre, aber doch nicht solche schwierigen mathematischen Aufgaben, die man in seinem Berufsleben nie mehr brauchen werde.

Dass die Studierenden zu den fachlichen Inhalten ihres Unterrichtsfachs oft wenig Bezug aufbauen, zeigen auch die Antworten auf die offene Frage, welche Vorlesungsinhalte am interessantesten empfunden wurden. Die meisten lassen diese Frage leer. Dass viele den Inhalten der Veranstaltung so wenig abgewinnen können, ist mehr als bedauerlich. Bezüglich der Zahlentheorie-Vorlesung nennt ein Viertel der Befragten das „Modulo-Rechnen“, etwa halb so viele die Behandlung von EAN/ISBN bzw. das Rechnen in anderen Stellenwertsystemen, andere Inhalte werden von einigen wenigen genannt (wobei einzelne auch mehrere Themen erwähnten). In der analytischen Geometrie gibt es noch weniger Antworten.

Bezüglich der analytischen Geometrie wurde als Ankreuzitem auch eine Stellungnahme zu „Ich finde es schön, dass es in der Analytischen Geometrie öfters verschiedene Lösungswege gibt“ erbeten. Hier stimmt etwa die Hälfte der Befragten zu, nur wenige lehnen ab (11%). Darüber nachzudenken, wie die verschiedenen Lösungswege zusammenhängen, wollen schon deutlich weniger (26% lehnen dies ab).

Analoge Tendenzen werden bei den entsprechenden Fragen für die Übungsaufgaben ersichtlich:




Dass viele Lösungswege zur Sprache kommen sollen, klingt zunächst für die Studierenden positiv. Sie können damit eine Auswahl haben und den

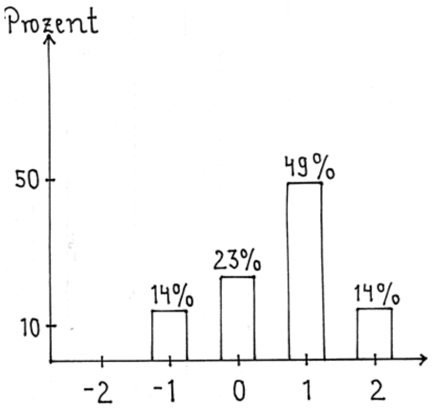
Weg wählen, der ihnen persönlich am besten zusagt. Anderseits haben aber viele nicht das Bedürfnis, sich selbst auf verschiedene Wege einzulassen.

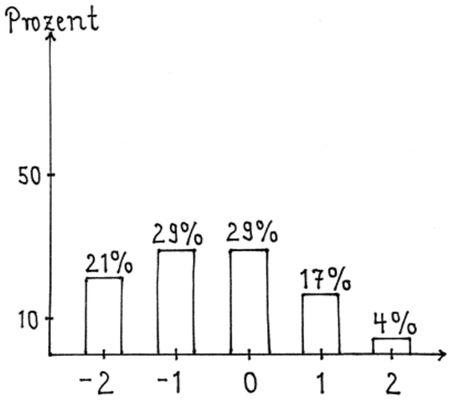
Zuletzt sei nochmal die Frage ins Blickfeld genommen, ob das Sich-gegenseitig-etwas-Erklären hilft, die eigene Kompetenz zu stärken oder zumindest ein Kompetenzerlebnis zu ermöglichen.

Zum einen scheint die mehrmalige Beschäftigung mit der Übungsaufgabe fast allen etwas zu bringen (siehe 1. Grafik):

Dadurch, dass ich mich bis zu dreimal mit einer Aufgabe beschäftigen muss (vor der Abgabe, beim gegenseitigen Erklären in der Übungsgruppe, als Wiederholung vor der Klausur), muss ich mich tief in die Aufgaben hineindenken. Dies stärkt meine Kompetenz.

Ich war bisher der Meinung, dass das bloße Vorrechnen der Aufgaben durch den Übungsleiter vollkommen ausreicht. Nun sehe ich aber deutliche Vorteile für mein Grundverständnis durch die hier praktizierte Methode.




Könnte ein ähnlicher Effekt auch entstehen, wenn die zweite Beschäftigung mit der Aufgabe im Nachvollziehen dessen besteht, was der Übungsleiter an die Tafel schreibt? Die zweite Grafik lässt vermuten, dass viele Studierende das glauben. Schon um der 21% wegen, die die Vorteile des sich gegenseitig Erklärens zu schätzen gelernt haben, soll dennoch nicht auf die tiefergehende Methode des Expertenpuzzles verzichtet werden.

## Literatur


Motzer, Renate (2010): Übungen zu den „klassischen" Mathematik-Vorlesungen – organisiert als Expertenpuzzle, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, (S. 621 - 624) div-verlag franzbecker, Hildesheim/Berlin

Thomas MÜLLER, Krems/Donau

# Raumgeometrieunterricht: Hinweise auf die Übertragbarkeit des Supplantationskonzeptes von Salomon?

Ein Raumgeometrieunterricht ohne die Verwendung bzw. das Arbeiten mit real angreifbaren Körpermodellen scheint undenkbar – und das in allen Ausbildungsstufen vom Kindergarten bis zur Universität. Das sind Modelle vom Würfel, seinem Netz, von den hier allseits bekannten Grundkörpern, das sind diverse Kegelschnittsmodelle, von den Dandelinschen Kugeln beim ebenen Zylinderschnitt bis hin etwa zur Dupinschen Zyklide. Modelle gehören einfach zum Geometrieunterricht [MÜLLER 2012]. Modelle sollen helfen, eine Grundvorstellung von Raumgeometrie zu entwickeln, Raumobjekte darzustellen und damit zu operieren. Oft scheint es, dass selbst kreative Architekten direkt die in ihrer Ausbildung kennengelernten Geometrieobjekte realisieren. Im Unterricht ist es in der Regel so, dass Modelle helfen sollen, bestimmte räumliche Vorgänge zu verstehen, zu verinnerlichen und so eine Kompetenz zu erwerben, Probleme ohne reale 3D-Modelle nur mit Hilfe von Skizzen oder 2D-Zeichnungen zu lösen. Geometriemodelle sollen eine Skizze nicht ersetzen, nicht „supplantieren“. Und um die Frage der Gültigkeit eines gewissen Supplantationseffektes im Unterricht geht es in der Folge.

## Unterricht und Testdesign

Eine einfache Modellvorstellung von Unterricht besteht aus Lernaktivitäten und Lehrhandlungen, beide ein Bindeglied zwischen den Voraussetzungen der Lernenden bzw. den Zielvorstellungen der Lehrpersonen auf der einen Seite und den Lernwirkungen auf die Lernenden und Annahmen der Lehrenden, dass die Handlungen zum Erfolg führen, auf der anderen Seite (vgl. Abbildung 1).

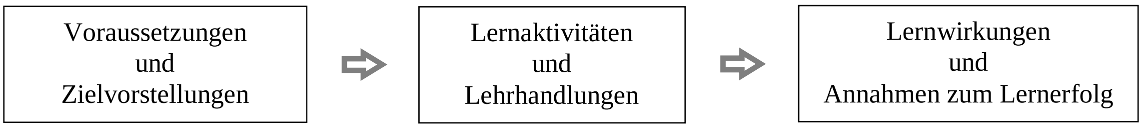



Abbildung 1

Betrachtet man Unterricht aus Sicht der Mediendidaktik, so trägt das Medium den Informationsfluss vom Sender (in der Regel der Lehrperson) zum Empfänger (in der Regel zu den Lernenden) und je nach Lehr-Lern-Paradigma möglicherweise auch in die andere Richtung. Medien sind dabei Sprache, Texte, Musik, Bilder, Geräusche, Gerüche, Objekte/Modelle.

Das typische Design von Untersuchungen zur Wirksamkeit von Interventionen wie Lehrhandlungen oder Lernaktivitäten im Unterricht besteht in der Regel aus Pretests, den eigentlichen *Interventionen* und Posttests. Um

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 827–830). Münster: WTM-Verlag

die Wirksamkeit der Interventionen herauszufinden, gibt es verschiedene Gruppen von Testpersonen, auf die keine (= Kontrollgruppen) oder bestimmt ausgerichtete Interventionsmaßnahmen wirksam werden. Um eine Wirksamkeit festzustellen, werden die Testergebnisse von Pre- und Posttest miteinander verglichen und die Unterschiede entsprechend interpretiert.

Im Brennpunkt der gegenständlichen Darlegungen stehen der Raumgeometrieunterricht und Untersuchungen, deren Interventionen auf die Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens Einfluss nehmen. Dabei soll festgehalten werden, ob die Lernwirkung bei Personen mit geringerem bzw. höherem Raumvorstellungsvermögen unterschiedlich ist.

Obwohl die Interventionsmaßnahmen in der Regel mit Bedacht so gewählt werden, dass durch diese das zu untersuchende Merkmal gesteigert wird, scheint manchmal gerade das Gegenteil einzutreten.

Dies soll an einem ausgewählten Beispiel demonstriert werden:

## Ein Beispiel: Intervention mit Augmented Reality

2005 untersuchten Hannes KAUFMANN und Andreas DÜNSER in Wien an mehr als 200 Schülerinnen und Schülern der elften Schulstufe die Wirksamkeit von *Augmented Reality* im Vergleich zu einem Unterricht mit einem statischen 3D-CAD-Programm bzw. mit traditionellem händischem Konstruktionsunterricht (Darstellende Geometrie). Der Lernzuwachs von vier Gruppen wurde untersucht. [DÜNSER 2005]

Das von der Forschergruppe erhoffte Ergebnis, dass die Gruppe, die mit den Augmented-Reality-Modellen trainierte, die größte Leistungssteigerung haben würde, erfüllte sich nicht. Im Gegenteil: Die Gruppe der Testpersonen mit beim Pretest festgestellt höherem Ausgangsniveau schneidet beim Posttest bei <u>jedem</u> einzelnen der vier Teiltests[1] schlechter als beim Pretest ab.

Die Statistiker wissen, dass das vorliegende Ergebnis (Schwache steigern sich beim Posttest mehr, Gute werden nicht besser, sondern eher schlechter als beim Pretest) bei diesem zweiphasigen Testverfahren keinesfalls Zufall ist oder kausal mit der Interventionsmaßnahme zusammenhängen muss. Vielmehr verursacht dies der sogenannte Regressionseffekt – auch „Tendenz zur Mitte" genannt: So können Testpersonen, die mit sehr gute Leistungen im Pretest haben, beim Posttest nur gleich gut oder schlechter abschneiden (DÜNSER begründet dies mit einem „Deckeneffekt") und Personen mit sehr schlechten Ergebnissen nur gleich schlecht oder besser ab-

[1] MCT (Abb.5), MRT (Abb.6), DAT:SR (Abb.7), SOT (Abb.8); die Abbildungsnummern beziehen sich auf [DÜNSER 2005].

schneiden. Eine Annäherung zur Mitte ist damit selbst ohne Einfluss der gesetzten Interventionen wahrscheinlich. In mathematischer Sprache formuliert bedeutet dies, dass sich die gemessenen und bei großer Grundgesamtheit in der Regel normalverteilten Testwerte ($x_i$ beim Pretest und $y_i$ beim Posttest) bei den Testpersonen jeweils aus „wahren“ Variablenwerten $X_i$ bzw. $Y_i$ und zufälligen Messfehlern $m_{xi}$ bzw. $m_{yi}$ zusammensetzen:

$$(1) \quad x_i = X_i + m_{xi} \quad \text{bzw.} \quad (2) \quad y_i = Y_i + m_{yi}$$

Dies hängt damit zusammen, dass (fast alle) Tests in der Psychologie nicht reliabel (zuverlässig) genug sind und deshalb immer mit Messfehlern zu rechnen ist.

**Eine mögliche Interpretation: Supplantation**

Die Fragestellung, um die es hier geht, ist: Kann es für das Ergebnis, nämlich das schlechtere Abschneiden von TP mit höherem Ausgangsniveau bei allen vier Posttests im Vergleich zu den Pretests neben dem Regressionseffekt, weitere Ursachen geben?

Gavriel SALOMON hat in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts in seinen Untersuchungen über die Wirkung von „neuen“ Medien den Effekt beschrieben, dass virtuelle Simulationen die kognitive Anstrengung ersetzen bzw. verringern können. Er erklärt dieses Phänomen so, dass die exakte Simulation eines kognitiven Prozesses das Arbeitsgedächtnis von Lernenden entlastet (und nicht trainiert), weil die wichtige Lernaufgabe, das Vorstellen des Ablaufes, dem Gehirn abgenommen wird. SALOMON nennt dies „Ersetzung“ bzw. im Original „Supplantion“ [SALOMON 1976].

Ist nun das Lernen mit Augmented Reality im obigen Testaufbau als eine solche Supplantation sehen? Die Testpersonen sehen die zu bearbeitenden Objekt dreidimensional vor sich schweben und können gestellte Aufgaben ohne den Zwischenschritt der Interpretation zweidimensionaler Bilder lösen. Im Zuge des Testverfahrens mit Papier und Bleistift müssen aber gerade diese Denkvorgänge abgerufen werden. Das Arbeiten der Testpersonen im 3D-Raum könnte eine so große kognitive Entlastung nach sich ziehen, dass sich die erwünschte Lernwirkung – das Lösen von 3D-Aufgaben mit Hilfe von 2D-Darstellungen – nicht einstellt, ja eventuell sogar geschmälert wird. Der Vergleich mit einem Sporttraining drängt sich auf: Welchen Effekt hätte es, wenn ein 400m-Läufer sein Lauftraining durch das Ansehen von Laufvideos ersetzt? Die Intervention hat bei Augmented-Reality-Intervention also nicht das trainiert, was getestet wird. Hinweise aus der Neurodidaktik zeigen, dass ein haptischer Umgang mit Modellen andere Bereiche des Gehirns aktiviert als ein rein bildhafter [MADEJA 2012].

Gilt der Supplantationseffekt, dann muss in Gleichung (2) noch ein Summand $s_{yi}$ für die Supplantation eingebaut werden, der Einfluss auf das Messergebnis $y_i$ der Posttests hat.

$$(3) \qquad y_i = Y_i + m_{yi} + s_{yi}$$

Augmented Reality stellt ein Mittelding zwischen realen Raumgeometriemodellen und der virtuellen Digitalwelt dar. Damit stellt sich die Frage, ob das intensive Arbeiten mit realen 3D-Modellen einen ähnlichen Effekt hervorruft: Nämlich, dass die Absicht der Lehrperson, eine möglichst hohe Raumvorstellungskompetenz bei den zu Lernenden zu erreichen, in Wirklichkeit nur das Hantieren in der realen 3D-Welt – nicht aber das Vorstellungsvermögen als Transfermittel zwischen 3D-Welt und 2D-Bildern fördert. Gerade das ist eine der Kernaufgaben des Raumgeometrieunterrichtes.

Niemand wird bestreiten, dass der Bau von eigenen Modellen und die intensive Verwendung fertiger Modelle im Anfangsunterricht absolut notwendig sind, um eine „Geometriebasis" im Gedächtnis deklarativ aufzubauen [BRAND/MARKOWITSCH 2009]. Die Frage ist nur, ob die Aufgabenstellungen, die zum Hantieren mit Modellen gestellt werden, aktivierend genug sind, um einen Lerneffekt zu bewirken. Dazu bemerkt Klaus-Peter EICHLER schon für den Unterricht in der Primarschule:

> *Der mit einer äußeren Handlung erreichbare Lerneffekt tritt prinzipiell erst dann ein, wenn die Kinder durch die Handlung zu einer dem Aneignungsgegenstand gerichteten geistigen Tätigkeit veranlasst werden.*

Um diese Frage beantworten zu können, ob es diesen beschriebenen Supplantationseffekt tatsächlich gibt, muss ein eigenes Testdesign entworfen werden, bei dem natürlich alle intervenierenden Variablen und statistischen Effekte berücksichtigt werden müssen – ein lohnenswertes Unterfangen!

### *Literatur*


Brand, M./Markowitsch, H.J. (2009). Lernen und Gedächtnis aus neurowissenschaftlicher Perspektive. In: Hermann, U. (Hrsg.): Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehrern und Lernen, 2. Aufl. Beltz, Weinheim und Basel

Dünser, A. (2005). Trainierbarkeit der Raumvorstellung mit Augmented Reality. Wien, Univ., Diss.

Eichler, K-P. (2013). Mathematikunterricht in der Grundschule - Gestaltung, Analyse und Bilanz. In www.mathematikus.de [2014-03-01]

Madeja, M. (2012). Das kleine Buch vom Gehirn, München: dtv

Müller, T. (2012). Über das Lernen mit geometrischen Modellen. - in: Informationsblätter für Darstellende Geometrie 31 (2012) 2, S. 16 – 20, Innsbruck.

Salomon, Gavriel (1976). Können wir kognitive Fertigkeiten durch visuelle Medien beeinflussen? Eine Hypothese und erste Befunde. In: Dichanz, Horst / Kolb, Günter (Hrsg.): Quellentexte zur Unterrichtstechnologie II. Stuttgart: Klett, S. 44 – 67.

Stefanie MÜLLER-HEISE, Halle/Saale

# Sie macht das Komisch – Reaktionen auf fremde Problemlöseprozesse

Äußerungen wie „Sie macht das komisch“ oder „Also ich hab das ganze jetzt verstanden, aber ich habe es falsch gemacht“ erhielt ich von Grundschulkinder nachdem sie sich selbst mit einer Problemstellung auseinandergesetzt hatten und anschließend ein Video anschauten, in dem ein anderes gleichaltriges Kind dieselbe Problemstellung bearbeitete. Im folgenden Artikel wird dargestellt, wie Grundschulkinder beim Problemlösen zu Reflexion angeregt werden und wie so entstehende Reflexionen charakterisiert werden können.

Reflektiertes Handeln stellt im gesamten Curriculum ein Bildungsziel dar. Dass auch der Mathematikunterricht Reflexionen über mathematisches Handeln benötigt, steht nach den zurückliegenden Vergleichsuntersuchungen fest. Mathematisches Problemlösen stellt einen Inhalt dar, der von sich aus ein natürliches Reflexionspotential besitzt. Anhand verschiedener Ausführungen zum Problemlösen in der Mathematik wird deutlich, dass hier die Reflexion einen wichtigen Stellenwert einnimmt. So ist in den Modellen nach Zimmermann (2008) und Schoenfeld (1985) die Komponente „Controll“ als eine von mehreren Komponenten, die zum Problemlösen notwendig ist, zu finden. Dennoch scheint es den Schülern schwer zu fallen, eigenes mathematisches Handeln zu reflektieren (vgl. Schoenfeld 1987, Rott 2013). Um an Informationen über die eigene kognitive Arbeit zu kommen, nennen Kluwe & Schiebler (1984) vier Varianten von exekutiver Kontrolle. Der Problemlöser sollte zunächst identifizieren, was er gerade tut. Anschließend erfolgt eine Prüfung und Bewertung des Handelns, woraufhin vorausschauend überlegt wird, was nun zu tun ist.

Für die Forschung sind die Reflexionen eines Menschen über sich selbst schwer zugänglich. Über die Methode des Lauten Denkens können sie dem Forscher zugänglich gemacht werden. Dennoch ist zu vermuten, dass auch so nicht alle Gedanken verbalisiert werden. In der Lehrerbildung wird beispielsweise ein anderer Ansatz zur Reflexion verfolgt. Lehrern werden Videos mit fremden Unterrichtsszenen gezeigt, über die anschließend hinsichtlich verschiedener Gesichtspunkte reflektiert wird. Anliegen dieses Ansatzes ist es, Lehrer zunächst über fremden Unterricht nachdenken zu lassen, um darüber zu einer stärkeren Reflexion des eigenen unterrichtlichen Handelns zu gelangen (vgl. Krammer & Reusser 2005).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 831–834). Münster: WTM-Verlag

Beispiele für reflexionsfördernde Maßnahmen sind bei Schoenfeld (1987) nachzulesen. Eine der dort aufgeführten Interventionen bezieht sich auf das Betrachten von fremden Problemlöseprozessen in Videos. Ähnlich wie bei den Konzepten zur Lehrerbildung sieht Schoenfeld (1987) hierin den Vorteil, dass es leichter ist, zunächst fremdes Handeln zu analysieren und davon ausgehend anschließend das eigene mathematische Handeln zu reflektieren.

Inwiefern der Ansatz über fremde Problemlöseprozesse zu reflektieren mit Grundschulkindern grundsätzlich anwendbar ist, soll in einem Forschungsprojekt erkundet werden. Dabei steht die Beantwortung folgender Fragen im Mittelpunkt:

- Wie reflektieren Grundschulkinder fremde und eigene Problembearbeitungsprozesse?
- Was reflektieren Grundschulkinder von sich aus während bzw. nach der Betrachtung von fremden Problemlöseprozessen inhaltlich?
- Auf welche Art erfolgen diese Reflexionen? (vgl. Kluwe/Schiebler 1984)
- Inwiefern beziehen Schüler bei diesen Reflexionen ihren eigenen Problemlöseprozess mit ein?

**Untersuchungsdesign**

Für eine Vorstudie wurden zunächst drei Problemstellungen ausgewählt, die in der Diskussion um das Problemlösen in der Primarstufe zu finden sind (vgl. Rasch). Zur Erstellung der Videos dienten dokumentierte Schülerlösungen aus der Literatur und von Schülerbeobachtungen aus anderen Projekten der Arbeitsgruppe. Es entstand zu jeder Problemstellung ein Pool von etwa sechs Videos. Dabei sind die verschiedenen Lösungswege sowohl fehlerfrei als auch mit Fehlern dargestellt worden.

Im Vorfeld wurden verschiedene Settings ausprobiert und hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile analysiert. Das geplante Untersuchungsdesign sieht vor, dass die Schüler in Einzelinterviews zunächst eine Problemstellung selbständig bearbeiten. Anschließend wird ihnen ein Video präsentiert, welches sie mit folgendem Hinweis betrachten sollen:

> „Bitte sage immer, was dir durch den Kopf geht. Dafür kann ich das Video auch anhalten."

So ist es den Schülern möglich, während oder im Anschluss an das Video ihre Gedanken zu äußern. Nachdem die Schüler zunächst von sich aus reflektieren, gibt der Interviewleiter anschließend Impulse, welche die Schüler zu weiteren Reflexionen anregen sollen.

- Beschreibe den Lösungsweg des Kindes.
- Vergleiche deinen Lösungsweg und den im Video.
- Was ist gleich und was verschieden?
- Wenn du die Aufgabe noch einmal lösen sollst, wie würdest du dann vorgehen?

Dass die Antworten auf die Impulse nicht als eigene Reflexionen angesehen werden können, steht außer Frage. Es soll hiermit den Schülern eine Möglichkeit geboten werden, eigene Gedanken gezielter zu verbalisieren.

## Fallbeispiel Jana

Jana ist Schülerin einer vierten Klasse und hat folgende Problemstellung bearbeitet:

> Johanna las an drei Tagen ein Buch von 93 Seiten. Am Montag las sie einige Seiten und von da ab jeden Tag 8 Seiten mehr als am Tag davor. Am Mittwoch wurde sie fertig. Wie viele Seiten las sie am Montag?

Als Lösung erhielt sie 744 (s. Abb. 1). Anschließend wurde ihr ein Video mit einer fehlerfreien Probierstrategie (s. Abb. 2) gezeigt.

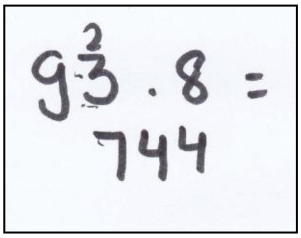



Abb. 1: Janas Lösungsweg

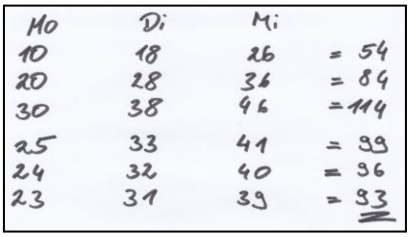



Abb. 2: Lösungsweg im Video „Probieren“

| | | |
|---|---|---|
| Jana | 1 | Also ich hab das Ganze jetzt verstanden. Aber ich hab’s falsch gemacht. [10] |
| | 2 | Das Video war jetzt, hab ich jetzt richtig verstanden, weil es- das geklärt ist von zehn, zwanzig, dreißig und so weiter |
| IL | 3 | Mhm |
| Jana | 4 | Ich hab’s ganz einfach mit äh 93 und so weiter gemacht. <zeigt auf eigen Rechnung> |
| | 5 | Dann mal-und mal gemacht dazu. |

**Abb. 3: Janas Äußerungen im Anschluss an das Video**

Während des Videos sprach Jana nicht. Erst im Anschluss äußerte sie sich. Dabei kommt sie zu der Erkenntnis, dass ihr eigener Lösungsweg falsch ist. Sie kann benennen, was sie selbst getan hat (s. Zeile 4 und 5). Den Erklärungen im Video konnte sie anscheinend folgen und der Lösungsweg hat sie überzeugt.

## Fazit und Ausblick

Die ersten Äußerungen von Schülern auf fremde Problemlöseprozesse sind sehr verschieden und weisen dennoch Gemeinsamkeiten auf. Sie sind entweder bewertend („Sie macht das komisch“) oder haben eher identifizierenden Charakter („Eigentlich hat sie es schon richtig gemacht, aber dann hat sie nur falsch ausgerechnet“). Weiterhin sind die bisher interviewten Schüler in der Lage, den fremden und den eigenen Problemlöseprozess in Verbindung zueinander zu setzen. Dabei sind sie zum Teil aber auf die Impulse durch den Interviewleiter angewiesen. Somit zeigt sich, dass Grundschüler am Ende der Primarstufe durchaus zu Reflexionen in der Lage sind, diese aber möglicherweise von außen angeregt werden müssen.

Der Ansatz zur Anregung von Reflexionen beim Problemlösen mit Hilfe von Problemlösevideos wird daher als vielversprechend erachtet und in einer größer angelegten Studie wird den Forschungsfragen genauer nachgegangen.

## Literatur


Kluwe, R./Schiebler, K. (1984). Entwicklung exekutiver Prozesse und kognitive Leistung In Weinert, F./ Kluwe, R. (Hrsg.). Metakognition, Motivation und Lernen (S. 31 – 60). Stuttgart: Kohlhammer

Krammer, K./Reusser, K. (2005). *Unterrichtsvideos als Medium der Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen*. In Beiträge zur Lehrerbildung, 23 (1), S. 35 – 50

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL.: Academic Press

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Rott, B. (2013). Mathematisches Problemlösen. Münster: WTM

Schoenfeld, A. (1987). *What‘s all the Fuss about metacogntition?* In: Schoenfeld, A.: Cognitive science and mathematics education (S. 189 – 215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Zimmermann, B. (2008). How to understand mathematical problem solving processes. In Fritzlar, T. (Hrsg.), *Problem Solving in Mathematics Education* (S. 181 – 190). Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Eva MÜLLER-HILL, Köln

# Zentrale mathematische Ideen in der Lehramtsausbildung – Ein explizit-reflexiver Ansatz

## 1. Zentrale Ideen als Dimension von Erklären im MU

Erklären ist ein wesentliches Element des Mathematikunterrichtes. Ausgehend von einer Typisierung von Erklären in Erklären-warum vs. Erklären-wie und –was geht es im Folgenden um eine „Dimension" des Erklären-warum, und zwar sowohl unter der Perspektive von Sachverhaltserklärungen als auch von Handlungserklärungen. Gemäß einer Reihe von vor allem wissenschaftstheoretisch fundierten, normativen Konzepten von Sachverhaltserklärungen-warum, die an (normative) Konzepte des alltäglichen Erklärens anschließen und auch unter didaktischer Perspektive fruchtbar gemacht werden können (vgl. Müller-Hill 2012), besteht ein wesentliches Kriterium für ein gutes Explanans darin, dass es nicht nur das konkret gegebene Explanandum subsumiert, sondern auch eine möglichst große Breite ähnlicher Explananda. Zentrale mathematische Ideen – im Sinne von Jerome Bruners „fundamental ideas" verstanden – stellen daher einerseits mögliche Kandidaten für eine inhaltliche Erklärbasis im Mathematikunterricht dar:

> The more fundamental or basic is the idea [...], almost by definition, the greater will be its breadth of applicability to new problems. Indeed, this is almost a tautology, for what is meant by "fundamental" in this sense is precisely that an idea has wide as well as powerful applicability. (Bruner 1960, S. 18)

Sie stellen andererseits – im Sinne der weiteren Explikation und Entwicklung des Konzepts der zentralen und übergeordneten universellen Ideen in der didaktischen Diskussion im Anschluss an Bruner – auch eine mögliche Basis für inhaltlich motivierte Handlungserklärungen in Bezug auf mathematisches Handeln dar. Die Relevanz solcher Handlungs- oder auch Motiverklärungen kann durch Äußerungen wie „Jetzt habe ich den Beweis/ Lösungsweg verstanden, aber wieso setzt man das so an? Da wäre ich nie selbst drauf gekommen!" illustriert werden. Für den Mathematikunterricht ist es demnach auch wesentlich, zu erklären, warum ein bestimmter Lösungsweg oder Ansatz gewählt wird oder warum eine bestimmte Sichtweise, Definition etc. sinnvoll ist.

In welchem Sinne von „zentrale mathematische Ideen" (ZIs) diese potentiell inhaltlich handlungsleitend sein können, ist ob der Breite und des Facettenreichtums der bereits vorhandenen Begriffsbestimmungen rund um das Konzept der zentralen Ideen nicht einfach  und präzise zu beantworten. Ei-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 835–838). Münster: WTM-Verlag

nige Zitate aus der bisherigen Debatte weisen jedoch deutlich eine handlungsorientierte Ausrichtung auf. Demnach sind zentrale Ideen etwa:

> Metakonzepte, d.h. Bündel spezifischer Handlungen, Strategien, Techniken und Zielvorstellungen sowie lokaler Subkonzepte (Grundvorstellungen, Heuristiken etc.) (Vohns 2007, S. 87, in Anlehung an Peschek)

oder

> allgemeine Schemata, die im Prozess der Mathematik eingesetzt werden, die diesen Prozess in Gang setzen oder weiter treiben (wichtige Methoden, Beweisideen, Theoreme, Begriffskonstruktionen etc.). (Bruner, interpretiert von Schreiber (2011, S. 64) mit Bezug auf Wittmann)

Dabei wird „Schema“ nach Wittmann (ebd.) gerade als ein kognitiv integriertes, flexibel organisiertes, kohärentes, adaptierbares Reflex- , Denk-, Beschreibungs- oder Erklärungsmuster verstanden, das individuelle Aktivitäten steuert.

Im Folgenden geht es nicht um eine weitere Begriffsbestimmung von „zentraler mathematischer Idee“. Ausgehend von nachfolgend formulierter These und der damit verbundenen Perspektivenverengung auf spezifische Aspekte zentraler Ideen als Basis für Motiverklärungen in Bezug auf das Mathematiktreiben wird dafür argumentiert, zentrale Ideen explizit in der Lehramtsausbildung zu thematisieren und als Reflexionsanlass über individuell handlungsleitende mathematische Metakonzepte zu nutzen.

> **These und Perspektivenverengung**
>
> Die Beschäftigung mit zentralen mathematischen Ideen schafft für Lehrende eine Basis für inhaltlich motivierte Handlungserklärungen, denn ZIs liefern u.a. eine Kategorisierung spezifischer mathematischer Problemtypen (Approximationsproblem, Räumliches Strukturierungsproblem, Messenproblem, symmetrisches Problem … ) und der zugehörigen charakteristischen Lösungsprozesse.

## 2. Thematisierung von ZIs in der Lehramtsausbildung

Als übergeordnete Zielrichtung einer expliziten Thematisierung von Konzepten zentraler mathematischer Ideen sowie einzelner Kataloge wurde bereits von Bruner die Authentizität der Lehrenden eingefordert. Bruner sieht die Lehrenden als „dramatisierende Hilfsmittel“ des Unterrichts, die durch dramatisches Vorleben und eigene Begeisterung für bestimmte ZIs die Identifikation der SchülerInnen mit diesen fördert, und betont die dafür notwendige Qualität der Lehrerbildung.

Um Authentizität zu erreichen, müssen diese Ideen nach Bruner intellektuell redlich stoffbezogen thematisiert werden. Darüber hinaus wird im Folgenden die Ansicht vertreten, dass *potentiell handlungsleitende* individuelle Konzepte zentraler mathematischer Ideen stets auch an die eigenen Einstellungen und Auffassungen zur Mathematik, sowohl allgemeine als auch spezifisch inhaltsbezogene, geeignet „andocken“ können müssen.

Ein Blick in benachbarte NAWI-Didaktiken zeigt, dass dort bereits eine Reihe von Ansätzen für den möglichen Umgang mit curricular relevanten Metakonzepten im Rahmen der Lehramtsausbildung existieren. Ein solches Metakonzept ist „nature of science“ (NOS), welches aber, anders als ZIs als stärker inhaltsbezogene Metakonzepte, ein Bündel stärker prozessbezogener Subkonzepte darstellt (z.B. Theoriegeladenheit naturwissenschaftlicher Beobachtung, empirischer und vorläufiger Charakter naturwissenschaftlicher Theorien). Prominente neuere Ansätze zu „learning to teach NOS“ (z.B. Akerson et al. 2000) können dabei als *explizit-instruktiv* charakterisiert werden. Ohne hier auf die Details eingehen zu können, kann man bilanzieren, dass diese Ansätze weniger auf Authentizität und flexibles Reflexionswissen zielen, sondern auf eine „geschlossene“ Reflexion nach mehr oder weniger genauer Instruktion.

Das hier abschließend kurz umrissene Seminarprojekt zu zentralen mathematischen Ideen verfolgt ein stärker *explizit-reflexiven* Ansatz. Explizit insbesondere in dem Sinne, dass es um eine explizite Thematisierung von ZIs an fortgeschrittenen Inhalten und Schulstoff sowie einen expliziten Schritt von der didaktischen Theorie bis in die Schulpraxis geht. Reflexiv vor allem im Sinne einer methodischen Reflexion zum Schritt in die Praxis, sowie offener und kritischer inhaltlicher Reflexion, die das persönliche Infragestellen von Ideen-Katalogen und die Frage nach der subjektiven Sinnhaftigkeit des Konzepts „zentraler mathematischer Idee“ fördert.

## 3. ZILB – Ein Seminarprojekt im Rahmen des Praxissemesters

Das Seminarprojekt „ZILB: Zentrale mathematische Ideen in der LA-Ausbildung“ wird an der Universität zu Köln seit dem Wintersemester 2012/13 pilotiert und wurde im WS 13/14 erstmalig als reguläres fachdidaktisches Seminar durchgeführt. Aufgrund seiner inhaltlichen Ausrichtung eignet es sich als mögliches Seminarformat im Rahmen des Praxissemesters, weshalb das Projekt vom Zentrum für LehrerInnenbildung der Universität zu Köln gefördert wird.

Ziel ist die Entwicklung eines fachdidaktischen Seminars zu didaktischen Konzepten von und Beispielen für zentrale Ideen auf „intellektuell redlichem“ fachwissenschaftlichen Niveau, hier konkret am Thema „Affine synthetische Geometrie“ in Bezug auf die spezifischen ZIs Messen und Passen. Ziel ist weiterhin die konkrete und didaktisch reflektierte Praxisarbeit in direkter Zusammenarbeit mit SeminarleiterInnen und Fachlehrkräften. Hierzu werden von den TeilnehmerInnen des Seminars Diagnosetest-, Unterrichts- und Lernreihenkonzeptionen entwickelt, die auch exemplarische in ein oder zwei Hospitationsklassen durchgeführt und später gemeinsam reflektiert werden (etwa zum Thema „Einführung des Flächeninhalts“). Hier bietet sich ein natürlicher Schnittpunkt mit dem sogenannten forschenden Lernen im Praxissemester.

Seminarintegriert wird eine qualitative Begleitstudie durchgeführt, bestehend aus problemzentrierten narrativen, qualitativen Interviews insbesondere zur eigenen Lernbiographie und zu inhaltsbezogenen mathematischen Kernideen (i.S.v. Ruf & Gallin 2005) im Vorfeld des Seminars. Seminarbegleitend wird mit Videographie z.B. von Gruppendiskussionen sowie einer Evaluation via ILIAS-Lerntagebuch gearbeitet. Letzteres umfasst für die Studierenden auch eine Einführung in das reflexive Schreiben zu Beginn des Seminars.

## 4. Ausblick: Auswertung der evaluativen Begleitstudie

Die Begleitstudie wird zur Zeit mit Mitteln der Grounded Theory Methodologie (vgl. z.B. Mey et al. 2011) ausgewertet. Unterschiedliche Phänomenbereiche, zu denen in einem ersten Schritt ein offenes Kodieren stattfindet, sind zunächst Reflexionsprozesse und -niveaus von angehenden LuL in Bezug auf eigene Lernbiographie sowie fachwissenschaftliche und fachdidaktische Inhalte, motivationale Aspekte und Erwartungen in Bezug auf die fachdidaktische Ausbildung im LA-Studium sowie das Erleben und Werten der universitären Lehre allgemein und dem speziellen Seminar hinsichtlich „reflexionsbetont“ vs. „instruktiv“.

## Literatur


Akerson, V.L. et al. (2000). Influence of a Reflective Explicit Activity-Based Approach on Elementary Teacher's Conceptions of Nature of Science. Journal of Research in Science Teaching, 37 (4), 295-317.

Bruner, Jerome S. (1960). The Process of Education. 2nd Ed. Cambridge: Harvard UP, 1977.

Mey, G., Mruck, K. (Hrsg.) (2011). Grounded Theory Reader. 2. akt. u. erw. Aufl. Wiesbaden: VS.

Müller-Hill, E. (2012). Ein handlungsbasiertes Konzept mathematischer Erklärung. Beiträge zum Mathematikunterricht, 617-620.

Ruf, U., Gallin, P. (2005). Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1 u. 2. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Schreiber, A. (2011). Begriffsbestimmungen. Berlin: Logos.

Vohns, A. (2007). Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Norderstedt: BoD.

Melanie MÜNZ, Frankfurt am Main

# Mathematisch kreative Prozesse im Kindergartenalter

Im Beitrag werden mathematisch kreative Prozesse von Kindergartenkindern beschrieben. Die Daten entstammen aus dem Projekt MaKreKi (IDeA Zentrum Frankfurt), welche mittels Methoden der Interpretativen Unterrichtsforschung (Brandt & Krummheuer, 2001) analysiert werden.

In vielen Disziplinen gilt das kindliche Spiel(en) als Ursprung von Kreativität. Aus soziokultureller Perspektive wird das Spiel als Ort der Genese mathematischer Denkentwicklung angenommen und damit auch implizit als Ort der Genese mathematischer Kreativität. Die Psychoanalyse betont ebenso, dass das Kind nur beim Spielen frei ist, um schöpferische tätig zu werden. Spielen vollziehe sich in einem Spannungsbereich zwischen Individuum und Umwelt, dem sogenannten „potentiellen Raum“ (Winnicott, 1973, S.116), welcher besonders durch das Vertrauen des Kindes in seine Bezugspersonen und deren Vertrauenswürdigkeit geprägt sei.

## Interaktionale Nische mathematischer Kreativität (NMK)

Obige Ausführungen zeigen, dass eine Beschreibung frühkindlicher mathematisch kreativer Prozesse die mathematischen Denkentwicklung und die kindlichen Entwicklung berücksichtigen sollte. Dazu eignet sich die „interaktionale Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD) von Krummheuer (Krummheuer & Schütte, 2014), welche hinsichtlich des Forschungsbestrebens modifiziert wurde. Dieser sozialkonstruktivistische Ansatz fasst die kulturellen Ressourcen zusammen, die einem Kind in seiner Entwicklung bereitgestellt werden (**Allokation**). Diese führen in der konkreten Situation zu interaktiven Bedeutungsaushandlungen zwischen den beteiligten Akteuren (**Situation**), welche dem einzelnen Kind Gelegenheiten ermöglichen, mathematisch kreative Handlungen zu realisieren (**individuelle kreative Handlung**). Neben diesen Aspekten sind außerdem drei Komponenten in mathematisch kreativen Prozessen von besonderer Relevanz: die **inhaltliche**, die **kooperative** und die **Beziehungskomponente**:

**Inhalt**: Im MaKreKi Projekt nehmen die Kinder an mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen (Vogel, 2013) teil. Jede Situation hat ihren konzeptionellen Ursprung in einem der fünf mathematischen Bereiche, erlaubt aber auch Ausflüge in andere Bereiche. Die Situation wird von einer erwachsenen Begleitperson durchgeführt, die mittels sparsam gesetzter Impulse einen Gesprächsanlass initiiert, in welchem die Kinder ihr mathematisches Potential zum Ausdruck bringen können. Innerhalb der interaktiven Bedeutungsaushandlung zwischen den Beteiligten kann jedes einzelne

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 839–842). Münster: WTM-Verlag

Kind mathematisch kreative Handlungen realisieren oder dazu beitragen. Die Handlungen zeichnen sich durch eine Kombination, divergent vom Kanonischen (erwarteten) aus (vgl. Münz, 2014). Diese ist adaptiv, das heißt sie ist angemessen mathematisch begründet (vgl. Münz, 2014).

**Kooperation**: Den Kindern werden spezifische Settings bereitgestellt, in denen es mathematisch agieren kann. Im MaKreKi Projekt werden die mathematischen Spiel-und Erkundungssituationen in der Kindertagesstätte in Zweier-oder-Vierergruppen angeboten. Auf situationeller Ebene werden unterschiedliche Sozialformen und für die Kinder spezifische Partizipationsspielräume realisiert (Brandt & Krummheuer, 2001).

**Interpersonelle Beziehungen**: In Anlehnung an Winnicotts Konzept der „genügend-guten Mutter" (Winnicott, 1973, S.95), welches als Voraussetzung für die Emergenz des „potentiellen Raums" (ebenda, S.116) gilt, beschreibt diese Komponente die Beziehungsqualität zwischen Kind und dessen Bezugsperson, welche sich im Bindungsmuster ausdrückt (Bowlby, 1969). Dies enthält die frühen Bindungserfahrungen, welche das Kind veranlassen das Verhalten der Bezugsperson zu interpretieren, um ihr Verhalten in anderen Situationen vorhersehen zu können. Es wird zwischen sicheren und unsicheren Bindungen unterschieden. Sicher gebundene Kinder haben dank ihrer sensiblen Bezugsperson die Möglichkeit, eine sichere Beziehung zu Ihr aufzubauen in welcher sie das ganze Spektrum von menschlichen Gefühlen im Sinne von Kommunikation miteinander erfahren und ausdrücken. Unsicher gebundene Kinder erfahren eine Bezugsperson, die entweder keine intensiven Affekte zeigt und sich eher distanziert oder inkonsistent verhält (z.B. in vergleichbaren Situationen ablehnend oder überbeschützend), d.h. insgesamt ist ihr Verhalten für das Kind nicht vorhersehbar. Obgleich dieses Muster auf der allokativen Ebene als relative stabil angesehen werden kann, kann dieses variieren, sobald das Kind mit anderen Personen interagiert (z.B. Geschwistern, Erzieherinnen, Peers). So kann ein Kind mit einem unsicheren Bindungsmuster auf der situationellen Ebene auf Personen treffen, die sensibel auf dessen Bedürfnisse im Sinne eines „genügend-guten Partners" reagieren und somit dessen Potential für Kooperation oder mathematisch kreative Aktivitäten erhöhen. Der Umkehrschluss ist ebenso denkbar. Auf der Ebene der kreativen Handlung wird der „genügend-gute Partner" die individuellen Beiträge des Kindes zum mathematischen Prozess akzeptieren.

### Viktoria & Sina in der Situation „Körper"

Sina, 4;6 Jahre, Viktoria 4;10 Jahre und eine erwachsene Begleitperson (im folgenden B abgekürzt) nehmen an der mathematischen Spiel-und Erkundungssituation „Körper“ teil. Beide Kinder verfügen über ein sicheres Bindungsmuster. Die Kinder können in dieser Situation Erfahrungen mit Körpern und deren Eigenschaften sammeln. Diese sind: Pyramide, Zylinder, Kegel, Würfel jeweils in zweifacher Ausführung. Um ihre Aufmerksamkeit auf die Eigenschaften der Körper zu lenken, wird außerdem ein Fühlsäckchen verwendet. Die Kinder haben die Körper befühlt und mit Namen belegt: Der Kegel wurde als Hut und Burg bezeichnet, der Würfel als Würfel, die Pyramide als Kornflake und der Zylinder als Kreisel.

B versteckt für die Kinder nicht sichtbar einen Zylinder im Fühlsäckchen und stellt Würfel, Pyramide, Zylinder und Kegel in die Mitte des Tischs. Sina fragt, ob sie eine Burg bauen sollen, welches B verneint. Sie fordert erst Viktoria und dann Sina dazu auf, das Säckchen zu befühlen um herauszufinden, welcher Körper sich darin befindet. Sie merkt an, dass dieser Körper auch auf dem Tisch stehe. Viktoria und Sina sollen ihre Lösung zunächst für sich behalten, jedoch sagt Viktoria sofort: „Kreisel“, welches von B mit einem: „Schhhh...“ kommentiert wird. Dann fordert sie Sina auf, das Säckchen zu befühlen. Sina antwortet: „Auch ein Kreisel“. Sodann fokussieren beide Mädchen Sinas Idee des Burgbauens. Sie stellen verschiedene Körper aufeinander. Dabei stellt sich Viktoria die Frage, ob Pyramide oder Kegel größer sind: „Soll ich mal das gelbe holen?“ und Sina antwortet: „Okay. Gut. Komm.“ Viktoria erwidert: „Dann können wir sehen, welches größer ist.“ Daraufhin stellt Viktoria Kegel und Pyramide direkt nebeneinander. Kurz darauf nimmt Sina den Kegel und stellt ihn auf den Zylinder und nimmt die Pyramide und stellt sie auf den Würfel. Dies kommentiert Viktoria: „Oder Sina weißt du was? Die gehören zusammen“, dabei hält sie den Würfel-Pyramiden-Turm in den Händen. „Und diese gehören zu diesen“, dabei deutet sie auf die Spitze des Kegels. B fragt Viktoria nach einer Begründung für ihre Zuordnung, woraufhin Sina antwortet: „Das ist rot und rot.“ Dabei zeigt sie auf den Würfel-Pyramiden-Turm. Viktoria ergänzt diese Lösung mit dem Hinweis, dass Kegel und Zylinder sowie Pyramide und Würfel die gleiche Grundfläche haben: „Ja weil und schau’ und das gehört zum Kreisel“, zeigt dabei auf die Kegelgrundfläche, „weil das ein Kreisel ist.“

### Erste Ergebnisse: Viktorias NMK

**Inhalt**: Auf der allokativen Ebene wird den Kindern ein geometrischer Inhalt präsentiert. B initiiert eine Aufgabe, bei der die Kinder identische Körper identifizieren sollen. Auf situationeller Ebene wird eine Erweiterung des mathematischen Inhalts vorgenommen: Burgen bauen (Sina); direkte Größenvergleiche (Viktoria); Zuordnung ähnlicher Körper (Viktoria). In diesem Zusammenhang begründet Viktoria ihre Zuordnung bzw. Kombination mit mathematisch fundierten Einsichten (gleiche Grundfläche). Diese Kombination divergiert von der von B initiierten Aufgabe. Somit kann diese Handlung Viktorias als mathematisch kreativ gedeutet werden.

**Kooperation**: Während zunächst nur B Aufgaben stellt bzw. initiiert, welche die Mädchen lösen, ändern sich deren Partizipationsspielräume im Verlauf der Situation. Beide Mädchen initiieren Aufgaben und lösen diese, welches zu der erwähnten Erweiterung des mathematischen Inhalts führt. Sina baut einen Zylinder-Kegel- und einen Würfel-Pyramide-Turm und Viktoria ordnet diese Körper aufgrund ihrer gemeinsamen Grundfläche einander zu, sie ist somit Kreator dieser mathematischen Begründung (Brandt & Krummheuer, 2001).

**Interpersonelle Beziehungen**: Gemäß ihres sicheren Bindungsmusters zeigen beide Kinder kooperative Strategien. Viktoria unterstützt Sina in ihrem Wunsch, Burgen zu bauen. Auch Sina reagiert sensibel auf Viktorias Bedürfnisse, z.B. bei der Frage nach dem größeren Körper („Okay. Gut. Komm.“). Die Änderung von Bs kommunikativer Rolle vom Initiator zum Moderator führt im Prozess der mathematischen Auseinandersetzung mit den Körpern zu autonomeren Partizipationsspielräumen beider Kinder, woraufhin Viktoria eine mathematisch kreative Handlung realisier. Obwohl beide Kinder unterschiedliche Begründungen für die Zuordnung besagter Körper nennen, scheinen beide akzeptiert. Viktoria präsentiert ihre Erklärung als Erweiterung von Sinas Äußerung („Ja weil und...“).

## Literatur


Bowlby J. (1969). Attachment. Attachment and loss (Vol. 1). New York: Basic Books.

Brandt, B. & Krummheuer, G. (2001). *Paraphrase und Traduktion: Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule.* Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Krummheuer, G. & Schütte, M. (2013). *Das Wechseln zwischen mathematischen Inhaltsbereichen – Eine Kompetenz, die nicht in den Bildungsstandards steht.* Manuskript eingereicht zur Publikation.

Münz, M. (2014). *Non-canonical solutions in children-adult interactions: A case study of the emergence of mathematical creativity*. In C. Benz, B. Brandt, U. Kortenkamp, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Eds.), *Early mathematics learning,* 125-146. New York: Springer.

*Vogel, R. (2013). Mathematical situations of play and exploration. Educational Studies in Mathematics, 84(2),* 209-226. *Doi: 10.1007/s10649-013-9504-4*

Winnicott, D. (1973). Vom Spiel zur Kreativität. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Sebastian MUNGENAST, Würzburg

# Ein Modell zur Beschreibung metakognitiver Aspekte beim mathematischen Begriffsverständnis

Im Rahmen des gleichnamigen Promotionsprojektes wurde ein Modell entwickelt, das den Metakognitionsbegriff in drei Komponenten gliedert, die für das Lernen und Anwenden von Mathematik – dabei besonders im Bereich des Begriffsverständnisses – von Bedeutung sind.

Diese Komponenten sollen im Rahmen einer empirischen Untersuchung sowohl eigenständig, als auch in Wechselbeziehung zueinander untersucht und ihre Auswirkungen auf mathematische Performanz im Bereich der Grundbegriffe der Analysis anhand eines Leistungstests erhoben werden, um somit die Tragfähigkeit des entwickelten Modells zu überprüfen.

Da auf mathematischer Seite der Bereich der Analysis – und dabei speziell der Ableitungsbegriff – im Mittelpunkt stehen, bieten sich Schülerinnen und Schüler ab der zehnten Klassenstufe des Gymnasiums als Zielgruppe für eine Untersuchung an.

Eine vielfach diskutierte Frage in der Mathematik-Didaktik ist die nach Umfang und Strenge der Behandlung des Grenzwertbegriffs und in Folge dessen auch des Ableitungsbegriffs (vgl. etwa Weigand 1993, Danckwerts & Vogel 2006). Dies betrifft beispielsweise die Integration verschiedener Sichtweisen des Begriffs (so z.B. als Grenzwert des Differenzenquotienten, geometrisch als Steigung der Tangenten oder als momentane Änderungsrate und physikalisch als Geschwindigkeit) und deren Zusammenhänge, sowie allgemein die Frage, welche Bedeutung für den Lernenden stärker intuitive Zugänge im Vergleich zu formalen Konzepten haben, bzw., wie beide Herangehensweisen sich verbinden lassen. Es ergibt sich insbesondere die Frage, wie Schülerinnen und Schüler sich dieser unterschiedlichen Aspekte bewusst sein können (vgl. etwa Weigand 1993).

Unabhängig von konkreten mathematischen Begriffen sollten im Umgang mit Mathematik darüber hinaus ein Bewusstsein für den eigenen Lernfortschritt und eigene Stärken und Schwächen entwickelt werden, sowie die Fähigkeit, entsprechend zu handeln und sich fehlende Informationen und Methoden eigenständig zu erarbeiten.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 843–846). Münster: WTM-Verlag

Kenntnisse wie die genannten lassen sich dem Bereich der Metakognition – Wissen über eigenes Wissen und eigene Fähigkeiten – zuordnen (vgl. etwa Flavell, Miller & Miller 2002).

Unter „Metakognition" werden im Allgemeinen Wissen über eigene kognitive Vorgänge sowie die Fähigkeit, diese zu überwachen und zu regulieren, verstanden. Eine mögliche Unterscheidung in der Psychologie ist hierbei die zwischen deklarativem, prozeduralem und konditionalem Metawissen (Veenman 2012).

In dem vorliegenden Modell wurden drei Kategorien/Komponenten identifiziert, die das Wirken von Metakognition im Bereich der Mathematik beschreiben.

Ausgehend von der ursprünglichen – sehr allgemeinen – Definition des Metakognitionsbegriffs als „Wissen über Gedächtnis", bzw. über Wissen (Flavell 1976) wird hier ebenfalls eine Definition gewählt, die den Begriffsumfang über die Anteile Planung, Steuerung und Reflexion hinaus um eine **„fachbezogene" Komponente** erweitert, die im Wesentlichen für „Wissen/Denken über Fachwissen" und daraus abzuleitende Konsequenzen für den Umgang mit diesem steht.

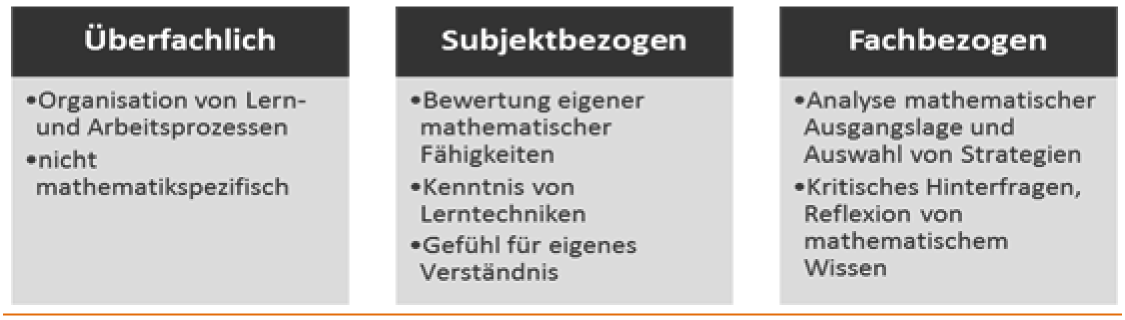
Hierbei geht es vor allem um die Reflexion über Begriffe und ihre Zusammenhänge. Metakognition besteht hier darin, sich bewusst und kritisch mit entsprechenden Inhalten auseinanderzusetzen, „gedankliche Konflikte" als solche zu erkennen und eigene Vorstellungen zu entwickeln, zu hinterfragen und zu erweitern. Es geht darum, Antworten zu finden, die einem Bedürfnis nach Verständnis gerecht werden, dabei insbesondere die Wechselbeziehung zwischen Formalismus und intuitiven Vorstellungen aufzeigen, sich also nicht in der formal-logischen Richtigkeit mathematischer Aussagen erschöpfen.

Metakongnitive Aspekte sollen insbesondere im Rahmen des Begriffslernens (Stufenschema nach Vollrath 1984) untersucht werden, da Begriffe den Kern des mathematischen Denkens darstellen (siehe etwa Wittenberg 1957). Der Prozess der Begriffsbildung lässt sich in einem Stufenschema zum Begriffsverständnis darstellen, wobei sich das Begriffsverständnis über ein intuitives, inhaltliches, integriertes und kritisches Begriffsverständnis entwickelt (Vollrath 1984).

Metakognitive Fähigkeiten lassen sich vor allem mit der Stufe des Kritischen Begriffsverständnisses identifizieren. Dies bedeutet die bewusste, kritische Auseinandersetzung mit den eigenen Kenntnissen und Kompetenzen, die durch die anderen Stufen des Stufenschemas beschrieben werden. Metakognition zeigt sich hierbei in der Tendenz, über fachliche Inhalte und eigenes Wissen nachzudenken und über im Unterricht erworbene Fachkenntnisse hinaus Fragen zu stellen, die diese Kenntnisse erweitern und vertiefen können; des Weiteren darin, für mathematische Sachverhalte eigene Vorstellungen zu entwickeln, indem nach Möglichkeiten gesucht wird (durch Reflexion), diese aus anderem Blickwinkel zu betrachten.

Auf einer teils überfachlichen Ebene steht die **subjektbezogene Komponente**, bei der es um die Fähigkeit zur Selbsteinschätzung geht. Metakognition besteht hierbei im Wissen um eigene Stärken und Schwächen (in Bezug auf die Mathematik), der Beurteilung der eigenen „Kompetenz“, sowie der gezielten Suche nach Verständnismängeln und der Fähigkeit, selbstständig Möglichkeiten zu deren Überwindung zu finden und zu entwickeln.

Bei der **überfachlichen Komponente** geht es um die übergeordnete Steuerung von Prozessabläufen – z.B. Arbeits-, Lernprozesse, Klausurvorbereitung, Organisation von Projekten. Unter Einbeziehen der bereits erwähnten Komponenten und diesbezüglicher Informationen werden hierbei (längere) (geistige) Prozesse geplant, überwachend begleitet (Monitoring) und im Anschluss reflektiert und beurteilt. (vgl. etwa Cohors-Fresenborg 2001)




Zur Stützung des entwickelten Modells ist eine empirische Untersuchung angedacht, die in der nächsten Phase des Projekts entwickelt werden soll.

Überlegungen hierzu sind bisher vor allem im Bereich der fachbezogenen Komponente angestellt worden.

Zur Evaluation der fachbezogenen Komponente ist es geplant, eine Sammlung von Aufgaben mit zugehörigen Musterlösungen zu erstellen, die von Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Dabei soll die jeweils vorliegende Aufgabe mit Lösung analysiert und erläutert werden, Ungenauigkeiten und Fehler in der Lösung erkannt und problematisiert/korrigiert werden, sowie die (möglichen) Denkschritte und -fehler der Verfasserin/ des Verfassers interpretiert werden. Damit soll untersucht werden, inwieweit Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, mathematische Texte zu lesen und zu entscheiden, ob diese für sie Sinn ergeben, ob also ein Bewusstsein für Folgerichtigkeit und Plausibilität der vorliegenden Lösung und das eigene Verständnis besteht; außerdem die Fähigkeit, die Gedanken einer anderen Person nachzuvollziehen und deren Strategien (Fehl-)Vorstellungen zu erkennen. (s. auch Grotzer & Mittlefehldt 2012)

Zum Feststellen planerischer, überwachender und reflektorischer Tätigkeiten sind dabei entsprechende Schlüsselbegriffe zu beobachten. (vgl. etwa Cohors-Fresenborg 2007)

Im Anschluss an die genannten Untersuchungen soll ein Leistungstest durchgeführt werden, um zu klären, inwieweit sich Auswirkungen metakognitiver Aktivität auf die Performanz im fachwissenschaftlichen Bereich feststellen lassen.

## Literatur


Cohors-Fresenborg, E. (2001). Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht, 2001,* 145-148. Hildesheim: Franzbecker

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile. In: Peter-Koop, A., Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.): *Mathematische Bildung – Mathematische Leistung*, (S.233 – 248). Hildesheim: Franzbecker.

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006), *Analysis verständlich unterrichten*, München

Friedrich, H. (2001). Eine Kategorie zur Beschreibung möglicher Ursachen für Probleme mit dem Grenzwertbegriff. In: *Journal für Mathematik-Didaktik 22,* 207-230

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive Aspects of problem solving. In: Resnick, L.B. (Hrsg.). *The nature of intelligence* (S. 231-235). Hillsdale: Erlbaum

Grotzer, T., Mittlefehldt, S. (2012). The Role of Metacognition in Students' Understanding and Transfer of Explanatory Structures in Science. In: Zohar, A., Dori, Y.J. (Hrsg.). *Metacognition in Science education: Trends in Current Research*, 79-99, Contemporary Trends and Issues in Science Education 40. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer

Veenman, M.V.J. (2012). Metacognition in Science Education: Definitions, Constituents, and Their Intricate Relation with Cognition. In: Zohar, A., Dori, Y.J. (Hrsg.). *Metacognition in Science education: Trends in Current Research*, 21-36, Contemporary Trends and Issues in Science Education 40. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett

Weigand, H.-G. (1993). *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*, Überarbeitete Habilitationsschrift. Mannheim: BI

Wittenberg, A. I. (1957). *Vom Denken in Begriffen*. Birkhäuser

Kathrin NAGEL, Florian QUIRING, Kristina REISS, Oliver DEISER, Andreas OBERSTEINER, München

# Unterstützungsmaßnahmen an der Schnittstelle Schule-Hochschule

## 1. Übergangsproblematik

Der Übergang von der Schule an die Hochschule bereitet vielen Studierenden der Mathematik große Schwierigkeiten. Gründe hierfür sind vor allem die Unterschiede zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sowohl in methodischer als auch in inhaltlicher Hinsicht (Reichersdorfer, Ufer, Lindmeier & Reiss, 2014). Beispiele sind ein höherer Abstraktionsgrad und Formalismus sowie das selbstständige Arbeiten an der Universität. Mathematische Inhalte werden ferner kaum explizit mit Schulmathematik verknüpft (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies & Wickel, 2011), weswegen die universitäre Mathematik oft als losgelöst vom bereits bekannten Schulstoff wahrgenommen wird (siehe bereits Klein, 1908). Ferner bereitet es Studienanfängern oft Probleme, das eigene Lernverhalten und die eingesetzten Lernstrategien an die neuen Umstände der Hochschule anzupassen.

Lernpsychologische Auswirkungen dieser Übergangsphase können sinkende Motivation und niedriges Leistungsselbstkonzept sein. Diese und die daraus resultierenden Misserfolge können zu einem Abbruch des Studiums oder zu einem Fachwechsel führen (Fellenberg & Hannover, 2006).

## 2. Ansätze zur Unterstützung in der Studieneingangsphase

Als Reaktion auf diese Problematik wurden an einigen Universitäten und Hochschulen Brückenkurse für verschiedene mathematische Studienfächer eingeführt, die meist vor dem ersten Semester stattfinden und einen leichteren Einstieg in das Mathematikstudium ermöglichen. Neben solchen Kursen gibt es Projekte, die Studierende am Übergang an die Hochschule unterstützen sollen. Die Projekte „Mathematik Neu Denken“ an den Universitäten Gießen und Siegen (Beutelspacher et al., 2011) oder „LIMA“ an den Universitäten Paderborn und Kassel (Biehler, Eilerts, Hänze & Hochmuth, 2010) sind Beispiele für erfolgreiche Unterstützungsmaßnahmen an der Schnittstelle Schule-Hochschule.

Auch die TUM School of Education an der Technischen Universität München entwickelte Veranstaltungen, die sich speziell an Lehramtsstudierende im ersten Studienjahr richten. In diesem Beitrag wird über das Konzept dieser Veranstaltungen und erste Evaluationen berichtet.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 847–850). Münster: WTM-Verlag

## 3. Unterstützungsmaßnahmen an der TUM School of Education

Die TUM School of Education bietet neben mathematischen Brückenkursen seit dem Wintersemester 2010/11 spezielle Veranstaltungen für das Lehramt an Gymnasien an, die Ergänzungen genannt werden und in die mathematischen Grundmodule des ersten Studienjahres (Analysis, Lineare Algebra) integriert sind. Neben der unterstützenden Wirkung beim Übergang an die Hochschule optimieren die Ergänzungen die Lehrerausbildung durch spezielle Inhalte und Methoden.

Konkret werden vier Ziele verfolgt: Das Wiederholen mathematischer Grundbegriffe wie beispielsweise des Funktionsbegriffs und das Erlernen neuer Methoden wie etwa des Beweisens mittels Beweisschemata (Boero, 1999) sind Grundlagen für ein erfolgreiches Mathematikstudium. Ein erstes Ziel der Ergänzungen ist deshalb *Wiederholen mathematischen Basiswissens (1)*. Besonders für Studienanfänger stellt der steigende Grad an Formalismus eine Schwierigkeit dar. Daher kann eine explizite Verknüpfung von „concept image“ und „concept definition“, also das Verbinden abstrakter Konzepte mit anschaulichen Darstellungen (Vinner, 1991), für Studierende hilfreich sein. Daher wird in den Ergänzungen das *Verknüpfen von Anschauung und Definition (2)* betont. Um den Bezug zur Schulmathematik und zur späteren Lehrtätigkeit herzustellen, ist das *Aufzeigen von Verbindungen zur Schulmathematik (3)* ein weiteres Ziel. Als bedeutende Aspekte von Lehrerkompetenz (Krauss et al., 2008) werden die adäquate Verwendung von Fachsprache und das verständliche Erklären mathematischer Inhalte gesehen. Sie werden in dem Ziel *Fördern von mathematischer Kommunikation (4)* zusammengefasst.

## 4. Evaluation 1: Selbsteinschätzung der Studierenden

Ab dem Wintersemester 2012/13 wurden halbjährlich Fragebögen zur Evaluierung der Ergänzungen eingesetzt, in denen die Implementierung und Relevanz der Ziele der Ergänzungen aus studentischer Sicht abgefragt wurde. Abbildung 1 zeigt die Zustimmung der Studierenden zu den Zielen der Ergänzungen aus der Befragung am Ende des Sommersemesters 2013.

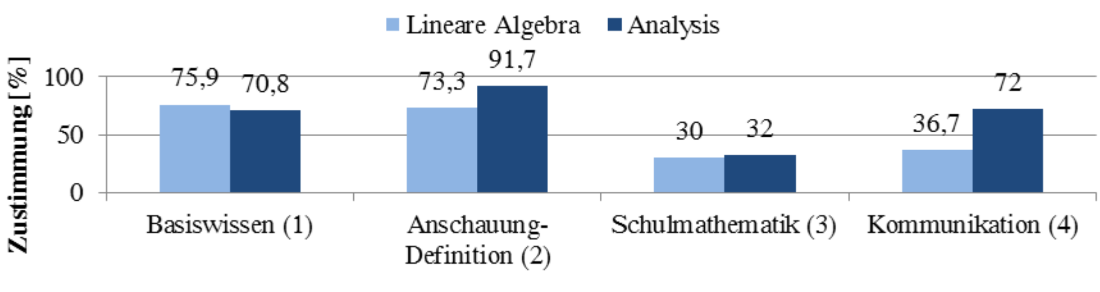



Abbildung 1: Zustimmung der Studierenden zu den Zielen der Ergänzungen

Die Umsetzung der Ziele in den Ergänzungen wurde von den Studierenden weitgehend positiv bewertet. Lediglich der Bezug zur Schulmathematik fand geringe Zustimmung, was sich wohl auf den Vorlesungsstoff des zweiten Semesters zurückführen lässt, der im Vergleich zum ersten Semester weniger Möglichkeiten zum Aufzeigen von (einfachen und offensichtlichen) Querverbindungen zur schulischen Mathematik bietet.

## 5. Evaluation 2: Leistungstest

Eine systematische Evaluation auf Leistungsebene gestaltete sich schwierig, da die Ergänzungen für alle Studierenden angeboten wurden und somit keine echte Kontrollgruppe existierte. Als Indikator kann aber ein Leistungstest dienen, der seit dem Jahr 2010 (d.h., vor Einführung der Ergänzungen im Wintersemester 2010/11) jeweils am Ende des ersten Studienjahres in identischer Weise durchgeführt wurde. Ein möglicher Einfluss der Ergänzungen auf studentische Leistungen sollte sich durch höhere Testergebnisse in den Jahren 2011 bis 2013 im Vergleich zu denen im Jahr 2010 zeigen. An den vier Messzeitpunkten (2010 bis 2013) nahmen 12, 14, 23, bzw. 16 Lehramtsstudierende im zweiten Semester teil. Die Aufgaben des Leistungstests erforderten die Identifikation von Fehlern in mathematischen Aussagen, deren anschauliche und verständlich dargestellte Verbesserungen sowie die Vervollständigung mathematischer Definitionen. Die Korrektur der Aufgaben erfolgte in den drei Dimensionen *mathematischer Gehalt*, *didaktischer Gehalt* und *Präsentation/(Fach-)Sprache*. Pro Aufgabe und Dimension konnten maximal zwei Punkte erreicht werden, für jede Dimension also insgesamt zwölf Punkte. Die Ergebnisse des Tests sind in Abbildung 2 dargestellt.

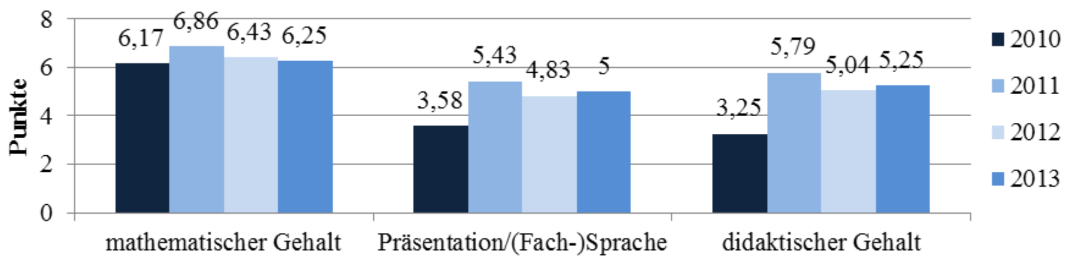



Abbildung 2: Vergleich der Leistungen von 2010 bis 2013

Die Gesamtpunkte im mathematischen Gehalt blieben seit dem Jahr 2010 relativ konstant. Deutliche Verbesserungen im Vergleich zu 2010 sind dagegen in den Bereichen Präsentation/(Fach-)Sprache und didaktischer Gehalt zu erkennen, während die Leistungen in diesen beiden Dimensionen in den darauffolgenden Jahren 2011, 2012 und 2013 in etwa gleich blieb. Mittels einer einfaktoriellen ANCOVA mit der Abiturnote als Kovariate wurden die Unterschiede der Ergebnisse aus dem Jahr 2010 mit den drei anderen Jahrgängen verglichen. Trotz der recht kleinen Stichproben erwies sich der Unterschied für den didaktischen Gehalt als statistisch signifikant ($F(1,54)=5.02$, $p=.029$, partial $\eta^2=.09$).

## 6. Diskussion

Die weitgehend positiven Rückmeldungen der Selbsteinschätzung (Evaluation 1) und die Leistungssteigerungen (Evaluation 2) verdeutlichen die erfolgreiche praktische Umsetzung der Ziele der Ergänzungen und bekräftigen zugleich die Relevanz einer solchen Veranstaltung im gymnasialen Lehramtsstudium. Das konstant bessere Abschneiden der Studierenden im Leistungstest ab dem Jahr 2011 legt nahe, dass diese Leistungssteigerung tatsächlich auf die Einführung der Ergänzungen zurückzuführen ist. Da der Schwerpunkt nicht auf Vermittlung fachmathematischer Inhalte sondern auf deren didaktischer Aufbereitung und Kommunikation lag, sind die unveränderten Leistungen in der Dimension *mathematischer Gehalt* plausibel. Aufgrund der insgesamt positiven Erfahrungen ist geplant, das Konzept der Ergänzungen auch in andere fachwissenschaftliche Module zu integrieren.

## Literatur


Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). *Mathematik neu denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Biehler, R., Eilerts, K., Hänze, M., & Hochmuth, R. (2010). Mathematiklehrerausbildung zum Studienbeginn: Eine empirische Studie zu Studienmotivation, Vorwissen und Einstellungen zur Mathematik (BMBF-Projekt LIMA). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*. Münster: WTM.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7(8).*

Fellenberg, F., & Hannover, B. (2006). Kaum begonnen, schon zerronnen? Psychologische Ursachenfaktoren für die Neigung von Studienanfängern, das Studium abzubrechen oder das Fach zu wechseln. *Empirische Pädagogik, 10*(4), 381-399.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Leipzig: Teubner.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M., & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *JMD*, *29*(3-4), 233-258.

Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A., & Reiss, K. (2014). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In *Mathematische Vor-und Brückenkurse* (S. 37-53). Wiesbaden: Springer.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking* (S. 65-81). Dodrecht [u.a.]: Kluwer.

Christoph NEUGEBAUER, Kathrin WINTER, Münster

# Fehleranalysen bei Studienanfängern als Basis zur individuellen Förderung in Mathematik

An der WWU Münster werden neue Studieneingangstests entwickelt, die mathematische Anforderungen bestimmter Studiengänge an konkreten Aufgabenbeispielen thematisieren und Studieninteressierten die Möglichkeit bieten, ihre eigenen Kompetenzen hinsichtlich dieser Anforderungen zu überprüfen (vgl. Neugebauer 2013). Diese online zur Verfügung gestellten Self-Assessments bieten durch eine fundierte diagnostische Aufbereitung sofortige detaillierte und individuelle Rückmeldungen zu den Kompetenzen der sich testenden Person. So bilden sie eine auf die Studieninteressen, die persönlichen Kompetenzen und die jeweiligen Anforderungen eines Studiengangs angepasste Grundlage für die eigene Förderung inklusive konkreter Hinweise zu Lehr- und Lernangeboten. In diesem Beitrag werden die grundsätzlichen Ideen und erste Ergebnisse zum Einsatz fehleranalytischer Methoden bei der Entwicklung von Itemdistraktoren mit diagnostischem Potential exemplarisch zu verdeutlichen.

## Ausgangssituation und Intentionen

Seit Jahren werden regelmäßig statistische Berechnungen zur Entwicklung der Schwund- und Abbrecherquoten an deutschen Hochschulen veröffentlicht. Dabei ist der HIS-HF-Studienabbruchuntersuchung 2012 (Heublein et al. 2013) zu entnehmen, dass die Studienabbruchquote in Bachelorstudiengängen an Universitäten für die Fächergruppe Mathematik/Naturwissenschaften bei 39 % liegt. Betrachtet man die Fächergruppe aufgeschlüsselt nach einzelnen Fächern, so belegt die Mathematik mit 55 % sogar den vordersten Platz. Dieter berichtet in ihrer Dissertation (2012) sogar von einer Quote bis zu 80 % für mathematikhaltige Studiengänge. Als Bedingungsfaktoren für einen Studienabbruch sind dabei sowohl äußere (schulische Vorbereitung, Studienbedingung, finanzielle Situation etc.) als auch innere (psychische/physische Stabilität, Leistungsfähigkeit, Motivation etc.) Faktoren zu berücksichtigen (vgl. u. a. Dieter 2012).

Speziell der Studienbeginn in der Mathematikausbildung bedeutet eine Umstellung in verschiedenen Bereichen. So ist bezogen auf die prozessbezogenen Kompetenzen ein Sprung in den Anforderungen an das deduktive Denken zu beobachten. Bezüglich der kognitiven Kompetenzen müssen viele in der Schule vermittelte Vorstellungen einem konzeptionellen Wandel unterzogen werden. Zusätzlich kommt es zu einer starken Verdichtung der Inhalte (vgl. u. a. Dieter 2012).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 851–854). Münster: WTM-Verlag

Zur frühzeitigen Erkennung und Behebung dieser Übergangsproblematik können Studieneingangstest mittels webbasierter Self-Assessments helfen. Eine Hauptproblematik der bestehenden Online-Self-Assessments stellt allerdings die Ausführlichkeit der Analyse der Testergebnisse dar, die in der Rückmeldung der Tests angeboten werden. So wird in den meisten Tests nur eine Gesamtlösungsquote ermittelt und/oder eine Übersicht der falsch und richtig gelösten Aufgaben angezeigt. Vereinzelt wird zusätzlich noch eine Musterlösung mitgeliefert anhand der dann im besten Fall eventuell gemachte Fehler selbst erkannt werden können. Es erfolgt in bestehenden Studieneingangstests kein individuelles diagnostisch fundiertes Feedback, dass eine detaillierte Auskunft über die vorhandenen oder defizitären Kompetenzen der Testperson liefert. (vgl. Sauer 2013; Winter 2013)

Bei der Entwicklung der Studieneingangstest an der WWU Münster stehen diese Aspekte besonders im Vordergrund. Besondere Aspekte der entstehenden Self-Assessments sind:

- Zusammenstellung der Testitems je nach Studiengangsanforderungen der jeweiligen Hochschule differenziert
- Testitems und Testdesign diagnostisch aufbereitet (vgl. Winter 2011)
- Individuelle Auswertung und Rückmeldung der Testergebnisse:
  - Differenzierung nach Testitems und mathematischen Themengebieten
  - Fehleranalytische Analysen der eigenen Lösungen
  - Konkrete Hinweise für geeignete Fördermaßnahmen (bspw. Literatur und anderes Fördermaterial, Vorkurse etc.)

Die Tests übernehmen somit eine Diagnose- und Informationsfunktion für Studieninteressierte, so dass individuelle Schwächen einerseits frühzeitig entdeckt und andererseits durch konkrete Hinweise für geeignete Fördermaßnahmen rechtzeitig behoben werden können.

## Entwicklung eines diagnostisch fundierten Self-Assessments

Im Rahmen der Entwicklung eines Basis-Self-Assessments, welches später für einzelne Studiengangsanforderungen variiert werden kann, kommen verschiedene Methoden im Sinne eines Mixed-Method-Designs zum Tragen. Über Inhaltsanalysen, rationale und empirische Aufgabenanalysen oder Interviews, die sowohl qualitative als auch quantitative Methoden vereinbaren lassen, werden Testinhalte, Items und Distraktoren entwickelt, die in einem zyklischen Verfahren mehrfach verschiedene Analyseverfahren durchlaufen. Die unterschiedlichen Erhebungs- und Analyseverfahren und deren Ergebnisse wirken wechselseitig über die verschiedenen Entwicklungsphasen aufeinander ein und sind spiralig aufgebaut (vgl. hierzu auch Winter 2011). Zur technischen Umsetzung und als Testplattform dient aktuell das Angebot von mathe-meister.de (www.mathe-meister.de).

**Fehleranalysen als Basis für diagnostische Rückmeldungen**

Die Rückmeldungen der Testergebnisse werden differenziert in mehreren Stufen erfolgen. Für einen ersten Überblick werden neben der allgemeinen Rückmeldung - wie in den anderen Tests - in einer Defizitanalyse die unterschiedlichen mathematischen Themenbereiche getrennt dargestellt werden, so dass die themenbezogene Aufgabenbearbeitung ersichtlich wird. Symbolisch wird dies durch eine zusammenfassende Ergebnisampel unterstützt. Es folgt eine nach Items differenzierte Auswertung im Sinne einer Fehleranalyse. Hier wird neben der Beschreibung der Items und einer weiteren Aufschlüsselung des Items hinsichtlich der getesteten Kompetenzen/mathematischen Themengebiete die selbst gewählte Lösung diagnostisch erklärt. In einer weiteren Übersicht werden anschließend abgestimmt auf die individuellen Testergebnisse und die Studieninteressen (Studiengang, potentieller Hochschulstandort etc.) konkrete Hinweise zu Fördermaßnahmen gegeben.

Die erste Pretestphase des Projektes startete zu Beginn des Wintersemesters 2013/2014 mit 173 Lehramtsstudierenden mit dem Fach Mathematik für Grund-, Haupt-, Real- und Gesamtschulen sowie Gymnasien und 1-Fach-Bachelor Studierende der Mathematik. Die Teilnahme war freiwillig. Der Test bestand aus insgesamt 42 Items aus den Bereichen der Bruchrechnung mit Variablen, Gleichungen mit Parametern, Syllogismen, Prozentrechnung und Algebra. Die Lösungsquoten der einzelnen Aufgabenbereiche lagen zwischen 30 % und 78 %. Im Mittel wurden 52 % der Aufgaben richtig gelöst.

Als Grundlage für das diagnostische Potential wurde zuvor für jedes Testitem eine Fehleranalyse über verschiedene Verfahren durchgeführt. Idealtypische korrekte und fehlerhafte Lösungen wurden in Form möglichst kurzer und diagnostisch aussagekräftiger Distraktoren dargestellt. Die Ergebnisse der ersten Pretestphase wiederum fließen ein in weitere fehleranalytische Untersuchungen, um letztlich zum einen eine für die Zielgruppe idealtypische Menge und zum anderen möglichst genaue Interpretationen für die Formulierung der wahrscheinlichsten Fehlerursachen zu erhalten.

Die Analyse der Probandendaten der ersten Pretestphase sowie die Ergebnisse weiterer fehleranalytischer Untersuchungen zeigen, dass die Ausprägungen typischer Fehler in einem Kompetenzbereich vielfältig sind. Bereits in einem Item (Aufgabe: Lösen Sie nach x auf. Kürzen Sie das Ergebnis so weit wie möglich: $x^2 - k^2 = x - k$) wurden bspw. zwei typische fehlerhafte Lösungen von ~16 % bzw. ~5 % der Probanden gewählt, 4 % gaben an, dass sie die Lösung nicht kennen und ~5 %, dass ihre Lösung nicht dabei ist. Knapp 40 % der Probanden bearbeiteten die Aufgabe nicht vollständig und kreuzten als Ergebnis $x = x^2 - k^2 - k$ an. Es zeigte sich in Interviews mit einigen Studierenden, dass es allein für die Wahl dieser Antwortoption unterschiedliche Gründe geben kann, die nun verifiziert werden, um daraus hilfreiche diagnostische Rückmeldungen zu formulieren oder eventuell die Teststruktur für insbesondere solche Distraktoren nochmals zu überprüfen.

## Zwischenfazit und Ausblick

Die Ergebnisse der ersten Pretestphase haben gezeigt, dass die Defizite der Studierenden häufig in grundlegenden mathematischen Bereichen liegen. Insbesondere die ersichtliche Verbindung zum Studium und die Aufschlüsselung relevanter mathematischer Themenbereiche führten bei den Studierenden zu positiven Rückmeldungen. Die individuellen Förderempfehlungen unterscheiden die an der WWU entwickelten Self-Assessments von den meisten bereits existierenden (Studieneingangs-)tests.

In nächster Zeit werden Distraktoren zu weiteren Aufgabenbereichen entwickelt werden. Die dazu erforderlichen zusätzlichen Erhebungen und Fehleranalysen können im Rahmen von Masterarbeiten von Studierenden übernommen werden. Eine Korrelation zu den Klausurergebnissen im Bereich Lineare Algebra I und Analysis I erfolgt ebenfalls in Kürze. Hintergrund dieser Korrelation ist das Ziel, mit Hilfe des Self-Assessments eine Prognose zum weiteren Studienerfolg geben zu können. Die Erweiterung des Self-Assessments über den Studiengang des Lehramtes Mathematik hinaus sowie eine Vertiefung der Kompetenzanalysen für einzelne Studiengänge verschiedener Hochschulen ist das Ziel dieses Projekts.

## Literatur


Dieter, M. (2012): Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren. Dissertation, Universität Duisburg-Essen.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R., Sommer, D. (2013): Die Entwicklung der Schwund und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen, Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010, HIS: Forum Hochschule.

Neugebauer, C. (2013): Online -Test zum Self-Assessment im Themenfeld "Studierfähigkeit in Mathematik": Zur Entwicklung von Multiple-Choice-Items. In: Hoppenbrock et al. (Hrsg.): khdm-Report 13-01, Kassel.

Sauer, K.; Winter, K. (2013) in: Stein, M. (Hrsg.): Mathematik Online. Studien zu mathematischen Self-Assessment-Tests und Übungsplattformen im Internet. Münster.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse: Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. WTM-Verlag, Münster.

Renate NITSCH, Regina BRUDER, Darmstadt

# Diagnoseinstrument zum Aufdecken von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge

Der Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen im Bereich funktionaler Zusammenhänge und der Wechsel zwischen diesen werden als mathematische Schlüsselfähigkeit angesehen. Dennoch zeigen Schülerinnen und Schüler vielfältige Schwierigkeiten in diesem Bereich (Bossé, Adu-Gyamfi & Cheetham, 2011). Aus diesem Grund besteht das Ziel des Projekts CODI (COnceptual DIfficulties in the field of functional relationships) darin, ein Diagnoseinstrument zum Aufdecken von Lernschwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler in den Jahrgangsstufen 9 und 10 im Kompetenzbereich der Darstellung funktionaler Zusammenhänge zu entwickeln. Das Diagnoseinstrument soll im Unterricht flexibel einsetzbar sein und die Lehrkräfte bei der individuellen Diagnose und Förderung im Bereich typischer Lernschwierigkeiten unterstützen. In Anlehnung an die Ergebnisse des Projekts HEUREKO (vgl. Nitsch et al., 2014) werden zur Strukturierung des Inhaltsbereichs verschiedene Darstellungswechsel unterschieden: Der Wechsel zwischen Graph und situativer Beschreibung (GS), der Wechsel zwischen situativer Beschreibung und Gleichung (SA) und der Wechsel zwischen Graph und Gleichung (GA).

## Konzeptuelle Lernschwierigkeiten

Konzeptuelle Lernschwierigkeiten können durch die Analyse systematischer Fehler aufgedeckt werden. Systematische Fehler zeichnen sich dadurch aus, dass sie im Gegensatz zu Flüchtigkeitsfehlern, die zufällig auftreten und meist aufgrund von Konzentrationsmangel entstehen, reproduzierbar sind und meist auf fehlerhaften Vorstellungen und Konzepten beruhen (Radatz, 1980). Diese werden im Bereich der Naturwissenschaften auf individuelle Alltagsvorstellungen der Schülerinnen und Schüler zurückgeführt, in der Mathematik sind jedoch auch innermathematische Fehlvorstellungen denkbar. In jedem Fall weisen sie charakteristische Eigenschaften auf: Sie zeigen sich wiederholt über mehrere strukturell gleiche Aufgaben hinweg, sie sind über einen längeren Zeitraum stabil und sie sind zu einem gewissen Grad robust gegenüber äußeren Einflüssen (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1999).

## Design und Methode

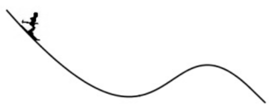
Das Ziel besteht in der Entwicklung eines Online-Tools, das eine automatische Auswertung ermöglicht. Zukünftig soll dies eine direkte Rückmeldung

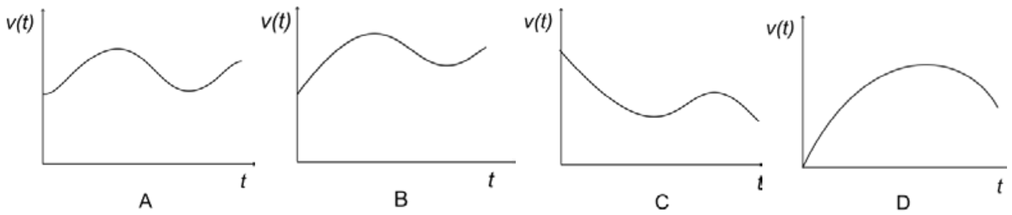
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 855–858). Münster: WTM-Verlag

der Ergebnisse sowohl an die Schülerinnen und Schüler als auch an die Lehrkräfte ermöglichen. Dementsprechend werden vor allem Multiple-Choice-Aufgaben eingesetzt, wobei diese das Format „1 von 4“ besitzen, das heißt von vier gegebenen Antwortmöglichkeiten ist genau eine richtig. Zur Generierung der Distraktoren wurden zum einen bereits existierende Studien zu Lernschwierigkeiten herangezogen, zum anderen wurden vorliegende Schülerlösungen aus dem Projekt HEUREKO analysiert. Die Distraktoren wurden so gewählt, dass möglichst jeder Distraktor für genau einen systematischen Fehler steht, sodass eine möglichst präzise Diagnose möglich ist. Um zu kontrollieren, ob die Distraktoren der Multiple-Choice-Aufgaben keine Fehler provozieren, die ohne die Angabe solcher Distraktoren gar nicht oder nur vereinzelt auftreten würden, wurden zusätzlich zu jedem Bereich Aufgaben mit offenem Antwortformat eingesetzt.

Für eine Diagnose von Lernschwierigkeiten sind neben der Identifikation häufig auftretender systematischer Fehler auch stabile Phänomene wie Fehlvorstellungen von Interesse. Aus diesem Grund wurden für jeden Darstellungswechsel und Funktionstyp mehrere strukturell gleiche Aufgaben entwickelt, um über auftretende Fehlermuster Rückschlüsse auf mögliche Fehlvorstellungen ziehen zu können. Zu den Darstellungswechseln GA und SA wurden jeweils Aufgaben zu linearen und quadratischen Funktionen entwickelt. Beim Darstellungswechsel GS wurden direkt zwei in der Literatur referierte Fehlvorstellungen fokussiert: Der Graph-als-Bild-Fehler und der Slope-height-Fehler. Beim Graph-als-Bild-Fehler wird der Graph als reales Situationsabbild interpretiert. In der Beispielaufgabe wird in diesem Fall Graph C ausgewählt, weil der Verlauf des Graphen exakt dem Verlauf des Skihangs entspricht.

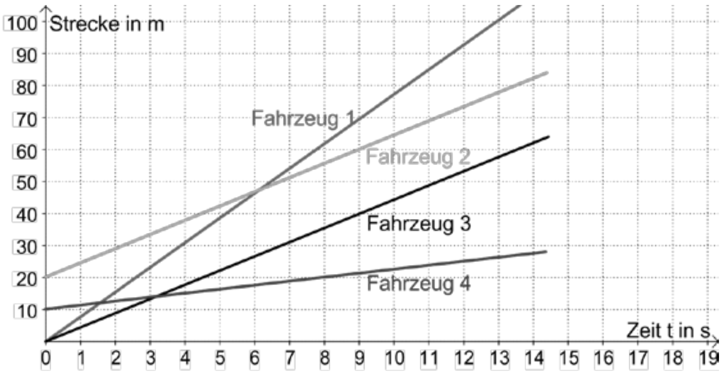
*In folgendem Bild ist ein Skifahrer zu sehen, der den Hang hinunter fährt. Welcher Graph beschreibt die Situation am besten? Der Funktionswert v(t) gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an.*






Beim Slope-height-Fehler geht man davon aus, dass Steigung und Höhe verwechselt werden. In der Beispielaufgabe würde das bedeuten, dass an der Stelle t=5 nicht die Gerade mit der maximalen Steigung fokussiert wird (Fahrzeug 1), sondern stattdessen die Gerade mit dem maximalen Funktionswert an dieser Stelle ausgewählt wird (Fahrzeug 2).

*Welches der vier Fahrzeuge ist zum Zeitpunkt  t = 5 am schnellsten?*




Die entwickelten Aufgaben wurden in einer Pilotierung mit N=93 Schülerinnen und Schülern aus Klasse 9 und 10 erprobt. Zusätzlich wurden mit N=16 Schülerinnen und Schülern diagnostische Interviews geführt. Die Ziele der Pilotierung bestanden darin, die Distraktoren der Multiple-Choice-Aufgaben hinsichtlich der vermuteten systematischen Fehler und Fehlvorstellungen zu überprüfen, die häufigsten systematischen Fehler und Fehlvorstellungen zur weiteren Fokussierung des Diagnose-Instruments zu identifizieren und die Angemessenheit der Testzeit, des Schwierigkeitsniveaus sowie die Verständlichkeit der Aufgabenstellungen zu überprüfen.

## Erste Ergebnisse

Die Aufgaben wurden dichotom kodiert und anschließend rasch-skaliert. Dabei wurde – in Anlehnung an das in HEUREKO entwickelte Kompetenzstrukturmodell – ein 3-dimensionales Modell zugrunde gelegt, wobei die Dimensionen den Darstellungswechseln GS, SA und GA entsprachen. Alle Items zeigten zufriedenstellende Fitwerte (T-Wert und wmnsq). Auch die moderaten latenten Korrelationen (zwischen 0,5 und 0,75) sprechen für das Modell. Die Interviewanalysen zeigten, dass die Schülerinnen und Schüler die Angemessenheit der Aufgabenstellung, der Testzeit und auch der Aufgabenschwierigkeiten bestätigten. Eine Fehleranalyse bei den Aufgaben mit offenem Antwortformat ergab, dass die bei den Multiple-Choice-Aufgaben häufig beobachteten Falschlösungen auch bei den Aufgaben mit offenem Antwortformat einen hohen Fehleranteil ausmachten. Weitere quantitative Analysen sind für den Haupttest mit einer größeren Stichprobe geplant. Im Folgenden werden besonders häufig beobachtete Fehlermuster berichtet, die einen ersten Einblick in typische Lernschwierigkeiten geben: Beim Darstellungswechsel GA in Verbindung mit linearen Funktionen wählten 21% der Schülerinnen und Schüler über beide Aufgaben hinweg den Distraktor, der in der Funktionsgleichung $y=mx+b$ statt der Steigung m die Nullstelle $x_0$ der Geraden enthielt: $y=x_0x+b$.

Beim Darstellungswechsel SA bei quadratischen Funktionen zeigten 17% der Lernenden bei zwei Aufgaben einen Vorzeichenfehler bei der Verschiebung der Parabel in positive x-Richtung. Die Interviewanalysen zeigten hier, dass vollständig innerhalb der Situation argumentiert wurde. Bei der Modellierung einer Wurfparabel wurde z.B. erklärt, dass man den Ball „ja nach vorne wirft und nicht nach hinten“. Interessanterweise argumentierten alle Lernenden, die die Aufgabe richtig lösten, mithilfe der graphischen Darstellungsform.

Den Graph-als-Bild-Fehler zeigten über drei Aufgaben hinweg 17% der Probanden. Sie argumentierten innerhalb der Situation und scheiterten bei der Übertragung auf die graphische Darstellungsform. Die Analysen zum Slope-height-Fehler erwiesen sich als besonders aufschlussreich. Während 44% der Schülerinnen und Schüler diesen Fehler bei obiger Beispielaufgabe zeigten, in der ein Zeit*punkt* fokussiert wird, zeigten nur 13% den Fehler auch in einer weiteren Aufgabe, in der nach einem Zeit*intervall* gefragt wurde. Die Interviewanalysen ergaben, dass den Probanden zwar im Allgemeinen die globale Unterscheidung zwischen Steigung und Höhe möglich ist, die Betrachtung der Steigung an einem Punkt jedoch Probleme bereitet. Es liegt die Vermutung nahe, dass es sich hierbei um eine epistemologische Hürde handelt. Das bedeutet, dass der Aneignungsprozess nicht linear verläuft, sondern bestimmte Denkhürden bzw. Brüche, die sich aus dem genetischen Aufbau des Stoffes ergeben, von einer Vielzahl der Lernenden überwunden werden müssen. In diesem Fall haben sie die Steigung bisher über ein Steigungsdreieck bestimmt, d.h. die Betrachtung einer Steigung an einem Punkt ist ihnen fremd. Auch die Alltagsvorstellung einer Steigung bezieht sich immer auf eine Strecke und kollidiert mit der mathematischen Betrachtungsweise. Aus diesem Grund wurden zu dieser Fehlvorstellung weitere Aufgaben entwickelt, die im Rahmen des Haupttest eine noch differenzierte Diagnose ermöglichen sollen.

## Literatur


Bossé, M., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6 (3), 113-133.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M.K.. Functions, Graphs, and Graphing (1990): Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, T., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2014). Students’ Competencies in working with Functions in Secondary Mathematics Education – Empirical Examination of a Competence Structure Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Radatz, H. (1980). Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.

Daniel NOLTING, Stephan KREUZKAM, Hildesheim

# Förderung mathematischer Fertigkeiten im Lehramtsstudium durch computerbasierten Grundlagentest

Für die Grund- Haupt- und Realschulstudierende mit Studienfach Mathematik wurde an der Universität Hildesheim das Konzept „Hildesheimer Stufen zum Einstieg in die Mathematik“ (HiStEMa) entworfen, welches vier übergeordnete Ziele verfolgt:

1. Aufbau von Routine in mathematischen Grundfertigkeiten
2. Aufbau von Methodenkompetenz für das Bearbeiten mathematischer Problemstellungen
3. die Einführung in die universitäre Mathematik (auch der Unterschied zur Schulmathematik)
4. die Vermittlung eines positiven Bildes des Faches Mathematik und die damit verbundene Sicherheit in der Studienfachwahl

Für die etwa 600 Bachelor und Masterstudierenden mit unterschiedlichen Schulstufenschwerpunkten wurden für die Punkte 2-4 bereits diverse Angebote geschaffen (u.a. Mathe-Hütte, mathematisches Gespräch) (vgl. z.B. Hamann et al, 2014, S. 381ff).

Um ebenfalls die für ein Mathematikstudium notwendige Routine in mathematischen Grundfertigkeiten aufzubauen, wurde ab dem Wintersemester 2013/2014 ein computerbasierter Grundlagentest eingeführt, der genau diesen Aspekt aufgreift. Ab Studiumsbeginn müssen die Studierenden diesen in jedem Semester absolvieren und bestehen, um zu einer fachwissenschaftlichen Klausur zugelassen zu werden. Hieraus ergibt sich folgende Erweiterung des „HiStEMa“-Modells:

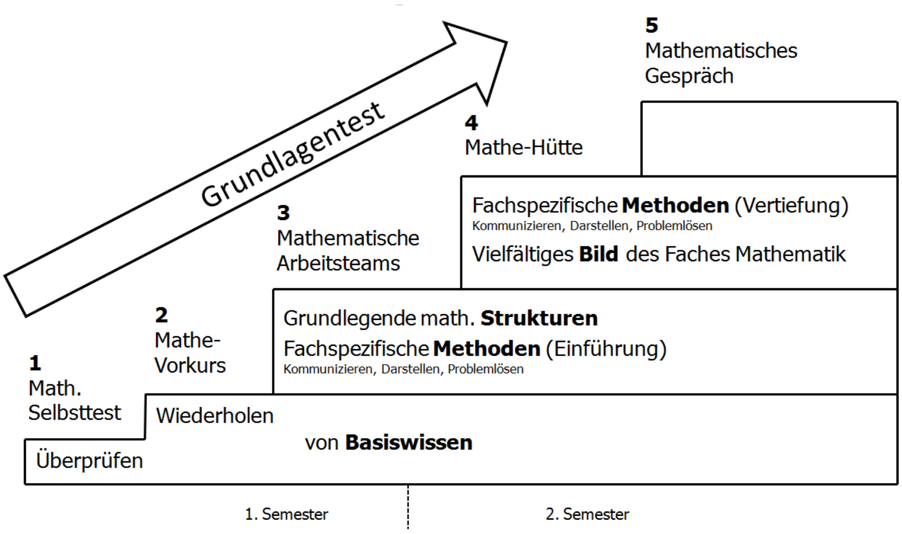



**Abbildung 1: „HiStEMa-Modell“ mit Erweiterung des Grundlagentests**

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 859–862). Münster: WTM-Verlag

Im Unterschied zu den Begriffen „Basiskompetenzen“ (vgl. Drüke-Noe et al, 2011, S. 8) und „mathematische Routinefertigkeiten“ (vgl. Kreuzkam, 2013, S. 564) wird der Begriff „Grundfertigkeiten“ wie folgt definiert:

*Grundfertigkeiten umfassen sowohl mathematische Routinefertigkeiten, als auch das klientelbezogene notwendige mathematische Handwerkzeug, welches auf dem Niveau des sicheren Wissens und Könnens vorhanden ist.*

Das Niveau „Sicheres Wissen und Können“ geht auf das dreistufige Modell zur Automatisierung von mathematischen Fertigkeiten von Sill und Sikora zurück:

1. Sicheres Wissen und Können
2. Reaktivierbares Wissen und Können
3. Exemplarisches Wissen und Können (vgl. Sill, Sikora, 2007, S.132ff)

Durch eine „[…] (teilweise) Automatisierung können Aufgaben ohne größere mentale Anstrengung (Arbeitsgedächtnis) […] schnell erledigt werden. Sie befreien das Arbeitsgedächtnis von Routineaufgaben, sodass mehr mentale Kapazität für das Erreichen anspruchsvollerer Lernziele zur Verfügung steht.“ (Wild; Möller, 2009, S. 19f.) Um diese Automatisierung zu erreichen werden im mathematischen Vorkurs (vgl. HiStEMa Stufe 1) die relevanten Schulinhalte zur Reaktivierung behandelt und anschließend durch schriftliche Übungsaufgaben trainiert. Ebenfalls können die Studierenden sowohl die Sprechzeiten von Mitarbeitern des Instituts als auch von studentischen Tutoren/Tutorinnen wahrnehmen, in denen vorhandene Probleme im Bereich der Grundfertigkeiten identifiziert werden. Somit verfolgt der Grundlagentest drei Ziele:

1. Erhalt und Festigung von „Sicherem Wissen und Können“ durch die semesterweise Wiederholung des Grundlagentests um ein gewisses Maß an Überlernen zu erreichen (vgl. z.B. Renkl, 2002, S.16f.)

2. Durch das Aufzeigen von individuellen Defiziten soll die Selbstregulation der Studierenden gefördert werden.

3. Die Reaktivierung von mathematischen Grundfertigkeiten ist die Voraussetzung für eine Automatisierung und die daraus resultierende mentale Entlastung. (vgl. Wild, Möller, 2009, S.19f.)

## Planung und Umsetzung

Für die Inhalte des Grundlagentests haben die Mitarbeiter/innen des Instituts für Mathematik und Angewandte Informatik Aufgaben entworfen. Diese orientieren sich an Schulbüchern bis zur 10. Klasse, so dass insgesamt 15 Themenbereiche (u.a. Bruchrechnung, Nenner rational machen, Potenz-gesetze) entstanden sind. Diese werden in einen Test mit 20 Fragen eingearbeitet. Hierfür ist in der Planung eine Bearbeitungszeit von 45 Minuten angesetzt worden. Um eine individuelle Planung der Arbeitsbelastung der Studierenden zu ermöglichen, wurden während des Semesters zwei Testzeiträume (Mitte und Ende des Semesters) geschaffen, für den sich die Studierenden jeweils anmelden konnten. Zusätzlich gibt es einen Übungstest, der aus dem Aufgabenpool generiert wird, mit dem die Studierenden zu jedem Zeitpunkt für den Grundlagentest üben können. Dieser wurde mit über 5200 Durchläufen bei ca. 600 Studierenden sehr gut angenommen. Da das Bestehen des Grundlagentests ebenfalls als Kriterium für die Klausurzulassung herangezogen wird, ist der Test an die jeweilige Fachveranstaltung gebunden. Der Test wurde auf der universitätsinternen Plattform „moodle“ entworfen und die verschiedenen Aufgaben wurden als Bilder importiert. In der Eingabemaske konnten auch die korrekten Antworten für eine automatische Korrektur eingegeben werden.

Wie bei allen computerbasierten Tests sollte die Lösungseingabe nach festgelegten Kriterien erfolgen, damit eine automatische Auswertung möglich ist. Die Syntax orientiert sich an der des Programms „wxMaxima“, da die Studierenden in ihrem zweiten Studiensemester im Rahmen einer Veranstaltung mit dem Programm in Berührung kommen. Um die Schwierigkeiten möglichst gering zu halten, wurde ein Handzettel ebenfalls während der Testdurchführung zur Verfügung gestellt.

Bisher gab es zwei Durchläufe mit insgesamt 450 Studierenden. Es konnten 26 Punkte erreicht werden und der Test wird ab einer Punktzahl von 16 Punkten als bestanden gewertet. Als erste Beobachtungen sind zu nennen: Nur sehr wenige Aufgaben wurden nicht bearbeitet, der zeitliche Rahmen von 45 Minuten ist also passend gewählt. Ebenfalls stellte sich heraus, dass die Syntax eine doch nicht unerhebliche Fehlerquelle darstellt, so dass in den beiden Durchläufen nachträglich alle mathematisch korrekten Lösungen als korrekt gewertet wurden. Die Bestehensquote lag letztendlich bei ca. 33% (erster Durchlauf, n=283) bzw. 23% (Durchlauf 2, n=170). Bemerkenswert ist der Zusammenhang mit den Klausurergebnissen der Erstesemesterveranstaltung Lineare Algebra. Von den 188 Teilnehmenden haben im Vorfeld 112 Studierende den Grundlagentest bestanden, hiervon haben 96 (ca. 86%) auch die Klausur zur Linearen Algebra bestanden. Dies stützt die These der notwendigen Automatisierung zur Erreichung höherer Lerninhalte und zeigt, dass eine semesterweise Wiederholung zum Routineaufbau sinnvoll sein wird. Zusammen mit den Studierenden die den Grundlagentest vorher nicht bestanden haben, ist allerdings zu sagen, dass sich die Bestehensquote von ca. 50% insgesamt nicht verändert hat.

## Ausblick

Für die Zukunft sind einige Anpassungen des Grundlagentests angedacht: Die Aufgabenschwierigkeit sollte innerhalb der Themenbereiche vereinheitlicht werden, was sich vor allem auf die Anzahl der Lösungsschritte für die jeweilige Aufgabe bezieht. Neben den Schwierigkeiten mit Grundfertigkeiten besteht nach eigener Erfahrung bei den Studierenden auch eine große Unsicherheit im Begriffs- und Formelverständnis, so dass auch diese Bereiche eingearbeitet werden könnten. Hierfür sind noch weitere qualitative und quantitative Auswertungen im Rahmen von Bachelor-/Masterarbeiten notwendig. Parallel muss das Förderangebot ausgeweitet werden, damit die Studierenden je nach persönlicher Interessens- und Bedarfslage die für sie geeignetste Maßnahme annehmen können.

Die kontinuierliche Beschäftigung mit mathematischen Grundfertigkeiten realisiert das Ziel des Aufbaus von Routine. Demzufolge wird der Grundlagentest nicht nur zeitlich wiederkehrend gestaltet, sondern auch eine stufenweise Anpassung der Bestehenspunktzahl implementiert, d.h. von einer Bestehensgrenze von 14 Punkten im ersten Semester bis hin zu 19 Punkten am Ende des Bachelor-Studiums.

## Literatur

Drüke-Noe, C.; Möller, G.; Pallack, A.; Schmidt, S.; Schmidt, U.; Sommer, N. & Wynands, A. (2011): *Basiskompetenzen Mathematik. für Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht*. Berlin: Cornelsen.

Hamann, T., Kreuzkam, S., Schmidt-Thieme, B. & Sander, J. (2014). „Was ist Mathematik?“ Einführung in mathematisches Arbeiten und Studienwahlüberprüfung für Lehramtsstudierende. In Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S. & Wassong, T. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 375-388). Wiesbaden: Springer.

Kreuzkam, S. (2013). Mangel an mathematischen Routinefertigkeiten. Basiswissen Matheamtik. In: Käpnick Fr., Stein M., Greefrath G. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.–08.03.2013 in Münster* (S. 564–567). Bd. 1. 2 Bände. Münster: WTM-Verlag.

Renkl, A. (2000). Automatisierung allein reicht nicht aus: Üben aus kognitionspsychologischer Perspektive (S. 16-19). *In Übern und Wiederholen*. Friedrich Jahresheft 2000.

Sill, H.-D.; Sikora, C. (2007). *Leistungserhebungen im Mathematikunterricht. Theoretische und empirische Studien*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Wild, E.; Möller, J. (2009). *Pädagogische Psychologie*. Heidelberg: Springer.

Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund

# Produktives Fördern zwischen individuellem und gemeinsamem Lernen

Einerseits ist individuelle Förderung eines der zentralen Leitprinzipien unterrichtlichen Handelns, das für alle Kinder gilt – ganz unabhängig von ihren jeweiligen mathematischen Kompetenzen. Andererseits gehört die gezielte, auf das einzelne Individuum explizit ausgerichtete Förderung von mathematisch leistungsschwachen Lernenden zu den Schwerpunktthemen schulischer Aktivitäten, die im Zuge der Diskussion um die Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien oder aber um Inklusion gegenwärtig besondere Aufmerksamkeit genießt (vgl. zusammenfassend Scherer & Moser Opitz 2010). Wember (2013) fordert entsprechend, dass Förderung im Mathematikunterricht universell zugänglich und flexibel auszurichten sei. Demnach sollten alle Kinder, auch die mit Lernschwierigkeiten, Informationen zu einer gestellten Aufgabe aufnehmen, Interesse und Motivation für die Aufgabe entwickeln sowie sich aktiv einbringen und kompetent ausdrücken können. Das von der Deutsche Telekom Stiftung initiierte und finanzierte Projekt „Mathe-sicher-können" widmet sich dieser Aufgabe, indem es Fördermaterialien für Lernende mit Schwierigkeiten im Fach Mathematik am Ende der Grundschule und zu Beginn der Sekundarstufe 1 entwickelt (vgl. Deutscher, Prediger & Selter 2013).

## 1. Hintergründe zur Förderpraxis in der Grundschule

Die Perspektive auf das Fördern ist stark von der Sicht auf die Beschreibung und Kennzeichnung kindlicher Lernschwierigkeiten geprägt. Im Kern bedeutet Fördern zunächst die Bereitstellung und Umsetzung spezifischer Lernangebote für Kinder, bei denen die alltäglichen Standardangebote im Unterrichtsgeschehen nicht ausreichen. Mit Blick auf Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten weist Schipper (2005) auf vier zentrale Merkmale hin, die für eine Förderung grundlegend sind: Demnach verfügen die zu fördernden Kinder lediglich über (1) einseitige Zahl- und Operationsvorstellungen. Diese gehen einher mit (2) der Neigung, mathematische Rechenanforderungen vornehmlich (verfestigt) über zählende Prozeduren zu bearbeiten, und mit (3) dem Problem, Beziehungen zwischen unterschiedlichen Repräsentationen mathematischer Begriffe und Operationen erkenntnisgewinnend herzustellen. Darüber hinaus können Unsicherheiten bei der Bestimmung von Raum-Lage-Beziehungen wie (4) die Rechts-Links-Unterscheidung dazu führen, dass geometrische Veranschaulichungen arithmetischer Inhalte im

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 863–866). Münster: WTM-Verlag

Mathematikunterricht missverständlich von den Kindern gedeutet werden. Kretschmann (2007) und Moser Opitz (2008) sprechen weitere, eher mathematikunspezifische Aspekte an (wie z.B. Probleme mit der Aufmerksamkeit und dem Gedächtnis, der Sprache, dem Selbstkonzept, der Motivation und dem Interesse, der Arbeitsplanung oder auch eine geringe Intelligenz), die das Lernen von Mathematik beeinträchtigen können.

Die gegenwärtige Praxis des Förderunterrichts scheint allerdings vielerorts kaum die Schwierigkeiten der Lernenden zu berücksichtigen: „Der Modus der `Beschäftigung´ lässt den verstehenden Zugang zu Schwierigkeiten und ihren möglichen Ursachen außer Acht. Die Frage der Passung stellt sich auf diese Weise gar nicht." (Wielpütz 2010, 111).

Die von Wielpütz aufgeworfene Frage nach Passung zielt nicht allein auf das einzelne Kind, sondern auf den Lerngegenstand Mathematik und somit auf die Berücksichtigung der mathematischen Grundideen. Für alle Kinder ist es mit Blick auf das Lernen von Mathematik unabdingbar, dass sie grundlegende Vorstellungen zu Zahlen und den elementaren Rechenoperationen aufbauen sowie strukturelle Einsichten in Zahlbeziehungen und operative Zusammenhänge gewinnen (vgl. Häsel-Weide & Nührenbörger 2012). Scherer und Moser Opitz (2010) weisen entsprechend mathematischen Basisstoff aus, der notwendigerweise von allen Kindern in ihrer mathematischen Lernentwicklung verstanden werden muss. Die Beachtung des Basisstoffs erlaubt der Lehrkraft, die individuelle Arbeit des Kindes an den bedeutsamen Inhalten gezielt zu begleiten. Denn „diese Inhalte stellen offenbar zentrale Hürden im mathematischen Lernprozess dar" (Meyerhöfer 2011, S. 411).

## 2. Produktives Fördern

Förderprozesse werden *produktiv*, wenn sie vom Fach her authentische Anlässe bieten, so dass sich die Lernenden bewusst und aktiv-entdeckend mit dem Basisstoff und den damit verknüpften stofflichen Hürden auseinander setzen. Hierbei geht es um eine Förderung, die am produktiven Üben (Wittmann 1997) ansetzt und somit für alle Kinder, auch für Kinder mit Lernschwierigkeiten, inhaltliche und allgemeine Lernziele integriert und einen breiten Zugang zum Erkunden und Begründen elementarer mathematischer Beziehungen (vgl. auch Scherer 2000) ermöglicht. Eine wesentliche Komponenten produktiven Förderns stellt die Automatisierung der Basiskompetenzen dar, deren gedächtnismäßig verfügbare Beherrschung eine unabdingbare Voraussetzung für den produktiven Umgang mit Mathematik und für verstehensorientierte nachhaltige Lernprozesse sind (vgl. Wittmann & Müller 2012).

Sollen lernschwächere Schülerinnen und Schüler in diesem Sinne produktiv mathematisch gefördert werden, dann kehrt sich die eingangs angesprochene Bedeutung „individueller Förderung“ dahingehend um, dass das Ziel individueller Förderung nicht mehr das Gewähren von mehr Zeit und die Beschäftigung mit sog. passgenauen Aufgabenstellungen ist, die isoliert von Lernprozessen anderer Kinder bearbeitet werden. Vielmehr geht um eine Förderung, die am Wissen der lernschwächeren Kinder ansetzt und sowohl verstehensorientiert als auch kommunikativ aus der Sache heraus strukturiert ist (vgl. Häsel-Weide & Nührenbörger 2012, Hußmann u.a. 2014).

## 3. Ansätze im Entwicklungsprojekt Mathe-sicher-können

Im Projekt mathe-sicher-können werden Lernende gefördert, denen elementare Verstehensgrundlagen der ersten Grundschuljahre fehlen. Hierzu sind – methodologisch eingerahmt in die Entwicklungsforschung – Standortbestimmungen für den mathematischen Basisstoff der Grundschule konzipiert worden, die eng mit entsprechenden Förderangeboten verknüpft sind (vgl. Hußmann u.a. 2014, Selter u.a. 2014). Um den lernschwächeren Kindern individuell nachhaltige Lernprozesse zu ermöglichen, die über eine Wiederholung und Festigung von Prozeduren des Ausrechnens hinausgehen, werden die Förderaufgaben in problem- und operativ-strukturierte Kontexte eingebunden. Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler die Gelegenheit, strukturelle Zusammenhänge zu erkunden und hinsichtlich ihrer Bedeutung für das Rechnen zu erkennen. Hierbei ist es wichtig, dass die Lernenden ihre bereits gewonnenen Kompetenzen einbringen und somit Vertrauen in alternative Rechenwege entwickeln können. Zudem bietet die strukturelle Integration von Aufgaben aus verschiedenen Jahrgängen die Lernchance, Verstehensprozesse auf unterschiedlich vorstellbaren Zahlenniveau zu verbinden, so dass inhaltlich aktuelle Lernprozesse mit vergangenen verknüpft werden, ohne die gegenwärtigen Anforderungen zu trivialisieren.

Die kollektive Einbindung der individuellen Lernprozesse erfolgt durch eine Anreicherung der Förderaufgaben um produktive Konfrontationen mit fremden Lösungswegen sowie didaktisierten Fehl-Lösungsprozessen. Hierzu wurden im Vortrag gezielte Anregungen präsentiert

- zur Beschreibung und interaktiv ausgerichteten Darstellung eigener Lösungsprozesse,
- zum reflektierten Vergleich verschiedener Zugänge und zur Begründung mathematischer Zusammenhänge sowie

– zum immanenten Produktion von Lösungswegen und Anwendung neuer Zugänge.

Wesentlich für Sicherheit im mathematischen Denken sind letztlich fachlich substanzielle Anlässe, die kommunikativ eingebettet sind. Gerade die kommunikativen Anlässe sind für lernschwächere Kinder, die oftmals im alltäglichen Mathematikunterricht weniger Möglichkeiten haben, sich aktiv ins Gespräch einzubringen, von zentraler Bedeutung: Sie werden herausgefordert, bewusst mathematische Strukturen zu fokussieren, um ihr Verständnis der mathematischen Beziehungen auszudrücken und zugleich im Zuge der Verständigung mit anderen Lernenden auszuweiten.

## Literatur


Deutscher, T.; Prediger, S. & Selter, C. (2013). Mathe sicher können. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 252-255). Münster: wtm.

Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2012). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern – Kompetenzen stärken*. (Vol. 134, Heft 4). Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Hußmann, S., Nührenbörger, M., Prediger, S., Selter, C., & Drüke-Noe, C. (2014). *Schwierigkeiten in Mathematik begegnen*. Praxis der Mathematik(56).

Kretschmann, R. (2007). Lernschwierigkeiten, Lernstörungen und Lernbehinderung. In J. Walter & F. Wember (Hrsg.), *Sonderpädagogik des Lernens* (S. 4-32), Göttingen: Hogrefe.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden. *Pädagogische Rundschau*, 65(4), 401-426.

Moser Opitz, E. (2008). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen* (3 ed.). Bern: Haupt.

Scherer, P. (2000). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern.* Band 1: Zwanzigerraum (2 ed.). Horneburg: Persen.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe.* München: Spektrum.

Schipper, W. (2005). *Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern* (Sinus Transfer Grundschule) Kiel: IPN.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, St. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können*. (Natürliche Zahlen bzw. Brüche, Prozente und Dezimalzahlen). Berlin: Cornelsen,.

Wember, F. (2013). Herausforderung Inklusion. *Zeitschrift für Heilpädagogik* (10), 380-388.

Wielpütz, H. (2010). Qualtitätsanalyse und Lehrerbildung. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbeke (Eds.), *Mathematik im Denken der Kinder* (S. 109-114). Seelze: Klett-Kallmeyer.

Wittmann, E.C. (1997). Wider die Flut der "bunten Hunde" und der "grauen Päckchen". In E.C. Wittmann & G.N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1.* (S. 157-170). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E.C. & Müller, G.N. (2012). *Das Zahlenbuch 1. Begleitband*. Leipzig: Klett.

Andreas OBERSTEINER, München

# Reaktionszeiten und Blickbewegungen beim Größenvergleich von Brüchen

## 1. Theoretischer Hintergrund

Der sichere Umgang mit Brüchen ist ein bedeutender Inhaltsbereich mathematischer Kompetenz. Gleichzeitig gehören Brüche zu den wohl problematischsten Lerninhalten für viele Schülerinnen und Schülern. Schwierigkeiten treten offenbar nicht erst bei komplizierten Rechnungen auf, sondern beziehen sich bereits auf ein mangelndes Grundverständnis für Brüche (z. B. Wartha & Wittmann, 2009). Ein wesentliches Problem scheint zu sein, dass Brüche nicht als *eine* (rationale) Zahl, sondern dass Zähler und Nenner eines Bruchs als *zwei* getrennte (natürliche) Zahlen angesehen werden, deren Beziehung zueinander nicht erkannt wird. Deutlich wird dies in Aufgabenstellungen, bei denen der Rückgriff auf die von einem Bruch repräsentierte Bruchzahl einer algorithmischen Herangehensweise überlegen ist, beispielsweise, wenn das Ergebnis von 12/13 + 7/8 schnell abgeschätzt werden soll. In einer US-amerikanischen Studie mit Achtklässlern wählten mehr als die Hälfte der befragten Schülerinnen und Schüler nicht etwa 1 oder (das richtige Ergebnis) 2, sondern 19 oder 21 aus (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist & Reys, 1981). Es ist plausibel anzunehmen, dass eine komponentenweise Betrachtung der Brüche zu diesen Ergebnissen führte. Ähnliche Ergebnisse sind in der Literatur vielfach belegt (vgl. Padberg, 2009). Auch beim Größenvergleich zweier Brüche wurde gefunden, dass sich Schülerinnen und Schüler dabei häufig auf die Komponenten der Brüche stützen, anstatt die Bruchzahlen selbst zu berücksichtigen, dass sie also beispielsweise 1/4 als größer als 1/3 einschätzen, weil 4 größer ist als 3 (Van Hoof, Lijnen, Verschaffel & Van Dooren, 2013).

In jüngeren Studien wurde versucht, die psychologischen Hintergründe für Fehlvorstellungen bei Brüchen zu ergründen. Eine dafür relevante Frage ist, ob beim mentalen Verarbeiten von Brüchen automatisch Größenvorstellungen zu den Komponenten der Brüche aktiviert werden. Eine solche Annahme kann damit begründet werden, dass natürliche Zahlen lange vor rationalen Zahlen gelernt werden, wodurch möglicherweise automatisierte Verarbeitungsprozesse erworben werden (Hubbard, Piazza, Pinel & Dehaene, 2005). In der Literatur ist umstritten, ob die mentale Verarbeitung von Brüchen ausschließlich durch die getrennte Verarbeitung der Komponenten oder auch holistisch erfolgen kann. In computerbasierten Experimenten kamen Bonato, Fabbri, Umiltà und Zorzi (2007) zu dem Schluss, dass die Reaktionszeiten beim Bruchzahlvergleich von der Differenz der Kompo-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 867–870). Münster: WTM-Verlag

nenten, nicht aber von der Differenz der Bruchzahlen abhingen, was eine *komponentenbasierte* Vergleichsstrategie nahelegt. In dem Experiment wurden allerdings überwiegend Stammbrüche verwendet, so dass diese Schlussfolgerung nicht verallgemeinert werden kann. Für Brüche ohne gleiche Komponenten fanden Schneider und Siegler (2010) dagegen, dass die Reaktionszeiten besser durch die Differenz der Brüche als durch die Differenz der Komponenten vorhergesagt werden konnte, was eine *holistische* Strategie nahelegt. Meert, Grégoire und Noël (2010) schlugen dagegen ein hybrides Modell vor, das sowohl holistische als auch komponentenbasierte Elemente enthält. Eine entscheidende Einschränkung der genannten Studien ist, dass ausschließlich oder teilweise Spezialfälle von Brüchen oder Vergleichsaufgaben (Stammbrüche, gleiche Komponenten, besonders bekannte Brüche wie 3/4) verwendet wurden. Bisher wurde nicht systematisch untersucht, welche Strategien für verschiedene Typen von Bruchzahlvergleichen angewendet werden. Insbesondere ist damit noch nicht geklärt, ob es überhaupt möglich ist, holistische Verarbeitungsstrategien beim Vergleich von Brüchen erfolgreich einzusetzen.

## 2. Fragestellung

In den beiden im Folgenden vorgestellten Experimenten wurde untersucht, ob Personen mit hoher Expertise in Mathematik beim Bruchzahlvergleich „komponentenbasierte" oder „holistische" Strategien anwenden. Die Hypothese war, dass holistische Strategien nur dann zum Einsatz kommen, wenn die zu vergleichenden Brüche keine gleichen Komponenten besitzen. Haben die Brüche dagegen gleiche Komponenten, so sind komponentenbasierte Strategien effektiver und sollten von Personen mit hoher Expertise auch tatsächlich eingesetzt werden.

## 3. Experiment 1

An diesem Experiment nahmen 44 Personen (22–54 Jahre; 11 weiblich) teil, die einen universitären Abschluss in Mathematik hatten und am Mathematischen Institut einer (belgischen) Universität beschäftigt waren (26 als Doktoranden, 12 als Postdocs, 6 als Professoren). In Einzelsitzungen wurden diesen Personen nacheinander insgesamt 90 Bruchpaare an einem Computerbildschirm gezeigt. Die Probanden sollten per Tastendruck so schnell und korrekt wie möglich entscheiden, welcher von beiden Brüchen der größere ist. Reaktionszeiten und Lösungsraten wurden dabei vom Computer erfasst. 36 Bruchpaare hatten gleiche Komponenten (18 gleiche Zähler, 18 gleiche Nenner), die übrigen 54 hatten keine gleichen Komponenten.

Die Analyse der Lösungsraten zeigte zunächst, dass fast alle Aufgaben ($M = 97\%$) korrekt gelöst wurden. Hinsichtlich der Reaktionszeiten gab es aber deutliche Unterschiede: Aufgaben mit gleichen Komponenten wurden systematisch schneller gelöst ($M$ = 1919 ms) als Aufgaben ohne gleiche Komponenten ($M$ = 4145 ms), was die Verwendung unterschiedlicher Strategien nahelegt. Lineare Regressionsanalysen zeigten, dass nur für Brüche ohne gleiche Komponenten die Reaktionszeiten signifikant von der numerischen Distanz der Brüche abhingen, $R^2 = .47$, $B = -6739$; $p < .001$, – was auf eine holistische Strategie hindeutet –, nicht aber bei Brüchen mit gleichen Komponenten, $R^2 = .02$; $B = -363$; $p = .370$. Es zeigte sich aber auch, dass die Reaktionszeiten durch weitere Aufgabenmerkmale beeinflusst wurden (für Details zu dieser Studie siehe Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof & Verschaffel, 2013).

## 4. Experiment 2

Das Erfassen von Strategien beim Größenvergleich von Brüchen ist aus methodischer Sicht problematisch. Die Erfassung von Reaktionszeiten wie in Experiment 1 ist sicherlich einer direkten Befragung überlegen, sie stellt aber nur ein indirektes Maß für die tatsächlich angewendeten Strategien dar. In Experiment 2 wurde deshalb überprüft, ob die Methode des Eye-Trackings geeignet ist, Strategien beim Bruchzahlvergleich abzubilden. Als Vergleichsaufgaben wurden 32 der in Experiment 1 verwendeten Aufgaben ausgewählt (jeweils 16 mit bzw. ohne gleiche Komponenten). An dem Experiment nahmen acht Personen teil (19–42 Jahre; 5 weiblich), davon sechs Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter der Technischen Universität München mit Universitätsabschluss im Fach Mathematik und zwei Studierende der Mathematik.

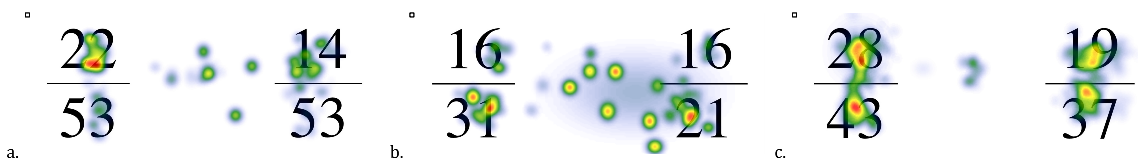



**Abbildung 1: Heatmaps für Beispielitems mit gleichen Nennern (a.), gleichen Zählern (b.) bzw. ohne gleiche Komponenten (c.)**

Zur Auswertung der Blickbewegungen wurden zwei gleich große rechteckige Areas of Interest (AOIs) definiert, welche die beiden Zähler beziehungsweise die beiden Nenner der zu vergleichenden Brüche umschlossen. Die Auswertung der Fixationszeiten in diesen AOIs zeigte wie erwartet, dass bei Brüchen mit gleichen Nennern die Zähler signifikant länger betrachtet wurden als die Nenner, Wald $\chi^2(1, N = 7) = 21.47$, $p < .001$. Bei Brüchen mit gleichen Zählern war es umgekehrt, Wald $\chi^2(1, N = 7) = 5.76$, $p = .016$. Bei den Brüchen ohne gleiche Komponenten bestand kein signifikanter Unterschied zwischen den Fixationszeiten für Zähler und Nenner, Wald $\chi^2(1, N = 7) = 2.28$, $p = .131$. Abbildung 1 illustriert dieses Ergebnis exemplarisch an drei Beispielitems.

## 5. Diskussion

Sowohl die Analyse der Reaktionszeiten in Experiment 1 als auch die der Blickbewegungen in Experiment 2 zeigen deutlich, dass mathematisch versierte Erwachsene beim Bruchzahlvergleich wie erwartet eine komponentenbasierte Strategie anwenden, wenn die Brüche gleiche Komponenten haben, aber eine holistische, wenn dies nicht der Fall ist. Die vorliegenden Ergebnisse deuten einerseits auf die Existenz holistischer Verarbeitungsstrategien hin, andererseits auf die Eignung der Methode des Eye-Trackings zur Differenzierung der angewendeten Strategie auf individueller Ebene. In weiteren Analysen könnte der Frage nachgegangen werden, inwiefern die Strategiewahl von individuellen Faktoren und von weiteren Aufgabenmerkmalen abhängt.

## Literatur


Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C. & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 33*, 1410–1419.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M. & Reys, R. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P. & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience, 6*, 435–448.

Meert, G., Grégoire, J. & Noël, M.-P. (2010). Comparing 5/7 and 2/9: adults can do it by accessing the magnitude of the whole fractions. *Acta Psychologica, 135*, 284–292.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction, 28*, 64–72.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schneider, M. & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 36*, 1227–1238.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education, 15,* 154–164.

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (109–122). Weinheim. Beltz.

Julia OLLESCH, Heidelberg, Marcus SCHWARZ, Peter SEDLMEIER, Chemnitz, Markus VOGEL, Heidelberg

# Fragen der multimedialen Unterstützung beim Beurteilen des Verhaltens einfacher dynamischer Systeme

Die Fähigkeit Zusammenhänge und Wirkungen innerhalb eines Systems zu durchschauen und mögliche Entwicklungen oder Reaktionen qualitativ abzuschätzen sind wichtige Bestandteile des Verständnisses von dynamischen Systemen. Aufgrund psychologisch gesicherter Befunde sollte die repräsentationale Aufbereitung einen wesentlichen Einfluss hierauf nehmen. Dies war der Anlass für diesbezügliche Studien an der TU Chemnitz sowie deren Replikation an der Universität Heidelberg.

## Theoretischer Hintergrund

Dynamische Systeme sind einer Zeitentwicklung unterworfen. Sowohl in der Natur als auch in der Theorie, beispielsweise in der Physik, Biologie oder Ökonomie, unterliegen viele Systeme einer solchen Zeitentwicklung.

Die mathematische Theorie der dynamischen Systeme beschäftigt sich mit Modellen dieser Systeme (Einsiedler & Schmidt 2014). Dabei wird eine Unterscheidung kontinuierlicher und diskreter Systeme vorgenommen. Ein häufig angeführtes Beispiel für ein kontinuierliches dynamisches System ist das sogenannte „Badewannen-Problem“. Hierbei handelt es sich um den Wasserbestand in einer Badewanne, der durch Aufdrehen des Zuflusses (bei gleichbleibendem Abfluss) erhöht werden kann und durch Aufdrehen des Abflusses (bei gleichbleibendem Zufluss) verringert. Ein diskretes dynamisches System findet sich zum Beispiel bei einem Konto wieder. Es befindet sich ein gewisser Betrag (Bestand) auf dem Konto, der sich durch Überweisungen (Zu- und Abfluss) verändert.

Da komplexe Systeme oftmals mit Hilfe eines dynamischen Modells dargestellt werden, ist es von großer Bedeutung ein Verständnis für die Repräsentation solcher Modelle zu entwickeln. Nach Kaput (1989) kann die Verknüpfung multipler Repräsentationen synergetisch zu einem höheren Informationsgehalt führen. Multiple Repräsentationen sollen nicht nur Darstellungspräferenzen der Lernenden bedienen, sondern auch durch das mehrperspektivische Abbilden darin unterstützen, zugrundeliegende Problemstrukturen zu erkennen und dadurch das Verständnis zu vertiefen (Ainsworth 1999).

Unter dem Aspekt der Multicodierung betrachtet bieten multiple Repräsentationen die Möglichkeit, einen Sachverhalt sowohl textuell als auch bildlich (insbesondere mit dynamischen Bildern) oder in Mischformen darzu-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 871–874). Münster: WTM-Verlag

stellen. Nach Schnotz und Bannert (1999) ergänzen sich diese Darstellungen gegenseitig im Verstehensprozess.

Beim Einsatz multipler Repräsentationen darf dennoch nicht vergessen werden, dass auch Schwierigkeiten auftreten können. So ist z. B. nach Mandl et al. (2002) neben einem hohen Aufwand ebenso eine mögliche Überforderung der Schüler(innen) durch das Medium zu bedenken.

## Studie

### Forschungsfrage

Die nachfolgend dargestellte Studie beschäftigt sich mit der Frage, ob sich multiple Repräsentationen unterstützend auswirken im Hinblick auf die Beurteilung des Verhaltens einfacher dynamischer Systeme. Direkt anschließend hieran stellt sich die weiterführende Frage nach der hilfreichsten Repräsentation.

### Methode

Zum Zwecke der Replikation wurden die bereits vorhandenen Treatments einer vorausgehenden Chemnitzer Studie als Grundlage verwendet. In einem 2 x 2 – Design wurden die verschiedenen Kombinationen eines animierten Films und eines animierten Diagramms entwickelt. Zusätzlich wurde eine Unterscheidung bezüglich der Anzeige, die Stärke des Zu- und Abflusses wiedergibt, getroffen: eine klassische Balkenanzeige im Vergleich zu einer Anzeige mittels Tacho. Somit entstanden insgesamt acht Treatments, die in einem 2 x 2 x 2 – Design an 80 Studierenden (Anteil weibliche Studierende ca. 61 %) getestet wurden.

Die Studierenden wurden randomisiert in die acht Treatmentgruppen zugeteilt und erhielten die entsprechende Power-Point-Präsentation, die sie einzeln am Computer in einem automatisierten Ablauf anschauten. Außerdem bekamen die Studierenden einen Paper-Pencil-Test, der aus drei Aufgaben mit folgenden Teilen bestand:

- Einzeichnen des Bestandsdiagramms in Abhängigkeit von gegebenem Zu- und Abfluss
- Subjektive Einschätzung der Sicherheit bezüglich der Lösung
- 5 Verständnisfragen zum eingezeichneten Diagramm
- Subjektive Einschätzung der Schwierigkeit der Aufgabe

**Resultate**

Zunächst wurde der Unterschied überprüft, der durch die beiden Anzeigen (Balken/Tacho) entsteht. Da hier kein statistisch bedeutsamer Unterschied festzustellen war, wurden für die folgenden Ergebnisse die entsprechenden Treatments zusammengefasst.

Die Forschungsfrage konnte bezüglich der Leistung nicht klar beantwortet werden, allerdings ergab sich in einer Varianzanalyse, dass 13 % ($F = 3{,}693$; $p < 0{,}015$) der Varianz bezüglich subjektiver Sicherheit/Leichtigkeit durch das Treatment erklärt werden.

Die Analyse der Daten ließ keinen statistisch bedeutsamen Effekt zugunsten eines Treatments erkennen, jedoch weisen sowohl in der Gesamtleistung als auch bezüglich der subjektiven Sicherheit / Leichtigkeit die Ergebnisse darauf hin, dass das Treatment „Film“ als hilfreichstes Treatment wahrgenommen wird.

In einer explorativen Datenanalyse wurde über die Forschungsfragen hinaus nach genderspezifischen Unterschieden geschaut.

Hierbei ergaben sich Unterschiede sowohl bezüglich der Gesamtleistung als auch bezüglich der subjektiven Sicherheit in der Treatmentgruppe „Film“. Dies wurde mit Hilfe eines Mann-Whitney-Tests (U-Test) überprüft. Der Vergleich zwischen männlichen ($m = 14$) und weiblichen Probanden ($m = 8$) ergab, dass die männlichen Probanden besser abschneiden ($U = 13$; $p = 0{,}012$, asymptotische Signifikanz) und sich zudem sicherer bei der Beantwortung der Fragen fühlen ($U = 14{,}5$; $p = 0{,}020$, asymptotische Signifikanz). Außerdem konnten Unterschiede in der Treatmentgruppe „Film & Diagramm“ bezüglich der subjektiven Leichtigkeit festgestellt werden. Auch hier wurde ein U-Test durchgeführt. Die männlichen Probanden ($m = 15$) verglichen mit den weiblichen ($m = 8$) empfanden die Aufgaben als signifikant leichter ($U = 17$; $p = 0{,}008$, asymptotische Signifikanz).

In einer multivarianten Varianzanalyse zeigte sich, dass bereits 27 % ($F = 13{,}816$; $p < 0{,}001$) der Varianz bezüglich subjektiver Sicherheit/Leichtigkeit und der Gesamtleistung durch das Geschlecht erklärt werden.

Da diese Befunde auf einer explorativen Datenanalyse beruhen und daher weder theorie- noch hypothesengeleitet entstanden sind, lassen sie keine Schlussfolgerungen zu. Die Befunde können allerdings für periphere Studien im Bereich der Genderforschung wertvolle Hinweise geben.

## Diskussion

Nach dieser Studie können multiple Repräsentationen als unterstützendes Medium zum Thema dynamische Systeme gewinnbringend eingesetzt werden. Es konnten zwar keine statistisch bedeutsamen Leistungsunterschiede bei den Studierenden festgestellt werden, die Studierenden fühlten sich aber durch bestimmte Treatments mitbedingt sicherer im Umgang mit dem Thema.

Die Anzahl an Probanden ist in der vorliegenden Studie sehr gering. Dies ist eine mögliche Erklärung dafür, dass keine statistisch bedeutsamen Leistungsunterschiede zu erkennen waren.

Die Studie entstand im Rahmen der Zulassungsarbeit an der Uni Heidelberg bei Prof. Dr. Monika Buhl mit Unterstützung von Prof. Dr. Markus Vogel (PH Heidelberg) und in Kooperation mit Prof. Dr. Peter Sedlmeier und Marcus Schwarz (TU Chemnitz). Die Zulassungsarbeit wurde an ein Projekt der TU Chemnitz angegliedert und in diesem Rahmen wurden bereits vorliegende Studien repliziert.

Insgesamt konnten die Ergebnisse der Studien der TU Chemnitz durch die replizierende Studie bestätigt werden. Für deutlichere Ergebnisse könnte die Stichprobenzahl erhöht, sowie weitere Forschung auf Basis der gefundenen Ergebnisse durchgeführt werden.

## Literatur


Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education, 33*(2-3), 131–152.

Einsiedler, M. & Schmidt, K. (2014). *Dynamische Systeme. Ergodentheorie und topologische Dynamik.* Basel: Springer Birkhäuser.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In: S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (S. 167-194). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mandl, H., Gruber, H. & Renkl, A. (1997). Situiertes Lernen in multimedialen Lernumgebungen. In: L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia* (S. 166–178). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Schnotz, W. & Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text-und Bildverstehen. *Zeitschrift für Experimentelle Psychologie, 46*(3), 217–236.

Andreas OSTERMANN, Timo LEUDERS, Freiburg

# Die Rolle schwierigkeitsgenerierender Merkmale bei der Schwierigkeitseinschätzung von Aufgaben zum Funktionalen Denken

## Theoretischer Hintergrund und Fragestellung

Adaptives Unterrichten setzt bei Lehrkräften die Fähigkeit zur Einschätzung von Lernvoraussetzungen als eine wesentliche Facette fachdidaktischer Kompetenz (PCK) voraus. In der Schulpraxis sollte sich diese Art diagnostischer Fähigkeit u.a. darin manifestieren, dass Lehrkräfte in der Lage sind, Lern- und Aufgabenanforderungen, spezifische Schwierigkeiten und Bearbeitungszeiten adäquat einzuschätzen (Anders et al. 2010). Als Indikator hierfür gilt nach Helmke und Schrader (1987) die angemessene Schätzung von erwarteten Lösungshäufigkeiten in einer Lerngruppe (*Niveaukomponente*), sowie die Angabe einer angemessenen Schwierigkeitsrangfolge von Aufgaben (*Rangkomponente*) . Studien belegen jedoch erhebliche Fehleinschätzungen bei der Beurteilung von Aufgabenschwierigkeiten: Nathan und Koedinger (2000) ließen angehende und berufserfahrene Mathematiklehrkräfte eine Reihe arithmetischer und algebraischer Aufgaben danach beurteilen, wie schwer diese Lernenden vermutlich fallen und stellten fest, dass deren Einschätzungen sehr stark von der empirisch ermittelten Schwierigkeit abwichen. Sie interpretierten ihre Befunde als Evidenz für einen sogenannten *Expert-Blind-Spot*: Hohes Fachwissen erschwerte es den Lehrkräften, sich in die Perspektive der Schülerinnen und Schüler hineinzuversetzen.

Über die rein fachlichen Schwierigkeiten (theoretische Aufgabenkomplexität) hinaus zeigen Schüler im Umgang mit Funktionen typische Fehler, die von Fehlannahmen bzw. Alltagsvorstellungen herrühren. Constantia Hadjidemetriou (2009) nennt u.a. folgende Fehlertypen, die dem korrekten Lösen einer Aufgabe manchmal im Wege stehen: *Vermeidung negativer Koordinatenbereiche, Neigung zur Linearität und zu glatten Kurven, Neigung zu Ursprungsgraphen, Graph-als-Bild-Fehler, Probleme mitaußergewöhnlichen Skalen.*

Die hier vorliegende Studie untersucht, ob und inwieweit sich die Schwierigkeitseinschätzung von Aufgaben zum Thema „Funktionale Zusammenhänge“ durch die Vermittlung von fachdidaktischem Wissen zu typischen Fehlvorstellungen verbessern lässt und ob diese Art von Wissen mehr bewirkt als eine reine Sensibilisierung für Verschätzungen im Sinne des Expert-Blind-Spots.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 875–878). Münster: WTM-Verlag

**Methode**

110 Studierende der Pädagogischen Hochschule Freiburg (davon 81w) wurden randomisiert auf drei Gruppen verteilt: *Fachdidaktikgruppe, Sensibilisierungsgruppe, Kontrollgruppe.* Die gesamte Studie wurde an Computerarbeitsplätzen in Form eines Online-Fragebogens durchgeführt. Das Design folgt dem einer typischen Interventionsstudie: Sowohl im Prä- als auch im Posttest wurden zu 10 graphische Aufgaben mit einer mittleren empirischen Lösungshäufigkeit 49.86% (SD=22.06%) erwartete Lösungshäufigkeiten für eine repräsentative achte Klasse des Gymmasiums sowie die Schwierigkeitsrangfolge der Aufgaben geschätzt.

Im Interventionsteil wurde der ***Fachdidaktikgruppe*** fachdidaktisches Wissen über schwierigkeitsgenerierende Merkmale und typische Fehlvorstellungen von Schülern (nach Hadjidemetriou) präsentiert und in Textform erläutert. Daraufhin erhielten die Teilnehmer folgende Aufgaben: 1. Beurteilung der Relevanz dieser Fehlvorstellungen für die Schwierigkeit von Aufgaben zum Thema „Funktionale Zusammenhänge" generell (Likert-Skalen). 2. Beurteilung der Relevanz dieser Fehlvorstellungen für fünf neue graphischen Aufgaben (Likert-Skalen). Nicht alle diese Aufgaben enthielten waren anfällig für die Fehlvorstellungen. 3. Nennen von eventuellen Schwierigkeiten dieser neuen Aufgaben (offene Texteingabe). 4. Erklärung über mögliches Zustandekommen von Lösungshäufigkeiten zu drei graphischen Items (offene Texteingabe). 5. Beurteilung der Relevanz der Fehlvorstellungen in der eigenen Schulzeit in Form einer Selbstreflexion (Likert-Skalen).
Die in der Intervention erhobenen Daten wurden nicht ausgewertet. Die Fragen im Interventionsbaustein dienten lediglich dem Ziel, dass sich die Probanden intensiv mit den Inhalten beschäftigen.

Die ***Sensibilisierungsgruppe*** wurde im Interventionsteil lediglich durch folgenden Textbaustein für den Expert-Blind-Spot sensibilisiert:
*„Zahlreiche empirische Studien haben ergeben, dass Lehrkräfte bei der Beurteilung von Aufgabenschwierigkeiten teilweise zu erheblichen Fehleinschätzungen neigen. Dies ist auf ihr breit gefächertes und reichhaltig vernetztes Fachwissen zurück zu führen. Die Lehrkräfte unterliegen der sogenannten "Illusion der Einfachheit" und schätzen die Aufgaben meistens leichter ein, als sie den Schülerinnen und Schülern tatsächlich fallen. Sie werden nun gebeten, die Aufgaben vom Beginn des Fragebogens erneut einzuschätzen."*

Die ***Kontrollgruppe*** erhielt zwischen Prä- und Posttest keinerlei inhaltliche Information, jedoch erhielten die Kontrollgruppe sowie die Sensibilisierungsgruppe nach dem Posttest den Interventionsbaustein mit dem fachdidaktischen Wissen nach zur Gleichbehandlung der Gruppen.

## Ergebnisse

Sowohl die Überschätzungen der Lösungshäufigkeiten in Prozent (Ordinate in Abb.1), wie auch die Fisher-Transformierten der Rangkorrelationen der geschätzten Schwierigkeitsrangfolge mit der empirischen Schwierigkeitsrangfolge (Ordinate in Abb.2) zeigten sich im Kolmogorov-Smirnof-Test sowohl im Prä- als auch im Posttest als hinreichend normalverteilt, sodass parametrische Analyseverfahren angewandt werden konnten:

*Niveaukompentente*:

Zur Analyse der Veränderung der Niveaukomponente im Prä-Postvergleich in den drei Gruppen wurde eine Varianzanalyse mit Messwiederholung durchgeführt. Es zeigte sich eine Verbesserung der Niveaukompentente (Überschätzung der Lösungshäufigkeit in Prozent) sowohl in der Fachdidaktikgruppe als auch in der Sensibilsierungsgruppe, wie in Abb. 1 zu erkennen ist. In der Kontrollgruppe blieb die Niveaukomponente im Prä- Postvergleich konstant:

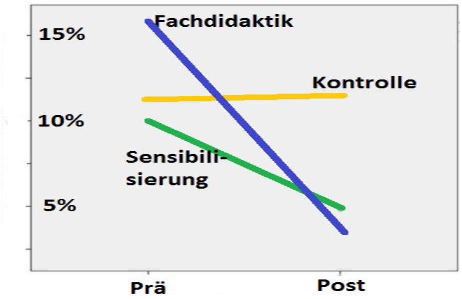



**Abb.1.: Niveaukomponente**

Haupteffekt (Faktor x Messzeitpunkt) in ANOVA mit Messwiederholung: $F=54.583$, $p=0.000$, part. $\eta^2=0.344$. Interaktionseffekt (Messzeitpunkt x Gruppe): $F=23.400$, $p=0.000$, part. $\eta^2=0.310$.

*Rangkomponente*:

Um die Veränderung der Rangkomponente in den drei Gruppen zu messen, wurde auch hier eine Varianzanalyse mit Messwiederholung durchgeführt. Es zeigte sich nur in der Fachdidaktikgruppe eine Verbesserung der Rangkomponente, wie in Abb.2 zu erkennen ist. In der Sensibilisierungsgruppe und in der Kontrollgruppe blieb die Rangkomponente konstant.

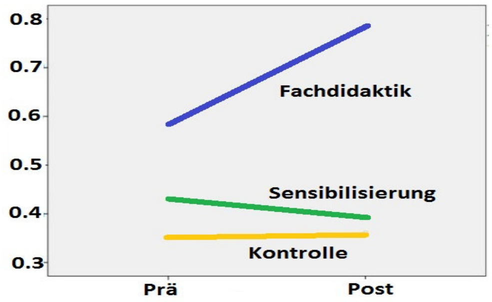



**Abb. 2.: Rangkomponente**

Haupteffekt (Faktor x Messzeitpunkt) in ANOVA mit Messwiederholung: $F=4.697$, $p=0.032$, part. $\eta^2=0.043$. Interaktionseffekt (Messzeitpunkt x Gruppe) : $F=7.43$, $p=0.001$, part. $\eta^2=0.126$.

## Zusammenfassung

In einer Interventionsstudie wurde die Wirkung verschiedener Treatments auf die Schwierigkeitseinschätzung von Aufgaben zum Funktionalen Denken untersucht. Es zeigte sich, dass die Vermittlung von Wissen über schwierigkeitsgenerierende Merkmale und typische Fehlvorstellungen von Schülern sowohl die Schätzung realistischer Lösungshäufigkeiten als auch der Schwierigkeitsrangfolge verbessert. Eine reine Sensibilisierung für Verschätzungstendenzen im Sinne des Expert-Blind-Spots lässt die Rangkomponente unbeeinflusst. Die Probanden scheinen das neu erworbene fachdidaktische Wissen über Fehlvorstellungen in ihr bereits vorhandenes Wissen über die rein mathematisch konzeptuelle Schwierigkeit einer Aufgabe auf eine Weise integriert zu haben, die eine deutlich bessere Einschätzung von Aufgabenschwierigkeiten auf verschiedenen Ebenen ermöglicht. Das Wissen über Fehlvorstellungen spielt damit eine Schlüsselrolle in diesem Integrationsprozess schwierigkeitsgenerierender Merkmale bei der Einschätzung von Aufgabenschwierigkeiten im Bereich der funktionalen Zusammenhänge.

## Literatur

Anders, Y., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2010). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften und ihre Auswirkungen auf die Leistungen ihrer Schülerinnen und Schüler [Mathematics teachers' diagnostic skills and their impact on students' achievements]. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 57,* 175–193

Hadjidemetriou, Constantia; Williams, Julian (2001): "Children's graphical conceptions: assessment of learning for teaching." In: Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3, S. 89-104.

Nathan, Mitchell J., and Kenneth R. Koedinger. "An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development." Cognition and Instruction18.2 (2000): 209-237.

Schrader, F.-W. & Helmke, A. (1987). "Diagnostische Kompetenz von Lehrern: Komponenten und Wirkungen." Empirische Pädagogik, 1, 27–52

Barbara OTT, Bamberg

# Kinder zeichnen zu Textaufgaben – Vorstellung eines Instruments zur Analyse graphischer Darstellungen

Darstellungen sind in der Mathematik und im Mathematikunterricht wesentlich für Erkenntnisprozesse (vgl. Dörfler 2006, Bruner 1966). Im Beitrag werden Darstellungen als Inskriptionen verstanden, d. h. als „signs, that are materially embodied in some medium" (Roth & McGinn 1998, 37). Auch ikonische Darstellungen (Peirce 1986, 205ff) sind in der Mathematik von Bedeutung. Im Sachrechnen spielen sie u. a. als graphische Bearbeitungshilfen eine Rolle, die die Lernenden bei der Mathematisierung der Sachaufgaben unterstützen sollen (vgl. Franke & Ruwisch 2010, 103ff). Hasemann (2006) hebt hervor, dass hierbei die Darstellung der mathematischen Beziehungen einer Aufgabe wesentlich sei, realistische Darstellungen trügen zur Problemlösung wenig bei. Kindern bereite die Strukturabbildung jedoch oft Schwierigkeiten (s. a. Franke & Ruwisch 2010, 103).

Im Projekt wurden Schülerinnen und Schüler der Primarstufe aufgefordert, zu Textaufgaben zu zeichnen. Dabei ist zum einen von Interesse, inwieweit die den Textaufgaben inhärenten mathematischen Strukturen in graphischen Eigenproduktionen der Kinder wiedererkennbar sind, d. h. ob mathematische Strukturen abgebildet werden und welche Passung zwischen ihnen und den Strukturen der Textaufgabe besteht. Zum anderen wird der Abstraktionsgrad der Kinderzeichnungen untersucht.
Auf Basis von rund 400 Schülerdokumenten wurde in einem iterativen Prozess zwischen Theorieausschärfung und Analyse mit den Verfahren des theoretischen Kodierens (Strauss & Corbin 1996) und der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2010) ein Instrument forschungsbasiert entwickelt, das es ermöglicht, graphische Eigenproduktionen bezüglich der *Strukturabbildung*, der *mathematischen Passung* und des *Abstraktionsgrads* zu analysieren. Im Folgenden wird die theoretische Rahmung sowie die Operationalisierung des Analyseinstruments vorgestellt.

## 1. Theoretische Rahmung und Arbeitsdefinitionen

Schipper (2009, 242) definiert Textaufgaben als in „Textform dargestellte mathematische Aufgaben" deren Schwerpunkt auf der Darstellung mathematischer Strukturen liegt. Eine *mathematische Struktur* kann durch eine Verknüpfung definiert werden, die einer amorphen Menge aufgeprägt wird. Die Menge trägt dann die Struktur (vgl. Rinkens 1973, 75ff). In Textaufgaben wird entsprechend den im Text genannten Größen durch die verbale Aufgabenstellung eine Verknüpfung aufgeprägt. Die Größen tragen in der

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 879–882). Münster: WTM-Verlag

Aufgabe die so festgelegte mathematische Struktur. Für die graphische Darstellung mathematischer Strukturen werden ebenfalls Träger benötigt, denen eine Verknüpfung aufgeprägt wird. Die Träger sind auf dem Papier fixierte Zeichen für strukturrelevante Objekte der Aufgabe. Die Verknüpfung zwischen ihnen wird durch ihre zweidimensionale Anordnung auf dem Papier abgebildet. Derartige graphische Strukturdarstellungen können als diagrammatisch bezeichnet werden (vgl. Dörfler 2006). Wesentliche mathematische Aspekte der Struktur sind auf Textebene die gegebenen Größen und ihre verbale Verknüpfung, in der graphischen Darstellung Zeichen für die strukturrelevanten Objekte und ihre Anordnung.
Die *mathematische Passung* zwischen Textaufgabe und graphischer Darstellung zeigt sich in der Übereinstimmung der mathematischen Strukturaspekte der zwei Darstellungsformen. Das betrifft die Passung zwischen Größen und Zeichen für strukturrelevante Objekte ebenso wie die Passung zwischen Verknüpfung und Anordnung.
Für den *Abstraktionsgrad* einer graphischen Darstellung sind ebenfalls die mathematischen Aspekte von Belang. Peschek (1988, 182) beschreibt Abstraktion als „Aufmerksamkeitsfokussierung" in der Vorstellung. In Anlehnung daran kann der Abstraktionsgrad graphischer Darstellungen als die Fokussierung auf die Darstellung der mathematischen Aspekte verstanden werden, die sich in zwei Indikatoren zeigt: in der Fokussierung auf die strukturrelevanten Objekte, d. h. es werden keine anderen Objekte abgebildet, und in der Fokussierung auf deren mathematisch wesentliche Eigenschaften, d.h. sie werden nicht weiter ausgeschmückt.

## 2. Vorgehen in der Analyse zur Strukturabbildung

Zur Strukturabbildung wurden sechs Kategorien identifiziert (s. Abb. 1).

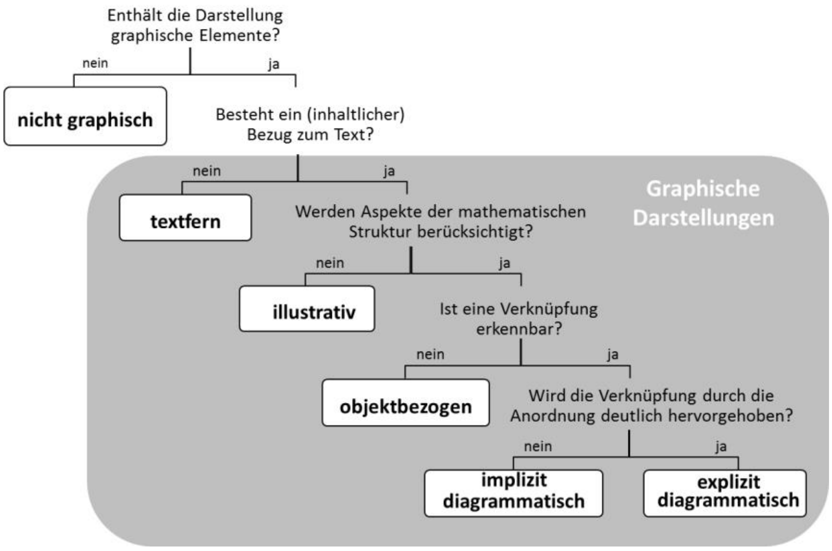


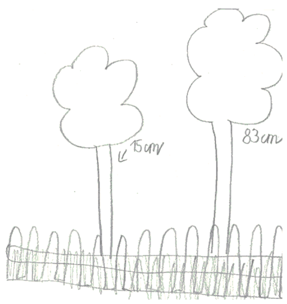

Abbildung 1: Entscheidungsbaum zur Analyse der Strukturabbildung

Im Instrument ergeben sich die Kategorien in einem dichotomen Entscheidungsbaum mit definierenden Leitfragen, die eine zunehmend präziser auf Aspekte der Strukturabbildung ausgerichtete Analyse jedes Dokuments erlauben. Eine Kategorienzuordnung erfolgt, wenn kein Element der Darstellung eine positive Antwort auf die Leitfrage zulässt bzw. die letzte Kategorie erreicht ist. Dies ermöglicht eine eindeutige Zuordnung der Darstellungen, auch wenn sie Elemente verschiedener Kategorien enthalten.

## 3. Vorgehen in der Analyse zur mathematischen Passung

In die Analyse der mathematischen Passung fließen nur die Darstellungen ein, die überhaupt mathematische Aspekte abbilden. Größen und strukturrelevante Objekte bzw. Verknüpfung und Anordnung können dabei *vollständig*, *teilweise* oder *nicht übereinstimmen*, d. h. es werden andere Größen oder Verknüpfungen abgebildet. Zudem können mathematische Aspekte *ohne Beachtung* bleiben. Es hat sich als günstig erwiesen, die Größen genauer hinsichtlich Maßzahl und Einheit zu betrachten. Daraus ergibt sich zur Analyse eine 3x4-Ankreuzmatrix mit 64 verschiedenen Verteilungsmöglichkeiten. Jedem Schülerdokument kann in der Analyse eindeutig ein Ankreuzmuster zugeordnet werden. Abb. 2 zeigt das Verfahren exemplarisch an einer objektbezogenen Darstellung.

Eine Fichte wächst in jedem Jahr etwa 15 cm. Im Garten steht eine 83 cm hohe Fichte.
Wie alt ist sie etwa? (nach Wittmann & Müller 2006, 94)




| | Vollständige Passung | Teilweise Passung | Keine Passung | Ohne Beachtung |
|---|---|---|---|---|
| Maßzahl | 83 und 15 abgebildet | | | |
| Einheit | | ‚Länge' abgebildet, ‚Zeit' nicht | | |
| Verknüpfung | | | | Keine Verknüpfung erkennbar |

Abbildung 2: Exemplarisches Vorgehen zur Analyse der mathematischen Passung

## 4. Vorgehen in der Analyse des Abstraktionsgrads

Hinsichtlich des Abstraktionsgrads werden ebenfalls die Dokumente analysiert, die mathematische Aspekte enthalten. Die anderen sind per se wenig abstrakt. Zur Analyse sind die zwei Indikatoren des Abstraktionsgrads leitend (s. 1.), die jeweils in zwei Ausprägungen (*hoch/niedrig*) vorkommen können. Daraus ergibt sich eine 2x2-Matrix mit vier Feldern als Kategorien, die als Analysefolie verwendet werden kann (s. Abb. 3). Die einzelnen Indikatoren können getrennt voneinander untersucht und jedes Schülerdokument so eindeutig einer Kategorie zugeordnet werden. Die Zeichnung aus Abb. 2 kann dementsprechend als *niedrig-niedrig* klassifiziert werden.

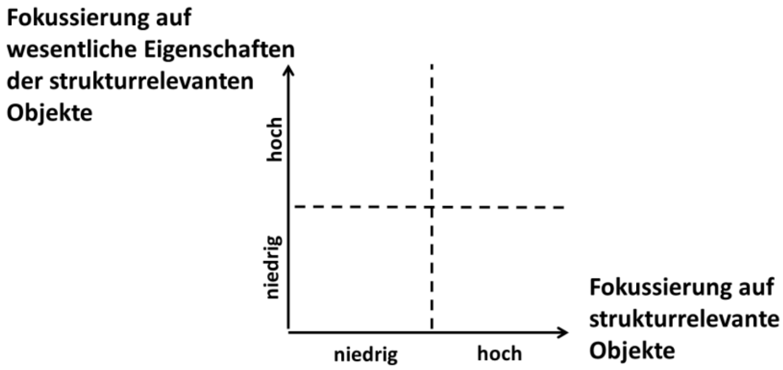



Abbildung 3: Matrix zur Analyse des Abstraktionsgrads

## 5. Ausblick

Das entwickelte Instrument ermöglicht die qualitative Analyse graphischer Eigenproduktionen. Darauf aufbauend sind weitere quantitative Analysen möglich (vgl. Mayring 2010). Gegenwärtig wird das Instrument nach erfolgreicher Erprobung im Pilotprojekt in einer Interventionsstudie an Kinderzeichnungen angewandt.

## Literatur

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. New York: W.W. Norton & Co.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *JMD, 27* (3/4), 200–219.

Franke, M., Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*, 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum.

Hasemann, K. (2006). Rechengeschichten und Textaufgaben - Vorgehensweisen, Darstellungsformen und Einsichten von Kindern am Ende des 2. Schuljahres. In E. Rathgeb-Schnierer & U. Roos (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht: Festschrift für Sybille Schütte zum 60. Geburtstag* (S. 15–26). München u.a.: Oldenbourg.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse.* 11. Aufl. Weinheim: Beltz.

Peirce, C. S. (1986). *Semiotische Schriften. Band 1.* Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Peschek, W. (1988). Untersuchungen zur Abstraktion und Verallgemeinerung. In W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung* (S. 127–190). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Rinkens, H. D. (1973). *Abstraktion und Struktur*. Ratingen: Henn.

Roth, W.-M. & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions. Toward a Theory of Representing as Social Practice. *Review of Educational Research, 68* (1), 35–59.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Strauss, A. L. & Corbin, J. M. (1996). *Grounded theory. Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz.

Wittmann, E. & Müller, G. (2006). *Das Zahlenbuch 2. Ausgabe Bayern*. Leipzig: Klett.

Anja PANSE, Joachim HILGERT, Max HOFFMANN, Paderborn

# Handlungsbedarf in fachmathematischen Veranstaltungen? – Spezielle Maßnahmen an der Universität Paderborn

Die Ausbildung angehender Mathematiklehrer geht sowohl seitens der Studierenden, als auch der Dozenten mit Unzufriedenheiten einher. In diesem Beitrag werden Beobachtungen bezüglich fachmathematischer Veranstaltungen beschrieben und entsprechende Maßnahmen vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt auf der Erstsemesterveranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“, die bei gleichbleibendem Inhalt mehrere Semester in jeweils unterschiedlicher methodischer Aufbereitung angeboten wird.

## Neuralgische Punkte

In Diskussionen bezugnehmend auf fachmathematische Veranstaltungen an Hochschulen, insbesondere im Bereich der Lehramtsausbildung, lassen sich stets folgende neuralgischen Punkte finden: Die Auswahl und Sinnhaftigkeit der *fachmathematischen* Inhalte, die *Form der Stoffvermittlung*, die *Tranzparenz von Prüfungsanforderungen*, die *Bewertung des Leistungsstandes* und die *zeitliche Belastung* der Studierenden.

Auch die im Sommersemester 2013 an der Universität Paderborn einberufene Diskussionsrunde, bestehend aus Professoren der Mathematik und der Mathematikdidaktik, Mitarbeitern und Studierenden thematisierte hauptsächlich die oben genannten Punkte. Unter anderem präsentierten die Studierenden in diesem Rahmen eine Ausarbeitung „Wünsche der Studierenden“, die beispielsweise folgende Aussagen enthält.

„Das Konzept der klassischen Vorlesung (90min Tafelanschrieb) wird abgewandelt, um den Übergang von der Schule in die Universität weniger abrupt zu gestalten.“

„Der Dozent empfiehlt gute, geeignete und verständliche Literatur. Falls es diese Literatur derzeit nicht gibt, können auszugsweise Teile eines Buches in die Vorlesung integriert werden und besprochen werden, sodass der Umgang mit Fachliteratur geübt wird.“

„Früh eine realistische (also mit der realen Klausur vergleichbare) Probeklausur bereitstellen, damit das Anforderungsniveau der Prüfung in der Veranstaltung besser verstanden wird.“

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 883–886). Münster: WTM-Verlag

„Das Belastungsempfinden der Studenten ist sehr hoch. Neben der Berücksichtigung der Punkte in dieser Liste wird der Kontakt der Tutoren zu den Studenten von dem jeweiligen Dozenten genutzt, um Überbelastungen zeitnah zu identifizieren und schnell Maßnahmen zu ergreifen.“

Auf Basis dieser Wünsche und weiterer Erkenntnisse ergeben sich verschiedene Zielsetzungen. Es erscheint notwendig, neue Konzepte für fachmathematische Veranstaltungen zu entwickeln und zu erproben, um die Qualität der Lehre wirksam zu optimieren und den Studienerfolg zu verbessern. Dabei sollten die entwickelten Konzepte ein hohes Maß an Übertragbarkeit auf andere Veranstaltungen aufweisen.

**Die Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ an der Universität Paderborn**

Im Rahmen der Umstellung auf das Bachelor-/Master-System für das Lehramtsstudium an der Universität Paderborn musste die Analysis I aus Akkreditierungsgründen aus dem Veranstaltungsplan für das erste Semester gestrichen werden. Neben der Linearen Algebra I steht nun die zeitlich verkürzte Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ im Modulplan. Diese ist verpflichtend für alle Studierenden des gymnasialen Lehramts. Die Präsenzzeiten setzen sich aus einer zweistündigen Vorlesung und einer zweistündigen Übung zusammen.

Seit dem Wintersemester 2012/2013 folgt die „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ einem inhaltlichen Konzept, das schulnahe Themen wie Teilbarkeit und Zahlbereiche (von den natürlichen Zahlen bis zum reellen Zahlenstrahl) in den Mittelpunkt stellt und grundlegende mathematische Begriffe wie Mengen, Abbildungen und Relationen in solchen Kontexten einführt.[1]

Im Wintersemester 2013/2014 sind im Rahmen dieser Veranstaltungen verschiedene Innovationen eingeführt worden, die wir in der Summe als das Konzept einer „tutoriellen Vorlesung“ bezeichnen. Dieses Konzept beruht vor allem auf einer Umstrukturierung der Methoden zur Stoffvermittlung.

Die Studierenden bekommen in jeder Woche einen Themenblock online zur Verfügung gestellt. Dieser beinhaltet einen Leseauftrag, Präsenz- und Hausaufgaben. Als Literaturgrundlage für die Leseaufträge dient (Hilgert & Hilgert, 2012). Ein wichtiges Leitmotiv bei der Konzeption dieser Innova-

[1] Der Stoff der Themenblöcke 2 und 5-15 wurde im WS 1998/1999 im Rahmen der Analysis I (vierstündig) in den ersten vier Wochen gemacht. Der Stoff der Themenblöcke 1 und 3 wurde nicht behandelt, der Stoff von Themenblock 4 wurde vorausgesetzt.

tionen ist das der Transparenz. Deshalb beinhalten die Themenblöcke außerdem die Lernziele für das jeweilige Themengebiet.

Ein anonymes Online-Fragetool, ein Internetforum, die unieigenen Mathematik-Lernzentren und e-mail bieten neben dem direkten Gespräch mit Lehrenden vielseitige Möglichkeiten für Studierende, Schwierigkeiten und Probleme hinsichtlich des zu erarbeitenden Stoffes zu thematisieren.

In der Vorlesung werden dann die an den Lehrkörper herangetragenen Fragen der Studierenden besprochen. Das heißt, es findet keine Stoffvermittlung im klassischen Sinne statt, sondern Lehre, die sich direkt an den Bedürfnissen der Hörer orientiert.

In der Vorlesung besteht die Möglichkeit, das an der Universität Paderborn entwickelte Online-Live-Feedback-Systems „PINGO“ einzusetzen.

Die Präsenz- und Hausaufgaben bestehen zu einem Teil aus klassischen Mathematikübungsaufgaben, zum anderen Teil aus so genannten Schnittstellenaufgaben. Diese sollen den Studierenden Verknüpfungen zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik aufzuzeigen.

Die Prüfungsordnung schreibt vor, eine Studienleistung als notwendige Bedingung für die Teilnahme an der Abschlussklausur zu definieren. Diese besteht aus drei Teilen: 50% der Punkte in den Hausaufgaben, Bestehen einer mündlichen Prüfung, Bestehen eines Testes. Die Studierenden müssen zwei der drei Leistungen hinreichend erbringen und dürfen an allen teilnehmen. Um auch an dieser Stelle ein Höchstmaß an Transparenz zu garantieren, sind alle Prüfungsformen eingeübt worden.

Die mündlichen Prüfungen beinhalten die Vorstellung von Aufgaben. Dieses wird schon in den Präsenzübungen durch die Verwendung der Methode des „Gruppenpuzzles“ vorbereitet.

Die Präsenzaufgaben bereiten die Hausaufgaben vor. Zusammen wird somit der Test vorbereitet, dem eine Probeklausur voranging. Dieser Test dient weiterhin als Beispiel für eine Klausur.

Genauere Informationen zu diesem Konzept finden sich in Hilgert et al..

## 3. Beobachtungen und Ausblick

Nach Abschluss der Veranstaltung lässt sich beobachten, dass die Kommunikation zwischen Lehrenden und Lernenden stark intensiviert wurde. Auch eine allgemein positive Einstellung zur Veranstaltung ist erkennbar. Trotz positiver Resonanz lassen sich weitere Schwierigkeiten feststellen. Diese beziehen sich insbesondere auf das Lesen mathematischer Texte, das

Formulieren von Fragen und das Aufschreiben mathematischer Inhalte.

In einem weiteren Durchlauf der Veranstaltung sollen nun die Innovationen der Problemlage gemäß weiter angepasst werden.

## Literatur


Hilgert, I. & Hilgert, J. (2012). *Mathematik - ein Reiseführer*. Berlin: Springer.

Hilgert, J., Hoffmann, M., Panse, A. (noch nicht veröffentlicht). Kann professorale Lehre tutoriell sein? Ein Modellversuch zur Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten. In *Tagungsband zum Hansekolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathe-*

Agnes PETERS, Aachen

# Von Mickey Mouse bis Buzz Light Year – Mathematische Entdeckungen im Anwendungsfeld Computeranimationen

In der klassischen Aufgabe der Oberstufenanalysis wird den Schülern (mal mit, mal ohne Anwendungskontext) eine Funktion vom Typ $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, vorgegeben, die sie dann auf verschiedene Eigenschaften und Charakteristika untersuchen sollen. Modellierungskompetenz wird im Rahmen dieser Aufgaben meist (nur) bezüglich der Interpretation einzelner Ergebnisse verlangt, während es sich bei den Anwendungskontexten oft um Einkleidungen handelt.

In realen Anwendungssituationen hingegen ist häufig die Funktion zur Modellierung der Situation unbekannt. Zudem reichen Funktionen obigen Typs in den meisten Fällen nicht aus. Es muss auf das allgemeinere Konzept der Kurven zurückgegriffen werden.

Vor diesem Hintergrund beschäftigt sich dieser Beitrag mit einer Anwendungssituation aus dem Bereich Computeranimation, in dessen Mittelpunkt die Modellierung eines funktionalen Zusammenhangs steht. Dabei werden zentrale Themen des Oberstufenunterrichts, wie der Funktions- und der Ableitungsbegriff, aufgegriffen und ein intuitiver und anschaulicher Zugang zu Parameterdarstellungen von Kurven aufgezeigt. Nicht zuletzt werden damit auch Querverbindungen zur analytischen Geometrie geschaffen.

## 1. Computeranimationen

Computeranimationen stellen heutzutage einen zentralen Bestandteil vieler Kinofilme dar und haben der Film- und Werbeindustrie in den letzten Jahren ganz neue Möglichkeiten eröffnet. Animiert werden dabei nicht nur Bewegungen in der Ebene oder im Raum, sondern auch Parameter wie die Farbe, die Größe oder die Form eines Objekts.[1] Dazu wurden und werden verschiedene Animationstechniken entwickelt, von denen meist mehrere gleichzeitig zum Einsatz kommen. Herausgestellt werden sollen hier die Basistechniken der Pfadanimation und des Keyframings. Sie beruhen auf elementaren mathematischen Ideen und sind somit auch auf Schulniveau zugänglich.

Bei der **Pfadanimation** bewegt sich das Objekt entlang einer vorgegebenen Kurve. Da bei Animationen die Abhängigkeit der Bewegung von der Zeit

[1] Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf Bewegungen in zwei Dimensionen. Sie sind aber analog auf drei Dimensionen sowie auf andere Parameter übertragbar.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 887–890). Münster: WTM-Verlag

von zentraler Bedeutung ist, liegt die Parameterdarstellung der Kurve als Darstellungsform nahe. Die Bewegungsbahn eines Objekts im zweidimensionalen Raum in Abhängigkeit von der Zeit kann mathematisch also beschrieben werden durch

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Einfache Kurven, wie Kreise, Ellipsen oder Spiralen, können in diesem Zusammenhang thematisiert und deren Parameterdarstellung erkundet werden. Parameterdarstellungen von allgemeinen Kurven sind jedoch nur selten bekannt und auch nicht leicht herzuleiten. In diesen Fällen hilft die zweite erwähnte Animationstechnik, das Keyframing, weiter.

## 2. Keyframing – Idee

Was wir am Ende auf der Leinwand oder auf dem Bildschirm sehen, sind in Wirklichkeit keine flüssigen Bewegungen, sondern eine Abfolge von vielen Einzelbildern. Erst die Trägheit unseres Auges erzeugt aus dieser schnellen Abfolge die Illusion einer Bewegung, ein Phänomen, das Lernende durch Daumenkinos selbst erfahren können. Daraus resultiert jedoch auch ein enormer Produktionsaufwand für Animationsszenen: Bei einer Standardbildrate von etwa 25 Bildern/sec benötigt man für die Produktion eines 30-sekündigen Werbespots bereits 700 Einzelbilder.

Hinter der Animationstechnik des Keyframings verbirgt nun sich die Idee, dass nicht jedes dieser Einzelbilder vom Animator erzeugt wird, sondern dass dieser nur gewisse Schlüsselbilder (Keyframes) anfertigt. Diese zeigen markante Szenen des Bewegungsablaufs, reichen jedoch nicht aus, um den Eindruck einer flüssigen Bewegung zu erzeugen. Mit Hilfe der Schlüsselbilder bestimmt deshalb der Computer Zwischenbilder (Inbetweens), weshalb die Technik manchmal auch als Inbetweening bezeichnet wird. Grundlage dessen sind zum einen die Positionen des zu animierenden Objekts in jedem einzelnen Keyframe, zum anderen die Zuordnung der Keyframes, und damit der Positionen, zu bestimmten Zeitpunkten.

## 3. Keyframing – Mathematischer Kern

Die mathematische Situation lässt sich am Beispiel eines springenden Balls verdeutlichen.[2] Für die Wahl der Positionen des Balls in den Keyframes bieten sich als markante Punkte der Bewegung die Positionen maximaler Auslenkung an. Mit Hilfe eines Koordinatensystems kann die Position des Balls in jedem einzelnen Keyframe genau beschrieben werden. Zudem

[2] Die Verformung des Balls wird an dieser Stelle vernachlässigt.

wählt der Animator für jedes Keyframe einen Zeitpunkt auf der Zeitachse aus, d.h. er ordnet einem bestimmten Zeitpunkt eine konkrete Position des Balls zu.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Zwischenbilder ist somit eine Wertetabelle nebenstehender Form. Die Bewegung des Balls vor Augen ist die Idee einer interpolierenden Kurve naheliegend. Aufgrund der Zuordnung der durch zwei Koordinaten beschriebenen Positionen zu Zeitpunkten stößt man auf Kurven in Parameterform.

| **Zeitpunkt** | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ |
|---|---|---|---|
| **x-Koordinate** | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
| **y-Koordindate** | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ |

In der Computergrafik werden zur Lösung des Problems im Regelfall stückweise zusammengesetzte Kurven verwendet. Für die Abhängigkeit der Raumrichtungen von der Zeit werden zwischen zwei Datenpunkten dabei häufig Polynomfunktionen dritten Grades angesetzt. Die Gründe hierfür lassen sich vor allem anhand dreier Kriterien einsehen: Komplexität, Glattheit und Kontrolle. Hinter dem Kriterium der **Komplexität** verbirgt sich der Anspruch, bei der Entwicklung eines mathematischen Modells die Situation möglichst einfach, aber dennoch adäquat zu beschreiben. Polynomfunktionen gehören zu den mathematisch gut handhabbaren Funktionstypen. Der Grad 3 lässt zudem genügend Flexibilität zur Modellierung des Bewegungsverlaufs zu und erlaubt, falls erforderlich, Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder sogar stetige Differenzierbarkeit auch in den Stützpunkten zu erzeugen, was unter dem Kriterium der **Glattheit** zusammen gefasst wird. Darüber hinaus ist eine lokale **Kontrolle** über die Kurve, d.h. die Möglichkeit, lokal Einfluss auf den Verlauf der Kurve nehmen zu können, ein sehr wichtiger Aspekt während der Erstellung einer Animation. Bei stückweise zusammengesetzten Kurven wirkt sich die Änderung eines Datenpunktes nur auf die angrenzenden Kurvenstücke aus, nicht aber auf die gesamte Kurve, so dass das Kriterium zumindest in gewissen Grenzen erfüllt ist.

## 4. Umsetzung mit Schülern

Schüler entdecken die Parameterdarstellung von Kurven bei dieser Anwendungssituation auf eine sehr intuitive Weise, da die Zuordnung der Positionen zu Zeitpunkten diese Darstellung unmittelbar impliziert. Der Funktionsbegriff kann durch die Abgrenzung zum Kurvenbegriff reflektiert und in einen größeren Zusammenhang gesetzt werden. Das Interpolationsproblem kann für den Unterricht dahingehend vereinfacht werden, dass die Raumrichtungen unabhängig voneinander betrachtet werden. Es können verschiedene Interpolationsmethoden, wie die lineare Interpolation, die Interpolation durch eine einzige Polynomfunktion oder die Interpolation durch eine stückweise, aus Polynomfunktionen dritten Grades zusammengesetzte Funktion, deren Ableitungen in den Stützpunkten vorgegebenen werden (Hermiteinterpolation), thematisiert werden. Mit Hilfe der vorgestellten Kriterien können diese daraufhin diskutiert werden.

Vor allem bei der Hermiteinterpolation ist aber die Rückkehr zur Darstellung in der x-y-Ebene erforderlich, erweist sich dabei aber auch als überaus fruchtbar. Über die Tangentenvektoren in den Stützpunkten kann der Verlauf der Kurve beeinflusst werden. Da die x- bzw. y-Komponente des Tangentenvektors in einem Punkt der Kurve gleich der entsprechenden Ableitung der x- bzw. y-Funktion zum zugehörigen Parameterwert ist, eröffnet dies die Möglichkeit, den Ableitungsbegriff zu vertiefen.

Abgerundet werden kann die Behandlung des Themas durch die Erstellung einer eigenen kleinen Animation, in der das Erlernte in einem echten Animationsprogramm angewendet wird. Die Autorin hat dafür das 2D-Animationsprogramm Synfig gewählt, da die Einarbeitung in das Programm vergleichsweise einfach ist und für die Interpolation verschiedene Methoden zur Auswahl stehen. Die Interpolationskurven werden grafisch dargestellt, sodass hier eine Brücke zwischen der realen Anwendung und deren mathematischen Hintergrund geschlagen wird. Darüber hinaus kann das Programm kostenlos auf der zugehörigen Internetseite heruntergeladen werden und ist für alle gängigen Betriebssysteme verfügbar.

Erfahrungsgemäß zeichnet sich das Thema Animationen vor allem durch seinen hohen motivationalen Charakter aus. Aufgrund der großen Anschaulichkeit bietet es einen optimalen Rahmen, um die Modellierungskompetenz der Lernenden zu fördern und sie zu eigenständigen Entdeckungen anzuregen. Es verbindet nicht nur innermathematisch Themen der Analysis mit solchen der analytischen Geometrie, sondern auch fächerübergreifend Aspekte der Mathematik, Informatik und Kunst.

## Literatur


Bender, M. & Brill, M. (2006). Computergrafik. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch. 2. Aufl., München: Hanser.

Dunn, F. & Parberry, I. (2011). 3D Math Primer for Graphics and Game Development. Boca Raton: CRC Press.

Filler, A. (2006). Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie. Habilitation, Universität zu Berlin. Verfügbar unter http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/3D/habilita/Filler-Habilitation.pdf [12.02.14]

Parent, R. (2002). Computer Animation. Algorithms and Techniques. San Diego: Academic Press.

Kathleen PHILIPP, Timo LEUDERS, Freiburg

# Diagnostische Prozesse und Ressourcen von Mathematiklehrpersonen

Im Unterricht gibt es zahlreiche Situationen, in denen diagnostische Tätigkeiten von Lehrkräften notwendig sind und verschiedene Kompetenzen erfordern. Schrader (2006) definiert diagnostische Kompetenz als die „Fähigkeit eines Urteilers, Personen zutreffend zu beurteilen“ (ebd., S. 95). Im Mathematikunterricht bezieht sich Diagnose neben der Beurteilung von Personenmerkmalen auch auf die Einschätzung von Lern- und Aufgabenanforderungen (z.B. Brunner et al., 2011). Während die Bedeutung diagnostischer Kompetenz für den Mathematikunterricht als hoch eingestuft wird (Helmke et al., 2004; Anders et al., 2010), wird Lehrkräften eine unzureichende Ausbildung diagnostischer Kompetenz bescheinigt (Krauss & Brunner, 2011). Als Indikator diagnostischer Kompetenz dient dabei häufig die Genauigkeit eines Urteils (Veridikalität). Allerdings bestehen noch Wissenslücken im Hinblick auf die Struktur und die Genese diagnostischer Urteile, ein empirisch fundiertes und überprüftes Modell diagnostischer Kompetenz fehlt bislang (Schrader, 2011; Anders et al., 2010).

## Modelle zu diagnostischen Prozessen und Ressourcen

Da das Ziel dieser Studie ist, Modelle für Kognitionen bei diagnostischen Prozessen und die kognitiven Ressourcen, auf die Lehrkräfte zurückgreifen, zu entwickeln, sollen einige Arbeiten beschrieben werden, die hier bereits theoretische Ansatzpunkte liefern.

Nickerson (1999) sieht das eigene Wissen eines Experten als zentrale Ressource, die bei der Einschätzung des Wissens von Laien benötigt wird. Den Prozess selbst charakterisiert er als „Verankerung und Anpassung“: Ein erstes Modell über das Wissen eines anderen wird durch die Berücksichtigung weiterer Informationen immer weiter verfeinert und aktualisiert bis ein Modell über das Wissen eines konkreten Anderen entsteht. Mögliche Verschätzungstendenzen werden ebenfalls thematisiert, die auch im pädagogischen Kontext von Bedeutung sein können. Beispielsweise werden Inhalte, mit denen man selbst vertraut ist häufig als für Laien einfacher eingestuft als sie sind. Da dem eigenen Wissen hier eine große Bedeutung beigemessen wird, ist von Interesse, welches Wissen in diagnostischen Situationen benötigt wird. Daher ist eine fachbezogene Konkretisierung solchen Wissens wichtig. Hilfreich ist dabei das Modell zur Beschreibung von Lehrerprofessionalisierung nach Ball et al. (2001). Wenngleich die Autoren nicht schwerpunktmäßig diagnostische Kompetenzen von Mathematiklehr-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 891–894). Münster: WTM-Verlag

kräften beschreiben, lassen sich dennoch verschiedene der Wissensfacetten als bedeutsam in diagnostischen Situationen verstehen: Um die fachliche Richtigkeit einer Lösung zu beurteilen, benötigt man *common content knowledge* (CCK). *Specialized content knowledge* (SCK) ist fachliches Wissen, das ausschließlich Lehrkräfte benötigen, etwa wenn sie den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe durch Aufgabenvariation anpassen wollen. Aber auch die Wechselbeziehung zwischen Lernendem und Inhalt spielt eine Rolle in diagnostischen Situationen, beispielsweise das Wissen darüber, was Schülerinnen und Schüler verwirrend finden (*knowledge of content and students*, KCS).

Die Fähigkeit, Lernziele fachlich dekomprimieren zu können, nimmt für Morris et al. (2009) einen zentralen Stellenwert bei der Planung und Evaluation von Unterricht ein. Dabei werden Lernziele in Teilziele zerlegt, die als Subkonzepte von Lernenden aufgefasst werden können. Eine solche fachliche Dekomprimierung ermöglicht es, zu lokalisieren, an welcher Stelle ein Fehler geschieht. Dennoch ist fraglich, ob so auch mögliche individuelle Fehlvorstellungen erkannt werden können.

## Analyse von Diagnoseprozessen und zugrundliegenden Ressourcen

Den Schwerpunkt der Untersuchung bilden informelle Diagnosesituationen im Mathematikunterricht. Dazu gehören im Zusammenhang mit dem Einsatz von Aufgaben die Einschätzung von Aufgaben selbst, aber auch die Evaluation von Aufgabenbearbeitungen von Lernenden. Dabei richtet sich das Forschungsinteresse des berichteten Projekts auf ein vertieftes Verständnis diagnostische Prozesse und auf Wissen, das ihnen zugrunde liegt. Die Forschungsfragen lauten konkret:

- Welche *Prozesse* lassen sich bei der Diagnose identifizieren?
- Auf welche *Ressourcen* greifen Lehrkräfte bei der Diagnose zurück?

In einer qualitativen Studie wurden Interviews mit Lehrkräften und Experten (Lehrkräfte, die zusätzlich Erfahrungen in der Hochschullehre haben) geführt (n=6). In einer ersten Phase des Interviews wurden Diagnoseprozesse durch a) Aufgaben und b) Aufgabenbearbeitungen angeregt und durch Lautes Denken zugänglich gemacht. Anschließend konnten die Probanden ihre eigenen Prozesse und den Rückbezug auf Wissensressourcen reflektieren. Jeder Proband erhielt zwei Aufgaben zum Bruchrechnen und jeweils drei Schülerlösungen pro Aufgabe. Die Auswertung erfolgte mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 1983). Dabei wurde das Datenmaterial (12 Einschätzungen von Aufgaben, 36 Evaluationen von Aufgabenbearbeitungen) mittels deduktiv und induktiv gebildeter Kategorien analysiert. Die entstandenen Kategorien wurden in einem weiteren Analyseschritt auf ihre Beziehungen hin untersucht. Im Folgenden werden Ergebnisse dieses zweiten Analyseschritts dargestellt, die Kategorien selbst werden dabei kursiv hervorgehoben.

## Ergebnisse und Ausblick

In Bezug auf die erste Forschungsfrage nach Prozessen bei der Diagnose lassen sich verschiedene Vorgehensweisen der Probanden identifizieren. Zunächst finden sich Prozesse, die sich in ein idealisiertes Ablaufschema mit mehreren Diagnoseschritten bringen lassen: (1) Ausgangspunkt bei einer Diagnose ist häufig ein *Lösungsansatz* zur Aufgabe. (2) Im Anschluss werden *Anforderungen/potenzielle Hürden* genannt. (3) Die *Aufgabenbearbeitung wird nachvollzogen*. (4) Dabei werden sowohl *Stärken* als auch *Schwächen* Lernender genannt. Häufig werden dann (5) *Fehlerhypothesen aufgestellt* und abschließend (6) *Maßnahmen zur Überprüfung der Hypothese* vorgeschlagen. Daneben werden aber auch Prozesse sichtbar, die nicht als Schritte in einem solchen Ablaufschema interpretiert werden können, sondern vielmehr in mehreren Diagnoseschritten eine bedeutende Rolle spielen. Dazu gehört das *Einnehmen der Schülerperspektive*, das in den Schritten (1)-(3) sichtbar wird. Ein Lösungsansatz kann beispielsweise ein eigener sein oder aber die Perspektive einer Schülerin oder eines Schülers wiederspiegeln. In diesem Sinne findet hier eine Art Anpassungsprozess statt wie es im Modell der Wissenseinschätzung durch Nickerson (1999) beschrieben wird. Gleichzeitig wird an dieser Stelle entweder eigenes Wissen oder das Wissen über eine Schülerkategorie (z.B. „Wie könnte ein Sechstklässler die Aufgabe lösen?“) als Anker genutzt. Das *Zerlegen* einer Aufgabe oder einer Aufgabenbearbeitung in Teilschritte kann als ein zentraler Prozess bei der Diagnose aufgefasst werden. Das Analysieren erfolgte hierbei schrittweise. Das könnte man als Dekomprimierungsprozess (Morris et al., 2009) in erweitertem Sinne auffassen. Im Schritt (4) wurde deutlich, dass die Probanden einen *Vergleich* anstellten, um Stärken und Defizite zu identifizieren. Als Vergleichsgrundlage dienten dabei Lösungsansätze, Grundvorstellungen und bekannte Fehler.

Ressourcen, auf die Lehrkräfte im Diagnoseprozess zurückgreifen (Forschungsfrage 2), lassen sich überwiegend im Einklang mit verschiedenen Wissensfacetten nach Ball et al. (2001) kategorisieren: *Sachliche Richtigkeit* ist notwendig, um Fehler überhaupt zu erkennen (CCK). Fachliches Wissen, das nur Lehrkräfte benötigen (SCK) konkretisiert sich in den Ressourcen *Grundvorstellungen*, *verschiedenen Repräsentationen* und *multiplen Zugangsweisen* zu einer Aufgabe. Inhaltsspezifisches Wissen über Lernende zeigt sich im Rückgriff auf *typische Fehler*, *typische Fehlvorstellungen* und *Schülerstrategien*. Darüber hinaus wurde deutlich, dass auf eine weitere, nicht fachspezifische, Wissensfacette zurückgegriffen wurde, wenn etwa Maßnahmen zur Überprüfung einer Fehlerhypothese vorgeschlagen wurden. Hierbei spielt das Wissen über mögliche *Diagnosemethoden* eine Rolle. Dieses Wissen ließe sich als allgemeines pädagogisches Wissen (pedagogical knowledge, PK) nach Shulman (1986) beschreiben.

In der weiteren Analyse der Zusammenhänge von Prozessen und Ressourcen steht die Frage nach einer möglichen Systematik im Zentrum. Die gebildeten Kategorien könnten in einem nächsten Schritt genutzt werden, um weitere Facetten diagnostischer Kompetenz neben Urteilsgenauigkeit zu operationalisieren. In einer Folgestudie könnte ein Modul zur Förderung diagnostischer Kompetenz von Mathematiklehrkräften entwickelt und evaluiert werden.

## Literatur


Anders, Y., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2010). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften und ihre Auswirkungen auf die Leistungen ihrer Schülerinnen und Schüler. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 57, 175–193.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelbs, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, (59), 389–407.

Brunner, M., Anders, Y., Hachfeld, A., & Krauss, S. (2011). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter et al. (Eds,), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften*. (pp. 215–234). Münster, New York, NY, München, Berlin: Waxmann.

Helmke, A., Hosenfeld, I., & Schrader, F.-W. (2004). Vergleichsarbeiten als Instrument zur Verbesserung der Diagnosekompetenz von Lehrkräften. In R. Arnold & C. Griese (Eds.), *Schulleitung und Schulentwicklung*. Baltmannsweiler: Schneider-Verlag Hohengehren.

Mayring, P. (1983). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen u. Techniken*. Weinheim ;, Basel: Beltz.

Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. M. (2009). Mathematical Knowledge for Teaching in Planning and Evaluating Instruction: What Can Preservice Teachers Learn? *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(5), 491–529.

Nickerson, R. S. (1999). How We Know-and Sometimes Misjudge-What Others Know: Imputing One´s Own Knowledge to Others. *Psychological Bulletin*, 125(6), 737–759.

Schrader, F.-W. (2011). Lehrer als Diagnostiker. In E. Terhart, H. Bennewitz, & M. Rothland (Eds.), Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf (pp. 683–698). Münster: Waxmann.

Schrader, F.-W. (2006). Diagnostische Kompetenz von Eltern und Lehrern. In D. Rost (Ed.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (3rd ed., pp. 95-100). Weinheim: Beltz.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 4–14.

Roland PILOUS, Hannover

# Strukturell verfeinerte Prozesskodierung nach Polya-Gawlick

Gawlick schlägt eine Dreiteilung von Problembearbeitungsprozessen vor. In einem Prozess kann es entweder zur Assimilation (Anwendung eines Schemas), Akkommodation (Anpassung eines Schemas) oder Akquisition (Aufbau eines neuen Schemas) kommen (Gawlick 2013). Dem Aufbau neuer Schemata wird damit ein eigener Begriff zugewiesen. Einer Assimilation bzw. Akquisition entspricht dabei ein Prozess, der mehrheitlich durch die epistemische bzw. heuristische Struktur sensu Dörner gesteuert ist (Dörner 1979).

Bei Bearbeitungsprozessen der TIMSS-Aufgabe K10 von Neuntklässlern mit lautem Denken sollen im Rahmen der HeuRekAP-Studie typische Prozessverläufe mit Hilfe eines neuen Phasenmodells identifiziert werden. Dieses umfasst die Phasen eines Problembearbeitungsprozesses nach Polya, sowie Ergänzungen und Verfeinerungen nach Gawlick, die diese Dreiteilung berücksichtigen (Gawlick 2013).[1]

## Verfeinerte Prozesskodierung

Polya unterscheidet die Phasen *Verstehen der Aufgabe*, *Ausdenken eines Plans*, *Ausführen des Plans* und *Rückschau*. Die vorgeschlagene Verfeinerung lässt sich anhand der folgenden Tabelle darstellen:

| **Polya** | | **Verfeinerung nach Gawlick** | | |
|---|---|---|---|---|
| ***Assimilation*** | ***Akkommodation?*** | ***Assimilation*** | ***Akkommodation*** | ***Akquisition*** |
| Verstehen der Aufgabe | | Anfangs- und Zielzustandsidentifikation (AZI) | Situations- und Zielanalyse (SZA) | |
| | | Teilziel- und Operatoridentifikation (TOI) | | Operatorsynthese (OPS) |
| Ausdenken | eines Plans | Planentwicklung (PLE) | Polya-Fragen (POF) | |
| Ausführen eines Plans | | Durchführen eines Plans (DPL) | | |
| | | Kontrolle und Modifikation der Durchführung (KMD) | | |
| | Rückschau | | Rückschau (RÜS) | |

Durch das Kodieren von Phasen in transkribierten Bearbeitungen soll das Problemlöserverhalten prozessübergreifend vergleichbar gemacht und typische Verläufe gefunden werden (die insbesondere Rückschlüsse auf die

[1] Eine Langversion des vorliegenden Artikels mit Beispielen ist auf der Website http://www.fhnw.ch/personen/roland-pilous/publikationen zu finden.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 895–898). Münster: WTM-Verlag

heuristische Struktur ermöglichen).

Wie sind die einzelnen Phasen genau charakterisiert und wie lassen sie sich gegeneinander abgrenzen? Im Bezug auf diese Fragen habe ich mich insbesondere mit der Situations- und Zielanalyse beschäftigt, die im Folgenden exemplarisch vorgestellt wird.

**Situations- und Zielanalyse (SZA)**

Hier versucht der Bearbeiter genauer zu identifizieren, was in der Problemsituation gegeben bzw. gefordert ist; oder es wird in der Problemsituation versucht, jeweils Gegebenes und Gefordertes aufeinander zu beziehen (vgl. Dörner 1979 und Duncker 1935). Analysiert wird dabei „das, was da ist“, da wir unter *Problemsituation* die zum jeweiligen Zeitpunkt aufgebaute Teillösung verstehen. Auch Dörner und Duncker sprechen von (Problem-)Situation, wenn es darum geht, was zu einem bestimmten Zeitpunkt der Bearbeitung vorhanden und gesucht ist (ebd.).

In der SZA geht es weniger um die Generierung neuen Wissens, als um die „Ermittlung der genauen Eigenschaften der gegeben und gesuchten Situation“ (Dörner 1979, S.60). Da wir dabei Gegebenes und Gesuchtes aufeinander beziehen, ist es schwer, die Generierung von neuem Wissen in dieser Phase auszuschließen. Aus diesem Grund schreibt wohl auch Duncker, dass z.B. die Situationsanalyse „nicht zum Nachteil [geschieht], wenn es gilt, auf neue Einfälle zu kommen“ (Duncker 1935, S.13).

Um Äußerungen von Problembearbeitern der Phase SZA zuordnen zu können, ist es wichtig, die Phase als abgrenzbare Kategorie innerhalb eines Kategoriensystems (etwa nach den Regeln der qualitativen Inhaltsanalyse) zu formulieren. Theoretische Überlegungen (Deduktion) und ein abduktives Wechselspiel im Rahmen von Probekodierungen legen nahe, dass wir zu einer SZA die folgenden *Aktivitäten* (Subkategorien) zählen:

*Situationsanalyse* (SA): Bei der Situationsanalyse geht es um eine eher „programmlose Musterung der Situationsgegebenheiten“ (ebd., S. 13). Die Aktivität SA liegt vor, wenn sich der Bearbeiter der Problemsituation bewusst werden möchte (vgl. Dörner 1979, S.60). Das Stellen (bzw. das Beantworten) von Fragen, wie „Was habe ich bislang erreicht?“ oder „Was habe ich denn schon alles?“ könnte hierfür charakteristisch sein. Diese Fragen zielen nämlich auf eine erste und einfache „Musterung“ des Gegebenen (Duncker 1935, S. 13). Es wird versucht, bislang identifizierte Objekte und Operatoren ins Bewusstsein zu rufen oder die Situation zu beschreiben, um ein besseres Verständnis zu erlangen.

Die Aktivit*ät Konfliktanalyse* (KA) liegt vor, wenn die Person die Problemsituation hinsichtlich eines Ziels analysiert und sich so über die Notwendigkeit der Variation der Problemsituation klar wird oder werden möchte. Dabei stellt sie sich z.B. Fragen, wie „warum geht es eigentlich nicht?“ bzw. „was ist der Grund des Übels (Konfliks)“ (ebd., S. 24-25) oder beantwortet diese.

Bei der Aktivität *Materialanalyse nach Duncker* (MAD) geht es um die Analyse der Problemsituation hinsichtlich eines Ziels, um sich so darüber klar zu werden, was im Folgenden verwendet werden kann. Man stellt sich etwa Fragen, wie „was kann ich brauchen?“ (ebd., S. 25) oder beantwortet diese.

Auch Polya formuliert Fragen, die eine Materialanalyse beschreiben. Sie werden gesondert ausgewiesen: Die Aktivität *Materialanalyse nach Polya* (MAP) liegt demnach vor, wenn der Bearbeiter die Problemsituation kontrollierend analysiert, etwa in dem er sich die Fragen stellt „Hast du alle Daten benutzt?“, „Hast Du die ganze Bedingung genutzt?“, „Hast du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?“ (Polya 1949, S. 115-116) oder diese beantwortet.

Bei einer *Zielanalyse* (ZA) wird das Geforderte bzw. das Ziel analysiert. Dabei stellt man sich Fragen, wie „was will ich eigentlich?“ (Duncker 1935, S. 27) oder beantwortet diese. Es geht hier darum, die Voraussetzung dafür zu schaffen, jeweils Gegebenes und Gesuchtes in Zusammenhang zu bringen. Außerdem kann sich die Versuchsperson ergänzende Fragen stellen, wie „was kann ich entbehren?“ (ebd., S. 27) oder diese beantworten. Dann wird versucht, sich im Bezug auf ein Ziel von Hindernissen frei zu machen und das „eigentlich“ zur obigen Frage ernst zu nehmen.

Welche Rolle nimmt die Phase SZA beim Problemlösen ein? Die Phase könnte eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der heuristischen Struktur von Problemlösern und der Charakterisierung von Problemlösetypen spielen. Eine erste elementare Unterscheidung erhalten wir durch die Definition von produktiven und unproduktiven SZAs:

Eine SZA heißt *produktiv*, falls die Aktivitäten der SZA Aktivitäten (dieser oder einer anderen Phase) auslösen, die zum Erfolg beitragen. Dies kann z.B. mit dem Übergang zu einer Aktivität in PLE oder DPL geschehen (direkter Wechsel in eine Assimilationsphase: *routinierte Akkommodation*). Andererseits kann eine SZA auch dann produktiv sein, dass hierdurch im Anschluss neue Fragen generiert werden, um die „Lücken“ zwischen dem Gegebenen und Gesuchten systematisch zu schließen. Dazu gehören etwa Teilziel- und Hilfsmittelfragen nach König oder Polya-Fragen (Phase POF). Dann hat die Bearbeitung deutlich problemhafteren Charakter und findet ein Wechsel zu einer anderen Akkomodationsphase statt: *problemhafte Akkomodation*. Eine produktive SZA im Sinne einer routinierten Akkommodation kann man vermutlich oft bereits an der Abfolge ihrer Aktivitäten erkennen, z.B. „das hab ich“ (SA), „das will ich“ (ZA) und „das kann ich dafür brauchen“ (MAD).

Hingegen soll eine SZA *unproduktiv* heißen, falls die Aktivitäten der SZA Aktivitäten (dieser oder einer anderen Phase) auslösen, die nicht zum Erfolg beitragen. Dies ist vor allem bei unmotivierten Rücksprünge zur Phase TOI oder bei Aussagen der Form „ich weiß da jetzt nicht mehr weiter“ (Metakognition) gegeben. Auch das sehr häufige Wechseln in die Phase SZA kann ein Indikator dafür sein. Unproduktive SZAs können ein Indikator dafür sein, dass die heuristische Struktur des Probanden noch Lücken besitzt. Vorallem wenn klar ist, dass dabei die epistemische Struktur eines Problemlösers hinreichend ausgeprägt ist (träges Wissen), sollte probiert werden, die heuristische Struktur implizit (nach König) oder explizit (nach Polya) zu trainieren. Erfolgreiche Problemlöser wechseln etwa in die Phase POF, wenn es nicht gelingt, routiniert zu akkomodieren.

### Aktivitäten und Phasen auf der Grundlage von Lösungsgraphen

Es wurde ein dreischrittiges Kodiersystem entwickelt. Dieses umfasst Lösungsgraphen (Repräsentation des Bearbeitungsstands), Aktivitäten und Phasen (Repräsentation des Problemlöseverhaltens) und eine Nachbereitung (Prozessdynamik und -typisierung). Die Lösungsgraphen geben etwa Auskunft über vorhandene Voraussetzungen, Operatoren, Zwischenziele und die gemachten Verknüpfungen. Die Äußerungen der SuS führen in diesem Zusammenhang zu einem Auf- oder Umbau der Graphen. Auf dieser Grundlage kann anschaulich abgewogen werden, welche Aktivitäten kodiert werden. Als Subkategorien indizieren sie die entsprechend vorliegende Phase. Hierbei wurden bereits hohe Reliabilitätswerte erzielt. Anschließend sollte die Nachbereitung stattfinden, um den Prozess bezüglich der Dynamik und einer möglichen Typisierung theoretisch zu reflektieren.

### Literatur


Polya, G. (1949): *Schule des Denkens*, Franke

Funke, J. (2003): *Problemlösendes Denken*, Kohlhammer

Gawlick, T. (2013): Problem – das Gegenteil von Routineaufgabe? Zur Konzeption von Problemlösen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 2014

Dörner, D. (1979): *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, Kohlhammer

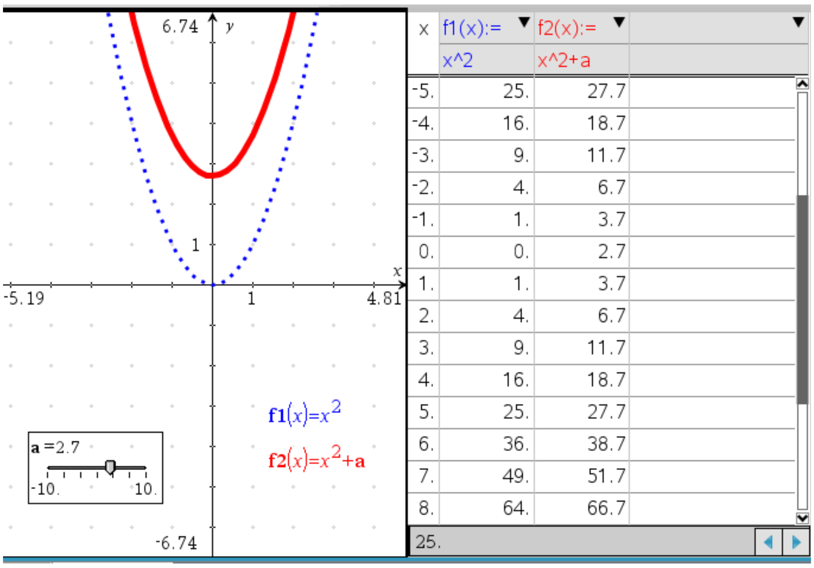
Guido PINKERNELL, Heidelberg

# Studierende erklären Zusammenhänge zwischen dynamisch verbundenen Repräsentationen von Funktionen

Mit dem computerbasierten Erkunden multipler Repräsentationen von Funktionen ist die Erwartung verbunden, dass ein aspektreicher Begriff von Funktionen entsteht. Aber hat das Gelernte auch immer mathematische Substanz? Analysen von Interviews mit Studierenden zeigen, auf welche Weise sich Lernende die beobachteten Zusammenhänge erklären können. Die theoretische Basis dieser Analysen bilden fachspezifische Theorien, die das Lernen als ein Abstrahieren von Oberflächenmerkmalen beschreiben.

## Ein Fallbeispiel

Die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Standardrepräsentationen von Funktionen ist ein gängiges Einsatzgebiet mathematischer Software. Wenn zusätzlich eine dynamische Verlinkung der multiplen externen Repräsentationen möglich ist (dMER, vgl. Ainsworth 1999), dann steuert z. B. ein mittels Schieberegler variierbarer Parameter die drei Repräsentationen einer von diesem Parameter abhängigen Funktion gleichzeitig. Abb. 1 zeigt eine typische Aufgabe:




| x | f1(x):= x^2 | f2(x):= x^2+a |
|---|---|---|
| -5. | 25. | 27.7 |
| -4. | 16. | 18.7 |
| -3. | 9. | 11.7 |
| -2. | 4. | 6.7 |
| -1. | 1. | 3.7 |
| 0. | 0. | 2.7 |
| 1. | 1. | 3.7 |
| 2. | 4. | 6.7 |
| 3. | 9. | 11.7 |
| 4. | 16. | 18.7 |
| 5. | 25. | 27.7 |
| 6. | 36. | 38.7 |
| 7. | 49. | 51.7 |
| 8. | 64. | 66.7 |

**Abb. 1: Eine typische Aufgabe für den Einsatz von dMER: „Untersuche, wie sich Änderungen des Parameterwertes a in f(x) = x² + a auf Gestalt und Position des Graphen von f auswirken."**

Man sollte erwarten, dass Lernende schnell zu einer korrekten Beschreibung der Zusammenhänge kommen, denn die visuelle Information scheint eindeutig: Wird a größer bzw. kleiner, dann wird der Graph parallel zur y-Achse nach oben bzw. nach unten verschoben. Informelle Interviews mit Studierenden des Lehramtes Mathematik an der Pädagogischen Hochschule

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 899–902). Münster: WTM-Verlag

Heidelberg haben dagegen gezeigt, dass eine durchaus korrekte Beschreibung des Beobachteten ein Verstehen der Zusammenhänge nicht impliziert:

*S: [bewegt den Regler nach rechts] also die Parabel wird über die y-Achse nach oben verschoben ... die ähm wie heißt des die Breite [bewegt beide Handflächen wiederholt aufeinander zu wie beim Klatschen]*

*I: Jaja, klar*

*S: verändert sich ... auf jeden Fall wenn man es nach rechts her zieht ... in in die Plusrichtung [bewegt dabei den Regler soweit nach rechts, dass die Parabel fast aus dem Fenster verschwindet] ... und wenn man es nach unten zieht in die Minusrichtung [bewegt den Regler nach links, dass der Scheitelpunkt der Parabel fast den unteren Fensterrand erreicht] und da wird die Parabel breiter bleibt aber immer noch nach oben geöffnet.*

*I: Können Sie sich erklären, warum die Parabel sich nach oben bzw. nach unten verschiebt, wenn man den Schieberegler verändert [weist mit dem Kugelschreiber auf den Schieberegler]*

*S: [betrachtet den Schieberegler, spricht leise, fast unverständlich] hm was bedeutet a ... was ... bedeutet a [lehnt sich zurück, spricht laut] a ist ja ... a war ja auch irgendwas ... a is ja ... die y-Richtung.*

Dass sich die „Breite“ des Graphen verändert ist mit Blick auf den Term eine falsche Deutung der Wirkung von a. Er beschreibt in geometrischer Interpretation eine Translation. Trotzdem kann die Veränderung des Graphen als eine Art Streckung oder Stauchung erscheinen, wenn man die kürzesten Abstände zwischen dem Original und dem veränderten Graphen betrachtet (Abb. 2).

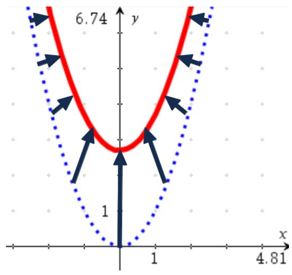



**Abb. 2: Nur verschoben oder auch gestaucht?**

Beide Deutungen – Verschiebung und Stauchung – sind begründbar, wenn man nur dem Anschein folgt. Der Term allerdings lässt die Deutung der Wirkung von a als Stauchung nicht zu. Auch wenn der Student nur die Verschiebung erwähnt hätte, wäre doch unklar geblieben, ob er nur dem visuellen Eindruck gefolgt ist. Korrektes Antwortverhalten muss also nicht heißen, dass der Sachverhalt verstanden ist. Man läuft Gefahr, eine durchaus korrekte Beschreibung von bloßen Oberflächenmerkmalen mit dem Verstehen des Sachverhalts zu verwechseln, Schüler wie Lehrer.

## Zusammenhänge nicht nur erkunden, sondern auch verstehen

Dabei birgt der Einsatz von dMER große Chancen für einen verständigen Zugang zu Funktionalen Zusammenhängen. Man muss nur klar benennen, was Verstehen hier bedeutet. Ein Lernender muss beim Vergleich zwischen den veränderbaren Repräsentationen strukturelle Analogien zwischen den Repräsentationsformen aufzeigen: In allen drei Repräsentationen der Funktion f beschreibt der Parameterwert a eine Differenz zwischen dem ursprünglichen und dem neuen Funktionswert. Weil der Graph sich als geometrischer Repräsentant von f aus Punkten mit den Koordinaten (x;f(x)) zusammensetzt, ändert sich mit a nur die zweite Koordinate jedes Punktes, wie deutlich an der Wertetabelle ersichtlich ist. Diese zweite Koordinate bestimmt die Höhe des Kurvenpunktes über der horizontalen Achse. Weil sie für alle Graphenpunkte gleichermaßen um a verändert wird, ist die Wirkung von a als Translation des gesamten Graphen zu deuten.

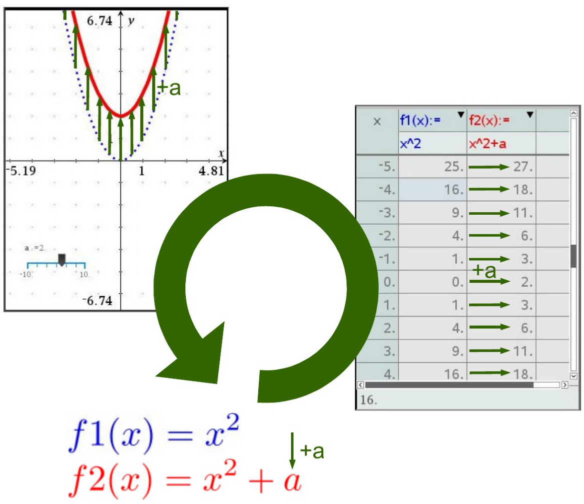



**Abb. 3: Die Wirkung des Parameter a auf die drei Repräsentationsformen von f als Invariante**

Diese Wirkung von a auf die drei Repräsentationen von f ist selbst nicht visualisiert. Sie wird deutlich, wenn man sie als strukturell analoge Eigenschaft innerhalb und zwischen den Repräsentationsformen erkennt. Die „Änderung um a“ erscheint so als eine Invariante in der dMER mit einer je spezifischen Ausdrucksform in jeder Repräsentationsform. Die Wirkung von a auf Term, Tabelle und Graph von f verstehen heißt also, von jedem Repräsentationskontext zu abstrahieren und dabei die Priorität der algebraischen Repräsentation als deutungsleitend zu erkennen (Pinkernell 2014).

## Wie Studierende ihre Beobachtungen begründen

Zusammen mit dem eingangs analysierten Interview wurden vermittels der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2010) weitere Interviews mit dem Ziel analysiert, Begründungstypen von besonderem theoretischen Interesse zu identifizieren, wobei drei Lehramtsstudierende als Kodierer zum Einsatz kamen. Neben den vorgegebenen Kategorien „Begründung mit Regelbezug“ und „Begründung mit Strukturbezug“ kam im Laufe der drei Kodiervorgänge die Kategorie „Begründung mit Beispielbezug“ hinzu. Zudem wurde das bekannte Toulminsche Argumentationsschema dem Kategorienmodell zugrunde gelegt, um deutlicher zwischen der Beschreibung der Wirkung von a und einer Begründung mit Regelbezug unterscheiden zu können. Abb. 4 zeigt das Modell. Die Beobachtung und jede der drei Kategorien ist durch Aussagen aus den Interviews illustriert worden, die von allen vier Beteiligten gleichermaßen kategorisiert wurden. Zur Verwendung als „a posteriori“ Ankerbeispiel im Kategorienmodell wurden sie sprachlich geglättet.

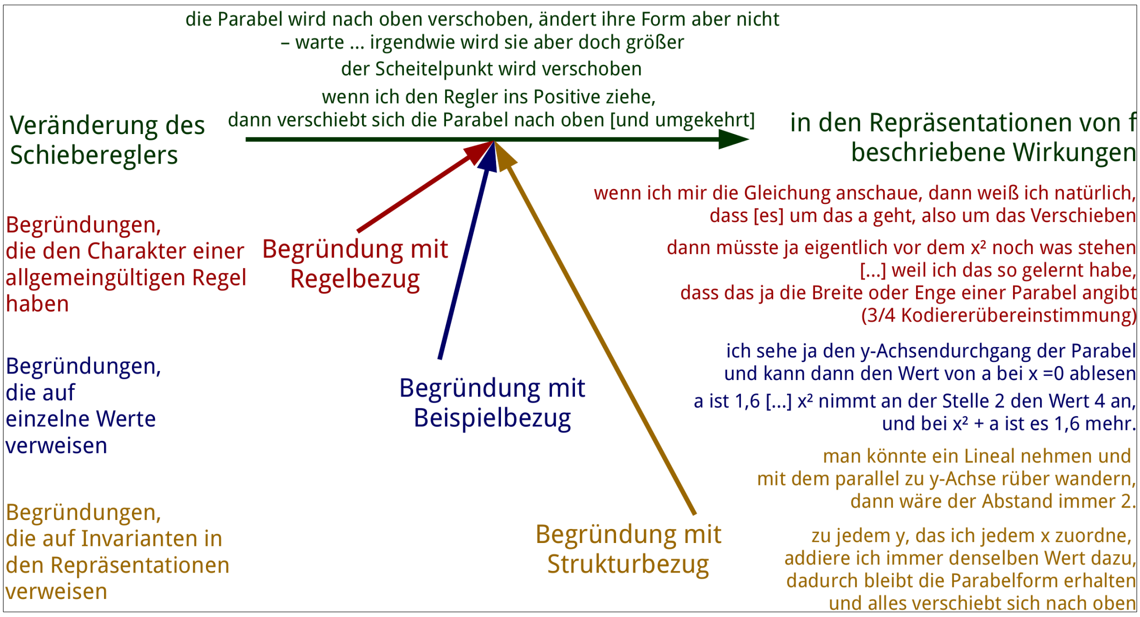



**Abb. 4: Ein theoriebasiertes Kategoriensystem für Begründungen beim Lernen mit dMER**

Das Modell kann eine aus fachlicher Perspektive notwendige Reflexionstiefe verdeutlichen, außerdem kann es mögliche Fehldeutungen im Umgang mit dMER deutlich werden lassen, und zwar als Oberflächenbezüge, die als (unverstandene) Regelbezüge im Widerspruch zu Strukturbezügen stehen. Die Entwicklung eines standardisierten Diagnoseinterviews auf Basis dieses Modells erfolgt in kommender Zeit.

## Literatur


Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. Computers & Education, 33, 131–152.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse* (11th ed.). Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Pinkernell, G. (2014). Mathematisches Grundwissen und Computeralgebra im Unterricht. *Der Mathematikunterricht* (1).

Jennifer PLATH, Dominik LEISS, Lüneburg, Knut SCHWIPPERT, Hamburg, Astrid NEUMANN, Lüneburg

# Das versteh ich nicht! Eine Untersuchung zur Konstruktion des Situationsmodells

Durch die vermehrte Bearbeitung von Problemstellungen mit größeren Textanteilen im Mathematikunterricht und die Notwendigkeit mentale Repräsentationen aufzubauen, ist das Textverständnis verstärkt zu einer zentralen Voraussetzung für die erfolgreiche Aufgabenbearbeitung geworden (vgl. Duarte et al. 2011). Insbesondere bei der Kompetenz des mathematischen Modellierens ist das Verstehen des Aufgabentextes grundlegend für die weitere Bearbeitung und stellt für viele Schülerinnen und Schüler eine potentielle kognitive Hürde dar.

## 1. Theoretischer Hintergrund

Das Projekt SITRE[1] beschäftigt sich mit dem Verstehensprozess beim Bearbeiten mathematischer Textaufgaben. Hierbei wird von einem theoretisch zweistufigen Verstehensprozess, dem Bilden des Situations- und Realmodells ausgegangen. Für diese beiden Teilkompetenzen des mathematischen Modellierens sind nicht nur mathematische, sondern insbesondere auch sprachliche Kompetenzen relevant (vgl. Leiss et al. 2010).

Im ersten Schritt des Modellierungsprozesses muss die reale Situation durch Lesen des Aufgabentextes bzw. der grafischen Elemente verstanden werden. Dabei wird unter lesebasiertem Textverstehen „[…] eine kognitiv-aktive (Re-) Konstruktion von Information […], in der die im Text enthaltene ‚Botschaft' aktiv mit dem Vor- und Weltwissen der Rezipienten/innen verbunden wird" verstanden (Christmann; Groeben 2006, S.146). Textverstehen kann demnach als interaktiver Prozess betrachtet werden, bei dem Bottom-Up- und Top-Down-Prozesse ineinandergreifen. Bottom-Up-Prozesse umfassen textgeleitete Verarbeitungsprozesse, die durch semantische, syntaktische und stilistische Textmerkmale gesteuert werden. Unter Top-Down-Prozessen hingegen werden wissensgeleitete Verarbeitungsprozesse verstanden, welche durch Lesermerkmale wie Vorwissen, Zielsetzungen oder Interessen beeinflusst werden. Das Produkt des Leseverstehensprozesses wird als Situationsmodell bezeichnet und wird

[1] Bei SITRE (Das Generieren von mentalen **Sit**uations- und **Re**almodellen beim Lösen mathematischer Modellierungsaufgaben) handelt es sich um ein interdisziplinäres Projekt zwischen Mathematikdidaktik (Dominik Leiss & Jennifer Plath, Lüneburg), Deutschdidaktik (Astrid Neumann, Lüneburg) und empirischer Bildungsforschung (Knut Schwippert, Hamburg).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 903–906). Münster: WTM-Verlag

von jeder Leserin und jedem Leser individuell konstruiert (vgl. Schmid-Barkow 2010, S. 219). Laut Reusser (1989, S.136f.) ist ein Situationsmodell „[…] das kognitive Korrelat der vom Autor eines Textes gemeinten bzw. von einem Leser verstandenen Situationsstruktur". Es wird zum einen von den Aufgabenmerkmalen (mathematische und semantische Struktur, Kontext, Format, Informationsdichte und grafische Elemente) (vgl. Leiss 2007, S. 29ff.) und zum anderen von den intrapersonellen Aspekten (Lesekompetenz, Kontextwissen, kognitive Grundfähigkeit, mathematische Leistungsfähigkeit, Einstellungen gegenüber Mathematik bzw. dem Kontext und affektive Dispositionen) (vgl. Artelt el al. 2001, S. 69ff.) beeinflusst. Im darauffolgenden Schritt wird das entstandene Situationsmodell durch Vereinfachungen und Strukturierungen präzisiert, was als Resultat das Realmodell hervorbringt. Zusammenfassend lässt sich bei der näheren Betrachtung der Konstruktion des Situations- und Realmodells die Relevanz der Komponente des Textverstehens erkennen.

Basierend auf diesen theoretischen Ausführungen beschäftigt sich das Projekt SITRE mit der Frage, wie der Verstehensprozess einer mathematischen Textaufgabe empirisch beschrieben und durch welche zentralen Faktoren er beeinflusst werden kann.

## 2. Design und Methode der Studie

*Stichprobe.* Die Untersuchung wurde im siebten Jahrgang mit 55 Realschülerinnen und Schülern aus drei Lüneburger Schulen durchgeführt.

*Durchführung.* Die Einzelsitzungen mit den Lernenden dauerten jeweils 120 Minuten. Um die Frage zu beantworten, welche mentalen Prozesse beim Verstehen einer Modellierungsaufgabe tatsächlich ablaufen, wurde die Methode des Lauten Denkens eingesetzt (vgl. Stark 2010, S. 61). Nach einer videogestützten methodischen Einführung bearbeiteten die Probanden unter Anwendung der Methode des Lauten Denkens in jeweils 20 Minuten drei Aufgaben. Diese Phase der Aufgabenbearbeitung wurde durch eine Kamera aufgezeichnet, um anschließend den Lösungsprozess empirisch zu rekonstruieren. Hieran anschließend wurden Lesekompetenz, mathematische Kompetenz und verschiedene Hintergrundvariablen erhoben.

*Aufgaben.* In der Erhebung der Studie sollten sowohl Modellierungsfähigkeiten als auch Fähigkeiten im Bereich des Leseverständnisses berücksichtigt werden, weshalb die Aufgaben bezüglich sprachlicher und modellierungsbezogener Aspekte sowie bezüglich Kontextvariationen systematisch variiert wurden.

*Datenanalyse.* Für die Auswertung des Datenmaterials wurde der Bearbeitungsprozess in einzelne Bearbeitungsschritte unterteilt, die sich an dem

Modellierungskreislauf von Blum & Leiss (2007) orientieren. In der Auswertung wurden neben der Bewertung der Bearbeitungsqualität in den einzelnen Schritten weiterhin die zeitliche Abfolge sowie der zeitliche Anteil der einzelnen Bearbeitungsschritte ermittelt. Hierdurch sollte der Aufbau des Bearbeitungsprozesses näher betrachtet und der Anteil des Verstehensprozesses am gesamten Bearbeitungsprozess untersucht werden.

## 3. Erste Ergebnisse

In einer ersten Auswertung wurden die durchschnittliche absolute und prozentuale Dauer des Verstehensprozesses ermittelt sowie ein möglicher Zusammenhang zwischen diesen Werten und der Bearbeitungsqualität untersucht. In den 165 Aufgabenbearbeitungen nahm der Verstehensprozess durchschnittlich 178 Sekunden ein, was 41% des gesamten Bearbeitungsprozesses entspricht. Anhand dieses Ergebnisses lässt sich sehr gut die Relevanz des Textverstehens während der Bearbeitung einer texthaltigen Mathematikaufgabe erkennen.

Um betrachten zu können, wie die Dauer des Verstehensprozesses mit der Bearbeitungsqualität zusammenhängt, wurde ein Summenscore generiert, der sich aus der Qualität in den einzelnen Bearbeitungsschritten zusammensetzt. Zwischen der absoluten Dauer und der Bearbeitungsqualität lässt sich kein Zusammenhang finden, woraus sich erkennen lässt, dass ein langer oder kurzer Verstehensprozess per se nicht förderlich oder hinderlich für die Bearbeitungsqualität ist. Allerdings ergibt sich eine signifikant negative Korrelation mit $r=.367$ ($p<.01$) zwischen der prozentualen Dauer des Verstehensprozesses und der Bearbeitungsqualität. Diese Korrelation bleibt auch ohne die Aufgabenbearbeitungen ($N=6$), die direkt nach dem Verstehensprozess abgebrochen wurden, bestehen. Hieraus lässt sich schließen, dass die Relation zwischen dem Verstehensprozess und dem mathematischen Bearbeitungsprozess relevant für die Bearbeitungsqualität ist. Bei der Betrachtung der Verteilung im Streudiagramm lässt sich erkennen, dass ein höherer Anteil des Verstehensprozesses im Bearbeitungsprozess vermehrt einhergeht mit einer geringeren Bearbeitungsqualität.

Weiterhin wurde mithilfe der Dauer und der Häufigkeiten der Verstehensprozesse eine erste Klassifizierung der 165 Bearbeitungsprozesse in 6 unterschiedliche Bearbeitungskategorien vorgenommen. Insgesamt zeigt sich auch hier, dass die Kategorien mit einem kurzen prozentualen Verstehensprozess durchschnittlich eine höhere Bearbeitungsqualität aufweisen. In einer ersten Untersuchung konnte jedoch zwischen den Kategorien keine Unterscheidung aufgrund von Personenmerkmalen aus den erhobenen Tests oder Aufgabenmerkmalen vorgenommen werden.

## 4. Zusammenfassung und Ausblick

Die ersten Auswertungen lassen einen Zusammenhang zwischen relativer Dauer des Verstehensprozesses und der Bearbeitungsqualität erkennen, welcher in weiteren qualitativen Untersuchungen detailliert analysiert werden soll. Für diese Analysen können zusätzlich die Lesestrategien herangezogen werden, die für jede einzelne Verstehensphase in den 165 Bearbeitungsprozessen kodiert wurden. Weiterhin sind insbesondere in den vorläufigen sechs Bearbeitungskategorien detailliertere qualitative Analysen notwendig.

## Literatur


Artelt, C., Schiefele, U., Schneider, W. & Stanat, P. (2001). Lesekompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert et al. (Hrsg.), *PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 69-137). Opladen: Leske + Budrich.

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical Modeling Problems? The example Sugarloaf and the DISUM Project. In C. Haines (Hrsg.): *Mathematical Modeling: Education, Engineering and Economics ICTMA 12* (S. 222-231). Chicbester: Horwood.

Christmann, U. & Groeben, N. (2006). Psychologie des Lesens. In B. Franzmann et al. (Hrsg.): *Handbuch Lesen* (S. 145-223). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Duarte, J., Gogolin, I. & Kaiser, G. (2011). Sprachlich bedingte Schwierigkeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben. In E. Özdil & S. Prediger (Hrsg.): *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektive der Forschung und Entwicklung in Deutschland* (S. 35-54). Münster u.a. : Waxmann.

Leiss, D. (2007). *“Hilf mir es selbst zu tun“. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R. & Pekrun, R. (2010). The role of the situation model in mathematical modeling – Task analyses, student competencies and teacher interventions. *JMD, 31*(1), 119 – 141.

Reusser, K. (1989). *Vom Text zur Situation zur Gleichung – Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben*. Bern.

Schmid-Barkow, I. (2010). Lesen: Lesen als Textverstehen. In H.-W. Huneke (Hrsg.): *Sprach- und Mediendidaktik (Taschenbuch des Deutschunterrichts, Band 1)* (S. 218-231). Baltmannsweiler: Schneider.

Stark, T. (2001): Lautes Denken in der Leseprozessforschung. *Didaktik Deutsch 16* (29), 58 – 83.

Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS, Landau

# Maßtheorie mit mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern - Chancen und Grenzen

Die Wahl des Weges kann entscheidenden Einfluss auf das Risiko haben, welchem sich Personen aussetzen. Risikowahrnehmung und qualitatives räumliches Verständnis von Risiken kann mit Integralrechnung verbunden werden. Durch die Auswertung der Risikofunktion entlang eines Weges entstehen Wegintegrale, die im Themenkanon der Sek.-analysis im Kontext der Integration behandelt werden können. Empirische Forschung mit SuS mit besonderen naturwissenschaftlichen Begabungen wird durchgeführt.

## 1. Einleitung

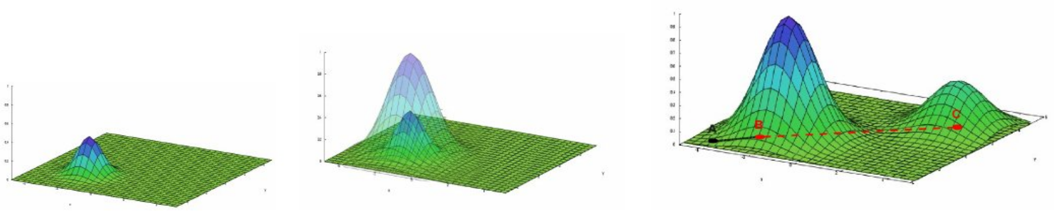


*Abb. 1: Entwicklung epidemiologischer Risiken (Platz, 2014, S. 91)*

Risiko kann mit einer Risikokarte visualisiert werden. Eine Risikokarte ordnet einem geographischen Ort ein Risiko zu. Auf der linken Seite in Abb. 1 ist eine vereinfachte Risikokarte, welche das Risiko für die Infektion mit einer Krankheit zeigt, dargestellt. In der Mitte ist die erwartete Entwicklung des Risikos visualisiert, wenn sich die Krankheit konzentrisch weiter ausbreitet. Die Wahrnehmung von Risiken („weit entfernt vom Risikogebiet bin ich sicher") widerspricht aber oft der tatsächlichen räumlichen Entwicklung der Ausbreitung ansteckender Krankheiten: Obwohl der Euklid. Abstand zwischen den Punkten $A$ und $B$ kleiner ist als zwischen $B$ und $C$, ist das Risiko an Punkt $C$ höher als an Punkt $A$. Im Fall von „Flughafenmalaria", reisen infizierte Moskitos oder infizierte Personen mit dem Flugzeug ein. Übertragen auf unser Beispiel wären dann Flughäfen an den Punkten $B$ und $C$ positioniert. Das Netz von Flugverbindung verändert epidemiologische Distanzen, die nicht notwendigerweise deckungsgleich mit den Euklid. Entfernungen im Raum sind. Diese epidemiologischen Abstände erfüllen mathematisch u. U. auch nicht mehr die Eigenschaften einer Metrik, da u. a. die Symmetrie-Eigenschaft nicht erfüllt ist, falls z. B. mehr Reisende von $B$ nach $C$ als von $C$ nach $B$ fliegen würden. Folglich müssen topologische Räume verwendet werden, da epidemiologische Abstände im Gesundheitsbereich existieren, die nicht notwendigerweise mehr Euklidisch sein müssen. Das Risiko, dem eine Person ausgesetzt ist, ist von deren räumlichen Aktivitäten im Risikogebiet abhängig. Wegintegrale ermögli-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 907–910). Münster: WTM-Verlag

chen die Berechnung des Risikos für einen bestimmten Weg und können durch einen enaktiven Zugang (vgl. Rapp et al. 2014) auf die Integralrechnung in der Sek. II zurückgeführt werden. Mathematisch begabte SuS können bereits während der Schulzeit an der Universität Koblenz-Landau ein Frühstudium aufnehmen („Schüleruni“). Sie nehmen an regulären Lehrveranstaltungen teil und können Leistungsnachweise erwerben. (www.uni-koblenz-landau.de/landau/landau/fb7/mathematik/projekte/schueleruni).
Die Veranstaltung zur Schüleruni im WS 2013/2014 fand im mathematischen Umweltlabor (UWL) statt. Im UWL arbeiten SuS mit besonderen naturwissenschaftlichen Begabungen an Fragestellungen aus den Umweltwissenschaften, die gleichzeitig mathematische Modellbildung für die Problemlösung benötigen. Inhaltlich kann der Themenbereich auf die räumlich explizite Risikobewertung in den Umweltwissenschaften eingegrenzt werden. Risikokarten können als 3-dimensionale Graphen dargestellt werden. Das Risiko, welchem eine Person, die ein Risikogebiet durchquert, ausgesetzt ist, kann durch Integration gemessen werden. Die Veranstaltung „Messen in Räumen“ (MiR) führte von der Integration der Schulmathematik über Wegintegrale zur Maßtheorie.

## 2. Umsetzung im Rahmen einer Veranstaltung der Schüleruni

6 SuS (9.-12.Klasse), 1 Masterstudentin und 2 PromotionsstudentInnen besuchten die 2-SWS-Veranstaltung MiR. Die Themen Norm, Metrik, Differentialrechnung, Integralrechnung, mehrdimensionale Integration und Funktionenräume wurden behandelt. Es folgte ein Exkurs in die Funktionentheorie, um die Berechnung von Wegintegralen zu ermöglichen. Die Lernenden arbeiteten am PC an vorgefertigten Lernstationen zur Lösung von Wegeproblemen (Platz et al., 2012) und zur Erstellung von 2- und 3-dimensionalen Risikokarten mit Hilfe von *Geogebra*- und *Maxima*-Applets. Dabei wurden die Handlungen der Lernenden am Bildschirm mit der Screencastsoftware *Vokoscreen* aufgezeichnet. Danach wurde eine komplexe Risikokarte erzeugt (siehe Abb. 2). Durch die Festlegung eines Weges wird das Risiko an jedem Ort des Weges ausgewertet. Dadurch entsteht ein Risiko-Zeit-Diagramm, das jedem Zeitpunkt das Risiko zuordnet, dem eine Person an diesem Ort ausgesetzt ist. In Abhängigkeit der Zeit entsteht so aus dem 3-dimensionalen Graphen der Risikokarte eine Integration einer

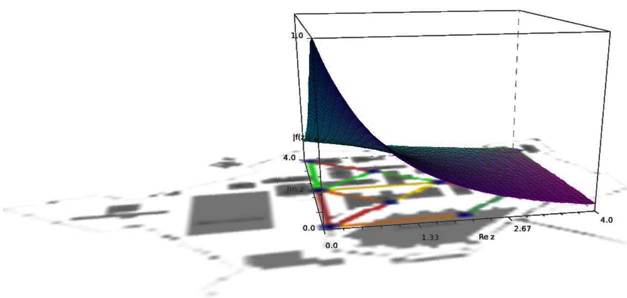



*Abb. 2: Komplexe Risikokarte über dem Wegenetz auf dem Universitätscampus*

Funktion mit einem 2-dimensionalen Graphen. Die Berechnung wurde zunächst per Hand ausgeführt und anschließend von den Lernenden in einem *Maxima*-Applet umgesetzt. Anschließend wurde die Maßtheorie auf Topologischen Räumen behandelt.

## 3. Zusammenfassung und Ausblick

Da SuS ab der 9. Klassenstufen an der Veranstaltung MiR teilnahmen, mussten häufig Inhalte der Sek., der Oberstufe und des Grundstudiums bedarfsorientiert in der Veranstaltung behandelt werden. Auch wenn die Veranstaltung nicht alle geplanten Aspekte der Lernveranstaltung inhaltlich umsetzen konnte, ist die Geschwindigkeit, mit der die SuS die Lerninhalte ausgreifen und in die Problemlösung integrieren beeindruckend. Ein großer Teil der fachwissenschaftlichen Inhalte war den SuS nicht bekannt. Aus Zeitgründen konnte die Aufarbeitung von Lernvoraussetzungen nicht vollständig in der Lehrveranstaltung durchgeführt werden. Am Ende der Veranstaltung fand eine 25-minütige mdl. Prüfung statt. Dabei wurden folgende Probleme deutlich: Während qualitative logische Zusammenhänge für die räumliche Problemlösung in der Regel korrekt abgeleitet werden konnten, konnten bei der exakten formalen Schreibweise Probleme bei der Lese- und Schreibkompetenz der Formelsprache festgestellt werden. Auch wenn im Laufe der Lehrveranstaltung eine Verbesserung im Umgang mit der Formelsprache festzustellen war, bleibt die Semantik von Quantoren, Element- und Teilmengenbeziehung, etc. insbesondere bei Mengensystemen schwierig. Zum anderen wurde die Bedeutung von abstrakten Definitionen für die Problemlösung unterschätzt. Logische Grundkomponenten des Argumentierens (Voraussetzungen, Schlussfolgerung, Begründungen, etc.) bedürfen einer grundlegenden Unterstützung. Diese Aspekte beziehen sich aber lediglich auf die symbolische Darstellung in der Formelsprache selbst, in der Prüfungssituation konnten die SuS mit kleinen Hilfestellungen Definitionen und Voraussetzungen selbst herleiten. Auffällig war, dass Inhalte mit einem starken Anwendungsbezug bei den SuS stärker im Gedächtnis blieben und die Herleitung von abstrakteren Beschreibungen vorbereiten konnten. Z. B. löste der jüngste Schüler (9. Klasse) ein mehrdimensionales Integral in der Prüfung. Ebenso wurden Transferaufgaben mit Anwendungsbezug in der Prüfung gut gelöst. Beweise in allgemeinen topologischen Räumen konnten jedoch in der Prüfung nicht behandelt werden. Um die Formelschreibweise der SuS zu verbessern, könnten maßgeschneiderte Hilfestellungen zur jeweiligen Veranstaltung zur Verfügung gestellt werden, die den Anwendungsfall strukturgleich in eine formale Schreibweise überführen und umgekehrt formale Schreibweisen im Kontext eines Anwendungsfalles interpretieren. Von diesem Wechsel der Repräsentationsformen im Kontext der nicht-normativen mathematischen Modellbildung könnten auch die Lehramtsstudierenden profitierten. Für die Optimierung der Veranstaltung MiR müsste der zeitliche Rahmen auf 4 SWS ausgedehnt werden. Mischung aus Vorlesung und Übung erscheint notwendig, um schnell auf fehlende Lernvoraussetzungen reagieren zu können. Identifizierte Lernvoraussetzungen könnte in folgenden Veranstaltungen zusätzliche Online-Übungen ergänzt werden. Dabei könnten Beweisaufgaben im Sinne von elektronisch unterstützten Beweisen als Online-Übungsaufgaben in *IMathAS* zur Verfügung gestellt werden (vgl. Niehaus, 2014). Videokonferenzen mit *OpenMeetings* könnten für die Unterstützung von Übungen abgehalten werden, damit eine zusätzliche Anreise der SuS nicht notwendig wird. Die Online-Übungsaufgaben hätten diagnostische Funktion, da die Lösungen den einzelnen SuS zugeordnet werden können und den SuS somit maßgeschneiderte Hilfestellungen angeboten werden können (vgl. Hennecke et al., 2005). Durch die häufige Gruppenarbeit in der Veranstaltung kann individuelle Hilfestellung nur selten bereitgestellt werden. Da ausschließlich OpenSource Software und OpenContent verwendet wird, können die Materialien und Übungsaufgaben auch mathematisch begabten SuS zur Verfügung gestellt werden, die nicht an der Veranstaltung teilnehmen können (open-source.gbdirect.co.uk/migration/benefit.html). Allerdings sollte die Veranstaltung nicht komplett online stattfinden, da so das Prinzip des gemeinsamen Problemlösens mit Studierenden an der Universität nicht mehr gegeben wäre und den SuS der persönliche Kontakt mit anderen SuS und Studierenden sehr wichtig ist. Ein langjähriger Teilnehmer der Schüleruni äußerte: „In der Schule gibt es viele Leute, die Mathe nicht mögen, aber hier interessieren sich alle für Mathe und verstehen wirklich, warum man das Fach mag. Deswegen ist die Atmosphäre hier viel besser.“ (www.uni-koblenz-landau.de/blog/fruehstudium-landau/).

## Literatur


Platz, M. (2014). *Mathematical Modelling of GIS Tailored GUI Design with the Application of Spatial Fuzzy Logic.* Universität Koblenz-Landau. http://kola.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2014/965/ .

Rapp J., Niehaus E. (2014). Möglichkeiten zur Visualisierung von Risikofunktionen im Dreidimensionalen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014.*

Platz, M., Niehaus, E. (2012). Test-Umgebung für räumliche Entscheidungsunterstützung zur späteren Verwendung in Augmented Reality für mobile Endgeräte. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, S. 661-664.

Niehaus, E. (2014). *e-proof - Electronic Proofs in Education*. http://e-proof.weebly.com/, abgerufen am 18.03.2014.

Hennecke, M., Winter K. (2005). Lernsoftware und Lehrwerke: Adaptierte Lernsoftware. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005.*

Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS, Landau

# Wie kann man mit Fuzzy Logik maßgeschneidert Informationen ausliefern?

Wir fällen in unserem Alltag fast alle Entscheidungen auf Basis von unscharfen und unvollständigen Informationen. Fuzzy Logik kann die Unschärfe ausdrücken und Risikokarten können als 3-dimensionale Graphen dargestellt werden. SuS verwenden Fuzzy Logik um Risikokarten zu verschneiden. Im Risikogebiet befindliche Personen können so durch räumliche Entscheidungsunterstützung mit maßgeschneiderten Hilfestellungen beliefert werden.

## 1. Einleitung

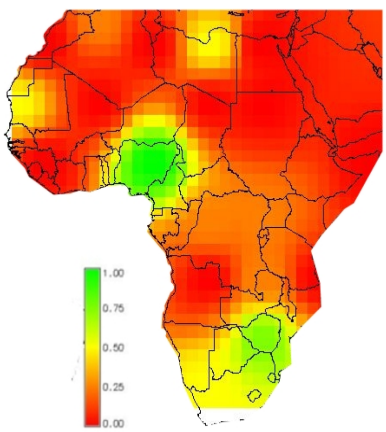
In den Bereichen Strahlung, Ökotoxikologie und Epidemiologie gibt es unsichtbare Risiken. Daher benötigen Personen in einem Risikogebiet Unterstützung, um möglichst unbeschadet Aufgaben ausführen zu können oder möglichst risikoarm dieses Gebiet wieder verlassen zu können. Deshalb befassen wir uns im Folgenden mit der Frage: Wie kann Risiko für eine im Risikogebiet befindliche Person visualisiert werden und wie kann diese Person mit maßgeschneiderten Informationen zur Frühwarnung und räumlichen Entscheidungsunterstützung, z. B. über ein digitales Endgerät (Smartphone), versorgt werden? Risiko kann mit einer Risikokarte visualisiert werden, die einem geographischen Ort ein Risiko zuordnet. Eine Ressourcenkarte ordnet einem geographischen Ort die Verfügbarkeit einer Ressource zu. Für fuzzylogische Operationen müssen die Risiko- und Ressourcenkarten zunächst in Karten umgerechnet werden, die den Grad der Gültigkeit für Risiko bzw. die Ressourceneigenschaften räumlich darstellen können (Fuzzyfizierung). Diese Karten kann man fuzzylogisch kombinieren und für die Auslieferung maßgeschneiderter Informationen für risikoexponierte Personen verwenden.

## 2. Methodologie

Wenn sich Personen mit einer bestimmten Zielsetzung im Raum bewegen, können Eigenschaften mit unterschiedlichem Grad im Raum erfüllt sein. Eigenschaften eines Ortes im Raum sind z. B. das Risiko an diesem Ort oder die Ressourcenverfügbarkeit für die eigene Risikominimierung. Räumliche Fuzzy-Zugehörigkeitsfunktionen visualisieren die Gültigkeit dieser Eigenschaften als eine Karte und können sich mit der Zeit verändern. Im Folgenden wird der Fall betrachtet, wenn eine Person in einem Risikogebiet möglichst unbeschadet zu einer Person vordringen möchte, die ge-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 911–914). Münster: WTM-Verlag

rettet werden soll. Dabei muss die Person räumliche Entscheidung treffen. Eine Entscheidungsunterstützungskarte kann durch das Schneiden von Fuzzymengen kreiert werden, vgl. Biewer (1997), S.76. Die Zugehörigkeitsfunktionen hängen aber nicht nur von äußeren Eigenschaften ab, sondern auch von individuellen Eigenschaften der Entscheidungsträger, z. B. wenn der Benutzer gesund, stark und schnell ist, benötigt dieser weniger Zeit, um zu der Person zu gelangen, die gerettet werden muss. Fahrzeuge für den Transport und verfügbare Infrastruktur können die Zugehörigkeitsfunktion ebenso beeinflussen. Mit einem Alpha-Schnitt kann das Areal bestimmt werden, in dem eine bestimmte Information an die Person übermittelt werden soll, die eine andere Person retten soll. Somit kann mit linguistischen Werten die maßgeschneiderte Informationsauslieferung gesteuert werden, d. h. bestimmte Informationen, werden nur dann an eine Person übermittelt, wenn der linguistische Wert für das Anzeigen der Information genügend Fuzzyqualität besitzt. Ein kleiner Teilbereich im Themenkomplex der Auslieferung maßgeschneiderter Informationen wurde innerhalb eines Pilot-Projekts mit SuS eines 12.-Klasse-Mathematikleistungskurses behandelt. Dazu wurde an der Universität Koblenz-Landau, Campus Landau, eine Unterrichtseinheit über Wassermanagement in Afrika durchgeführt. Die Aufgabe war die Optimierung der Brunnenverteilung in Afrika basierend auf Karten über Grundwasserressourcen in Afrika, die in MacDonald et al. (2012) beschrieben werden. Um das Problem zu lösen, diskutierten die SuS über nützliche Parameter und teilten sich in Gruppen auf um Daten zu sammeln und Risiko- und Ressourcenkarten zu erzeugen. Während dem gesamten Prozess arbeiteten die SuS selbständig und die Lehrkraft beobachtete die SuS und gab nur Hilfestellung, wenn diese tatsächlich notwendig war bzw. von den SuS erbeten wurde. Die SuS verwendeten die folgenden Parameter: Grundwasserspeicher, geschätzte Tiefe zum Grundwasser, Nachhaltigkeit des Wasserspeichers, Infrastruktur und Wasserbedarf für alle Sektoren. Die Parameter wurden bewertet, indem bestimmten Geokoordinaten zu einem bestimmten Zeitpunkt Werte zwischen *0* und *1* zugeordnet wurden, die die Qualität für den Bau eines neuen Brunnens an dem bestimmten Ort beschrieben, wobei *0* „schlechte" und *1* „gute" Qualität repräsentiert. Oberflächen wurden durch Interpolation generiert und mit g*nuplot* geplottet. Die entstandenen Funktionen wurden mit einer arithmetisches-Mittel-Methode, die das logischen UND verwendet, kombi-



*Entscheidungsunterstützungskarte visualisiert mit GRASS GIS* niert. Der resultierende Graph wurde mit einer Karte von Afrika kombiniert und in *GRASS GIS* dargestellt zur besseren Visualisierung.

## 3. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der Wasserressourcen-Unterrichtseinheit arbeiteten die SuS zum ersten Mal an einem Problem, welches räumliche mathematische Modellbildung zur Problemlösung benötigte. Auffällig war, dass die SuS ihre Lösungsvorschläge selbst eher negativ einschätzten und sie waren überrascht, dass sie zur Problemlösung mit ihren eigenen Ideen beitragen konnten und dass nicht nur eine Lösung zur Verbesserung der Situation führen kann, sondern dass verschiedene Lösungen zum Erfolg führen können. Dennoch wurde das Interesse der SuS geweckt und sie arbeiteten begeistert an der Problemlösung. Zugehörigkeitsfunktionen sind ein basales Instrument, um die Versorgungsqualität einer Person oder das Risiko, dem eine Person ausgesetzt ist, auszudrücken. Mit Hilfe von fuzzylogischen Operationen können maßgeschneiderte Informationen zugeschnitten auf verschiedene Benutzergruppen über ein digitales Endgerät ausgeliefert werden. Eine Benutzergruppe könnten lokale Farmer sein. Ein Nachteil der entwickelten Karten ist dabei jedoch folgender: Um exakte Orte zu bestimmen, an denen ein Brunnen gebaut werden soll (z. B. wenn ein Farmer einen Brunnen auf seinem Grundstück bauen möchte), ist die Auflösung unserer Karten zu gering (siehe AL-Daghastania et al. 2006, & Gupta et. al., 2010). Dennoch können unsere Karten von einer anderen Benutzergruppe, den Entscheidungsträgern, genutzt werden, z. B. von ausländischen Hilfsorganisationen, um eine größere Region zu identifizieren, in der die Konstruktion von Brunnen möglich wäre. Um die verschiedenen Benutzergruppen in ihren Entscheidungen optimal unterstützen zu können, müssten die erstellten Karten optimiert werden, z. B. durch eine gesteigerte Auflösung. Außerdem könnten andere Umwelt- und sozioökonomische Faktoren für die Optimierung der Verfügbarkeit und des Zugangs zu Wasser als die oben erwähnten hinzugefügt werden. Als weitere Parameter wurden folgende von den SuS genannt: Politische Situation, Bodenbeschaffenheit und (räumliche) Verteilungsgerechtigkeit. Diese Parameter wurden auf Grund von Zeitknappheit nicht in die Berechnung mit eingebracht. Diese und weitere Parameter, wie verfügbare Geräte zur Brunnenkonstruktion, Kosten, logistische Optimierung, Standorte von vorhandenen Brunnen und Gewässern, könnten Optionen für die Verbesserung der Karten liefern. Um zuverlässige Ergebnisse zu erhalten, könnten diese Parameter hinzugefügt werden und die Parameter könnten gewichtet miteinander kombiniert werden, d. h. mit Konvexkombination. Mit der entwickelten Methode zur Problemlösung wurde eine generative Struktur entwickelt, die auf andere Probleme mit ähnlicher Struktur angewendet werden kann. Zudem kann das entwickelte Konzept erweitert werden, z. B. durch Hinzufügen, Wegnehmen oder Ersetzen von Parametern. Außerdem können reale Probleme, die mathematische Modellbildung zur Lösung benötigen, abgeleitet werden und in Projekten oder AGs behandelt werden, um den SuS neue Herangehensweisen und Methoden beizubringen und um das Interesse der SuS zu steigern. Die Nutzung von OpenSource Software und OpenContent erleichtert die Weitergabe und Weiterentwicklung für Schulen. Wenn weitere unterstützende Materialien entwickelt werden, mit denen auch für leistungsschwächere SuS ein Beitrag für nicht-normative Modellierungsaufgaben geliefert würde, könnten diese Aufgaben ggf. auch in den regulären Unterricht umgesetzt werden. Der hohe Vorbereitungsaufwand erfordert allerdings eine OpenContent-Realisierung der Materialien und kooperative Entwicklungsarbeit über Schulgrenzen hinweg (im Sinne einer Open Community, http://at6fui.weebly.com/open-community-approach.html, oder der Wikipedia-Gemeinde). Am Ende der Unterrichtsreihe im Rahmen der AG war trotz guter Modellierungsergebnisse eine negative Selbsteinschätzung der SuS zur eigenen Leistung zu beobachten. Als Begründungen wurden u. a. genannt, dass nicht alle selbst identifizierten Einflussparameter in die Modellbildung mit eingeflossen waren und Experten es bestimmt noch besser realisieren könnten. Dass man in komplexen dynamischen System das Optimum in der Regel auch als Experte nicht findet und jede suboptimale Verbesserung des bestehenden Systems auch eine Verbesserung darstellt, sollte daher auch als ein zentrales Lernziel während und nach einem Modellierungsprozess im Kontext der Selbsteinschätzung berücksichtigt werden.

## Literatur


Platz,M., Rapp, J., Größler, M. & Niehaus, E., (2013). Adaptive GUIs Tailored to Different User Groups for Public Health Service Delivery via Fuzzy Logic Membership Functions. In *IST-Africa 2013 Conference Proceedings, Paul Cunningham and Miriam Cunningham (Eds), IIMC International Information Management Corporation.*

Biewer, Benno (1997). *Fuzzy-Methoden.* Berlin: Springer.

MacDonald, A.M., Bonsor, H.C., Ó Dochartaigh, B.E. & Taylor, R.G. (2012). Quantitative maps of groundwater resources in Africa. In *Environmental Research Letters*, Vol. 7, No. 2, S. 1-7.

AL-Daghastania, N.S. & AL-Maitah, K.J. (2006). Preliminary Location of the Groundwater Wells Using GIS Techniques: a Case Study of the HRH Tasneem Bint Ghazi for Technology Research Station. In *Proceedings of the ISPRS Commission VII Symposium 'Remote Sensing: From Pixels to Processes', Volume XXXVI Part 7.* Enschede, Netherlands.

Gupta, M. & Srivastava, P.K. (2010). Integrating GIS and remote sensing for identification of groundwater potential zones in the hilly terrain of Pavagarh, Gujarat, India. In *Water International*, Vol. 35, Issue 2, (S. 233-245).

Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS, Ingo DAHN, Ulrike DREYER, Landau und Koblenz

# *IMathAS* & automated Assessment of mathematical Proof

*IMathAS* is a web-based math assessment tool for delivery and automatic grading of math homework. In *IMathAS* electronic proofs (e-proofs) are not included by default as deductive arguments for a mathematical statement. The article will show how learners can be supported in building the arguments on justifications and previously established statements by application of *IMathAS*. Furthermore requirements and constraints are discussed for an e-proof to trace back to established statements.

## What is *IMathAS*?

*IMathAS* (http://www.imathas.com/) is a web-based Internet Mathematics Assessment System which can be used within a browser. It has an integrated computer algebra system (CAS), which is not visible for the user. A gradebook is included into *IMathAS* to allow automatic grading of mathematical homework, tests and electronic assessments. The questions are algorithmically generated and numerical and mathematical expression answers can be generated by the computer. Furthermore, free text and essay environments can be included with manual grading by the teacher. *IMathAS* allows accurate display of mathematics and graphs. A randomizer-function allows individual questions for all students. Thereby, the questions are structurally equivalent. Thus, the results can not be cribbed, the students have to solve the task on their own. The biggest benefit for the teachers/authors is a shared joint repository of questions and tasks. The questions can be included in a public library accessible for all teachers/tutors in the community or the questions can be kept in a private library of single teachers, as well. Additionally, it is possible to modify and improve questions from other authors and to integrate them into your private libraries. An *IMathAS* installation on a Server should be planed for multiple educational institutions to support a philosophy of collaboration and sharing among teachers of different institutions.

## Requirements and Constraints

Most educational facilities have financial constraints. Therefore it was a requirement for the web-based Learning Environment to be provided as OpenSource. Furthermore the cost of development for an e-proof-system is minimized if just the e-proof system is realized as a kind of plugin in an existing OpenSource solution. The aim to provide a solution within an existing OpenSource Solution has additional advantages, because new releases

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 915–918). Münster: WTM-Verlag

of the underlying mathematical assessment system will be available for the e-proof plugin as well. *IMathAS* was selected, because it provides a shared joint repository to a potentially large target group (universities, schools, etc.) in Rhineland-Palatinate. *IMathAS* provides an IT environment for collaborative support of teachers in a way, that the participating universities and schools can share their development of tasks by a One-Click-Solution with the community of authors. Furthermore, it was a requirement that the underlying OpenSource solution is capable to create individual tasks for all students that can be automatically graded with an integrated help system and a basic tutoring environment to adjust the level of support to the learners' problem solving skills. First of all *IMathAS* has all these features. Furthermore *IMathAS* is available for all regional universities in Rhineland-Palatinate. As a pilot version for electronic proofs the integration into *IMathAS* should be realized as a copy&paste solution for the authoring environment within the web-based mathematical assessment system.

**Structure of an e-proof**

There is a landscape of different types of proofs and support levels for the proof. We classify the considered prototype for an e-proof environment just in between

- understanding of a given proof of a certain theorem and
- the creation of an own proof for the same given theorem on a blank piece of paper.

An e-proof has e.g. some kinds of options where the students can select fragments of a proof or order them. Therefore, an e-proof is not as flexible as a proof on a blank piece of paper. The solution of a student of an e-proof task is checked against the correct solution which can include different pathways from the preconditions to the conclusions. The considered proofs for the e-proof environment can be decomposed into single fragments. Each fragment consists of three components, namely,

- the connection to the previous fragment,
- the description of the fragment itself and
- one or more justifications of the proof step.

This structure is depicted in the e-proof environment of *IMathAS*. In Fig. 1 the students view of the e-proof environment in *IMathAS* is visualized.

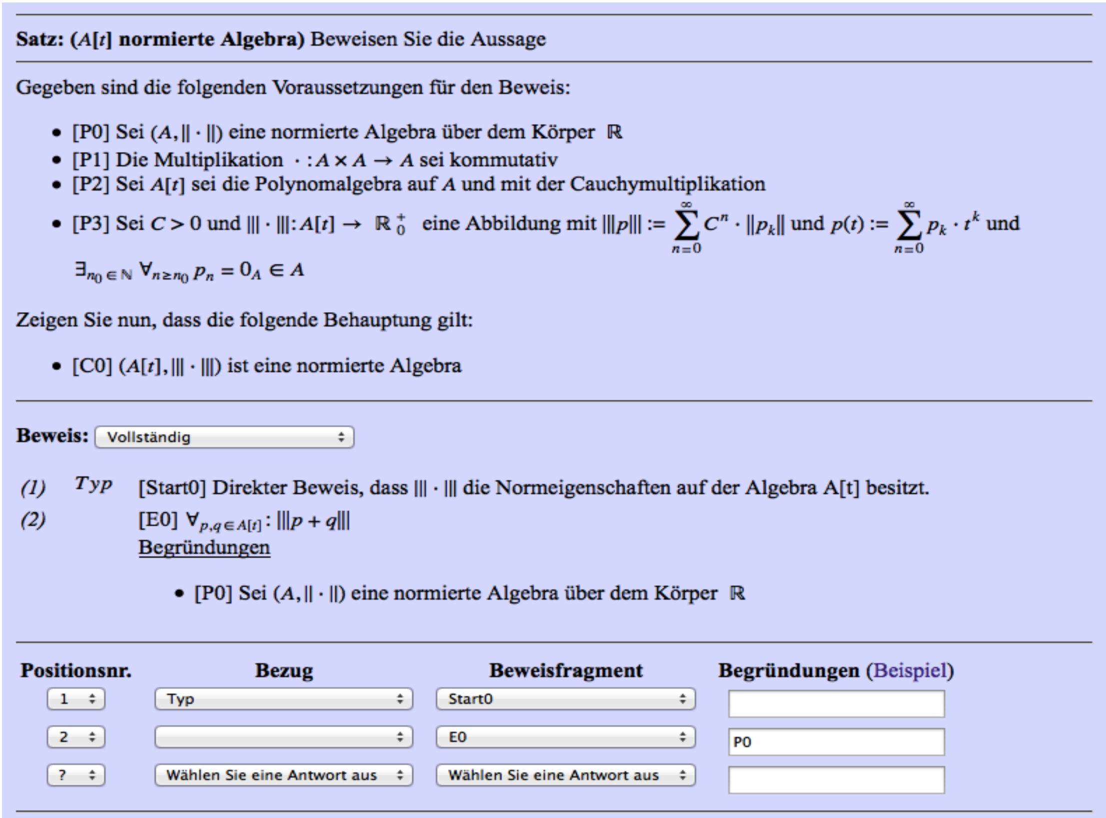



*Fig. 1: Student's view of the e-proof environment in IMathAS*

Additionally, it is possible to give the students the opportunity to define their own proof steps with the application of an integrated editor in *IMathAS* and to use these proof steps in the e-proof environment. This method is closer to creating a proof on a blank piece of paper. Furthermore, pre-defined and self-defined proof steps can be combined in the e-proof environment. The consequence of allowing self-defined proof steps is that the teacher needs to correct the students' electronic solutions manually.

## Authoring Support within *IMathAS*

```
//-[0]Previous_Step---[1]StepID---[2]Connection---[3]necessary_Justification---[4]optional_Justification--
$so=0
$SolutionStep[$so]=array(" ","MY1"," ",array("P0","P3"),array())
$so+=1
$SolutionStep[$so]=array(" ","E0"," ",array(),array())
$so+=1
$SolutionStep[$so]=array("E0","MY2","",array("MY1"),array())
$so+=1
$MinimalProofSteps = $so
```

*Fig. 2: Exemplary Source Code for Solution Steps*

It should be possible for an author to create e-proof-tasks in *IMathAS* without knowing the correct syntax of the system. Therefore, a solution has to be created by allowing the user to select proof steps and justifications to create a new e-proof-task. The source code for the solution steps (cf Fig.2) will then be generated automatically. The teacher creates all needed proof steps and performs the correct students' activity for problem solving in the student's view (Fig. 1). Along with this teacher's interaction the solution code will appear in the authoring mode of the e-proof-system. The only step the teacher/author of the proof is to copy the generated code into the e-proof definition in *IMathAS* (i.e. Common Control of a task).

## Conclusions and Next Steps

An OpenSource environment, namely *IMathAS*, was selected, because it provides all the required features for a shared task development and the system was installed for all universities and educational facilities in Rhineland-Palatinate. This is a good opportunity to have collaboration on a joint repository, that the provided tasks can be adapted to the individual needs of the universities or educational facilities and learn from good case studies of tasks which are used in lectures and seminars. The randomizers within the system allow to provide individual tasks for all students that can be automatically graded, even for written examinations, to prevent cribbing. There is an integrated help system in *IMathAS* which allows to adjust the level of support for learners according to the problem solving skills of a student. The support and help system is currently in a prototype version and needs additional research input for specific proofs. Furthermore, the prototype of an e-proof-system was provided and integrated for e-proofs in *IMathAS* by copy&paste-integration as a task. Flexibility is included by allowing the students to generate self-defined proof steps in addition to predefined proof steps. The current prototype can be characterized as proof of concept and as a technological solution that provides an option in between the two pillars "understanding a given proof" and "create your own proof on a blank piece of paper". The core question is: Does the e-proof environment support the skills of logical deduction of a proof? This question still remains unanswered. The objective is to support learners in creating their own proof on a blank piece of paper. The supportive mechanism of an e-proof environment has to be evaluated with an empirical study to answer the questions how and why an e-proof environment should be used to support learners in creating their own proof on a blank piece of paper.

## Literatur


Niehaus, E., & Faas, D. (2013). Mathematische Beweise in elektronischen Klausuren in der Lehramtsausbildung. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*.

Handke, J., & Schäfer, A. M. (2012). *E-Learning, E-Teaching und E-Assessment in der Hochschullehre: Eine Anleitung*. Oldenbourg Verlag.

Cataloglu, E. (2007). Internet-mediated assessment portal as a pedagogical learning tool: a case study on understanding kinematics graphs. *European journal of physics*, *28*(4), 767.

Christine PLICHT, Markus VOGEL, Christoph RANDLER, Heidelberg

# Eine Interviewstudie zum Lesen von Diagrammen

Diagramme sind nicht nur in öffentlichen Medien ein gängiges Darstellungsmittel, sondern auch in den Lehrmaterialien vieler Unterrichtsfächer. Damit kommt dem sachgerechten Lesen von Diagrammen eine wichtige Rolle im Fachunterricht zu: struktur- und kontextspezifische Informationen müssen ausgelesen, eingebracht und zusammengedacht werden.

## 1. Forschungsfokus

Das interdisziplinäre Projekt SRUMaBio der Pädagogischen Hochschule Heidelberg beforscht an der Schnittstelle der Fächer Biologie und Mathematik das diagrammspezifische Leseverständnis, das für den Biologieunterricht bedeutsam ist. Dazu wurde im Projekt eine offene qualitative Interviewstudie zu der leitenden Forschungsfrage durchgeführt, wie Kinder der frühen Sekundarstufe mit ausgewählten Diagrammen des Biologieunterrichts umgehen und was das Lesen dieser Diagramme beeinflusst. Zweck der nachfolgend dargelegten Studie war die empiriebasierte Generierung von Hypothesen, die in weiteren diagnostischen Untersuchungen im Unterrichtskontext betrachtet werden.

## 2. Theoriebausteine

Neben strukturspezifischen Informationen, die sich z. B. aus der absoluten und zueinander relativen Lage von Datenpunkten ergeben, enthalten Diagramme auch kontextspezifische Informationen, die den Datenhintergrund repräsentieren. Um diese Informationen auslesen zu können, muss ein Diagramm in Bezug zu seinem sächlichen Kontext gesetzt werden (Friel, Curcio & Briel, 2001). Das Lesen und Interpretieren eines Diagramms besteht also aus verschiedenen Bestandteilen, welche Curcio (1987) in einem Stufenmodell verschiedener Anforderungsgrade ausdifferenziert: Sowohl das Lesen von Daten, bei dem einzelne Datenpunkte abgelesen werden, als auch das Lesen zwischen den Daten, bei dem Trends aufgezeigt und Punkte verglichen werden, fokussieren insbesondere auf strukturelle Merkmale. Dahingegen berücksichtigt eine weitere Stufe den Kontext, um weitergehende Prognosen anstellen zu können: das Lesen über die Daten hinaus. Ergänzt wird dieses Modell um eine vierte Stufe, das Lesen hinter den Daten (Shaughnessy, 2007). Dabei werden Informationen berücksichtigt, die den konkreten Datenbestand kontextuell einrahmen, wie z.B. die Art der Datenerhebung oder vorhandene vergleichbare Datenpools.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 919–922). Münster: WTM-Verlag

Weitere im Rahmen des Projekts bedeutsame Theoriebausteine beziehen sich auf Schnotz (2001) zum Wissenserwerb mit Diagrammen und auf das Kompetenzmodell von Lachmayer (2008) zum Umgang mit Linien- und Säulendiagrammen im Bereich der Biologiedidaktik. Details hierzu und zu Vorarbeiten der vorgestellten Studie finden sich bei Plicht et al. (2013).

## 2. Forschungsmethodik und Materialien

Durchgeführte Interviews mit Schülerpaaren (Alter: 10-12 Jahre, Schulart: Gymnasium und Realschule) zu je drei bis vier Diagrammen wurden per Video aufgezeichnet und im Anschluss transkribiert. Die Diagramme waren gängigen Biologieschulbüchern entnommen, die Auswahl erfolgte unter dem Aspekt der Variation von Diagrammgestaltung und Sachinhalt. Der Leitfaden zu den halbstündigen Interviews war sehr offen und zielte auf möglichst spontane Äußerungen der Kinder zu den ausgewählten Diagrammen. Wenn dazu einzelne spezifische Fragen gestellt wurden, dann um die o. g. Kompetenzstufen zu diagnostizieren und das Interview in Gang zu halten. Nach einer ersten Erhebungs- und Auswertungsphase wurden drei ergänzende Interviews durchgeführt um erste Arbeitshypothesen zu vergewissern und gezielter weiterentwickeln zu können. Hierbei wurden zwei neue Diagramme eingesetzt, ein weiteres mit einem Text ergänzt und der Leitfaden des Interviews leicht verändert.

Die Auswertung erfolgte nach dem Ansatz der Grounded Theory Methology (GTM; Strauss & Corbin, 1990) mit einer offenen induktiven Kategorienbildung. Die GTM sollte ausgehend von den Forschungsfragen einen ersten offenen Zugang zum Forschungsgegenstand garantieren und der Hypothesenentwickelung dienen, die in weiteren Untersuchungen gezielt eingesetzt werden könnten. Das offene Kodieren wurde computergestützt mit MAXQDA durchgeführt und mit Memos und Arbeitshypothesen ergänzt. Nach Generierung der einzelnen Kodes wurden diese in einem zirkulären Arbeitsprozess während des axialen Kodierens miteinander verknüpft und in Beziehung gesetzt. Im Zuge des selektiven Kodierens entstanden vier Hauptkategorien, die im Folgenden kurz skizziert und beispielhaft unterlegt werden.

## 3. Ausgewählte Ergebnisse

Die Analyse der Transkripte mit der GTM ergab zwei Blickrichtungen: Es wurde spezifiziert, was die Kinder im Interview beim Umgang mit den Diagrammen tun und welche Kompetenzen sie benutzen, um Diagramme zu lesen. Daraus ergaben sich vier Hauptkategorien als Handlungsfelder, die das Lesen und Interpretieren der Diagramme genauer spezifizieren:

LESEN: Die Hauptkategorie LESEN ist enger gefasst als der Begriff des Lesen von Diagrammen allgemein. Kinder LESEN, wenn sie eine Information direkt aus dem Diagramm entnehmen und diese äußern. Darunter zählt das Lesen einzelner und mehrerer Datenpunkte, das Vorlesen von Beschriftungen oder auch die Nennung des Topics, wovon das Diagramm insgesamt handelt. Auch die Beschreibung des Sachinhaltes oder der grafischen Elemente stellt eine Subkategorie des Lesens des Diagramms dar.

Bsp.: Cw4: „Das geht da darum, wie das, also, hier ist ein Wildrind und das hat, also, bringt 600 Kilogramm pro Jahr Milch und dann sieht man hier 1400, 1860 und dann immer so weiter, weiter höher."

ANWENDEN: Die Kinder WENDEN das Diagramm AN, indem sie sich überlegen, welche Bedeutung das Diagramm insgesamt für sie persönlich oder allgemein hat. Sie ziehen dabei Schlüsse aus dem Diagramm, wie die Fortführung der Daten, oder ziehen Konsequenzen daraus. Bei diesen Aussagen wird meist ein Bezug zur (eigenen) Welt gezogen.

Bsp.: Aw1: „Die Kuh ist ganz schön alt geworden."

BEGRÜNDEN: Die Kinder BEGRÜNDEN ihre Interpretation von Zusammenhängen des Diagramms oder von Daten, die dem Diagramm zugrunde liegen. Die Interpretation des Diagramms wird gestützt durch das Diagramm selbst oder aus ihrem Vorwissen bzw. Vorstellungen heraus. Die Kinder begründen auch die Ursache oder die Hintergründe der Datenerhebung.

Bsp.: Aw1: „Ja, weil ich glaube auch, weil die [Kühe] wurden ja halt auch immer mehr gezüchtet, dass sie mehr Milch hergeben sollten."

BEWERTEN/KRITISIEREN: Unter dieser Kategorie fallen Aussagen der Kinder, die das Diagramm selbst oder die Daten dahinter KRITISIEREN oder positiv bzw. negativ BEWERTEN. Neben der Wertung der Darstellung bedachten die Kinder bei der Kritik der Daten auch die Datenerhebung. So wurde darüber diskutiert, wie die Daten erhoben wurden oder auch daran gezweifelt, dass die Daten stimmen. Der Zweifel und die Kritik an den Daten wurden überwiegend mit dem Bezug zu eigenen Erfahrungen begründet:

Bsp.: Bm5: „[Es fällt auf,] dass hier irgendwie so ein riesen Abstand ist zwischen dem 14. Jahrhundert und 1860. Verstehe ich nicht ganz, wieso da so ein riesen Abstand ist."

In der Analyse wurde weiterhin deutlich, welche Fähigkeiten bei den Kindern vorhanden sind und wie sie diese einsetzen, um die Diagramme zu lesen. Hierzu gehören sowohl mathematisches und biologisches Wissen, als auch Erfahrungen aus der eigenen Lebenswelt. Hinzu kommen Vorstellungen und naive Konzepte zum Sachkontext, die nicht immer korrekt sind.

Aus diesen leserbedingten Einflussfaktoren lassen sich Subkategorien ableiten.

## 4. Diskussion

Die Analyse erfolgte mit der GTM und generierte induktive Kategorien. Die induktive Kategorienbildung wurde komplementiert durch eine theoriegeleitete Deduktion von Kategorien, die sich aus dem o.g., nach Curcio (1987) und Shaughnessy (2007) synthetisierten Kompetenzmodell ergeben. Dieses Vorgehen ermöglicht sowohl die Berücksichtigung der jeweils individuellen Inhalte (induktiv) als auch die Berücksichtigung theoretisch relevanter bzw. theoretisch rekonstruierbarer Inhalte und Zielsetzungen (deduktiv). Dieser Arbeitsschritt diente einerseits der Validierung der in den Interviews erhobenen Konstrukte, andererseits diente er der möglichen Spezifizierung der verwendeten Kodierungen. In den abgleichenden Analysen ließ sich herausarbeiten, dass sich die Kompetenzstufen Lesen von Daten und Lesen zwischen den Daten in dem Handlungsfeld LESEN wiederfinden und sich die Kompetenzstufen Lesen über die Daten hinaus resp. hinter den Daten sich in den Handlungsfeldern ANWENDEN, KRITISIEREN/BEWERTEN oder BEGRÜNDEN nachzeichnen lassen. Die Analysen führen zu dem Schluss, dass die Bereiche Gestaltung der Diagramme, Vorwissen zur Thematik und Erfahrungen des Lesers bestimmen wie tiefgehend ein Diagramm interpretiert werden kann. Diese Hypothese bildet den Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen.

## Literatur


Curcio, F. R. (1987). Comprehensions of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 382-393.

Friel, S. N., Curcio F.R., Bright G. W., (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehensions and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), pp. 124-158

Lachmayer, S. (2008) *Entwicklung und Überprüfung eines Strukturmodells der Diagrammkompetenz für den Biologieunterricht.* Dissertationsschrift. http://eldiss.uni-kiel.de/macau/receive/dissertation_diss_00003041 [16.03.14]

Plicht, C., Vogel M., Randler C. (2013) Diagramme im Biologieunterricht – Wie gehen Kinder damit um? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* Münster: WTM

Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Multimedia. *Unterrichtswissenschaft, 29*, 292-318.

Shaughnessy, M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* 957-1010.

Strauss, A., Corbin J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung.* Weinheim: Beltz

Birte PÖHLER, Dortmund

# Umgang mit Prozentaufgaben – Herausforderungen für konzeptuelles Verständnis und Leseverständnis

Wie hängen bei der Bearbeitung von Textaufgaben Schwierigkeiten im konzeptuellen Verständnis und im Leseverständnis zusammen? Inwiefern sind dabei Unterschiede zwischen sprachlich starken und schwachen Lernenden zu erkennen? Welche sprachlichen Charakteristika der Textaufgaben stellen in besonderem Maße Hürden für die Lernenden dar?

Diese Fragen stellen sich innerhalb eines größeren Entwicklungsforschungsvorhabens aus dem Dortmunder MuM-Projekt, in dem Sprach- und Verstehensförderung bezogen auf die Prozentrechnung integriert werden sollen. Ihnen wird hier im ersten Schritt mit einem schriftlichen Test nachgegangen.

## 1. Ausgangssituation

Der starke Zusammenhang zwischen Sprachkompetenz und Mathematikleistung wurde wiederholt nachgewiesen (z. B. Prediger et al. 2013). Genauer lokalisiert werden müssen jedoch diejenigen sprachlichen Merkmale, die für die Lernenden in bestimmten mathematischen Inhaltsbereichen besondere Hürden darstellen (Gürsoy et al. 2013, Duarte 2011).

Gewählt wird dafür der Themenbereich der Prozentrechnung. Einerseits aufgrund seiner Relevanz im Alltag und im Berufsleben, andererseits aber auch aus theoretischen Gründen, denn er stellt einen Prototypen des Sachrechnens dar (u. a. Haffner 2012). Zudem ist der Lerngegenstand in empirischen Studien (u. a. ebd., Parker & Leinhardt 1995) bzgl. der Schwierigkeiten von Lernenden mit dem konzeptuellen Verständnis und mit Textaufgaben gut untersucht, doch bleiben sprachliche Aspekte bei deren Explikation bisher weitgehend unberücksichtigt.

## 2. Test zur Prozentrechnung – Design, Stichprobe, erste Ergebnisse

*Design.* Dem schriftlichen Test zur Prozentrechnung wird eine Erhebung zum Sprachintergrund der Lernenden mit Selbstauskünften zur Sprachbiographie und mit einem C-Test zur Ermittlung der allgemeinen Sprachleistung vorangestellt (Kniffka et al. 2007). Das Testdesign mit 15 Items zur Prozentrechnung adressiert mathematisch drei Konstellationen: *Prozentwert gesucht*, *Grundwert gesucht*, *Verminderter Grundwert*. Zu jeder Konstellation sind je ein Item der Aufgabentypen *Entkleidete Aufgabe* und *Grafisch gestützte Aufgabe* enthalten.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 923–926). Münster: WTM-Verlag

Der Einsatz dieser sprachlich entlasteten Aufgabentypen dient der Überprüfung des Vorhandenseins von konzeptuellem Verständnis. Für die erstgenannte Konstellation ist die *Entkleidete Aufgabe* z. B. wie folgt formuliert: „Wie viel sind 5 % von 400 €? Bestimme den Prozentwert.“. Bei den *Grafisch gestützten Aufgaben* müssen an der schülernahen Ladebalkendarstellung fehlende Werte ergänzt werden.

Mit Blick auf die genannten Forschungsfragen bilden pro Konstellation mehrere Textaufgaben den Kern des Tests (Abb. 1 zeigt dies für die Konstellation *Prozentwert gesucht*). Um erste Hypothesen zu schwierigkeitsgenerierenden sprachlichen Merkmalen aufstellen zu können, werden die potentiellen Schwierigkeiten systematisch variiert. Genauer gesagt erfolgt eine Variation der sprachlichen Formulierungen der strukturtragenden Elemente, aus denen die mathematischen Beziehungen zu rekonstruieren sind (Duarte et al. 2011).

| | | |
|---|---|---|
| *Kartoffel*n bestehen zu 75 % aus Wasser. Wie viel Wasser (in g) sind in 1000 g Kartoffeln enthalten? | 30 % des bei einem Sportfest im Rahmen einer *Tombola* erzielten Erlöses in Höhe von 700 € fließen einem guten Zweck zu. Wie hoch ist die Spende? | Eine Schule überweist 60 % der Einnahmen bei einem Schulfest an die *„Aktion Mensch“*. Die Einnahmen betrugen 1400 €. Wie viel Geld überweist die Schule? |

**Abbildung 1: Strukturgleiche, sprachlich variierte Aufgaben zur Konstellation *Prozentwert gesucht***

Verortet sind die potentiell schwierigkeitsgenerierenden Merkmale auf verschiedenen Ebenen des Leseprozesses, nämlich auf Wort-, Satz- oder Textebene (Christmann & Groeben 1999). Bezogen auf die *Tombola-Aufgabe* (Abb. 1, Mitte) sind dies z. B. auf Wortebene das Nomen „Erlös“ (Gürsoy et al. 2013) und auf Satzebene das Genitivattribut „des Erlöses“ sowie die Nebensatzeinsparung durch Partizip-II-Attribut „bei einem Sportfest im Rahmen einer Tombola erzielten Erlöses“. Auf Textebene besteht die Herausforderung im Erkennen von Referenzstrukturen. So wird etwa in der Aufgabe *Aktion Mensch* (Abb. 1, rechts) die Kombination des Genitiv-Attributs „der Einnahmen“ mit dem Inhalt des deren Höhe enthaltenden zweiten Satzes zur Identifikation des Grundwerts erforderlich.

*Stichprobe.* Eingesetzt wurde der Test in zwei 9. Klassen einer Hauptschule und zwei Grundkursen bzw. einem Erweiterungskurs des 8. Jahrgangs einer Gesamtschule. Anhand der C-Test-Ergebnisse werden die 98 Lernenden in drei ähnlich große Gruppen eingeteilt und dementsprechend als *sprachlich Schwache, sprachlich Mittlere* und *sprachlich Starke* bezeichnet.

*Erste Ergebnisse.* Die Lösungshäufigkeiten für die verschiedenen Konstellationen und Aufgabentypen werden in Abbildung 2 aufgeführt, sowohl für das Gesamtsample als auch für zwei Teilgruppen.

| | *Prozentwert gesucht* | | | *Grundwert gesucht* | | | *Verminderter Grundwert* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | E | GG | TA | E | GG | TA | E | GG | TA |
| Gesamt-sample | 67 % | 57 % | 34 % | 47 % | 45 % | 38 % | 14 % | 37 % | 20 % |
| Sprachlich starke Gruppe | 76 % | 76 % | 50 % | 58 % | 67 % | 54 % | 18 % | 56 % | 26 % |
| Sprachlich schwache Gruppe | 60 % | 48 % | 23 % | 32 % | 24 % | 20 % | 8 % | 24 % | 8 % |

**Abbildung 2: Prozentuale Lösungshäufigkeiten der Aufgabentypen *Entkleidet* (E), *Grafisch gestützt* (GG) und *Textaufgaben* (TA) je Konstellation im Gesamtsample beziehungsweise gruppenweise.**

Wie andere Studien erwarten lassen (vgl. Duarte et al. 2011 für einen Überblick), sind die Lösungshäufigkeiten im Gesamtsample bei den Textaufgaben (mit einer Ausnahme) um bis zu 37 Prozentpunkte geringer als bei entkleideten oder grafisch gestützten Aufgaben. Dabei sind die Lösungshäufigkeiten der sprachlich schwachen Gruppe signifikant geringer als die der sprachlich Starken.

Da insbesondere die Items zur Konstellation *Prozentwert gesucht* große Unterschiede aufweisen, lohnt eine gesonderte Betrachtung der Resultate der einzelnen Textaufgaben aus Abbildung 1. Auffällig ist, dass die Kartoffelaufgabe, bei der auf Satz- und Textebene a priori keine potentiell schwierigkeitsgenerierenden Merkmale identifiziert wurden, die geringste Lösungshäufigkeit (sprachlich stark: 39 %; sprachlich schwach: 16 %) und einen hohen Anteil an Nichtbearbeitungen aufweist. Als typischer Fehler erweist sich dabei die falsche Mathematisierung als Aufgabe der Konstellation *Grundwert gesucht* (wie in Abb. 3). Eine mögliche Ursache ist dabei die nicht gelingende Rekonstruktion der Beziehung „75 % von 1000 g“, die in Form der sprachlichen Darbietungen „bestehen zu … aus“ bzw. „in … enthalten“ realisiert ist.

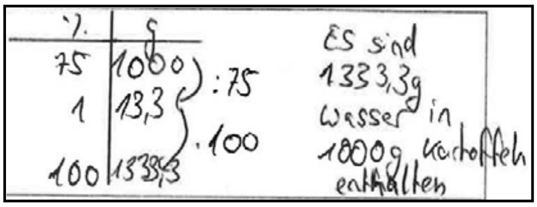



**Abbildung 3: Kartoffelaufgabe – Mathematisierungsfehler**

Die Lösungshäufigkeiten der beiden anderen Aufgaben (*Aktion Mensch:* 58 %; 24 %; *Tombola:* 52 %; 28 %), die sich kontextuell und in der Art der schwierigkeitsgenerierenden Merkmale ähneln, sind höher und weichen nur wenig voneinander ab. Die komplexere Satzstruktur und das Nomen „Erlös“ in der *Tombola-Aufgabe* scheinen also quantitativ gesehen wider Erwarten keinen großen Einfluss auf den Bearbeitungserfolg zu haben. Ein im Anschluss an den Test geführtes Interview zur *Tombola-Aufgabe* zeigt aber, dass eine Ermittlung der mathematischen Struktur durchaus ohne adäquate Rekonstruktion der Bedeutung des Inhalts möglich ist und zwar, indem z. B. das „von“ aus „in Höhe von“ im Sinne eines Zufallstreffers als verbindende Präposition zwischen Prozentsatz und Grundwert identifiziert wird.

## 4. Zusammenfassung und Ausblick

Die vorgestellten ersten Ergebnisse des Tests zur Prozentrechnung bestätigen, dass Lernenden der Umgang mit Textaufgaben besondere Schwierigkeiten bereitet, sodass konzeptuelles Verständnis zwar als notwendige, nicht aber als hinreichende Bedingung für eine erfolgreiche Bearbeitung dieser angenommen werden kann. Eine gruppenweise Betrachtung verdeutlicht ferner, dass der Sprachkompetenz dabei eine entscheidende Rolle zukommt. Zudem zeigen die zwischen verschiedenen strukturgleichen Textaufgaben variierenden Lösungsquoten den Stellenwert der Art der sprachlichen Darbietung auf. Die a-priori-Bestimmung potentiell schwierigkeitsgenerierender Merkmale erweist sich dabei jedoch – wie die präsentierten Beispiele offenbaren – nicht als grundsätzlich adäquat.

Mit dem Ziel der Ausschärfung der dargelegten Erkenntnisse und der weiteren Spezifizierung der relevanten sprachlichen Hürden in den Textaufgaben sollen einerseits eine Erweiterung der Stichprobe und andererseits die Durchführung zusätzlicher Interviews erfolgen. Im darauffolgenden Schritt werden diese Einsichten bei der im Gesamtprojekt angestrebten Entwicklung von Lehr-Lernarrangements zur Förderung des Umgangs mit Textaufgaben zur Prozentrechnung Berücksichtigung finden.

## Literatur


Christmann, U. & Groeben, N. (1999). Psychologie des Lesens. In B. Franzmann et al. (Hrsg.), *Handbuch Lesen* (S. 145–223). München: K. G. Saur.

Duarte, J., Gogolin, I. & Kaiser, G. (2011). Sprachlich bedingte Schwierigkeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit.* (S. 35-53). Münster: Waxmann Verlag.

Gürsoy, E., Benholz, C., Renk, N., Prediger, S. & Büchter, A. (2013). Erlös = Erlösung? Sprachliche und konzeptuelle Hürden in Prüfungsaufgaben. *Deutsch als Zweitsprache*, 1, 14-24.

Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Kniffka, G., Linnemann, M. & Thesen, S. (2007), *C-Test für den Förderunterricht.* Universität zu Köln: Kooperationsprojekt Sprachförderung / Stiftung Mercator.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). *Percent: A Privileged Proportion.* Review of Educational Research, 65 (4), 421-481.

Prediger, S., Renk, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2013). Family background or language disadvantages? Factors for underachievement in high stakes tests. In A. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37$^{th}$ Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (4.49-4.59). Kiel: PME.

Jennifer POSTUPA, Erlangen-Nürnberg

# Analyse von (historischen) Rechenbüchern unter außermathematischen Aspekten

Um an aktuelle Entwicklungen angepasst zu bleiben, unterliegen Schulbücher einem ständigen Wandel. Neben den mathematischen Inhalten, die durch Lehr- und Bildungspläne reguliert werden, zeigen sich solche Veränderungen auch in außermathematischen Aspekten. Dazu zählen beispielsweise die in den Schulbüchern auftretenden Sachkontexte. Auch innerhalb der didaktischen Umsetzung der mathematischen Inhalte ergeben sich Unterschiede. Diese werden zum einen in Aufbau und Gestaltung der Lehrgänge deutlich, spiegeln sich aber auch in einzelnen didaktischen Ideen, wie zum Beispiel der Offenheit von Aufgaben, wieder.

## Entwicklungen in (historischen) Rechenbüchern

Ziel einer Analyse von bayerischen Volksschulrechenbüchern der vergangenen 100 Jahre ist es, Veränderungen solcher außermathematischer Aspekte in Rechenbüchern aufzuzeigen. Betrachtet werden, neben ausgewählten didaktischen Ideen, auch Veränderungen in den dargestellten Sachkontexten. Spekulationen zu Besonderheiten in den einzelnen Epochen existieren viele. So lassen sich etwa in der NS-Zeit verstärkt Aufgaben mit politischem Hintergrund vermuten. Bisher kaum untersucht ist, ob dies tatsächlich zutrifft oder nur durch extrem plakative „Einzelfälle", wie im folgenden Beispiel, hervorgerufen wird.

*„Eine durch Geisteskrankheit erblich belastete Person kostet bis zum Alter von 60 Jahren dem Staat rd. 50 000 M. Wieviel [sic] gesunde Kinder könnten aus dieser Summe eine Unterstützung von je 125 M zu ihrer Ausbildung erhalten?"* (Rechenbuch für die bayerischen Volksschulen 8, 1943, 11)

Ebenfalls unklar ist, wie groß der Anteil solcher Aufgaben ist, das heißt wie stark Rechenbücher von solchen außermathematischen Aspekten beeinflusst sind, und ob auch in aktuellen Büchern politische Aufgaben auftreten.

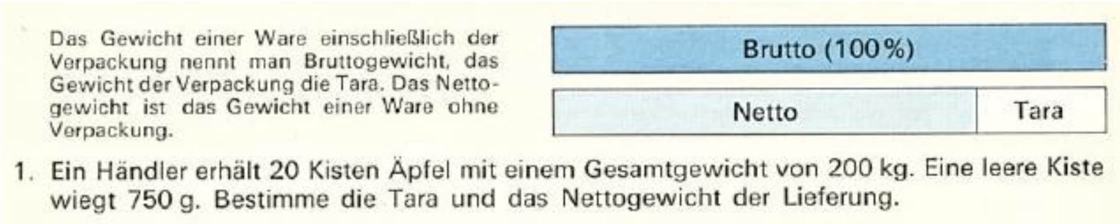
Weitere beispielhafte Fragestellungen beziehen sich auf die Umsetzung unterschiedlicher didaktische Ideen. Sind offene Aufgaben eine Entwicklung der Neuzeit? Treten handlungsorientierte Aufgaben verstärkt in Zusammenhang mit geometrischen Inhalten auf und gibt es dabei Unterschiede zwischen den Epochen? Welche Rollenbilder werden in den verschiedenen Epochen und in aktuellen Büchern vermittelt? Um solche außermathematische Entwicklungen quantitativ messbar, und damit unabhängig von

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 927–930). Münster: WTM-Verlag

subjektiven Wahrnehmungen zu machen, wurde das im Folgenden näher beschriebene Instrument entwickelt.

### Schulbuchelemente

In Anlehnung an Sträßer (1974) werden in dem Analyseinstrument drei Schulbuchelemente unterschieden. Zum einen werden *Aufgaben* analysiert, also solche Textteile, bei denen die Lernenden zu konkreten Handlungen aufgefordert sind. Die bei Sträßer getrennt betrachteten situations- und mathematikpräsentierenden Texte werden aufgrund des geringen Auftretens in Volksschulbüchern zu dem Element *Erklärungen* zusammengefasst. Ergänzend zu dieser Einteilung werden *Abbildungen* als drittes Element betrachtet. In dem folgenden Ausschnitt aus dem Schulbuch „Die Welt der Zahl – Neu“ (1978, 74) werden diese drei Elemente deutlich.




Im linken oberen Bereich ist eine Erklärung zum Sachkontext des Wiegens erkennbar. Diese Erklärung wird durch die nebenstehende Abbildung ergänzt. Im Anschluss an diese Einführung werden mehrere Aufgaben angegeben, von denen die erste im Ausschnitt zu sehen ist.

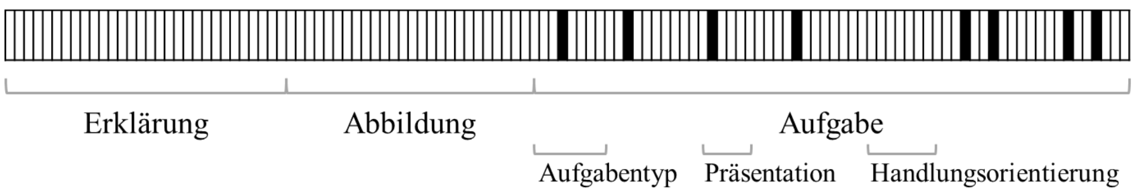
### Merkmale und Ausprägungen

Um Veränderungen in Rechenbüchern anhand dieser Elemente erheben zu können, werden einzelne *Merkmale* dieser Elemente näher betrachtet. In der didaktischen Literatur existiert eine Vielzahl an Kategorisierungen der einzelnen Elemente nach unterschiedlichen Schwerpunkten. (Zum Beispiel unterscheidet Hayen (1987) Aufgaben unter anderem nach ihrer Funktion innerhalb des Lehrgangs.) Eine umfassende Theorie zu relevanten Merkmalen, beispielsweise von Aufgaben, liegt allerdings nicht vor. Daher werden zum einen in einer Vorstudie qualitativ gewonnenen Merkmale, wie etwa Typ und Funktion der Elemente, berücksichtigt. Zum anderen werden aber auch exemplarisch einzelne Merkmale aus der aktuellen Diskussion, wie zum Beispiel die Offenheit von Aufgaben, aufgegriffen, um deren Entwicklung in Schulbüchern über einen längeren Zeitraum zu verfolgen.

Jedes dieser so gewonnenen Merkmale tritt in zuvor festgelegten *Ausprägungen* auf. Dies sei am Beispiel des Merkmals *Aufgabentyp* (das zum Element Aufgabe zählt) näher erläutert. Während für Sachaufgaben oder offene Aufgaben eine Vielzahl an Typisierungen in der fachdidaktischen

Diskussion vorliegt (vgl. u.a. Radatz 1983, Bruder 2008, Greefrath 2010), sind Einteilungen geschlossener Aufgaben ohne Sachbezug eher selten zu finden. Um Entwicklungen in den Schulbüchern, beispielsweise zur Häufigkeit von Sachaufgaben, zu erfassen, ist aber zunächst ein grober Überblick über die vorkommenden Aufgabentypen nötig. Herget (2010) schlägt eine Einteilung nach der äußeren Gestaltung und den zugrundeliegenden Schülertätigkeiten vor. In Anlehnung daran werden in dem Analyseinstrument sechs Aufgabentypen unterschieden. *Aufgaben mit Sachbezug,* wie in der obigen Beispielaufgabe, erfordern zumindest in einem gewissen Maß die „Übersetzung des Textes in die entsprechenden mathematischen Objekte“ (Greefrath 2010). Dagegen steht bei *Rechenpäckchen* die mehrfache schematische Ausführung von Kalkülaufgaben im Vordergrund. Dies liegt zum Beispiel vor, wenn mehrfach aus kontextlos gegebenen Brutto- und Prozentwerten die Nettowerte bestimmt werden sollen. Geht es dabei hauptsächlich um das Rechnen mit Größen, handelt es sich um ein *Rechenpäckchen mit Größen*. *Verbalisierte Zahlaufgaben* beschränken sich hingegen meist auf einzelne Routineaufgaben. Im Gegensatz dazu fordern *Aufgaben zum Erforschen* und *Aufgaben zum Beschreiben* verstärkt prozessbezogene Kompetenzen ein. Dies liegt beispielsweise vor, wenn die Begriffe Brutto und Netto ausgehend von einer Abbildung erklärt werden sollen.

Mittels dieser Einteilung in Merkmale und Ausprägungen ist es möglich, für jedes Element eines Schulbuchs einen eindeutigen „Strichcode“ zu erstellen, auf dem die jeweiligen Merkmale in ihrer spezifischen Ausprägung erkennbar sind. Für die Beispielaufgabe ergibt sich folgender Strichcode.

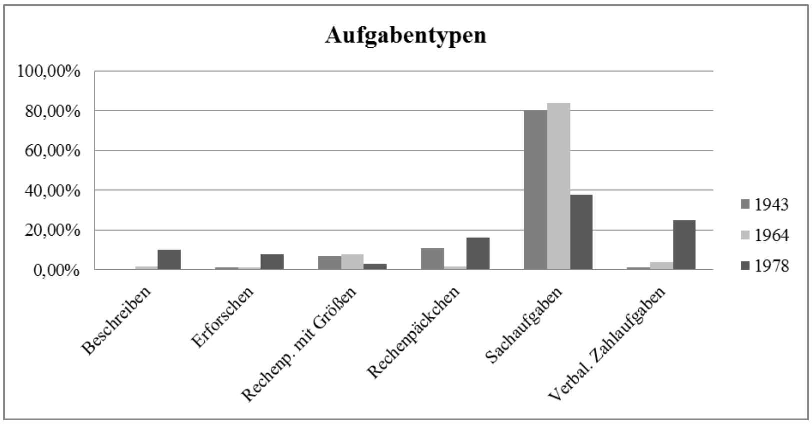



Die beiden vorderen Abschnitte des Codes liefern Informationen zu den Elementen Erklärung und Abbildung, der hintere zu Aufgaben. Innerhalb dieser Abschnitte lassen sich die Ausprägungen der einzelnen Merkmale ablesen. Neben dem *Aufgabentyp* (im Beispiel: Aufgabe mit Sachbezug), oder der *Präsentation* (in Textform) ist unter anderem auch die *Handlungsorientierung* (Rechnen) dargestellt.

Ähnliche Überlegungen wie hier für Aufgaben beschrieben, gelten auch für die Merkmale von Abbildungen und Erklärungen.

**Anwendung**

Um mit Hilfe des Analyseinstruments Aussagen über zeitliche Unterschiede und Entwicklungen einzelner Merkmale treffen zu können, werden nicht nur Einzelaufgaben verglichen, sondern alle Elemente eines beziehungsweise mehrerer Bücher einer Epoche erfasst. Im Vergleich mit anderen Epochen lassen die so gewonnenen absoluten und relativen Häufigkeiten erste Entwicklungen erkennen. So wird durch untenstehenden Vergleich von drei Rechenbüchern aus unterschiedlichen Epochen die Vermutung gestützt, dass der Anteil an Sachaufgaben stark zurückgeht, während Aufgaben, die prozessbezogene Kompetenzen erfordern, zunehmen.




Diese ersten Eindrücke müssen nun durch die Auswertung weiterer Schulbücher gestützt werden. Im Anschluss daran kann dann die Interpretation der Befunde, beispielsweise zu Aufgaben mit politischen Inhalten, erfolgen, um letztendlich Aussagen über die Entwicklung von Schulbüchern unter außermathematischen Aspekten zu treffen.

## Literatur

Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten. In R. Bruder et al., *Mathematikunterricht entwickeln.* Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten (S. 18–52). Berlin: Cornelsen.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Springer.

Hayen, J. (1987). *Planung und Realisierung eines mathematischen Unterrichtswerkes als Entwicklung eines komplexen Systems.* Stuttgart: Klett.

Herget, W. (2010). Typen von Aufgaben. In W. Blum et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret.* Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen (S. 178–193). Berlin: Cornelsen.

Schauberger, M. & al (1943). *Rechenbuch für die bayerischen Volksschulen.* 8. Heft. München: F. P. Datterer.

Oehl, W., Palzkill, L. (1978). *Die Welt der Zahl – Neu.* 7. Jahrgangsstufe. Ausgabe Bayern. München: Oldenburg.

Radatz, H. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Sträßer, R. (1974). *Mathematik und ihre Verwendung- eine Analyse von Schulbüchern*. Münster: Westfälische Wilhelms-Universität zu Münster.

Susanne PREDIGER, Dortmund

# Nicht nur individuelle, sondern auch fokussierte Förderung – Fachdidaktische Ansprüche und Forschungs- und Entwicklungsnotwendigkeiten an ein Konzept

Nicht zuletzt aufgrund der immer wieder konstatierten Heterogenität der Lernenden und speziell mit Blick auf die ca. 25 % schwachen Lernenden (aktuell z.B. im IQB Ländervergleich) ist die Forderung nach individueller Förderung ein zentrales Ziel vieler Unterrichtsentwicklungsbemühungen.

Da der Begriff individuelle Förderung jedoch immer wieder missverstanden wird, plädiert dieser Beitrag statt dessen für das leicht anders pointierte Konzept „Fokussierte Förderung", das hier erläutert werden soll im Hinblick auf Ansprüche sowie  Forschung- und Entwicklungsnotwendigkeiten. Ein illustrierendes Fallbeispiel zur fokussierten Förderung bei Brüchen und Prozenten findet sich bei Prediger & Schink (2014).

## Missverständnisse zur individuellen Förderung

„Individuelle Förderung" wird häufig missverstanden in rein pädagogisch-methodischer Hinsicht. Dann wird sie häufig interpretiert als *Einszueins-Betreuung* (dies suggerieren z.B. Fotos in der Presse häufig), die jedoch unter normalen schulischen Bedingungen kaum zu leisten ist. Oder individuelle Förderung wird interpretiert als *rein methodische, vollständige Individualisierung*, bei der alle Lernenden ihrem je eigenen Arbeitsprogramm in eigener Zeiteinteilung nachgehen. Auch wenn diese Unterrichtsform schon vor über 10 Jahren im Grundschuldiskurs kritisiert wurde aufgrund der Gefahr einer fachdidaktischen Verflachung der Anforderungen und Verarbeitungsprozesse (Brügelmann 2002), droht sie derzeit gerade in den Schulentwicklungsprozessen einiger neuer integrierter Sekundarschulen wieder verabsolutiert zu werden.


Abb. 1: Drei Modelle der individuellen Förderung (aus Prediger & Schink 2014)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 931–934). Münster: WTM-Verlag

Gerade für schwache Lernende darf eine Förderung aber nicht allein auf methodische Individualisierung setzen, denn es kommt auf Kommmunikation und die fachdidaktische Qualität der Förderung an, wie folgende Episode zeigt: Aus einer sehr engagierten Schule, Neugründung mit inklusiven Klassen, berichtet die fachfremd unterrichtende Sonderpädagogin: „Es ist wirklich gut, dass wir zu zweit in der Klasse sind, da kann ich mit den ganz Schwachen in Ruhe arbeiten. 2 Wochen geackert haben wir, bis alle endlich das Runden behalten haben.“ Die Nachfrage, mit welchem Veranschaulichungsmittel die Verstehensgrundlage geschaffen wurde, erzeugte Irritationen. Die Aufklärung über die Kraft des Zahlenstrahls wurde quittiert mit einem dankbaren „das ist eine interessante Anregung“.

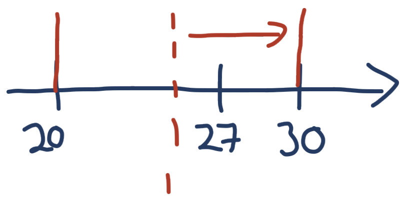


Abb. 2: Runden am Zahlenstrahl

**Fokussierte Förderung**

Einer falsch verstandenen individuellen Förderung mit ggf. geringen fachdidaktischen Qualitätsansprüchen soll deswegen das Konzept der Fokussierten Förderung gegenüber gestellt werden. Dabei wird der Begriff des Fokussierten Lehrens von Renkl (2014) übernommen, der aus zahlreichen instruktionspsychologischen Studien folgendes bilanziert:
„1. Unterschiedliche Lernaufgaben [und Methoden oder Sozialformen] können zu vergleichbarem Wissenserwerb führen [je nach Ausgestaltung...]
3. Lernprozesse sind sehr störanfällig durch ‚gut-gemeinte, aber schlecht gemachte’ aktivierende Elemente.
4. Lernaufgaben und begleitende Unterstützungsmaßnahmen, wie etwa Leitfragen, sollten die Lernenden auf die zentralen Konzepte und Prinzipien fokussieren.“ (Renkl 2014)

Die Umrisse des Konzepts und die daraus folgenden Forschungs- und Entwicklungsnotwendigkeiten sind in Abb. 3 skizziert. Beim *Fokus auf den Inhalt* geht es um die forschungsbasierte Spezifizierung relevanter Lerngegenstände. Für die schwachen Lernenden in der unteren Sekundarstufe sind dies etwa die Verstehensgrundlagen der Arithmetik (vgl. Prediger et al. 2013, Moser Opitz 2007). Diese sind nicht nur normativ hoch relevant (Rechenverfahren ohne Verständnis sind leer und deswegen abzulehnen), sondern konnten auch empirisch als Basis zum Weiterlernen nachgewiesen werden (ebd.). Allgemein bietet die fachdidaktische Forschung und Entwicklung wichtige Zugänge, um zu ermitteln, welche Lerngegenstände für eine Förderung relevant und erfolgversprechend sind. Sie ermöglichen, über die derzeitige, oft an kurzfristiger Reparatur orientierte Förderpraxis hinauszugehen.

| Fokussierte Förderung auf zwei Ebenen | Was kann fachdidaktische Forschung und Entwicklung dazu leisten? | |
|---|---|---|
| **Fokus auf Inhalt:**<br>Spezifizierung relevanter Lerngegenstände<br>← Fachdidaktische Treffsicherheit | • Spezifizierung durch normativen Rahmen (inhaltliches Denken vor Kalkül)<br>• Spezifizierung durch Empirie zur Kompetenzstruktur<br>• Spezifizierung durch Empirie in längsschnittlichen Perspektiven | |
| **Fokus auf Individuen:**<br>Adaptive Förderung der einzelnen Person<br>← Adaptivität | Bereitstellung von<br>• treffsichere diagnostische Instrumente<br>• auf Diagnose abgestimmtes Förderkonzept<br>• lerngruppengerechtes Förderkonzept | Leitideen der Förderung<br>← verstehens-orientiert<br>← diagnose-geleitet<br>← kommunikations-anregend |

Abb. 3: Fokussierte Förderung im Überblick

Erst nach Spezifizierung relevanter Lerngegenstände lohnt der *Fokus auf die Individuen*, um eine adaptive Förderung Einzelner zu erreichen. Die individuelle Adaptivität ist nicht allein Aufgabe der praktizierenden Lehrkräfte, sondern kann durch fachdidaktische Forschung und Entwicklung substantiell unterstützt werden in dreierlei Hinsicht:

1. Voraussetzung für eine adaptive Förderung ist ein *treffsicheres diagnostisches Instrument*, das inhaltlich die relevanten Lerngegenstände berücksichtigt, also bei schwachen Lernenden *verstehensorientiert* ist (denn z.B. eine rein auf formales Runden bezogene Diagnose kann nicht erheben, ob Lernende ein positionsorientiertes Stellenwertverständnis aufgebaut haben). In Bezug auf schwache Lernende müssen die Diagnosen also stets verstehensorientiert sein. *(Leitideee: verstehensorientiert)*

2. Die Förderung sollte auf die Diagnoseergebnisse abgestimmt sein; dies kann durch die Entwicklung entsprechender *diagnosegeleiteter Förderkonzepte und -materialien* erreicht werden. Dabei kann die diagnosegeleitete Auswahl von Förderelementen auch auf Kleingruppen- statt Individualebene erfolgen, weil der Kommunikation untereinander große Priorität einzuräumen ist, s.u. *(Leitidee: diagnosegeleitet)*

3. Das Förderkonzept muss auch die spezifischen Problemlagen und Eigenheiten der Lernenden berücksichtigen. So können sich zum Beispiel gerade die sehr schwachen Lernenden in individuellen Arbeitsphasen keine neuen Inhalte selbst erlesen, sondern brauchen das moderierte Kleingruppengespräch, um Lücken aufzuarbeiten. Eine *zielgruppengerechte Förderung* schwacher Lernender setzt deswegen immer auch auf die moderierte *Kommunikation*. *(Leitidee: kommunikationsanregend)*

### Mathe sicher können – ein Diagnose und Förderkonzept für fokussierte Förderung der Arithmetik der unteren Sekundarstufe

Ein Diagnose- und Fördermaterial, das diese Ansprüche an fokussierte Förderung berücksichtigt und Lehrkräfte bei der Umsetzung vielfältig entlang der drei Leitideen unterstützt, wurde 2010-2014 im Rahmen des Projekts Mathe sicher können in Dortmund erarbeitet und erscheint im Frühjahr 2014 im Cornelsen Verlag. Entstanden sind zwei 96-seitige Förderhefte zu Natürlichen Zahlen und Brüchen, Dezimalzahlen sowie zwei 200-seitige Handreichungen für Lehrkräfte mit diagnostischen Erhebungen (Standortbestimmungen), sowie Interpretations- und Umsetzungshinweisen (Selter, Prediger, Nührenbörger & Hußmann 2014). Darin wird etwa die Problematik des Rundens vorbereitet durch die Wieder-Erarbeitung eines positionsorientierten Stellenwertverständnisses am Zahlenstrahl mit Fokus auf Nachbarzehner und -hunderter (für natürliche Zahlen, vgl. Abb. 4) bzw. Nachbarzehntel und –hundertstel (für Dezimalzahlen).

Hefte eine Zahlenkarte an den leeren Zahlenstrahl.
Beschrifte weiße Karten mit den Nachbar-Einern
und hefte sie an die richtige Stelle.
Hefte die Karten mit den Nachbar-Zehnern
an die richtige Stelle.


Abb. 4: Nachbarzehner – Verstehensgrundlage für das Runden (Selter et al. 2014)

**Dank.** Im Projekt Mathe sicher können arbeitet ein großes Team (C. Selter, M. Nührenbörger, S. Hußmann, K. Akinwunmi, T. Deutscher, C. Mosandl, B. Pöhler, A. Schink, L. Sprenger) seit 2010. Wir danken der Deutsche Telekom Stiftung für die Initiierung und finanziellen Förderung des Projekts.

## Literatur

Brügelmann, H. (2002). Heterogenität, Integration und Differenzierung: Empirische Befunde – theoretische Perspektiven. In F. Heinzel & A. Prengel (Hrsg.), *Heterogenität, Integration und Differenzierung*. Opladen: Leske + Budrich, 31-43.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern.* Bern u.a.: Haupt.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Handreichungen.* Berlin: Cornelsen.

Prediger, S., Freesemann, O., Moser Opitz, E. & Hußmann, S. (2013). Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristige Reparatur. *PM*, 55(51), 12-17.

Prediger, S. & Schink, A. (2014, im Druck). Verstehensgrundlagen aufarbeiten im Mathematikunterricht.. Erscheint in *Pädagogik* 66(5).

Renkl, A. (2014, im Druck). Lernende nicht nur aktivieren, sondern aufs Wesentliche fokussieren. Erscheint in B. Ralle, S. Prediger, M. Hammann, M. Rothgangel (Hrsg.), *Lernaufgaben entwickeln, bearbeiten und überprüfen*. Münster: Waxmann.

Stefanie RACH, Aiso HEINZE, Kiel

# Individuelle Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester des Mathematikstudiums

## Charakteristika eines Mathematikstudiums

Hindernisse individueller Lernprozesse in einem Mathematikstudium in der Studieneingangsphase zeigen sich beispielsweise an hohen Studienabbruchquoten (Dieter, 2012). Die Schwierigkeiten von Studienanfängerinnen und Studienanfänger könnten nach Theorien zur Person-Umwelt-Passung (vgl. Rindermann & Oubaid, 1999) auf einer mangelhaften Passung zwischen individuellen Fähigkeiten sowie Erwartungen und Merkmalen der Lernumwelt in der Studieneingangsphase eines Mathematikstudiums zurückgeführt werden. Die angesprochene Lernumwelt zeichnet sich durch den Lerngegenstand und die Lernumgebung aus: Der Lerngegenstand wissenschaftliche Mathematik besticht durch formal definierte, abstrakte Begriffe und formal-deduktive Beweise, die Lernumgebung Hochschule durch Phasen des Selbststudiums und die Notwendigkeit, elaborative Lernstrategien zu verwenden (Rach & Heinze, 2013).

## Bedingungsfaktoren für erfolgreiche Lernprozesse

In vielen Beiträgen der Hochschuldidaktik wird die Heterogenität der Studierendenschaft herausgestellt. Diese Heterogenität von Merkmalsausprägungen ist im schulischen Kontext durch Profilbildungen von Lernenden u. a. anhand des fachbezogenen Interesses und Selbstkonzeptes analysiert worden (z. B. Kuntze & Reiss, 2006; Seidel, 2006). Derartige individuelle Merkmale könnten relevante Faktoren für den Studienerfolg in einem Mathematikstudium sein. Für ein Hochschulstudium hat sich die allgemeine Schulleistung (in Form der Abiturnote, z. B. Trapmann, Hell, Weigand & Schuler, 2007) als wichtiger Prädiktor herausgestellt, wobei die Rolle motivationaler Lernvoraussetzungen bisher unklar ist (vgl. Blömeke, 2009; Schiefele, Streblow, Ermgassen & Moschner, 2003). Aufgrund der Besonderheiten der Lernumwelt in der mathematischen Studieneingangsphase ist insgesamt unklar, ob Bedingungsfaktoren, die sich für erfolgreiche Lernprozesse im schulischen Mathematikunterricht bzw. im allgemeinen Hochschulkontext als relevant herausgestellt haben, ebenfalls für Lernprozesse in einem Mathematikstudium bedeutend sind:

- Inwiefern können kognitiv-motivationale Profile von Lernvoraussetzungen in einem Mathematikstudium unterschieden werden?
- Welche kognitiven und motivationalen Lernvoraussetzungen beeinflussen den Studienerfolg im ersten Semester im Fach Mathematik?

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 935–938). Münster: WTM-Verlag

## Methodisches Vorgehen

Die Stichprobe besteht aus 182 Studierenden im Fach Mathematik (1-Fach-Bachelor und 2-Fächer-Bachelor, gymnasiales Lehramt) im ersten Semester an der CAU Kiel. In der ersten Vorlesung des Studienmoduls „Analysis 1" wurden die folgenden kognitiven und motivationalen Merkmale mit adaptierten Test- und Fragebogeninstrumenten erhoben: allgemeine Schulleistung (in Form der Abiturnote), mathematische Kompetenz im Gebiet der „Analysis 1", Interesse an Mathematik, mathematikbezogenes Selbstkonzept und extrinsische Studienmotivation (vgl. Rach & Heinze, 2013). Die Reliabilitäten der Instrumente lagen im akzeptablen bis guten Bereich (Cronbachs $\alpha > .60$). Der (dichotome) Studienerfolg im ersten Semester wurde bestimmt durch den Erfolg im Modul „Analysis 1".

## Ergebnisse

Um die Heterogenität der Studierendenschaft detailliert zu beschreiben, wurde eine Clusteranalyse mit den *z*-standardisierten Merkmalen durchgeführt. Mit Hilfe des Single-Linkage-Verfahrens wurden Ausreißer identifiziert (11 Personen), diese aus der Stichprobe ausgeschlossen und dann mit Hilfe des Ward-Verfahrens fünf Cluster bestimmt. Die aus den Cluster entstandenen kognitiv-motivationalen Profile sind in Abbildung 1 dargestellt.

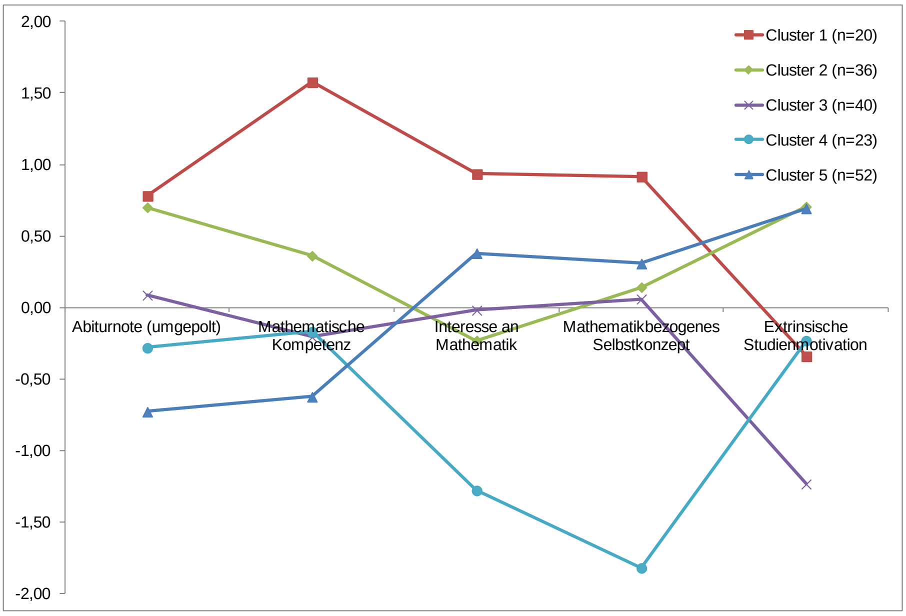



**Abbildung 1: Mittelwerte der *z*-standardisierten Lernvoraussetzungen der fünf Cluster.**

Cluster 1 (*Hochleistende und Interessierte*) zeichnet sich durch gute Lernvoraussetzungen aus, während Cluster 2 (*schulisch Leistungsstarke*) durch eine gute Abiturnote besticht. Cluster 3 (*Durchschnittliche mit geringer extrinsischer Motivation*) berichtet eine geringe extrinsische Studienmotivation, Cluster 4 (*mathematisch Uninteressierte mit geringem Selbstkon-*

*zept*) lässt sich durch geringe Ausprägungen im Interesse an Mathematik und mathematikbezogenen Selbstkonzept kennzeichnen. Cluster 5 (*Leistungsschwache mit Selbstüberschätzung*) weist zu Beginn des Semesters in Relation zu anderen Clustern eine geringe mathematische Kompetenz auf.

Um Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg zu identifizieren, wurde eine logistische Regressionsanalyse mit den Lernvoraussetzungen der Studierenden als unabhängige Variablen auf den Studienerfolg im ersten Studiensemester durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 dargestellt:

**Tabelle 1: Ergebnisse der logistischen Regressionsanalyse (Methode Einschluss) zur Prädiktion des Studienerfolgs im ersten Semester durch die Lernvoraussetzungen.**

| *Variable* | *B* | *SE* | Exp(*B*) | 95% CI | Wald statistic |
|---|---|---|---|---|---|
| Abiturnote | -1.19 | 0.36 | 0.30** | [0.15; 0.62] | 10.86 |
| Mathematische Kompetenz | 0.49 | 0.11 | 1.63*** | [1.30; 2.02] | 18.69 |
| Interesse an Mathematik | -0.65 | 0.57 | 0.52 | [0.17; 1.60] | 1.29 |
| Mathematikbezogenes Selbstkonzept | 0.23 | 0.52 | 1.26 | [0.45; 3.50] | 0.20 |
| Extrinsische Studienmotivation | -0.53 | 0.36 | 0.59 | [0.29; 1.21] | 2.09 |

**Anmerkungen: Nagelkerkes $R^2$ = .40 ($N$ = 182; *** $p$ < .001, ** $p$ < .01). Regressand: Studienerfolg im ersten Semester.**

Eine schrittweise, logistische Regressionsanalyse zeigt, dass allein 29,5% der Varianz im Studienerfolg im ersten Semester durch die mathematische Kompetenz zu Studienbeginn aufgeklärt werden kann. Zusammen mit der allgemeinen Schulleistung werden insgesamt 38% aufgeklärt.

Auffällig ist, dass neben den kognitiven Merkmalen die motivationalen Merkmale nicht als signifikante Prädiktoren für den Studienerfolg identifiziert werden konnten. Möglicherweise kann durch eine adäquate Orchestrierung von Lernvoraussetzungen – trotz niedrigerer Ausprägungen in kognitiven Merkmalen – trotzdem ein Erfolg im Studienmodul erreicht werden. Eine derartige Orchestrierung von Merkmalen könnte durch die identifizierten Profile beschrieben werden. Zwar zeigt sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Zugehörigkeit zu einem Cluster und dem Studienerfolg im ersten Semester ($N = 171$; $\chi^2(4) = 23.44$, $p < .001$, $\varphi = .37$), jedoch geben die einzelnen Erfolgsquoten der Cluster keinen Anhaltspunkt für die ausgeführte Annahme: Cluster 1: 55%, Cluster 2: 33%, Cluster 3: 28%, Cluster 4: 9%, Cluster 5: 8%.

## Diskussion

Die Erkenntnisse der empirischen Studie bekräftigen Ergebnisse von Trapmann et al. (2007), wobei die geringere Prädiktionskraft der allgemeinen Schulleistung in der berichteten Studie wahrscheinlich auf die Einbeziehung der mathematischen Kompetenz (konzeptualisiert als Vorläuferfähigkeit bezüglich wissenschaftlicher Mathematik) zurückzuführen ist. Im Gegensatz zu den Ergebnissen von Blömeke (2009) klärt das Interesse an Mathematik keine zusätzliche Varianz im Studienerfolg (im ersten Semester) eines Mathematikstudiums auf.

Durch die Profilbildung kann ähnlich wie in der Studie von Seidel (2006) ebenfalls eine leistungsstarke Gruppe (Cluster 1), eine sich unterschätzende Gruppe (Cluster 4) und eine sich überschätzende Gruppe (Cluster 5) identifiziert werden. Diese sich durch die Profile ergebenden Studierendengruppen könnten differenziert gefördert werden. Beispielsweise wären für die mathematisch Uninteressierten mit geringem Selbstkonzept sicherlich Unterstützungsmaßnahmen bezüglich selbstbestimmter Lernprozesse hilfreich. Da einige Studierende ihr Studium mit relativ ungünstigen Lernvoraussetzungen beginnen, stellt sich die Frage, inwiefern die Studierenden bei ihrer Studienwahl durch Beratungsangebote stärker unterstützt werden können.

## Literatur


Blömeke, S. (2009). Ausbildungs- und Berufserfolg im Lehramtsstudium im Vergleich zum Diplom-Studium – Zur prognostischen Validität kognitiver und psycho-motivationaler Auswahlkriterien. *ZfE, 12*(1), 82–110.

Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren.* Dissertation, Universität Duisburg-Essen.

Kuntze, S. & Reiss, K. (2006). Profile mathematikbezogener motivationaler Prädispositionen. *mathematica didactica, 29*(2), 24–48.

Rach, S. & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? Zur Rolle von Selbsterklärungen beim Mathematiklernen in der Studieneingangsphase. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34*(1), 121–147.

Rindermann, H. & Oubaid, V. (1999). Auswahl von Studienanfängern durch Universitäten – Kriterien, Verfahren und Prognostizierbarkeit des Studienerfolgs. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 20*(3), 172–191.

Schiefele, U., Streblow, L., Ermgassen, U. & Moschner, B. (2003). Lernmotivation und Lernstrategien als Bedingungen der Studienleistung. *ZfPP, 17*(3/4), 185–198.

Seidel, T. (2006). The role of student characteristics in studying micro teaching-learning environments. *Learning Environments Research*, *9*(3), 253–271.

Trapmann, S., Hell, B., Weigand, S. & Schuler, H. (2007). Die Validität von Schulnoten zur Vorhersage des Studienerfolgs – eine Metaanalyse. *ZfPP, 21*(1), 11–27.

Jörg RAPP, Melanie PLATZ, Matthias GRÖßLER, Engelbert NIEHAUS, Landau

# Möglichkeiten zur Visualisierung von Risikofunktionen im Dreidimensionalen

## 1. Einleitung

Schülerinnen und Schüler (SuS) der Sekundarstufe (Sek) 1 werden sowohl im Schulunterricht (Praxis Geographie 2013) als auch im außerschulischen Bereich mit dem Begriff des Risikos konfrontiert. Die genaue Bedeutung des Begriffs wird dabei meist nicht geklärt, bzw. der Begriff teilweise in einem falschen Kontext verwendet. Darüber hinaus existieren zahlreiche verschiedene Definitionen des Begriffs, nahezu jede wissenschaftliche Disziplin hat eine eigene Definition (Banse 1996). Somit wird es für SuS im Alltag schwierig, den Begriff des Risikos richtig einzuordnen und anzuwenden.

Aufgrund der Relevanz und der häufigen Konfrontation der SuS mit diesem Begriff scheint es sinnvoll zu sein, dass der Begriff des Risikos auch im mathematischen Kontext thematisiert wird. Darüber hinaus bietet der Begriff des Risikos und seine Definition die Möglichkeit ein Thema im Unterricht fächerübergreifend zu behandeln sowie eine erste Einführung bzw. das Beispiel einer praktischen Anwendung von mathematischer Theorien, wie etwa der Wahrscheinlichkeits- oder der Integralrechnung, zu geben.

In diesem Artikel wird eine Methode vorgestellt, durch deren Anwendung der Risikobegriff und die Risikowahrnehmung bei SuS durch die Visualisierung bzw. Modellierung einer dreidimensionalen Risikofunktion geschärft werden kann.

## 2. Risikobegriff und Definition

Es existieren zahlreiche Definitionen für den Begriff des Risikos, der Großteil dieser basiert jedoch nach Banse (1996) auf folgender Grunddefinition:

$$\text{Risiko} = \text{Eintrittswahrscheinlichkeit} \cdot \text{Ausmaß}$$

Das Risiko lässt sich über das Produkt aus der Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses und des zu erwartenden Ausmaßes berechnen. Das Risiko besitzt darüber hinaus meist eine räumliche Komponente (Brugnot 2010). Die räumliche Komponente des Risikos lässt sich dadurch erklären, dass sowohl die Eintrittswahrscheinlichkeit als auch das Ausmaß ortsabhängig sind.

Der Ort lässt sich beispielsweise in Form von Koordinaten als Längen- und

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 939–942). Münster: WTM-Verlag

Breitengrade ausdrücken. Dadurch entstehen dreidimensionale Risikofunktionen, wobei die X- und die Y-Achse die geografischen Koordinaten und die Z-Achse den Grad des Risikos wiedergeben.

Das Risiko, dem eine Person beim Gang entlang eines Weges $\gamma$ ausgesetzt ist, lässt sich über das Wegintegral berechnen (Jonkman et al. 2003). Diese Methode ist jedoch für SuS der Sek 1 aufgrund der fehlenden Kompetenzen zur Integralrechnung und für SuS der Sek 2 aufgrund der fehlenden Kompetenzen zur mehrdimensionalen Integralrechnung nicht anwendbar, weshalb im Schulunterricht andere Methoden zur Bestimmung des Risikos notwendig sind.

## 3. Praktische Durchführung einer Methode zur Behandlung des Risikobegriffs im Unterricht

Zur Durchführung dieser Methode wird zum einen ein möglichst transparenter Behälter, wie beispielsweise eine durchsichtige Plastikbox, benötigt. Der Behälter wird mit einer leicht formbaren Masse befüllt, mit der sich dann eine dreidimensionale Risikofunktion modellieren lässt. Diese Risikofunktion ordnet jedem Punkt $(x,y)$ das Risiko $R(x,y)=z$ zu. Als formbarer Feststoff kann dabei beispielsweise weiche Knete, angefeuchteter Sand, oder wassersaugfähiges Granulat benutzt werden. Wichtig ist dabei, dass der Feststoff nach der Modellierung des dreidimensionalen Graphen der Risikofunktion seine Form beibehält. Weiterhin wird noch Papier bzw. leicht formbare Pappe, Stifte, eine Schere, eine Küchenwaage sowie ein Lineal bzw. Geodreieck benötigt. Zur Modellierung der Risikofunktion kann als Vorlage eine reale Risikokarte benutzt werden, beispielsweise eine Erdbebenrisikokarte.

Vor der Durchführung der im Folgenden vorgestellten Methode sollten zunächst die Begriffe Risiko, Wahrscheinlichkeit und Ausmaß mit den SuS geklärt werden. Dies kann fächerübergreifend anhand von aktuell im Unterricht behandelter Themen wie beispielsweise Vulkanismus, Erdbeben oder Radioaktivität geschehen. Weiterhin muss der räumliche Charakter des Risikos erläutert und geklärt werden sowie gemeinsam mit den SuS Überlegungen angestellt werden, wie eine Risikofunktion aussehen könnte, bzw. wie die räumliche Verteilung des Risikos enaktiv mit der Modelliermasse visualisiert werden kann.

Vor der Modellierung der Risikofunktion muss die leicht formbare Masse in den durchsichtigen Behälter gefüllt werden. Anschließend kann die dreidimensionale Risikofunktion modelliert werden. Um dieses zu modellieren kann beispielsweise eine Holzspatel benutzt werden. In Regionen, in denen ein hohes Risiko vorherrscht, befinden sich Berge bzw. lokale Maxima, in den Regionen mit geringem Risiko Täler bzw. lokale Minima. Eine reale Karte kann unter den Behälter gelegt werden, was für SuS eine Hilfestellung darstellen kann.

Ein möglicher Weg durch das Risikogebiet sollte nun von den SuS bestimmt werden. Bei der Festlegung des Weges können konkrete Aufgaben gestellt werden, beispielsweise dass eine Person von einem gegebenen Ort A zu einem festgelegten Ort B, unter der Annahme einer möglichst geringen Risikoexposition, gehen muss.

Im nächsten Schritt müssen der festgelegte Start- und Endpunkt sowie der Verlauf des Weges mithilfe einer Holzspatel oder eines anderen Gegenstandes markiert werden. Darauf hin wird das Papier bzw. die Pappe entlang des vorgezeichneten Weges orthogonal zur Bodenfläche des Behälters in die formbare Masse bis zum Grund des Behälters gedrückt und im Anschluss wieder herausgezogen. Als Ergebnis erhält man auf dem Papier den Verlauf der Risikofunktion entlang des ausgewählten Weges, projiziert auf eine Ebene. Für die weiteren Arbeitsschritte zur Bestimmung des Grads des Risikos sollte der Verlauf der Risikofunktion auf dem Papier mit einem Stift nachgezeichnet werden.

Die Flächeninhaltsbestimmung kann nun auf unterschiedlichen Wegen durchgeführt werden. Zum einen lässt sich die Flächeninhaltsbestimmung durch Einführen der Begriffe der Ober- bzw. Untersumme und deren Anwendung bewerkstelligen. Für eine weitere Methode zur Bestimmung des Flächeninhalts muss das Papier entlang des eingezeichneten Funktionsverlaufes abgeschnitten und darauf hin der eingefärbte Teil des Papiers gewogen werden. Anhand der Masse des Papierstücks und der Angabe zur Dichte des Papiers lässt sich somit der Flächeninhalt direkt berechnen.

Im Anschluss an die Durchführung der vorgestellten Methode sollte im Unterricht eine Nachbereitung durchgeführt werden. Dabei können die von den SuS ermittelten Ergebnisse bei unterschiedlicher Wegführung verglichen, erklärt und diskutiert werden. Darüber hinaus kann über konkrete, in der Praxis anwendbare, Methoden zur Risikominimierung diskutiert werden. Ein weiterer Punkt in der Nachbereitung könnte beispielsweise sein, mit welcher Methode bzw. welchem Algorithmen bei gegebenem Start und Endpunkt ein Weg mit einem möglichst geringen Risiko gefunden werden kann.

## 4. Erworbene Kompetenzen der SuS

Die teilnehmenden SuS machen Erfahrungen mit mehrdimensionalen Funktionen auf enaktiver Ebene, ohne die symbolische Ebene explizit zu behandeln. Der geometrische Zugang zielt auf das räumliche Vorstellungsvermögen und nutzt die Vorerfahrung mit geografischen Karten und Höhenmodellen auf Landschaftsebene.

Weiterhin werden Inhalte aus den Bereichen Integralrechnung, mehrdimensionale Analysis und Stochastik didaktisch reduziert und propädeutisch in enaktiver Form behandelt.

Durch das Anwenden der vorgestellten Methode kann Mathematik mit einer konkreten naturwissenschaftlichen Aufgabenstellung verbunden werden und Beispiele für die praktische Anwendung und die Relevanz der Mathematik bei der Erarbeitung von Lösungsansätzen aufgezeigt werden.

## 5. Ergebnisse

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die vorgestellte Methode eine didaktische Reduktion von komplexen, mathematischen Inhalten unter Verwendung geografischer Vorerfahrung mit Karten und Höhenmodellen ermöglicht. Themen der Integralrechnung oder Stochastik werden dabei enaktiv anhand eines praktischen Beispiels zur Risikoverteilung behandelt.

Weiterhin wird mit den SuS ein Risikobegriff erarbeitet, welcher innermathematische Aspekte behandelt und im außerschulischen Bereich für räumliche Entscheidungen relevant ist. Der Risikobegriff bleibt nicht mehr abstrakt und bekommt eine mit den Händen modellierbare konkrete Form.

Darüber hinaus kann Unterrichtsstoff fächerübergreifend erarbeitet werden. Idealerweise werden diese Themen mit den SuS in einer Projektwoche behandelt.

Letztendlich bietet die vorgestellte Methode eine didaktischen Reduktion der Integralrechnung in der Sek 1, in einer enaktiven und ikonischen Form.

## Literatur


Praxis Geographie (2013). *Vulkanismus und Risiko - Eine Lerneinheit in Modulen,* Heft 2/2013. Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag.

Banse, G. (1996). *Risikoforschung zwischen Disziplinarität und Interdisziplinarität: Von der Illusion der Sicherheit zum Umgang mit Unsicherheit.* Berlin: Edition Sigma.

Brugnot, G. (Ed.). (2010). *Spatial Management of Risks* (Vol. 48). John Wiley & Sons.

Jonkman, S. N., Van Gelder, P. H. A. J. M., & Vrijling, J. K. (2003). An overview of quantitative risk measures for loss of life and economic damage. *Journal of Hazardous Materials*, *99*(1), 1-30.

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

# Sortieren und Begründen als Indikator für flexibles Rechnen? Eine Untersuchung mit Grundschülern aus Deutschland und den USA

Flexibles Rechnen wurde in den letzten Jahren zum zentralen Ziel des Mathematiklernens in der Grundschule; dementsprechend nahm auch das Forschungsinteresse in diesem Bereich zu (Heinze, Marschick & Lipowsky, 2009). Betrachtet man die verschiedenen Forschungsarbeiten (siehe Sektionseinführung), fallen nicht nur unterschiedliche Fragestellungen auf, sondern insbesondere auch inkonsistente Sichtweisen auf das flexible Rechnen (Star & Newton, 2009). Da die jeweilige Definition sowohl die Erhebung und Analyse der Daten als auch die Interpretation der Ergebnisse entscheidend beeinflusst, werden hier zunächst verschiedene Definitionen skizziert, um dann das der Studie[1] zugrunde liegende Verständnis detailliert darzustellen.

## Flexibles Rechnen konzeptualisieren

| | |
|---|---|
| In this way, flexible mental calculation can be seen as an individual and personal reaction with knowledge, manifested in the subjective sense of what is noticed about the specific problem. (Threlfall, 2002, 42) | Flexibles Rechnen wird im Sinne von aufgabenadäquatem Handeln gesehen, welches in Abhängigkeit von den spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden steht. (Rathgeb-Schnierer, 2006, 294) |
| We choose to navigate through this somewhat confusing terrain by […] defining flexibility as knowledge of multiple solutions as well as the ability and tendency to selectively choose the most appropriate ones for a given problem and a particular problem-solving goal. (Star & Newton, 2009, 558) | In the present article we will, henceforth, use the dual term 'flexibility/adaptivity' as the overall term, 'flexibility' for the use of multiple strategies, and 'adaptivity' for making appropriate strategy choices. (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009, 337/338) |

**Abb. 1: Definitionen von flexiblem Rechnen**

Bezüglich der Konzeptualisierung von flexiblem Rechnen werden an den ausgewählten Definitionen generelle Tendenzen deutlich: Konsens herrscht dahingehend, dass flexibles Rechnens als situatives, aufgabenadäquates Handeln verstanden wird, das einen beweglichen Umgang mit strategischen Werkzeugen impliziert. Dissens besteht im Verständnis und in der Identifikation von Aufgabenadäquatheit. Rechtsteiner-Merz (2013) bündelt die unterschiedlichen Vorstellungen in folgenden drei Ansätzen: Aufgabenadäquatheit wird beschreiben als Zusammenhang von Lösungsweg und

[1] Durchführung in Kooperation mit Dr. M. Green der UNC Charlotte (USA)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 943–946). Münster: WTM-Verlag

Aufgabencharakteristik (Abb. 2, Torbeyns et al., 2009), von Lösungsweg, Lösungsgeschwindigkeit und Lösungsrichtigkeit (Abb. 2, Torbeyns et al., 2009) oder von Lösungsweg und Zahl- und Aufgabeneigenschaften sowie deren Beziehungen (Abb. 2, Rathgeb-Schnierer & Green, 2013).

| |
|---|
| First […] we employed the definition of strategy flexibility as choosing among different strategies simply on the basis of the characteristics of the task, […]. Second, we also applied a more sophisticated definition wherein strategy flexibility is conceived as selecting the strategy that brings the child most quickly to an accurate answer to the problem. (Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009, 583) |
| Only if the tools of solution are linked in a dynamic way to problem characteristics, number patterns, and relationships would we consider as evidence of flexibility in mental calculation. (Rathgeb-Schnierer & Green, 2013, 357) |

**Abb. 2: Verständnis von Aufgabenadäquatheit**

## Flexibles Rechnen erfassen

In Anlehnung an Threlfall (2002, 2009) wird flexibles Rechnen als aufgabenadäquates Handeln verstanden, das sich darin zeigt, dass sich der Lösungsprozess nicht auf Verfahren stützt, sondern auf aufgabenbezogene Eigenschaften und Beziehungen. In Anlehnung an das Modell „Ebenen des Lösungsprozesses“ (Rathgeb-Schnierer, 2011, 16) werden zwei Ebenen in den Blick genommen: die der Lösungswerkzeuge verknüpft mit der Referenzebene, die sich auf kognitive, den Lösungsprozess stützende Elemente bezieht. Grundlegend ergibt sich damit die Herausforderung, ein Untersuchungsinstrument zu finden, das nicht nur die Lösungswerkzeuge und den Referenzkontext erfasst, sondern auch Aussagen über Zusammenhänge ermöglicht.

Vor dem dargestellten Verständnis ergeben sich **Forschungsfragen** zu drei verschiedenen Gesichtspunkten:

- **Untersuchungsinstrument**: Eignen sich Sortier- und Begründungsaufgaben, um flexibles Rechnen zu erfassen? Zeigen sich Unterschiede beim Sortieren und Begründen und geben diese Hinweise auf Grade von Flexibilität?
- **Begründungsmuster**: Zeigen Schülerinnen und Schüler Begründungen auf der Basis von Aufgaben- und Zahlenmerkmalen sowie Beziehungen? Zeigen sich Zusammenhänge zwischen Begründungen und genutzten Lösungswerkzeugen?
- **Unterrichtskontexte**: Zeigen sich Unterschiede beim Sortieren und Begründen in verschiedenen Unterrichtskontexten?

Um diesen Fragen nachzugehen, wurde eine qualitative Studie anhand von Leitfadeninterviews durchgeführt. Hierfür wählten wir Zweit- und Viertklässler aus verschiedenen Unterrichtskontexten aus. Insgesamt umfasst die Stichprobe 91 Kinder aus zehn verschiedenen Klassen: pro Land (Deutschland, USA) jeweils drei verschiedene Klassen der zweiten und zwei verschiedene Klassen der vierten Jahrgangsstufe.

Das Interview beinhaltet zwölf verschiedene Additions- und Subtraktionsaufgaben aus dem Zahlenraum bis 100. Jede Aufgabe wurde so konzipiert, dass sie mindestens ein spezielles Merkmal beinhaltet. Spezielle Merkmale sind beispielsweise Doppelt-Halb-Beziehungen, Umkehrbeziehungen, dieselben Ziffern an Zehner- und Einerstellen, die Nähe zum nächsten Zehner, Zehnersummen an den Einerstellen sowie der Zehnerübergang. Folgende Aufgaben wurden auf Karten geschrieben und eingesetzt: 33+33, 66-33, 56+29, 46-19, 31-29, 73+26, 88-34, 34+36, 65+35, 95-15, 47+28 und 63-25. Das Interview ist in drei Schritten aufgebaut: das Sortieren der Aufgaben, das Begründen des Sortierens und das Lösen der (bis dahin noch nicht gelösten) Aufgaben mit Beschreibung des Vorgehens.

Die **Analyse** aller transkribierten Interviews erfolgt anhand zweier verschiedener Kategoriensysteme, die sich zum einen auf die Begründung des Sortierens zum anderen auf das Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler beziehen. Nachfolgend wird speziell auf die Begründung des Sortierens eingegangen.

Bei der Transkription der Interviews kristallisierten sich zwei Begründungsrichtungen heraus – das Begründen über Merkmale oder über Rechenwege. Auf diese Weise ließen sich induktiv die folgenden vier Hauptkategorien entwickeln: Begründung über Merkmale für jeweils leichte (BMl) und schwere Aufgaben (BMs) sowie Begründung über Lösungswege für jeweils leichte (BLl) und schwere Aufgaben (BLs). Diese Hauptkategorien wurden theoriebasiert in eine erste Stufe von Unterkategorien eingeteilt, die wir bei Bedarf daten- und theoriebasiert weiter ausdifferenzierten. Die Begründungen von zwei Kindern, die die Aufgabe 33+33 der Kategorie leicht zuordneten, wurden z. B. wie folgt kodiert:

| Begründung (33+33) | Kodierung |
|---|---|
| S: Because there's the same numbers in each 'um space. | reasoning by characteristic – easy<br>• spezial numbers / digits<br>  • same numbers / digits |
| Because first I add 30 and 3, and then I add 3. | reasoning by way of solution – easy<br>• compose and decompose<br>  • mixed method |

**Abb. 3: Beispiel für Kategorisierung**

## Ergebnisse

Die nachfolgenden ersten Ergebnisse beziehen sich auf die kodierten Begründungen einer Teilstichprobe, die 20 Zweitklässler aus Charlotte (USA) und 22 Zweitklässler aus Weingarten (D) umfasst. Insgesamt tauchen bei dieser Stichprobe 558 Begründungen auf, pro Kind durchschnittlich 12,8 (Min. 9/ Max. 19). Insgesamt wurde ein Viertel der Aufgaben als schwer und drei Viertel als leicht eingeschätzt; dies entspricht unseren Erwartungen, die wir aufgrund der Aufgabenauswahl hatten. Die Begründungen für leichte Aufgaben stützen sich etwa zu gleichen Teilen auf Merkmale und auf Rechenwege; bei schweren Aufgaben wurde häufiger über Merkmale als über Rechenwege begründet (2:1).

Betrachtet man die Begründungen über Merkmale detailliert, so zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen leichten und schweren Aufgaben. Bei leichten Aufgaben wird mit spezifischen Merkmalen der Einerstellen (5er Zahlen und Zehnersummen, insg. 32%), Aufgaben- und Zahlbeziehungen (Umkehraufgabe und Doppelt-Halb-Beziehung, insg. 24%) und Basisfakten (Auswendigwissen, 23%) argumentiert. Bei den schweren Aufgaben stützen sich die Kinder vor allem auf spezifische Merkmale der Einerstellen (Zehnerübergang, 82%).

Fasst man die zwei Begründungsrichtungen (Merkmale oder Rechenwege) zusammen, so zeigen sich bereits in dieser Teilstichprobe klassenspezifische Tendenzen: die vorwiegende Begründung über Merkmale oder über Rechenwege. Beim vorwiegenden Begründen über Merkmale taucht innerhalb einer Klasse eine Vielfalt von Argumenten auf; wir bezeichnen dies als dynamisch. Das Begründen über Rechenwege gestaltet sich dagegen innerhalb einer Klasse statisch; d.h. es wird in der Regel immer derselbe Rechenweg genutzt. Dieselben Begründungsmuster erscheinen auch bei der Einzelfallbetrachtung: Kinder, deren Präferenzen bei den Merkmalen liegen, begründen dynamisch, indem sie verschiedene Merkmale heranziehen. Kinder, deren Präferenzen bei den Rechenwegen liegen, begründen statisch, indem sie sich nahezu ausnahmslos auf einen Rechenweg stützen.

Diese ersten deskriptiven Ergebnisse geben Aufschluss über Begründungsmuster sowie einen Hinweis auf Unterschiede und Tendenzen in verschiedenen Unterrichtskontexten. Die Frage nach den Zusammenhängen zwischen Begründungen und Lösungswerkzeugen bleibt dagegen bislang unbeantwortet. Der nächste Auswertungsschritt fokussiert auf diesen Aspekt, um Aufschlüsse darüber zu bekommen, inwiefern das Sortieren und Begründen Hinweise auf Grade von Flexibilität geben kann.

## Literatur

Die Literaturliste kann per Email bei der Autorin angefordert werden:
rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Charlotte RECHTSTEINER-MERZ, Weingarten

# Lernprozesse anregen, begleiten und beobachten im Mathematikunterricht der Klasse 1 – eine Fortbildungsreihe

„Ein solides systematisch, methodisch und wissenschaftsgeschichtlich gestütztes *Wissen in den und über die Unterrichtsfächer(n)* ist eine conditio sine qua non. Dies gilt für alle Lehrämter und alle Fächer." (Terhart, 2002, 31, Hervorhebung im Original)

Im Zuge der Diskussion um Professionalisierung im Lehrerberuf und Standards der Lehrerbildung (Terhart, 2002) ist die Situation der häufig fachfremd unterrichtenden Grundschullehrpersonen zunehmend kritischer zu betrachten. Verschiedene Studien, etwa COAKTIV, zeigen, dass fachliches und fachdidaktisches Wissen wie auch didaktische Orientierungen mit Handlungsweisen im Unterricht zusammenhängen (Kunter, Baumert, Blum, Klusmann, Krauss, & Neubrand, 2011; Brunner, Kunter & Krauss, 2006).

Für das Professional Development von Lehrpersonen, die arithmetische Lernprozesse am Schulanfang initiieren und begleiten, ist das Wissen über Zahlbegriffsentwicklung und Rechnenlernen von zentraler Bedeutung. So haben Forschungsarbeiten gezeigt, dass die Entwicklung eines aspektreichen Zahlverständnisses nicht nur die entscheidende Grundlage für das Rechnenlernen darstellt (Krajewski & Schneider, 2006), sondern auch notwendige Voraussetzung die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen ist (Heirdsfield & Cooper, 2004; Rathgeb-Schnierer, 2010; Threlfall, 2009). Dass durch bestimmte Unterrichtskonzepte das Rechnenlernen und die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen besonders gefördert werden können, ist ebenso durch Forschungsarbeiten belegt (Heinze, Marschick & Lipowsky, 2009; Rathgeb-Schnierer, 2006; Rechtsteiner-Merz, 2013).

Der hohe Qualitätsanspruch an den mathematischen Anfangsunterricht verbunden mit der Tatsache, dass viele Grundschullehrpersonen Mathematik fachfremd unterrichten, machen Fortbildungen in diesem Bereich dringend notwendig. Beide Aspekte waren grundlegende Motivation für die Konzeption, Durchführung und Evaluation der nachfolgend vorgestellten schuljahresbegleitenden Fortbildungsreihe, die vom AIM Bildungscampus in Heilbronn finanziell gefördert wird.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 947–950). Münster: WTM-Verlag

### Aufbau und Inhalt

Aus der Professionsforschung sind Qualitätskriterien bekannt, die für die Nachhaltigkeit von Fortbildungsmaßnahmen grundlegend sind: z.B. Fachspezifik, Langfristigkeit, Verbindung von Erprobung und Reflexion sowie Feedback (Lipowsky, Rakoczy, Klieme, Reusser & Pauli, 2005; Prenzel, Friedrich & Stadler, 2009; Sowder, 2007). Diese Kriterien waren Orientierungsrahmen für den Aufbau der Fortbildung. Um Fachspezifik im besonderen Maße zu gewähren wird nicht nur auf schuljahresspezifische Inhalte fokussiert, sondern es werden genau die Lehrkräfte zur Teilnahme zugelassen, die als Klassenlehrpersonen im mathematischen Anfangsunterricht tätig sind. Durch den schuljahresumspannenden Zeitrahmen (Juli 2013 bis Oktober 2014) wird die Langfristigkeit gewährleistet, die zudem ermöglicht, anhand geeigneter Praxisaufträge (s.u.) die Verbindung von Erprobung und Reflexion anzuregen. Ebenso wird durch die von uns gestellte Bedingung, dass jeweils ein Schultandem teilnimmt, dieser iterative Prozess unterstützt und die Anregung einer Feedbackkultur ermöglicht.

### Konkretisierung

Auf der Grundlage des Unterrichtsentwicklungsmodells von Helmke (2009, 310) lässt sich die Umsetzung der Fortbildung (Abb. 1) verdeutlichen. Durch die Darstellung im Kreismodell werden folgende Aspekte sichtbar: Der Prozess der Unterrichtsentwicklung kann an verschiedenen Punkten beginnen und ist nicht nach einem Durchlauf abgeschlossen. Dieser zirkuläre Prozess ist vielmehr im Sinne eines Spiralmodells zu verstehen, durch welches die Progression erkennbar wird (Helmke, 2009).

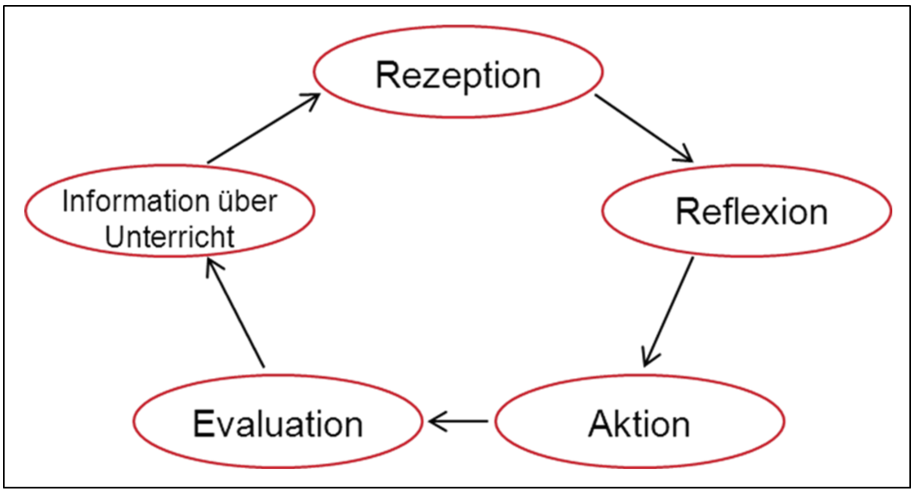



**Abb. 1: Zyklisches Verlaufsmodell (Helmke 2009, 310)**

Im Folgenden werden die einzelnen Aspekte kurz skizziert und deren jeweilige Konkretisierung innerhalb der Fortbildungsreihe beschrieben.

Die Bereiche *Information über Unterricht*, *Rezeption* und *Reflexion* sind Elemente der wiederkehrenden Fortbildungsveranstaltungen. Die jeweiligen *Informationen* beziehen sich stets auf mathematik- und stoffdidaktische sowie unterrichtspraktische Hintergründe. Zu den mathematikdidaktischen Hintergründen gehören Themen wie das Anregen und die Diagnose mathematischer Lernprozesse, das Mathematiklernen von Kindern und die Grundlagen zur Schulung des Zahlenblicks. Als stoffdidaktische Hintergründe werden Aspekte zur Zahlbegriffsentwicklung, zum Stellenwertverständnis, zum Rechnenlernen sowie die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen fokussiert. Um den teilnehmenden Lehrkräften Möglichkeiten zur *Rezeption* und *Reflexion* anzubieten, erhalten sie zahlreiche Angebote, Aktivitäten auszuprobieren, Lernangebote Kriterien bezogen zu analysieren und diese jeweils vor dem Hintergrund ihrer eigenen Praxis zu diskutieren und zu reflektieren.

Da eine gelingende Unterrichtsentwicklung stark von individuellen und externen Bedingungsfaktoren abhängig ist (Helmke, 2009; Krebs, 2009), wird die Praxiserprobung (*Aktion*) gezielt vorbereitet. Hierfür werden jeweils zum Ende der Fortbildungsveranstaltungen konkrete Praxisaufträge formuliert und besprochen. Im Anschluss beschreiben die jeweiligen Schultandems individuelle Ziele für die Weiterarbeit und legen konkrete Umsetzungsschritte für die folgenden Wochen fest.

Zu Beginn jedes Fortbildungstreffens wird anhand von mitgebrachten Schülerdokumenten, beobachteten und dokumentierten Lernprozessen, eigenen Erfahrungen sowie auf der Grundlage von Elternrückmeldungen eine *Evaluation* auf der reflektiven Ebene angeregt. Zusammenfassend werden zentrale Aspekte herausgearbeitet und nach Möglichkeiten zur Weiterentwicklung gesucht.

Erste Erfahrungen bestätigen, dass individuelle und externe Bedingungsfaktoren eine wesentliche Rolle bei der Umsetzung im Unterricht spielen und diese kontinuierlich zu thematisieren sind. Dabei sind verschiedene Aspekte zu nennen: Die subjektiven Theorien der Lehrkräfte zum Umgang mit Kindern, die Schwierigkeiten im Lernprozess zeigen, sind stark von tradierten Vorstellungen geprägt, wie beispielsweise der Ansicht „viel hilft viel“. Das Schulbuch dominiert den Unterricht in hohem Maße und eine zeitweise Ablösung davon ist mit viel Unsicherheit verbunden. Neben diesen individuellen Bedingungsfaktoren zeigen sich auch externe Aspekte, die eine Veränderung des Unterrichts beeinflussen. Die vielfältigen Anforderungen in der Schule machen es den Lehrkräften schwer, sich auf die Unterrichtsentwicklung in einem Fach zu konzentrieren. Außerdem fühlen sie sich durch die Erwartungen der Eltern, die mehrheitlich aus ihren eigenen Schulerfahrungen formuliert sind, unter Druck gesetzt.

## Wissenschaftliche Begleitung

Die wissenschaftliche Begleitung – durchgeführt von Dr. Julia Weinsheimer – bezieht sich auf die Entwicklung der diagnostischen Kompetenzen der teilnehmenden Lehrkräfte. Zur Erfassung und Analyse wurde ein Instrument entwickelt, das auf die Facetten unterschiedlicher diagnostischer Fähigkeiten im Alltag von Lehrpersonen fokussiert: beispielsweise das Einschätzen von mathematischen Aufgaben, das Beurteilen von Schülerdokumenten oder das Einschätzen von und Reagieren in Lehr- Lernsituationen (Weinsheimer & Rathgeb-Schnierer, 2013). Der Fragebogen in Form einer „animierten Fragenpräsentation" beinhaltet offene Fragen, die teilweise mit Schülerdokumenten oder Filmsequenzen verknüpft sind; er wird zu Beginn und am Ende der Fortbildung eingesetzt. Die mehrstufige Auswertung mündet in der Erstellung eines Kompetenzprofils, welches im intraindividuellen Vergleich den Blick auf die Entwicklungen im Fortbildungszeitraum ermöglicht (Weinsheimer & Rathgeb-Schnierer, 2014).

## Ausblick

Im Rahmen des vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst des Landes Baden-Württemberg geförderten Promotionskollegs zum Thema „Professionalisierung im Lehrberuf – Konzepte und Modelle auf dem Prüfstand" ist das Teilprojekt PRIMA angesiedelt, in dem die vorgestellte Fortbildungsreihe zum arithmetischen Anfangsunterricht erneut durchgeführt und beforscht wird. Nach Abschluss und Evaluation des ersten Fortbildungsdurchgangs im Oktober 2014 werden die Fortbildungsmodule entsprechend überarbeitet. Im Juli 2015 startet ein neuer Fortbildungsdurchgang, der umfassend wissenschaftlich begleitet wird: In einem Prä-Post-Design werden die Auswirkungen auf fachlichen Wissenszuwachs, auf Entwicklung diagnostischer Kompetenzen, auf Einschätzungen sowie auf Veränderungen im unterrichtlichen Handeln der teilnehmenden Lehrkräfte unter Einsatz von Befragungsmethoden und Unterrichtsvideografie untersucht. Dabei soll auch analysiert werden, wie die einzelnen Wirkungsebenen in Wechselbeziehung stehen.

## Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann bei den Autorinnen per Email angefordert werden: rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de, rechtsteiner@ph-weingarten.de

Charlotte RECHTSTEINER-MERZ, Weingarten

# Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung – Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei schwachen Kindern

In Anbetracht der Ergebnisse von Studien wie TIMSS (Bos, Bonsen, Baumert, Prenzel, Selter & Walther, 2008; Wendt, Bos, Selter & Köller, 2012) stellt sich die zentrale Frage, wie Unterricht bereits in der ersten Klasse gestaltet werden kann, um möglichst viele Kinder bei der Ablösung vom zählenden Rechnen und der Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen zu unterstützen. Schütte (2004) und Rathgeb-Schnierer (2006) kommen in ihren Untersuchungen zu dem Ergebnis, dass die Schulung des Zahlenblicks als wesentliches Vehikel auf dem Weg zum flexiblen Rechnen dient. Vor diesem Hintergrund ließ sich folgende Forschungsfrage formulieren: *Können Kinder, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen, mithilfe kontinuierlicher Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks flexible Rechenkompetenzen entwickeln?*

## Zahlenblick und Zahlenblickschulung

Unter Zahlenblick versteht Schütte (2004) das augenblickliche Sehen und Nutzen von Beziehungen, wobei Anzahlen geschickt zerlegt und neu zusammengesetzt werden. Um den Blick auf die Strukturen zu lenken, plädiert sie für Aktivitäten, die den Rechendrang aufhalten und damit zunächst den Blick auf Zahl- und Aufgabenmerkmale ermöglichen. Hierfür werden Tätigkeiten zum Sehen, Sortieren oder Strukturieren dem Lösen der Aufgaben vorangestellt (Rechtsteiner-Merz, 2013).

## Die Untersuchung

Während eines gesamten Schuljahres wurde in fünf von acht Untersuchungsklassen regelmäßig mit Aktivitäten zur Zahlenblickschulung gearbeitet (1 Stunde pro Woche). Zur Erfassung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden in der Entwicklung von Kindern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen, führte ich vier halbstandardisierte Interviews durch. Diese ersteckten sich von Januar (Klasse 1) bis Anfang des zweiten Schuljahres. Zur Datenauswertung wurden vor dem Hintergrund der Theorie zum flexiblen Rechnen (Rathgeb-Schnierer, 2011, 2014) zwei Kategoriensysteme entwickelt: ein deduktives zur Erfassung der Lösungsrichtigkeit und der Lösungswerkzeuge sowie ein induktives zur Erfassung der Kinderargumentationen zum Lösungsweg (Rechtsteiner-Merz 2011). Die anschließende Zusammenführung der beiden Kategoriensysteme ermöglichte

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 951–954). Münster: WTM-Verlag

sowohl die Entwicklung einer Typologie zum Rechnenlernen als auch die Beschreibung von Entwicklungsverläufen (Rechtsteiner-Merz, 2013).

## Ergebnisse

Insgesamt konnten neun Typen identifiziert werden: vier Haupttypen und fünf Zwischentypen (Abb. 1). Die Bezeichnung des jeweiligen Typus impliziert den Grad der Beziehungsorientierung in der Argumentation sowie den Grad der Ablösung vom Zählen. Im Hinblick auf die Ablösung vom Zählen kann zwischen Zählern und Rechnern unterschieden werden. Während bei zählenden Kindern Zählstrategien überwiegen, finden sich bei rechnenden Kindern Lösungswerkzeuge überwiegend in Form von strategischen Werkzeugen und von Faktenabruf.

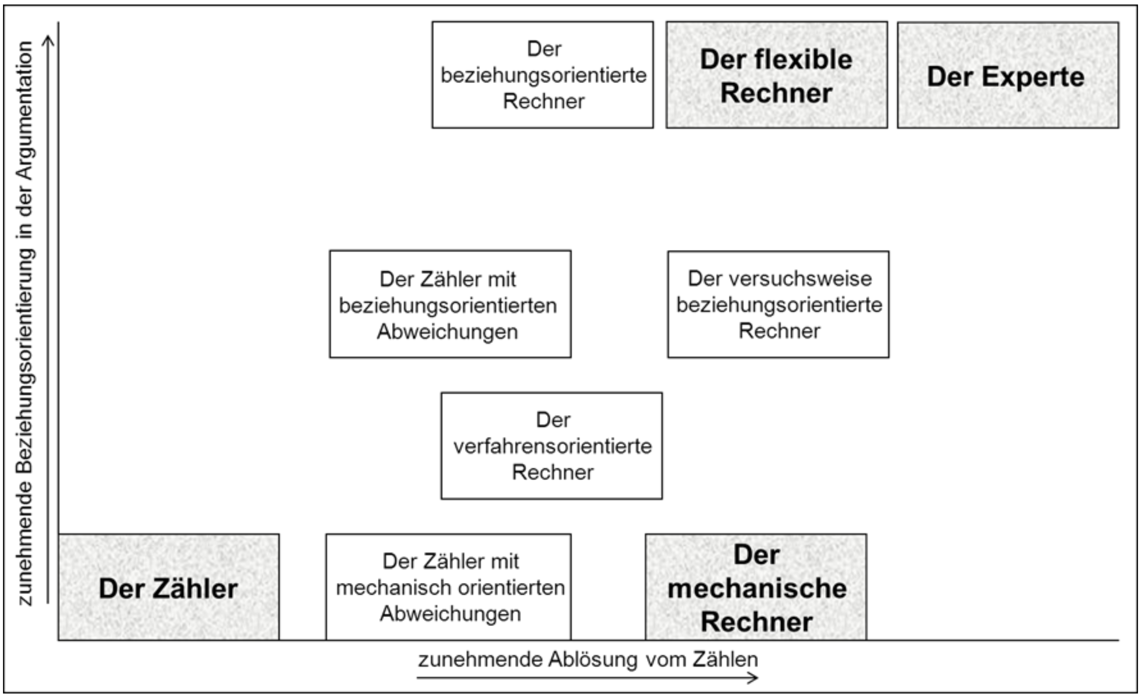



**Abb. 1: Typologie zum Rechnenlernen**

Als Haupttypen (dunkel schattiert) werden die Typen bezeichnet, die entweder einen typischen Status zu Beginn (der *Zähler*) oder am Ende der ersten Klasse beschreiben (der *mechanische Rechner*, der *flexible Rechner*, der *Experte*). Der Typus der *Zähler* spielt dabei eine Sonderrolle, da er am Schulbeginn „quasi regulär“ auftritt, sich aber in extremen Fällen am Ende der ersten Klasse in Form von verhärtetem Zählen manifestiert. Als Zwischentypen lassen sich die Typen bezeichnen, die im Idealfall Entwicklungsphasen auf dem Weg zum Rechnen darstellen. Im Folgenden werden lediglich die vier Haupttypen kurz charakterisiert. Eine ausführliche Beschreibung aller Typen, ist in Rechtsteiner-Merz, 2013 zu finden.

Der *Zähler* nutzt beim Lösen von Aufgaben (fast) ausschließlich Zählstrategien, die häufig durch den Einsatz der Finger unterstützt werden. Ab Ende der ersten Klasse kann dieses Vorgehen bereits als von den Kindern etabliert und somit als verfestigt bezeichnet werden. Der Zähler zeigt keinerlei Rückgriff auf Beziehungen.

Der *mechanische Rechner* löst die Aufgaben entweder über das Ergänzen zur Zehn oder durch Faktenabruf. Das Ergänzen zur Zehn nutzt er als Algorithmus, unabhängig von Zahl- und Aufgabenmerkmalen. Das spiegelt sich auch in seinen Argumentationen zur Vorgehensweise wider, die sich meist auf Routinen beziehen. Ein Übertrag in den Zahlenraum bis hundert gelingt ihm nicht.

Der *flexible Rechner* verfügt über zahlreiche strategische Werkzeuge, die sowohl beim kleinen Einspluseins als auch teilweise im Zahlenraum bis hundert eingesetzt werden. Dabei zieht er automatisierte Hilfsaufgaben und Beziehungen zu bereits gelösten Aufgaben heran. Als Lösungswerkzeug überwiegt das Nutzen strategischer Werkzeuge gegenüber dem Faktenabruf. Die Argumentationen zeugen stets von einem ausgeprägten Blick für Zusammenhänge und Strukturen.

Der *Experte* hat in der Regel das gesamte Einspluseins automatisiert und kann sein ausgeprägtes beziehungshaltiges Wissen auf den Zahlenraum bis hundert übertragen, was sich auch in seinen differenzierten Argumentationen zeigt. Der Typus des *Experten* ist spezifisch für die erste Klasse und wird in höheren Klassenstufen so nicht angetroffen, da die gesamte Automatisierung der Additionsaufgaben ausschließlich im Zahlenraum bis zwanzig möglich ist. In größeren Zahlenräumen sind die Typen des *flexiblen Rechners* und *des Experten* identisch.

Die Zuordnung der Kinder auf die empirisch begründeten Typen während des Beobachtungszeitraumes ermöglicht Einblicke in deren Entwicklungsverläufe im Rechenlernprozess. Vergleicht man die Entwicklungswege der Kinder mit und ohne Aktivitäten zur Zahlenblickschulung, so lassen sich bei aller Individualität auch Gemeinsamkeiten feststellen und mit dem Unterrichtssetting in Verbindung bringen. Kinder, die keine spezifischen Aktivitäten zur Zahlenblickschulung erhielten, verblieben überwiegend im zählenden Rechnen. Insgesamt lösten diese Kinder auch zu Beginn der zweiten Klasse in der Regel höchstens die Hälfte aller gestellten Aufgaben im Zahlenraum bis zwanzig. Darüber hinaus war ihr Vorgehen nahezu durchweg einem verfahrensorientierten oder mechanischen Typus zuzuordnen. Mit zwei Ausnahmen verharrten alle Kinder ohne Zahlenblickschulung im zählenden Rechnen und machten ab April der ersten Klasse keine merklichen Fortschritte mehr. Bei der Gruppe der Kinder mit Aktivitäten zur Zahlenblickschulung, zeigte sich dagegen ein anderes Bild: Bis auf eine Ausnahme hatten sich diese Kinder zu Beginn der zweiten Klasse zu Rechnern entwickelt. Das bedeutet, in ihrem Lösungsprozess dominierten strategische Werkzeuge und Faktenwissen. Darüber hinaus erkannten und nutzten sie bis spätestens Ende der ersten Klasse überwiegend Zahl- und Aufgabenbeziehungen und konnten diese auch verbalisieren.

Auf der Grundlage der empirischen Daten und im Abgleich mit vorhandenen Theorien wurden vier Deutungshypothesen entwickelt, von denen zwei an dieser Stelle ausgeführt werden.

**Beziehungsorientierung ist Voraussetzung für die Ablösung vom zählenden Rechnen.** Die Daten zeigen, dass die Ablösung vom Zählen zum Rechen nur dann vollzogen wird, wenn mindestens während einer Phase des Lernprozesses ein beziehungsorientierter Blick auf Aufgaben vorhanden ist. Ohne eine Phase der Beziehungsorientierung konnten die Kinder nicht zu Rechnern werden. So entwickelte sich der Typus des *Zählers mit mechanisch orientierten Abweichungen* für viele Kinder zur Sackgasse, sofern ihr Blick nicht explizit auf Beziehungen gelenkt wurde.

**Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks sind eine wesentliche Voraussetzung für das Rechnenlernen und die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen.** Bei den Kindern ohne Zahlenblickschulung konnte sich nur ein Kind zu einem gefestigten Rechner entwickeln. Nahezu alle anderen Kinder blieben im überwiegenden Zählen verhaftet. Hingegen konnten sich alle Kinder (bis auf eine Ausnahme), in deren Unterricht Aktivitäten zur Zahlenblickschulung durchgeführt wurden, zu Rechnern entwickeln. Es wird deutlich, dass die Zahlenblickschulung für Kinder, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen eine wesentliche Voraussetzung für das Rechnenlernen an sich bildet und für die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen unverzichtbar ist.

## Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann bei der Autorin per Email angefordert werden: rechtsteiner@ph-weingarten.de

Simone REINHOLD, Braunschweig

# Diagnosestrategien angehender Grundschullehrkräfte aus prozessorientiert-mathematikdidaktischer Perspektive

## 1. Diagnostizieren als Tätigkeit

Unter den von Shulman (1986) ausgewiesenen und von Ball et al. (2008) weiter differenzierten Domänen der Lehrerprofession spielt das Wissen um fachdidaktische Inhalte und um typische mathematische Konzepte oder Fehlvorstellungen von Schülern (*knowledge of content and students*, KCS) eine zentrale Rolle. KCS wird hier als Teilbereich des *pedagogical content knowledge* (PCK) angesehen und umfasst auch die Fähigkeit, Schülerkonzepte anhand schriftlicher oder mündlicher Äußerungen zu analysieren.

Das Konzept der Diagnosekompetenz wird vielfach über die Urteilsgenauigkeit von Lehrkräften operationalisiert (vgl. Südkamp et al., 2012). Dabei steht vor allem die Genauigkeit des *Ergebnisses* einer Diagnose im Mittelpunkt. Eine stärkere Fokussierung auf den *Prozess*, mit dem eine Lehrkraft zu einer diagnostischen Einschätzung gelangt, verweist darauf, dass Diagnostizieren als ein Such- und Problemlöseprozess angesehen werden kann, der sich durch (möglichst zielgerichtete) Teilprozesse des Erkennens, Unterscheidens, Beurteilens und Entscheidens auszeichnet (z. B. Werning, 2006). Ein diesem Verständnis entsprechendes Modell von Klug et al. (2011, 2013) charakterisiert Diagnostizieren als aktiven, *zirkulären Prozess* und umfasst zunächst eine *prä-aktionale* Phase des Diagnostizierens. Diese beinhaltet u.a., dass Ziele und Methoden für eine Diagnose erörtert werden. Eine darauf folgende *aktionale Phase* umfasst das Handeln in der diagnostischen Situation im engeren Sinne sowie das Sammeln und Interpretieren gewonnener Daten. In der sich anschließenden *post-aktionalen Phase* werden Rückmeldungen gegeben und die Förderung geplant. Diese Phase dient ggf. auch dazu, eine neuerliche prä-aktionale Phase vorzubereiten, so dass sich hier ein *Diagnosekreislauf* (treffender noch: eine *Diagnosespirale*) ergibt, die wiederholt durchlaufen werden kann.

## 2. Mikroprozesse in der aktionalen Phase des Diagnostizierens

Das Durchführen mathematischer Diagnosegespräche mit Grundschulkindern lässt sich innerhalb dieses diagnostischen Makroprozesses vor allem in der aktionalen Phase des Diagnostizierens verorten. Hier geht es um das Sammeln und Auswerten von Daten im Gespräch mit dem Kind sowie um Schlussfolgerungen aus dem Beobachteten, was den Vergleich mit Elementen eines qualitativen Forschungsprozesses nahelegt (vgl. Jungwirth et al., 1994).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 955–958). Münster: WTM-Verlag

Nimmt man vor allem den Aspekt der Datenauswertung in den Blick, finden hier aktiv-interpretierende Rekonstruktionprozesse statt: Anhand der Äußerungen der Schüler während der Bearbeitung einer mathematischen Aufgabenstellungen generieren Diagnostizierende Hypothesen zu den mathematischen Konzepten ihrer Schüler und überprüfen diese (vgl. Hunting, 1997; Barth & Henninger, 2012). Anzunehmen ist, dass sie innerhalb dieser diagnostischen Mikroprozesse in der aktionalen Phase des Diagnostizierens auch auf mathematikdidaktisches Wissen (KCS) zurückgreifen.

Diagnosekompetenz in einem mathematischen Diagnosegespräch kann vor diesem Hintergrund angesehen werden als die Bereitschaft und die kognitive Fähigkeit zur aktiven Auseinandersetzung mit dem mathematischen Lernprozess eines Kindes. Dies schließt das Wissen um Komponenten mathematikdidaktisch-diagnostizierenden Vorgehens und die Verfügbarkeit von Diagnosestrategien, also die (bewusste) Anwendung eines entsprechenden „Repertoires“ in der aktionalen Phase des Diagnostizierens, ein.

## 3. Fragestellungen & methodisches Vorgehen im Projekt *diagnose:pro*

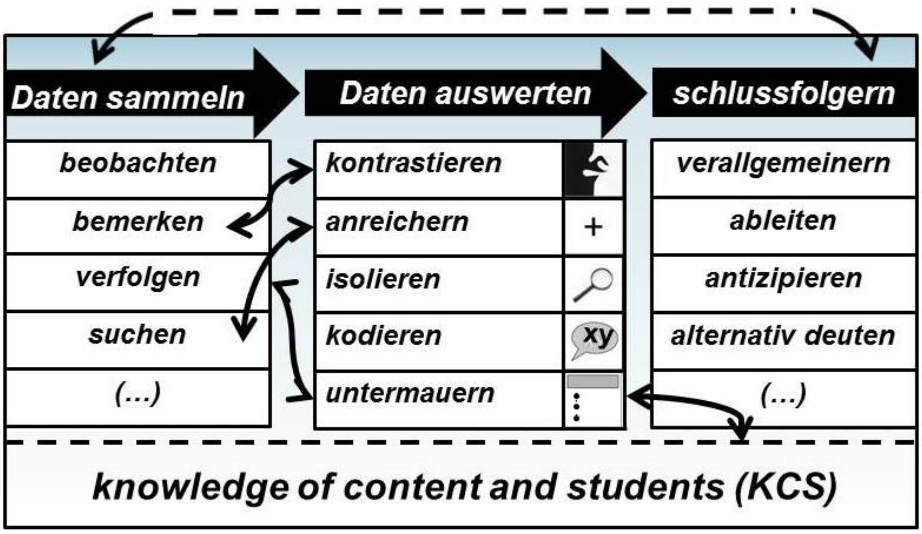
Das Projekt ***diagnose:pro*** nimmt daran anknüpfend qualitative Analysen des diagnostizierenden Vorgehens vor, das angehende Grundschullehrkräfte während des Diagnostizierens arithmetischer Lernprozesse in einem mathematischen Diagnosegespräch mit Schulanfängern einsetzen. Einer konstruktiven Sicht auf die Vorgehensweisen der Studierenden in ihrer Rekonstruktion mathematischer Denkwege von Kindern folgend wird untersucht:

- Welche Elemente kennzeichnen die Strategien, die Studierende im Verlauf einer Diagnose (in der Auseinandersetzung mit einem bereits erfolgten Diagnosegespräch) einsetzen?
- Inwiefern greifen sie auf mathematikdidaktisches Wissen (KCS) zurück?
- Welche Strategietypen lassen sich identifizieren und inwiefern wird flexibel zwischen (Elementen von) Strategien variiert?

Das Sampling bezieht vor allem Studierende mit dem Studienziel „Lehramt an Grundschulen“ ein, die am Lehrprojekt FL!P (Forschendes Lernen !m Praxiskontext!) teilnehmen (vgl. Reinhold, 2013; i.V.). Hier werden in einem Seminar zum arithmetischen Anfangsunterricht Interviews konzipiert, die anschließend mit Grundschulkindern im ersten Schuljahr durchgeführt werden. Im Wintersemester 2013/14 wurden die seit 2011 erhobenen Daten durch retrospektive Einzelinterviews nach einem diagnostischen Interview, das die Studierenden zuvor selbst konzipiert und durchgeführt hatten, ergänzt. Hier waren die Studierenden beim erstmaligen Betrachten eines Interviews dazu aufgefordert, das Interview „auszuwerten“ und zur Kommentierung an beliebiger Stelle zu stoppen. Fielen diese Anmerkungen nur spärlich aus, wurden ggf. Rückfragen gestellt. Die kategorienentwickelnde Auswertung der Daten erfolgt im Sinne empirisch begründeter Theoriebildung und orientiert sich softwaregestützt durch ATLAS.ti an den Grundsätzen der Grounded Theory (vgl. Glaser & Strauss, 1998).

## 4. Erste Ergebnisse

Innerhalb der drei zentralen Komponenten diagnostischen Vorgehens in der aktionalen Phase des Diagnostizierens (Daten sammeln, Daten auswerten, schlussfolgern) zeigen sich in den vorliegenden Daten vielfältige Ausprägungen. Exemplarisch sei dazu verwiesen auf die Komponente „Daten auswerten“: Häufig werden vergleichende Überlegungen angestellt, in denen Details *kontrastiert* werden zu dem, was ein Kind bereits zu einem früheren Zeitpunkt geäußert hat, zu dem, was andere Kinder diesbezüglich geäußert haben, oder zu dem, was die Studierenden sich selbst zu einer Aufgabe überlegt haben. Eigene *Kodierungen* lassen sich in der Datenauswertung häufig dann beobachten, wenn es darum geht Unvertrautes, aber dennoch offenbar Relevantes, in den Äußerungen oder Aktivitäten der Kinder zu erfassen. Oftmals beziehen die Studierenden sich auch zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal auf diese eigenen Kodierungen und lösen sich damit z.T. auch von zuvor im Seminar bereits erarbeiteten Fachtermini. Eine vergleichbare Auffächerung diagnostischer Aktivitäten in der aktionalen Phase des Diagnostizierens zeigt sich auch für die Komponenten „Daten sammeln“ und „schlussfolgern“, wobei alle Aktivitäten stets auch auf die eine oder andere Weise in Verbindung miteinander stehen können, wie die Pfeile in der nachstehenden Grafik andeuten.




Anhand der aufgefächerten Komponenten lässt sich detailliert beschreiben, wie die einzelnen Facetten in den individuellen Vorgehensweisen der Studierenden zusammenwirken. Zudem lassen sich Typologien beschreiben wie etwa die des „*beschreibenden Sammlers*“, der nahezu ausschließlich beschreibt und paraphrasiert, was das Kind im Interview tut oder äußert und keinerlei Überlegungen dazu äußert, die auf ein Auswerten der Daten oder daraus abzuleitende Schlussfolgerungen hindeuten. Der „*schlussfolgernde Sammler*“ hingegen scheint Elemente der intensiven Auswertung der Daten zu überspringen. Eine davon abzugrenzende „*verzweigte Diagnosestrategie*“ lässt häufig einen Rückgriff auf fachdidaktisches Wissen (KCS) erkennen (z.B. Wissen um typische Entwicklungsverläufe, denkbare Schülerstrategien, mathematikdidaktische Fachbegriffe).

## Literatur


Ball, D.; Thames, L. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407.

Barth, Ch. & Henninger, M. (2012). Fostering the Diagnostic Competence of Teachers with Multimedia Training – A Promising Aproach? In I. Deliyannis (Ed.), *Interactive Multimedia* (pp. 49-66). Rijeka, Croatia: InTech.

Glaser, B. G. & Strauss, A.L. (1998). Grounded Theory – Strategien qualitativer Forschung. Bern: Huber.

Hunting, R. P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165.

Jungwirth, H.; Steinbring, H.; Voigt, J. & Wollring, B. (1994). Interpretative Unterrichtsforschung in der Lehrerbildung. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung im Mathematikunterricht* (S. 12-42). Köln: Aulis.

Klug, J. (2011). *Modelling and training a new concept of teachers‘ diagnostic competence*. Darmstadt: Dissertation, TU Darmstadt.

Klug, J.; Bruder, S.; Kelava, A.; Spiel, Ch.; Schmitz, B. (2013). Diagnostic competence of teachers: A process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. *Teaching and Teacher Education* 30 (2013), 38-46.

Reinhold, S. (2013). Diagnostische Kompetenzen von Grundschullehramtsstudierenden in praxisnahen Veranstaltungen zum Anfangsunterricht. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 797-800). Münster.

Reinhold, S. (i.V.). FL!P – Forschendes Lernen im Praxiskontext: Studien zur Entwicklung diagnostischer Kompetenzen in Veranstaltungen zum mathematischen Anfangsunterricht. In R. D. Möller & R. Vogel (Hrsg.), *Innovative Konzepte für die Grundschullehrerausbildung im Fach Mathematik*. Wiesbaden: Springer.

Shulman, L. (1986). Those who understand. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Südkamp, A.; Kaiser, J. & Möller, J. (2012). Accuracy of Teachers‘ Judgements of Students‘ Academic Achievement: A Meta-Analysis. *Journal of Educational Psychology* 104, 743-752.

Werning, R. (2006). Lern- und Entwicklungsprozesse fördern: Pädagogische Beobachtung im Alltag. In G. Becker et al. (Hrsg), *Diagnostizieren und Fördern* (S. 11-15). Friedrich Jahresheft XXXIV.

Xenia-Rosemarie REIT

# Wie schwierig ist eine Modellierungsaufgabe? Denkstrukturen von Lösungsansätzen als Instrument zur Schwierigkeitsanalyse

In der mathematikdidaktischen Forschungsgemeinschaft ist man sich fast immer einig: Anwendungen, Modellieren und Realitätsbezüge sind wichtig und sollen in den Unterricht integriert werden. Allerdings zeigen viele Studien, dass der Anteil des Modellierens im Alltagsunterricht eher gering ist (z.B. Brunner, et al., 2006). Von Lehrern wird dabei häufig u.a. die Komplexität von Modellierungsaufgaben und die mangelnde Planbarkeit der Unterrichtsstunde beim Einsatz von Modellierungsaufgaben angeführt (Schmidt, 2010). Gerade Modellierungsaufgaben weisen scheinbar einige Unwägbarkeiten auf wie z.B. ihr vergleichbar großer Lösungsraum, d.h. dem zur Verfügung stehen mehrerer Lösungswege. Damit verbunden ist das Problem, die Schwierigkeit der Modellierungsaufgabe einzuschätzen. Im Folgenden wird ein Modell vorgestellt, das auf Denkstrukturen von Lösungsansätzen basiert, um den Schwierigkeitsgrad einer Modellierungsaufgabe einschätzen zu können. In einer Studie mit 600 Schülerinnen und Schülern der 9. gymnasialen Jahrgangsstufe soll der theoretisch ermittelte Schwierigkeitsgrad auf Validität überprüft werden.

## Projektdesign

Im Rahmen einer Vorstudie wurden sechs Modellierungsaufgaben entwickelt und pilotiert. Dabei konnte der Lösungsraum, im Sinne einer Identifikation der zielführenden Lösungsansätze je Aufgabe, umfassend charakterisiert werden. Kern der Hauptstudie ist die Frage: Wie schwierig ist eine Modellierungsaufgabe bzw. inwiefern unterscheiden sich die Lösungsansätze bzgl. ihrer Schwierigkeit? Um der Antwort näher zu kommen, wurde ein lösungsnahes Modell zur Bestimmung des Schwierigkeitsgrads von Lösungsansätzen entwickelt, das auf den Denkstrukturen der einzelnen Ansätze basiert. Zur empirischen Validierung des Modells bedarf es eines fundierten Bewertungsschemas, das es erlaubt die Schülerlösungen objektiv zu bewerten. Auf der Grundlage von Lösungsansätzen wurde so für jeden Ansatz ein Bewertungsschema entwickelt, das Teilpunkte auf Denkschritte vergibt und sich so an der Denkstruktur des Lösungsansatzes orientiert.

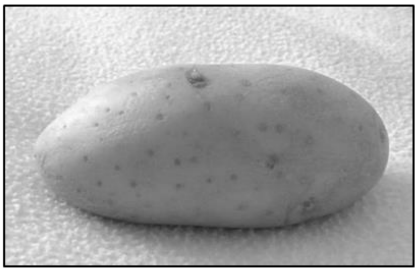
## Denkstrukturen von Modellierungsaufgaben

Da Modellierungsaufgaben, wie z.B. die Kartoffel-Aufgabe (siehe Abb. 1), im Gegensatz zu Aufgaben anderer Formate, zumeist einen großen Lö-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 959–962). Münster: WTM-Verlag

sungsraum aufweisen, erscheint uns ein Einbezug der Lösungsansätze in die Abschätzung des Schwierigkeitsgrads unabdingbar. Je nach verwendetem Lösungsansatz ergeben sich verschiedene mathematische Modelle die mit unterschiedlichem mathematischem Fachwissen zielführend verwendet werden müssen. Daher ist eine lösungsbasierte Differenzierung notwendig.

**Modellierungsaufgabe Kartoffel**



Bei der industriellen Pommes-Herstellung sollen alle Kartoffelstäbchen möglichst gleich groß sein. Da die Kartoffel unregelmäßig geformt ist, bleiben Reste übrig. Die Pommes-Stäbchen werden der Länge nach aus der Kartoffel gestanzt. Die dafür verwendete Kartoffelsorte sieht so aus wie auf dem Foto und ist ungefähr 10 cm lang.

Wie viele vollständige Pommes-Stäbchen erhält man aus einer ganzen Kartoffel?

Begründe deine Lösung mit geeigneten Rechnungen.

**Abb. 1: Modellierungsaufgabe „Kartoffel“**

Das entwickelte Modell zur Bestimmung des Schwierigkeitsgrads von Modellierungsaufgaben beruht auf der Identifikation von sogenannten Denkoperationen in Lösungsansätzen. In Anlehnung an die Simplex-Komplex-Idee von Breidenbach (1969) entsteht so eine Denkstruktur für den jeweiligen Lösungsansatz, welche Auskunft über die zu leistenden Denkschritte gibt (siehe Abb. 2). Orientierung findet der Ansatz zudem in der Cognitive Load Theory, welche die Belastung kognitiver Ressourcen im Arbeitsgedächtnis beschreibt und simultan durchzuführende Prozesse als stärkere Belastung anführt (Sweller, 2010). Bezogen auf das Denkstrukturmodell bedeutet das, dass parallele Denkoperationen (wie man sie im Denkstrukturmodell in Abb. 2, mitte, wiederfindet), eine Verkomplizierung der Lösung zur Folge haben und somit zu einem höheren Schwierigkeitsgrad führen als z.B. solche, die nur sequentielle Denkoperationen erfordern. Um der stärkeren Gewichtung paralleler Denkoperationen und aber auch einer inhaltlichen Interpretierbarkeit gerecht zu werden wird der Schwierigkeitsgrad eines Lösungsansatzes als Summer der Fakultäten der einzelnen Ebenen berechnet (siehe Abb. 2, rechts). Diese spiegeln die Anzahlen der Möglichkeiten wieder, die Denkoperationen einer Ebene durchzuführen und beziehen den kognitiven Anspruch paralleler Denkoperationen ein.

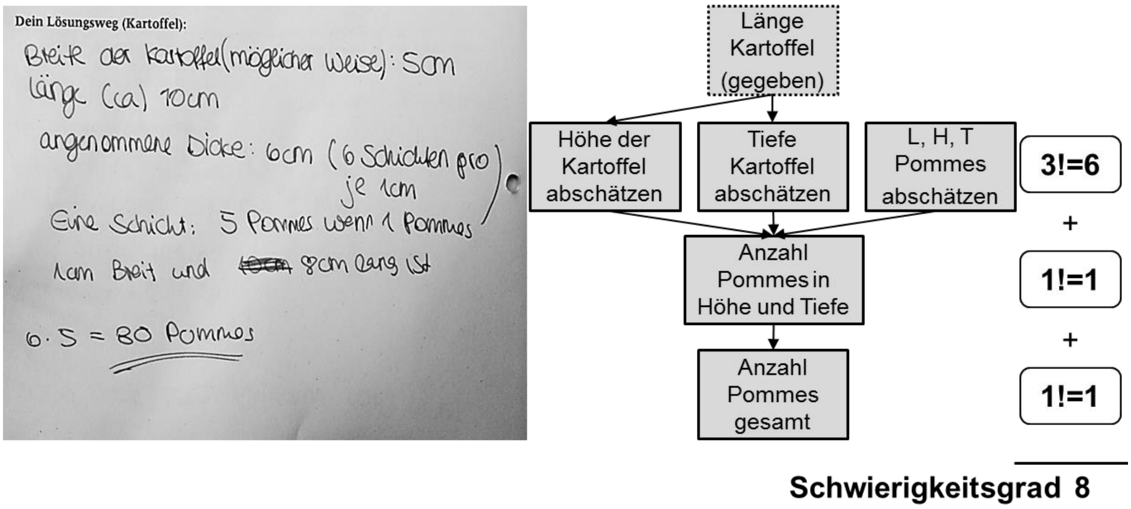



**Abb. 2: Schülerlösung (links) mit Denkstruktur (mitte) und Schwierigkeitsgrad (rechts)**

## Erste Ergebnisse

In Tabelle 1 sind die Ergebnisse der ersten drei Modellierungsaufgaben Cola, Kartoffel und Tennis zu sehen. Bei der Auswertung wurden jeweils die verwendeten Lösungsansätze identifiziert. Aus der Denkstruktur dieser konnte der Schwierigkeitsgrad je Lösungsansatz, sowie der gemittelte Schwierigkeitsgrad der Aufgabe berechnet werden. Durch Bewertung der Schülerlösungen ergab sich die durchschnittlich erreichte Punktzahl (Score) und Mittelwertbildung, unter zusätzlichem Einbezug der nicht zielführenden Lösungen, führt zum jeweiligen Score einer Aufgabe. Vergleicht man Aufgabenschwierigkeit mit Score der Gesamtaufgabe so ist ein deutlicher Trend zu erkennen. Die theoretisch schwierigste Aufgabe (Tennis) wurde am schlechtesten gelöst (34%) und die theoretisch leichteste (Cola) am besten (43%).

| | **Cola** | | | **Kartoffel** | | | | **Tennis** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lösungs-ansatz** | Zylinder | Quader | Zerle-gung | Volumen | Schicht | Fläche | Zylinder | Recht-eck | Messen | Funk-tional |
| **Schwierig-keitsgrad** | 6,00 | 5,00 | 8,00 | 9,00 | 8,00 | 9,00 | 7,00 | 5,00 | 27,00 | 10,00 |
| **Schwierigkeit Mittelwert** | 6,33 | | | 8,25 | | | | 14,00 | | |
| **Score** | 73% | 72% | 83% | 63% | 77% | 57% | 47% | 69% | 19% | 36% |
| **Score Mittelwert** | 43% | | | 37% | | | | 34% | | |

**Tabelle 1: Auswertung der Modellierungsaufgaben mit Denkstruktur, Schwierigkeitsgrad und durchschnittlich erreichter Punktzahl**

Der Zusammenhang der einzelnen Lösungsansätze mit dem Schwierigkeitsgrad wird in Abb. 3 deutlich. Der nahezu antiproportionale Fit deutet darauf hin, dass sich der durchschnittlich erreichte Score, bei Verwendung des jeweiligen Lösungsansatzes, bei einer Verdopplung des Schwierigkeitsgrads halbiert.

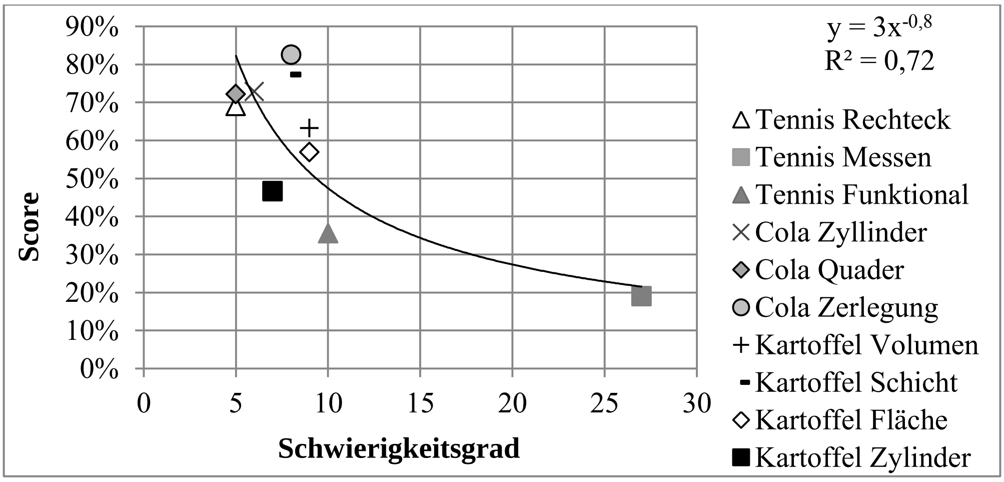



**Abb.3: Score der Lösungsansätze in Abhängigkeit des theoretischen Schwierigkeitsgrads**

## Ausblick

Die bisher ausgewerteten Aufgaben geben Grund zur Annahme einer guten Anwendbarkeit des Denkstrukturmodells. Die theoretische Aufgabenschwierigkeit lässt sich in Übereinstimmung mit dem Score in eine auf- bzw. absteigende Reihenfolge bringen. D.h. je leichter die Aufgabe theoretisch ist, desto besser wird sie von den Schülerinnen und Schülern gelöst. Die Auswertung der letzten 3 Modellierungsaufgaben bleibt abzuwarten. Zusammenfassend ermöglichen Denkstrukturen einen tieferen Einblick in die Aufgabe, ermöglichen einen gezielteren Einsatz und schaffen einen Orientierungsrahmen.

## Literaturverzeichnis


Breidenbach, W. (1969). *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen. Band 1 - Rechnen.* Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., et al. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In M. Prenzel, & L. Allolio-Näcke, *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule* (S. 54-82). Münster: Waxmann.

Schmidt, B. (2010). *Modellieren in der Schulpraxis : Beweggründe und Hindernisse aus Lehrersicht.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Sweller, J. (2010). Cognitive Load Theory: Recent Theoretical Advances. In J. L. Plass, R. Moreno, & R. Brünken, *Cognitive Load Theory* (S. 29-47). Cambridge: Cambridge University Press.

Verena REMBOWSKI, Saarbrücken

# Begriffsbilder und -konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel?

## 0. Begriffsklärung

Ein Beitrag zur Begriffsbildung bedarf eines Vokabulars zum Thema, das es erlaubt, sinnhaltig darüber zu kommunizieren. Begriff wird dabei unterschieden von Bezeichner, also dem Begriffsnamen oder -wort, und von Objekt, also einer konkreten Darstellung des Begriffs in (s)einem Anwendungskontext. Die Relationen zwischen Begriff und Bezeichner werden durch Bezeichnung und Bedeutung beschrieben, jene zwischen Begriff und Objekt durch Konkretisierung und Abstrahierung. Zusammenfassend wird dies üblicherweise in einem semiotischen Dreieck dargestellt (Abbildung 1).

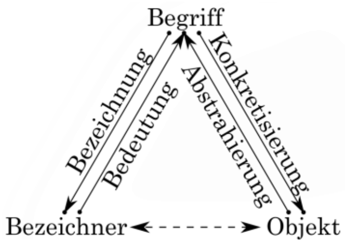



**Abbildung 1:** Semiotisches Dreieck

## 1. Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck und das semiotische Dreiecksprisma

Die Beziehungen zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt sind allerdings in vielen Fällen nicht so eineindeutig, wie durch das semiotische Dreieck suggeriert wird. Insgesamt resultieren die Mehrdeutigkeiten daraus, dass jeweils derselbe Begriff, Bezeichner oder dasselbe Objekt, beziehungsweise zwei oder alle drei Komponenten, Bestanteil mehrerer semiotischer Dreiecke sind, die sich überlagern.

Die sich überlagernden und dabei wechselwirkenden semiotischen Dreiecke sollen als Begriffsfeld bezeichnet werden. Das Begriffsfeld kann in Form des semiotischen Dreiecksprismas, an dessen Ecken mehrere, hier der Übersichtlichkeit wegen jeweils zwei Begriffe, Bezeichner und Objekte stehen, modelliert und visualisiert werden (Abbildung 2, nächste Seite).

## 2. Begriffsbild und Begriffskonvention im Begriffsfeld

Das durch einen semiotischen Blickwinkel entstandene Begriffsfeld kann mit seinen verschiedenen Mehrdeutigkeiten Begriffsvorstellungen von Lernenden beschreiben, wobei dort nicht immer alle in dem Dreiecksprisma zu

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 963–966). Münster: WTM-Verlag

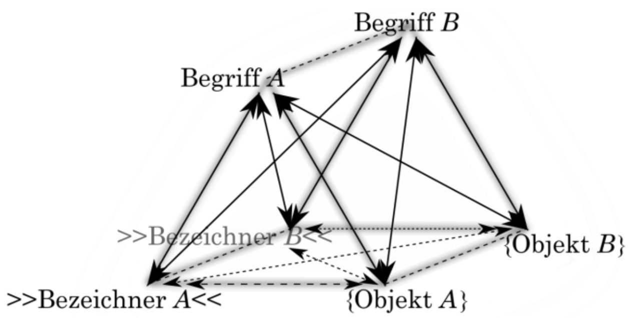



**Abbildung 2:** Begriffsfeld in Form des semiotischen Dreiecksprismas [1]

findenden semiotischen Dreiecke aktiv sind, und die Beziehungen zwischen den Ecken weniger ausgeprägt sind. Aus der Sicht der Fachdidaktik bleiben diese Begriffsvorstellungen allerdings in Beziehung zu einer fachmathematischen Definition der Begriffe zu setzen. Dazu habe ich auf Tall und Vinners Concept Image und Concept Definition, sowie, um diese beiden Begriffe zu präzisieren, auf Vorläufer dieser in Philosophie (bei Kant, Frege, Cassirer und Wittgenstein) und Psychologie (bei Piaget, Bruner, Goodnow & Austin sowie Rosch), und auch auf Arbeiten aus der Fachmathematik stammender Autoren (Poincaré, Hadamard, Wittenberg und Freudenthal) zurückgegriffen (siehe hierzu: Rembowski 2014a). Schließlich lassen sich die Begriffstypen unter den von mir mit >>Begriffsbild<< und >>Begriffskonvention<< bezeichneten Begriffen zusammenfassen. >>Begriffsbild<< greift dabei zurück auf den Bezeichner von Tall und Vinner, >>Begriffskonvention<< unterstreicht, dass der fachmathematische Begriff intersubjektiv ist und damit konventionalen Charakter hat. Für die beiden Begriffe gilt schließlich:

| >>Begriffsbild<< | >>Begriffskonvention<< |
|---|---|
| subjektiv, intuitiv | intersubjektiv |
| synthetisch, induktiv gebildet | analytisch, deduktiv gebildet |
| gebunden an Bezeichner und konkrete Objekte | unabhängig von Bezeichner und konkreten Objekten |
| unscharf | eindeutig (in Oberklasse und spezifischen Merkmalen) |
| kann Handlungen beinhalten, kann affektiv geprägt sein | blendet den Menschen aus |
| unbegrenzt, sich ständig in Entwicklung befindend | klar begrenzt |

[1] Bezeichner sollen nun in spitzen Klammern, Objekte in Mengenklammern stehen. Außerdem werden zwei entgegengesetzte Pfeile zu einem Doppelpfeil verschmolzen.

Begriffsbild und Begriffskonvention lassen sich nun im Begriffsfeld lokalisieren. Das Begriffsbild enthält ein durch unklare Beziehungen zu charakterisierendes Begriffsfeld, die Begriffskonvention ist eine ausformulierte Zuordnung des Begriffs zu Bezeichner und Objekt (Abbildung 3).

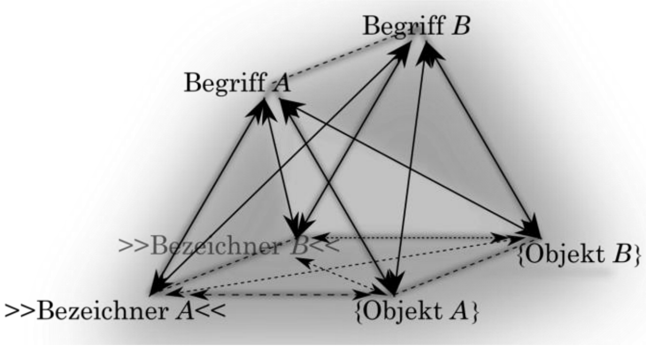



**Abbildung 3:** Begriffsbild und Begriffskonvention – hell hervorgehoben dargestellt – im Begriffsfeld

## 3. Begriffsbild und Begriffskonvention vs. Grundvorstellungen

Begriffsbildung darf allerdings nicht ausschließlich auf Definitionen beruhen, vielmehr muss zwischen Begriffsbild und Begriffskonvention vermittelt werden. Die vermittelnde Rolle können in der Mathematikdidaktik Grundvorstellungen übernehmen. Um zu klären, was Grundvorstellungen sind/sein sollen, habe ich vor allem auf Arbeiten von BENDER und VOM HOFE zurückgegriffen (siehe hierzu: Rembowski 2014b). Insgesamt sollen Grundvorstellungen intersubjektiven, normativen Charakter haben und auf einer didaktischen Reflexion basieren. Für Lernende sollen sie somit auf im Mathematikunterricht vermittelten Denk- und Handlungsmustern beruhen, und sich zu einem System mentaler mathematischer Modelle zusammenfügen. Grundvorstellungen sollen dabei vielseitige Darstellungen unterschiedlicher Facetten des Begriffsinhalts und gegebenenfalls des Spannungsfelds unterschiedlicher Konkretisierungen sein und diese reflektieren.

## 4. Der Würfel

Zu dem als >>Würfel<< bezeichneten elementargeometrischen Begriff gehört zunächst ein eindeutiges semiotisches Dreieck (Abbildung 4).

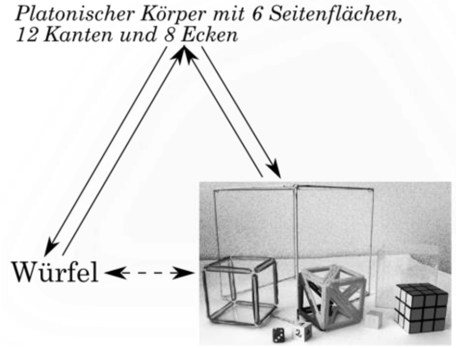



**Abbildung 4:** Würfel im semiotischen Dreieck

Die verschiedenen in 1. angesprochenen Mehrdeutigkeiten lassen sich allerdings vollständig auf das Beispiel des Würfels übertragen.[2] Eine empirische Erhebung in Form der Beantwortung einer offenen Frage in sechsten Klassen an Gesamtschulen hat gezeigt, dass sich viele der Mehrdeutigkeiten tatsächlich im Begriffsverständnis von Lernenden widerspiegeln – es finden sich in wechselnder Zusammenstellung mathematische und alltägliche Begriffe, Bezeichner und Objekte. Insbesondere fällt auf, dass vor allem Begriffe und Objekte mathematisch und alltäglich aufgefasst werden, sowie dass Begriffe und Objekte sehr stark miteinander verwoben sind.

Als Instrument, solche Mehrdeutigkeiten im Begriffsbild und auch Fehlvorstellungen zu nivellieren, können Grundvorstellungen dienen. Grundvorstellungen für den Würfel als Objektbegriff lassen sich dabei formulieren, wenn die verschiedenen Aspekte der Begriffsbildung, die nach VOM HOFE (1995) durch die Grundvorstellungsidee charakterisiert werden, auf den Würfel bezogen werden. So können als Sach- oder Handlungszusammenhang bzw. Handlungsvorstellung des Würfels beispielsweise Aspekte des Gebrauchs von Würfeln im Alltag, Arten der Herstellung von Würfeln und mögliche Operationen mit dem Würfel thematisiert und reflektiert werden. Genannte Punkte werden auch bei der Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit und dem Modellieren von Sachproblemen wieder relevant, visuelle Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen“ dienen bei geometrischen Objektbegriffen wie dem Würfel allerdings mehr einer prototypischen Begriffsbildung als dem Aufbau von Grundvorstellungen.

Ein Blick in das Schulbuch Mathe Live 5 (Kliemann 2006), mit welchen befragte Lernende gearbeitet haben, zeigt schließlich, dass dort nur die wenigsten, für den Aufbau von Grundvorstellungen zu Würfel relevanten Aspekte, thematisiert sind. Das Schulbuch kann damit für Mehrdeutigkeiten und Unschärfe im Begriffsbild mitverantwortlich gemacht werden.

## Literatur

Eine genaue Auflistung der verwendeten Literatur findet sich in:

Rembowski, V. (2014a) „Concept Image und Concept Definition der Mathematikdidaktik von „Concept Image and Concept Definition in Mathematics“. In U. Kortenkamp & A. Lambert (Hrsg.): *Verfügbare digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht richtig nutzen.* (im Druck). Hildesheim: Franzbecker.

Rembowski, V. (2014b) „Begriffsbilder und -konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel?“ In A. Filler, A. Lambert & M. Ludwig (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen.* (im Druck). Stuttgart: Springer.

[2] Dieser Begriff wurde hier gewählt, da er sowohl im Alltag verwendet wird als beispielsweise auch stochastischen Inhalt haben kann, und somit besonders gehaltvoll ist.

Timo REUTER, Landau

# Problemhaltige Textaufgaben – welche Repräsentation hilft Grundschülern? Tabellen und Zeichnungen im Vergleich

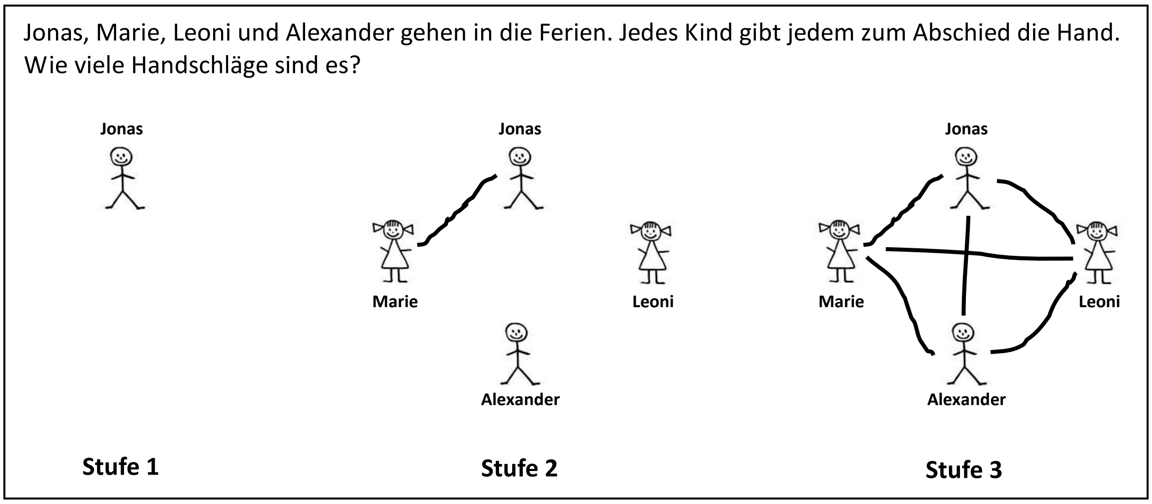
Sowohl Problemlösen als auch das Darstellen mathematischer Inhalte zählen laut Bildungsstandards für die Primarstufe zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die am Ende der vierten Jahrgangsstufe den Schülerinnen und Schülern vertraut sein sollen. Die Beschäftigung mit problemhaltigen Textaufgaben im Unterricht berührt beide Kompetenzbereiche und eignet sich daher für die Vermittlung und Übung beider Kompetenzen. Problemhaltige Textaufgaben zeichnen sich u.a. dadurch aus, dass sich der Lösungsweg nicht auf einen Blick erschließt, die mathematische Grundstruktur zunächst erschlossen, entfaltet und verstanden werden muss und häufig mehrere Aufgabenbedingungen bei der Planung und Beschreitung des Lösungswegs bedacht und verarbeitet werden müssen (Rasch, 2001, S. 26). Einfache Verrechnungsstrategien der im Aufgabentext gegebenen Zahlen führen nicht zum Erfolg. Vielmehr muss der Problemlöser ein adäquates mentales Modell der im Aufgabentext beschriebenen Situation konstruieren, ein mathematisches Modell aufstellen, dieses ausführen und das Ergebnis auf die Situation des Aufgabentexts zurückbeziehen (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Um diesen komplexen Anforderungen begegnen zu können, benötigen Grundschüler die Fähigkeit, das Problem adäquat zu repräsentieren. Dabei können verschiedene Darstellungsformen wie Tabellen oder Zeichnungen verwendet werden, die dann als kognitive Werkzeuge zur Lösungsfindung dienen. Externe Repräsentationen entlasten das Arbeitsgedächtnis und ermöglichen in einem dynamisch iterativen Prozess einen ständigen Abgleich des flüchtigen mentalen Modells der Aufgabensituation mit den externalisierten Informationen (Schnotz, Baadte, Müller & Rasch, 2011). Empirische Untersuchungen zu problemhaltigen Textaufgaben zeigen aber, dass (Grund)Schüler/innen häufig keine externen Repräsentationen erstellen (Elia, Van den Heuvel-Panhuizen & Kolovou, 2009; Groß, 2013; Hohn, 2012). Ein Training zur Verwendung vorgefertigter Repräsentationen, wie z.B. Zeichnungen, die Teil-Ganzes-Beziehungen abbilden, kann hingegen den Lösungserfolg – zumindest bei Routine-Arithmetik-Aufgaben – steigern (Bovenmeyr Lewis, 1989; Ng & Lee, 2009; Willis & Fuson, 1988).

In der hier skizzierten empirischen Studie sollen vorgefertigte Repräsentationen als kognitive Hilfsmittel von Viertklässlern bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben untersucht werden. Es werden zwei unterschiedliche Repräsentationsformate verwendet: Tabelle und Zeichnung.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 967–970). Münster: WTM-Verlag

Beide gelten als heuristische Hilfsmittel im mathematischen Problemlöseprozess (Bruder & Collet, 2011). Die Studie verfolgt zwei zentrale Fragestellungen. Erstens: Wie beeinflusst das Angebot vorgefertigter Tabellen und Zeichnungen die Performance der Schüler/innen beim Lösen der Aufgaben (*Performance-Fragen*)? Zweitens: Wirkt sich die Auseinandersetzung mit vorgefertigten Tabellen und Zeichnungen auch auf das eigenständige Erstellen externer Repräsentationen aus (*Transfer-Fragen*)? Hinsichtlich der *Performance-Fragen* soll etwa beleuchtet werden, ob die Schüler/innen die vorgefertigten Repräsentationen nutzen, inwiefern diese den Lösungsprozess erleichtern und ob – je nach Aufgaben- und Schülermerkmalen – die Tabelle oder die Zeichnung zur besseren Performance führt. Nach dem integrierten Modell des Text- und Bildverstehens von Schnotz (2005) wird eine Zeichnung über den bildlichen Kanal verarbeitet, der direkt zu dem für den Lösungserfolg bedeutsamen mentalen Modell führt. Vor allem Schüler/innen mit Schwierigkeiten beim Textverständnis dürften bei ihrer Konstruktion eines mentalen Modells von einer bildlichen Quelle neben der textlichen Information profitieren (Schnotz, 2005, S. 62). Die Tabelle hingegen dürfte für solche Schüler/innen hilfreich sein, die bereits mit der textlichen Information ein adäquates mentales Modell bilden können, da sie ein strukturiertes und systematisches Lösungsvorgehen ermöglicht. Wie aber müssen die vorgegebenen Tabellen und Zeichnungen aussehen? Die skizzierte Studie möchte auch die Frage beantworten, welcher Grad der bereits vorgenommenen Ausarbeitung (siehe Abbildung 1) je nach Aufgaben- und Schülermerkmalen zur besten Performance führt.

**Abbildung 1:** Zeichnungen zur Kombinatorik-Aufgabe




Auf der einen Seite zeigen Untersuchungen, dass eine bloße Darbietung nicht immer ausreicht, um die notwendigen kognitiven und metakognitiven Prozesse zur Bildung eines adäquaten mentalen Modells sicher zu stellen (Van Meter & Garner, 2005). Auf der anderen Seite können selbstgenerierte Repräsentationen nur dann hilfreich sein, wenn sie die mathematische Struktur der Aufgabe adäquat abbilden. Die *Transfer-Fragen* zielen darauf, ob Schüler/innen nach mehrfacher Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben mithilfe von vorgefertigten Repräsentationen häufiger selbst externe Repräsentationen erstellen und welche Qualität diese in Hinblick auf die Lösungsunterstützung haben.

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wird eine experimentelle Studie mit rund 200 Viertklässlern durchgeführt. Die Schüler/innen bearbeiten im Klassenraum zu vier Messzeitpunkten im Abstand von ca. drei Wochen jeweils ein Aufgabenheft mit einer Vergleichs-, einer Bewegungs- und einer Kombinatorik-Aufgabe (Rasch, 2001). Die vier Aufgaben eines Aufgabentyps haben die exakt gleiche mathematische Struktur, werden aber hinsichtlich der Oberflächenmerkmale geändert. Die Reihenfolge der drei Aufgaben im Heft wird systematisch variiert. Die Aufgaben in Heft 1 (Messzeitpunkt 1) und Heft 4 (Messzeitpunkt 4) werden ohne vorgegebene Repräsentationen dargeboten. Die Aufgaben in Heft 2 (Messzeitpunkt 2) und Heft 3 (Messzeitpunkt 3) werden jeweils mit einer Zeichnungen bzw. einer Tabelle und dem schriftlichen Hinweis „Du kannst die Zeichnung/Tabelle nutzen, um die Lösung zu finden“ präsentiert. Um Reihenfolgeeffekte zu kontrollieren, erhält die Hälfte der Teilnehmer in Heft 2 Zeichnungen und in Heft 3 Tabellen. Bei der anderen Hälfte der Teilnehmer ist die Reihenfolge umgekehrt. Die erste Aufgabe in Heft 2 und Heft 3 wird jeweils von einer Zeichnung bzw. Tabelle in hohem Ausarbeitungsgrad begleitet. Die zweite Aufgabe wird mit der Repräsentation in mittlerem Ausarbeitungsgrad präsentiert und die dritte Aufgabe schließlich mit dem geringsten Grad der bereits vorgenommenen Ausarbeitung. Eine Kontrollgruppe erhält durchgehend Aufgabenhefte ohne vorgegebene Repräsentationen. Der Vergleich der Ergebnisse aus den Messzeitpunkten 1, 2 und 3 erlaubt die Beantwortung der *Performance-Fragen*. Um die *Transfer-Fragen* zu beantworten, wird Messzeitpunkt 1 als Vorher- und Messzeitpunkt 4 als Nachher-Messung herangezogen. Die Hefte 2 und 3 sind in dieser Betrachtung das Interventionsmaterial.

Die Ergebnisse der Untersuchung lassen praxisnahe Hinweise für Lehrkräfte erwarten, welches Hilfsmittel je nach Aufgaben- und Schülermerkmalen mehr oder weniger geeignet erscheint, um allen Kindern Zugang zu problemhaltigen Textaufgaben zu ermöglichen und damit das vorhandene kognitive Potenzial der Kinder im Unterricht zu nutzen. Sollten sich bestimmte Tabellen und Zeichnungen für einen Aufgabentyp bei einer Mehrheit der

Schüler/innen als nützlich erweisen, wäre ein solches Ergebnis auch für die Gestaltung von Schulbüchern interessant.

## Literatur


Bovenmeyr Lewis, A. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81* (4), 521–531.

Bruder, R. and Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor Praxis.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 41* (5), 605–618.

Groß, J. (2013). *Analyse von Lösungsprozessen beim Bearbeiten problemhaltiger Textaufgaben durch Grundschulkinder.* Dissertation. Universität Koblenz-Landau, Landau. Institut für Mathematik.

Hohn, K. (2012). *Gegeben, gesucht, Lösung? Selbstgenerierte Repräsentationen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben.* Dissertation. Koblenz-Landau, Landau. Fachbereich Psychologie.

Ng, E. L. & Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 40* (3), 282–313.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Eine Studie zu Herangehensweisen von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert.* Hildesheim: Franzbecker.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In: Richard E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (S. 49-69). Cambridge, U.K, New York: Cambridge University Press.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A. & Rasch, R. (2011). Kreatives Problemlösen mit bildlichen und beschreibenden Repräsentationen. In: K. Sachs-Hombach und R. Totzke (Hrsg.), *Bilder - Sehen - Denken. Zum Verhältnis von begrifflichen-philosophischen und empirisch-psychologischen Ansätzen in der bildwissenschaftlichen Forschung* (S. 204-252). Köln: Herbert von Halem Verlag.

Van Meter, P. & Garner, J. (2005). The Promise and Practice of Learner-Generated Drawing: Literature Review and Synthesis. *Educ Psychol Rev, 17* (4), 285–325.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, Exton, PA: Swets & Zeitlinger Publishers.

Willis, G. B. & Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80* (2), 192–201.

Sebastian REZAT, Paderborn

# Lehrerhandbücher als Instrumente der Unterrichtsplanung in der Sekundarstufe – Eine Fallstudie

Studien zur Unterrichtsvorbereitung von Mathematiklehrkräften zeichnen bezüglich der Rolle des Schulbuches ein homogenes Bild: „Das Lehrbuch hat die zentrale Rolle in der Unterrichtsplanung inne, und zwar nicht allein das derzeit eingeführte Lehrbuch, sondern daneben auch andere in größerer Zahl" (Bromme & Hömberg, 1981). Diese Studien sind mittlerweile über 30 Jahre alt und stammen damit aus einer Zeit, in der Computer und Internet noch keine üblichen Ressourcen waren. Ausgerechnet vor dem Hintergrund der heutigen Omnipräsenz digitaler Ressourcen zeichnet sich derzeit eine neue Entwicklung auf den Mathematikschulbuchmarkt ab. Nach einer Periode, in der Lehrerhandbücher zu Mathematikschulbüchern der Sekundarstufe im wesentlichen Lösungshefte waren, wird zu dem neuen Mathematiklehrwerk *mathewerkstatt* (Barzel et al. 2012) ein ausführliches Lehrerhandbuch angeboten, das durch ein für die Sekundarstufe neues Konzept gekennzeichnet ist: Zu jeder Seite des Schulbuches werden im Lehrerhandbuch ausführliche didaktische und methodische Hinweise gegeben. Insbesondere vor dem Hintergrund der heutigen Omnipräsenz digitaler Ressourcen ist die Frage nach der Rolle des Schulbuchs und des zugehörigen Lehrerhandbuchs im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung grundsätzlich neu zu stellen. In Anbetracht der für die Sekundarstufe neuen Konzeption des Lehrerhandbuchs zur *mathewerkstatt* ist dabei nicht nur von Interesse, ob das Lehrerhandbuch im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung genutzt wird, sondern wie es zum Instrument (Rabardel, 2002) der Unterrichtsvorbereitung wird. Dieser Frage wurde im Rahmen einer explorativen Fallstudie mit zwei Fällen nachgegangen.

## Theoretischer Rahmen

Der instrumentelle Ansatz (Rabardel, 2002) bildet den theoretischen Rahmen der Studie. Ein Instrument ist Rabardel (2002, p. 86) zufolge „a composite entity made up of an artifact component (an artifact, a fraction of an artifact or a set of artifacts) and a scheme component (one or more utilization schemes, often linked to more general action schemes)". Das Instrument wird durch den Nutzer im Rahmen der Nutzung gebildet. Während der Nutzer das Artefakt (in diesem Fall das Lehrerhandbuch) für bestimmte Zwecke verwendet (Instrumentalisierung) wirken die Eigenschaften des Artefakts strukturierend auf die Bildung von Gebrauchsschemata durch das Subjekt ein (Instrumentierung). Gebrauchsschemata lassen sich im Sinne

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 971–974). Münster: WTM-Verlag

Vergnauds (1998) durch Konzepte und Theoreme (concepts-in-action / theorems-in-action) kennzeichnen, die das Schema steuern. In der Studie geht es darum den Prozess der instrumentellen Genese (Instrumentalisierung / Instrumentierung) des Lehrerhandbuchs durch die beiden Fälle näher zu analysieren. Für den Prozess der Instrumentierung ist eine genauere Kenntnis der Merkmale des Lehrerhandbuchs erforderlich.

## Kurzbeschreibung des Lehrerhandbuchs

Das Lehrerhandbuch der *mathewerkstatt* ist ebenso wie die meisten Mathematikschulbücher (vgl. Rezat, 2008) durch eine bausteinartige Struktur gekennzeichnet. Die Informationen zu jeder Unterrichtseinheit gliedern sich zunächst in eine tabellarische Übersicht über die Struktur der Einheit, einen Intensivzugriff und einen Seitenzugriff. Im Intensivzugriff werden die zentralen Fragestellungen und didaktischen Ansätze der Einheit zusammenfassend dargestellt. Der Seitenzugriff besteht jeweils aus einer Doppelseite. Auf der rechten Seite ist jeweils die Schulbuchseite abgebildet und punktuell kommentiert. Die linke Seite bezieht sich jeweils ausschließlich auf die rechts abgebildete Schulbuchseite und gliedert sich nochmals in einen Schnellzugriff, der stichpunktartig über Ziele, Bezüge zu anderen Teilen des Lehrwerkes, vorzubereitendes Material informiert und einen Umsetzungsvorschlag enthält. Im Intensivzugriff werden darüber hinaus Umsetzungshinweise und –alternativen sowie Informationen zum Erwartungshorizont, zu Lernwegen, Diagnose und Differenzierung angeboten. Gerade diese bausteinartige Struktur bietet vielfältige Möglichkeiten der Instrumentierung durch das Lehrerhandbuch, da Lehrkräfte hier entsprechend den eigenen Zwecken gezielt auf bestimmte Bausteine zugreifen können.

## Design der Studie

Bei den beiden untersuchten Fällen handelt es sich um zwei Lehrkräfte – genannt Frau B. und Herr B. – einer Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen (Kreis Warendorf). Die Schule ist eine gebundene Ganztagsschule. Das Alter von Frau B. liegt zwischen 40 und 50 Jahren und ihre Berufserfahrung als Lehrerin zwischen 5 und 10 Jahren. Herrn B.s Alter liegt unter 30 Jahren und seine Berufserfahrung als Lehrer zwischen 0 und 5 Jahren. Beide Lehrenden wurden gebeten im Zusammenhang mit der Unterrichtseinheit „Brüche verstehen“ im Lehrerhandbuch im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung genutzte Ausschnitte mit einem Textmarker zu markieren und nach jeder Unterrichtvorbereitung einen Online-Fragebogen auszufüllen. Der Online-Fragebogen umfasste Fragen nach Thema, Zielen und zentralen didaktischen Prinzipien der geplanten Unterrichtsstunde. Darüber hinaus wurde nach verwendeten Ressourcen (Schulbuch, Lehrerhandbuch, Internet, Fachbücher und –zeitschriften, sonstigem ergänzendem Material, Erfahrung und Gesprächen mit Kollegen) im Rahmen der Unterrichtsplanung, Gründen für die Verwendung bzw. bewusste Nicht-Verwendung bestimmter Schulbuchausschnitte und nach einer Einschätzung der verwendeten Lehrerhandbuchausschnitte hinsichtlich ihrer Nützlichkeit und ihrer subjektiven Relevanz gefragt. Die Dauer der Unterrichtseinheit (und damit auch die des Erhebungszeitraums) betrug 6 Wochen. Im Anschluss daran wurde mit beiden Lehrkräften ein Interview geführt, das teilweise im Sinne des stimulated recall von markierten Ausschnitten oder Angaben im Fragebogen ausging, um hier ein besseres Verständnis zu entwickeln. Parallel wurde während des gesamten Erhebungszeitraums der Einsatz und die Vermittlung des Schulbuches im Unterricht beobachtet und dokumentiert.

## Ergebnisse

Bei beiden Lehrkräften zeigt sich, dass in allen dokumentierten Unterrichtsvorbereitungen Schulbuch und Lehrerhandbuch als sehr relevante bzw. relevante Ressourcen eingeschätzt werden. Internet, Fachbücher und Fachzeitschriften sind bei beiden tendenziell die am wenigsten relevanten bzw. de facto nicht genutzten Ressourcen. Bei den restlichen Ressourcen zeigt sich ein gemischtes Bild, sodass deren Relevanz von der jeweiligen Stunde abhängig zu sein scheint. Die Bedeutung des Lehrerhandbuchs ist damit größer als in den Studien der 1980er und 1990er Jahre belegt, aber nicht die des Internets oder anderer digitaler Ressourcen.

Auch wenn das Markierverhalten beider Lehrkräfte unterschiedlich ist (Herr B. markiert alles, was er gelesen hat, Frau B. das, was ihr wichtig erscheint) deuten die Markierungen bei beiden Lehrkräften darauf hin, dass das Lehrerhandbuch intensiv und nahezu vollständig im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung gelesen wurde. Aus den Interviewdaten ist dabei rekonstruierbar, dass Herr B. dabei folgendes Gebrauchsschema der Strukturbausteine des Seitenzugriffs entwickelt hat:

- Die Schulbuch mit Hinweisen nutzt er immer (Kommentar: „Das funktioniert noch in der Stunde“).
- Den Schnellzugriff liest er fast immer; die Ziele zur Vergewisserung über den mathematischen Gegenstand. Erscheint ihm der Umsetzungsvorschlag klar, dann übernimmt er ihn. Wenn er Probleme im Verlaufsplan erkennt (theorem-in-action), dann liest er den Intensivzugriff, insbesondere die Umsetzungshinweise und Alternativen und die Anregungen zur Differenzierung.
- Die entsprechende Doppelseite hat er im Unterricht jeweils geöffnet.

Dieses Gebrauchsschema spiegelt, dass Herr B. durch die einzelnen Strukturbausteine des Lehrerhandbuchs und ihre Funktionen instrumentiert ist. Bei Frau B. lässt sich demgegenüber keine ausgeprägte Nutzung einzelner Strukturbausteine feststellen. Ihr Gebrauchsschema ist vielmehr von zwei concepts-in-action bestimmt, die nicht unmittelbar durch das Lehrerhandbuch induziert werden:

- Die zur Verfügung stehende Zeit (Die Implementation der *mathewerkstatt* erfordert (zu) viel Zeit).
- Die Frage der Passung zur Lerngruppe.

Die Frage „Wo kann ich kürzen?“ scheint bei ihr beim Lesen des Lehrerhandbuchs grundsätzlich relevant zu sein. Abweichungen von den Vorschlägen im Lehrerhandbuch begründet Frau B. häufig mit der mangelnden Passung zur Lerngruppe. An verschiedenen Stellen wird deutlich, dass sie in ihrer Nutzung des Lehrerhandbuchs nicht so deutlich wie Herr B. durch die einzelnen Strukturbausteine instrumentiert ist. Vielmehr scheint sie das aus dem Lehrerhandbuch zu wählen, was ihr wesentlich erscheint. Das zeigt sich sowohl in ihrer Art zu markieren als auch in ihren Antworten auf die Frage im Onlinefragebogen, was für sie besonders relevant war. Hier bezieht sie sich nicht auf bestimmte Strukturbausteine, sondern auf inhaltliche Aspekte wie z.B. „Impulsfragen“ und „Veranschaulichungen“, die keinen eigenen Strukturbaustein ausmachen.

Auffallend ist bei beiden Fällen die intensive Nutzung des Lehrerhandbuchs, die jedoch jeweils mit einer unterschiedlichen Instrumentierung einhergeht. Inwiefern es sich bei diesen beiden Fällen um typische Fälle handelt, kann aufgrund der Datengrundlage und des Fehlens aktuellerer Vergleichsdaten nicht gesagt werden.

## Literatur


Barzel, B.; Hußmann, S.; Leuders, T.; Prediger, S. (Hrsg.) (2012). *Mathewerkstatt 5.* Berlin: Cornelsen.

Bromme, R., & Hömberg, E. (1981). *Die andere Hälfte des Arbeitstages - Interviews mit Mathematiklehrern über alltägliche Unterrichtsvorbereitung*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Rabardel, P. (2002). *People and Technology: a cognitive approach to contemporary instruments.* Retrieved (23.03.2014) from http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1

Rezat, S. (2008). Die Struktur von Mathematikschulbüchern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(1), 46-67.

Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(2), 167-181.

Michael RIEß, Münster

# Wie konstruieren Lernende Wissen mit Hilfe digitaler Werkzeuge?

Der Einsatz digitaler Werkzeuge beeinflusst den Mathematikunterricht auf vielen Ebenen. Lerman (2013, S.41) stellt heraus, dass sich die Forschung in diesem Bereich jedoch meist auf die Einsatzmöglichkeiten, die Unterrichtsplanung und praktische Umsetzung richtet. Die potenziell tiefgreifenden Veränderungen des Lernens von Mathematik und der gelernten Mathematik wurden dabei noch nicht in ausreichendem Maße tiefergehend analysiert. In diesem Artikel sollen zunächst die theoretische Fundierung der Fragestellung dargestellt und eine Studie zur explorativen Untersuchung mit ersten Beobachtungen vorgestellt werden.

## Theoretische Überlegungen zur Konstruktion von mathematischem Wissen mit digitalen Werkzeugen

In der ICMI-Study zum Einsatz digitaler Werkzeuge schlagen Olive und Makar (2010) vor, für die Nutzung von Werkzeugen jeglicher Art das klassische didaktische Dreieck aus „Schüler", „Lehrer" und „Mathematik" um eine Ecke mit der Bezeichnung „Technologie" zu einem Tetraeder zu ergänzen (siehe Abb.1). Empirische und theoretische Resultate ließen sich dann auf den Wechselwirkungsseiten dieses Körpers darstellen.

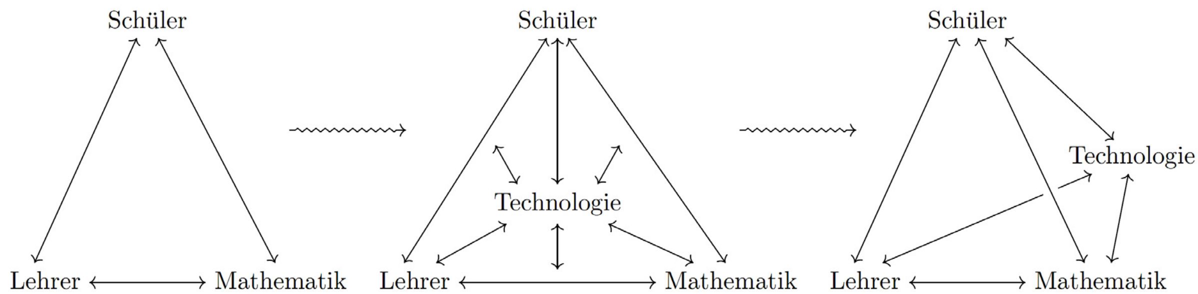



**Abb.1: Der Weg zum didaktischen Tetraeder nach Olive & Makar (2010)**

Die von Lerman (2013) geäußerte Kritik kann in diesem Modell als zu geringen Beachtung des Dreiecks „Schüler"–„Technologie"–„Mathematik" umformuliert werden. In diesem Dreieck ist die durch das (digitale) Werkzeug vermittelte Beziehung der Lernenden zur Mathematik verortet. Orientiert an Wygotski finden nach Beguin und Rabardel (2000) in diesem Dreieck vielfältige Wechselwirkungen statt, die als instrumentelle Genese bezeichnet werden (siehe Abb.2). Instrumentelle Genese besteht aus zwei Aspekten: Instrumentierung ist das Lernen von Benutzungsschemata für das Arbeiten mit dem Artefakt und Instrumentalisierung die Modifikation des

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 975–978). Münster: WTM-Verlag

Artefakts, die sich sowohl in der Sicht der Schüler auf das als auch in einer stofflichen Veränderung des Artefakts zeigen kann.

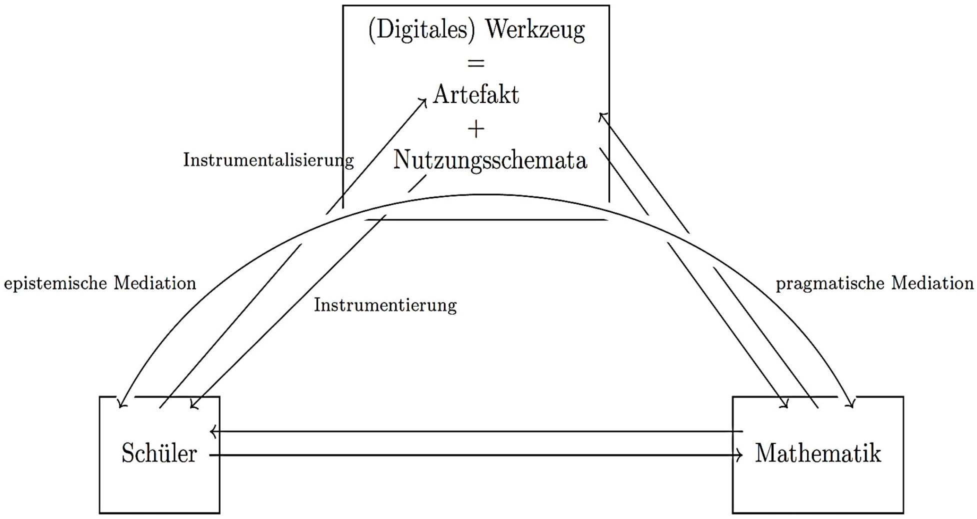



**Abb.2: Instrumentelle Genese und Mediation im Klassenraum nach Beguin & Rabardel (2000)**

Weiterhin wirken die Schüler über das (digitale) Werkzeug auf die Mathematik (pragmatische Mediation) und erfahren diese durch eben dieses (epistemische Mediation). Diese Wechselwirkungen zeigen, dass das Einfügen eines (digitalen) Werkzeugs in den Lernprozess potenziell große Auswirkungen auf das Lernen von Mathematik hat.

Ebenfalls aufbauend auf Wygotski, stellen Bartolini Bussi und Mariotti (2002) fest, dass (digitale) Werkzeuge durch semiotische Mediation das Konzept der Lernenden von Mathematik beeinflussen können und dies auch geschichtlich mehrfach getan haben. Sie argumentieren, dass Zeichen, die durch das konkrete Lösen von Problemen (mit Werkzeugen) entstehen, auch Einzug in die allgemeine mathematische Theorie der Schüler finden.

Diese semiotische Mediation unterscheidet sich von der in Steinbrings Theorie (2005). Er führt aus, dass mathematisches Wissen im Zusammenspiel von Referenzkontexten, Zeichen und abstrakten Konzepten entsteht. Die Interaktion der ersten beiden bildet ein Konzept, das über andere Referenzkontexte oder Zeichen angepasst wird. Auf diese Weise stehen diese drei Elemente immer im Gleichgewicht. Werkzeugeinsatz beeinflusst sowohl die Referenzkontexte als auch die Zeichen, die verwendet werden und wird damit auch Einfluss auf das Konzept von Mathematik zeigen.

## Die Studie im Rahmen des Projekts CASI

Das Projekt CASI fand von Sommer 2009 bis 2011 in 5 Schulen (4 Gesamt- und eine Realschule) mit ca. 250 Projekt- und 120 Vergleichsschülern in NRW statt. Das Ziel war die Entwicklung, Erprobung und Erforschung von Unterrichtskonzepten mit einem Computeralgebra-Taschenrechner (CASIO ClassPad 330) für schwächere Lernende. Im Rahmen des Projekts wurden Leistungstests im Pre-Post-Follow-up Design durchgeführt, Einstellungen der Schüler durch Fragebögen gemessen, die tatsächliche Nutzung des Rechners über tabellarische Stundenprotokolle erfasst und qualitative Analysen von Aufgabenbearbeitungen vorgenommen.

Im Winter 2010, nach ca. eineinhalb Jahren des Unterrichts mit dem ClassPad wurden jeweils 6 Schülerpaare aus einer Projekt- und Vergleichsklasse, die von der gleichen Lehrerin unterrichtet wurden, bei der Bearbeitung von problemhaltigen Aufgaben im Bereich der quadratischen Funktionen videografiert. Die Schüler unterscheiden sich weder in den fachlichen Tests während des Projekts noch in ihren Einstellungen signifikant und hatten für die Aufgaben (theoretisch) unbegrenzte Bearbeitungszeit. Die so gewonnen Produkt- und Prozessdaten werden im Rahmen der qualitativen Inhaltsanalyse nach deduktiven und induktiven Kategorien analysiert.

## Erste Beobachtungen bei der Analyse der Produktdaten

Die vier zu bearbeitenden Aufgaben wurden am Gerüst der Übersetzungsfertigkeiten beim funktionalen Denken konstruiert. Jeweils zwei (eine für jede Übersetzungsrichtung) beziehen sich auf die Übersetzung zwischen Graph und Term sowie zwischen Graph und Realsituation. Die weiteren Übersetzungsfertigkeiten erwiesen sich in den Kompetenztests des Projekts entweder als zu schwer oder zu nahe an Routineaufgaben.

Bei den Aufgaben zu Übersetzungen von Graph zu Term und Sachsituation zeigen die zwei Gruppen keine bemerkenswerten Unterschiede, wenn auch die Streckfaktoren der Parabeln tendenziell besser von Projektschülern erkannt und berechnet wurden. Bei den beiden anderen Aufgaben können Auffälligkeiten beschrieben werden:

Während der Berechnung einer Verbrauchsprognose für Deodorant aus Messdaten zeigen die Projektschüler eine deutlich geringere Tendenz, direkt eine Parabel als mathematisches Modell anzunehmen. Außerdem gibt es häufiger Ansätze rechnerisch über Mittelwerte vorzugehen.

Die Lösungen der Aufgabe, die Änderung der Parabel $x^2$-px bei Variation von p zu beschreiben, sind bei sieben der 12 Schülerpaare sehr ähnlich: Es wurde entschieden, wie sich der Graph verändert und dies niedergeschrieben. Es gab weder Rechnungen noch Beispielszeichnungen vorher und auch die Aufforderung des Interviewers, Zahlen einzusetzen oder Beispiele zu zeichnen, führte nur zu kurzen Rechnungen und einer skizzenhaften Wiederholung der schriftlichen Lösung in graphischer Form. Diese Art der Lösung sei als „theoriegeleitetes Raten“ bezeichnet und kommt mit zwei Fällen bei den Projekt- und fünf Fällen bei den Vergleichsschülern vor.

## Diskussion und Ausblick

Die sowohl im Projekt CASI als auch in weiteren Projekten (z.B. M³ in Bayern) zum Einsatz digitaler Werkzeuge beobachtete erhöhte Vielfalt der Lösungen in Projektklassen kann auch in der Schülergruppe der Studie beobachtet werden. Gerade in der Aufgabe zum Deoverbrauch ist eine nicht direkt auf eine geschlossene Funktion hinarbeitende Bearbeitung auch zielführender und dem Problem angemessener.

Das Phänomen des „theoriegeleiten Ratens“ ist von besonderem Interesse. Trotz der Möglichkeit und Aufforderung des Interviewers zum experimentellen Arbeiten zeigten nur Schüler mit digitalen Werkzeugen dieses Verhalten, während die Kontrollgruppe sich auf Raten oder eingebildetes Wissen beschränkte. Der wissenschaftstheoretische Begriff der „theoriebelasteten Beobachtung“ scheint passend, da die Schüler der Kontrollgruppe trotz explizitem Hinweis auf diese Möglichkeit nicht in der Lage waren, die Parabelschar frei von vorherigen Annahmen zu untersuchen.

Aufgrund dieser Auffälligkeiten werden im nächsten Schritt die Lösungsprozesse der beiden angesprochenen Aufgaben ebenfalls analysiert, um die Unterschiede feiner herauszuarbeiten. Dies wird sowohl auf Basis der Darstellungsformen von Funktionen und Übersetzungen zwischen ihnen, aber auch durch Betrachtung von Problemlösephasen geschehen.

## Literatur


Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A. (2002). Semiotic Mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In English, L. et.al. (Hrsg.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition.* (S. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Beguin, P. & Rabardel, P. (2000). Designing for Instrument-mediated Activity. *Scandinavian Journal of Information Systems, 12,* 173-190.

Lerman, S. (2013). Technology, Mathematics and Activity Theory. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 20(1)*, 39-42.

Olive, J. & Makar, K. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. In Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (Hrsg.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain* (S. 133–177). Springer.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction.* Springer.

Roland RINK, Berlin

# Mit Audiodateien Schwierigkeiten beim Sachrechnen begegnen - Untersuchung mit Kindern mit Leseschwierigkeiten im vierten Schuljahr

Vergleichsuntersuchungen zeigen, dass Leistungen im Mathematikunterricht, speziell im Bereich des Sachrechnens, mit Leistungen im Deutschunterricht korrelieren. Und die jüngste IGLU-Studie (2011) hat gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler im Bereich des Sachrechnens zum Teil große Schwierigkeiten haben. Aber es gibt Stimmen, die den Aufbau solcher standardisierter, quantitativer Paper-and-Pencil-Tests kritisieren (vgl. van den Heuvel-Panhuizen & Peltenburg 2011). Ihr Hauptkritikpunkt dreht sich darum, dass keine Rückschlüsse auf die mathematischen Fähigkeiten von Kindern gezogen werden können, wenn sie aufgrund einer sprachlichen Barriere erst gar keinen Zugang zum mathematischen Inhalt einer (Sach-)Aufgabe finden (vgl. ebd.).

In diesem Zusammenhang stellen Heckmann, Vernay & Witzmann fest: „Viele Schülerinnen und Schüler – und durchaus nicht nur diejenigen mit Migrationshintergrund – können sich deshalb kein Bild vom Inhalt eines Textes machen, weil sie auf der sprachlichen Ebene scheitern." (Heckmann, Vernay & Witzmann 2007, S. 4).

Auch Schilcher & Madlindl fragen: „Doch was passiert, wenn die Lesekompetenz, die ein Sachtext erfordert, bei Kindern nicht vorhanden ist, obwohl sie das enthaltene mathematische Problem durchaus lösen könnten?" (Schilcher & Madlindl 2012, S. 26). Und sie führen weiter aus, dass es wichtig ist, die Bedeutung der Sprache für die Schulmathematik nicht zu unterschätzen, „…denn sonst besteht die Gefahr, dass man sprachliche, nicht mathematische Fähigkeiten abprüft." (Ebd. S. 27)

## Zur Bedeutung des Sachrechnens und der Sprache im Mathematikunterricht

In der Grundschule werden Aufgaben in Form von Sachaufgaben dargeboten, um anwendungsorientierte Situationen zu schaffen und lebensweltliche Erfahrungen aufzugreifen. Dadurch soll der Zugang zum arithmetischen Inhalt erleichtert werden. Und anders herum wird eine Sachaufgabe nur dann erfolgreich gelöst, wenn die Schülerinnen und Schüler die verwendeten Begriffe, Ausdrücke und sprachlichen Wendungen genau erfassen, und wenn es ihnen gelingt, ihre Beziehungen sowohl untereinander als auch zu ggf. anwendbaren Mitteln zu durchschauen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 979–982). Münster: WTM-Verlag

**Die Bedeutung der Sprache beim Lösen von Sachaufgaben**

Das Lösen von Sachaufgaben ist ein anspruchsvoller und komplexer kognitiver Prozess. In der Literatur werden zahlreiche Wissensbestände aufgezählt, die bemüht werden müssen, um Sachaufgaben erfolgreich zu lösen (vgl. bspw. Radatz & Lorenz 1993, S. 143). Unter anderem wird als wichtige Voraussetzung für das Lösen von Sachaufgaben genannt, dass ein „[…] sicheres, sinnerfassendes Lesenkönnen […]“ (Radatz & Lorenz 1993, S. 143) vorhanden sein muss. Nach meiner Überzeugung allerdings, die noch einen Schritt weitergeht, ist die letztgenannte Voraussetzung Grundlage allen Sachrechnens. In der Literatur wird mehrfach beschrieben, dass Sachaufgaben, obwohl sie die gleiche arithmetische Struktur aufweisen wie reine Rechenaufgaben, um bis zu 30% schlechter gelöst werden (vgl. z. B. Reusser 1997). Wie oben beschrieben liegt der Grund hierfür in der Hürde, eine durch Sprache vermittelte Problemsituation in ein Sach- oder Situationsmodell überführen zu müssen.

Franke & Ruwisch (2011) nennen in diesem Zusammenhang mehrere Aufgabenmerkmale, die aufgrund ihrer Komplexität und in ihrem Zusammenspiel die oben beschriebene Übertragung einer Problemsituation auf das mathematische Modell erschweren. Dabei heben sie auch die Bedeutung der Sprache hervor: *Sprachlich-syntaktische Faktoren*; Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe variiert, wenn Angaben direkt oder indirekt gemacht und die notwendigen Daten in lösungskonformer oder lösungsdeformer Reihenfolge angegeben werden, oder wenn die Komplexität des Textes den intendierten Sinn verstellt.

Schilcher & Madlindl (2012) differenzieren diesen Punkt weiter aus. Sie benennen typische, durch die Sprache verursachte Lesebarrieren, die den Zugang zum mathematischen Kern, bzw. das Übertragen der Sachsituation auf das mathematische Modell, erschweren: Lange, seltene und abstrakte Wörter; Komplexe Satzstrukturen; Passivkonstruktionen. Die dadurch entstehenden Fehler sind beispielsweise *Identifikationsfehler* (z. B. Anwenden der falschen Rechenoperation) oder *fehlerhafte* Verkürzungen (z. B. Vernachlässigung relevanter Daten).

Ein Text kann also so verfasst sein, dass er aufgrund der verwendeten Wörter oder der gewählten Satzkonstruktionen schwer für ein Kind zu verstehen ist.

Eine andere Ursache wird in der Literatur aber nicht diskutiert. Was ist, wenn das Kind mit der Technik des Lesens selbst Schwierigkeiten hat und dadurch den intendierten Sinn einer Aufgabe nicht verstehen kann? In dieser Arbeit soll diese zweite Form von Verständnisschwierigkeiten stärker in den Blick genommen und nach Möglichkeiten gesucht werden, wie dieser Form von Leseschwierigkeiten begegnet werden kann.

**Sinnentnehmendes Lesen**

Das sinnentnehmende Lesen besteht nach Goodmann (1976) aus zwei Niveaustufen. Er benutzt die Begriffe *rekodieren* für den technischen Aspekt des Lesens und *dekodieren* für die Bedeutungs- oder Sinnentnahme. Das Rekodieren ist dem Dekodieren untergeordnet, es stellt sozusagen eine Unterfunktion dar. Entscheidend ist das Dekodieren.

Ein Text kann also möglichst einfach konstruiert sein, so dass viele Kinder in der Lage sind, den Sinn des Textes zu entnehmen. Dennoch kann es vorkommen, dass ein Kind aufgrund mangelnder Lesekompetenz sehr viele kognitive Ressourcen für das Rekodieren der Wörter eines Textes aufwenden muss, so dass ihm das Dekodieren und die Konstruktion eines Zusammenhanges zwischen Wörtern und Sätzen nicht gelingt.

Damit passen diese Überlegungen in das Schema der *Cognitive Load Theory* (Sweller 1994), wonach die Kapazitäten des Arbeitsgedächtnisses begrenzt sind und die für das Individuum anspruchsvollen Prozesse die meisten Ressourcen benötigen.

**Audiodateien als Bearbeitungshilfe für das Sachrechnen**

In der Sonderpädagogik gibt es einen Zweig, der sich mit Schülerinnen und Schülern beschäftigt, die (ggf. aufgrund von Behinderungen) Schwierigkeiten beim Lesen haben. Diesen Kindern werden Sachaufgaben mithilfe digitaler Medien auditiv zugänglich gemacht. Anders formuliert; mithilfe digitaler Medien soll die Barriere, die durch die fehlenden Lesefertigkeiten entsteht, überwunden und der Zugang zum arithmetischen Inhalt; zum Problem einer Aufgabe, ermöglicht werden.

Mehrere Studien haben gezeigt, dass diese Methode für Kinder mit Behinderungen wirkungsvoll ist (vgl. Elbaum 2007; Helwig, Rozek-Tedesco & Tindal 2002).

In einer kleinen Fallstudie sollte der Frage nachgegangen werden, ob nicht eine ähnliche Methode Kindern, die (ggf. aufgrund ihrer Herkunft) sprachliche- bzw. Leseschwierigkeiten haben, den Zugang zu Sachaufgaben erleichtern kann. Hierzu wurde mit Kindern einer vierten Berliner Grundschulklasse (n=24) eine entsprechende qualitative Fallstudie durchgeführt, in der die Kinder abwechselnd Sachaufgaben in schriftlicher und zusätzlich in auditiver Form mit Hilfe eines Tablet PCs lösen mussten.

## Ergebnisse und Ausblick

Bei der Auswertung konnte zunächst festgestellt werden, dass die Aufmerksamkeit der Kinder wesentlich höher war, wenn sie die Fragestellung und die lösungsrelevanten Fakten aus der Aufgabe heraushören mussten. Auch zeigten sich im Vergleich zu den nur lesenden Kindern, dass viel häufiger heuristische Strategien zur Texterfassung (skizzieren, markieren bzw. herausschreiben relevanter Daten) angewendet wurden, wenn eine Aufgabe zusätzlich gehört wurde. Die Qualität dieser Strategien soll zukünftig stärker in den Blick genommen werden.

Für eine weitere Auffälligkeit konnte bisher keine Entsprechung in der Literatur gefunden werden. So wurden bestimmte schwierige Wörter oder Satzkonstruktionen viel häufiger nachgefragt, wenn die Aufgabe selbst gelesen und besser verstanden, wenn die Aufgabe zusätzlich gehört wurde. Die durch das nicht notwendige rekodieren freiwerdenden Ressourcen scheinen also tatsächlich zu Gunsten des dekodierens bzw. verstehen eines Textes eingesetzt zu werden.

In geplanten Anschlussuntersuchungen sollen diese und weitere Auffälligkeiten noch weiter untersucht werden.

## Literatur

Franke, M. & Ruwisch, S. (2011): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum

Goodman, K. S.: Die psycholinguistische Natur des Leseprozesses. In: Hofer, A. (Hrsg.): Lesenlernen: Theorie und Unterricht. Düsseldorf 1976, S. 139 -151

Heckmann, L.; Vernay, R. & Witzmann, C. (2007): Textaufgaben? Kann ich nicht! In: Mathematik 1. S. 4–5

Radatz, H. & Lorenz, J.-H. (1993): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel

Reusser, K. (1990): Vom Text zur Situation zur Gleichung. Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben. Habilitationsschrift. Universität Bern

Schilcher, A. & Madlindl, S. (2012): Schwierige Texte. Wie viel Lesekompetenz erfordern Sachaufgaben im Mathematikunterricht? In: Grundschule 10. S. 26–27

Strehl, R. (1979): Grundprobleme des Sachrechnens. Freiburg im Breisgau: Herder

Sweller, J. (1994): Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. Learning and Instruction, 4, S. 295–312

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Peltenburg, M. (2011). A secondary analysis from a cognitive load perspective to understand why an ICT-based assessment environment helps special education students to solve mathematical problems. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 10(1-2), S. 23-41.

Paul RÖGLER, Essen

# Überzeugungen von Mathematiklehrkräften als Basis zur Entwicklung von Lehrerfortbildung zu Technologien im Unterricht

„*Der hat bis jetzt nur Mathematik gemacht mit einem Computeralgebra System. Der Junge kann in Mathe nichts. Wenn das Ding ausgeschaltet ist, ist der fertig, ist der erledigt.*“ (Lehrer A) Überzeugungen, die sich in solchen Zitaten widerspiegeln, haben erheblichen Einfluss auf die Art und Weise des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht. Um solche Überzeugungen geht es im vorliegenden Beitrag.

## Theoretischer Rahmen und Stand der Forschung

Im Rahmen dieser Studie werden als „Technologie“ vor allem digitale Mathematikwerkzeuge fokussiert (vgl. KMK 2012), dazu gehören insbesondere Funktionenplotter, Computeralgebra-System, Tabellenkalkulation oder dynamische Geometriesoftware.

Technologien können für den Mathematikunterricht einen deutlichen Mehrwert darstellen, sofern ihr Einsatz gewissen Bedingungen genügt (Barzel 2012, Zbiek, Heid, Blume & Dick 2007). Zu diesen Bedingungen gehören unter anderem die Nutzung für einen schülerzentrierten und verstehensorientierten Unterricht sowie die Förderung konzeptuellen Wissens.

Überzeugungen werden als nicht konsensfähige Annahmen über die Welt verstanden, die subjektiv als „wahr“ wahrgenommen werden (Philipp 2007). Die Überzeugungen von Lehrerinnen und Lehrern haben einen entscheidenden Einfluss auf ihr Unterrichtshandeln (Eichler 2011, Philipp 2007). Überzeugungen werden deshalb in verschiedenen Modellen der professionellen Kompetenz von Lehrerinnen und Lehrern als ein wesentlicher Bestandteil aufgeführt (vgl. Theorierahmen des DZLM (2013)).

Als Teilaspekt davon sind insbesondere technologiebezogene Überzeugungen ein wichtiger Forschungsbereich, da angenommen werden kann, dass sie das Lehrerhandeln bei Technologieeinsatz beeinflussen.

Um Lehrerfortbildungen gezielt weiterentwickeln zu können, sind insbesondere Erkenntnisse zum Einen über Zusammenhänge zwischen technologiebezogenen Überzeugungen und nicht technologiespezifischen Überzeugungen wie den mathematischen Weltbildern (vgl. Grigutsch, Raatz & Törner 1998) oder der Lehr-Lern-Orientierung (vgl. Staub & Stern 2002) sowie zum Anderen über spezifische Überzeugungsstrukturen von Fortbilderinnen und Fortbildnern im Bereich Technologieeinsatz von Interesse.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 983–986). Münster: WTM-Verlag

## Forschungsfragen

Aus dem Genannten ergeben sich die folgenden Forschungsfragen in zwei Bereichen:

A) Ermitteln und Operationalisieren technologiebezogener Überzeugungen

- F1: Welche Überzeugungen haben Mathematiklehrerinnen und -lehrer in Bezug auf den Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht?
- F2: Wie lassen sich diese technologiebezogenen Überzeugungen für einen Fragebogen operationalisieren?

B) Zusammenhänge und Unterschiede bei technologiebezogenen Überzeugungen

- F3: Welche Zusammenhänge bestehen zwischen technologiebezogenen Überzeugungen und der Lehr-Lern-Orientierung beziehungsweise den mathematischen Weltbildern?
- F4: Wie unterscheiden sich die Überzeugungen von Lehrerfortbildnerinnen und Lehrerfortbildnern im Bereich Technologie von denen anderer Lehrkräfte?

Zur Untersuchung der Forschungsfrage F1 dient eine Interviewstudie. Ziel dabei ist es, Items zu formulieren, aus denen anschließend ein Messinstrument zur Erhebung technologiebezogener Überzeugungen entwickelt werden soll (F2). Dieses Messinstrument kommt in einer quantitativen Querschnittstudie zum Einsatz um die Forschungsfragen F3 und F4 beantworten zu können. Der Fragebogen wird dabei ergänzt um bekannte Skalen zu nicht technologiespezifischen Überzeugungen (vgl. Grigutsch et al. 1998, Staub & Stern 2002).

Im Rahmen dieses Beitrags soll insbesondere auf die Interviewstudie zu Beantwortung von F1 näher eingegangen werden.

## Methodologie

Um die technologiebezogenen Überzeugungen der Lehrkräfte zu erheben wurden halbstrukturierte Interviews mit Lehrkräften geführt (n=9). Dabei wurde aus Gründen der Kontrastierung darauf geachtet, dass eine Verteilung über verschiedene Bundesländer gegeben war und dass sowohl Lehrkräfte befragt wurden, die als „technologieaffin" zu bezeichnen sind und solche, die eher skeptisch gegenüber Technologie sind.

Die Überzeugungen der Lehrkräfte sollten aus möglichst freien Erzählungen ergründet werden. Deshalb sah der Interviewleitfaden offene Fragen und erzählgenerierende Prompts vor.

Zur Auswertung wurden zunächst alle Interviewstellen, die Informationen zu technologiebezogenen Überzeugungen enthalten, identifiziert und transkribiert. Die Interviewstranskripte wurden anschließend in Anlehnung an die Grounded Theory Methodology (vgl. Glaser & Strauß 1967) im Hinblick auf technologiebezogene Überzeugungen offen kodiert. Im Arbeitsschritt des axialen Kodierens wurde zusammengefasst und strukturiert, um Kategorien technologiebezogener Überzeugungen identifizieren und benennen zu können. Der Prozess des axialen Kodierens wurde zur Qualitätssicherung und zur intersubjektiven Weitung der Interpretationen zusätzlich in einer Forschergruppe durchgeführt.

**Ergebnisse**

Als Ergebnis der Interviewstudie konnten insgesamt 29 Aspekte technologiebezogener Überzeugungen identifiziert werden. Diese Aspekte von Überzeugungen beziehen sich unter anderem auf die Einflüsse digitaler Mathematikwerkzeuge auf den Inhalt des Unterrichts, auf Unterrichtsprozesse, auf Schülerinnen und Schüler und auf die Lehrkraft. Zur besseren Strukturierung und weiteren Messinstrumententwicklung lassen sich vier Kategorien bilden: Vorteile des Technologieeinsatzes, Nachteile, allgemeine Überzeugungen und Überzeugungen in Bezug auf Geschlechtsunterschiede.

Bei den Überzeugungen zu den Vorteilen des Technologieeinsatzes scheinen sich drei Aspekte zu zeigen: Vorteile als normative Setzung, die wie eine Handlungsanweisung an Lehrkräfte formuliert werden können; Vorteile als Möglichkeiten oder Chancen, die der Technologieeinsatz eröffnet sowie Vorteile als automatische Konsequenz des Technologieeinsatzes.

Ebenso lassen sich auch zwei Unteraspekte bei den Nachteilen identifizieren: Nachteile, die als negative Konsequenz dem Technologie-Einsatz folgen sowie allgemeine Nachteile, die zum Beispiel dem Technologie-Einsatz entgegen stehen können.

Zu diesen technologiebezogenen Überzeugungen wurden im nächsten Schritt in allen Kategorien Items formuliert. Mit diesen insgesamt über 130 Items soll quantitativ überprüft werden, ob sich latente Personenmerkmale identifizieren lassen, die unterschiedliche Äußerungen erklären können.

**Diskussion**

Die Vermutung, dass unter Lehrkräften vielfältige unterschiedliche aber auch differenzierte Überzeugungen zum Technologieeinsatz vorhanden sind, konnte bestätigt werden.

In den Interviews wurden 29 Aspekte technologiebezogener Überzeugungen gefunden. Einige dieser Aspekte sind dabei inhaltlich verwandt und es ist davon auszugehen, dass diese Aussagen teilweise auf die gleiche dahinter stehende latente Überzeugung der Lehrkräfte zurückgehen. Dementsprechend ist zu erwarten, dass die empirische Prüfung der Überzeugungen in einer quantitativen Fragebogenstudie faktorenanalytisch zu dem Ergebnis kommt, dass zur Erklärung der Beantwortung der Fragebogenitems deutlich weniger als 29 latente Überzeugungsdimensionen angenommen werden müssen.

Für ein Messinstrument, das dem Anspruch der Zeitökonomie genügen soll, sind 130 Items sehr viel. Es ist daher ein Ziel der weiteren Arbeit, Skalen zu entwickeln, die mit weniger Items reliabel und inhaltlich valide technologiebezogene Überzeugungen erheben können.

## Literatur


Barzel, Bärbel (2012): Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert - aber wann? Münster [u.a.]: Waxmann.

DZLM (2013): Theoretischer Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik. Hg. v. Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik. Online verfügbar unter www.dzlm.de.

Eichler, Andreas (2011): Statistics Teachers and Classroom Practices. In: Carmen Batanero, Gail Burrill und Chris Reading (Hg.): Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study, Bd. 14. Dordrecht: Springer Netherlands (New ICMI Study Series), S. 175–186.

Glaser, Barney & Strauss, Anselm (1967): The discovery of grounded theory. New York.

Grigutsch, Stefan; Raatz, Ulrich; Törner, Günter (1998): Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: Journal für Mathematik-Didaktik 19 (1), S. 3–45.

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. KMK.

Philipp, Randolph A. (2007): Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In: Frank K. Lester (Hg.): Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Charlotte, N.C: Information Age Publishing, S. 257–315.

Staub, Fritz C.; Stern, Elsbeth (2002): The Nature of Teachers’ Pedagogical Content Beliefs Matters for Students’ Achievement Gains: Quasi-Experimental Evidence From Elementary Mathematics. In: Journal of Educational Psychology 94 (2), S. 344–355.

Zbiek, Rose Mary; Heid, M. Kathleen; Blume, Glendon W.; Dick, Thomas P. (2007): Research on technology in mathematics education. A Perspective of Constructs. In: Frank K. Lester (Hg.): Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Charlotte, N.C: Information Age Publishing, S. 1169–1207.

Tobias ROLFES, Landau

# Begriffsbildungsprozesse bei funktionalen Zusammenhängen: Wie lernförderlich sind externe dynamische Repräsentationen?

## 1. Einleitung

Bewegte Bilder üben bereits seit ihrer Erfindung eine große Faszination aus. Mit der Computertechnik reduzierte sich der Aufwand für die Erzeugung von bewegten Bildern erheblich und wurde auch für den Privatanwender möglich. In der Unterrichtspraxis und auch in der Forschung weckte diese Entwicklung die große Hoffnung, dass mit dynamischen Repräsentationen Lernprozesse vereinfacht und Lerninhalte nachhaltiger vermittelt werden können. Auch wenn die anfängliche Euphorie teilweise verflogen ist, sind dynamische Repräsentationen unvermindert Forschungsgegenstand der verschiedenen Disziplinen, die sich mit Lernprozessen befassen. Die Mathematikdidaktik beschäftigt sich dabei zumeist mit der stoffdidaktischen Frage, wie Lernumgebungen zu bestimmten mathematischen Inhaltsgebiete mit Hilfe von dynamischen Repräsentationen gestaltet werden können. In der Kognitionspsychologie steht dagegen die empirische Untersuchung der Wirkung von dynamischen Repräsentationen auf kognitive Prozesse im Vordergrund. Die Inhaltsgebiete treten dabei in den Hintergrund, sodass bisher kaum die Vermittlung von mathematischen Inhalten mit dynamischen Repräsentationen empirisch untersucht wurde.

In dem vorliegenden Beitrag werden wichtige Forschungslinien dieser beiden Disziplinen komprimiert dargestellt. Abschließend werden praktische Implikationen für den Einsatz von dynamischen Repräsentationen bei Begriffsbildungsprozessen von funktionalen Zusammenhängen abgeleitet.

## 2. Dynamische Repräsentationen aus Sicht der Mathematikdidaktik

In der Mathematikdidaktik werden Lernumgebungen mit dynamischen Repräsentationen zumeist mit spezieller Software (z.B. DynaGeo oder GeoGebra) erzeugt. Dabei bildet der Zugmodus ein häufig verwendetes Element, um dynamische Repräsentationen zu generieren. Beispielsweise kann mit Hilfe der Schiebereglerfunktion die Genese eines Funktionsgraphen als Ortslinie vermittelt werden. Dazu wird ein Punkt einer Funktion konstruiert und sein Verhalten bei Veränderung von $x$ studiert (Elschenbroich, 2010). Auch die Auswirkung von Parametern auf einen Funktionsgraphen kann mit Hilfe der Zugfunktion anschaulich untersucht werden, indem z. B. der Wert des Parameters $a$ der Funktion $f(x)=a\cdot sin(x)$ durch einen Schieberegler verändert wird (Ulm, 2010). Fest und Hoffkamp (2013) stellen Lernumgebungen vor, bei denen Veränderungen in situationalen und graphischen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 987–990). Münster: WTM-Verlag

Darstellungen mit Hilfe des Zugmodus zueinander in Beziehung gesetzt werden. Gemeinsam ist den meisten für den Mathematikunterricht entwickelten dynamischen Repräsentationen mit Einsatz des Schiebereglers, dass verschiedene Darstellungsformen (situational, symbolisch-algebraisch, visuell-graphisch, numerisch-tabellarisch) dynamisch miteinander verknüpft werden. Roth (2008) argumentiert, dass mathematisches Verständnis mit dynamischen Repräsentationen gefördert werden kann, indem die „Einflussgrößen" bewusst und zielgerichtet verändert und daraus resultierende Veränderungen in verschiedenen Darstellungen beobachtet und interpretiert werden.

## 3. Dynamische Repräsentationen aus Sicht der Kognitionspsychologie

Nach Schnotz und Lowe (2008) wird vielfach die Meinung vertreten, dass statische Bilder am besten für statischen Inhalt und dynamische Bilder am besten für dynamischen Inhalt geeignet seien. Allerdings gebe es aus psychologischer Sicht keine klare Trennung zwischen statischen und dynamischen Repräsentationen und es könnten auch mit statischen Bildern dynamische mentale Modelle erzeugt werden (Schnotz & Lowe, 2008).

Die empirischen Befunde zeigen zumeist keine grundsätzliche Überlegenheit von dynamischen gegenüber statischen Repräsentationen. Bei einem Experiment von Hegarty, Kriz und Cate (2003) wurde das Verständnis eines dynamischen Prozesses zwar erhöht, wenn sowohl statische als auch animierte Repräsentationen verwendet wurden, allerdings wurde kein Beweis gefunden, dass animierte im Vergleich zu statischen Visualisierungen zu einem besseren Verständnis eines dynamischen Prozesses führten. Auch bei Mayer, Hegarty, Mayer und Campbell (2005) zeigten sich keine Vorteile von computeranimierten Instruktionen. Stattdessen wurde zum Teil mit papierbasierten statischen Repräsentationen ein signifikant höherer Lernzuwachs induziert.

Die Ursachen für die genannten Ergebnisse sind nicht eindeutig geklärt. Gog, Paas, Marcus, Ayres und Sweller (2009) vermuten, dass dynamische Visualisierungen das Arbeitsgedächtnis starker belasten und dadurch die zum Teil nachteiligen Lerneffekte erklärt werden können. Außerdem könnte gerade das Hineindenken der Dynamik in die statische Darstellung zu einem höheren Lerneffekt führen (Mayer et al., 2005).

Animationen können lernförderlich sein, wenn sie kognitive Ressourcen freisetzen. Wenn ein mentaler Prozess für den Lernenden erst durch eine dynamische Darstellung durchführbar wird, so erfüllt sie eine Ermöglichungsfunktion (Schnotz & Rasch, 2008). Ist ein Prozess zwar auch mit Hilfe der statischen Repräsentation durchführbar und wird durch die dynamische Repräsentation eine sehr hohe kognitive Belastung erheblich reduziert, hat sie eine Erleichterungsfunktion (Schnotz & Rasch, 2008). Diese Argumentation korrespondiert in Grundzügen mit Befunden von Hattie (2009), dass computergestützte Unterrichtsaktivitäten bei herausfordernden Aufgaben am wirkungsvollsten sind.

Statt eine Animation lediglich rezeptiv aufnehmen zu lassen, schlagen Koning und Tabbers (2011) zur Erhöhung der Lernwirksamkeit vor, dass die Lerner interaktiv die Animation manipulieren sollen. Auf diese Weise sei die Verarbeitung der Dynamik automatisch mit einer Handlung verknüpft. Allerdings könne die Interaktionsmöglichkeit auch negative Effekte hervorrufen, wie zufälliges Klicken oder das Auslassen von Interaktionsmöglichkeiten (Koning & Tabbers, 2011). Hegarty et al. (2003) fand heraus, dass das Verständnis erhöht wurde, wenn die Lernenden das dynamische Verhalten einer Maschine aus statischen Darstellungen vorhersagen mussten. Daraus schließen Koning und Tabbers (2011), dass möglicherweise Manipulationen kombiniert mit Verstehensprozessen die Lerneffizienz von dynamischen Repräsentationen erhöhen könnten.

## 4. Fazit

Die kognitionspsychologischen Ergebnisse legen nahe, dass der Einsatz von dynamischen Repräsentationen in Lernumgebungen nicht per se und unmittelbar zu einem besseren Verständnis von Begriffen zum funktionalen Zusammenhang führt. So sollten dynamische Repräsentationen bei herausfordernden Problemstellungen und Begriffen eingesetzt werden. So können dynamische Repräsentationen (z.B. Funktionsgraph wird als Ortslinie erzeugt) für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler verständnisfördernd wirken, während bei leistungsstärkeren Lernenden eventuell sogar ein negativer Effekt eintreten kann.

Auch ist es angezeigt, eine dynamische Repräsentation nicht nur rezeptiv verarbeiten zu lassen, sondern die Schülerinnen und Schüler kognitiv zu aktivieren. Dieses kann z.B. geschehen, indem vorhergesagt und begründet werden muss, wie sich der Graph bei Veränderung einer Einflussgröße verändert und erst anschließend die dynamische Repräsentation genutzt werden darf.  Gegenüber einer reinen Animation könnte der Einsatz des Schiebereglers Vorteile haben, da hiermit die kognitive Belastung individuell gesteuert werden kann. Um einen fokussierten Lernprozess zu ermöglichen dürfen allerdings nicht übermäßig viele Variationsmöglichkeiten angeboten werden.

Ein besonderes Augenmerk sollte auch auf die Fragestellungen gerichtet werden, die mit der dynamischen Repräsentation einhergehen. Sie sollten nicht nur beobachtenden Charakter haben (z.B. Was passiert im Graphen bei Veränderung des Parameters?) sondern vielmehr Begründungen und Interpretationen einfordern (z.B. Warum verändert sich der Graph durch Veränderung des Parameters in dieser Form?). Hierdurch kann der Computer zur Exploration eingesetzt werden und mentale Prozesse ermöglichen, die ohne die dynamische Repräsentation nicht möglich wären.

## Literatur


Elschenbroich, H.-J. (2010). Ein dynamischer Zugang zu Geometrie und Funktionen. *Praxis Mathematik*, *52* (34), 25–31.

Fest, A. & Hoffkamp, A. (2013). Funktionale Zusammenhänge im computerunterstützten Darstellungstransfer erkunden. In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen* (S. 177–189). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Gog, T., Paas, F., Marcus, N., Ayres, P. & Sweller, J. (2009). The Mirror Neuron System and Observational Learning: Implications for the Effectiveness of Dynamic Visualizations. *Educational Psychology Review*, *21* (1), 21–30.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning. A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. Visible Learning: Routledge.

Hegarty, M., Kriz, S. & Cate, C. (2003). The Roles of Mental Animations and External Animations in Understanding Mechanical Systems. *Cognition and Instruction, 21* (4), 325–360.

Koning, B. B. & Tabbers, H. K. (2011). Facilitating Understanding of Movements in Dynamic Visualizations: an Embodied Perspective. *Educational Psychology Review, 23* (4), 501–521.

Mayer, R. E., Hegarty, M., Mayer, S. & Campbell, J. (2005). When Static Media Promote Active Learning: Annotated Illustrations Versus Narrated Animations in Multimedia Instruction. *Journal of Experimental Psychology: Applied, 11* (4), 256–265.

Roth, J. (2008). Systematische Variation. Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. *Mathematik lehren* (146), 17–21.

Schnotz, W. & Lowe, R. (2008). A Unified View of Learning from Animated and Static Graphics. In R. Lowe & W. Schnotz (Hrsg.), *Learning with animation. Research implications for design* (S. 304–356). Cambridge, New York: Cambridge University Press.

Schnotz, W. & Rasch, T. (2008). Functions of Animation in Comprehension and Learning. In R. Lowe & W. Schnotz (Hrsg.), *Learning with animation. Research implications for design* (S. 92–113). Cambridge, New York: Cambridge University Press.

Ulm, V. (2010). Funktionen dynamisch. DGS zum Arbeiten mit Funktionen. *Praxis Mathematik, 52* (34), 32–38.

Tobias ROLFES, Landau, Roland WEBER, Marburg, Jochen DÖRR, Speyer, Dirk SCHMERENBECK, Ludwigshafen

# Wie kann nachhaltiges Lernen mit Lernpfaden gelingen?

## 1. Einleitung

Bei Unterrichtssequenzen auf der Grundlage von Lernpfaden wird das Lernen mit Computern mit dem selbstgesteuerten Lernen kombiniert. Der Einsatz des Computers bietet die Chance, Darstellungen zu erzeugen und zu verknüpfen, die Lernenden von algorithmischen Berechnungen zu entlasten und als „Beschleuniger des Entdeckungsprozesses" zu wirken (Weigand & Weth, 2002). Ein Computereinsatz im Schulunterricht kann aber auch zu einem „Handlungsaktionismus" und einem „unreflektierten ‚Versuch-und-Irrtum-Verhalten'" führen (Weigand & Weth, 2002). Gerade der Einsatz von Applets kann z. B. zu einem gedankenlosen Betätigen des Schiebereglers ohne nachhaltigen Lernprozess verleiten.

Beim selbstgesteuerten Lernen muss der Lernende motivationale und metakognitive Komponenten aufweisen und um die adäquate Nutzung von sozialen Ressourcen wissen (Brunstein & Spörer, 2010). So müssen die Schülerinnen und Schüler bei einem Lernpfad überprüfen, ob sie die ersten Lernschritte ausreichend verinnerlicht haben oder eine erneute Bearbeitung erforderlich ist (metakognitive Komponente). Falls nun eine erneute Auseinandersetzung mit den ersten Schritten notwendig ist, muss der Lernende entscheiden, ob er die Lernhürden alleine oder mit einer Mitschülerin bzw. einem Mitschüler bewältigen kann oder ob er die Lehrkraft konsultieren muss (Wissen um Nutzung der sozialen Ressourcen). Schließlich muss die erneute Bearbeitung der ersten Lernschritte des Lernpfades auch wirklich durchgeführt werden (motivationale Komponente).

Unter Berücksichtigung der genannten theoretischen Aspekte wurde von den Autoren ein Lernpfad zur Einführung in die Differentialrechnung entwickelt (Dörr, Rolfes, Schmerenbeck & Weber, 2013) und in drei Lerngruppen der Einführungsphase der Oberstufe erprobt.

## 2. Inhaltlicher Aufbau des Lernpfades

Thema des Lernpfads ist die Einführung in den Ableitungsbegriff. Hierbei werden parallel zwei didaktische Ansätze zur Definition der Ableitung einer Funktion an einer Stelle gewählt (vgl. z. B. Danckwerts & Vogel, 2006). Zum einen wird die Ableitung als momentane Änderungsrate hergeleitet, indem der Grenzwertprozess von der mittleren zur momentanen Änderungsrate vollzogen wird. Zum anderen wird die Steigung einer Funktion

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 991–994). Münster: WTM-Verlag

an einer Stelle – dargestellt durch die Tangentensteigung an den Graphen – durch Sekantensteigungen angenähert. Diese beiden Stränge führen in eine Verallgemeinerung, indem der Differenzenquotient als Oberbegriff der mittleren Änderungsrate und der Sekantensteigung und der Differentialquotient als Oberbegriff für die momentane Änderungsrate und die Tangentensteigung eingeführt wird. Anschließend wird noch die Ableitungsfunktion definiert und für einfache Funktionen bestimmt.

## 3. Gestaltungselemente

Beim Thema Differentialrechnung bietet der Computer die Möglichkeit, den Grenzwertprozess zu visualisieren. Im Internet finden sich vielfach Applets, die den Übergang von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung darstellen. Dabei können die Lernenden mit Hilfe des Zugmodus zwei Schnittpunkte einer Sekanten mit dem Funktionsgraphen einander annähern und beobachten, wie die Sekante sich immer mehr der Tangente angleicht. Das Applet berechnet gleichzeitig den Wert der Sekantensteigung, welcher sich immer mehr dem angegebenen Wert der Tangentensteigung annähert. Hier besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler zwar oberflächlich diese beiden Näherungsprozesse – den graphischen und den numerischen – wahrnehmen, aber nicht die Bedeutung und die Zusammenhänge hinterfragen. Hierdurch kann eine Verständnisillusion ohne nachhaltigen Lerneffekt entstehen. Im hier vorgestellten Lernpfad wird den Lernenden daher ein „unvollständiges“ Applet präsentiert, in dem die benötigten Werte für die Berechnung der Sekantensteigung zunächst in der Zeichnung identifiziert werden müssen. Diese Vorgehensweise dient zum einen der Entschleunigung des Lernprozesses, zum anderen der Unterstützung beim Darstellungswechsel.

In einem anderen Applet zur Bestimmung der mittleren Änderungsrate eines Füllvorgangs wird die Berechnung nicht vollständig dem Computer überlassen. Zwar können die Funktionswerte dem Applet entnehmen werden, es muss aber selbstständig herausgefunden werden, dass die Differenz der Funktionswerte durch die Differenz der $x$-Werte dividiert werden muss. Somit werden die Schülerinnen und Schüler von der algorithmischen und fehleranfälligen Berechnung von Funktionswerten entlastet, können die Genese des Differenzenquotienten aber selbsttätig entdecken.

Eine weitere Möglichkeit der Entschleunigung bieten metakognitive, reflexive Aufgaben. Hierbei sollen die Schülerinnen und Schüler selbstständig das Gelernte verknüpfen. Während der Erprobung war deutlich beobachtbar, dass die Phasen des Erkenntnisprozesses von einzelnen Lerngruppen zu sehr differierenden Zeitpunkten durchlaufen wurden. In einem eher lehrerzentriertem Unterricht hätten einige Schülerinnen und Schüler den Prozess vermutlich nicht vollständig selbst vollziehen können, da im Unterrichtsgespräch bereits eine Austausch darüber stattgefunden hätte. Eine weitere Vorgehensweise, um metakognitive Prozesse zu initiieren, ist die Dokumentation des Lernprozesses. So erhalten die Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Lernpfades den Auftrag, ihren Lernprozess vollständig zu dokumentieren.

Bei Schülerinnen und Schülern, die nur wenig Erfahrung im selbstgesteuerten Lernen haben, können lange Phasen des selbstgesteuerten Lernens zu Problemen, Verunsicherungen und Demotivation führen. Daher werden im Lernpfad an geeigneten, zentralen Stellen Plenumsphasen eingeplant. Ziel dieser Plenumsphasen, die z. B. als Unterrichtsgespräch stattgefunden haben, ist es, das Gelernte zusammenzuführen und zu sichern und dabei eventuell aufgetretene Verunsicherungen der Schülerinnen und Schüler abzubauen. Dabei soll Transparenz über die Lernziele und den Lernfortschritt hergestellt werden. Um zu erreichen, dass die Schülerinnen und Schüler trotz der Arbeit im eigenen Lerntempo zur gleichen Zeit an einer Plenumsphase teilnehmen können, sind Aufgaben zur zeitlichen Differenzierung eingeplant.

Die Arbeit am Computer findet häufig in Partnerarbeit statt. Um die Lernenden dabei zu unterstützen, die sozialen Ressourcen besser zu nutzen, sind im Lernpfad Kooperationsphasen eingebaut, bei denen sich die Lernteams verschiedener Computer treffen und über die letzten Lernschritte austauschen. Dieses dient der gegenseitigen Unterstützung, der Rückmeldung und Ergebniskontrolle. Die Austauschphasen sind auch Reflexionsanlässe, da die Schülerinnen und Schüler dabei den Lerngegenstand und ihren Lernfortschritt verbalisieren müssen. Es soll durch den zielorientierten Wechsel von kooperativen und individuellen Lernphasen eine soziale Lernstruktur geschaffen werden.

## 4. Fazit

Die Erprobung hat gezeigt, dass es mit Hilfe eines computerbasierten Lernpfades möglich ist, selbstgesteuertes Lernen zu initiieren. Als besonders wichtig haben sich dabei die beschriebenen Gestaltungselemente herausgestellt. Insbesondere zwei Gestaltungselemente – Applets und Plenumsphasen – haben maßgeblich zum Gelingen der Unterrichtssequenz beigetragen.

Die im Lernpfad bereitgestellten GeoGebra-Applets forderten die Schülerinnen und Schüler auf, die in den Applets dargestellten Elemente aktiv zu hinterfragen und bereiteten die rechnerische Auseinandersetzung mit weiterführenden Aufgaben vor. Zudem trugen sie zur Entschleunigung des

Lernprozesses bei, da durch die technisch sparsame Gestaltung der Applets die Initiierung von megakognitiven Prozessen begünstigt wurde.

Daneben waren die Plenumsphasen ein weiteres wichtiges Element. Gerade der Wechsel zwischen den selbstständigen Erarbeitungsphasen und der direkten Rückmeldung durch die Lehrkraft bestärkte die Schülerinnen und Schüler in ihrem bisherigen Handeln und begünstigte und unterstütze den Lernfortschritt. Dabei können die Plenumsphasen durchaus unterschiedlich gestaltet und an die Bedürfnisse einzelner Gruppen angepasst werden. So sind diese Phasen bei leistungsschwächeren Gruppen dazu geeignet, mögliche Verständnisschwierigkeiten zu klären. Bei leistungsstärkeren Gruppen kann die Plenumsphase der Behandlung ergänzender Fragestellungen dienen. Das Einbinden von Plenumsphasen ermöglicht zudem die Vorteile eines lehrergesteuerten Unterrichts mit den Vorteilen des selbstgesteuerten Lernens zu verknüpfen.

Die Konzeption und Erstellung eines Lernpfades ist zunächst, wie bei allen neuen Unterrichtsmethoden, mit zeitlichem Mehraufwand verbunden. Um dennoch die Vorzüge der Lernpfade zeitnah im Unterricht nutzen zu können, empfiehlt sich die Verwendung bereits vorhandener Lernpfade (zu finden unter www.mathematik-digital.de) oder die Erstellung von zunächst nur kurzen Unterrichtssequenzen. Das Anfertigen von Lernpfaden ist zudem auch ein idealer Ausgangspunkt für kollegiale Zusammenarbeit, da ein gemeinschaftliches Bearbeiten zeitliche Ressourcen schont. Durch die klassenübergreifende Zusammenarbeit entsteht ein Pool an Lernpfaden, der in kommenden Schuljahren wieder eingesetzt werden kann.

Die Rückmeldung der Schülerinnen und Schüler als auch die Unterrichtsbeobachtung der Autoren haben gezeigt, dass die Lernpfade ein großes Potential bieten, um selbstgesteuertes Lernen im Mathematikunterricht zu fördern. Außerdem können sie nicht unwesentlich zu einem abwechslungsreichen und interessanten Unterricht beitragen.

## Literatur


Brunstein, J. C. & Spörer, N. (2010). Selbstgesteuertes Lernen. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch pädagogische Psychologie* (4. Aufl., S. 751–759). Weinheim: Beltz.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006): *Analysis verständlich unterrichten*, München: Spektrum.

Dörr, J., Rolfes, T., Schmerenbeck, D. & Weber, R. (2013): *Einführung in die Differentialrechnung*. Verfügbar unter http://wikis.zum.de/zum/Mathematik-digital/Einfuehrung_in_die_Differentialrechnung (03.03.2014)

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen.* Heidelberg: Spektrum.

Stephan ROSEBROCK, Karlsruhe

# Die Morse-Thue Folge und Begabungsförderung

Im ersten Teil wird eine Folge von Symbolen vorgestellt, die Morse-Thue Folge, die viele spannende Eigenschaften hat. Diese Folge lässt sich leicht erzeugen und untersuchen. Sie führt auf elementare Weise zu einem Fraktal, der Koch-Kurve. Im zweiten Teil wird knapp begründet, warum sich diese Folge hervorragend zur Begabungsförderung von Schülern in der Sekundarstufe eignet. Sie ist motivierend und an ihr lässt sich wirkliches mathematisches Arbeiten erleben.

## 1. Die Morse-Thue Folge

Wir definieren Folgen von Nullen und Einsen (es können auch zwei beliebige andere Symbole sein). Wir beginnen mit $M_0 = 0$. Wir ersetzen die 0 durch 01 und erhalten $\mu(M_0) = M_1 = 01$. Jetzt ersetzen wir jede 0 durch 01 und jede 1 durch 10 und erhalten $\mu(M_1) = M_2 = 0110$. Ersetze wieder 0 durch 01 und 1 durch 10 und erhalte $\mu(M_2) = M_3 = 01101001$. Im nächsten Schritt erhalten wir $\mu(M_3) = M_4 = 0110100110010110$, usw.

Wir definieren auf eine zweite Weise Folgen von Nullen und Einsen. Wir beginnen mit $T_0 = 0$. Beim Übergang von $T_i$ nach $T_{i+1}$ schreiben wir das Komplement $\overline{T_i}$ von $T_i$ hinter $T_i$ . Dabei gilt für das Komplement $\overline{0} = 1$ und $\overline{1} = 0$. Wir erhalten also $T_1 = T_0\overline{T_0} = 01$. Im nächsten Schritt $T_2 = T_1\overline{T_1} = 0110$ und $T_3 = T_2\overline{T_2} = 01101001$, usw.

Wir haben also zwei verschiedene Konstruktionsvorschriften für Folgen. Bei der ersten haben wir ein Alphabet A={0,1} und wir betrachten einen Morphismus $\mu: A^* \to A^*$ von allen Worten über A in alle Worte über A definiert durch $\mu(0) = 01$, $\mu(1) = 10$ und $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$. Dann definieren wir $\mu^i(0) = M_i$. Die zweite Konstruktionsvorschrift sagt einfach $T_0 = 0$ und $T_{i+1} = T_i\overline{T_i}$ wobei $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ und $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$.

Man kann beweisen, dass $M_i = T_i$ für alle i gilt. Wegen der zweiten Konstruktionsvorschrift ($T_{i+1}$ beginnt mit $T_i$ ) gibt es einen Grenzwert. Im Limes erhält man die sogenannte Morse-Thue Folge

T = 011010011001011010010110011010011001011001101001 01….

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \mu^n(0) = T$ und $\mu(T) = T$.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 995–998). Münster: WTM-Verlag

Die Morse-Thue Folge hat schöne Eigenschaften. Sie ist selbst-ähnlich, d.h. streicht man jede zweite Ziffer, so erhält man dieselbe Folge noch einmal. Denn $\mu(T) = T$ impliziert $x_n = x_{2n}$ und $x_{n+1} = 1 - x_{2n}$, falls man die Ziffern der Morse-Thue Folge mit $x_i$ bezeichnet beginnend mit $x_0$, d.h. $T = x_0x_1x_2x_3\ldots$

Wir ordnen der natürlichen Zahl i eine 1 zu, wenn die Anzahl Einsen in der Binärdarstellung von i ungerade ist und eine 0 sonst:

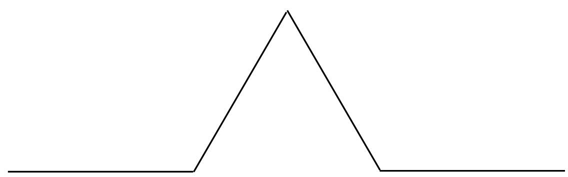
| Dezimalzahl | Binärzahl | Anzahl Einsen gerade/ungerade |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 1 |
| 3 | 11 | 0 |
| 4 | 100 | 1 |
| 5 | 101 | 0 |
| 6 | 110 | 0 |
| 7 | 111 | 1 |

Wieder erhalten wir die Morse-Thue Folge. Das liegt daran, dass wir alle Binärzahlen mit genau n+1 Ziffern aus allen Binärzahlen mit höchstens n Ziffern bekommen, indem wir eine 1 und zum Auffüllen leerer Stellen Nullen davor schreiben. Beim Zählen der Einsen wird also der Anfang invertiert angefügt, wie bei der zweiten Erzeugungsweise der Folge oben.

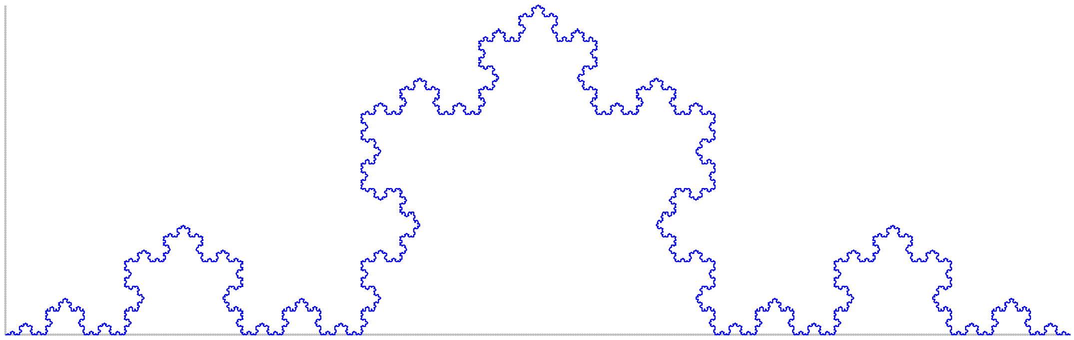
Man interpretiere die Morse-Thue Folge als Zeichenvorschrift beginnend mit i=1:

1. gehe einen Schritt nach vorne
2. a.) ist $x_i \neq x_{i-1}$, drehe die Richtung 60° gegen den Uhrzeigersinn

   b.) ist $x_i = x_{i-1}$, so drehe die Richtung um 120° im Uhrzeigersinn
3. Beginne wieder mit Schritt 1 und erhöhe i um 1.



In der Abbildung sieht man das Resultat für die ersten 4 Folgenglieder 0110. Was erhalten wir, wenn wir weiter zeichnen? Wir lassen Maxima das Resultat für 4096 Folgenglieder zeichnen:



Man erhält die Koch-Kurve. Der Beweis dazu ist nicht schwer. Wenn man die Zeichenvorschrift für die ersten $4^k$ Glieder der Morse-Thue Folge befolgt, dann erhält man den k-ten Iterationsschritt an die Kochkurve. Das liegt an der Gleichung $T_{i+2} = T_i\overline{T_i T_i}T_i$ wie man sich überlegen kann.

## 2. Begabungsförderung

Die Gestaltpsychologie hat sich schon früh mit Denkprozessen, insbesondere in der Mathematik, beschäftigt. Schon Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts bei Wertheimer und später bei Metzger ging es um mathematische Denkprozesse.

Im gestaltpsychologischen Menschenbild geht man davon aus, dass Menschen von Geburt an in aktiver Auseinandersetzung mit ihrer Umwelt stehen. Dabei hat der Mensch von Anfang an die „Tendenz zur guten Gestalt“ als selbstwirksames Ordnungsprinzip (Soff, 2011, S. 67). Dieses sogenannte Prägnanzprinzip ist die „Fähigkeit, Strukturen zu erkennen“, statt nur viele Details wahrzunehmen. Das Prägnanzprinzip ist bereits nah am mathematischen Denken, bei dem es auch um Strukturen geht und nicht um Einzelheiten.

Nach Metzger ist ein schöpferischer Prozess ein „freier und dynamischer Fall von Zielerreichung“ (Soff, 2011, S. 71). Die mechanische Zielerreichung, also die Befolgung von Rechenregeln, ist nach Metzger nicht schöpferisch, oder in moderner Sprache, kreativ. Im Gegensatz dazu geht es bei der dynamischen Zielerreichung um ein freies Wechselspiel verschiedener Kräfte im Hinblick auf das Ziel, also, wenn es etwa um die Lösung einer Mathematikaufgabe geht, um Dinge wie: Wie sehr motiviert mich das Problem, was lenkt mich gerade ab, bin ich im tiefsten der Meinung, dass mir das Problem sowieso zu schwer ist oder bin ich begeistert von der Fragestellung, etc. Nach Metzger ist es wichtig, dass der Denkende genügend beweglich ist und sich hemmungsfrei in das Kräftefeld der Problemlösung einspielen kann.

Wichtig für uns ist Metzgers „dritter Sinn von schöpferischer Freiheit“: Der Bewegungsraum muss unverbaut sein von vorgebauten Wegen. Das Denken muss frei sein von „verfestigten Begriffssystemen, von eingefahrenen Denkgewohnheiten[…], Verfahrensvorschriften“. Für die Schule heißt das, dass man den Schülern Probleme präsentieren muss, bei denen ihnen die bereits vorgegebenen Denkstrukturen aus dem Mathematikunterricht nichts nutzen. Der Schüler muss sich dem Problem intuitiv nähern können, keine Formeln dürfen helfen.

Zur Förderung der Kreativität ist es zentral, dass das präsentierte Problem fruchtbares Staunen beim Schüler weckt. Damit bereitet man den Boden für die Prägnanztendenz. Die Morse-Thue Folge ist von diesem Typ. Es gibt ein regelmäßiges einfaches Bildungsgesetz und es scheint nur ein chaotisches Durcheinander von Nullen und Einsen zu entstehen. Ganz natürlich ergibt sich der Wunsch, die Struktur dahinter zu erkennen. Auch die Morse-Thue Folge, als Anzahl Einsen von Binärzahlen, oder die Koch-Kurve erzeugt aus der Folge weckt ein natürliches Staunen.

Zentral ist auch, dass ein echter nicht-trivialer mathematischer Gehalt hinter einem Problem steckt damit das Verstehen des Hintergrunds zu einer echten neuen Erkenntnis werden kann. Reduziert sich ein komplex klingendes Problem in seiner Erkenntnis zu einer Trivialität, so ist der eigene Gewinn deutlich kleiner, als wenn sich, im besten Fall, ein Tor öffnet zu neuen Sichtweisen, zu einer neuen Welt.

Letztlich ist mathematische Begabungsförderung nichts anderes, als dem Lernenden die Möglichkeit zu geben, wirklich Mathematik zu treiben.

## Literatur


Metzger, W. (1962). *Schöpferische Freiheit*. Frankfurt: Kramer.

Rosebrock, S. (2010). Die Morse-Thue Folge, Monoid 101, Johannes-Gutenberg Universität Mainz, S. 3 – 7.

Rosebrock, S. (2011). Begabungs- und Kreativitätsförderung aus Sicht der Mathematikdidaktik, in Rosebrock/Schenz/Soff (Hg.), *Von der Begabungsförderung zur Begabungsgestaltung – Vom kreativen Umgang mit Begabungen in Mathematik*, LIT-Verlag, Berlin, S. 85 – 96.

Soff, M. (2011). Gestaltpsychologische Prinzipien zu Begabung und Kreativität, in Rosebrock/Schenz/Soff (Hg.), *Von der Begabungsförderung zur Begabungsgestaltung – Vom kreativen Umgang mit Begabungen in Mathematik*, LIT-Verlag, Berlin, S. 63 – 84.

Jürgen ROTH, Landau, Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

# Forschendes Lernen im Mathematikunterricht

Interesse für Neues zu entwickeln ist eine menschliche Grundhaltung bzw. Grundfähigkeit. Dazu gehören Neugier und das Bedürfnis, den Dingen auf den Grund zu gehen und diese zu hinterfragen. Es gibt viele Bücher, die den Weg einer Entdeckung oder Erfindung in der Mathematik allgemein verständlich beschreiben, wie etwa die Lösung des Problems der Fermatschen Vermutung (Singh 2000) oder die autobiographische Skizze „Das lebendige Theorem" von Cédric Villani (2013). Hierin beschreibt der französische Mathematiker und Fields-Medaillen-Träger auf spannende Art und Weise den Weg eines Forschers in der Mathematik bzw. seinen Weg des Entdeckens eines mathematischen Theorems, für das er letztlich die Fields Medaille erhalten hat. Er beschreibt die Suche eines Forschers, der „weit davon entfernt (ist), eine geradlinige Bahn zu verfolgen", und für den die Entdeckung „wie so oft im Leben ein langer Weg voller Rückwärtsbewegungen und Windungen" ist (S. 5).

In dem 1937 erschienenen Buch „Logic – The Theory of Inquiry" (zu deutsch „Logik – die Theorie der Forschung") hat sich John Dewey mit der Frage nach den Grundlagen der Forschung auseinandergesetzt, um sie insbesondere auch für Lernprozesse zugänglich zu machen. Für ihn besteht das Zentrale der Forschung darin, eine unbestimmte Situation mit wenigen oder keinen Zusammenhängen zwischen vorhandenen einzelnen Komponenten in eine geordnete Situation überzuführen, also insbesondere Zusammenhänge und Verknüpfungen zwischen den Komponenten der Situation zu erkennen und herzustellen (vgl. Roth & Weigand 2014).

„Forschung ist die gesteuerte oder gelenkte Umformung einer unbestimmten Situation in eine Situation, die in ihren konstitutiven Merkmalen und Beziehungen so bestimmt ist, daß die Elemente der ursprünglichen Situation in ein einheitliches Ganzes umgewandelt werden." (Dewey 1937, dt. 2008, S. 131)

## 1. Kann man Forschen lernen?

Am bayerischen Gymnasium gibt es in der Oberstufe das Wissenschaftspropädeutische Seminar", in dem „an exemplarisch vertieften Fachinhalten das wissenschaftliche Arbeiten erlernt … werden soll" (ISB 2008[2]). „Das W-Seminar ermöglicht forschendes Lernen und leitet im Kontext eines übergreifenden Seminarthemas zu selbständigem wissenschaftlichem Arbeiten an." (S. 9) Mögliche Themen in dem mathematischen „W-Seminar" waren etwa „Landvermessung", „Geheimcodes", „Komplexe Zahlen",

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 999–1002). Münster: WTM-Verlag

„Kombinatorische Optimierung“ oder „Mathematik in den Naturwissenschaften“

„Forschen“ in der Schule kann natürlich im Wesentlichen „nur“ das Entdecken und Erkunden eines *für Schüler subjektiv neuen Bereichs* sein. Der Erziehungswissenschaftler Rudolf Messner drückt das folgendermaßen aus: „Als forschendes Lernen können schulische Arbeitsformen dann bezeichnet werden, wenn sie dem Suchen und Finden von Erkenntnissen dienen, die für die Lernenden neu sind, und in Haltung und Methode analog den Einstellungen und dem systematischen Vorgehen erfolgen, wie es für wissenschaftliches Arbeiten charakteristisch ist.“ (Messner 2009, S. 23)

John Hattie (2009, dt. 2013) charakterisiert das „Forschende Lernen“ im Unterricht durch „herausfordernde Situationen (…) die Lernende auffordern Phänomene zu beobachten und zu hinterfragen; (…) Experimente auszudenken, (...) Daten zu analysieren; (…) Modelle zu entwerfen“. (Hattie 2013, S. 247)

Aufgrund seiner Metaanalysen kommt er zu dem Ergebnis: „Insgesamt zeigt sich, dass forschendes Lernen übertragbare Fähigkeiten des kritischen Denkens erzeugt, ebenso wie bedeutsame Vorteile im Wissensgebiet, eine verbesserte Leistung und eine verbesserte Einstellung gegenüber dem Unterrichtsfach.“ (Hattie 2013, S. 248). Mit einer Effektstärke d = 0,31 und Rang 86 (von 138 möglichen Rangplätzen) gehört das forschende Lernen allerdings zu den weniger einflussreichen Faktoren bzgl. der Wirksamkeit des Lernerfolgs.

## 2. Ziele des forschenden Lernens

Die Ziele des forschenden Lernens beziehen sich auf

- die *Inhalte des Unterrichts*: Aneignen und Wiederholen von Fachwissen im Hinblick auf ein besseres Verstehen von Lerninhalten;
- die *Prozessziele*: Entwickeln und Unterstützen zentraler allgemeiner Kompetenzen wie Begründen und Argumentieren Modellieren Kommunizieren;
- das *Entwickeln einer wissenschaftlichen* (oder wissenschaftspropädeutischen) *Einstellung*, die sich darin ausdrückt aus Bekanntem Neues zu erschließen.

## 3. Elemente der forschenden Lernens

Für den – möglichen – Ablauf forschenden Lernens im Unterricht gibt es verschiedene Vorschläge, etwa PRIMA, IMST oder FIBONACCI. Gemeinsam ist vielen Vorschlägen, dass forschendes Lernen in verschiedenen Phasen abläuft, die sich untergliedern lassen in:

- Untersuchung eines Themenfeldes und Entwickeln von Fragen
- Strukturierung des Themenfeldes: Einordnen in ein Wissensnetz
- Festhalten, Präsentieren der Ergebnisse
- Reflektieren, Weiterfragen

## 4. Ein Modell des forschenden Lernens

Aus dieser Vielfalt der Zugänge zum Begriff lässt sich forschendes Lernen zusammenfassend als Prozess bestehend aus drei untereinander vernetzten Phasen beschreiben (vgl. Roth & Weigand 2014), der in Abbildung 1 modellhaft dargestellt ist. Dieser Prozess wird durch die Konfrontation von Lernenden mit einem für sie subjektiv neuen mathematischen Phänomen angestoßen. Dazu ist es notwendig, dass sich Lernende bzgl. der Durchdringung dieses Phänomens Ziele setzen und Fragestellungen entwickeln oder sich zumindest auf von außen gesetzte Ziele und Fragestellungen einlassen. Auch während des Arbeitens werden sie sich immer wieder kleinere Zwischenziele setzen und auf neue Fragestellungen stoßen.

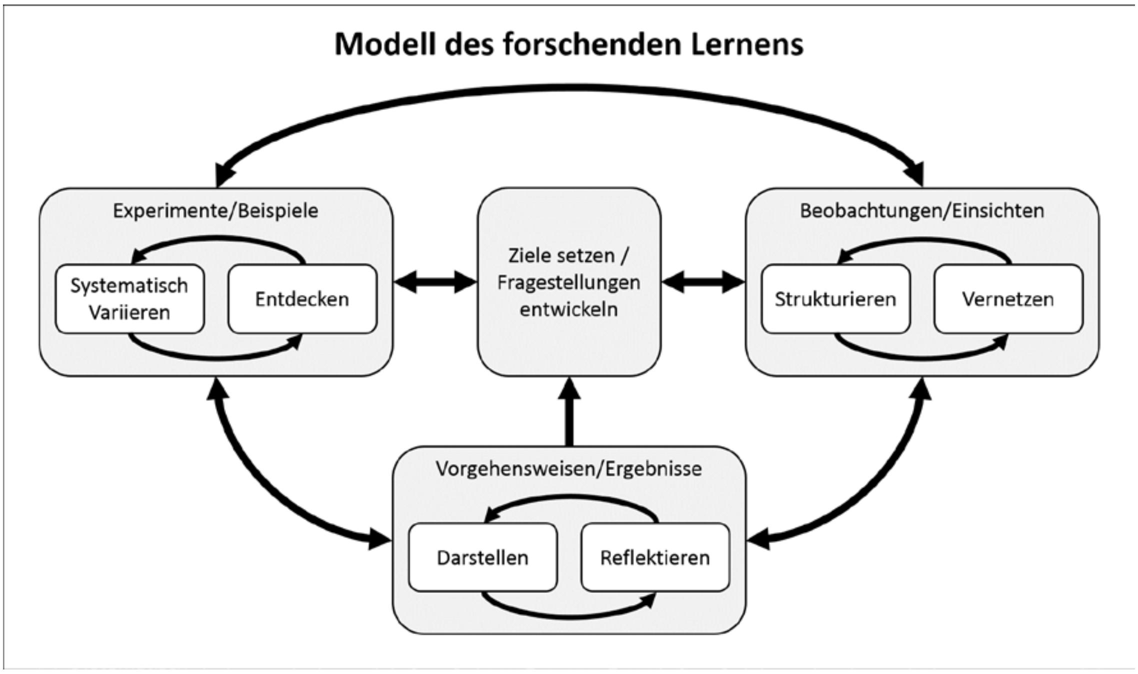



**Abbildung 1:** Modell des Forschenden Lernens aus Roth & Weigand (2014)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten den Prozess des forschenden Lernens – ausgehend von (selbst-)gesetzten Zielen und Fragestellungen – zu initiieren. Zum einen kann forschendes Lernen mit Experimenten bzw. Beispielen beginnen, die systematisch variiert werden. Dadurch wird es für Schüler/innen möglich, Zusammenhänge oder Details zu entdecken und Vermutungen anzustellen, die wieder zu systematischem Variieren ihres Experiments oder Beispiels führen können usw. Hier ergibt sich im Allgemeinen ein Wechselspiel zwischen systematischem Variieren und Entdecken, bei dem sich beide Aspekte gegenseitig bedingen.

Forschendes Lernen kann andererseits aber auch damit beginnen, dass Schüler/innen Beobachtungen bzw. Einsichten zu einem Phänomen strukturieren und damit untereinander in Beziehung setzen. Das Strukturieren wird in der Regel dazu führen, dass die neuen Beobachtungen und Einsichten mit bereits vorhandenem Wissen vernetzt werden. Dies kann wieder Anlass für ergänzende oder auch neue Strukturierungen der Beobachtungen und Einsichten zum betrachteten Phänomen sein. Unabhängig davon, mit welcher Phase das forschende Lernen einsetzt, werden sich stets vielfältige Vernetzungen mit den anderen Phasen dieses Prozesses ergeben.

Die dritte Phase im Prozess des forschenden Lernens ist das Darstellen von Vorgehensweisen und Ergebnissen. Dies kann in eigens gestalteten Forscherheften, aber auch im verwendeten Schulheft erfolgen. Nur auf der Grundlage von Skizzen, Tabellen, Graphen, Diagrammen oder verbalen Beschreibungen lassen sich erhaltene Ergebnisse adäquat reflektieren. Dies kann zur Optimierung der Darstellung führen, aber auch zu neuen systematischen Variationen an Experimenten und Beispielen anregen. Daraus resultierende Entdeckungen bzw. das Strukturieren von Beobachtungen und Einsichten kann dann wieder deren Vernetzung mit dem Vorwissen neu anstoßen. So lässt sich die Optimierung der Darstellung initiieren und damit die Reflektion der Vorgehensweisen und Ergebnisse vertiefen.

## Literatur


Dewey, J. (2008): *Logik – die Theorie der Forschung*. Suhrkamp, Frankfurt

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen*. Schneider: Hohengehren u. Baltmannsweiler

ISB (2008[2]). Die Seminare in der gymnasialen Oberstufe. Kastner: Wolznach

Messner, R. (2009): Forschendes Lernen aus pädagogischer Sicht. – In: Messner, R. (Hrsg.): *Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen*. Edition Körber-Stiftung, S. 15-30

Roth, J., Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. Erscheint in: *Mathematik lehren 184,* S. 2-10

Singh, S. (2000). *Fermats letzter Satz*. dtv: München (engl. Original 1997)

Ulm, V. (2011). Forschendes Lernen – ein Konzept für individuelle Förderung im Mathematikunterricht. In: Füchter, A. & Moegling, K. (Hrsg.): *Diagnostik und Förderung. Teil II: Beispiele aus der Unterrichtspraxis*; Prolog-Verlag. Immenhausen bei Kassel, S. 40-55

Villani, C. (2013). *Das lebendige Theorem*. S. Fischer: Frankfurt (Franz. Original 2012)

Jürgen ROTH, Landau, Heike WIESNER, Berlin

# Lernpfade − Ein Weg zur selbständigen und sinnvollen Nutzung von digitalen Werkzeugen durch Schüler/innen

Pointiert formuliert geht es beim Einsatz von Computerwerkzeugen im Mathematikunterricht darum, die Selbsttätigkeit der Schüler/innen zu unterstützen und digitale Werkzeuge sinnvoll zu nutzen, um die Ziele des Mathematikunterrichts zu erreichen. Probleme die dabei in der Praxis auftreten, drehen sich um den Umgang mit digitalen Werkzeugen. „Umgang" umfasst hier drei Aspekte, nämlich die Handhabung (Werkzeugkompetenz), die methodische Unterrichtseinbindung (Methodenkompetenz) und die technisch-organisatorische Verfügbarkeit. Ein Weg zur konstruktiven Auseinandersetzung mit diesen Problemen ist der Einsatz von Lernpfaden.

## 1. Lernpfade – digitale Werkzeuge selbständig und sinnvoll nutzen

Die Entstehung von Lernpfaden lässt sich im Zuge der Einbindung von Computerwerkzeugen zur selbständigen Nutzung durch Schüler/innen im Mathematikunterricht anhand von drei bis vier Schritten nachzeichnen. Der erste Zugang bestand darin, den Schüler/inne/n gleich zu Beginn *Computerwerkzeuge ohne Vorstrukturierung* zur Verfügung zu stellen. Hier müssen Schüler/innen die zur Bearbeitung der Aufgabenstellung notwendigen Konfigurationen von Grund auf selbst erstellen. Dies kann gerade zu Beginn dieser Arbeitsweise zu einer mathematikfreien „Produktschulung" am Werkzeug führen. Als Reaktion auf diesen Befund haben etwa Elschenbroich/Seebach (1999) auf *vorgefertigte Konfigurationen* (sogenannte elektronische Arbeitsblätter) gesetzt, mit denen Schüler/innen angeleitet durch Arbeitsaufträge in Form einer Experimentierumgebung an mathematischen Fragestellungen arbeiten. Die daraus resultierende starke Modularisierung und Zergliederung in kleinste Einheiten führte zur Entwicklung von *dynamischen Lernumgebungen* bei denen mehrere elektronische Arbeitsblätter über Aufgabentexte, Bilder und Hyperlinks miteinander verknüpft wurden. Bereits hier ging es darum Schüler/innen selbstständig im eigenen Arbeitstempo arbeiten zu lassen und eine Dokumentation der Ergebnisse anzuregen (vgl. Ulm 2008). *Lernpfade* können als Weiterentwicklung von dynamischen Lernumgebungen gesehen werden. Kennzeichnende Eigenschaften werden in folgender Definition festgehalten.

**Definition Lernpfad:** Ein Lernpfad ist eine internetbasierte Lernumgebung, die mit einer Sequenz von aufeinander abgestimmten Arbeitsaufträgen strukturierte Pfade durch interaktive Materialien (z. B. Applets) anbietet, auf denen Lernende handlungsorientiert, selbsttätig und eigen-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1003–1006). Münster: WTM-Verlag

verantwortlich auf ein Ziel hin arbeiten. Da die Arbeitsaufträge eine Bausteinstruktur aufweisen, können die Lernenden jeweils für ihren Leistungsstand geeignete auswählen. Durch individuell abrufbare Hilfen und Ergebniskontrollen sowie die regelmäßigen Aufforderungen zum Formulieren von Vermutungen, Experimentieren, Argumentieren sowie Reflektieren und Protokollieren der Ergebnisse in den Arbeitsaufträgen wird die eigenverantwortliche Auseinandersetzung mit dem Lernpfad explizit gefördert.

Um das Arbeiten mit Lernpfaden möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten, ist eine klare Navigationsstruktur notwendig. Dazu gehört insbesondere die Darstellung der Struktur des Lernpfades über ein verlinktes Inhaltsverzeichnis, die es ermöglicht den Lernpfad nicht nur linear abzuarbeiten, sondern auch ganz gezielt einzelne Unterpunkte anzuspringen. Es werden sprechende Navigations- und Hinweisicons eingesetzt von denen insbesondere die Icons, die eine Partnerarbeit bzw. das Ergänzen des Laborprotokolls anregen, von Bedeutung sind. Sie machen an vielen Stellen bewusst, wie wichtig die Diskussion und Reflexion der Arbeit am Lernpfad ist und dass die Ergebnisse und Vorgehensweisen unbedingt festgehalten werden müssen. Dies soll insbesondere auch der Entschleunigung des Arbeitens mit Computerwerkzeugen dienen und die Kommunikation zwischen den Schüler/inne/n aufrechterhalten. Beispiele für Lernpfade findet man unter der Internetadresse http://lernpfade.mathematikunterricht.net. Dort findet man neben Lernpfaden die in HTML programmiert und damit relativ unveränderlich sind auch solche, die in einem Wiki gestaltet wurden. Gerade bei letzteren ist die Zusammenarbeit zwischen Lehrkräften besonders gut möglich, weil hier Lernpfade jederzeit an die eigene Klassensituation und z. B. an das eingeführte Schulbuch angepasst werden können.

## 2. Einschätzung zu Lernpfaden – Eine Empirische Exploration

Im Rahmen der von den Initiativen ACDCA, GeoGebra, mathe online und der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich durchgeführten Projekte stehen eine große Anzahl Lernpfade zur Verfügung (vgl. http://wikis.zum.de/medienvielfalt/Hauptseite, Zugriff 21.3.2014).

Um herauszufinden, wo die Stärken und Schwächen der verschiedenen Werkzeuge, Medien und Materialien innerhalb der Lernpfade liegen, wurde eine *Experten-Befragung* und eine Evaluation ausgesuchter Lernpfade in mehreren Klassen *(Fallstudie)* im Zeitraum von 2009 bis 2013 durchgeführt.

Acht ausgesuchte Expert/innen aus den Bereichen Fachdidaktik Mathematik, Mediendidaktik und Diversity haben die Lernpfade aus ihrer Perspektive beurteilt. Eine zentrale Frage im Rahmen der *Expertengespräche* war die Frage nach den Kompetenzen, die man durch den Lernpfad erwirbt. Aus Sicht der Expertinnen und Experten wurde dabei in den meisten Lernpfaden der Kompetenzerwerb (u.a. rechnen, operieren, modellieren, kommunizieren) transparent abgebildet. Damit auch fortgeschrittene Lernende interessiert bleiben, wird eine situative, aufgabenspezifische und stufenweise Steigerung von Kompetenzen als sinnvoll erachtet, bei der der Einsatz von Interaktivität oder Gruppenarbeit jeweils adaptiert werden muss. Positiv bewertet wird insgesamt, dass in den analysierten Lernpfaden verschiedene Medien eingesetzt und auch die Sozialformen (z.B. Einzel- und Gruppenarbeit) gewechselt werden können. Ein hoher Grad an interaktiven Features ist nicht zwangläufig ein Qualitätskriterium. Vielmehr hat sich die Aussage „es kommt darauf an“ tendenziell durchgesetzt. Es geht nicht um die Frage, wie vorhandene Medien gut eingesetzt werden können. Vielmehr wird ausgehend von den Zielen des Mathematikunterrichts, die angesteuert werden, gefragt, welche Medien das Erreichen dieser Ziele geeignet unterstützen.

Auch die im Rahmen der *Fallstudie* erhobenen Daten aus der Befragung der Lehrenden und Lernenden ergeben insgesamt einen positiven Befund. Obwohl sich zeigt, dass die Infrastruktur an Schulen vereinzelt noch Probleme verursacht, schätzen sowohl Lehrende als auch Lernenden die Lernpfade insbesondere wegen der dynamischen Lernobjekte, die eigenes Experimentieren ermöglichen. Darüber hinaus kommt der modulare und flexible Aufbau von Lernpfaden den Lehrenden entgegen. Schüler/innen wünschen sich, dass der Lernpfadeinsatz von Plenumsphasen begleitet wird und alltagsnahe Aufgabenstellungen angeboten werden.

Die Expert/inn/en fordern ein, dass Diversity-Aspekte nicht nur auf der Inhaltsebene, sondern gerade auch innerhalb des didaktischen Konzeptes mit seinen gewählten (Alltags-)Beispielen verwirklicht werden müssen. Mittlerweile gibt es technikdidaktische Ansätze, die einen „mittleren Raum“ stärken, der beispielsweise bezogen auf Geschlechterkonstruktionen Jungen wie Mädchen gleichermaßen in den Bann zieht. (vgl. u.a. Moser/Hannover/Becker 2013). Diesen mittleren Raum markieren u.a. Zirkus-, Fahrrad-, Handy- oder Tierbeispiele, die nicht mehr mit einem bestimmten Geschlecht assoziiert werden.

Die Antworten der Lehrer/innen gehen einher mit der Einschätzung der Expert/innen, dass die technischen Aspekte der Lernpfade ausgereift und hier keine wesentlichen Änderungen notwendig sind. Abweichungen lassen sich in den Antwortmustern der Lehrenden und Expert/inn/en in den inhaltlichen Aspekten und der methodisch-didaktischen Vorgehensweise erkennen. So wurde insbesondere die methodisch-didaktische Vorgehensweise in den Lernpfaden von den Lehrkräften eher nicht in Frage gestellt, während die Expert/inn/en gerade in diesem Bereich Verbesserungsvorschläge eingebracht haben. Das kleinschrittige Vorgehen in einigen Lernpfaden wurde bei den Expert/inn/en eher bemängelt, während diese Vorgehensweise den befragten Lehrkräfte eher zusagte, da sich dadurch die Einbindungsmöglichkeiten auch in strukturierte Unterrichtskonzepte erhöhten. Ein modularer Aufbau von Lernpfaden, der Kürzungs- wie Erweiterungsmöglichkeiten zulässt, wäre hier hilfreich.

Um im Schulalltag leicht adaptierbar zu sein, müssen Lernpfade didaktisch und inhaltlich eine gewisse Flexibilität aufweisen und vor allem gut begleitet werden. Dies berührt insbesondere die in den Interviews mit den Fachlehrenden immer wieder thematisierte Problematik der Binnendifferenzierung: Gerade mit Blick auf unterschiedliche Lernniveaus, die durch das Abitur in 12 Jahren gestiegenen kognitiven Anforderungen an jüngere Schüler/innen und schulpraktisch zu umfangreiche Lernpfade sollten Lernpfade modular sowie themenspezifisch und/oder lernniveauspezifisch binnendifferenziert gestaltet werden.

Die empirische Exploration hat ferner ergeben, dass es beim eigenverantwortlichen Lernen mit Lernpfaden nicht nur um richtige oder falsche Lösungen oder um die Frage des Einsatzes von computergestützten und enaktiv nutzbaren Materialien geht, sondern insbesondere auch darum, wie Schüler/innen Ergebnisse und Vorgehensweisen formulieren, dokumentieren und dabei mathematische Begriffe einsetzen. Die Lernpfade können hier eine wichtige Brückenfunktion erfüllen und die Schüler/innen bei der Entwicklung der Fähigkeit zum Dokumentieren unterstützen.

Es zeigt sich, dass die Lernpfadentwicklung dann besonders gut gelingt, wenn Lehrende und Lernende als Akteure partizipativ und kontinuierlich in den Entstehungsprozess eingebunden werden.

## Literatur

Elschenbroich, H.-J., Seebach, G. (1999). *Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Euklid, Klasse 7/8*. Köln: Dümmler-Stam.

Ulm, V. (2008). *Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen. Sekundarstufe* (3. Auflage). Seelze: Kallmeyer.

Moser, F., Hannover, B. & Becker, J. (2013). *Subtile und direkte Mechanismen der sozialen Konstruktion von Geschlecht in Schulbüchern. Vorstellung eines Kategoriensystems zur Analyse der Geschlechter(un)gerechtigkeit von Texten und Bildern.* Gender, 3,77-93.

Frank ROTHE, Salzburg

# Verstehen im Mathematikunterricht

Was macht Verstehen im Mathematikunterricht aus? Dieser Beitrag beschreibt eine mögliche Antwort, indem der Begriff des Verstehens aus zwei unterschiedlichen Konstituenten bestehend präzisiert wird. Konkrete Beispiele aus dem Mathematikunterricht verdeutlichen diesen Verstehensbegriff und seine didaktischen Gestaltungsmöglichkeiten. Gleichzeitig zeigt sich, dass diese Wesenszüge des Verstehens sich direkt auf den Begriff und die Praxis des Übens auswirken.

## Der Verstehensbegriff

Das Verstehen ist ein zentraler Aspekt im Mathematikunterricht. Dabei erscheint Verstehen oft eingebettet in den umfassenderen Begriff des Lernens.

Bei Erich Chr. Wittmann findet sich die Formulierung des Lernens in Sinnzusammenhängen. Dabei ermöglichen fachliche Sinnzusammenhänge aus der Erfahrungs- und Erlebenswelt der Kinder ein individuelles sinnerfülltes Lernen (vgl. Wittmann & Müller, 2007, S. 164). Dies lässt sich so interpretieren, als sei Verstehen ein Lernen von Inhalten und Zusammenhängen, welche mit Sinn oder Bedeutung für die Lernenden erfüllt sind. Rolf Weyrauch beschreibt den Verstehensprozess als ein Beziehungsgeflecht, welches überhaupt erst eine Sinngebung und damit eine tatsächliche subjektive Inbesitznahme einer Erkenntnis ermögliche (vgl. Weyrauch, 2001, S. 27). Alle diese Autoren beschreiben in ähnlicher Weise das Verstehen als ein In-Beziehung-Setzen.

Eine ausdrückliche Formulierung von Verstehen in der Mathematik in diesem Sinne – findet sich bei Werner Blum. Unter dem Verstehen mathematischer Inhalte könne man das Erfassen von deren Bedeutung ansehen (Blum & Wiegand, 2000, S. 106). Diese Formulierung betont zum einen die mathematischen Inhalte und zum anderen das Erfassen von deren Bedeutung als Aktivität. Diese Sichtweise ist bemerkenswert. Bei dem Psychologen Jerome Bruner ist Verstehen ein zentraler Aspekt des entdeckenden Lernens. Es basiert zunächst auf dem Entwickeln von Vermutungen, Annahmen und induktiven Schlussfolgerungen, die anschließend gezielt überprüft werden können (vgl. Woolfolk & Schönpflug, 2008, S. 356 f.).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1007–1010). Münster: WTM-Verlag

Vor diesem Hintergrund soll im Folgenden Verstehen aufgefasst werden als ein aktives In-Beziehung-Setzen von Inhalten. Dieser Verstehensprozess hat zwei Wesenszüge.

Mit Blick auf den Erkenntnisprozess erfüllen sie unterschiedliche charakteristische Funktionen. Die wesentliche Funktion des ersten Wesenszuges ist das Entwickeln einer möglichst konkreten Idee von dem, was gemeint sein könnte. Die wesentliche Funktion des zweiten Wesenszuges betrifft das aktive und gezielte Ausprobieren der zuvor gewonnenen Idee. Die entwickelte Idee wird hinsichtlich ihrer mathematischen Bedeutung und inhaltlichen Konsequenzen konkret nachvollzogen. Abschließend erweist sich vergleichend, ob überhaupt und inwiefern die konkrete Idee das Gemeinte widerspiegelt. In diesem (Überprüfungs-) Rahmen entspricht die konkrete Idee dem tatsächlich Gemeinten und kann als bestätigtes bzw. erprobtes Verständnis des Gemeinten bezeichnet werden. Beide Wesenszüge gestalten den Lernprozess als Verstehensprozess mit.

**Umsetzung im Mathematikunterricht**

Welche didaktische Perspektive hat dieser Verstehensbegriff im Mathematikunterricht? Dies soll exemplarisch am Thema der quadratischen Gleichungen skizziert werden. Konkret geht es um die ersten Schritte der Einführung der Lösungsformel quadratischer Gleichungen unter Zuhilfenahme des obigen Verstehensbegriff mit seinen zwei Wesenszügen.

$$
\begin{array}{rcll}
x^2 + 6x + 8 & = & 0 & |-8 \\
x^2 + 6x & = & -8 & \\
x^2 + 6x + \underbrace{9}_{(6:2)^2} & = & +9-8 & \\
(x+3)^2 & = & 9-8 & |\pm\sqrt{\ } \\
x+3 & = & \sqrt{9-8} & |-3 \\
{}_1x_2 & = & -3\pm\sqrt{9-8} & \\
x_1 & = & -3+\sqrt{9-8}=-2 & \\
x_2 & = & -3-\sqrt{9-8}=-4 &
\end{array}
$$

**Abbildung 1: quadratische Gleichung**

Zunächst wird an das Vorwissen der quadratischen Ergänzung angeknüpft. Entdeckendes Üben evoziert bei den Lernenden die Frage, wie das Rechenverfahren der quadratischen Ergänzung abgekürzt werden kann. Wie lässt sich aus der Aufgabenstellung (s. Abb. 1, kurzer Pfeil) direkt die Zeile mit ${}_1x_2$ (s. Abb. 1, langer Pfeil) ableiten? Hierzu werden die Zahlen, z.B. die -3, im Rechengang zurückverfolgt. Dieses Zurückverfolgen geschieht unter dem Aspekt „woher und warum erscheint die -3“. So entsteht als eine mathematisch begründete Handlungsanweisung die konkrete Idee, wie sich aus der Aufgabenstellung die -3 (und die anderen Zahlen) entwickelt (erster Wesenszug). Im Folgenden wird diese Vermutung an charakteristischen Gleichungen ausprobiert.

Dieses Ausprobieren hat noch nicht den Charakter des Übens, bei dem schon immer etwas gekonnt wird. Es ist ein Experimentieren, von dem Susanne Prediger et al. sagen, es sei für Lernende von Bedeutung zu wissen, ob sie im epistemologischen Modus des Erfindens oder im Modus des Anwendens von bekannten Elementen seinen (Prediger, Hußmann, Leuders, & Barzel, 2014).

In dem obigen Beispiel wurde dargestellt, wie der Verstehensbegriff auf mathematisches Methodenwissen angewandt werden kann. Auch seine Anwendung auf Begriffswissen ist möglich (vgl. forschung.calculemus.at/2014/03/19/verstehen-auf-der-48-gdm-tagung/).

### Verstehen und Üben

Abbildung 2: Konzept "Erkunden - Ordnen -Vertiefen"

Verstehen und Üben erscheinen in einer interessanten Wechselbeziehung, wenn die jeweils dabei aktivierten kognitiven Prozesse der Lernenden differenziert betrachtet werden. Zum Zwecke der größeren Deutlichkeit soll dies anhand des ganzheitlichen Unterrichtskonzepts von Erkunden-Ordnen-Vertiefen geschehen (Barzel, Prediger, Leuders, & Hussmann, 2011). Dem modernen Übungsbegriff folgend ist Üben integraler Bestandteil in jeder „Phase“ des Lernprozesses (Büchter & Leuders, 2005, S. 140) (Abb. 2, dunkler Verlauf). Zudem bildet das Üben in diesem Unterrichtskonzept trivialer Weise einen Schwerpunkt in den (Teil-) Prozessen Üben und Vernetzen. Auch das Verstehen bildet einen Schwerpunkt insofern die beteiligten kognitiven Prozesse der Lernenden betrachtet werden. Verstehensprozesse sind besonders wichtig beim individuellen Lösen von Problemen (vgl. Erarbeiten Abb. 2), dem kommunikativen Austauschen der Ergebnisse und im anschließend Übergang zum Systematisieren. Über den Schwerpunkt hinaus scheint jedoch Verstehen auch integraler Bestandteil in allen „Phasen“ des Lernprozesses (Abb. 2, heller Verlauf) zu sein. Hierzu betonen Büchter & Leuders, dass Üben nur mit einem Mindestmass an Verstehen, Sinn und Transfer sinnvoll sei, um der Entstehung von isoliertem Wissen vorzubeugen (Büchter & Leuders, 2005, S. 143).

Der Beschreibung der kognitiven Prozesse bei Lorin Anderson et al. (Anderson & Krathwohl, 2001) folgend lässt sich die oben formulierte Wechselbeziehung von Verstehen und Üben folgender Maßen präzisieren. Im Verstehensprozess aktivieren die Lernenden vorzugsweise die Denkkategorien Understand, Analyze und Evaluate. Differenziert betrachtet trifft dies insbesondere auf den ersten Wesenszug des Verstehens zu, während es beim zweiten Wesenszug auch zur kognitiven Aktivierung von Apply kommt. Beim Üben ist es in gewisser Weise umgekehrt. Die Lernenden greifen verstärkt auf die kognitiven Prozesse von Apply und Remember zurück. Ausdrücklich ist dies der Fall, wenn es um das wiederholende Üben geht. Beim vernetzenden Üben werden zunehmend die kognitiven Prozesse von Analyze und Understand wieder bedeutsam (vgl. Rothe, 2011, S. 97-101).

## Literatur


Anderson, L. W. & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing* (Abridged Ausg.). New York {[u.a.]: Longman.

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T. & Hussmann, S. (2011). Kontexte und Kernprozesse - Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*.

Blum, W. & Wiegand, B. (2000). Vertiefen und Vernetzen - Intelligentes Üben im Mathematikunterricht. In R. Meier (Ed.), *Üben & Wiederholen* (S. 106-108). Seelze: Friedrich.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln : Lernen fördern - Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T. & Barzel, B. (2014). Kernprozesse - Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Eds.), *Unterrichtsentwiclung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (online ed., S. 81-92). Münster: WTM Verlag.

Rothe, F. (2011). *Struktur kognitiver Prozesse*. Münster u.a.: LIT.

Weyrauch, R. (2001). *Verstehensprozesse von Schülern im Rahmen der Begabtenförderung am Beispiel der nichteuklidischen Geometrie* (1. Aufl.). Göttingen: Cuvillier.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2007). *Handbuch produktiver Rechenübungen. 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins* (2. Ausg.). Stuttgart: Klett.

Woolfolk, A. & Schönpflug, U. (2008). *Pädagogische Psychologie* (10. Aufl.). München {[u.a.]: Pearson Studium.

Benjamin ROTT, Timo LEUDERS, Elmar STAHL, Freiburg

# „Wie sicher ist Mathematik?" – epistemologische Überzeugungen und Urteile und warum das nicht dasselbe ist

## Einleitung

In den letzten Jahren ist ein zunehmendes Interesse an empirisch abgesicherten Erkenntnissen zum Kompetenzerwerb von Studierenden an Hochschulen zu verzeichnen. In diesem Kontext steht auch das BMBF geförderte Programm KoKoHs (Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor, Blömeke & Zlatkin-Troitschankaja, 2013), in dessen Rahmen sich das Verbundprojekt LeScEd (**Le**arning the **Sc**ience of **Ed**ucation, Pädagogische Hochschule Freiburg (Leitung) und Universitäten in Freiburg, Göttungen, Landau und Berlin) auf die Kompetenzmessung in bildungswissenschaftlichen Studiengängen konzentriert. An dieser Stelle berichten wir über ein Teilprojekt, welches sich der Erfassung und Erforschung epistemologischer Überzeugungen zum Fach Mathematik widmet.

Die Epistemologie ist ein Teilgebiet der Philosophie, die sich mit der Natur menschlichen Wissens, seinen Grenzen, seinen Quellen und seiner Rechtfertigung auseinandersetzt. Bei epistemologischen Überzeugungen handelt es sich um Beliefs über die Natur des Wissens, beispielsweise zu der Frage, als wie sicher Wissen angesehen wird. Man geht heutzutage davon aus, dass sich epistemologische Überzeugungen in mehr oder weniger unabhängigen Dimensionen von wenig-reflektiert / naiv bis hin zu reflektiert / sophistiziert entwickeln (vgl. Hofer & Pintrich 1997). Viele Studien haben einen Zusammenhang zwischen sophistizierten epistemologischen Überzeugungen und erfolgreichen Lernstrategien – und damit auch besseren Lernergebnissen – nachgewiesen (vgl. Hofer & Pintrich 1997; Stahl 2011).

## Theoretische Überlegungen

Überzeugungen bzw. Beliefs sind Konstrukte für menschliche Kognitionen, mit denen man zu beschreiben versucht, welche (i.d.R.) stabilen, subjektiven Annahmen Personen über sich und ihre Umwelt haben (vgl. Philipp 2007). Beliefs filtern die Wahrnehmung und leiten Handlungen (vgl. ebd.).

In der Mathematikdidaktik werden Beliefs zur Epistemologie oft im Zusammenhang mit „mathematischen Weltbildern" untersucht und gelten – wie Beliefs im Allgemeinen – als eher stabil und situationsunabhängig. In neueren Studien mehren sich allerdings Hinweise darauf, dass auch kontextabhängige, flexiblere Überzeugungen existieren (vgl. Stahl 2011). Dies wirft Fragen auf in Bezug auf ihre theoretische Verortung und Messung.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1011–1014). Münster: WTM-Verlag

Stahl (2011) schlägt in diesem Zusammenhang eine Unterscheidung vor von relativ stabilen *epistemologischen Überzeugungen* (*Beliefs*) und situationsspezifischen *epistemologischen Urteilen* (*Judgments*). Letztere

> "[…] are defined as learners' judgments of knowledge claims in relation to their beliefs about the nature of knowledge and knowing. They are generated in dependency of specific scientific information that is judged within a specific learning context. […] [A]n epistemological judgment might be a result of the activation of different cognitive elements (like epistemological beliefs, prior knowledge within the discipline, methodological knowledge, and ontological assumptions) that are combined by a learner to make the judgment." (Stahl 2011, p. 38 f.)

## Beschreibung der Studie und Forschungsmethoden

Eine weit verbreitete Methode zur Erfassung von Beliefs sind Fragebögen – deren Verwendung jedoch nicht unumstritten ist, gerade hinsichtlich ihrer Validität (vgl. Stahl 2011, S. 41 f.). Insbesondere erscheint die einengende Form der Befragung durch vorformulierte, aber kontextunabhängig formulierte Items nicht geeignet zu sein, um komplexere Überzeugungsstrukturen und deren Abhängigkeit von möglicherweise verschiedenen Bezugskontexten erfassen zu können. Daher verwenden wir Interviews anstelle von Fragebögen. Interviewpartner sind vorrangig Studierende des Lehramts Mathematik; zur Auslotung der möglichen Breite von Argumentationen wurden zusätzlich Mathematiklehrer, professionelle Mathematiker und Professoren befragt. In diesem Artikel konzentrieren wir uns auf Interviews zum Thema *Sicherheit mathematischen Wissens*.

Für den hier vorgestellten Teil der Studie wurden halbstandardisierte Leitfadeninterviews durchgeführt, die jeweils mit zwei konträren Aussagen von Mathematikern zum Thema begannen (vgl. Tab. 1). Die Probanden sollten zu diesen Zitaten Stellung nehmen; anschließend wurden ihre Position und deren argumentative Tiefe durch kritische Nachfragen und Input in Form von Anekdoten aus der Geschichte der Mathematik weiter ausgelotet.

| **Mathematisches Wissen ist sicher** | **Mathematisches Wissen ist unsicher** |
|---|---|
| „In der Mathematik gilt eine Erkenntnis für immer. Ein Satz wird nie falsch. Im Gegensatz zu allen anderen Wissenschaften werden in der Mathematik die Erkenntnisse akkumuliert. […]<br>Es ist unmöglich, daß ein Satz, der einmal richtig bewiesen wurde, sich aus späterer Sicht als falsch herausstellt. Jeder Satz ist für die Ewigkeit."<br><br>(Albrecht Beutelspacher [2001, S. 235]) | „Es ist die Frage, ob sich Mathematiker über die Wahrheit bestimmter, komplexer, mathematischer Ergebnisse immer absolut sicher sein können […]. Mit Bezug auf einige sehr komplexe Themen ist mathematische Wahrheit das, was nach Annahme der großen Mehrheit der Gemeinschaft der Mathematiker überzeugende Argumente hat. Und solche Wahrheit ist fehlbar.<br>Auch wenn gravierende Irrtümer natürlich selten sind."<br>(Alan H. Schoenfeld [1994, S. 58 f.]) |

Tabelle 1: Einstiegszitate für das Interview zur „Sicherheit mathematischen Wissens"

## Ergebnisse

Aus bislang 17 Interviews zum Thema *Sicherheit mathematischen Wissens* werden hier vier in Kurzform präsentiert. Diese Auswahl dient der Vorstellung der vier Extrempositionen die sich aus der Kombination der beiden Merkmale *sicher – unsicher* und *nicht-reflektiert – reflektiert* ergeben.

Der Student T.H. und der Mathematiker A.R. vertreten beide die Position, mathematisches Wissen sei sicher. Auf der einen Seite behauptet T.H. – ohne allerdings konkrete Beispiele nennen zu können: „Wenn ein Satz ist, dann existiert er halt.“ Es könne zwar mal passieren, dass ein Satz widerlegt werde, aber das sei die Ausnahme, mathematisches Wissen sei sicher. Auf der anderen Seite argumentiert A.R. wesentlich reflektierter. Seine These ist, dass mathematische Sätze sicher sind, wenn sie korrekt bewiesen wurden; die Mathematik an sich sei nicht das Problem, Fehler würden von Menschen verantwortet. Als Beispiel führt er unter anderem den „letzten Satz von Fermat“ an, dessen Beweis von Andrew Wiles zunächst fehlerhaft gewesen sei und dann korrigiert werden konnte. In einem solchen Fall, an den momentanen Grenzen der Mathematik, könnten solche Fehler passieren. In mehreren Jahren, wenn die von Wiles verwendeten Methoden geläufiger seien, wäre der Satz so sicher wie Erkenntnisse, die in universitären Lehrveranstaltungen vermittelt würden.

Im Gegensatz dazu vertreten B.G., eine Lehrerin kurz vor Beginn ihres Referendariats, und T.B., ein Professor für Mathematik und ihre Didaktik im Ruhestand, beide die Position, mathematisches Wissen sei unsicher. Für B.G. ist alles Wissen unsicher, es bestehe immer die Möglichkeit, dass man feststelle, dass etwas doch nicht stimme, auch in der Mathematik. Sie kann diese Einstellung gegenüber Wissen allerdings nicht mit Argumenten oder Beispielen stützen. T.B. hingegen führt an, warum es für ihn Bereiche der Mathematik gibt, in denen man nicht von absoluter Sicherheit sprechen könne. Unter anderem erwähnt er, dass verschiedene mathematische Theorien zu verschiedenen Aussagen über den gleichen Gegenstand kommen können. Beispielsweise sei 0,999… in der Grenzwertmathematik gleich eins, in der Infinitesimalmathematik hingegen kleiner als 1.

Die vier hier skizzierten Interviews zeigen, dass dieselbe epistemologische Position von verschiedenen Personen unterschiedlich reflektiert vertreten werden kann. Der Einsatz eines klassischen Belief-Fragebogens (CAEB, vgl. Stahl & Bromme 2007) zeigt in diesem Fall sowohl bei T.H. und A.R. als auch bei B.G. und T.B. dasselbe Ergebnis: math. Wissen ist sicher bzw. unsicher. Erst die tiefergehende Analyse mithilfe unserer Interviews deckt darüber hinaus den Grad der Reflexion auf und zeigt damit, dass das alleinige Erfassen von Beliefs durch Fragebögen kein adäquates Bild liefert:

"In a questionnaire with rating scales, [these] persons would give the same answer. However, the conclusion that their responses are an expression for comparable epistemological beliefs would be wrong. Their epistemological judgments are built on different cognitive elements to evaluate the knowledge claim." (Stahl 2011, S. 49)

## Diskussion

In der vorliegenden Studie können die theoretischen Positionen von Stahl (2011) empirisch untermauert werden: herkömmliche Fragebögen reichen nicht aus, epistemologische Überzeugungen in ihrer Tiefe zu erfassen; darüber hinaus bedarf es einer stärker ausdifferenzierten Theorie, die (stabile) *Beliefs* von (situationsbezogenen) *Judgments* unterscheidet, um die Ergebnisse unserer Studie sinnvoll deuten zu können.

Im nun folgenden Teil der Studie geht es um die Entwicklung und Erprobung eines web-basierten, adaptiven Fragebogens, um epistemologische Beliefs und Judgments ökonomisch (d.h. mit geringerem Aufwand als mithilfe von Interviews) und gleichzeitig valide zu erfassen. Mithilfe dieses Instruments soll u.a. die Entwicklung der epistemologischen Positionen von Lehramtsstudierenden auch in Beziehung zu ihrem (anderweitig erfassten) mathematischen Wissen untersucht werden.

## Literatur


Beutelspacher, A. (2001): *Pasta all'infinito – Meine italienische Reise in die Mathematik*. München: dtv.

Blömeke, S. & Zlatkin-Troitschanskaia, O. (2013): Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor: Ziele, theoretischer Rahmen, Design und Herausforderungen des BMBF-Forschungsprogramms KoKoHs (*KoKoHs Working Papers, 1*). Berlin & Mainz: Humboldt-Universität & Johannes Gutenberg-Universität.

Hofer, B. K. & Pintrich, P. R. (1997): The Development of epistemological Theories: Beliefs About Knowledge and Knowing and Their Relation to Learning. In: *Review of Educational Research 1997, 67 (1)*, S. 88 – 140.

Philipp, R. A. (2007): Mathematics Teachers' Beliefs and Affect (Chapter 7). In: Lester, F. K. (Hrsg.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, S. 257 – 315.

Schoenfeld, A. H. (1994): Reflections on Doing and Teaching Mathematics (Kap. 3). In: Schoenfeld, Alan H. (Hrsg.): *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 53 – 69.

Stahl, E. (2011). The Generative Nature of Epistemological Judgments: focusing on Inter-actions Instead of Elements to Understand the Relationship Between Epistemological Be-liefs and Cognitive Flexibility (Kap. 3). In: Elen, Jan; Stahl, Elmar; Bromme, Rainer & Clarebout, Geraldine (Hrsg.): *Links Between Beliefs and Cognitive Flexibility – Lessons Learned*. Dordrecht: Springer, S. 37 – 60.

Stahl, E. & Bromme, R. (2007): The CAEB: An instrument for measuring connotative aspects of epistemological beliefs. In: *Learning and Instruction 17*, S. 773 – 785.

Benjamin ROTT, Larissa KORTE, Stephanie WESSENDORF

# Analyse von Problembearbeitungsprozessen am Beispiel der TIMSS-Aufgabe „K10“

Sowohl *Begründen und Beweisen* als auch *Problemlösen* sind wichtige Bestandteile von Mathematik-Curricula überall auf der Welt. Obwohl es bei beiden Kompetenzen um math. Argumentationen geht, werden sie in der Regel getrennt behandelt und beforscht (Mamona-Downs & Downs 2013). Problemlösen wird eher mit dem Prozess in Verbindung gebracht, wohingegen Begründen oft auf das fertige Produkt reduziert wird (vgl. ebd.).

Das „K10-Projekt“ der Hannoveraner Arbeitsgruppe bildet die Schnittstelle dreier Projekte zu beiden Themen Begründen und Beweisen und Problemlösen: Es stellt (1) eine Begleit- und Nachfolgestudie zu Rott (2013) dar, in welcher die äußere Struktur von Problembearbeitungsprozessen mithilfe von Episoden untersucht wird. Weiterhin ist das Projekt (2) ein Bestandteil der Evaluation des 1,5-jährigen Heurismentrainings von Brockmann-Behnsen (2012). Darüber hinaus bildet das Projekt (3) einen wichtigen Teil der Problemlöse-Studie von Gawlick (in dieser Sektion).

Bei „K10“ handelt es sich um eine TIMSS-Aufgabe (s. Tab. 1), deren Bearbeitung von Studierenden und Neuntklässlern videographiert und ausgewertet wurde. In diesem Beitrag werden ausgewählte Ergebnisse des oben genannten Projekts (1) und erste Auswertungen des Projekts (2) präsentiert.

## Hypothesen und Forschungsfragen

Die „K10“-Bearbeitungen dienen dazu, folgende, von Rott (2013) mit Fünftklässlern aufgestellte, Hypothesen zu überprüfen. Zudem soll das Training von Brockmann-Behnsen (2012) teilweise evaluiert werden.

(i) Prozesse mit mangelnder Regulation („wild goose chase“-Prozesse) hängen signifikant mit geringem Bearbeitungserfolg zusammen.

(ii) Prozesse ohne *Analyse* hängen signifikant mit geringem Erfolg zusammen.

(iii) Eine Rückschau im Sinne Pólyas (*Verification*) tritt nur sehr selten auf und wenn, dann hauptsächlich bei erfolgreichen Probanden.

(iv) Neben *linear* verlaufenden Prozessen gibt es auch Problembearbeitungen mit Rücksprüngen (d.h. *nicht-lineare* Prozesse).

(v) Die Bearbeitungen der neunten Klassen mit und ohne Heurismentraining lassen sich voneinander unterscheiden.

## Beschreibung der Erhebungssituationen und der Methoden

Die hier vorgestellten Daten stammen aus zwei unabhängigen Stichproben: Im Jahr 2010 haben 25 Studierende des gymnasialen Lehramts Mathematik

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1015–1018). Münster: WTM-Verlag

(13w und 12m; Alter zw. 22 – 25 Jahren) aus verschiedenen Lehrveranstaltungen im Rahmen der Masterarbeit von Wessendorf (Deermann 2010) Probleme bearbeitet, darunter auch „K10“. Insgesamt wurden Prozesse von 11 Paaren und einer Dreiergruppe ausgewertet. Im Jahr 2013 haben 46 SchülerInnen (Alter zw. 14 – 16 Jahren) eines Hannoveraner Gymnasiums aus vier neunten Klassen (9a und 9b ohne spezielles Training, 9c und 9d hatten zuvor ein 1,5-jähriges Heurismentraining im Unterricht, vgl. Brockmann-Behnsen 2012) „K10“ alleine bearbeitet. Ein Beobachter hat sie dabei mit regelmäßigen Prompts (z.B.: „Was denkst Du gerade?“) zum *lauten Denken* angeregt; diese Prozesse wurden von Korte (2013) ausgewertet.

Die Aufgabe „K10“ eignet sich für Forschungen zum Problemlösen einerseits wegen ihrer hohen empirischen Schwierigkeit.[1] Andererseits zeigt eine am Prozess orientierte Aufgabenanalyse (s. Tab. 1), dass es sich für durchschnittliche Lernende nicht um eine Routineaufgabe handelt.

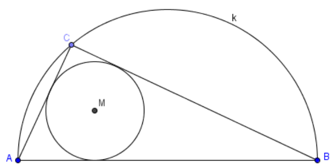
| |
|---|
| „**K10**“: *AB* ist der Durchmesser eines Halbkreises *k*. *C* ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von *A* und *B*), und *M* ist der Mittelpunkt des Inkreises von Δ*ABC*.<br>Bestimme den Betrag des Winkels ∠*AMB*.   |
| In einer *Analyse* der Aufgabe sollte der rechte Winkel bei *C* (wegen des Thales-Halbkreises) ebenso erkannt werden wie die Tatsache, dass *M* als Inkreis-Mittelpunkt auf den Winkelhalbierenden des Dreiecks liegt. In einer *Exploration* der Aufgabenumgebung kann man feststellen, dass man über die Winkel bei *A* und *B* einzeln nichts aussagen kann – allerdings müssen sie wegen der Thales-Situation zusammen immer 90° ergeben. Mit dieser Erkenntnis kann man in eine *Planung-Ausführung* einsteigen und den gesuchten Winkel berechnen: Die Beträge der Winkel ∠*BAM* und ∠*MBA* ergeben zusammen die Hälfte der Winkelbeträge bei *A* und *B*, nämlich 45° („*alpha-beta-Barriere*“). Aufgrund der Innenwinkelsumme in Dreiecken beträgt die gesuchte Größe des Winkels ∠*AMB* damit – unabhängig von der Lage von *C* auf *k* – immer 135°. |

Tabelle 1: „K10“ (Baumert et al. 1999, S. 94) und am Prozess orientierte Analyse

| |
|---|
| (1) *Kein Ansatz* – keine sinnvolle Bearbeitung oder nur Nicht-Erfolgversprechendes wie der Sinussatz. *Oder:* Winkelgröße nur geraten / geschätzt. *Oder:* Von den drei wichtigen Sätzen (Thales, Winkelhalbierende, Innenwinkelsumme) nur einen genannt. |
| (2) *Einfacher Ansatz* – Winkelgröße 135° ausschließlich gemessen. *Oder:* Von den drei wichtigen Sätzen mindestens zwei genannt, aber nicht sinnvoll verknüpft. |
| (3) *Erweiterter Ansatz* – Lösung der Aufgabe im Spezialfall (z.B. gleichschenkliges Dreieck). *Oder:* Alle drei wichtigen Sätze genannt und verknüpft, aber ohne Lösung. |
| (4) *Korrekter Ansatz* – Winkelgröße 135° durch Verknüpfung der Sätze ermittelt. |

Tabelle 2: Erfolgskategorien (vgl. Rott 2013, S. 184 ff.), operationalisiert für „K10“

[1] In TIMSS besaß „K10“ eine Lösungsquote von 21% – was bei vier vorgegebenen Antwortmöglichkeiten unter der Ratewahrscheinlichkeit liegt (vgl. Baumert et al. 1999).

Die Bearbeitungsergebnisse (Tab. 3) – die *Produkte* – wurden in vier Erfolgskategorien eingeteilt, die für die Aufgabe konkretisiert wurden (s. Tab. 2); Interrater-Reliabilität der Kodierer war größer als Cohens Kappa = 0,90.

Die *Prozesse* wurden mithilfe des „Protocol Analysis"-Verfahrens von Schoenfeld (1985) in Episoden eingeteilt, das zuvor adaptiert und operationalisiert worden ist (siehe Rott 2013, Kap. 10 für Details). Die Interrater-Reliabilität (%-Ü) der Prozesskodierung lag zwischen 0,70 und 1,00.

## Ergebnisse

Ein $\chi^2$-Test (vgl. Tab. 4) bestätigt Hypothese (i), es gibt einen signifikanten Zusammenhang zwischen „wild goose chase"-Prozessen und wenig Erfolg.

| **Gruppe** | **Kat. 1** | **Kat. 2** | **Kat. 3** | **Kat. 4** | **Summe** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Studenten** | 0 | 10 | 2 | 13 | **25** |
| **9a** | 2 | 4 | 1 | 2 | **9** |
| **9b** | 3 | 3 | 2 | 0 | **8** |
| **9c** | 5 | 7 | 1 | 0 | **13** |
| **9d** | 4 | 1 | 5 | 6 | **16** |
| **9 gesamt** | **14** | **15** | **9** | **8** | **46** |

Tabelle 3: Erfolg der Probanden in Kategorien sortiert nach Gruppen

| **„K10" – Studierende** | | | | **„K10" – Klasse 9 gesamt** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Kaum Erf.* | *Erfolg* | Summe | | *Kaum Erf.* | *Erfolg* | Summe |
| *wild goose* | 8 (4) | 2 (6) | **10** | *wild goose* | 17 (13,2) | 4 (7,8) | **21** |
| *Sonstiges* | 2 (6) | 13 (9) | **15** | *Sonstiges* | 12 (15,8) | 13 (9,2) | **25** |
| Summe | **10** | **15** | **25** | Summe | **29** | **17** | **46** |
| Yates-$\chi^2$ = 11,111; $\Phi$ = 0,66; Yates-$p$ = 0,0035 | | | | Yates-$\chi^2$ = 3,999; $\Phi$ = 0,29; Yates-$p$ = 0,0455 | | | |
| 40 % *Wild goose chase*, davon knapp 4/5 ohne Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe. | | | | 45 % *Wild goose chase*, davon etwa 4/5 ohne Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe. | | | |

Tabelle 4: „Wild Goose Chase"-Prozesse und Erfolg (erwartete Werte in Klammern)

Hypothese (ii) kann nicht bestätigt werden, da in allen 25 + 46 Prozessen mind. eine Episode des Typs *Analysis* kodiert wurde. Auch eine Unterscheidung von Prozessen mit kurzer / langer *Analysis* zeigt keinen Zusammenhang zwischen diesen Bemühungen und dem Bearbeitungserfolg auf.

Bei den Studierenden enthalten 11 Prozesse eine *Verification*; diese enden ausnahmslos erfolgreich (Kat. 4). Bei den SchülerInnen gibt es 6 Prozesse mit einer Episode dieses Typs; 2 davon sind erfolgreich (Kat. 4), die übrigen 4 nicht (Kat. 2). Hypothese (iii) kann nur teilweise bestätigt werden.

Hypothese (iv) wird bestätigt: Bei den Studierenden verlief etwa die Hälfte der Prozesse (12) *linear* (wie in populären Deutungen des Pólya-Schemas), die übrigen (13) Prozesse *nicht-linear* (8 davon wie in Schoenfelds 1985 Modell mit Rückschritten vor der *Implementation*). Bei den SchülerInnen verläuft ebenfalls etwa die Hälfte der Prozesse (24) *linear*, die übrigen (22)

Prozesse *nicht-linear* (davon 16 wie bei Schoenfeld; die restlichen 6 mit Rückschritten auch nach der *Implementation* oder *Verification*).

Untersuchungen zu Hypothese (v) zeigen auf den ersten Blick wenig offensichtliche Ergebnisse: Klasse 9d mit Training ist signifikant erfolgreicher als die anderen Klassen; für 9c gilt dies nicht, hier bedarf es weiterer (qualitativer) Analysen. Auch gibt es in den beiden Klassen mit Training z.B. nicht weniger „wild goose chase"-Prozesse oder mehr Episodenwechsel (als Anzeichen für Selbstregulation). Ein Blick auf die Prozessverläufe deutet allerdings darauf hin, dass zumindest in der Klasse 9d die Prozesse strukturierter verliefen (mehr *Planning-Implementation*, weniger *Exploration*) als in den anderen Klassen.

## Diskussion

In der Studie von Rott (2013) wurden Hypothesen zum Verlauf von Problemlöseprozessen und dem Zusammenhang bestimmter Oberflächenmerkmale von Prozessen mit ihrem Erfolg gewonnen – allerdings beschränkt auf eine kleine Auswahl von Aufgaben, auf eine Stichprobe von Fünftklässlern und auf die Arbeit in Paaren. Die vorliegenden Daten bestätigen einen Teil dieser Hypothesen für die TIMSS-Aufgabe „K10" mit älteren Probanden sowie der Sozialform „Einzelarbeit mit lautem Denken".

Dass andere Hypothesen (z.B. ein Zusammenhang des Erfolgs mit der *Aufgabenanalyse* oder die Häufigkeit des *Rückschau*-Haltens) nicht bestätigt werden konnten, liegt vermutlich an Spezifika der eingesetzten Aufgabe („K10" lädt geradezu dazu ein, die Aufgabe zunächst zu analysieren) und dem Alter der Probanden (Studierende verifizieren häufiger als Schüler).

## Literatur


Baumert, J.; Bos, W.; Klieme, E.; Lehmann, R.; Lehrke, M.; Hosenfeld, I.; Neubrand, J. & Watermann, R. (Hrsg.) (1999): *Testaufgaben zu TIMMS/III. Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlussklassen der Sekundarstufe II (Population 3)*. Berlin: MPI.

Brockmann-Behnsen, D. (2012): HeuRekAP – Erste Ergebnisse der Langzeitstudie zum Problemlösen und Beweisen am Gymnasium. In: Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM.

Deermann, S. (2010): *Explorative Analyse studentischer Bearbeitungsprozesse ausgewählter geometrischer Probleme*. Unveröffentlichte Master-Arbeit, Uni Hannover.

Korte, L. (2013): *Bearbeitungsprozesse der TIMSS-Aufgabe "K10" – untersucht mit dem Verfahren von Schoenfeld*. Unveröffentlichte Bachelor-Arbeit, Uni Hannover.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2013). Problem Solving and its elements in forming Proof. In *The Mathematics Enthusiast, vol. 10, 1&2*, 137-162

Rott, B. (2013): *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer emp. Studie*. WTM.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Thomas ROYAR, Christine STREIT, Simone ZISKA

# Entwicklung eines Instruments zur Erfassung des Operationsverständnisses der Multiplikation

Obwohl Operationsverständnis mit der Rechenleistung in einem Zusammenhang zu stehen scheint (Ladel, 2011; Moser Opitz, 2005, 2007; Radatz, 1989; Royar, 2011, 2013; Schäfer, 2005) beziehungsweise ein unzureichendes Operationsverständnis zu den Hauptmerkmalen von Rechenschwierigkeiten gehört (Gerster & Schultz 2005; Moser Opitz, 2001; Schäfer, 2005; Schipper, 2005), liegen nur wenige empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis vor. Um Operationsverständnis und seine Determinanten systematisch untersuchen zu können, ist ein Instrument erforderlich, mit dem Operationsverständnis zuverlässig erfasst werden kann. Die Entwicklung eines solchen Instrumentes wird im vorliegenden Beitrag erläutert.

## Operationsverständnis

In der Literatur wird *Operationsverständnis* überwiegend beschrieben als die Fähigkeit, Transfers zwischen unterschiedlichen Repräsentationen vollziehen zu können (z. B. Bönig, 1995; Gerster & Schultz 2007; Huinker, 1993; Schäfer, 2005; Schütte, 2008). Allerdings ist weder hinreichend geklärt, was unter „Repräsentationen" genau verstanden wird noch existieren operationalisierbare Aussagen darüber, wann ein Transfer als „vollzogen" betrachtet werden kann. Vorliegende Untersuchung bezieht sich darum auf die Definition von Royar (2013), nach der Operationsverständnis dann gegeben ist, wenn ein Kind einen konsensfähigen Bezug zwischen einem Term und einer nicht-mathematisch-symbolischen Darstellung herstellen kann (Royar, 2013).

## Untersuchung I

Alle verwendeten Instrumente wurden auf der Basis von Royars (2013) Operationalisierung von Operationsverständnis entwickelt. Die erste Untersuchung wurde mit 80 Schülerinnen und Schülern der dritten Klasse durchgeführt und bestand aus zwei Teilen. Im Teil 1 hatten die Kinder die Aufgabe, zu 16 animierten Computerbildern einen ihrer Meinung nach „passenden" Multiplikationsterm zu notieren. Die Aufgaben waren text- und bildbasiert und fokussierten auf die Grundvorstellungen „zeitlich-sukzessiv" und „räumlich-simultan". Präsentiert wurden die Aufgaben in einem standardisierten Design im Klassenverbund. Die Kinder schrieben

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1019–1022). Münster: WTM-Verlag

jeweils einen Multiplikationsterm in ein vorher ausgeteiltes Testheft. Abbildung 1 zeigt zwei Aufgabenbeispiele.



***Abbildung 1:*** **Aufgaben zur Erfassung des Multiplikationsverständnisses**

Teil 2 der Untersuchung bestand aus einem halbstandardisierten Leitfaden-Interview, in dem die Kinder einzeln die Bedeutung eines Multiplikationsterms *für Erstklässer, die noch nicht wissen, was „mal" bedeutet* erläutern sollten. Gelang dies den Kindern nicht auf Anhieb, wurden sie aufgefordert eine zum Term passende Rechengeschichte zu finden oder den Term mit Plättchen zu erklären. Es standen (optional zu nutzende) einfarbige Plättchen sowie Stift und Papier zur Verfügung. Die Schülerantworten beider Untersuchungs-Teile wurden auf der Basis eines Expertenratings dichotom kodiert.

*Ergebnisse Untersuchung I*

Die Auswertung der Daten von Teil 1 machte deutlich, dass die Aufgaben mehrheitlich zu einfach waren und dass die interne Konsistenz der Skala unbefriedigend war. Im Einzelinterview zeigten sich folgende Ergebnisse: Die Kinder, die in Teil 1 im oberen Leistungsdrittel lagen, konnten im Teil 2 auf Anhieb den Term erklären, während Kinder aus dem leistungsschwächsten Drittel (Teil 1) im Interview (Teil 2) Schwierigkeiten hatten. Diese zu beobachtende Leistungskonsistenz führte zur Hypothese, dass Kinder, die *zum Term hin* wechseln können, auch *vom Term weg* wechseln können und dass Kinder, die nicht *zum Term hin* wechseln können, auch nicht vom *Term weg* wechseln können (Leistungskonsistenzhypothese).

## Untersuchung II

Ziel der zweiten Untersuchung war die testtheoretische Analyse des überarbeiteten Itempools sowie die Überprüfung der Leistungskonsistenzhypothese.

Die zweite Untersuchung wurde mit 45 Schülerinnen und Schülern zu Beginn der 3. Klasse durchgeführt und bestand aus drei Teilen. Teil 1 umfasste 20 animierte Computerbilder, die aufgrund der Resultate der ersten Untersuchung neu entwickelt oder überarbeitet wurden. Die Testdurchführung entsprach der ersten Untersuchung. Teil 2 bestand aus vier Multiplikationstermen, welche den Kindern in einem Testheft präsentiert wurden. Die Kinder hatten die Aufgabe zu den ersten beiden Termen ein passendes Bild zu malen und zu den letzten beiden Termen eine passende Geschichte aufzuschreiben. Teil 3 bestand aus dem bereits in der Untersuchung I geführten Einzelinterview.

*Ergebnisse Untersuchung II*

Die im Folgenden berichteten Ergebnisse zu Teil 1 beziehen sich auf den um ein Item reduzierten Itempool aus 19 Items. Der Summenwert variierte von 0 bis 19, der Mittelwert lag bei 12.29 ($SD$ = 5.29). Die Itemanalyse zeigte, dass die Schwierigkeitsindizes zwischen .31 und .80 lagen und dass die Skala mit einem Cronbach's $\alpha$ von .90 eine sehr gute interne Konsistenz aufwies. Die Leistungen von Teil 1 (*zum Term hin*) und Teil 2 (*vom Term weg*) waren weniger konsistent als in der ersten Untersuchung. So gab es einige Kinder, die im Teil 1 gute Leistungen erzielten, bei der Aufgabe *Male ein Bild, das zur Aufgabe 3 · 3 passt!* bzw. *Schreibe eine kurze Geschichte, die zur Aufgabe 3 · 2 passt!* allerdings Schwierigkeiten hatten. Mit diesen Kindern wurden Einzelinterviews (Teil 3) geführt. Dabei zeigte sich, dass diese Leistungs-Inkonsistenz auf Verständnisproblemen der Aufgabenstellung beruhte und nicht auf ein mangelndes Verständnis der Multiplikation zurückzuführen ist. So interpretierten diese Kinder die schriftliche Aufgabenstellung nicht in der intendierten Art und Weise (z. B. schrieben sie „Rechengeschichten", die von Kindern handelten, die die Aufgaben rechnen), konnten aber im Einzelinterview mühelos die Bedeutung eines Multiplikationsterms erklären. Es zeigte sich also auch in der zweiten Untersuchung eine Tendenz zur Leistungskonsistenz. Aufgrund der vorliegenden Ergebnisse kann angenommen werden, dass Kinder, die *zum Term hin* wechseln können auch *vom Term weg* wechseln können und Kinder, die nicht *zum Term hin* wechseln können, auch Schwierigkeiten beim Erklären eines Terms haben. Dies macht die Überprüfung beider Wechselrichtungen überflüssig, so dass in künftigen Untersuchungen auf die zeitintensive Überprüfung des Wechsels *vom Term weg* verzichtet werden kann (vgl. Abbildung 2).

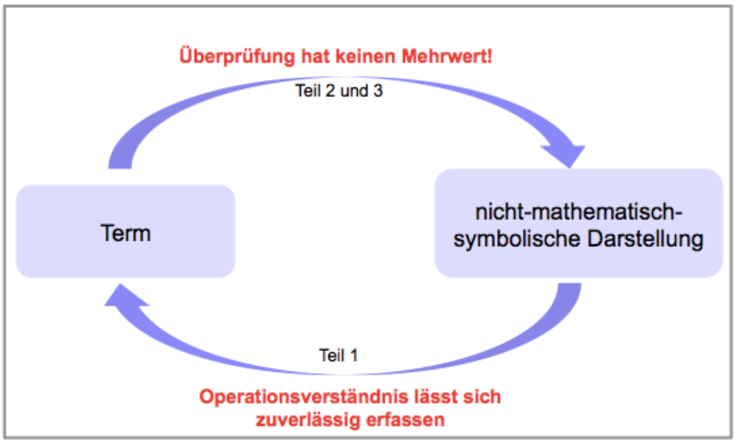



***Abbildung 2:*** **Empirische Überprüfung des Operationsverständnisses**

Den Autoren ist mit den animierten Computerbildern die Entwicklung eines Instrumentes zur objektiven und reliablen Erfassung des Operationsverständnisses der Multiplikation in Klasse 3 gelungen. Damit lässt sich Operationsverständnis auch in grösseren Kohorten systematisch untersuchen. Dies ist eine wichtige Voraussetzung, um den Effekt möglicher Determinanten auf das Operationsverständnis zu prüfen und bestehende Forschungslücken zu schliessen. Darüber wird an anderer Stelle berichtet.

## Ausgewählte Literatur

Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division: Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern.* Münster: Waxmann.

Gerster, H., & Schultz, R. (2004). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht (Bericht zum Forschungsprojekt „Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen"). Deutschland: Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken. Retrieved March 17, 2014, from http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/

Huinker, D. (1993). Interviews: A window to students' conceptual knowledge of the operations. In N. L. Webb & F.Coxford (Eds.), *Assessment in the mathematics classroom* (pp. 80-86). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Ladel, S. (2011). Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz. *Forum Forschung das Wissenschaftsmagazin der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd, 2,* 38-41.

Moser Opitz, E. (2005). Lernschwierigkeiten Mathematik in Klasse 5 und 8. Eine empirische Untersuchung zu fehlenden mathematischen Basiskompetenzen. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete 74,*(2), 113-128.

Royar, T. (2013). *Handlung – Vorstellung – Formalisierung. Entwicklung und Evaluation einer Aufgabenreihe zur Überprüfung des Operationsverständnisses für Regel- und Förderklassen.* Hamburg: Kovac.

Schäfer, J. (2005). *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule*. Hamburg: Kovac.

Christian RÜEDE, Christof WEBER, Franz EBERLE, Zürich

# Mathematische Anforderungen für Studienanfänger an Schweizer Hochschulen

Gegenwärtig wird im deutschsprachigen Raum die Schnittstelle Gymnasium – Hochschule diskutiert. Anlass geben einerseits Klagen der Hochschulen über mangelhafte Kenntnisse von Studienanfängern in Erstsprache und Mathematik, und andererseits die hohen Durchfallquoten in den ersten Prüfungen, ganz besonders bei mathematischen Lehrveranstaltungen. Diese Diskussion ist besonders für die Schweiz brisant, da hier die gymnasiale Matur einen prüfungsfreien Zugang zu allen Studiengängen der Hochschulen gewährleistet (Ausnahme: Medizin). Um diesen prüfungsfreien Hochschulzugang weiterhin sicherzustellen, hat die Schweizerische Erziehungsdirektorenkonferenz (EDK) deshalb eine Studie in Auftrag gegeben, um so genannte „basale fachliche Studierkompetenzen“ in Erstsprache und Mathematik zu definieren (Eberle, 2012). Damit ist jenes Wissens und Könnens in Erstsprache und Mathematik gemeint, welches für das Bestehen der ersten beiden Semester einer breiten Zahl von Studiengängen unabdingbar ist. Die Idee einer solchen Studie wurde bereits im Bericht zur Evaluation der Maturitätsreform 1995 skizziert (Eberle et al., 2008).

Gegenstand dieses Beitrags ist der empirische Teil der Studie, in dem die Anforderungen der Schweizer Hochschulen an Studienanfänger verschiedener Studiengänge eruiert wurden, um so die Formulierung von basalen Kompetenzen auch empirisch und nicht nur normativ fundieren zu können. Während in der eigentlichen Studie die fachlichen Anforderungen hinsichtlich Erstsprache und Mathematik erarbeitet wurden, beschränken wir uns hier auf die Bestimmung der mathematischen Anforderungen.[1]

## 1. Befragte Studierende und Instrumente

Insgesamt wurden vierzig Studierende (24 w, 16 m) aus zwanzig Studiengängen (z. B. der Germanistik, Psychologie, Ökonomie, Biologie oder Mathematik) der deutschen, französischen und italienischen Schweiz befragt. Diese Studierenden waren nicht nur kommunikativ stark, sie hatten auch die beiden ersten Semester ihres Studiengangs sehr erfolgreich abgeschlossen und waren zum Zeitpunkt der Befragung im dritten respektive vierten Semester. Die drei folgenden Befragungsinstrumente wurden eingesetzt:

[1] Der Forschungsgruppe gehören – neben den Autoren – weiter Christel Brüggenbrock und Urs Albrecht (alle Institut für Erziehungswissenschaften, Universität Zürich) an.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1023–1026). Münster: WTM-Verlag

a) *Fragebogen*: Jedes der 64 Items beschrieb eine mathematische Fertigkeit. Für jedes Item musste die Häufigkeit des Einsatzes („oft“, „selten“, „nie“) und die Vorausgesetztheit („ja“, „nein“) der entsprechenden Fertigkeit für die ersten beiden Semester eingeschätzt werden. Die Items stammten aus fünf Themenbereichen:

- Arithmetik und Algebra (z. B. „Lineare Gleichungen lösen“)
- Geometrie (z. B. „Räumliche Figuren anschaulich skizzieren“)
- Lineare Algebra (z. B. „Vektoren nach einer Basis zerlegen“)
- Analysis (z. B. „Funktionen mit Hilfe von Regeln ableiten“)
- Stochastik (z. B. „Erwartungswerte berechnen“)

b) *Unterlagenerfassung*: Die Studierenden mussten sämtliche Unterlagen aus ihren ersten beiden Semestern einreichen (Skripte, Folien, Übungsblätter, Lehrbücher, Manuals etc.).

c) *Interview*: Im ersten, strukturierten Teil wurden allfällige Unklarheiten in den von den befragten Studierenden ausgefüllten Fragebogen und den von ihnen eingereichten Unterlagen geklärt. Im zweiten, halbstrukturierten Teil wurde eruiert, inwiefern das gymnasiale mathematische Wissen bei der Bewältigung des ersten Studienjahrs notwendig war.

## 2. Auswertung

Die mit den Instrumenten erhobenen Daten wurden wie folgt ausgewertet:

a) *Fragebogen*: Für jedes der 64 Items wurde der Mittelwert der Häufigkeit und der Vorausgesetztheit bestimmt, und zwar für jeden Studiengang und für die Gesamtheit der befragten Studierenden.

b) *Unterlagenerfassung*: Alle Unterlagen der nicht-mathematischen Veranstaltungen wurden einem Rating entlang der folgenden Dimensionen unterzogen: Wie oft kommen in den Unterlagen i) das Lesen von mathematische Darstellungen, ii) das Produzieren von mathematischen Darstellungen, iii) Beweis- und Problemlöse-Aufgaben und iv) komplexe Notationen vor? Bei den mathematischen Darstellungen wurde zudem zwischen Graphiken, Statistiken, Formeln, 3D-Darstellungen und Diagrammen unterschieden.

c) *Interviews*: Da der strukturierte Teil der Interviews der Klärung von Unklarheiten diente, wurden die entsprechenden Antworten direkt in die Fragebogen und Unterlagen übertragen. Die Antworten des halbstrukturierten Teils wurden hingegen inhaltsanalytisch ausgewertet hinsichtlich der folgenden Leitfrage: Wie nutzen die Studierenden die gymnasiale Mathematik zur Bewältigung der mathematischen Anforderungen an den Hochschulen?

## 3. Ergebnisse

Für die vollständigen und detaillierten Ergebnisse verweisen wir auf den Schlussbericht der Studie, der Ende 2014 erscheinen wird, und fassen hier die zentralen Ergebnisse der mathematischen Teilstudie zusammen.

a) *Fragebogen*: Im ersten Studienjahr werden Fertigkeiten aus dem Themenbereich der Arithmetik und Algebra nicht nur häufiger als alle anderen eingesetzt, sie werden auch stärker vorausgesetzt. Fertigkeiten aus der Stochastik und der Linearen Algebra werden dagegen kaum eingesetzt und auch kaum vorausgesetzt. Die Fertigkeiten aus den Themenbereichen Analysis und Geometrie liegen hinsichtlich der Häufigkeit und Vorausgesetztheit tendenziell dazwischen. In den Themenbereichen Algebra und Arithmetik, Analysis und Geometrie sind im Schnitt jene Items am wichtigsten, die bereits in der Sekundarstufe 1 angebahnt werden, zum Beispiel „das große Einmaleins und Bruchrechnen", „lineare Gleichungen lösen", „elementargeometrische Probleme lösen", „Funktionen graphisch darstellen" etc. Bei den genuin gymnasialen Items spielen im Schnitt jene aus der Differential- und Integralrechnung (z.B. „Funktionen mit Hilfe von Regeln ableiten") eine deutlich wichtigere Rolle als Items wie „Ebenen- und Geradengleichung im Raum" oder „numerische Verfahren".

b) *Unterlagenerfassung*: Jeder Studiengang weist ein spezifisches, für ihn typisches mathematisches Anforderungsprofil auf. Die Art und Weise, wie eine Wissenschaft zu Erkenntnissen kommt, scheint auch zu bestimmen, mit welchen mathematischen Darstellungen Studienanfänger umgehen lernen müssen, gerade auch in den nicht-mathematischen Veranstaltungen. Betrachtet man das „gemittelte" Anforderungsprofil über alle Studiengänge, so ist das Lesen von Formeln und Graphiken zentral. Das Lesen von Statistiken, 3D-Darstellungen und Diagrammen hingegen ist nur für gewisse Studiengänge wichtig. Ebenso ist festzustellen, dass im Schnitt das Lösen von Problemen deutlich häufiger eingefordert wird als das Beweisen von Sachverhalten, und dass komplexe Notationen nur in den mathematiklastigen Studiengängen oft anzutreffen sind.

c) *Interviews*: Die Auswertung der Interviews brachte im Wesentlichen zwei weitere Ergebnisse hervor. Für jene befragten Studienanfänger, die mathematische Veranstaltungen belegten, war es nicht nur äußerst wichtig, dass sie das am Gymnasium erworbene mathematische Wissen flexibel anwenden können, sondern auch, dass sie dieses Wissen für die Herstellung von Zusammenhängen nutzen können. Die interviewten Studienanfänger meinten damit, dass es hilfreich ist, wenn sie vom Gymnasium her wissen,

- was mit der Einführung eines mathematischen Begriffs erreicht wird,

- welche Konkretisierungen mit allgemeinen, formalen Definitionen verbunden sind,
- wie Regeln in einfachen Fällen angewendet werden,
- und wann eine Regel angewendet wird.

## 4. Diskussion

Die mathematischen Anforderungen an Schweizer Hochschulen, denen die Mehrheit der Studienanfänger genügen müssen, lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Die Studienanfänger müssen mathematische Fertigkeiten einsetzen (arithmetischer und algebraischer Kalkül, Ableitungskalkül), Formeln und Graphiken lesen und mathematische Zusammenhänge herstellen (vor allem zwischen Begriffen wie Term, Gleichung, Funktion, Ableitung, Integral, Winkel und Vektor). Um diese Anforderungen zu bewältigen, müssen sie ihr gymnasiales mathematisches Wissen und Können flexibel nutzen können.

Es scheint also, dass mit Studierfähigkeit in mathematischer Hinsicht sowohl Routine verbunden ist als auch die Fähigkeit, erworbenes Wissen situativ anwenden und auf neuartige Sachkontexte anpassen zu können. Insofern sollten alle Maturanden in ausgewählten Themenbereichen über einen gewissen Grad an *adaptiver* Expertise (Schwartz, Bransford & Sears, 2005) bzw. an *intelligentem* Wissen (Pinkernell & Greefrath, 2011) verfügen. Während dies im Bereich der Algebra und Arithmetik heißt, dass Maturanden einen *Struktursinn* (Linchevski & Livneh, 1999) respektive *Symbolsinn* (Arcavi, 1994) besitzen sollten, könnte dies im Kontext des Interpretierens von Darstellungen bedeuten, über einen *Darstellungssinn* zu verfügen.

## Literatur


Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24–35.

Eberle, F., Gehrer K., Jaggi, B., Kottonau, J. Oepke, M. & Pflüger M. (2008). *Evaluation der Maturitätsreform 1995*. Bern: Staatssekretariat für Bildung und Forschung.

Eberle, F. (2012). Das Projekt „basale fachliche Studierkompetenzen“. *Gymnasium Helveticum, 4,* 6–12. (http://www.vsg-sspes.ch/fileadmin/files/GH/GH_04_2012.pdf)

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173–199.

Pinkernell, G., Greefrath, G. (2011): Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule–Hochschule. *Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht, 64*(2), 109–113.

Schwartz, D. L., Bransford, J. D. & Sears, D. (2005). Efficiency and Innovation in Transfer. In J. Mestre (Hrsg.), *Transfer of Learning from a Modern Multidisciplinary Perspective.* Greenwich, CT: Information Age Publishing, 1–51.

Christian RÜTTEN, Essen

# Zahlen kleiner Null – Mit Null beginnende Dezimalbrüche?

## 1. Einordung in das Forschungsprojekt

Bereits in der Grundschule besitzen einige Lernende Vorstellungen zu einem Zahlbereich kleiner als Null. Diese Lernerperspektiven zu negativen Zahlen werden bei Lernenden der Jahrgangstufen 3 und 4 auf der Grundlage einer schriftlichen Befragung und angeschlossener problemzentrierter Interviews untersucht und die diesen Perspektiven zugrunde liegenden mentalen Modelle mittels systematischer Metaphernanalyse rekonstruiert. Dazu wurde ein 11 Aufgaben umfassender Aufgabenbogen (kontextbezogene und frei sowie veranschaulichungsbezogene Aufgaben) entwickelt, der erste Einblicke in die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu negativen Zahlen liefert und gleichzeitig sowohl als Sampling als auch als inhaltliche Grundlage für die Interviews dient. Von den insgesamt 291 Lernenden von vier Essener Grundschulen, die im Sommer 2013 an der schriftlichen Befragung teilnahmen, wurden mit 47 Schülerinnen bzw. Schülern Interviews geführt. Dabei zeigte sich eine große Vielfalt an vorunterrichtlichen Vorstellungen zum Zahlbereich kleiner als Null. Oft unterscheiden sich die Vorstellungen von diesem Zahlbereich von normativen Grundvorstellungen. Eine solche normverschiedene Vorstellung ist das sog. DLZ-Phänomen.

## 2. DLZ-Phänomen

Im Rahmen einer Studie mit 11- bis 13-jährigen neuseeländischen Lernenden zum Dezimalbruchverständnis beschreibt Irwin (1996) erstmals das Phänomen, dass Lernende mit Null beginnende Dezimalbrüche als „below zero“ deuten. Archer & Condon (1999) erwähnen dieses Phänomen ebenfalls als eine Fehlvorstellung bezüglich Dezimalzahlen und nennen sie *Special Set Thinking*. Für Roche & Clark (2004) ist diese Fehlvorstellung eine der „most common misconception“, die sie in ihrer Interviewstudie bei Lernenden einer australischen Primary School (Klasse 3-6) beobachten konnten, und bezeichnen diese mit DLZ (<u>D</u>ecimals are <u>L</u>ess than <u>Z</u>ero).

Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin & Bana (2001) untersuchten 553 australische und neuseeländische Lehramtsstudierende zum fachmathematischen und fachdidaktischen Wissen zu Dezimalbrüchen mit dem von ihnen entwickelten *Decimal Comparison Test* (DCT) und konnten ebenfalls das DLZ-Phänomen bei wenigstens 13 % der Studierenden beobachten (vgl. Stacey, Helmle & Steinle 2001). Steinle & Stacey (2001) bestätigten diesen Befund in einer weiteren Untersuchung mit dem *Decimal Compari-*

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1027–1030). Münster: WTM-Verlag

*son Zero Test* (DCT0) an 104 australischen Lehramtsstudierenden und 212 japanischen Schülern, in der die zweithöchste Fehlerrate mit 13 % beim Vergleich von „0.6“ und „0“ (Q22) lag.

In einer eigenen Untersuchung mit einem adaptierten DCT0 an 271 Grundschullehramtsstudierenden der Universität Duisburg-Essen 2013 zeigte sich ebenfalls ein ähnliches Bild. 12,55 % der Befragten bearbeiteten die entsprechenden drei Aufgaben (Q22-Q24) zum Vergleich eines mit Null beginnenden Dezimalbruchs mit Null nicht, fehlerhaft oder korrigierten ihre zunächst fehlerhafte Bearbeitung.

Auch Widjaja, Stacey & Steinle (2011) fanden in einer Untersuchung an 94 indonesischen Lehramtsstudierenden Schwierigkeiten, die Ordnungsrelation von mit Null beginnenden Dezimalbrüchen und Null zu bestimmen und diese Dezimalbrüche richtig auf der Zahlengeraden zu verorten.

Das vorgestellte DLZ-Phänomen ist auch in der oben skizzierten Untersuchung zu vorunterrichtlichen Vorstellungen zu negativen Zahlen bei Grundschülerinnen und Grundschülern zu beobachten. Allerdings nutzen nur 2,06 % der Lernenden in mindestens einer der Aufgaben bei der schriftlichen Befragung mit Null beginnende Dezimalbrüche anstelle von negativen Zahlen. Im Folgenden werden einige Beispiele vorgestellt und Erklärungsansätze diskutiert.

## 3. Beispiele und Erklärungsansätze

Alina und Yasmina (Klasse 4) in der schriftlichen Befragung notieren die Temperatur am Thermometer, dessen Flüssigkeitsstand zwei Skalierungsstriche unter der Nullmarke und vier Skalierungsstriche über dem Reservoir ist (s. Abb. 1), mit 0,4 °C. Alina ergänzt diese Notation noch durch die Begründung: „Weil das unter der Null ist“. Im Interview zeigt sich, dass Alina zur Ermittlung der Temperaturangabe vom Reservoir aufwärts zählt. „Da war das halt drunter unter Null und dann habe ich das einfach so hochgezählt *(zeigt mit dem Finger auf die Skalierungsstriche von unten nach oben)* und dann war es ja vier, also 0,4 Grad“. Für Alina existieren scheinbar zwei voneinander getrennte Zahlbereiche: der mit Null beginnende Bereich der natürlichen Zahlen und der beim Reservoir beginnende Bereich der mit „0,“ versehenen Zahlen, die unter Null sind. Alina und vermutlich

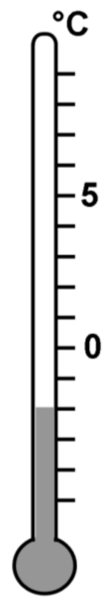



**Abbildung 1: Thermometerdarstellung zu –2 °C**

auch bei Yasmina deuten vermutlich das ihnen aus anderen Kontexten bekannte Symbol „0,“ als symbolischen Ausdruck für die sprachliche Wendung „unter Null“.

Laura (Klasse 3) verwendet bei der Temperaturmessung negative Zahlen in korrekter Weise, nutzt jedoch beim Rechnen und an der Zahlengeraden bzw. am Rechenstrich „0,“ als Vorzeichen für Zahlen kleiner Null. Anders als Alina und Yasmina ordnet Laura die mit „0,“ versehenen Zahlzeichen spiegelbildlich zu den natürlichen Zahlen. Überdies rechnet sie: 9 – 12 = 0,3 (9 – 10 = 0,1 und 0,1 – 2 = 0,3). Laura nutzt damit „0,“ in gleicher Weise wie das Minuszeichen bei den negativen Zahlen.

Dilovan (Klasse 4) verwendet die mit Null beginnenden Dezimalbrüche nur im Kontext der Darstellungen an Zahlengerade bzw. Rechenstrich. Bei Aufgaben zur Temperatur nutzt er negative Zahlen mit großer Selbstverständlichkeit. In der schriftlichen Befragung ist am Rechenstrich durch einen Bogen über der eingetragenen Null eine Operation repräsentiert. Dazu soll die passende Rechnung gefunden werden. Dilovan deutet die Darstellung als 1 – 2 = 0,1 bzw. 0,1 + 2 = 1 (s. Abb. 2). Im Interview erklärt er auf Nachfrage, wie er auf die Idee gekommen sei, den linken Strich als 0,1 zu deuten: „Dann habe ich mir ausgedacht: einfach 0,1.“ Das Zahlzeichen ist damit für Dilovan keine Konvention, sondern seine subjektive Bezeichnung des entsprechenden Objekts. Auch Dilovan verwendet wie Laura „0,“ im Sinne eines Vorzeichens für die Zahlen links der Null an Zahlengerade bzw. Rechenstrich.

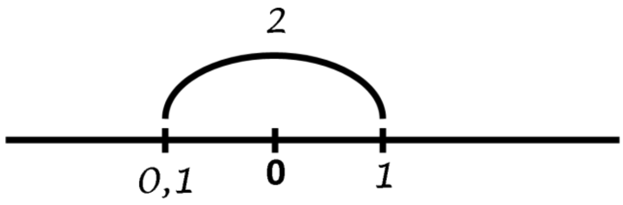



**Abbildung 2: Dilovans Rechenstrichaufgabe**

Stacey, Helmke & Steinle (2001) versuchen das auftretende DLZ-Phänomen mit der im Rahmen der kognitiven Metapherntheorie entwickelten Spiegelmetapher zu erklären. In drei Bereichen der Zahlvorstellung ist die Spiegelmetapher von entscheidender Bedeutung. (a) An der Zahlengerade stellen die positiven Zahlen die realen Objekte, die Null die Spiegelposition und die negativen Zahlen die Spiegelbilder der realen Objekte dar. (b) Die natürlichen Zahlen und deren Kehrwerte verhalten sich am Zahlenstrahl bei 1 als Spiegelposition wie reale Objekte und deren Spiegelbilder. (c) Schließlich kann in der Stellentafel die Einer-Spalte als Spiegelposition betrachtet werden, sodass sich die Zehnerpotenzen mit positivem und die mit negativem Exponenten spiegelbildlich zueinander verhalten. Kommt es zwischen den metaphorischen Konzeptualisierungen (a) und (b) oder (a) und (c) zu Vermischungen, äußert sich dies im DLZ-Phänomen. Inwieweit diese Erklärung in einer systematischen Metapheranalyse begründet ist, lässt sich anhand der von Stacey, Helmke & Steinle (2001) veröffentlichten Daten nur schwer beurteilen.

Der Erklärungsversuch dieser Forschergruppe liefert allerdings keine Begründung für das bei Alina, Yasmina, Laura und Dilovan auftretende Phänomen, da diese Lernenden die entsprechenden metaphorischen Konzeptualisierungen bisher kaum aufgebaut haben werden. Diese Lernende suchen vielmehr nach passenden Zeichen für die neuen Objekte in den Aufgabenstellungen. Bei Alina und Yasmina stehen diese Objekte beziehungslos neben den bekannten Zahlen, während bei Laura und Dilovan bereits erste Beziehungen zu den bekannten Zahlen erkannt und genutzt werden. Während Alina und Yasmina eher einen neuen Zahlenraum geschaffen haben, der vom bekannten Raum der natürlichen Zahlen getrennt existiert, haben Laura und Dilovan den bekannten Zahlbereich um die Zahlen kleiner bzw. links der Null erweitert.

## Literatur


Archer, S. & Condon, C. (1999). Decimals: Addressing Students‘ Misconceptions. In N. Scott (Hrsg.). *Mathematics across the ages. Mathematical Association of Victoria for the 36th annual conference* (S. 46-54). Brunswick: Mathematical Association of Victoria.

Irwin, K. (1996). Making Sence of Decimals. In J. Mulligan & M. Mitchelmore (Hrsg.). *Children’s Number Learning* (S. 243-257). Adelaide: MERGA & AAMT.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K. & Bana, J. (2001). Preservice teachers’ knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4(3).* S. 205-225.

Stacey, K., Helme, S. & Steinle, V. (2001). Confusions between Decimals, Fractions and negative Numbers: A Consequence of the Mirror as a conceptual Metaphor in three different ways. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 217-224). Utrecht: Utrecht University, Freudenthal Institute.

Steinle, V. & Stacey, K. (2001). Visible and Invisible Zeros: Sources of Confusion in Decimal Notation. In J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Hrsg.). *Numeracy and beyond. Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Bd. 2, S. 434-441). Sydney: MERGA.

Roche, A. & Clarke, D. M. (2004). When does successful comparison of decimals reflect conceptual understanding? In I. Putt, R. Farragher & M. McLean (Hrsg.). *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (S. 486–493). Townsville: MERGA.

Widjaja, W., Stacey, K. & Steinle, V. (2011). Locating negative decimals on the number line: Insights into the thinking of preservice primary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 30. S. 80-91.

Johanna RUGE, Lüneburg

# Was beeinflusst das Lernhandeln von Mathematiklehramts-studierenden – Wie und Warum?

Ziel meines Promotionsprojektes ist ein besseres Verständnis der Lernhandlungen von Mathematiklehramtsstudierenden. Der Fokus dieses Beitrages liegt auf dem theoretischen Rahmen meines Promotionsprojektes.

## *Socio-political turn* in der Mathematikdidaktik

Die zentrale Forderung des *socio-political turn* ist die sozio-politische Dimension in die Erforschung des Lernens mit einzubeziehen (Pais & Valero, 2012). In der internationalen mathematikdidaktischen Literatur finden sich zwei verschiedene Ansätze diese Forderung umzusetzen:

Wolff-Michael Roth, Luis Radford und Yew-Jin Lee (Roth & Radford, 2011, Roth & Lee, 2007) beziehen sich auf die *cultural historical activity theory* (CHAT). Diese fordert psychische Prozesse, wie Lernen, nicht in Isolation zu betrachten. Lernende, und deren individuelles Lernhandeln, werden hierbei als ein *activity system* betrachtet, welches in Austausch mit anderen steht. Gemeinsames Lernen, und damit auch Lehren eingeschlossen, kann nur als Netzwerk dieser *activity systems* verstanden werden. Das Subjekt ist fähig ihre/seine historisch-kulturell geprägte Umwelt zu reflektieren und zu gestalten.

Tony Brown (2008, 2012) hingegen bezieht sich auf die Theorien des Psychoanalytikers Lacan. Handlungen können nicht unabhängig von der sozialen Situation aufgefasst werden. Somit spielen auch im Lehr-Lernkontext gesellschaftliche Hierarchien, z.B. das Lehrende-Studierende-Verhältnis, eine nicht zu vernachlässigende Rolle, wie bsp. Handlungsaufforderungen wahrgenommen und umgesetzt werden. Norma Presmeg und Luis Radford (2008) kritisieren Browns Rezeption Lacans, da innerhalb dieser dem Subjekt die Möglichkeit der aktiven Einflussnahme auf ihre/seine Umwelt abgesprochen wird. Das Subjekt ist ihrer/seiner Umwelt ausgesetzt.

Tony Brown überbetont vor allem restriktive Einflüsse der Umwelt auf das Subjekt, während Wolff-Michael Roth und Luis Radford das Bild eines autonomen Subjektes zeichnet.

Wolff-Michael Roth und Tony Brown stehen auch weiterhin in einer regen Diskussion über ihre Ansätze (Brown, 2012; Roth, 2012). Beide beziehen sich auf phänomenologische Vorstellungen, welche den Gedanken der objektiven Erfassbarkeit der Welt kritisieren. Daher richtet sich ihr Fokus auf die Erfassung der menschlichen Lebenswelt.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1031–1034). Münster: WTM-Verlag

### Subjektwissenschaftliche Lerntheorie

Meines Erachtens bietet die subjektwissenschaftliche Lerntheorie einen neuen, bislang vernachlässigten Zugang zum Verständnis des Lernhandelns von Studierenden. Diese gründet sich ebenso auf phänomenologische Vorstellungen, wie die bereits zuvor vorgestellten Zugänge des *socio-political turn*. Die Subjektwissenschaft betrachtet den Menschen als bewusst handelndes Wesen (Holzkamp, 1985). Es findet ein Paradigmenwechsel vom Bedingtheits- zum Begründungsdiskurs statt: Der Mensch wird nicht durch seine Umwelt determiniert (bedingt), sondern kann sich bewusst (begründet) zu dieser verhalten. Gesellschaftliche Rahmenbedingungen sind natürlich auch für das Subjekt und dessen Handeln entscheidend, diese werden in der subjektwissenschaftlichen Lerntheorie mitberücksichtigt und daher entspricht diese den Forderungen des *socio-political turn*. Diese wirken jedoch nicht direkt als Verhaltensdetermination, sondern es ist entscheidend, welche Bedeutung das Subjekt diesen Rahmenbedingungen beimisst. Was als bedeutsam erachtet wird, hängt von der biografischen und situationellen Befindlichkeit, der personalen Situiertheit, des Subjektes ab: Prämissen - personale Lebensbedingungen, wie sie das Subjekt in seiner Position und Lebenslage erfährt - bilden die Grundlage ihrer/seiner Handlungsgründe.

Eine entscheidende Kategorie ist die Handlungsfähigkeit, welche die Verfügung über individuell relevante gesellschaftliche Lebensbedingungen darstellt (Holzkamp, 1985). Innerhalb einer Bedeutungskonstellation kann sich das Subjekt bewegen oder sich auch bewusst von dieser distanzieren. Dem Subjekt eröffnet sich ein für sich spezifischer Möglichkeitsraum, innerhalb dessen Bedingungen gehandelt werden kann. Das Subjekt hat jedoch auch die Möglichkeit durch ihr/sein Handeln den Möglichkeitsraum durch Kooperation mit anderen zu erweitern. Aus diesen beiden Optionen leitet sich das Begriffspaar restriktive und verallgemeinerte Handlungsfähigkeit ab. Restriktive Handlungsfähigkeit umschreibt Handeln als individuell-unmittelbare Bedürfnisbefriedigung bzw. die Abwehr von drohender Handlungseinschränkung, verallgemeinerte Handlungsfähigkeit jedoch als gemeinsame Erweiterung der Lebensmöglichkeiten.

Eine spezifische Form des Handelns ist das Lernhandeln, das eine mögliche Reaktion auf eine Handlungsproblematik darstellt (Holzkamp, 1995). Lernen wird als bewusste und aktive Handlung verstanden, welche vom Standpunkt des Subjektes begründet ist. Die Lernhandlung wird mit dem analytischen Begriffspaar des defensiven und expansiven Lernens beschrieben. Defensives Lernen zeichnet sich dadurch aus, dass die/der Lernende ohne Interesse und gegenstandbezogene Lernmotivation lernt. Eine besonders weitverbreitete Form defensiven Lernens liegt im sogenannten Bewältigungslernen vor. Lernen dient hier dem Erhalt der Handlungsfähigkeit. Beim expansiven Lernen hat die Person ein begründetes Eigeninteresse. Es geht um die Herstellung verallgemeinerter Handlungsfähigkeit.

Defensives und expansives Lernen sind keine Eigenschaften von Personen, sondern stellen abstrakte analytische Bestimmungen dar. Sie erlauben subjektbezogene Hemmnisse der Handlungsfähigkeitserweiterung zu identifizieren und widersprüchliche gesellschaftlich bestimmte Verhältnisse auf den Begriff zu bringen. Somit erlaubt dieser Ansatz das lernende Subjekt und dessen bewusst gewählten Handlungsgründe, als auch restriktive Bedingungen in denen sich das Subjekt wiederfindet, in die Forschung mit einzubeziehen.

## Forschungsfragen

Defensives Lernen ist nicht effektiv in Bezug auf die Durchdringung eines Lerngegenstandes (Grotlüschen, 2005). Daher sollten die Rahmenbedingungen ein expansives Lernen ermöglichen. Jedoch ist bislang fraglich, wie in der Hochschullehre eine Lernumwelt geschaffen werden kann, die expansives Lernen ermöglicht. Hierzu ist es notwendig mehr über die Möglichkeitsräume zu erfahren die Studierende im Hochschulkontext erleben.

Die verschiedenen Bedingungen beeinflussen sich gegenseitig. Je nach der Bedeutsamkeit der einzelnen Bedingungen für das Subjekt gestalten sich Abwägungsprozesse, wie viel Zeit und Energie in das Lernhandeln investiert wird, unterschiedlich aus.

Hieraus resultieren folgende Forschungsfragen:

- Welche Möglichkeitsräume bieten sich den Studierenden um ihre Lerntätigkeit umzusetzen?
- Ergeben sich typische Möglichkeitsräume des Lernhandelns von Studierenden in und für mathematische Lehrveranstaltungen?
- Welche Prämissen setzen Studierende im Hinblick auf Abwägungsprozesse bezüglich der Gestaltung des Lernhandelns?
- Welche Struktur weisen diese Abwägungsprozesse auf und lassen sich idealtypische Strukturen erkennen?

## Ausblick

Derzeit werden Interviews mit Mathematiklehramtsstudierenden anhand eines Leitfadens durchgeführt. Die Fragen des Interviewleitfadens gehen auf Prämissen ein, die Studierende in Bezug auf ihr Lernhandeln setzen, sowie auf konkrete Lernhandlungen. Hierbei werden die personale Situiertheit und das soziale Umfeld der/des Studierenden, sowie strukturelle Rahmenbedingungen berücksichtigt. Zusätzlich werden die Studierenden aufgefordert ein Mind-Map zum Thema „Lernen“ zu legen. Die Interviews in Kombination mit den Mind-Maps sollen mit Methoden der *Grounded Theory* (Strauss & Corbin, 1990) ausgewertet werden.

## Literatur


Brown, T. (2008): Lacan, subjectivity and the task of mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics 68*, (3), S. 227-245.

Brown, T. (2012): Subjectivity and cultural adjustment in mathematics education. A response to Wolff-Michael Roth. In: *Educational Studies in Mathematics 80* (3), S. 475–490.

Grotlüschen, A. (2005): Expansive learning: benefits and limitations of subject-scientific learning theory/ Expansives Lernen: Chancen und Grenzen subjektwissenschaftlicher Lerntheorie. *European Journal Vocational Training 3* (36), S. 15-20.

Holzkamp, K. (1985): *Grundlegung der Psychologie*. Frankfurt/Main, New York: Campus Verlag.

Holzkamp, K. (1995): *Lernen. Subjektwissenschaftliche Grundlegung.* Frankfurt/Main: Campus.

Pais, A. & Valero, P. (2012): Researching research. Mathematics education in the Political 80, S. 9–24.

Presmeg, N. & Radford, L. (2008): On semiotics and subjectivity: a response to Tony Brown’s “signifying ‘students’, ‘teachers’, and ‘mathematics’: a reading of a special issue”. *Educational Studies in Mathematics 69* (3), S.265-276.

Roth, W.-M. & Lee, Y.-J. (2007): “Vygotsky's neglected legacy": Cultural-historical activity theory. *Review of Educational Research 77* (2), S.186–232.

Roth, W.-M. &. Radford L. (2011): *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning.* 2. Ed. Rotterdam: Sense Publishers.

Roth, W.-M. (2012): Re/writing the subject. A contribution to poststructuralist theory in mathematics education. In: *Educational Studies in Mathematics 80* (3). S.451–473.

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques.* Newbury Park, CA: Sage Publication, Inc.

Markus RUPPERT, Würzburg

# Analogiebildungsprozesse in beispielbasierten Lernumgebungen

Das Lernen an Beispielen im Allgemeinen und der Rückgriff auf bereits gelöste Beispielaufgaben im Speziellen wird in der aktuellen Lernforschung als wichtige Quelle des Erkenntnisgewinns und des Wissenszuwachses angesehen (vgl. Atkinson et al., 2000). Der Transfer von einem gelösten Aufgabenbeispiel, das als Ausgangspunkt des Transfers (source) bezeichnet wird, auf ein neues Problem (target) vollzieht sich dabei häufig mittels Analogiebildung (vgl. English, 1997, S. 5). Typische Situationen in denen diese Art des Transfers von Schülern verlangt wird, sind die Vorbereitung und Bearbeitung von Klassenarbeiten. Nur allzu oft sprechen die Ergebnisse von Klassenarbeiten im Fach Mathematik jedoch eine eindeutige Sprache: Der beschriebene Transfer fällt den Schülern auch bei gewissenhafter Vorbereitung durch die Lehrkraft schwer.

Eine Frage, die im Rahmen lernpsychologischer und mathematikdidaktischer Forschung geklärt werden muss, ist deshalb: *Warum* tun sich Schüler so schwer auf ihre mathematische Erfahrung, ihr mathematisches Vorwissen zuzugreifen?

Ein Beitrag auf dem Weg zur Klärung dieser Frage ist Inhalt der hier vorgestellten Forschungsarbeit. Es soll geklärt werden, *wie* Schüler versuchen mittels Analogiebildung auf ihr Vorwissen zuzugreifen, an welcher Stelle ggf. Probleme auftreten, und wann der Transfer erfolgreich ist.

## Theoretische Grundlage – Ein Zwei-Dimensionen-Modell

Die Beschreibung des Untersuchungsgegenstandes, also der interessierenden Denkprozesse, geschieht auf der Grundlage eines Zwei-Dimensionen-Modells, das bereits in der Vergangenheit vorgestellt wurde (vgl. Ruppert, 2010, 2012).

Die erste Dimension beschreibt dabei die *Ebene* der Analogiebildung. Der Transfer kann sich dabei auf beteiligte Objekte, auf Relationen zwischen diesen Objekten und auf mathematische Operationen beziehen, die zur Lösung eines Problems beitragen. Analogiebildung findet also auf der Objektebene, auf der Relationsebene und auf der Handlungsebene statt.

Die zweite Dimension der Analogiebildung nimmt den Prozesscharakter von Analogiebildung in das theoretische Modell mit auf. Hier werden Ergebnisse der ausgiebigen Forschungen Sternbergs zu diesem Thema (vgl. u. a. Sternberg, 1977) und Ergänzungen anderer Autoren (vgl. z. B.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1035–1038). Münster: WTM-Verlag

Sheard/Readence, 1988 oder Gentner, 1989) berücksichtigt. Der Prozess der Analogiebildung vollzieht sich demnach in verschiedenen Phasen: Strukturieren, Abbilden, Schließen, Beurteilen (vereinfacht nach Sternberg). Gentner sowie Sheard/Readence ergänzen hierzu, dass diese Phasen nicht in chronologischer Reihenfolge und auch nicht zwingend alle durchlaufen werden müssen.

Insgesamt ergibt sich ein zweidimensionales Feld in dem Analogiebildungsprozesse beschrieben werden können (vgl. Abb. 1, 2. v. l.)

## Einige Fragen

Die Fragen, die auf dieser Arbeitsgrundlage geklärt werden sollen, sind die folgenden (vgl. Ruppert, 2012):

- Wie sehen konkrete Analogiebildungsprozesse als „Wege" im dargestellten Zwei-Dimensionen-Modell aus?
- Lassen sich diese „Wege" (sowohl für gelungene, als auch für gescheiterte Analogiebildungsprozesse) klassifizieren?
- Welche besondere Bedeutung kommt dem Übergang von der Struktur- auf die Handlungsebene zu?

Will man allerdings Denkprozesse im Allgemeinen und Analogiebildungsprozesse im Speziellen empirisch erforschen, müssen zuerst die folgenden Fragen geklärt werden (vgl. Ruppert, 2013):

(1) Wie können die interessierenden Denkprozesse initiiert werden?

(2) Wie können die Denkprozesse sichtbar gemacht werden?

(3) Welche Daten können für die Beschreibung der Denkprozesse erhoben und ausgewertet werden?

(4) Wie kann eine adäquate Auswertung der Daten aussehen?

## Example based learning und ein Vier-Phasen-Design

Zur Beantwortung der Fragen (1) bis (3) wurde in der Vergangenheit ein Vier-Phasen-Forschungsdesign vorgestellt, bei dem Schülerpaare in einer Laborsituation beim Lösen von Aufgaben beobachtet wurden (vgl. Ruppert, 2012, 2013).

Die Auswahl und die Darbietung der Aufgaben in einer Instruktions-, einer Partnerarbeits- und einer Expertenarbeitsphase erfolgten dabei nach den Erkenntnissen der Forschung zum example based learning (vgl. v. a. Atkinson et al., 2000) – auf diese Weise wurde das Auftreten von Analogiebildungsprozessen im Beobachtungszeitraum so gut wie möglich sichergestellt.

Um die auftretenden Denkprozesse sichtbar zu machen, wurde die Untersuchung nach der Methode des *Pair Think Aloud* (vgl. Haastrup, 1987), einer speziellen Form der *Think Aloud* Methode (Ericsson, Simon, 1999; Wallach, Wolf, 2001), durchgeführt. Die Äußerungen und Gesten der Schüler wurden dabei videografiert.

Als Datengrundlage für die Auswertung konnten so die Schüleräußerungen (Dialoge, Gedanken) und -gesten in einem Transkript festgehalten werden. Zusätzlich lagen für die Auswertung die schriftlichen Schülerdokumente und Aufzeichnungen von Teach-Back-Interviews (vgl. Vora/Helander, 1995) zu jeder Aufgabenbearbeitung vor.

## Auswertung

Auf der Grundlage eines Kodierleitfadens, der im Rahmen einer Vorstudie entwickelt wurde, konnten die Transkripte unter Zuhilfenahme der Schülerdokumente und Interviews kodiert und visualisiert werden. Die Transkriptions- und Kodierarbeiten wurden mit der Software Videograph durchgeführt. Diese lieferte gleichzeitig eine Visualisierung der beobachteten Denkprozesse (Abb. 1), die auch für eine erste qualitative Auswertung herangezogen werden konnte. Für die weitere Auswertung wurden zudem die Darstellung der Denkprozesse im Zwei-Dimensionen-Modell verwendet (vgl. oben und Abb. 1) und sogenannte Aufenthaltsmatrizen definiert.


Abbildung 1: Visualisierung von Analogiebildungsprozessen als Timeline im Videograph (l.), als Weg im Zwei-Dimensionen-Modell (2. v. l.), als Aufenthaltsmatrix (r.)

Betrachtet man diese drei Darstellungsformen im Zusammenspiel, so können zunächst qualitative Aussagen über die beobachteten Analogiebildungsprozesse gemacht werden (vgl. Ruppert, 2012).

Zudem liefern die Aufenthaltsmatrizen eine Möglichkeit der quantitativen Auswertung. Die Zusammenfassung der verschiedenen Analogiebildungsprozesse in einzelne Gruppen mittels Clusteranalyse stimmt dabei überraschend gut mit Ergebnissen einer interpretativen Vorgehensweise überein. Es ergeben sich auf den ersten Blick zwei Gruppen von Wegen der Analogiebildung, die sich ganz grundsätzlich voneinander unterscheiden:

- Analogiebildungsprozesse, bei denen zunächst auf allen Ebenen Strukturierungen vorgenommen werden, um dann weitgehend auf der Handlungsebene die Phasen der Analogiebildung zu durchlaufen.
- Analogiebildungsprozesse, die zunächst auf der Objektebene vollständige Analogien herstellen, um anschließend auf der Relations- und der Handlungsebene direkt zu Analogieschlüssen zu kommen.

Ob weitere Gruppen von Analogiebildungsprozessen separiert werden können ist Gegenstand der aktuellen Forschungsarbeit.

## Literatur

Atkinson, K. A., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the Worked Examples Research. Review of Educational Research, 70, S. 181-214.

English, L. (1997). Analogies, Metaphors and Images: Vehicles for Mathematical Reasoning. Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates.

Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1999). Protocol Analysis (3. Ausg.). Cambridge, London: MIT Press.

Gentner, D. (1989) The mechanisms of analogical learning. In: Vosniadou, S.; Ortony, A. (Hrsg.) Similarity and analogical reasoning (S. 199-241). Cambridge, Cambridge University Press.

Haastrup, K. (1987). Using Thinking Aloud and Retrospection to Uncover Learners' Learners Lexical Inferencing Procedures. In C. Faerch, & G. Kasper, Introspection in Second Language Research (S. 197-212). Clevedon: Multilingual Matters Ltd.

Ruppert, M. (2010) Analogiebildung - eine grundlegende mathematische Denkweise. In: Lindmeier, A. & Ufer, St. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. WTM-Verlag, Münster, S. 717-720.

Ruppert, M. (2012) Wege der Analogiebildung. In: Ludwig, M.; Kleine, M. Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM-Verlag, S. 717-720.

Ruppert, M. (2013) Ways of analogical reasoning – thought processes in an example based learning environment. Erscheint in: Proceedings of the CERME 8, Antalya.

Sheard, C.; Readence, J. E. (1988) An investigation of the inference and mapping processes of the componential theory of analogical reasoning. Journal of Educational Research, 81, S. 347-353.

Sternberg, R. J. (1977). Component Processes in Analogical Reasoning. Psychological Review, 84. S. 353-378.

Vora, P., & Helander, M. (1995). A Teaching method as an alternative to the concurrent think-aloud method for usablity testing. In Anzai Y., Ogawa, K. & Mori H. Symbiosis of Human and Artifact (S. 375-380). Elsevier Sciences Ltd.

Wallach, D., & Wolf, C. (2001). Das prozeßbegleitende Laute Denken - Grundlagen und Perspektiven. In: Lautes Denken - Prozessanalysen bei Selbst- und Fremdeinschätzungen (S. 9-29). Weimar: Verlag Rita Dadder.

Ildar SAFUANOV, Moskau

# Teaching prospective mathematics teachers to solve non-routine problems

George Polya (1981, p. xii) emphasized that prospective mathematics teachers should be taught the skill to solve mathematical problems. "…The solution of a non-routine mathematical problem is genuine creative work" (ibid.).

Furthermore, important is the fact that non-routine mathematical problems (tasks C1-C6) now constitute the essential part of the Unified State Examination (USE) in Mathematics.

The aim of this paper is to give implications for teaching prospective secondary mathematics teachers to solve non-routine mathematical problems including Olympiad problems and problems C1-C6 of the Unified State Examination in Mathematics. In particular, the contents of the new experimental course in solving non-routine mathematical problems for prospective mathematics teachers conducted with a group of ten 4-th year mathematics major students at the Moscow City Pedagogical University will be discussed.

Entertaining and non-standard mathematical problems have been used in teaching gifted pupils in many schools with mathematical bias in Soviet Union and Russia. Therefore, rich experience of teaching to solve mathematical problems was accumulated, and it is possible to apply this experience in teaching prospective teachers, too.

Wide known are the following methods of solving various kinds of problems (see, e.g., Kanel-Belov and Kovalji, 2004):

Invariants (in particular, parity, colorings);

Rule of extreme (in particular: testing the infinite case, small stirs method and infinite descending);

Proof by contradiction;

Mathematical induction;

Dirichlet principle;

Using properties of divisibility and remainders, Euclid's algorithm and congruences;

Graphs;

Rules of combinatorial analysis;

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1039–1042). Münster: WTM-Verlag

Symmetry reasons;

Backtracking;

"Divide and conquer" principle (restricting, binary search etc.);

Additional constructions (in geometry)

etc.

Some of these methods are different manifestations of more general methods and principles and also can be combined with each other. For example, Shapovalov (2006) argues that many of these methods and principles (Principle of the extreme, Dirichlet principle, invariants and colorings, infinite descending) are manifestation of the Principle of narrow places.

In our course, we used genetic approach (Safuanov, 2004). In particular, having solved a problem, we gradually establish its connection to serious mathematical theories. For example, considering naturally arising problem of Konigsberg bridges, we arrive to the important mathematical theory of Eulerian graphs.

Furthermore, note that G. Polya (1965, II, p.133) wrote that "the genetic principle may suggest the principle of consecutive phases…" The principle of consecutive phases distinguishes three phases in the solving process as well as in the development of mathematical concepts and theories: exploratory phase, phase of formalization and the phase of assimilation (ibid.)

The principle of concentrated teaching (Safuanov, 1999; Safuanov, 2003) manifests itself in our course in several directions. Knowledge of some mathematical topics was deepened. Some simple problems serve to the anticipation of more complex problems and mathematical theories.

The combination of functions was used: many problems serve not only to the raising the interest to studies (due to their entertaining character) but also promote the acquisition of new theoretical knowledge because they are connected to modern mathematical theories.

Finally, the means "linkage" is systematically used. One interesting problem leads to other, in some way connected with the former; thus the chains of problems are considered. For example, we offer chains of problems on weighing coins, chains of problems on checkered paper etc. Consider the list of topics in our course:

Using parity in problem solving.

Other invariants.

Rule of extreme.

Dirichlet principle.

Symmetry.

Graphs.

Problems on weighing coins.

Problems on crossings and transfusions.

Problems on checkered paper.

Problems of plain geometry (C4 of USE).

Problems of space geometry (C2).

Non-routine arithmetical and logical problems (C6).

For solving and discussing these problems, we used above-mentioned methods (invariants etc.).

However, it seems expedient to tell student teachers about more general approaches. Consider in more detail the analytic-synthetic activities in problem solving (Gusev and Safuanov, 2001).

The analysis and synthesis can be combined with each other.

S. L. Rubinshtein distinguished the important form of the analysis – one which is carried out through synthesis. The essence of such analysis is the following: "the object of thinking is being repeatedly included in new connections and thus it arises in new appearances, with new qualities fixed in new concepts; thus, new contents are repeatedly taken out of the object, it turns repeatedly to new sides; new properties of the object come to light" (Rubinshtein, 1958, p. 98-99).

Thus, the important means of thinking arises: "the analysis through synthesis". Its role in psychology is connected with the detection of new qualities, sides and properties of objects.

Consider an example (from plane geometry) of application of this means.

**Problem** (C4 of USE, see Yashchenko et al., 2014).

AM is a median of the triangle ABC. AB=10. AC=12. AM=5. What is the area of the triangle ABC?

**Solution.**

We begin with the analysis. In order to find the area of the triangle ABC, it is necessary to know, e.g., the lengths of all three sides. However, we know the lengths of only two sides and of a median. What can we do in this situation? The idea is to construct a new triangle with the same area and known lengths of all three sides. This is a synthetic reason. So, we construct the continuation of the median AM by a segment MD so that MD=AM=5. It easy to see that triangles ACM and BDM are equal. Therefore, the area of the triangle ABD is equal to the area of the triangle ABC. Furthermore, BD=AC=12. Thus, we know the lengths of all three sides of the triangle ABD. One can easily find (e.g., by Heron's formula) the area of the triangle: 48.

The solution of this problem is a vivid example of the application of the analysis through synthesis. The analysis leads us here to the necessity of the additional construction.

The problem C6 usually deals with arithmetic of integer numbers. Therefore, it is connected with number theory course the student study in the university. Here also the analysis through synthesis can be applied as one see, e.g., in the solution of Problem 4 of the article by Gusev and Safuanov (2001).

First outcomes of the implementation of our course demonstrated the positive changes in prospective mathematics teachers' skills in solving non-routine problems as well as in their beliefs about the problem solving.

## Literatur


Gusev, V.A., & Safuanov, I.S. (2001). Analytic-synthetic activities in the learning of mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3. pp. 73-80). Utrecht, Netherlands: PME.

Kanel-Belov, A., and Kovalji, A. (2008). How to solve non-routine problems (in Russian). M.: MCNMO.

Polya, G. (1981). Mathematical Discovery. New York: Wiley.

Rubinshtein, S. L. (1958). On the thinking and methods of its study (in Russian). M. - L.

Safuanov, I. (1999). On some under-estimated principles of teaching undergraduate mathematics. – In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 153-160). Haifa, Israel: Technion.

Safuanov, I. (2003). Applications of the principle of the concentrated teaching in the design of the mathematical course at the university. – Beitraege zum Mathematikunterricht 2003. Hildesheim: Franzbecker, S.557-560.

Safuanov I S. (2004). Psychological Aspects of Genetic Approach to Teaching Mathematics. In M. J. Hψines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 153-160). Bergen, Norway: PME.

Shapovalov (2006). The principle of narrow places. M.: MCNMO.

Yashchenko, I., Shestakov, S., Trepalin, A. and Zakharov, P. (2014). Preparation to USE in Mathematics (in Russian). M.: MCNMO.

Ildar SAFUANOV, Irina OVSYANNIKOVA, Moskau

# Investigations in the mathematical classroom (open-ended approach)

## 1. Introduction

Educational system in Russia is at the stage of extensive reforming today. New goals for teachers are set by the recently introduced State educational standards of the second generation. Preparation of learners for fast changing environment, development of their ability to make independent decisions, extension of skills of critical thinking and gaining knowledge are becoming the priority aims of education.

Exploratory learning has been often used in the teaching practice in our country. In reality, there are some difficulties with the introduction of exploratory learning into the secondary school.

While analyzing international experience and tendencies of developmental education in our country, we have considered different approaches to organizing research activity of learners. As a result of the preliminary research, special interest was concentrated on the open approach developed in Japan in the 70th of the twentieth century. This method was essentially based on the use of problems with multiple solutions. After studying the ideology of this approach, as well as its didactic opportunities and similar Russian practices, we developed an effective methodical system of using open-ended problem approach for lessons of mathematics in the secondary school.

## 2. What makes open-ended problems so interesting?

What problems are open-ended? Open-ended problems are opposite to closed. We call a tasks closed if it is clearly defined and has only one correct solution. Open tasks give a pupil various possibilities in the statement of the question and in the solving of the problem. Naturally, the open-ended approach is a kind of non-routine pedagogical technology; its introduction into the educational process is connected with a variety of serious problems. First, it is very difficult for some teachers to realize that the task can have more than one right answer. It is quite possible that even the teacher cannot see other correct solutions. Second, the assessment system for solutions of open-ended tasks is not yet clear.

Taking into account these problems, we can state the main purpose of the developmental educational model based on open-ended tasks as follows: to create a transparent and understandable system of realizing open-ended ap-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1043–1046). Münster: WTM-Verlag

proach in mathematics classes. It would give an opportunity for teachers to use this technology in their own practice. Finally, we created a toolkit consisting of two blocks: a methodical manual for teachers and a booklet for pupils.

The methodical manual contains practical guidelines for using open-ended tasks in classes, a set of tasks for pupils of different age, examples of assessment systems and instructions for composing open-ended tasks.

However, the training of teachers on the basics of the open-ended approach is insufficient for achieving high educational results. Very important is also to develop the pupils' metacognitive awareness. That is why we elaborated the information booklet named "Introduction to the science".

Consider in detail some important features in our methodical recommendations that may help to make the open-ended approach more effective.

## 3. Classification of open-ended tasks

Open-ended tasks can be classified in different ways. The first way of classification is by the kind of "openness". Here, open-ended tasks can be divided into three groups: tasks with multiple right answers; tasks with multiple solution methods; assignments called "task-to-task" (while solving the original task, new questions and tasks may arise).

According to data source, semantic context of a task, or to the time necessary for the solving, it is possible to distinguish the following types: investigations (where a starting point is given or problem finding or problem formulating); real-life situations (which have their roots in the everyday life); problems without a question; problem variations ("what-if"-method); research projects (larger study entities, requiring independent working).

It is important to note that the same task can be attributed to the different groups depending on lesson's goals, level of knowledge of pupils and on wishes of a teacher.

## 4. Recommendations for composing open-ended tasks

As the source for open-ended tasks, one can use historical facts, popular scientific books, periodical documentaries etc. In order to learn how to compose an open-ended task, it is very convenient to do it in comparison with a corresponding "closed" task. In this case one needs just to reformulate a closed task for making it open-ended.

Table 1 describes the most important characteristics of open-ended tasks.

**Table 1 – Characteristics of “open-ended” and “closed” tasks**

| Characteristics | «Closed» tasks | Open-ended tasks |
|---|---|---|
| Condition | Data is sufficient for solving a problem;<br>there is no unnecessary data | Initial data for the task’s solutions may be insufficient or, conversely, excessive |
| Statement of question | Find out …<br>(value or an algorithm for constructing)<br>prove…<br>(the statement already known as right) | Is this statement true?<br>What we can/cannot find out from the task’s condition?<br>Whether it is possible to weaken the condition? Whether it is impossible to strengthen it? |
| The progress of solution | Theoretical knowledge of the pupil is sufficient for solving the task;<br>there is only one or a limited number of strategies to address the task. | Knowledge for solving the problem is insufficient. Pupils need to solve subproblems accumulating the necessary experience;<br>methods of solving problems can vary a lot |
| Result | There is only one solution of the problem | There are several «correct» solutions of the problem, depending on what direction of the research was selected. |

The open-ended tasks differ from classical ones by higher degree of freedom. The most important feature in the ideology of open-ended approach is that pupils determine a goal of the research by themselves. During the solving of a problem, they can be confronted with another one.

## 4. The model of the system of assessment

Solving of open-ended task is a kind of research activity. The main goal of using such kind of tasks in classes is to improve pupils’ research skills. That is why the main criterion of efficiency of using open-ended approach is the development of pupils’ research competences.

Furthermore, the depth of the exploring the question and the originality of the ideas presented can be additionally appreciated.

## 4. Conducting lessons on the basis of open-ended problem approach

Note some of the most important stages in the lesson preparation.

*Theoretical training of pupils*

We elaborated a booklet for students named “Introduction to the science”. Basic recommendations for doing research are given: the algorithm of research, overview of the main scientific methods, recommendations for the design and even advice on issues of public defense.

*The optimal quantity of open-ended tasks*

From the experience of schools using exploratory learning approach in their practice, solving open-ended tasks cannot be used more often than once a week, but at the same time such an activity will not be of any use if research assignments are not used at least once a month. Thus, conducting research lessons once a month is probably the optimal regularity.

*Choosing the group of learners*

It is necessary to decide if the exploration must be done by all the pupils equally in a class or the class will be divided into groups. It is still recommended to allow all the pupils to make research within one task.

*Choosing the form of the presentation of results*

The form of the presentation of results of solving open-ended tasks depends particularly on the task itself and on the amount of attention one wants to attract to it. There are four basic forms of results presentation: final report, public discussion, board sheets (posters) and science exhibition. Interchanging the forms of results presentation is recommended. But ultimately, the contents and difficulty of the task are a priority.

*Results of the implementation*

During the implementation of our approach, the efficiency of open-ended method was proved for pupils of the secondary school with classes of different profiles. As a result of using new approach, interviews of teachers and pupils revealed the following changes: increase of motivation to learn mathematics and of enthusiasm of pupils at a lesson; acquiring the experience of using mathematical knowledge in real life; stable positive dynamics of improvement of research competences; improvement of the psychological atmosphere in a classroom; reconsideration of the role of a teacher as a participant of the educational process in a classroom; acquisition of skills of work in a group.

The obtained results of our theoretical research and experimental work indicate that the elaborated model of education justifies stated purposes.

## Literatur

Nohda, N. 1991. Paradigm of the ”open-approach” method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. *International Reviews on Mathematical Education 23 (2),* 32–37ZDM, 23 (2), 32-37.

Alexander SALLE, Rudolf VOM HOFE, Andreas PALLACK, Bielefeld

# Differenzierter Unterricht mit Blütenaufgaben

Zahlreiche Studien liefern Belege für die Leistungsheterogenität, die innerhalb von Klassen, Stufen und Schulen vorherrscht – selbst der Vergleich unterschiedlicher Schultypen offenbart breite Überschneidungsbereiche bei Schülerleistungen (vom Hofe et al., 2009). Neben Intelligenz und Vorwissen sind die intrinsische Motivation und der Einsatz von Lernstrategien beim Lernen wichtige Faktoren für die Aneignung langfristigen und tragfähigen Wissens (Murayama, Pekrun, Lichtenfeld & vom Hofe, 2012). Als Mittel für die allgemeine Förderung in heterogenen Klassenverbänden, insbesondere unter der Perspektive einer Stärkung des eigenständigen und selbstregulierten Lernens, wird seit 2009 das binnendifferenzierende Format der *Bielefelder Blütenaufgabe* im Projekt SINUS.NRW weiterentwickelt.

## 1. Blütenaufgaben

Die Idee der Blütenaufgabe geht auf Schupp (2002) zurück, der die Metapher „Blüte" als Gegenkonzept zu verengenden didaktischen Trichterschemata beschreibt. Er versteht unter einer Blütenaufgabe einen Kontext, zu dem Schülerinnen und Schüler Teilaufgaben verschiedenster Art entwerfen und auf diese Weise vielfältige Aspekte einer Thematik bearbeiten.

Die im Projekt MABIKOM entwickelten Blütenaufgaben bestehen aus einem Kontext und drei bis fünf untereinander unabhängigen Teilaufgaben mit unterschiedlichen Charakteristika. Im Verlauf der Aufgabe erhöht sich der Schwierigkeitsgrad der Teilaufgaben. Die Grundaufgabe und ihre Umkehrung entsprechen einem mindestens zu erreichenden Zielniveau (vgl. Bruder & Reibold, 2010).

Die Bielefelder Blütenaufgabe stellt eine Variation dieses Formats dar und besteht aus vier Teilaufgaben mit den Charakteristika vorwärts arbeiten, rückwärts arbeiten, komplex und offen. Dabei wird auf die Indizierung der Teilaufgaben mit Buchstaben oder Zahlen verzichtet, um die Festlegung einer Reihenfolge zu vermeiden – die Kennzeichnung wird z.B. mit Spielkartensymbolen (Kreuz, Pik, Herz und Karo) realisiert. Die Zuordnung der Charakteristika zu den Symbolen folgt keiner festen Vorschrift, sondern wird von Aufgabe zu Aufgabe neu festgelegt (Pallack et al., 2011).

## 2. Fragestellungen & Studiendesign

Durch die nichtlineare Anordnung und „Maskierung" der Teilaufgaben entfällt die Möglichkeit, anhand der Teilaufgabenkennzeichnung auf die rela-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1047–1050). Münster: WTM-Verlag

tive Schwierigkeit im Vergleich zu anderen Teilaufgaben zu schließen. Daher müssen die Lernenden andere Kriterien bei der Bewertung der Aufgabenschwierigkeiten heranziehen. Es ergeben sich hieraus folgende Fragestellungen im Hinblick auf die Aufgabenbewertung und -auswertung:

- Wie und aufgrund welcher Kriterien bewerten die Schülerinnen die Schwierigkeiten der Teilaufgaben?
- Wie bewerten die Lernenden die Möglichkeit der freien Aufgabenauswahl?

Zur Untersuchung der obigen Fragen werden die Aufgaben zuerst in Einzelarbeit eingesetzt. In einer anschließenden Gruppenarbeit sollen die individuellen Bearbeitungen verglichen, korrigiert, ergänzt und diskutiert werden. Hier sind, auch im Hinblick auf die Einschätzung der Aufgabenschwierigkeiten, folgende Fragen interessant:

- Wie gestalten sich die Bearbeitungen in Einzel- und Gruppenarbeit?
- Wie beurteilen die Schüler die Gruppenarbeit?

Außerdem sind für uns der Gesamteindruck des Unterrichtsversuchs und die Einschätzung der Blütenaufgaben von Interesse:

- Wie wird das Arbeiten mit den Blütenaufgaben insgesamt eingeschätzt?

Für die Beantwortung der Fragen wurde an fünf Schulen aus dem SINUS.NRW-Projekt (Bertolt Brecht Gesamtschule Löhne, Karla-Raveh Gesamtschule des Kreises Lippe, Gertrud Bäumer Schule Bielefeld, Einstein Gymnasium Rheda-Wiedenbrück, Städtisches Gymnasium Delbrück) eine Vollerhebung der 5. – 8. Klassen durchgeführt und curriculumsbegleitend pro Klasse eine Blütenaufgabe eingesetzt. Zusätzlich zu Schülerlösungen und -fragebögen wurden die Lehrkräfte zu Einstellungen und Vorerfahrungen mit Blütenaufgaben und der Durchführung befragt.

Nach dem Durchlesen der Aufgabe und der Klärung unklarer Begriffe begannen die Schülerinnen und Schüler, die Aufgabe in einer 15minütigen Einzelarbeit zu lösen. Anschließend wurden zufällige Gruppen gebildet, in denen die Bearbeitung mit einer anderen Stiftfarbe fortgesetzt wurde. Zuletzt wurden die Lösungen im Plenum vorgestellt.

## 4. Ergebnisse

Die vorgestellten Ergebnisse beruhen auf einer bereits ausgewerteten Teilstichprobe von n = 182 Sechstklässlerinnen und Sechstklässlern der drei beteiligten Schulformen zu zwei Aufgaben.

Bei der Schwierigkeitsbewertung der beiden eingesetzten Aufgaben zeigt sich ein sehr heterogenes Bewertungsverhalten (Abb. 1 links). An den Spaltensummen des Diagramms lässt sich ablesen, dass die Aufgabe zum Rückwärtsarbeiten mit Abstand (41 Nennungen) als leichteste Teilaufgabe bewertet wurde, dann folgen Vorwärtsarbeiten (20), die komplexe (14) und die offene Aufgabe (11). Weiterhin verdeutlichen die Zeilensummen, dass zwar die Aufgabe zum Rückwärtsarbeiten selten als schwierigste Teilaufgabe genannt wurde (7), die Teilaufgaben zum Vorwärtsarbeiten (26), die komplexe (28) und die offene Aufgabe (25) jedoch nahezu gleichviele Nennungen erhalten. Anhand der Kreise, die die auftretenden Paare von Schwierigkeitseinschätzungen repräsentieren, wird deutlich, dass jede sinnvolle Kombination mindestens einmal beobachtet werden kann.

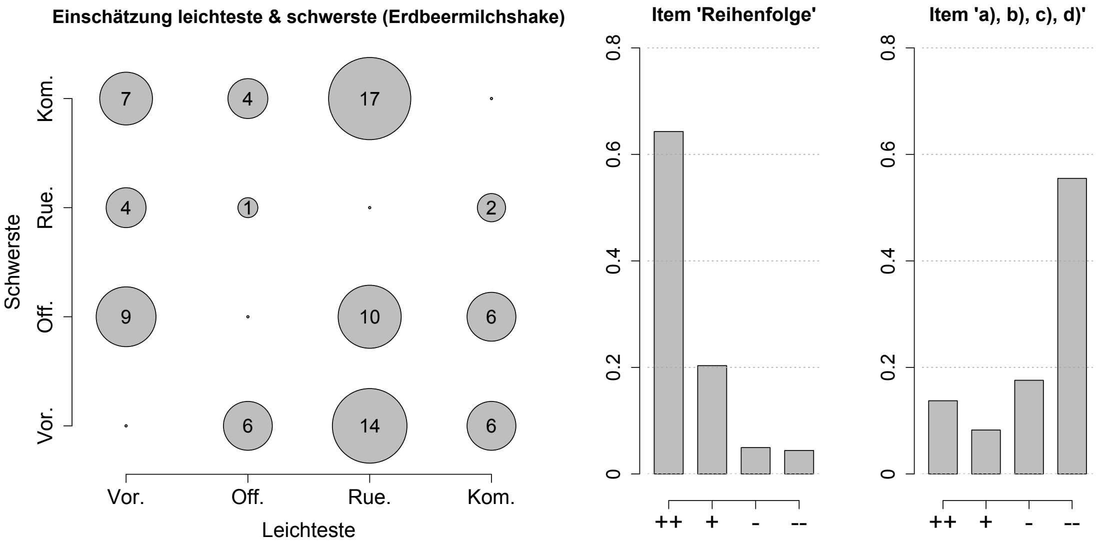



**Abb.1**: Im linken Diagramm sind die Kombinationen der Einschätzung leichteste-schwerste Teilaufgabe für die Aufgabe „Erdbeermilchshake“ dargestellt. Die Balkendiagramme auf der rechten Seite zeigen die relative Häufigkeit der Zustimmung (++ stimmt genau, + stimmt, – stimmt teilweise, – – stimmt gar nicht) in allen ausgewerteten Schülerfragebögen auf die Fragen „*Man konnte die Reihenfolge der Teilaufgaben selbst bestimmen. Das fand ich gut.*“ (Item Reihenfolge) und „*Ich finde es besser, wenn bei den Aufgaben eine Reihenfolge vorgegeben ist (z.B. a), b), c), d))*“ (Item a), b), c), d)).

Die Gründe für die Auswahl können z.B. mathematisch-inhaltlicher („man musste nur Koordinaten eintragen“), organisatorischer („stand als erstes dort“) oder strategischer („weil die schnell ging“) Natur sein. Insbesondere trat die Begründung „man musste sich etwas ausdenken“ in Zusammenhang mit der offenen Teilaufgabe sowohl bei der Bewertung als einfachste als auch als schwerste Aufgabe auf.

Eine Analyse der Aufgabenbearbeitungen zeigt, dass nahezu alle ausgewerteten Schülerinnen und Schüler mindestens eine Teilaufgabe bearbeiten konnten. In den Gruppenarbeiten erhöhten sich häufig Qualität und Anzahl der Bearbeitungen. Dabei konnten verschiedene eingesetzte Strategien in der Gruppenarbeit beobachtet werden. Beispielsweise gibt es Schülergruppen, die die Einzelarbeitslösungen austauschen und gegenseitig korrigieren. Über 70 % der Lernenden bewerteten die Gruppenarbeit als positiv oder sehr positiv und hoben dabei Spaß und Produktivität hervor.

Die Aussage „Das Arbeiten mit den Blütenaufgabe heute hat mir gut gefallen" wurde ebenfalls mit über 70 % Zustimmung versehen. In der Analyse der Dinge, die den Lernenden Spaß machten, treten insbesondere die Gruppenarbeit und das Interesse an den Kontexten hervor.

## 5. Diskussion & Fazit

Die untersuchten Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich hochgradig bei der Schwierigkeitsbewertung der Teilaufgaben und begründen dies mit vielfältigen Argumenten. Weiterhin befürworten sie die freie Aufgabenauswahl und sprechen sich größtenteils gegen eine hierarchische Anordnung aus. Dieses Ergebnis zeigt, dass Schülerinnen und Schüler die Gestaltung ihres Lernprozesses in diesem Rahmen wertschätzen. Außerdem lässt sich vermuten, dass eine hierarchische Anordnung unter Umständen die Bearbeitung weiterer Aufgaben verhindern könnte, da beispielsweise ein ansteigender Schwierigkeitsgrad angenommen werden könnte.

Die Gruppenarbeit führte einerseits zu einer Verbesserung der Schülerlösungen, andererseits wurde sie von vielen Lernenden als sehr positiver Aspekt der Arbeit wahrgenommen.

## Literatur


Bruder, R. & Reibold, J. (2010): Weil jeder anders lernt. *mathematik lehren* 162, Velber: Friedrich Verlag, S. 2-9.

Murayama, K., Pekrun, R., Lichtenfeld, S., & Vom Hofe, R. (2012). Predicting Long-Term Growth in Students' Mathematics Achievement: The Unique Contributions of Motivation and Cognitive Strategies. *Child Development*.

Pallack, A., Salle, A. & vom Hofe, R. (2011): Diagnose und individuelle Förderung im Bruchrechenunterricht. *Der Mathematikunterricht* 57(3), S. 37-46.

Schupp, H. (2002). Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim; Berlin: Franzbecker.

vom Hofe, R., Hafner, T., Blum, W., & Pekrun, R. (2009). Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe – Ergebnisse der Längsschnittstudie PALMA. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium - Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht (pp. 125–146). Münster: Waxmann.

Florian SCHACHT, Dortmund

# Begriffsbildung zwischen Individuellem und Sozialem

## Cobbs Paradigma „Theorizing as bricolage"

Die Beforschung von mathematischen Lernprozessen ist eines der wesentlichen mathematikdidaktischen Tätigkeitsfelder. Je nach forschungstheoretischer Ausrichtung unterscheiden sich die Arbeiten traditionell jeweils hinsichtlich der Betonung des Individuums oder des Sozialen. Im ersten Fall orientieren sich die hintergrundtheoretischen Annahmen eher an einer individual-psychologischen Zielperspektive, genauer an „theories of the process of mathematical learning that are intended to offer insights into students' learning in any mathematical domain" (Cobb 2007, 19). Beispiele für eine deutliche Fokussierung auf das Individuum finden sich etwa in Arbeiten von Cobb (1994), Tall & Vinner (1981) oder Vergnaud (1997). Demgegenüber stehen Arbeiten, die ihre hintergrundtheoretische Schwerpunktsetzung auf die sozialen Einflussfaktoren bei Lernprozessen deutlich betonen. Hierbei ist die erkenntnistheoretische Grundhaltung insofern anders gelagert, als das Individuum stärker als Subjekt in sozialen Kontexten gesehen wird. Insofern handelt es sich etwa bei Arbeiten wie denen von Bauersfeld et al. (1988), Voigt (1994) oder Cobb et al. (1995) um „epistemologies which view the individual as situated within cultures and social situations such that it makes no sense to speak of the individual or of knowledge unless seen through context or activity" (Sierpinska et al. 2007, 846).

Anlass für Cobb & Yackel (1996), diese dualistische Sichtweise zu überwinden, waren Ergebnisse einer Studie zu Unterstützungsmaßnahmen im Mathematikunterricht: „We initially viewed learning in almost exclusively psychological constructivist terms" (Cobb & Yackel 1996, S. 177). Der gewählte – individualpsychologisch orientierte – Theorierahmen erschien dem Forscherteam allerdings nicht hinreichend geeignet, um die beobachteten Prozesse im Unterricht adäquat zu beschreiben, da die sozialen Routinen im Mathematikunterricht einen hohen Einfluss auf die Leistung und das Verhalten der am Unterricht beteiligten Personen zu haben schienen: „The students (…) seemed to take it for granted that they were to infer the responses the teacher had in mind rather than to articulate their own understandings" (Cobb & Yackel 1996, S. 178). Insbesondere stellte sich aus forschungsmethodischer Sicht als problematisch heraus, dass soziale Normen nicht als psychologische Einflussfaktoren – auf der Grundlage der ursprünglichen hintergrundtheoretischen Grundannahmen – konzeptualisiert werden konnten. Schließlich wurde eine forschungspragmatische Entscheidung getroffen: Die empirischen Daten wurden sowohl aus psychologi-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1051–1054). Münster: WTM-Verlag

scher als auch aus interaktionistischer Perspektive ausgewertet, um einerseits die individuellen Entwicklungen der Schülerinnen und Schüler und andererseits die zugrunde liegenden sozialen Normen hinreichend genau zu rekonstruieren (vgl. Cobb & Yackel 1996, S. 178).

Für die Diskussion um den Umgang mit Theorien in der Mathematikdidaktik war dieses Vorgehen richtungsweisend: Zahlreiche Arbeitsgruppen erarbeiteten Kriterien für den Umgang mit unterschiedlichen theoretischen Grundannahmen und Perspektiven (vgl. etwa Assude et al. 2008, Prediger et al. 2008). Konsens besteht in den z.T. sehr unterschiedlichen Arbeiten weitgehend darin, bei der Verknüpfung unterschiedlicher Theorieansätze im Rahmen eines Forschungsprojektes die jeweiligen Hintergrundannahmen (*basic principles*) offen zu legen, und zwar die „implicit views and explicit statements that delineate the frontier of what will be the universe of discourse and the adopted research perspective" (Radford 2008, 320). Cobb (2007) prägt in diesem Zusammenhang die Idee von *Theorizing as bricolage*. Damit ist der Vorschlag gemeint, unterschiedliche Theorien je nach Forschungsbedarf und in Abhängigkeit von der Forschungsfrage zu verknüpfen, dabei aber die jeweiligen Normen der Theorien transparent zu machen und offen zu legen.

**Epistemologische Grenzen**

Die Kombination der individual-psychologischen mit der interaktionistischen Perspektive, wie sie von Cobb & Yackel (1996) beschrieben wird, zeigt bei genauer Analyse, dass die grundlegenden erkenntnistheoretischen Unterschiede der jeweiligen Perspektiven zwar in der Gesamtschau eine breitere empirische Struktur abbilden können, dass allerdings erkennbare epistemologische Spannungen zwischen beiden Polen bestehen, etwa hinsichtlich

- der Rolle des Individuums bei der interaktionstheoretischen Ansätzen: Anders als bei individualpsychologischen Theorien ist der „focus of study (...) not the individual but interactions between individuals within a culture" (Sierpinska et al. 1996, S. 850), oder
- der Zielperspektive auf die Veränderung von Mathematikunterricht. Damit ist gemeint, dass sich fachdidaktische theoretische Zugriffe unterscheiden lassen entlang ihrer Absicht, unterrichtliche Innovationen zu entwickeln und zu erforschen oder etwa rein deskriptiv bzw. rekonstruktiv vorzugehen. So stellen Jungwirth et al. für die interpretative Unterrichtsforschung heraus: „Es kommt (…) auch nicht von ungefähr, dass die interpretative mathematikdidaktische Forschung

keine Präferenz für die Analyse unterrichtlicher Neuerungen hat“ (Jungwirth et al. 2006, S. 12).

Durch die Verknüpfung von sozialer und individueller Perspektive erreichten Cobb & Yackel (1996) eine bedeutungsvolle Erweiterung des mathematikdidaktischen Erkenntnishorizontes. Gleichzeitig ist die Kombination dieser beiden Perspektiven hinsichtlich der Rolle des Individuums, hinsichtlich der hintergrundtheoretischen Annahmen oder etwa hinsichtlich der jeweiligen Zielperspektive wenig kohärent – was einerseits die Stärke des Ansatzes bei der empirischen Betrachtung und andererseits aber auch die Problematik hinsichtlich der epistemologischen Grundhaltung des Gesamtrahmens ausmacht.

Im Folgenden wird am Beispiel der Variablenpropädeutik ein theoretischer Rahmen (Hußmann & Schacht 2010, Schacht 2012) vorgestellt, der ausgehend von *Festlegungen und Inferenzen* als kleineste Einheiten die Rekonstruktion sowohl individueller Begriffsbildungsprozesse als auch dem Diskurs zugrunde liegende soziale Normen erlaubt.

## Empirisches Beispiel

Die folgende Szene stammt aus einer Interviewstudie zur Propädeutik des Variablenbegriffs (Schacht 2012). In einer ersten Stunde der Unterrichtsreihe zum Umgang mit statischen Bildmustern arbeiten die beiden Schüler Orhan und Ariane an dem Muster in Abb. 1b. Das folgende Transkript dokumentiert das Gespräch der beiden, bei dem in Turn 5 eine Frage einer teilnehmenden Beobachterin gestellt wird.

| T | P | Transkript | Festlegungen |
|---|---|---|---|
| 1 | O | In Ninas Bild sollen wir jetzt die Anzahl ent- eh bestimmen. | |
| 2 | A | 5 , 20 (A zeigt auf das Punktmuster) | |
| 3 | | (O fängt an die Punkte zu zählen) | 1: Die Anzahl der Punkte in einem statischen Punktmuster bestimme ich durch Abzählen. |
| 4 | A | (A zu O) da musst du doch nicht zählen… | |
| 5 | TB | Wie bist du denn da drauf gekommen auf die 20? | |
| 6 | A | Also weil eh hier so sagen wir mal Muster ist 5 , 4 Musters (A zeigt auf die Punkte) so; 4 mal 5 ist 20 | |
| 7 | O | Eh das stimmt wirklich! | 2: Ariane kann ein Produkt finden, das es erlaubt, das Bild mit einem Muster zu strukturieren.<br>3: Das Muster lässt sich in jeweils 4 Bündel zu je 5 Punkten einteilen |
| 8 | A | Logik! | |

In weiteren klinischen Interviewsituationen mit dem Schüler Orhan verdeutlicht er sein Vorgehen beim Umgang mit statischen Punktbildern: Zunächst zählt der die Punkte einzeln ab, bildet dann aus der Gesamtzahl der Punkte ein passendes Produkt (etwa 20 = 4•5 oder 21 = 7•3) und trägt die beiden Faktoren im Punktbild als disjunkte Teilmengen ab (vgl.

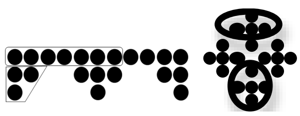


**Abb. 1a und 1b: hier 7 • 3 und 4 • 5**

Abb. 1a und 1b). Dieses Vorgehen ist zwar aus mathematischer Sicht nicht tragfähig, es ist allerdings für Orhan viabel in unterschiedlichen Situationen.

## Diskussion in inferentialistischer Perspektive

Vor dem Hintergrund des inferentialistischen Theorierahmens wurden zunächst individuelle Festlegungen rekonstruiert. Für die Interaktionssituation im Transkript sind einige rekonstruierte Festlegungen in der rechten Spalte abgedruckt. Erkennbar wird bei genauerer Analyse, dass die Entstehung der – für Orhan neuen – folgenden Festlegung auf die obige Interaktionssituation mit Ariane zurückgeführt werden kann: *Die zwei Faktoren des Produkts 4·5 stellen 2 disjunkte Punktmengen im Muster dar*. In diesem Analyseschritt wird insofern die individuelle Perspektive hervorgehoben, als hier ein Ausschnitt aus Orhans Begriffsbildungsprozess rekonstruiert wird.

Gleichzeitig aber lassen sich mit der Rekonstruktion der von Orhan eingegangenen und zugewiesenen Festlegungen im Diskurs mit Ariane zugrunde liegende soziale Normen herausarbeiten. Orhan weist Ariane im Transkriptausschnitt die Festlegungen 2 und 3 zu (vgl. Transkript). Gleichzeitig geht er Festlegung 3 selbst ein. In der anschließenden Interviewsituation geht Orhan dann auch die zuvor Ariane zugewiesene Festlegung 2 selbst ein: ***Ich*** *kann ein Produkt finden, das es erlaubt, das Bild mit einem Muster zu strukturieren.* In Verbindung mit Festlegung 3 stellen diese Festlegungen die wesentlichen Berechtigung für Orhans Strukturierungen des Punktmusters in Abb. 1 dar. Wesentlich bei dieser Analyse (vgl. auch Schacht 2012) ist, dass durch die Rekonstruktion des Eingehens und Zuweisens von Festlegungen sowohl die (soziale bzw. normative) Autorität, die Ariane in dieser Situation hat, als auch Orhans (individuelle) begriffliche Entwicklung herausgearbeitet werden können.

## Fazit

Die hier vorgestellte festlegungsorientierte Theorierahmen rekonstruiert das Eingehen und Zuweisen von Festlegungen in einer inferentiellen Perspektive. Dieser Zugang ermöglicht es, sowohl individuelle Begriffsbildungsprozesse zu beschreiben (vgl. Schacht 2012) als auch interaktionale Einflüsse und soziale Normen, die beim Lernprozess eine Rolle spielen. Auf diese Weise gelingt es, soziale *und* individuelle Aspekte von Mathematiklernen in einem theoretischen Rahmen zu fassen.

## Literatur (nur in der Online Fassung)

Ingolf SCHÄFER, Bremen

# FABEL - Ein begleitendes Aufgabenkonzept für die Eingangsphase an der Universität

Das Beweisen im Mathematikstudium bereitet den Studierenden gerade zu Beginn große Probleme. Aber auch beim Begriffebilden gibt es große Schwierigkeiten. Dreyfus (2002, S. 18) stellt beispielsweise fest, dass in der linearen Algebra "students tend to avoid this high level of abstraction by performing actions on a purely formal level" und schließt, dass "... even the most basic notions of linear algebra, including the very essence of linearity are often poorly mastered and understood by the students." (ebd.).

In ähnlicher Weise äußern sich auch (Dorier, Robert, Robinet & Rogalsiu, 2002, S. 95): „For a majority of the students, linear algebra is no more than a catalogue of very abstract notions that they represent with great difficulty. In addition, they are submerged under an avalanche of new words, new symbols, new definitions, and new theorems."

Um diese Probleme anzugehen wurde an der Universität Bremen das FABEL-Aufgabenkonzept (Bikner-Ahsbahs & Schäfer, 2013) etabliert, das hauptsächlich im Rahmen einer einstündigen Begleitveranstaltung zur Analysis und linearen Algebra umgesetzt wurde.

## Was ist FABEL?

FABEL steht (fast) als Akronym für die Aufgabentypen **F**ingerübungen, **A**nwenden und Algorithmen abarbeiten, **B**egriffe bilden und **B**eweise realisieren, **E**insatz von Heuristiken lernen und **L**ese- und Schreibübungen. Damit ist allerdings nicht eine vollständige Kategorisierung von Aufgaben gemeint: gute Aufgaben im Sinne des FABEL-Konzepts decken vielmehr mehrere der Bereiche ab. Andererseits gibt es sehr wohl Mathematikaufgaben, die keinen der Aspekte bedienen. Wie im Folgenden erläutert, lassen sich die einzelnen Typen innerhalb von FABEL mit Hilfe von Boeros Beweismodell mit Teilaspekten von Beweisprozessen identifizieren, die wechselseitig voneinander abhängig sind.

## Boeros Phasenmodell des Beweisens

Boeros Modell der Phasen des Beweisens (Boero, 1999) postuliert sechs Phasen und wurde erfolgreich in empirischen Untersuchungen eingesetzt (Heinze, 2004; Reiss & Renkl, 2002). Nach diesem Modell beginnen Beweisprozesse mit einer Problemstellung; aus der zunächst durch *unspezifisches Erkunden eine Vermutung entwickelt* wird. In der nächsten Phase wird die *Vermutung gemäß der üblichen Konventionen formuliert* und dann

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1055–1058). Münster: WTM-Verlag

*spezifisch die Vermutung erkundet*. Es folgt das *Auswählen von Argumenten und das Aneinanderfügen der Argumente zu einer Argumentationskette.* Die fünfte Phase stellt die *Niederschrift der Beweiskette gemäß der gültigen Standards* dar (beispielsweise in einer mathematischen Zeitschrift). Abschließend könnte in einer sechsten Phase noch *der formal-logische Beweis* stehen, der dann rigideren Beweisstandards von Logik und Metamathematik genügt. Diese sechste Phase findet aber laut Boero häufig nicht mehr statt, sondern stellt eher das anzustrebende Ideal dar. Diese Phasen sind in realisierten Beweisprozessen häufig nicht linear geordnet, sondern es findet Vor- und Zurückgehen statt.

Die traditionellen Beweisaufgaben in den Vorlesungen zur Analysis und linearen Algebra sind in ihrer Aufgabenstellung allerdings nicht geeignet, Studierende beim Durcharbeiten dieser Phasen zu unterstützen. Üblicherweise wird eine  fertig formaliserte Vermutung präsentiert (Ende von Phase 2) und lediglich die niedergeschriebene Beweis als Lösung erwartet (Ende von Phase 5). Diese Aufgabenstellung kann zu dem von Dreyfus eingangs kritisierten Handeln auf einer rein formalen Ebene führen, also einem rein syntaktischen Arbeiten durch mehr oder minder zielgerichtete Termumformungen.

## FABEL im Einzelnen

Im Folgenden werden die einzelnen Aspekte des Konzepts näher erläutert.

**Fingerübungen**: Unter Fingerübungen werden in Anlehnung an das Musizieren solche Übungen verstanden, die von kurzer Dauer und kurzem Aufwand sind und die Automatisierung von Routinen für den jeweiligen Bereich unterstützen. So werden Lernende für komplexe kognitive Anforderungen in anderen Bereichen entlastet (Stern, 2009). Solche Aufgaben schaffen also die notwendige Voraussetzung um überhaupt spezifisch und unspezifisch in einem Bereich explorieren zu können. Beipielaufgaben: *Geben Sie eine 2x2 Matrix vom Rang 1 an. Geben Sie eine stetige, reelle Funktion mit genau zwei Nullstellen an.*

**Anwenden und Algorithmen abarbeiten**: Dies ist der bekannte klassische Aufgabentyp, bei dem das Anwenden von Definitionen, Regeln oder bestimmter Algorithmen geübt wird. Dabei handelt es sich um Aufgaben, die nicht direkt aus Boeros Phasen heraus begründet sind, sondern innerhalb konkreter Beweise auftreten können. Beispiel: *Bestimmen Sie Kern und Bild der folgenden linearen Abbildungen zwischen $\boldsymbol{R}^2$ und $\boldsymbol{R}^3$ mit den Zuordnungsvorschriften: $f(x,y)=(x+y,x-y,0)$, und $g(x,y)=(x+y,x-y,0)$.*

**Begriffe bilden**: Aufgaben in dieser Kategorie sind dazu gedacht, Begriffe zu reflektieren, in Kontexte zu stellen oder voneinander abzugrenzen. Dies ist in allen Phasen von Boeros Modell sinnvoll, speziell aber in der ersten und dritten. Beispiel: *Geben Sie in eigenen Worten eine Definition der Begriffe Grenzwert einer Folge, Cauchy-Folge und Folgenkonvergenz. Geben Sie jeweils drei Beispiele und Nicht-Beispiele an. Wie hängen diese Begriffe zusammen? Könnte man auf einen der Begriffe verzichten?*

**Beweise realisieren**: Hier geht es darum, dass bei den Beweisaufgaben die Phasen von Boeros Modell explizit angesprochen, eigene Vermutungen und Explorationen eingefordert werden. Beispiel: *Welche Drehungen und Spiegelungen führen ein regelmäßiges Viereck (Sechseck, Achteck) in einander über? Wie viele könnten es beim regelmäßigen Dreieck sein? Nimmt man die Komposition von Abbildungen als Verknüpfung, welche algebraischen Eigenschaften haben diese Mengen von Drehungen und Spiegelungen?*

**Einsatz von Heuristiken:** Heuristiken sinnvoll einzusetzen bildet einen Kernbereich des Problemlösens. Aufgaben zum Einsatz von Heuristiken sind solche, die Gelegenheit für Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten, das Betrachten von Grenzfällen, o.ä. geben. Diese spielen bei Boero eine zentrale Rolle beim Finden der Hypothese und beim Finden der Argumente, also in Phase 1 und 3. Beispiel (als Fortsetzung des letzten Beipiels): *Was ist anders, wenn man an ein „Zwei-Eck", also eine Linie betrachtet? Welche Grenzeigenschaft zeigt sich dann?*

**Lese- und Schreibübungen:** Das Schreiben der Übungsaufgaben bietet Gelegenheit, das Verfassen mathematischer Texte zu üben, aber zunächst müssen Definitionen und mathematische Aussagen erfasst werden. Das ist für Phase 2 und 5 unerlässlich, spielt aber auch in den anderen Phasen eine Rolle. Beispiel: *Vergleichen Sie die Definition einer linearer Abbildung aus der Vorlesung mit der folgenden: „Eine Funktion mit der Gleichung f(x)=ax+b heißt lineare Funktion. Ihr Graph ist eine Gerade mit der Steigung a." Sind die Definitionen äquivalent oder gibt es Unterschiede?*

Die aufgeführten Bespiele dienen hauptsächlich zur Erläuterung der Typen. Eine Aufgabe nach dem FABEL-Konzept wird normalerweise mehrere solche Typen beinhalten. Ausführliche Beispielaufgaben zum FABEL-Konzept finden sich in Bikner-Ahsbahs und Schäfer (2013)

## Zur Umsetzung

Das FABEL-Konzept wurde seit WiSe 2011 in Bremen im Rahmen von wöchentlichen zweistündigen Vertiefungen zur Linearen Algebra und Analysis eingesetzt. Dabei wurde eine Stunde für ein Projekt zum „forschenden Lernen" eingesetzt und die andere Stunde für das Bearbeiten und Besprechen von Aufgaben nach dem FABEL-Konzept in Präsenzübungen genutzt.

Innerhalb der normalen Tutorien wurde das FABEL-Konzept durch zusätzlichen Beispielen und Eigenaktivitäten der Studierenden eingesetzt, je nach Tutor in unterschiedlichem Umfang. Die Tutoren wurden hierzu vorab zum Einsatz von Heuristiken und Boeros Modell geschult. Ziel war es bei den traditionellen Beweisaufgaben, die Studierenden zum Explorieren und selbstständigen Bearbeiten der Phase 1 und 3 zu bringen.

### Erfahrungen

Die zusätzlichen Aufgaben wurden laut Veranstaltungsevaluationen hauptsächlich als Hilfe und nicht als zusätzliche Arbeit wahrgenommen. So waren in der letzten Umsetzung im ersten Semester ohne Anwesenheitspflicht zur Veranstaltungszeit Montags von 8 bis 10 Uhr kontinuierlich um 90% der Anfänger anwesend. Eine umfassendere Auswertung ist geplant.

### Literatur


Bikner-Ahsbahs, A., & Schäfer, I. (2013). Ein Aufgabenkonzept für die Anfängervorlesung im Lehramt Mathematik. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 57–76). Springer Fachmedien Wiesbaden. Abgerufen von http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-658-01360-8_4

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, (7(8)). Abgerufen von http://www - didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990708Theme/990708 ThemeUK.html

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsiu, M. (2002). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Hrsg.), *On the Teaching of Linear Algebra* (S. 85–124). Springer Netherlands. Abgerufen von http://link.springer.com/chapter/10.1007/0-306-47224-4_2

Dreyfus, T. (2002). Computer-rich learning environments and the construction of abstract algebraic concepts. In *Technology in mathematics teaching* (S. 17–32). öbv & hpt Verlagsges., Wien.

Heinze, A. (2004). The Proving Process in Mathematics Classroom-Method and Results of a Video Study. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 29–35.

Stern, E. (2009). Intelligentes Wissen als der Schlüssel zum Können. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Abgerufen von http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/STERN_Elsbeth_2009_IntelligentesWissen.pdf

Ingrid SCHARLAU, Lüneburg, Jörn SCHNIEDER, Lübeck

# Erwerb mathematischer Schreibkompetenz während der Studieneingangsphase

Ziel unseres Ansatzes ist, systematische Mittel zur verständlichen schriftlichen Darstellung mathematischer Sachverhalte zu erarbeiten. So sollen Studierende der Studieneingangsphase beim (selbstgesteuerten) Lernen von Mathematik unterstützt und frühzeitig auf das wissenschaftliche Schreiben vorbereitet werden. Aufgabe ist somit, diese Fähigkeiten nicht nur en passant bei der Arbeit an fachlichen Inhalten mitzuvermitteln, sondern explizit als methodisches Denken und Handeln lernbar zu machen. Unser didaktisches Konzept verbindet konkrete mathematische Schreibübungen mit Reflexionsaufgaben, mit denen die Zweckmäßigkeit mathematiktypischer Darstellungsformen befragt wird. Wir hoffen, hiermit auch der Selbstverständigung der Studierenden über ihr Mathematiklernen, d.h. dem Verständlichmachen von Mathematik für sich selbst, dienlich zu sein.

„Die Sprache Mathematik ist eine der schriftlichen Texte“ (Mehrtens 1990, S. 9). Nicht anders als in anderen Disziplinen heißt Mathematik betreiben, mathematische Texte sinnentnehmend zu lesen und sinnhaltige, adressatengerechte Texte zu produzieren – vom Übungsblatt über die Bachelorarbeit bis hin zum Forschungsartikel. Mathematische Sprache besteht aus einem Wechselspiel aus Prosa- und Formelsprache. Beweise erschöpfen sich jedoch nicht in ihrer logischen Schlüssigkeit; einen Beweis und mit ihm den bewiesenen Satz zu verstehen, heißt somit mehr als nur seine Schlüssigkeit überprüft zu haben (zum geschichtlichen Zusammenhang zwischen formaler und inhaltlicher Mathematik vgl. Krämer 1988). Vielmehr erschließt sich das Ganze eines Beweises aus dem Einzelnen und gleichzeitig das Einzelne aus dem Ganzen, also aus der wechselseitigen Kontextualisierung kleinerer und größerer Beweisteile (Schnieder 2013). Mathematisch richtet sich unsere Aufmerksamkeit deswegen auf Begriffe, Sätze, Theorien und Argumentationen als die Grundbausteine einer als Wissenschaft betriebenen Mathematik (vgl. dazu Janich 2001, von Hentig 2003).

Eine mathematische Argumentation, d.h. ein Beweis, kann zudem erst dann als verstanden gelten, wenn man über ein differenziertes Bild seiner theoriegeschichtlichen und forschungslogischen Bedeutung verfügt, also nach seiner Einordnung in den forschungsgeschichtlichen Horizont und der Aufdeckung der leitenden Forschungsinteressen. Dies lässt sich nicht in Formeln ausdrücken, sondern verlangt sprachliche Rekonstruktion.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1059–1062). Münster: WTM-Verlag

Hinter unserem Ansatz stehen sowohl eine bestimmte wissenschaftstheoretische Überzeugung als auch wissenschaftsdidaktische Überlegungen: Wie jede Wissenschaft ist auch die Mathematik auf Verständlichkeit und Mitteilung angewiesen. Im Gegensatz zu verbreiteten Vorstellungen ist sie ein hochkommunikatives Geschehen; sie „ist das Verfahren, durch das ich sichern möchte, dass du siehst, was ich sehe“ (von Hentig 2003, S. 175).

Über das hierfür notwendige Schreiben und seine Rolle nachzudenken, verlangt einen weiten Blick, neben *Textformen und deren sprachlichen Merkmalen*, also Ansätzen der Rhetorik und Linguistik, auch auf *disziplinspezifische rhetorische und stilistische Merkmale* (z.B. Mehrtens 1990). Schriftstücke und Schreiben geben zudem Auskunft über die spezifische *Epistemologie* einer Disziplin. Die Produktion von Texten vollzieht sich schließlich in *Schreibprozessen*, konkreten Tätigkeiten, Gedanken und Haltungen.

Schreiben ist eine hochkomplexe kognitive Tätigkeit, die durch extensive und intensive Übung erworben wird. Inhaltlich komplex bleibt wissenschaftliches Schreiben immer schwierig, kann aber durch das Trainieren von Teilkomponenten erleichtert werden, etwa indem man das Formulieren komplexer Sätze, das Ausformulieren vorsprachlicher Ideen, Tippen, aber auch Zeitplanung und Selbstmanagement lernt und routinisiert (Kellogg & Whiteford 2009). Jedoch lässt sich nicht von einer allgemeinen Schreibkompetenz sprechen, die sich, einmal erworben, umstandslos auf alle Wissenschaften übertragen ließe. Studierende müssen vielmehr Literalität, wissenschaftliche Lese-, Schreib-, Denk-, Sachauseinandersetzungskompetenz in den jeweiligen Fächern und Diskursen erwerben (Lillis & Scott 2007).

Schreibdidaktik ist somit nicht angewandte Wissenschaft, die sagt, was zu tun wäre, und schon einmal gar nicht Praxis, die mit bestimmten Werkzeugen Probleme behebt, sondern eine bestimmte Art und Weise, universitäres Lernen und Lehren anzusehen, unter dem Aspekt, wie Schreiben in Einzelwissenschaften geschieht, wie Disziplinen ihre eigenen Praktiken aufklären können, und wie die Studierenden dabei unterstützt werden können, in die Diskursgemeinschaft einer Disziplin hineinzuwachsen.

In unserem ersten Beispiel geht es darum, mathematische Gedanken logisch korrekt und verständlich aufzuschreiben. Grundlegende Regel ist, in ganzen Sätzen zu schreiben, so dass Symbole, Terme, Gleichungen und Aussageformen in Sätze integriert werden (vgl. Houston 2012, Beutelspacher 2009). Ein vorgelegtes Puzzle zum Irrationalitätsbeweis von Wurzel 2 enthält nur Formeln und Gleichungen, keine alltagssprachlichen Elemente. Im ersten Schritt sollen die Studierenden die Puzzle-Teile in die richtige Reihenfolge bringen und ihre Entscheidungen begründen. Danach sollen sie die Formeln in vollständig formulierte Sätze integrieren; dafür erhalten sie eine erprobte Liste mit Formulierungsbausteinen. Durch die Vorgabe von formelsprachlichen und alltagssprachlichen Anteilen tragen wir der Tatsache Rechnung, dass Studierende die Vorteile algorithmischer Aspekte der Mathematik grundsätzlich verstehen, sie nur oft rezeptologisch anwenden. Die Vorgabe allein der formalen Elemente des Beweises erlaubt, alltagssprachlich formulierte Argumentationen über die algebraischen Anteile des Beweises gezielt einzuüben, wobei die Liste davon entlastet, neben der grammatikalischen Korrektheit noch auf angemessene Wortwahl zu achten.

Zur Ausarbeitung komplexerer mathematischer Themen muss auch der theoriegeschichtliche Hintergrund oder Forschungskontext rekonstruiert werden; dies ist Gegenstand des folgenden Beispiels. Wichtig an der Aufgabenstellung ist, dass sie Studierenden ein lernbares Werkzeug vermittelt, mit dem sie methodisch von den inhaltlich-mathematischen Details absehen lernen, und sie dabei unterstützt, einen Blick auf das Große und Ganze einzunehmen und sprachlich angemessen umzusetzen. Sie erhalten verschiedene historische Beweise zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (hier bieten sich beispielsweise Texte von I. Barrow, J. Gregory, I. Newton, G.W. Leibniz, A.L. Cauchy oder H.L. Lebesgue an). Die Aufgabe besteht zunächst darin, diese Beweise historisch anzuordnen und die Entscheidungen etwa im Rahmen eines Textes für das Wissenschaftsressort der Wochenzeitung *Die Zeit* zu begründen. Darauf aufbauend besteht die weitere Aufgabe darin, eine Laudatio etwa von Cauchy auf Barrow und schließlich – mathematisch wie schreibdidaktisch deutlich anspruchsvoller – eine Laudatio von Barrow auf Cauchy zu verfassen.

Abgesehen davon, sich in die theoriegeschichtlich bedingt verfremdeten Beweisgänge einzuarbeiten, besteht die Aufgabe ganz wesentlich darin, sich von den inhaltlichen Details zu lösen und zunächst Kriterien zu überlegen, wie die in Darstellungsform und Stringenz sehr verschiedenen Beweisansätze sinnvoll verglichen werden können. Durch das bewusst populär gehaltene wissenschaftsjournalistische Setting entsteht die Erwartung, einen Text zu verfassen, der mathematisch nicht zu anspruchsvoll, aber auch nicht zu populär gehalten sein darf. Vielmehr besteht die Aufgabe des Schreibers darin, Beweisideen herauszustellen und in ihrer Wirksamkeit zu bewerten und diese Bewertung nachvollziehbar zu machen.

Dieses Beispiel ähnelt wiederum einer bewährten schreibdidaktischen Methode. Bean (2001) nutzt im Rahmen schreibintensiver Lehre zahlreiche Aufgaben *explorativen Schreibens*, die primär der inhaltlichen Erschließung dienen. Dazu gehören auch historisch-biographische Herangehensweisen, etwa Briefe aus der Sicht wichtiger Akteure oder Streitgespräche.

Das Schreiben von Briefen oder Dialogen – vertrauter Genres – fällt oft leichter als das wissenschaftlicher Texte. Der Wechsel in die Perspektive einer anderen Person erlaubt, den Kontext zu erschließen, der immer wichtige Information zum Thema selbst erhält, und das Verfassen von ungewöhnlichen Texten rückt die Formulierungsarbeit auf etwas lockerere Weise in den Blick als das beim Formulieren der fremden und schwierigen Textart wissenschaftliche Hausarbeit der Fall sein mag.

Akademische Texte zu schreiben heißt, wissenschaftliche Probleme zu lösen. Aus diesem Grund wird das Schreiben mathematischer Texte nie ganz leicht werden. Der vorgestellte mathematikdidaktische Ansatz bietet eine Möglichkeit, dieses Problem explizit und mit bewährten Methoden anzugehen; als spezifische Art der Auseinandersetzung mit mathematischen Beweisen bleibt er zudem auch für Fortgeschrittene nützlich. Nimmt man Mathematik als Diskursgemeinschaft im oben erwähnten Sinne ins Auge, wird deutlich, dass die Überzeugungskraft eines Beweises nicht nur von seiner logischen Gültigkeit abhängt. Jeder Beweis richtet sich als Argumentation an konkrete Personen, die als Adressaten ernst zu nehmen sind. Es geht also nicht nur darum, einen bestimmten Sachverhalt zu begründen, sondern zugleich auch bestimmte Adressaten von seiner Richtigkeit zu überzeugen. In diesem Sinn spielen auch pragmatische, ästhetische, kommunikative und nicht zuletzt rhetorische Aspekte für einen geglückten Beweis eine zentrale Rolle. Diese erweiterte Perspektive lässt sich, so hoffen wir gezeigt zu haben, für das Lernen von Mathematik nutzen.

## Literatur


Bean, J. C. (2001). *Engaging ideas.* Hoboken: John Wiley & Sons.

Beutelspacher, A. (2009). *Das ist o. B. d. A. trivial!* 9. Auflage. Wiesbaden: Vieweg.

Hentig, H. von (2003). *Wissenschaft: Eine Kritik.* Weinheim und Basel: Beltz.

Houston, K. (2012). *Wie man mathematisch denkt.* Berlin: Springer.

Janich, P. (2001). *Logisch-pragmatische Propädeutik: Ein Grundkurs im philosophischen Reflektieren.* Weilerswist: Velbrück Wissenschaft.

Kellogg, R.T., & Whiteford, A. P. (2009). Training advanced writing skills: The case for deliberate practice. *Educational Psychologist, 44*, 250-266.

Krämer, S. (1988). *Symbolische Maschinen: Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Lillis, T. & Scott, M. (2007). Defining academic literacies research: Issues of epistemology, ideology and strategy. *Journal of Applied Linguistics*, 4(1) 5–32.

Schnieder, J. (2013). Mathematikdidaktische Potentiale philosophischer Denkrichtungen. In I. Bausch et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse* (S. 197 – 212). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Mehrtens, H. (1990). *Moderne Sprache Mathematik.* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Anne SCHILL, Karlsruhe

# Wege zu einem tragfähigen Variablenverständnis

Ziel des Forschungsvorhabens ist es, Erkenntnisse zu gewinnen über Lernprozesse von mathematisch schwachen Schülerinnen und Schülern im Umgang mit Variablen in Sachsituationen und diese für die Entwicklung eines Unterrichtsdesigns nutzbar zu machen.

Dafür ist es notwendig, den Lerngegenstand zu spezifizieren, ein Unterrichtsdesign zu entwickeln, zu erproben und auszuwerten, sowie daraus resultierend die Theorieentwicklung voranzutreiben. Diese einzelnen Arbeitsbereiche entstammen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung, die diesem Projekt seinen Rahmen gibt (Hußmann 2013). Sie sind vielfältig miteinander verknüpft und bauen jeweils aufeinander auf, sodass erst das mehrfache Durchlaufen der Arbeitsbereiche zu vertieften theoretischen Erkenntnissen und praxistauglichen Unterrichtsdesigns führen kann.

Dieser Artikel möchte eine erste Annäherung an die Strukturierung des Lerngegenstandes, sowie Entwicklung und Auswertung eines Unterrichtsdesigns vorstellen, die in noch folgenden Forschungszyklen weiter ausdifferenziert und fokussiert werden. Hierauf soll am Ende des Beitrags ein Ausblick gewährt werden.

**Der Lerngegenstand:**

Ein tragfähiges Variablenverständnis lässt sich grob als das Vermögen beschreiben, unterschiedliche Variablenaspekte im Umgang mit Sachsituationen flexibel zu verwenden und dabei die algebraische Symbolsprache angemessen zu nutzen. Hier wird Bezug genommen auf die Unterscheidung der Variablen als unbekannte Zahl, als allgemeine Zahl und als Veränderliche (Ursini & Trigueros & Reyes 1996). Diese drei Aspekte können als erste grobe Strukturierung eines inferentiell gegliederten Wissensnetzes (Hußmann 2013) zum tragfähigen Variablenverständnis angesehen werden. Des Weiteren wurden notwendige den Lerngegenstand erschließende Kernideen identifiziert (*Wie kann ich Terme aufschreiben, wenn sich Zahlen immer wieder ändern? Wie kann ich variable Größen von festen Größen unterscheiden? Wie kann ich unbekannte Zahlen finden?*). Darüber hinaus wurde die Strukturierung mit Hilfe eines sprachanalytischen Ansatzes (Hußmann 2013) in sprachliche Bausteine (so genannte Urteile) ausdifferenziert, wodurch eine normative Beschreibung des Lerngegenstands sowie ein deskriptiver Zugriff auf die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler ermöglicht werden. Die an den Anfang gesetzte normative Ausdifferenzierung der Urteile muss sich im Forschungsprozess anhand der Untersuchung

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1063–1066). Münster: WTM-Verlag

des Variablenverständnisses von Schülerinnen und Schülern bewähren und gegebenenfalls restrukturiert werden.

**Entwicklung des Unterrichtsdesigns**

Ein Unterrichtsdesign zur Erreichung eines Basisniveaus im Umgang mit Variablen in Sachsituationen muss bekannte Lernvoraussetzungen und Lernhürden berücksichtigen. So ist zu beachten, dass algebraisches Denken nicht erst mit Einführung der Buchstabenvariablen einsetzt. Anhand von verbalen Beschreibungen, Handlungen, Gesten und Zeichnungen können bereits unbekannte, allgemeine und veränderliche Zahlen erkannt und mit ihnen umgegangen werden (Radford 2001, 2011 u.a.).

Auf der anderen Seite müssen vielerlei Konventionen, die dem fortgeschrittenen Mathematiker als selbstverständlich erscheinen, mühsam erlernt und mit Bedeutung gefüllt werden. (Malle 1993, Rosnick 1981 u.a.)

Vom arithmetischen Denken tief geprägt, bringen die Lernenden in der Regel Denkweisen mit, die einerseits Voraussetzung für einen gelingenden algebraischen Lernprozess sind und andererseits, bei zu starker Fixierung darauf, auch hinderlich sein können. So wurde vielfach ein zu starkes Festhalten an operationalen Denkmustern festgestellt (Carpenter et al 1980, Sfard 1991). Die Schülerinnen und Schüler sind es gewohnt, Operationszeichen und Gleichheitszeichen als Aufforderung zum Ausrechnen eines festen Ergebnisses zu sehen, während es ihnen schwer fällt, Terme in ihrer zugrundeliegenden Struktur wahrzunehmen (Sfard 1991) oder die zwei Seiten eines Gleichheitszeichens in ihrer Beziehung zueinander zu erkennen (Rittle-Johnson et al 2011) .

Das entwickelte Unterrichtsdesign versucht nun einerseits, die zu entwickelnden Variablenaspekte, Kernideen und Urteile anzubahnen und andererseits, an konkrete operationale Denkweisen anzuknüpfen, sowie algebraische Denkweisen anhand unterschiedlicher Ausdrucksweisen zu ermöglichen und anzubahnen und zu standardisierten Schreibweisen von Buchstabenvariablen hinzuführen.

Zentrale Darstellungsmittel waren hierzu im ersten Designzyklus Tabellen und farbige Hervorhebungen der veränderlichen Werte (in der Abbildung auf der nächsten Seite die grau hinterlegten Personenanzahlen). Ein mögliches Urteil in diesem Zusammenhang könnte sein: „Die Werte, die sich innerhalb einer Spalte der Tabelle verändern, lassen sich allgemein mit einer Variablen bezeichnen“. Zur Beschreibung des Lernprozesses ist von Bedeutung, worauf der Lernende fokussiert, um zu diesem Urteil zu kommen. In diesem Fall wird der Fokus auf die Tabellenspalten gelenkt. Von Interesse ist hier auch, wie stabil dieses Urteil über mehrere Situationen

(Aufgabentypen) hinweg ist. Bleibt das Urteil bestehen, wenn mehrere Größen variieren? Bleibt es bestehen, wenn die variierende Größe nicht in der ersten, sondern in der zweiten Spalte steht? Zur (Weiter-)Entwicklung des Unterrichtsdesigns sind diese Fragen von Bedeutung.

Till schlägt einen Ausflug ins Schwimmbad AquaToll vor und berechnet die Kosten für verschiedene Personenzahlen:


| Anzahl Personen | Anfahrt pro Person | Eintritt pro Person | Gesamtkosten pro Person (Term) | Gesamtkosten pro Person (Ergebnis) |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 150€:10 | 15€ | 150€:10+15€ | 30,00€ |
| 15 | 150€:15 | 15€ | 150€:15+15€ | 25,00€ |
| 20 | 150€:20 | 15€ | 150€:20+15€ | 22,50€ |
| 25 | 150€ : 25 | 15€ | 150€ : 25 + 15€ = | 21,00 € |
| 30 | 150€ : 30 | 15€ | 150 € : 30 + 15€ = | 20,00 € |
| x | 150€ : x | 15€ | 150 € : x + 15€ = | |

## Durchführung und Auswertung des Designexperiments

Im Anschluss an den in einer achten Werkrealschulklasse durchgeführten Unterricht, standen die mit 4 Schülerpaaren durchgeführten Leitfadeninterviews unter folgendem Forschungsfokus:

1) Welche Fokussierungen nutzen die Schülerinnen und Schüler (welche sind hilfreich?), um das Variable einer Situation zu erfassen?

2) Was sind verschiedene Situationsklassen (welche helfen im Lernprozess weiter?), in denen Variablen in unterschiedlichen Deutungen erfasst werden müssen?

Beobachtungen und Schlussfolgerungen aus den Interviews:

Um das Variable einer Situation zu erfassen, wurden, wie im Vorfeld durch die bereitgestellten Materialien intendiert, die Farbmarkierungen und die Tabellenspalten genutzt. Jedoch konnte vereinzelt auch beobachtet werden, dass allein auf die Personenanzahl fokussiert wurde, unabhängig davon, ob dies der Sachsituation entsprach. Dementsprechend sind Situationen mit veränderlicher Personenanzahl von solchen mit anderen veränderlichen Größen zu unterscheiden.

Um zu entscheiden, wofür die Variable x stehen kann, wurde teilweise auf *beliebige* Werte fokussiert, wobei hier im weiteren Forschungsprozess noch besser verstanden werden muss, welche tragfähigen Vorstellungen dann jeweils dahinter stecken, oder ob es sich nur um eine aus dem Unterricht wiederholte Floskel („x wie x-beliebig“) handelt.

Teilweise wurde zur Erklärung, wofür x stehen kann, auch auf diejenigen Werte fokussiert, „die man nicht weiß". Hier wurde einerseits ein starker Hang dazu festgestellt, die Variable als Unbekannte zu interpretieren, andererseits wurde x von einigen Schülerinnen und Schülern *innerhalb eines Terms für unterschiedliche* unbekannte Werte eingesetzt. Für die Überarbeitung des Unterrichtsdesigns ist hier die Unterscheidung zwischen Situationen mit *einer* aber auch mit *mehreren* Variablen notwendig.

## Ausblick

Da die Schülerinnen und Schüler Variablen vorrangig für unbekannte Werte nutzten, sowie bei der Identifizierung veränderlicher Größen vorrangig auf die sich verändernden Zahlen fokussierten und noch kaum die dahinterliegenden allgemeinen Strukturen explizit machten, ist im weiteren Forschungsverlauf der Variablenaspekt der allgemeinen Zahl stärker in den Fokus zu nehmen. Die normative Ausdifferenzierung der Urteile zum Aspekt der allgemeinen Zahl wird der nächste Schritt im beschriebenen Forschungsprojekt sein, dem dann eine entsprechende Überarbeitung und Evaluation des Unterrichtsdesigns folgt.

## Literatur


Carpenter, T. P. Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., Reys, R. (1980): Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school. *The mathematics teacher 73(5)*, 329-338.

Hußmann, S. (2013): *The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations.* Preprint.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Kormorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S.25-42). Münster: Waxmann.

Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Rittle-Johnson, B., Percival, G., Matthews, T., Roger, S., McEldoon, K. L. (2011): Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence. A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103 (1)*, 85-104.

Rosnick, P. (1981): Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher, 74 (6)*, 418-420, 450.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,22*, 1-36.

Trigueros, M., Ursini, S., Reyes, A. (1996): College students' conceptions of variable. *Proceedings of the XX PME International Conference, Bd. 4*, 315-322.

Maike SCHINDLER, Hannover

# Empirische Studie zum Vorwissen von Fünftklässlerinnen und Fünftklässlern zu negativen Zahlen

Bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den ganzen Zahlen handelt es sich um einen bedeutsamen Moment in der *Zahlbegriffsentwicklung* von Schülerinnen und Schülern, der teilweise mit Änderungen von Zahlvorstellungen einhergeht. Dabei können Lernende beim Umgang mit den „neuen“ Zahlen auf der einen Seite ihr Vorwissen zu natürlichen Zahlen, zu Rechenoperationen etc. aktivieren und nutzen (vgl. Malle 2007), gleichzeitig sind verschiedene Schwierigkeiten und Hürden im Lernprozess möglich (vgl. Winter 1989, Bruno 2001), die z.T. gerade mit der Aktivierung des je vorhandenen Vorwissens in Zusammenhang stehen.

Im Zusammenhang mit möglichen schulischen Lehrgängen zur Thematisierung ganzer Zahlen kommt *lebensweltlichen Kontexten* (vgl. Van den Heuvel-Panhuizen 2005) und ihrer Aktivierung eine bedeutsame Rolle zu: Diese werden vielfach genutzt – zumindest für die Erarbeitung erster Zahlvorstellungen und die Thematisierung der Ordnungsrelation – mit dem Ziel, einen intuitiven, nach Möglichkeit verständnisorientierten Zugang zur „Welt der negativen Zahlen“ zu ermöglichen. Inwiefern jedoch die verschiedenen gängigen Kontexte – wie Guthaben-und-Schulden, Temperaturen oder Aufzüge – jeweils tatsächlich dazu beitragen, dass Lernende lebensweltliches Vorwissen einbringen und gewinnbringend nutzen können, wurde bislang kaum empirisch untersucht.

Für eine schulische Behandlung ganzer Zahlen sind drei Darstellungsebenen und die Wechsel zwischen ihnen von großer Bedeutung (vgl. Bruno 2001): die formal-symbolische Darstellungsebene („-3“, „+2“); die kontextuelle Darstellungsebene, in der Zahlen in lebensweltlich-kontextuellem Bezug stehen („2. Untergeschoss“, „-1°C“); sowie die Ebene der Zahlengerade, in der die Reihenfolge oder Lage der Zahlen auf der Zahlengerade oder in anderen ordinalen Darstellungen („-3 -2 -1 0 1“) zentral ist.

Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, das Vorwissen der Lernenden *vor* einem schulischen Lehrgang zu ganzen Zahlen zu erheben. Das Forschungsinteresse betrifft im Speziellen die *Ordnungsrelation* für ganze Zahlen, die zu Beginn der schulischen Thematisierung ganzer Zahlen angesiedelt ist. Während eine Ordnungsrelation der Form „Je weiter rechts auf der Zahlengerade, desto größer ist die Zahl“ mathematisch tragfähig ist und angestrebt wird, stellt diese für Lernende durchaus eine Herausforderung dar (vgl. Winter 1989): Vielfach ist eine spiegelbildliche Zählordnung der

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1067–1070). Münster: WTM-Verlag

Form „Je weiter weg von der Null, desto größer ist die Zahl“ bei Lernenden vorhanden und für diese viabel (Malle 2007). Hinausgehend über eine Betrachtung der Art der Zählordnung (durchgängig vs. spiegelbildlich) soll im Fokus der vorliegenden Untersuchung stehen, welches (lebensweltliche) Vorwissen Schülerinnen und Schüler beim Vergleich je zweier Zahlen aktivieren und welche Herangehensweisen sich dabei zeigen. Es soll zum einen untersucht werden, wie Lernende beim Vergleich *formal-symbolisch* dargestellter Zahlen vorgehen, inwiefern sie auf lebensweltliche Kontexte oder eine ordinale Darstellung zurückgreifen. Zum anderen werden die Herangehensweisen der Lernenden beim Vergleich ganzer Zahlen in verschiedenen vorgegebenen *lebensweltlichen Kontexten* erhoben.

Zur Untersuchung dieser Fragestellungen wurde eine im Projekt **LENI** (**LE**rnvoraussetzungen zu **N**egat**I**ven Zahlen) angesiedelte Interviewstudie mit 60 niedersächsischen Schülerinnen und Schülern der 5. Jahrgangsstufen (Integrierte Gesamtschule, Gymnasium, Hauptschule) durchgeführt. In halbstandardisierten, klinischen Einzelinterviews erhielten die Lernenden Aufgaben, in denen sie jeweils zwei ganze Zahlen verglichen und die größere bestimmten – u.a. Aufgaben mit je einer positiven und einer negativen Zahl (bspw. -5 und 3) sowie mit zwei negativen Zahlen (bspw. -1 und -4). Zunächst verglichen die Lernenden formal-symbolisch dargestellte Zahlen, anschließend wurden Zahlvergleiche in lebensweltlichen Kontexten (Temperaturen, Guthaben-und-Schulden, Aufzüge) vorgenommen. Nach der Transkription der Interviews wurden die Herangehensweisen der Lernenden – d.h. die Gesamtheit der sprachlichen und nicht-sprachlichen Handlungen, die sie vornahmen, um die gegebenen Situationen (hier den Größenvergleich je zweier ganzer Zahlen) zu bewältigen – mit einem kategorienentwickelnden Vorgehen (Beck & Maier 1994) erhoben. Dabei wurden Sinneinheiten in den Transkripten isoliert und klassifiziert (ebd.), die Herangehensweisen wurden mit einem Schlagwort und Erläuterungstext versehen und einer Liste von Herangehensweisen zugefügt, die nach der Analyse jedes Interviews sukzessiv ergänzt wurde und sich iterativ weiterentwickelte.

In Bezug auf den Vergleich *formal-symbolisch* dargestellter Zahlen (erstes Forschungsinteresse) zeigten sich verschiedene Herangehensweisen, die sich in fünf Oberkategorien bündeln lassen:

*Orientierung an der Lage der Zahlen / Richtungen.* Viele Lernende orientierten sich beim Zahlvergleich an der Lage der Zahlen: Beim Vergleich je einer positiven und einer negativen Zahl fokussierten die Lernenden oftmals auf die Lage über und unter der Null bzw. vor und hinter der Null. Beim Vergleich zweier negativer Zahlen betrachteten die Lernenden vielfach die graduelle Entfernung der Zahlen von der Null. Sowohl beim Vergleich einer positiven und einer negativen Zahl wie auch zweier negativer Zahlen orientierten sich einige Lernende an der Lage der Zahlen ohne Berücksichtigung des Vorzeichens.

*Kontextuelles Wissen nutzen.* Auf lebensweltliche Kontexte griffen nur wenige Lernende explizit zurück. Die aktivierten Kontexte waren u.a. Temperaturen, Spielstände, Guthaben-und-Schulden.

*Rechenoperationen zum Zahlvergleich durchführen.* Bei diesen Herangehensweisen war die Deutung des Minuszeichens als Rechenzeichen vielfach dominierend. Es gab Lernende, die die zu vergleichenden Zahlen voneinander subtrahierten und anschließend die Differenz mit einer der beiden zu vergleichenden Zahlen verglichen. Andere Lernende subtrahierten die negativen Zahlen bspw. von einer gleichen Bezugszahl (teilweise der Null) und kamen über den Vergleich der beiden Differenzen zu der Erkenntnis, welche der beiden Zahlen größer war.

*Wissen zu Zahlen und Zahlbereichen aktivieren.* Viele Lernende griffen auf bereits vorhandenes, schnell abrufbares Wissen zu Zahlen und Zahlbereichen zurück, das sie nicht weiter begründeten (bspw. „Null ist die kleinste Zahl“ oder „Negative Zahlen sind immer kleiner als positive Zahlen“). Teilweise fokussierten die Lernenden auf die Größe der Zahlen ohne Vorzeichen – d.h. den Betrag –, indem sie das Minuszeichen entweder nicht explizit erwähnten oder dieses bewusst ausblendeten (z.B. „Ich weiß auch nicht was das Minuszeichen soll. Und dann guck ich mir einfach die größten, die Zahlen an.“).

*Vorgehen mit kardinalem Bezug.* Wenige Lernende nahmen beim Zahlvergleich die Mächtigkeit von Mengen in den Blick (bspw. Punktmengen).

Zusammenfassend lässt sich für den *Vergleich formal-symbolisch dargestellter Zahlen* festhalten, dass die Lernenden aus ihrem Vorwissen heraus vielfach auf die Lage der Zahlen bzw. Richtungen zurückgriffen – es schienen sog. „Richtungsschemata“ (vgl. Malle 1988) vorhanden zu sein. Auch Vorwissen zu Zahlen und Zahlbereichen wurde häufig genutzt, dabei betrachteten die Lernenden teilweise die Größe der Zahlen ohne Vorzeichen bzw. die Beträge. Teilweise deuteten die Lernenden das Minuszeichen als Rechenzeichen (vgl. Vlassis 2004). Lebensweltliche Kontexte wurden indes nur selten aktiviert.

In Bezug auf den *Zahlvergleich in verschiedenen lebensweltlichen Kontexten* (zweites Forschungsinteresse) zeigten sich ähnliche Herangehensweisen, jedoch mit unterschiedlichen Ausprägungen: Im *Kontext Temperaturen* wurde sehr häufig auf die Lage und Richtungen verwiesen. Die Lernenden aktivierten häufig kontextbezogenes Wissen (z.B. der Form „Wo es kälter ist, da ist es kleiner.“). Die Tragfähigkeit der Herangehensweisen war insgesamt sehr hoch. Im *Kontext Aufzüge* waren die Verweise auf Lage und Richtungen dominierend, jedoch war die Tragfähigkeit weit weniger hoch als im Kontext Temperaturen: Die Lernenden betrachteten häufig die Lage der Zahlen ohne Vorzeichen oder ordneten das Untergeschoss ebenfalls oberhalb des Erdgeschosses an. Die Realsituation, dass Stockwerke unterhalb des Erdgeschosses liegen können, war für einige Lernende offenbar schwer zu fassen. Der – im Vergleich zum Kontext Aufzüge – noch engere Bezug des Kontextes Temperaturen zur Lebenswelt vieler Lernender scheint mit der größeren Tragfähigkeit der Herangehensweisen in diesem lebensweltlichen Kontext in Zusammenhang zu stehen. Für den *Kontext Guthaben-und-Schulden* war erwartbar, dass die Lernenden durch den fehlenden Bezug zur Zahlengerade weit weniger häufig auf die Lage der Zahlen verweisen. In der Tat fokussierte keiner der Lernenden auf die Lage der Zahlen; es wurde vielmehr Zahlwissen (u.a. Größe der natürlichen Zahlen) und sehr kontextbezogenes Wissen aktiviert, welches jedoch vielfach nur begingt tragfähig war. Für einige Lernende schien gerade die Thematik der Schulden noch wenig bekannt. Teilweise griffen sie – ähnlich wie beim Vergleich formal-symbolisch dargestellter Zahlen – auf Rechenoperationen zurück. Die Erkenntnisse im Zusammenhang mit *lebensweltlichen Kontexten* deuten *insgesamt* darauf hin, dass eine Vertrautheit mit dem lebensweltlichen Kontext Lernenden hilft, ihr lebensweltliches Vorwissen intuitiv gewinnbringend für den Vergleich ganzer Zahlen nutzen können.

## Literatur


Beck, C. & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (S. 43-76). Köln.

Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 4(1), 415-427.

Malle, G. (2007). Die Entstehung negativer Zahlen. Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denkobjekten. *mathematik lehren*, H. 142, 52-57.

Malle, G. (1988). Die Entstehung neuer Denkgegenstände – untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Band 16* (S. 259-319). Wien.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 2-9.

Vlassis, J. (2004): Making Sense of the Minus Sign or Becoming Flexible in ‘Negativity’. *Learning and Instruction*, H. 14, 469-484.

Winter, H. (1989). Da ist weniger mehr – die verdrehte Welt der negativen Zahlen. *mathematik lehren*, H. 35, 22-25.

Simeon SCHLICHT, Köln

# Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs auf der Grundlage einer Videographie mit Drei- bis Vierjährigen

Die Entwicklung mathematischen Verständnisses im Vorschulalter wird in letzter Zeit vermehrt auch durch Forschungen in der Mathematikdidaktik in den Blick genommen. Einen Ausgangspunktpunkt für mein, dem Beitrag zu Grunde liegenden, Dissertationsprojekt bildet die These von Burscheid und Struve (2010), dass Lernende mathematische Theorien gleichsam wie eine naturwissenschaftliche (d.h. eine *empirische Theorie*) vermittelt bekommen, bedingt durch einen entsprechenden (und teilweise notwendigen) Aufbau der Schulbücher. Ziel meines Vorhabens ist u.a. zu prüfen, welche Vorbedingungen die Lernenden für die schulische Sozialisation mitbringen. Haben sie beispielsweise die Mathematik bereits als eine empirische Theorie kennen gelernt? Welche Begriffe (*theoretischer* und *nicht-theoretischer* Art) haben sie bereits erworben? Wie entwickelt sich die Theorie? Dieses Vorhaben wird an der Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs konkretisiert.

Im Rahmen von *mathematikhaltigen Spielsituationen* (vgl. Schwank 2010) wird das Verhalten von Kindern beobachtet. Ausgehend von den Handlungen der Kinder im Spiel werden Rückschlüsse auf deren (mathematisches) Verständnis gezogen. Eine theoretische Grundlage zur Beschreibung des Wissens der Kinder bietet hierbei der Ansatz der Rekonstruktion des Verhaltens der Kinder als Verfügen über Eigentheorien (vgl. Schlicht & Witzke 2013). Begründet auf kognitionspsychologische (vgl. Gopnik & Meltzoff 1997) und wissenschaftstheoretische (vgl. Stegmüller 1979) Grundlagen, können mit Hilfe der Rekonstruktion der *empirischen Theorie* über Mengen und Zahlen (vgl. Burscheid & Struve 2010) und dem Ausmachen der *theoretischen Begriffe* innerhalb dieser Theorien, die Handlungen der Kinder erklärt und mögliche Schwierigkeiten im Erwerb der Begriffe identifiziert werden.

Eine tiefgreifende Analyse der Begriffe und zu Grunde liegenden Theorien ist hier nicht möglich, sodass im Folgenden erste Eindrücke aus der Videographie auf der Phänomenebene diskutiert werden.

## Videographie

Im September 2013 und Januar 2014 wurden in einer Kindertagesstätte mathematische Spielsituationen mit mehreren Kindern durchgeführt (Dauer: ca. 30 bis 45 Minuten pro Kind). Im Rahmen der Spielsituationen konnten

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1071–1074). Münster: WTM-Verlag

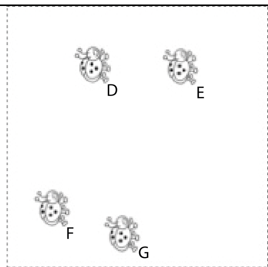
die Kinder eigene Vorgehensweisen aufzeigen. Exemplarisch sei im Folgenden eine Spielsituation mit Marc (4;1) thematisiert:

Marc und der Spielleiter (SL) haben zusammen ein Memory erkundet. Dieses besteht aus 8 Karten, auf denen Marienkäfer abgebildet sind. Die Karten unterscheiden sich in der Anzahl der Marienkäfer (ein bis vier Stück), wobei je zwei kongruente Karten mit gleicher Anzahl von Marienkäfern vorhanden sind. Marc und SL haben sich gemeinsam die Aufgabe gestellt die „passenden“ Karten nach dem Umdrehen und Mischen der 8 Karten wieder zu finden. Somit liegt, zumindest explizit, keine kompetitive Situation vor. Der Terminus „passend“ wurde von Marc und dem SL ausgehandelt, indem Kartenpaare gebildet wurden. Hierbei hat Marc Karten mit jeweils derselben Anzahl von Marienkäfern nebeneinander gelegt.

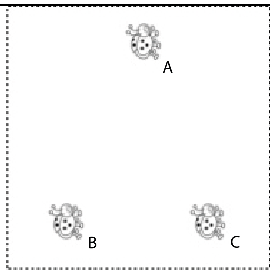
Erste Erwartung an die Vorgehensweisen beim Spiel waren das Abzählen der Objekte bzw. das Nutzen der spontanen Zahlerfassung (vgl. Feigenson et al. 2004) um zu dem Urteil zu kommen, ob die Karten „passen“ oder nicht. Marc zeigt jedoch interessante andere Vorgehensweisen auf:

## 1. Vorgehen

Die Karten wurden von Marc und SL gemischt und nunmehr dreht Marc zwei Karten (s. Transkript) um, eine mit drei Käfern und eine mit vier Käfern.[1] Auf die Frage ob die beiden Karten passen, antwortet Marc aber mit Ja. Darauf ereignet sich folgende Situation:

| | | |
|---|---|---|
| SL | ja’, wieso’ zähl mal nach.. wie viele sind auf der einen drauf’ | |
| Marc | *(Fokussiert sofort die Karte mit vier Marienkäfern. Mit Zeigefinger und Daumen auf (D,F) tippend)* eins *(Mit Zeigefinger und Daumen auf (E,G) tippend)* zwei |   |

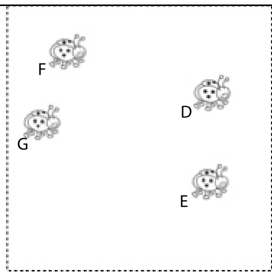
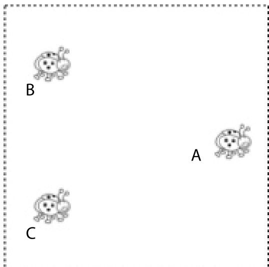
[1] Die Buchstaben neben den Marienkäfer sind zur deutlicheren Auszeichnung der Zeigebewegungen im Transkript nachträglich hinzugefügt worden. Karten sind jeweils aus Marcs Blickrichtung angegeben. Für Transkriptionsregeln vgl. Meyer (2007).

| | | |
|---|---|---|
| Marc | *(Fokussiert im Anschluss sofort die Karte mit drei Marienkäfern. Mit Zeigefinger und Daumen auf (A,B) tippend)* eins *(Mit Zeigefinger und Daumen auf (A,C) tippend)* zwei.. *(Darauf nimmt er die Hand von den Karten weg)* zwei |  |

Marc fokussiert hier *Paare von Objekten*, wobei er beim Abgreifen der Paare die *Standardzahlwortreihe* durchläuft. Die Paare sind bei ihm jedoch nicht disjunkt; Marienkäfer *A* wird in Marcs zweitem Turn in zwei verschiedenen Paaren verwendet. Das Durchlaufen der Standardzahlwortreihe (im Folgenden: ZWR) kann durch die Aufforderung „zähl mal nach“ seitens des SLs ausgelöst worden sein. Eine weitere Auffälligkeit entdeckt man in der Paarbildung: Bei beiden Karten werden nicht die nahe beieinander liegenden Marienkäfer als Paare zusammengefasst, sondern die weiter entfernten.

## 2. Vorgehen

Im späteren Verlauf des Spiels zeigt Marc folgendes Vorgehen auf:

| | | |
|---|---|---|
| SL | und hier’ *(dreht die Karte mit vier Marienkäfern und deutet auf diese)* | |
| Marc | *(auf F tippend)* einer.. *(mit Zeigefinger und Daumen auf (F,G) tippend)* zwei *(mit Zeigefinger und Daumen auf (D,E) tippend)* zwei |  |
| | *(direkt im Anschluss)* aber hier sind kei- *(wechselt zur Karte mit drei Marienkäfern)* aber... hier.. *(deutet mit dem rechten Zeigefinger auf die freie Stelle über A)* hier ist keiner dabei und hier, *(zeigt auf B)* aber. das sind zwei aber hier *(fährt mit dem rechten Zeigefinger über die rechte Seite der Karte)* ist keiner.. |  |

Hier geht Marc ähnlich zum 1. Vorgehen vor. Er thematisiert wiederum Paare, nennt hierbei jedoch die Anzahl der Elemente im Paar („zwei“), anstatt die Zahlwortreihe (ZWR) beim Abgreifen der Paare zu durchlaufen. Im Vergleich zur vorherigen Szene scheint er nun disjunkte Paare zu betrachten. Die Paare werden also anders als beim 1. Vorgehen gebildet, was sich zudem darin äußert, dass Marc nunmehr die näher beieinander liegenden Marienkäfer zusammenfasst. Für *A* ist jedoch „keiner dabei“. Eventuell nutzt Marc hier die Kongruenz der Karten (maW: das den Karten inhärente geometrische Muster) aus: Wenn bei *A* ein weiterer Marienkäfer dabei wäre, dann wären die Karten deckungsgleich, da sich zwei Paare von Marienkäfern bilden lassen.

## Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurden zwei Vorgehensweisen rekonstruiert: (1) Eine Fokussierung auf Paare zusammen mit dem Durchlaufen der ZWR und (2) eine disjunkte Paarbildung mit Nennung der Kardinalität eines jeden Paares. Bemerkenswert ist die Möglichkeit des Mengenvergleichs über den Vergleich der zugrundeliegenden (geometrischen) Muster.

Im weiteren Forschungsverlauf werden dieses und weitere Vorgehen analysiert und mit Hilfe der strukturalistischen Metatheorie eine Rekonstruktion der empirischen Theorie über Mengen und Zahlen durchgeführt.

## Literatur


Burscheid, H. J. & Struve, H. (2010). Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung. Hildesheim: Franzbecker.

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core System of Number. Trends in cognitive sciences 8(7), S. 307 – 314.

Gopnik, A. & Meltzoff, A. (1997). Words, thoughts and theories. Cambridge MA: MIT Press.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Schlicht, S. & Witzke, I. (2013). Zur Problematik der Diagnose des Invarianzbegriffes im Kindergarten. In: Meyer, M., Müller-Hill, E. & Witzke, I. (Hrsg.): Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik. Hildesheim: Franzbecker. S. 205 – 231.

Schwank, I. (2010). Erlebniswelt Zahlen – Spielereien an der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V..

Stegmüller, W. (1979). Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, Bd. II, Dritter Teilband: Die Entwicklung des neuen Strukturalismus seit 1973. Heidelberg: Springer.

Barbara SCHMIDT-THIEME, Hildesheim

# Erklären können. Aufbau von Erklärkompetenz im Lehramtsstudium

## 1. Erklären und Erklärprozesse

Erklären ist ein interaktiver Prozess, eine Handlung zwischen zwei Interaktionspartnern. Wie viele Interaktionen ist dieser Prozess in der Regel von Sprache zumindest begleitet. Linguistische Untersuchungen haben bisher folgende Kriterien für die Beschreibung von Erklärprozessen erarbeitet (s. die Arbeiten in Vogt 2009): (a) Erklären ist eine spezielle Form der Wissensvermittlung, (b) es hat das Ziel, dass jemand etwas weiß, versteht oder kann (perlokutiver Effekt = kognitive Wirkung) und es ist (c) asymmetrisch, Voraussetzung ist ein höheres (Fach-) Wissen beim Erklärenden. Allerdings wurde deutlich, dass sich Erklären als sprachliche Handlung nicht auf der sprachlichen Oberfläche festmachen lässt. Die Verwendung bestimmter Wörter oder syntaktischer Formen ist weder hinreichend noch notwendig für die Konstitution eines Erklärprozesses.
Grundlegend für die Theorie zu Erklärhandlungen ist die Unterteilung in die drei Erklärtypen ERKLÄREN-WAS (BESCHREIBEN, Deskription), ERKLÄREN-WIE (ANLEITEN, Instruktion) und ERKLÄREN-WARUM (ERKLÄREN, Explikation). ERKLÄREN-WAS ist beispielsweise gegeben, wenn ein Lehrender einen Ausdruck verwendet, den ein Lernender nicht versteht bzw. dessen Bedeutung er nicht kennt. ERKLÄREN-WARUM wird im Alltag vor allem genutzt, um das Zustandekommen eines Sachverhalts zu explizieren. Der Typ ERKLÄREN-WIE setzt voraus, dass der Erklärende über ein prozedurales Wissen verfügt, der andere aber nicht. Das Wissen von A bezieht sich generell auf die Kenntnis von Abläufen, etwa in welcher Reihenfolge Handlungen koordiniert werden müssen, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen.
Alle diese drei Typen, die zur Beschreibung aller, insbesondere alltäglicher Erklärhandlungen dienen, spezifizieren sich hinsichtlich mathematischer Inhalte sowohl in der Form wie in der Sprachhandlung. ERKLÄREN-WAS führt z.B. von der Beschreibung alltäglicher Gegenstände und deren Verwendung (Kugel, Ball) zu einer mathematischen Definition, welche auf der sprachliche Oberfläche („Def.:“, Konjunktiv, ..) wie in der sprachlichen Handlung (SETZUNG) sich von allen anderen Formen des ERKLÄREN–WAS – alltäglich wie in andere Fächern – unterscheidet. ERKLÄREN-WIE findet im Algorithmus seine mathematische Endform, ERKLÄREN-WARUM im formalen Beweis. Diese mathematiktypischen Formen sind zwar prägnant und korrekt, aber als sprachliche Formen des Erklärens nur

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1075–1078). Münster: WTM-Verlag

von fachlich wie fachsprachlich Kompetenten zu verstehen. Die Entwicklung neuen Wissens wie der Erwerb mathematischen Wissens geschieht nur in Anbindung an Bekanntes, inhaltlich wie sprachlich.

Ob ein Erklärprozess als gelungen bezeichnet werden kann, hängt davon ab, ob beim Erklärpartner eine Veränderung bezüglich seines Wissen oder Fähigkeiten erkennbar wird, wenn z.B. beim ERKLÄREN-WIE tatsächlich Handlungsausführungen beobachtet werden.
Gutes Erklären, besser gelungenes Erklären

Der Erklärprozess selbst lässt sich in Phasen gliedern wie bei Vogt (2009) in Phase 1 (Aufmerksamkeitsausrichtung: Bestimmung des Gegenstandes, der zu erklären ist), Phase 2 (Phänomenisolierung: Konzentration der Beteiligten darauf, das mögliche Feld der Phänomene durch Beispiele zu ergänzen), Phase 3 (abstrahierende Fokussierung: gleichsam auf den Begriff zu bringen) und Phase 4 (Exemplifizierung: Anwendung des neu erworbenen Wissens auf andere Gegenstände) oder in Erkläranlass, Erklärinitiierung, Erklärprozess und Erklärcoda (Wagner/Wörn 2009). In diesen Sequenzierungen werden auch die Parameter von Erklärhandlungen deutlich wie etwa die beteiligten Personen, das Thema oder die Kommunikationssituation. In unterrichtlichen Situationen etwa ist der Lehrer (also ein Agent dieser Institution) zuständig für die interaktive Prozessierung von Lernprozessen, seine Aufgabe ist die Vermittlung fachlich spezialisierten Wissens und Kompetenzen; ihm gegenüber steht eine altershomogene Gruppe von ca. 20 bis 30 Schülern, welche aufgrund der Schulpflicht gezwungen sind, am Unterricht teilzunehmen (Ehlich/Rehbein 1983; Vogt 2009). Inzwischen liegen eine Reihe von Untersuchungen zu Erklärhandlungen im Mathematikunterricht sowie Erklärangeboten vor (Böhm 2013; Mrozek 2013; Wagner/Wörn/Kuntze 2010; die Zeitschriftenhefte Mathematik 5 bis 10 Heft 19; ml Heft 172). Deutlich wird, dass (a) die in Erklärprozessen vorkommenden Interaktionen können sehr vielfältig aussehen, diese Prozesse auch vielfältig gelingen können; (b) Lernende die für Erklärprozesse nötigen sprachliche Kompetenzen besitzen müssen und (c) die Lehrenden Erklärkompetenz brauchen.

## 2. Erklären können - Erklärkompetenz

In Darstellungen des Professionswissens von Lehrern findet sich Erklären innerhalb des “pedagogical content knowledge“ im Wissen über das Verständlichmachen von Inhalten (making comprehensible). Der Erklärkompetenz wird als Teil des Professionswissen von Lehrerinnen und Lehrern in den nationalen wie internationalen Vergleichstudien (COACTIV, TEDS-M) zentrale Bedeutung zugewiesen. In der COACTIV-Studie konnte sogar

bereits die Bedeutung der Erklärkompetenz für Unterrichtsqualität und den Lernzuwachs von Schülern empirisch nachgewiesen werden. Dort war die Erklärkompetenz ein zentraler Bestandteil des fachdidaktischen Wissens, das sich - im Gegensatz zum reinen Fachwissen - als prädiktiv valider Indikator für zentrale Aspekte der Unterrichtsqualität sowie für den Lernzuwachs der Schüler herausgestellt hat.
Eine klare Bestimmung des Konstrukts in einem größeren Rahmen steht jedoch noch aus. Ein erster Entwurf eines Kompetenzmodells umfasst Teilkompetenzen in den Dimensionen **Sprache** (Linguistik), **Unterricht** (Pädagogik, Mathematikdidaktik) und **Fach** (Mathematik). Z. B. gehören dazu: Fachsprachenwissen; Wissen um Sprachhandlungen und Kommunikationsmuster; Kenntnis von Zeicheninventaren und Fähigkeit zum flexiblen Wechsel zwischen Repräsentationsformen fachlichen Wissens; mathematische Kenntnisse (in ihrer Strukturiertheit, im axiomatisch-logischen Aufbau und der starken Vernetztheit); diagnostische Kompetenz; Wissen um Begriffsbildungsprozesse.

## 3. Erwerb von Erklärkompetenz – Implementation von Aufgaben zur Entwicklung vom Erklärkompetenz in ein Lehramtsstudium

Welche Möglichkeiten ergeben sich nun in einem Lehramtsstudium für Studierende Erklärkompetenz zu erwerben? Welche grundsätzlichen Überlegungen können diese Angebote mitgestalten?

A Kognition und Performanz: Lernarrangements zur Stimualtion der Kognition bieten die an Hochschulen gewohnten Stoffvermittlungssituation wie externer Input durch Vortrag (Vorlesung, Seminar) oder Selbsterarbeitung (für Referat, in Gruppenarbeit). Raum muss jedoch für die Performanz geschaffen werden, d.h. es sind Erklärsituationen zu schaffen, Erklärhandlungen müssen explizit gefordert werden. Für den Erwerbsprozess und die Dokumentation desselben scheint eine Klassifikation der Erklärhandlungen in bewusst bzw. unbewusst, implizit bzw. explizit sowie real bzw. simuliert sinnvoll.

B Theorie und Praxis: Der Erwerb der Kompetenz "Unterrichtliches Erklären" ist ein aktiver Prozess, er soll von den angehenden Lehrerinnen und Lehrern aktiv mitgestaltet und nachvollzogen werden. Reflexion des eigenen Handelns sowie Selbstevaluationen des erworbenen Kompetenzniveaus erzeugen die notwendige Bewusstheit, Erklärkompetenz auch nach dem Studium weiter zu entwickeln und adäquat in der unterrichtlichen Praxis umzusetzen.

C Messbarer Prozess: Der Erwerb der Kompetenz „Unterrichtliches Erklären“ ist ein individueller, aber überindividuell vergleichbarer Prozess. Methoden zur Erfassung müssen daher so gestaltet werden, dass sowohl individuelle, persönliche Rückmeldungen den weiteren Kompetenzerwerb stimulieren als auch genug objektiv verwertbare und vergleichbare Messdaten gewonnen werden können

D Integrierbarkeit: Der Erwerb der Kompetenz „Unterrichtliches Erklären" ist ein standortbezogener Prozess, Angebote zum Kompetenzerwerb wie Methoden zur Erfassung müssen in die vielerorts dichte Lehrerausbildung ohne großen zusätzlichen Mehraufwand für Studierende wie Lehrende in den Standardbetrieb integrierbar sein.

Die Angebote an der Universität Hildesheim bedienen im Bachelor zuerst die kognitiven Kompetenzen, ab dem vierten Semester wird in zunehmenden Maße die Handlungskompetenz, also performative Fähigkeiten geübt.

Beispiel:

**B1 Erklären von Mathematik**

*Zeitpunkt:* Bachelor, 1. Semester, Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra

*Aufgabe der Studierenden:* Die Studierenden erklären in den Tutorien ihren Kommilitonen mathematische Inhalte. Sie erläutern Definitionen, führen Beweise und beschreiben Algorithmen.

*Art der Erkläraufgabe:* Die Aufforderung zu diesen Erklärhandlungen geschieht implizit durch die Aufgabenstellungen, ggfs. unterstützt durch die Tutoren. Das Erklären geschieht real als Prozess, aber unbewusst und wird nicht weiter thematisiert oder reflektiert.

*Rückmeldung:* Direkte Rückmeldung zu Erklärprozessen durch Kommilitonen durch explizite Bekundung des Verstehens oder Durchführung von Tätigkeiten, die ein Verstehen voraussetzen.

## Literatur


Böhm, K. (2013). Erklären können, Erklärkompetenz von Schülerinnen und Schülern im Geometrieunterricht der Primarstufe. Master-Arbeit, Universität Hildesheim.

Ehlich, K. und Jochen Rehbein (Hrsg.; 1983): Kommunikation in Schule und Hochschule. Linguistische und ethnomethodologische Analysen. Tübingen: Narr.

Mrozek, I. Chr. (2013). Lehrererklärungen im Mathematikunterricht. Grundlagen einer guten Erklärung. Master-Arbeit, Hildesheim.

Vogt, R. (Hrsg., 2009): Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven. Tübingen: Stauffenburg.

Wagner, A., Wörn, C., Kuntze, S. (2010): Kann man Erklären lernen? - Ein Unterrichtsmodell zur Förderung von Erklärkompetenzen bei angehenden Lehrern unter Verwendung didaktischer Materialien. In: TRANSFER; Ludwigsburger Hochschulschriften

Oliver SCHMITT, Darmstadt

# Explizites Wissen zu mathematischen Kompetenzen aus reflexionsorientierter Perspektive

In den KMK-Bildungsstandards der Oberstufe wird Kompetenz als „Fähigkeit verstanden, Wissen und Können in den jeweiligen Fächern zur Lösung von Problemen anzuwenden“ (s. KMK, 2012, S. 2). Die konkreteren Ausformulierungen in den Anforderungsbereichen der KMK, in denen auch das Überprüfen, Vergleichen und Bewerten von Modellen im Kontext einer Realsituation, das Reflektieren von Lösungswegen beim Problemlösen oder das Bewerten von Argumenten aufgeführt werden, fordern dazu auf, den Problembegriff in dieser Definition genauer zu fassen.

## 1. Perspektiven auf Metawissen

Neben Problemen, die den Einsatz mathematischen Wissens und Könnens zum Modellieren, Argumentieren und Problemlösen erfordern, gehören auch solche zum Mathematikunterricht, die Reflexionshandlungen erfordern. Diese Weitung ist zu dessen Legitimation notwendig, da Kommunikations- und Entscheidungshandlungen aus allgemeinbildender Sicht größte Relevanz zukommt (vgl. Fischer, 2001, S. 10f.). Umgekehrt sind eigene Erfahrungen im Modellieren, Problemlösen und Argumentieren als aktivierende Lernanlässe unverzichtbar, auch damit das angestrebte Reflexionswissen kein „äußerlich angelerntes Informationswissen“ (s. Heymann, 1996, S. 200) bleibt. Die Handlungs- und Reflexionsperspektive auf prozessbezogene Kompetenzen stehen also in wechselseitiger Abhängigkeit.

Die Kernfrage lautet, ob im Unterricht Metawissen zu den prozessbezogenen Kompetenzen explizit thematisiert werden sollte und welche Inhalte dabei in Frage kommen. Der Beitrag vertritt die These, dass explizites Metawissen sowohl aus Sicht der Handlungs- als auch aus Sicht der Reflexionsperspektive förderlich sein kann und aus den oben genannten Gründen jeweils beide Perspektiven zur inhaltlichen Entscheidung, was zur Thematisierung im Mathematikunterricht geeignet ist, betrachtet werden sollten. Nach einer kurzen Begründung der Hauptthese wird eine solche Betrachtung exemplarisch anhand des Modellierungskreislaufs durchgeführt.

## 2. Bedeutung von Metawissen aus der Handlungsperspektive

Empirische Untersuchungen zu den prozessbezogenen Kompetenzen weisen darauf hin, dass Metawissen beim eigenen Modellieren, Argumentieren und Problemlösen hilfreich sein kann. So wies Katja Maaß (2007) erwartungskonform nach, dass Fehlvorstellungen über das Realmodell mit Defi-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1079–1082). Münster: WTM-Verlag

ziten in der Konstruktion des Realmodells und Fehlvorstellungen über die Validierung mit Problemen bei der Validierung einhergehen. Bessere Modellierer haben tendenziell ein besseres Metawissen über das Modellieren. Eine Diskussion des Modellbildungsprozesses soll daher mit den Lernenden explizit vorgenommen werden. Im Bereich der Kompetenz des Argumentierens fanden Ufer, Heinze, Kuntze, Rudolph-Albert (2009) einen „schwachen aber substanziellen“ Zusammenhang von Methodenwissen, d. h. Wissen über Evaluationskriterien von mathematischen Beweisen, und geometrischer Beweiskompetenz. Collet (2009) wies die positive Wirkung eines expliziten Lehrgangs zu Heurismen auf deren produktiven Einsatz sowie eine signifikante Korrelation zwischen dem Einsatz von Heurismen und dem erfolgreichen Bearbeiten von Problemlöseaufgaben nach.

## 3. Implizites und explizites Wissen aus Reflexionsperspektive

Reflexionswissen im Sinne von Fischer (2012), das zur Entscheidungs- und Kommunikationskompetenz führen soll, kann Fischer folgend nur explizites Wissen sein, da es kritisierbar sein muss. Implizites Wissen aber, das etwa Experten befähigt richtig zu handeln ohne sich dessen bewusst zu sein, ist nicht kritisierbar. Explizites Metawissen zu den prozessbezogenen Kompetenzen als typische mathematische Tätigkeiten könnte entsprechend dazu beitragen diese der Kommunikation und Kritik zu öffnen.

Beispielhaft soll dies hier für die Kompetenz des Modellierens präzisiert werden, ähnlich lässt sich auch für die anderen Kompetenzen argumentieren. Die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik in technischen Systemen oder formalen Organisationsstrukturen ist oft nicht direkt einsehbar, da die Mathematik dort nur implizit, unter der Oberfläche, enthalten ist, sie kann daher leicht als selbstverständlich erscheinen. Keitel, Kotzmann und Skovsmose (1993) schlagen sechs Stufen der Reflexion vor, die eine Analyse dieser „impliziten Mathematik“ ermöglichen sollen. Unter anderem soll die Passung von Modellierungen zum Kontext aber auch die grundsätzliche Eignung einer Formalisierung für die Lösung eines Problems reflektiert werden (vgl. S. 42ff). So wie das Anwenden von Mathematik nicht allein durch mathematisches Wissen ermöglicht wird, so wird auch das Reflektieren nicht allein durch die Ausführung von Modellierungen ermöglicht. Explizites Metawissen über wichtige Phasen und Aspekte des Modellierens kann hilfreich sein, um eine begriffliche Basis zur Ermöglichung von Reflexion und Kritik eigener und fremder Modellierungen zu schaffen.

## 4. Modellierungskreislauf als zu explizierendes Metawissen?

Von diesen grundsätzlich befürwortenden Zugängen lässt sich allerdings noch keine inhaltliche Auswahl ableiten. Ist beispielsweise Wissen über den Modellierungskreislauf ein sinnvolles Lernziel? Allgemeine inhaltliche Hinweise können im Bereich des Modellierens von den dargestellten Überlegungen zu impliziter Mathematik oder auch von typischen Missverständnissen erhalten werden, wie sie etwa von Förster und Kuhlmay (2000) aufgezählt werden. Dazu zählen unter anderem die Ineinssetzung von Realität und Realmodell, die Betrachtung des Modellierungskreislaufs als kybernetischen Regelkreislauf sowie die Vernachlässigung der in die Modellierung eingehenden Zielvorstellungen der beteiligten Akteure. Im Projekt DISUM (Schukajlow et al., 2010) wurden Lernende bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben mit sogenannten „Lösungsplänen“, einer vereinfachten Form des Modellierungskreislaufs, unterstützt. Dabei konnten positive Wirkungen auf die Leistung, Einstellung und Strategie der Lernenden festgestellt werden, gleichzeitig wurde auch die Diskussion der Lösungsvorschläge mit den Lehrenden unterstützt.

Voigt (2011) weist auf die Gefahr einer falschen Schematisierung hin, die routinierte Lösung eines Experten wird zur Vorlage für das kreative Problemlösen von Lernenden. Die Schrittfolge des Modellierungskreislaufs zeigt sich auch empirisch bei der Untersuchung von Schülerlösungen nicht. Insbesondere der Wechsel von Realität und Modell geschieht fortwährend in der Problembearbeitung, nicht in schematisierter Form am Anfang und Ende. Im Expertenumfeld existiert dabei eine personale Trennung zwischen Experten für die Situation und mathematischen Experten, die es in der Schule nicht gibt. Zudem ist die Modellierung im Unterricht abhängig von den mathematischen Möglichkeiten und dem aktuellen Thema, die Probleme sollen formal gelöst werden und werden auch entsprechend formuliert.

Insgesamt legen diese Betrachtungen nahe, dass die Kenntnis der einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufs zwar helfen kann, wie etwa bei DISUM, Modellierungsaufgaben besser zu lösen und als Kommunikationsmittel eine Diskussion, insbesondere auch verschiedener Missverständnisse von mathematischen Modellen, zu ermöglichen. Der Modellierungskreislauf in seiner Schrittfolge sollte dabei allerdings als eine Idealisierung von Expertentätigkeit, als Hilfestellung bei der Analyse, Kommunikation und Kritik verstanden werden. Die Unterschiede in der Tätigkeit der Lernenden und der Experten können selbst zum Gegenstand des Unterrichtsgesprächs werden. Langfristig sollte die Vorstellung von Modellierungstätigkeiten auch Zwecke und Theorien einschließen, die schon in die Problemformulierung eingehen, wie es etwa bei Blomhøj und Kjeldsen (2011) berücksichtigt ist. Um zu verhindern, dass eigene Modellierungstätigkeiten zu sehr am aktuellen Inhalt orientiert sind, könnten im Unterricht eigene Phasen zum gezielten Ausüben und Reflektieren des Modellierens eingeführt werden, in denen im Laufe der Schulzeit gezielt Handlungskompetenz und Metawissen aufgebaut werden. Da nicht bereits zu Beginn der Sekundarstufen komplexe Modellierungen durchgeführt werden können, kann sich ein solcher Kurs etwa an dem Entwicklungsmodell von Böhm (2013) orientieren. Dieser unterscheidet unmittelbares, idealisierendes sowie anpassendes Modellieren. Dabei werden die zu berücksichtigenden Aspekte im Modellierungsprozess sukzessive abstrakter und vielfältiger, Metawissen kann so durch Reflexion eigener Erfahrungen und passender Expertenbeispiele sukzessive aufgebaut werden.

## Literatur


Böhm, U. (2013). Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T. H. (2011). Students' Reflexions in Mathematical Modelling Projects. G. Kaiser et al. (Hrsg.) Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (S. 385-395). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Collet, C. (2009). Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation fördern. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen. G. Krummheuer & A. Heinze (Hrsg.): Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Münster: Waxmann.

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung II. Zugriff am 19.3.2013.Verfügbar unter: http://www.uni-klu.ac.at/wiho/downloads/Hoehere_Allgemeinbildung_II(1).pdf

Fischer, R. (2012). Bildung von Individuum und Gesellschaft. R. Fischer, U. Greiner & H. Bastel: Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung (S.262-276). Linz: Trauner.

Förster, F. & Kuhlmay, P. (2000). „The Box" - Ein Computerspiel hilft beim Verständnis von Modellbildungsprozessen. F. Förster, H.-W. Henn & J. Meyer (Hrsg.): ISTRON – Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (S. 188-198). Hildesheim: Franzbecker.

Heymann, H.W.(1996). Allgemeinbildung und Mathematik.Weinheim und Basel: Beltz.

Keitel, C.; Kotzmann, E. & Skovsmose, O. (1993). Beyond the Tunnel Vision. C. Keitel & K. Ruthven (Hrsg.): Learning from Computers: Mathematics Education and Technology (S. 243-279). Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

KMK (Kultusministerkonferenz) (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012. (http://www.kmk.org/)

Maaß, K. (2007). Modelling in Class: What do we want the students to Learn? C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Hrsg.): Modelling and Applications in Mathematics Education (S. 63-78). Chichester: Horwood limited publishing.

Schukajlow, S. et al. (2010). Lösungsplan in Schülerhand. Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, Münster: WTM-Verlag, 771-774.

Ufer, S.; Heinze, A; Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht: Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. Journal für Mathematik-Didaktik, 30, 30-54.

Voigt, J. (2011). Rationale Modellierungsprozesse. Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Münster: WTM-Verlag, 115-118.

Angela SCHMITZ, Andreas EICHLER, Freiburg

# Wie wollen Lehrkräfte Visualisierungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe einsetzen? Ein Fallvergleich.

„Ich mache am Anfang alles Mögliche, [...] die [Zeichnungen] dienen nur zur Einführung eines Themas“ (Herr A, Mathematiklehrer an einer Gesamtschule). „Beim Einführen aller Rechenmethoden nehme ich irgendeine Form der Visualisierung. Aber bei vielen Methoden, da war es das dann halt auch schon“ (Frau C, Mathematiklehrerin an einem Gymnasium).

Beide Lehrkräfte, gefragt nach ihrem Einsatz von Visualisierung im Mathematikunterricht, setzen diese zur Einführung in die Bruchrechnung ein. Im weiteren Unterrichtsverlauf scheint Visualisieren für sie jedoch kaum eine Rolle zu spielen. Es ist fraglich, ob beide die gleiche Sichtweise vertreten, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag. Dazu mehr in diesem Beitrag. Welche weiteren, möglicherweise typischen Überzeugungen bei Lehrkräften zum Einsatz von Visualisierung im Mathematikunterricht (re)konstruiert werden können, ist Gegenstand des übergeordneten Forschungsprojektes, aus dem diese Interviewauszüge stammen.

## Theoretischer Hintergrund und Fragestellung

Der Begriff „Visualisierung” umfasst nach Arcavi (2003) „[…] the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.“

Visualisierung hat für das Lernen von Mathematik hohe Bedeutung (Presmeg, 2006). Flexibilität im Repräsentationswechsel gilt als wesentlich für mathematisches Verstehen (Duval, 2006). Der flexible Einsatz von Visualisierungen ist bedeutsam beim Lösen mathematischer Probleme (Heinze et al., 2009). Von Lehrkräften wird erwartet, Visualisierung hohen Stellenwert im Unterricht beizumessen (David & Tomaz, 2012).

Andererseits sind im Umgang mit Visualisierung vielfältige Schwierigkeiten bekannt. Diese werden nach Arcavi (2003) eingeteilt in kulturelle, kognitive und soziologische Schwierigkeiten. So gibt es kontroverse Überzeugungen, inwiefern Visualisierungen in der Mathematik ein legitimes Mittel ist (kulturell). Für Lernende ist es schwierig, zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln (kognitiv, siehe auch Ainsworth 1999). Bei

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1083–1086). Münster: WTM-Verlag

Mathematiklehrerinnen und -lehrern sind Visualisierer möglicherweise unterrepräsentiert (soziologisch).

Wie sich der Einsatz von Visualisierungen im Unterricht gestaltet und welche Kriterien für Lehrpersonen handlungsleitend sind, ist wenig untersucht (Presmeg, 2006). Dies führt zur übergeordneten Fragestellung: Wie wollen Lehrkräfte Visualisierungen im Mathematikunterricht einsetzen?

Diese Frage soll im Kontext der Belief-Forschung untersucht werden. Beliefs als Überzeugungen werden hier verstanden als „psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true“ (Philipp, 2007, S. 259). Sie sind eher kognitiv und graduell und werden abgegrenzt zu Wissen einerseits sowie affektiven Haltungen andererseits. Beliefs gelten als Disposition für Handlungen, die sich auf die Unterrichtspraxis auswirken (Philipp, 2007).

## Methode

Die Frage, wie Lehrkräfte Visualisierung im Mathematikunterricht einsetzen wollen, wird für Bruchrechnung, Algebra, Funktionen und Analysis, also für alle Altersstufen der Sekundarstufe untersucht.

Im Rahmen einer qualitativen Studie, aus der auch die Eingangszitate stammen, wurden mit Lehrkräften der Sekundarstufe I und II halbstrukturierte Interviews von etwa drei Stunden geführt, in denen neben unterrichtsbezogenen auch übergreifende Themen behandelt wurden. So wurden die Lehrkräfte z.B. auch zu ihrem Bild von Mathematik befragt.

Die transkribierten Interviews wurden im Sinne der Grounded Theory (Glaser & Strauss, 1967) ausgewertet. Dabei wurden ähnliche Phänomene im permanenten Vergleich zu Kategorien höherer Ordnung verdichtet (offenes und axiales Kodieren), um umfassende theoretische Konzepte zu generieren. Parallel zur Auswertung der Daten aus den Interviews werden weitere Lehrkräfte ausgewählt im Sinne eines „theoretical sampling“ (Glaser & Strauss, 1967). Dieses zielt auf möglichst kontrastierende Fälle (z.B. Ausbildungsweg, Schulform, Altersstufe), um „theoretische Sättigung“ zu erreichen.

## Erste Ergebnisse

Im Rahmen der Analyse haben sich derzeit sechs Kategorien herausgebildet, die die Rolle der Visualisierung aus Sicht von Lehrkräften beschreiben. Dieser Beitrag stellt anhand des Fallvergleichs von Herrn A und Frau C zu verschiedenen Zeitpunkten Ausprägungen für die Kategorie „Visualisierung zur Einführung eines mathematischen Themas“ dar. Diese werden mit der Bedeutung, die die Visualisierungsart „Zeichnen“ für beide Lehrkräfte hat, in Beziehung gesetzt.

a) Ausprägungen der Kategorie „Visualisierung zur Einführung eines mathematischen Themas“

Bei Einführung der Bruchrechnung setzen beide Lehrkräfte zahlreiche Visualisierungen ein. Diese dienen der Entwicklung der Bruchvorstellung(en) sowie zur Einführung fast aller Rechenoperationen. Im Gegensatz dazu nutzen beide Lehrkräfte Visualisierung im weiteren Unterrichtsverlauf kaum (siehe Zitate zu Beginn des Beitrags). Trotz dieser Gemeinsamkeiten zeigt der tiefere Vergleich, dass dem Handeln beider Lehrkräfte eher verschiedene Überzeugungen zur Rolle der Visualisierung zu Grunde liegen:

Aus Sicht von Herrn A kann man mit Visualisierung bei allen Themen der Bruchrechnung ein *symbolisches Vorgehen herleiten*: Dies wird in Einzelthemen von Bruchvorstellung bis Division „Bruch durch ganze Zahl“ deutlich. Er fasst selbst zusammen, „dass sie [die Schüler] natürlich wissen, wie und warum [man rechnet], aber dass sie das, schon erst mal, dann schematisch machen können.“ Visualisierung dient dabei zur Unterstützung einer *inhaltlichen Legitimation*, um danach Algorithmen anwenden zu dürfen. Diese Bedeutung der Visualisierung findet bei Herrn A auch in der Algebra Anwendung.

Für Frau C sind zwei weitere Rollen der Visualisierung von Bedeutung: Sie setzt Visualisierungen ein, weil dies der von ihr wahrgenommenen *Norm* entspricht: „Ich habe das mehr aus dem Anspruch heraus gemacht, dass ich das halt eben einmal gelernt habe, dass man immer schön visualisieren soll.“ Außerdem ist Visualisierung für sie wichtig als spätere *Erinnerungshilfe* in Form eines abrufbaren Grundgerüstes. Auch bei ihr finden sich diese Sichtweisen in der Algebra wieder.

b) Bedeutung der Visualisierungsart „Zeichnen“

Dem Unterricht beider Lehrkräfte ist gemeinsam, dass ihre Schülerinnen und Schüler wenige Zeichnungen erstellen sollen. Denn dies dauere *lange* und *trage im Verhältnis zum Zeitaufwand wenig zum Lernen bei*. Bezüglich eigener Zeichnungen im Unterricht unterscheiden sich die beiden Lehrkräfte jedoch deutlich. Herrn A ist wichtig, dass seine Zeichnungen sehr *genau* sind und Strukturen *Schritt für Schritt* entstehen. Für Frau C ist wichtig, zwischendurch *schnell* zur Erläuterung eine *Skizze* zeichnen zu können.

Damit stützt die Rolle des Zeichnens die jeweilige Interpretation zur Rolle der Visualisierung bei der Einführung eines Themas. Bei Herrn A unterstützt das schrittweise genaue Zeichnen das Nachvollziehen von Einzelschritten und inhaltlichen Strukturen im Rahmen der Herleitung. Für Frau C ermöglichen Skizzen, einen Inhalt später abzurufen.

### Zusammenfassung und Ausblick

Obwohl beiden Lehrkräften gemeinsam ist, dass sie Visualisierung im Rahmen der Einführung häufig einsetzen und im weiteren Verlauf wenig nutzen, lassen sich bei genauerem Blick unterschiedliche Überzeugungen zum Einsatz von Visualisierung im Mathematikunterricht (re)konstruieren. Bei beiden stützt die Rolle des Zeichnens diese Interpretation.

Ziel ist, über diese Fälle hinaus das Spektrum der Sichtweisen auf den Einsatz von Visualisierung im Mathematikunterricht umfassend darstellen zu können. Auf dieser Grundlage sollen dann auch Häufigkeiten zum Vorkommen der Sichtweisen erfasst werden. Es wird sich zeigen, ob sich auf Basis der Analyse abschließend Profile oder Typen bilden lassen.

### Literatur


Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. Computers and Education, 33 (2-3), 131–152.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52 (3), 215–241.

David, M. M. & Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. Educational Studies in Mathematics, 80 (3), 413–431.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61 (1-2), 103–131.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research. Chicago: Aldine.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. ZDM - The International Journal of Mathematics Education, 41 (5), 535–540.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. In F. K. Lester (Hrsg.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (S. 257–315). Charlotte (NC): Information Age Publishing.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from Psychology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future (S. 205–235). Rotterdam: Sense Publishers.

Edith SCHNEIDER, Klagenfurt

# Schüler(innen)leistungen am Ende der 8. Schulstufe – Ergebnisse der österreichischen Standards M8-Testung

Im Jahre 2009 wurden in Österreich „Bildungsstandards“ u.a. für das Fach Mathematik für die 8. Schulstufe („Standards M8“) gesetzlich verankert, im Mai 2012 wurden erstmals bundesweite (!) Standards M8-Testungen durchgeführt. Die offiziellen Ergebnisrückmeldungen fokussieren auf relative Stärken und Schwächen von Schulen im Vergleich zum bundesweiten Durchschnitt sowie in einem speziellen („fairen“) Schul- und Klassenvergleich (siehe Schreiner & Breit, 2012). Um Aussagen über die tatsächlichen Leistungen der Schüler(innen) machen zu können, muss die Testung hinsichtlich der „objektiven“ Anforderungen der einzelnen Testitems und der dabei erzielten Lösungshäufigkeiten untersucht werden. Einige ausgewählte Analyseergebnisse werden in diesem Beitrag beschrieben.

## Eckdaten der Standards M8 - Testung

Im Rahmen der Standards M8-Testung wurden österreichweit die Schüler(innen) am Ende der 8. Schulstufe getestet (ca. 80.000 Schüler(innen), davon ca. ein Drittel Gymnasiast(inn)en). Die Testleitung erfolgte in 10% der Klassen durch schulexterne Testadministrator(inn)en, in den restlichen 90% der Klassen durch schulinterne Testadministrator(inn)en (vgl. Schreiner & Breit, 2012). In letzteren wurden insgesamt 72 verschiedene Testitems eingesetzt. Jedes dieser Items wurde von ca. 50.000 Schüler(inne)n bearbeitet, wodurch sich recht verlässliche Aussagen über die bei der Bearbeitung der Aufgaben erbrachten Schüler(innen)leistungen machen lassen.

## Testinstrumentarium

Dem österreichischen Standards-Konzept für das Fach Mathematik liegt ein Kompetenz-Modell zugrunde, in dem mathematische Kompetenzen als dreidimensionale Konstrukte (Handlungs-, Inhalts- und Komplexitätsdimension) modelliert werden. Für die geforderten Kompetenzen am Ende der 8. Schulstufe („Standards M8“) wurden vier *Inhaltsbereiche* (I1: Zahlen und Maße; I2: Variable und funktionale Abhängigkeiten; I3: Geometrische Figuren und Körper; I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen), vier *Handlungsbereiche* (H1: Darstellen, Modellbilden; H2: Rechnen, Operieren; H3: Interpretieren; H4: Argumentieren, Begründen) und drei *Komplexitätsbereiche* identifiziert (Genaueres zum österreichischen Standards-Konzept findet sich u.a. in IDM 2007; Kröpfl & Schneider, 2012 und dort insbesondere in Peschek 2012).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1087–1090). Münster: WTM-Verlag

Die 72 Testitems der Standards-M8 Testung verteilen sich gleichmäßig auf die vier o.g. Inhaltsbereiche nicht aber auf die vier Handlungsbereiche: Aufgaben mit operativen Anforderungen (H2) überwiegen deutlich gegenüber Aufgaben mit interpretativen Anforderungen (H3) und Argumentations- bzw. Begründungsaufgaben (H4). (Auf die Komplexitätsbereiche wird hier nicht eingegangen.) Hinzu kommen einige Aufgaben, die keine Kompetenzen abfragen, sondern lediglich Faktenwissen.

## Ausgewählte Testergebnisse

Im Folgenden beschränke ich mich auf die Leistungen der österreichischen Schüler(innen) bei jenen 19 Testitems, die dem Inhaltbereich „I2: Variable und funktionale Abhängigkeiten“ zugeordnet werden konnten („I2-Items“).

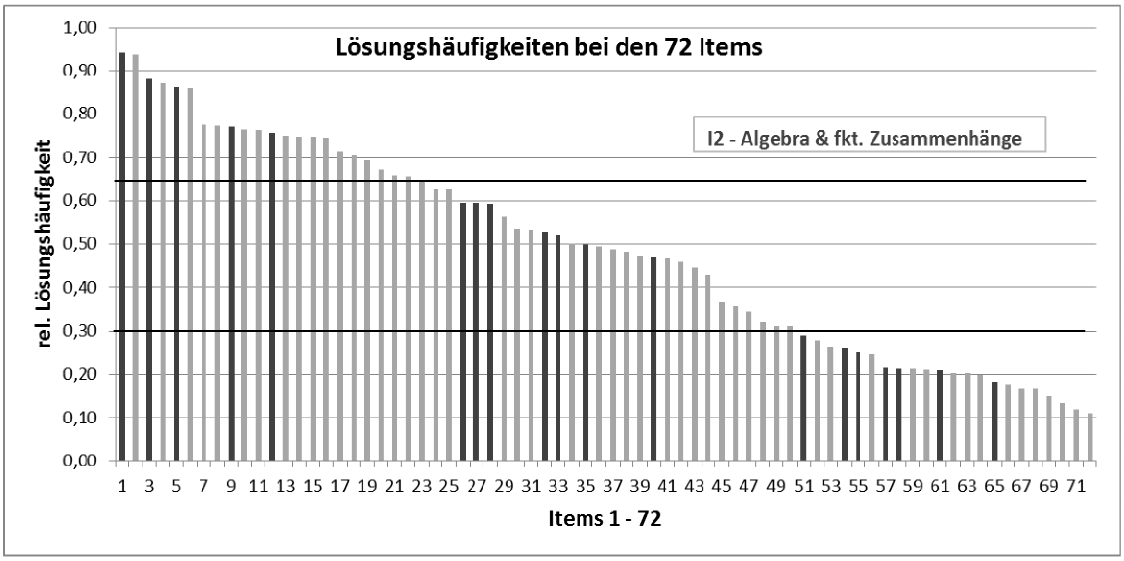



**Abb. 1: Lösungshäufigkeiten der S&S bei den 72 Testitems**

Abb. 1 zeigt, dass die Lösungshäufigkeiten der 72 Testitems zwischen ca. 94% und 12%, jene der I2-Aufgaben zwischen ca. 94% und 18% liegen. Die durchschnittliche Lösungshäufigkeit liegt bei den I2-Aufgaben bei 50,7%, wobei dieser Wert um ca. 4%-Punkte höher ist als jener bei Aufgaben des Inhaltsbereichs „Zahlen und Maße“ und um ca. 6%-Punkte höher als jener des Inhaltsbereichs „Statistische Darstellungen und Kennzahlen“.

Fünf der 19 I2-Items sind den S&S (im psychometrischen Sinne) „leicht“ (Lösungshäufigkeit von über 65%), sieben Items „schwer“ (Lösungshäufigkeit von unter 30%) gefallen. Dabei ist auffallend, dass die Lösungshäufigkeiten der I2-Aufgaben in den einzelnen „Schwierigkeitsbereichen“ durchgängig eher an den oberen Grenzen angesiedelt sind.

Für eine Bewertung der Lösungshäufigkeiten ist es erforderlich, die im Test gezeigten Leistungen den fachlichen Anforderungen der Items gegenüberzustellen:

*„leichte" Aufgaben (Lösungshäufigkeit über 65%):*

- Zusammenhang zwischen Text- oder Termdarstellung und grafischer Darstellung (er)kennen
- In einfache lineare Terme Werte einsetzen; Werte berechnen
- Gültigkeit einfacher Rechengesetze prüfen

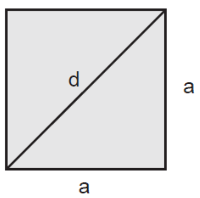
*„Mittelschwere" Aufgaben (Lösungshäufigkeit zwischen 30% und 65%):*

- Gegebenen Gleichungen Texte zuordnen
- Einfache Terme umformen
- Korrekte Vorgehensweise beim Einsetzen in elementare Terme oder beim Umformen einfacher Gleichungen erkennen

Abb. 2 zeigt ein freigegebenes Testitem aus diesem Bereich (Lösungshäufigkeit 47,2%):

Um die Länge der Diagonale eines Quadrats zu berechnen, kann man den Lehrsatz des Pythagoras zu Hilfe nehmen:

$$d^2 = a^2 + a^2$$




Die Formel soll so vereinfacht werden, dass die Diagonale d sofort berechnet werden kann. Welche der folgenden Herleitungen ist richtig?

*Lies dir jede Aussage durch. Kreuze an, ob sie richtig oder falsch ist.* ☒

| | richtig | falsch |
|---|---|---|
| $d^2 = a^2 + a^2$<br>$d^2 = 2 \cdot a^2 \quad \mid \sqrt{\ }$<br>$d = \sqrt{2 \cdot a^2}$ | ☐ | ☐ |
| $d^2 = a^2 + a^2 \quad \mid \sqrt{\ }$<br>$\sqrt{d^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2}$<br>$d = a + a$<br>$d = 2 \cdot a$ | ☐ | ☐ |
| $d^2 = a^2 + a^2$<br>$d^2 = a^4 \quad \mid \sqrt{\ }$<br>$d = a^2$ | ☐ | ☐ |

**Abb. 2: „Mittelschwere" Aufgabe (aus den freigebenen Testitems – https://www.bifie.at/node/1950)**

*„Schwierige“ Aufgaben (Lösungshäufigkeit unter 30%):*

- Zwischen Darstellungen (Graph-Gleichung) einer linearen Funktion wechseln
- Nichtfunktionale Zuordnungen bzw. (nicht)lineare Zusammenhänge anhand von Darstellungen erkennen
- Variablen in linearen Gleichungen (kontextbezogen) interpretieren
- Lineare Gleichungen (Formeln) aus gegebenem Text aufstellen

Die Unterschiede in den Lösungshäufigkeiten zwischen Mädchen und Burschen sind generell gering (zugunsten der Burschen) und kaum signifikant. I2 ist jedoch insofern bemerkenswert, als es der einzige Inhaltsbereich ist, in dem die durchschnittliche Lösungshäufigkeit der Mädchen (51,2%) über der der Burschen liegt (50,3%).

Deutliche Unterschiede zeigen sich hingegen in den Leistungen der S&S aus dem gymnasialen Bereich im Vergleich zu jenen aus dem Pflichtschulbereich (in Ö: HS, Neue Mittelschule); die Differenz der durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten der beiden Gruppen liegt bei 19,5%-Punkten.

Mit Blick auf die Handlungsbereiche ist auffallend, dass „Interpretationsaufgaben“ entweder in den Bereich der „leichten“ Aufgaben (wenn es um das Ablesen und Deuten von Funktionswerten geht) oder in den Bereich der „schwierigen“ Aufgaben (wenn es um die kontextbezogene Interpretation von Variablen geht) fallen. Aufgaben mit (durchwegs klassischen elementaren) operativen Anforderungen fallen v.a. in den Bereich der mittelschweren Aufgaben; Argumentations- und Begründungsaufgaben zählen eher zu den schwierigen Aufgaben, wobei hier in der Regel nicht selbst Argumente/Begründungen zu formulieren sind, sondern vorgegebene Argumentationen/Begründungen hinsichtlich ihres Zutreffens zu bewerten sind.

## Literatur


Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) (Hrsg.) (2007). *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe.* Version 4/07, Klagenfurt. Online im Internet: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf.

Kröpfl, B. & Schneider, E. (Hrsg.), *Standards Mathematik unter der Lupe. Fachdidaktische Erläuterungen und Konkretisierungen zum österreichischen Standards-Konzept M8.* München-Wien: Profil.

Peschek, W. (2012). Die österreichischen Standards M8. In: Kröpfl, B. & Schneider, E. (Hrsg.), *Standards Mathematik unter der Lupe. Fachdidaktische Erläuterungen und Konkretisierungen zum österreichischen Standards-Konzept M8.* München-Wien: Profil, S. 21-38.

Schreiner, C. & Breit, S. (Hrsg.) (2012). *Standardüberprüfung 2012 Mathematik, 8. Schulstufe – Bundesergebnisbericht.* Wien: bifie – bmukk.

Jörn SCHNIEDER, Lübeck, Martin BRACKE, Kaiserslautern

# Mathematisches Modellieren im MINT-Studium – ein fächerübergreifendes Konzept zur Gestaltung von Modellierungsaufgaben

In diesem Beitrag wird – am Beispiel eines konkreten Unterrichtsversuchs – ein Konzept skizziert, wie sich die Bearbeitung von Aufgaben zum mathematischen Modellieren (Borromeo Ferri 2013) mit Phasen zur Metareflexion etwa über das eigene Lernen wie auch über allgemeine Aspekte wissenschaftlichen Arbeitens verbinden lassen. In der Auseinandersetzung mit Modellierungsaufgaben, wie sie etwa speziell im Rahmen von Modellierungswochen an der TU Kaiserslautern (Bracke und Humenberger 2012) durchgeführt werden, können – so unsere Vermutung – einerseits fortgeschrittene Studierende unabhängig von ihrem jeweiligen MINT-Schwerpunktfach methodische und inhaltliche Kompetenzen erwerben, wie sie für ein interdisziplinäres Arbeiten im MINT-Bereich erforderlich sind.

Andererseits eignen sich Modellierungsaufgaben außerdem dafür, gerade mit Studienanfängern fachübergreifende Aspekte wissenschaftlichen Lernens zu thematisieren: Viele Studierende haben gerade zu Beginn ihres MINT-Studiums und gerade im Fach Mathematik erhebliche Lernschwierigkeiten. Nur selten geht es wirklich um mangelnde Fachkompetenz. Viel häufiger fehlt es am notwendigen Selbstvertrauen, an einem konstruktiven Umgang mit Frustration und Rückschlägen und an Strategien für ein selbstgesteuertes Lernen nicht nur im Bereich Mathematik, sondern im Blick auf das gesamte Studium. Wir hoffen mit diesem Ansatz Studienanfänger bei der Überwindung individueller Lernschwierigkeiten zu unterstützen.

Im Folgenden stellen wir ein Unterrichtsexperiment vor, dass die zwei Autoren dieses Beitrags als Betreuer im Rahmen eines Mathematik-Vorkurses an der Universität zu Lübeck im WS 13/14 mit 50 Studienanfängern mit Schwerpunktfach Mathematik durchgeführt haben. Die Studierenden sollten die bereits mehrfach in verschiedenen unterrichtlichen Zusammenhängen erprobte Modellierungsaufgabe zur „Optimierung der Effizienz einer Kläranlage“ (Bracke und Humenberger 2012) bearbeiten; im Vergleich zu den üblichen Veranstaltungsformaten, in deren Mittelpunkt die Bearbeitung solcher Aufgabentypen steht, war der Zeitrahmen dieses Experiments auf vier 1,5 stündige Unterrichtseinheiten verteilt auf zwei Tage beschränkt.

In diesem Experiment sollten die Studierenden nicht einen ersten Einblick in die Angewandte Mathematik erhalten, sondern sie sollten zugleich auch

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1091–1094). Münster: WTM-Verlag

eine erste Erfahrung mit den besonderen Anforderungen wissenschaftlichen Arbeitens und Lernens machen und diese anschließend auch reflektieren.

Obwohl der zur Verfügung stehende Zeitrahmen eng beschränkt war, haben wir uns entschlossen, die Studierenden mit einer zunächst nicht reduzierten, und für die meisten Vorkursteilnehmer ungewohnt offenen Fragestellung zu konfrontieren: Sie sollten untersuchen, inwiefern mehr Trennwände in einem Klärbecken zu einer Optimierung der Klärwerksleistung führen. Als Hilfsmittel wurden einige konkrete aufgabenrelevante Daten, einige Formeln zur Exponentialrechnung sowie ein zu einem „Kochrezept" vereinfachter Modellierungskreislauf zur Verfügung gestellt. Eine Hauptschwierigkeit bei der Bearbeitung bestand darin, eine sinnvolle, nämlich eine einen mathematischen Zugang zuallererst eröffnende Fragestellung zu finden, um anschließend die passenden Werkzeuge zu ihrer Beantwortung auszuwählen bzw. zu konstruieren. Wobei die Werkzeuge selbst – gemessen an zu erwartenden Kenntnissen der Vorkursteilnehmerinnen – sicher keine Standard-Werkzeuge waren.

Ganz bewusst wurde an dieser Stelle auf eine Engführung der Fragestellung verzichtet. Die Studierenden sollten stattdessen zuerst selber bearbeitbare mathematikhaltige Fragestellungen finden und formulieren. Das übergeordnete Ziel dieses Unterrichtsschritts war es, die Studienanfängerinnen gezielt mit einer Situation der „Lösungslosigkeit" und Orientierungslosigkeit und nicht selten daraus resultierender Frustration zu konfrontieren und aushalten zu lassen. Deshalb haben wir allein für diese Phase die **erste 1,5 ständige Einheit** vorgesehen.

In einer abschließenden Evaluationsphase am Ende des Experiments sollten diese Erfahrungen und das mit ihnen verbundene innere Erleben als Anlass genommen werden, sich mit seiner eigenen Motivation, seinen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und den Möglichkeiten zur volitionalen Selbstregulation bzw. zur Erarbeitung motivationaler Lernstrategien auseinanderzusetzen.

Die Betreuer sollten die Arbeit der Studierenden im Sinn eines selbständigkeitsorientierten Lösungsprozesses (Link 2011) weniger durch inhaltliche sondern vielmehr durch strategische Frageinterventionen ressourcenorientiert unterstützen. Sie sollten im Sinne eines aus Coaching und Beratung bekannten „Die Lösung liegt im Gegenüber" (Nicolaisen 2012) ressourcenaktivierende Gespräche führen und dabei nicht nur auf die mathematischen Inhalte fokussieren, sondern auch subjektive Gedanken und Emotionen mit einbeziehen. Sie sollen die Studierenden im weitesten Sinn zur Selbsttätigkeit anregen. Eine direkte Instruktion sollte im Rahmen des Lösungsprozesses allerdings ausgeschlossen sein.

Zu Beginn der **zweiten 1,5 Stunden-Einheit** wurden dann im Plenum verschiedene Lösungsansätze aus den Gruppen vorgestellt und diskutiert. Dadurch wurde sichergestellt, dass im Anschluss an diese Phase alle Gruppen einen konkreten Lösungsansatz vor Augen, sich mit der Durchführung ihres Lösungsplans und der Ausarbeitung ihrer Lösung beschäftigen konnten. Die **zweite und die dritte Einheit** diente dann zur Durchführung des Lösungsplans und zur Ausarbeitung und Vorbereitung einer Präsentation in der vierten Einheit. Offenbar war die Aufgabe für viele Gruppen so motivierend, dass sie sich noch in ihrer Freizeit vom ersten auf den zweiten Tag mit ihr beschäftigt haben.

In der **vierten und letzten Einheit** wurden die Gruppen-Ergebnisse präsentiert. Die inhaltliche Auseinandersetzung wurde mit einem Kurzvortrag zur mathematischen Vertiefung der Modellierungsaufgabe durch einen der Betreuer abgeschlossen. Schließlich wurde das Unterrichtsexperiment durch die Studierenden evaluiert. Das Besondere dieser Evaluation bestand darin, dass sie explizit Aspekte des inneren Erlebens ausgewertet hat. So hat der Evaluationsbogen neben fachlichen Aspekten wie beispielsweise „Ich habe Mathematik gelernt“ und „Ich habe etwas über Mathematik gelernt“ auch Aspekte wie „Ich habe etwas über mich gelernt“, „Ich habe mich wohlgefühlt“, „Ich war motiviert“ und „Ich stelle gerne Fragen“ berücksichtigt.

Viele Teilnehmer haben sich am ersten Tag bisweilen sehr unwohl und durch die aus ihrer Sicht fehlenden Vorgaben und Hinweise zur Aufgabenlösung sowie durch die sehr zurückhaltende Gesprächsführung der Betreuer sehr verunsichert gefühlt. Trotzdem sind die meisten Teilnehmer zu einer positiven Gesamteinschätzung gelangt: Sie haben am Ende gesehen, dass sie trotz vorangegangener Schwierigkeiten zu einem individuell angemessenen Ergebnis gelangt sind und haben das als eine sehr positive Selbstwirksamkeitserfahrung überrascht zur Kenntnis genommen. Auch das Bild von Mathematik hat sich für viele Teilnehmer verändert. Für viele war es überraschend zu sehen, dass Mathematik nicht nur ein starres Gefüge fester Regeln über abstrakte Gegenstände ist, sondern dass sie in vielen Bereichen ihre eigentliche Stärke aus einer schlagkräftigen Verbindung stringenter Beweis- und Argumentationstechniken mit numerisch experimentellen Ansätzen gewinnt.

Der positive Verlauf dieses Experiments bestärkt uns in der Annahme, dass Aufgaben zum mathematischen Modellieren auch in einer erweiterten Perspektive nicht nur für das Lernen von Mathematik, sondern, fachübergreifend, für das Lernen in allen Fächern nutzbar sind. Gerade weil Modellierungsaufgaben in hohem Maße binnendifferenzierend angelegt sein und Lösungswege auf verschiedenem mathematischem Bearbeitungsniveaus bearbeitet werden können, eignen sie sich in besonderer Weise dafür, Studierenden im Sinne einer Selbsterfahrung mit fächerübergreifenden, typischen Aspekten wissenschaftlichen Arbeitens, Forschens und nicht zuletzt Lernens zu konfrontieren.

In diesem Sinn wollen wir ein fächerübergreifendes Konzept zur Gestaltung von Modellierungsaufgaben und, umfassender, Bausteine einer Didaktik der Interdisziplinarität vorstellen. Darunter verstehen wir eine Didaktik, die Studierende schon in der Studieneingangsphase eines MINT-Studiums frühzeitig auf das interdisziplinäre Lernen und Forschen vorbereitet. In enger Orientierung an und Auseinandersetzung mit fachdidaktischen Aspekten mathematischen Modellierens (Greefrath et al. 2013), wissenschaftstheoretischen Überlegungen zur Interdisziplinarität (Balsiger 2005) sowie wissenschaftsdidaktischer (Hentig 2003) und nicht zuletzt wissenschaftspsychologischer Ansätze (Maslow 2010), verbindet unser Konzept die konkrete mathematische Arbeit an Modellierungsaufgaben mit Reflexionsaufgaben, mit denen disziplinübergreifende Aspekte wissenschaftlicher Arbeitens und Forschens thematisiert und eingeübt werden können. In unserem Ansatz geht es somit darum, diese Fähigkeiten nicht nur en passant bei der Arbeit an fachlichen Inhalten mitzuvermitteln, sondern explizit als methodisches Denken und Handeln lernbar zu machen.

## Literatur


Balsiger, Ph. (2005). Transdisziplinarität. München: Wilhelm Fink.

Bracke, M. und Humenberger, H. (2012). Steigerung der Effizienz einer Kläranlage - eine erprobte Modellierungsaufgabe. Mathematische Semesterberichte, Springer Verlag. 59, (2), 261-288.

Greefrath, G. et al. (2013). Mathematisches Modellieren – eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri et al. (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule.* S. 11 – 38. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hentig, H. von (2003). *Wissenschaft: Eine Kritik.* Weinheim und Basel: Beltz.

Link, F. (2011). Problemlöseprozesse selbständigkeitsorientiert begleiten. Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Maslow, A. (2010). Motivation und Persönlichkeit. 10. Auflage. Reinbek: Rowohlt.

Nicolaisen, T.(2012). Lerncoaching-Praxis. Weinheim: Beltz Juventa.

Silvia SCHÖNEBURG, Leipzig, Karin RICHTER, Halle

# Von Scheiben und Körpern – Entwicklung und Vertiefung von Vorstellungen zu geometrischen Körpern vermittels geeigneter Schnitte

Räumliches Vorstellungsvermögen, d.h. die Fähigkeit, räumliche Zusammenhänge visuell zu erfassen und mit ihnen gedanklich agieren zu können, ist im Mathematikunterricht, insbesondere im Geometrieunterricht, und natürlich auch im Alltag wichtig und muss erlernt, trainiert und gefestigt werden. Geometrische Körper zu verstehen und mit ihnen angemessen operieren zu können setzt voraus, wesentliche ihrer Eigenschaften zu kennen oder erschließen zu können sowie mit ihnen entsprechend umzugehen. Die Idee, handgreifliche mathematische Modelle zu nutzen, um mit ihrer Hilfe insbesondere geometrisches Verständnis zu initiieren und zu unterstützen, zählt zu den bahnbrechenden mathematikdidaktischen Überlegungen von Felix Klein (1849 – 1925). In seiner programmatischen Antrittsrede an der Erlanger Universität von 1872 hob er den Stellenwert von Modellen als Anschauungsmittel hervor: *„Die Anschauung hat … nur den Werth der Veranschaulichung, der allerdings in pädagogischer Beziehung sehr hoch anzuschlagen ist. Ein geometrisches Modell z.B. ist auf diesem Standpunkte sehr lehrreich und interessant. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht … nur eine veranschaulichende Form abstracterer Untersuchungen sein will. In ihr gilt es die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen und die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell – mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein – ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke sondern die Sache selbst.“*(F. Klein, Erlanger Programm, 1872, Anmerkung 3) Insbesondere seinen Bestrebungen ist es zu verdanken, dass mathematische Modelle im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts zielgerichteten Einsatz im Mathematik- und insbesondere Geometrieunterricht aller Schul- und Ausbildungsformen fanden. Gemeinsam mit Alexander von Brill (1842-1935) entstanden unter Kleins Leitung im mathematischen Seminar der Königlich Technischen Universität in München eine Vielzahl von Modellen, die der Anschauung resp. der Veranschaulichung mathematischer und insbesondere geometrischer Zusammenhänge dienten.

Neben Kartonscheibenmodellen von Flächen zweiter Ordnung hielten in den sich im ausgehenden 19. Jahrhundert herausbildenden Modellsammlungen zu Unterrichtszwecken der Universitäten und Schulen auch weitere Kartonmodelle sowie Gipsmodelle, Fadenmodelle und bewegliche Draht-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1095–1098). Münster: WTM-Verlag

modelle Einzug. Wichtiges Anliegen bei der Entwicklung dieser Modelle war es, unterschiedliche mathematische Eigenschaften über geeignete Darstellungsweisen, gestützt durch das jeweils gewählte Material, besonders ins Blickfeld des Betrachters zu rücken.

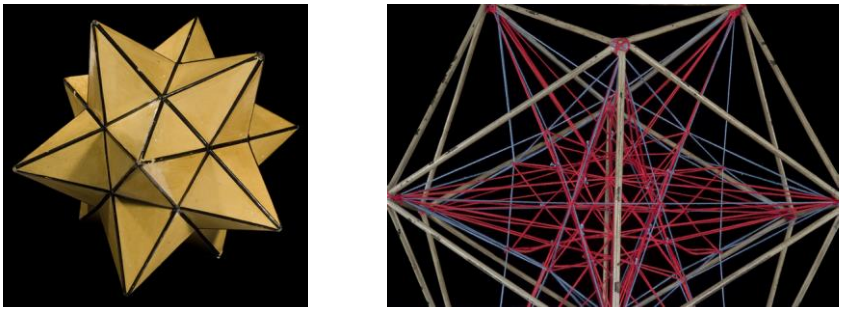


*Abb. 1: Vollmodell des kleinen Sterndodekaeders und Kantenmodell eines Ikosaeders mit einbeschriebenem Sterndodekaeder, Foto: N. Kaltwaßer (Halle)*

So visualisiert etwa ein Vollmodell den Körper an sich sowie Eigenschaften seiner Oberfläche. Im Beispiel des kleinen Sterndodekaeders (Abb. 1) verdeutlicht das Modell insbesondere die Zusammensetzung des Körpers aus 12 fünfeckigen Pyramiden, die auf den Seitenflächen eines regulären Dodekaeders stehen. Das Kantenmodell eines Ikosaeders mit eingezogenen Diagonal-Fäden lässt den umhüllten Sterndodekaeder mit seinen Sternspitzen in den Ikosaederecken erkennen.

Einen ganz anderen Blickwinkel auf Körper ermöglichen die Schnittflächenmodelle, die erstmals im Jahre 1874 für Flächen zweiter Ordnung veröffentlicht wurden. Die Visualisierung des jeweiligen Körpers erfolgt hier mittels zweier Scharen von Scheiben, die als Schnitte von Ebenen mit dem zu veranschaulichenden Körper entstehen. Jede der beiden Scharen besteht aus untereinander parallelen Scheiben; die beiden Scharen sind zueinander um einen Winkel $\leq 90°$ geneigt.

*Abb. 2: Dreiachsiges Ellipsoid aus 22 Kreisen; Foto: N. Kaltwaßer (Halle)*

Neben der Veranschaulichung der Körper über ihre Ebenenschnitte begründet sich ihre Besonderheit insbesondere auch darin, dass sich die zusammengesteckten Scheiben durch leichten Druck in einen anderen Neigungswinkel gegeneinander überführen lassen. *„...so erhält man kein starres, sondern ein bewegliches Gerüst, ... reicht die Beweglichkeit ... soweit, daß man das Modell in eine Ebene zusammenklappen kann.“* (D. Hilbert, St. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, S. 16 /17)

Der Wunsch, einen geometrischen Körper in seinen charakteristischen Eigenschaften umfassend zu erschließen, führt rasch und zentral bedeutsam zur Frage nach seinen Ebenenschnitten. Dies wird im heutigen Mathematikunterricht oft kaum mehr als nur marginal berücksichtigt. Schnittflächenmodelle, angewandt auf die typischen Körpergrundformen des Geometrieunterrichts der Schule wie beispielsweise Würfel, Pyramide, Zylinder und Kugel, ermöglichen einen im eigentlichen Sinne plastischen und zugleich motivierenden Zugang zu dieser Problematik. Die Zuwendung zu den einzelnen Körpern kann dabei auf ganz unterschiedliche Weise erfolgen. Exemplarisch seien im Folgenden zwei Vorgehensweisen bei der Auseinandersetzung mit den Schnittflächen und dem Erstellen eines Modells bei Kugel und quadratischer Pyramide vorgestellt.

### *Experimentelles Erkunden einer Kugel*

Ausgehend von der Kreis-Schnitteigenschaft der Kugel, die durch das gerade Zerschneiden einer Styropor- oder Knete-Kugel entdeckt werden kann, liegt es nahe, die gewonnene Schnittflächen-Einsicht nun in umgekehrter Richtung durch das Zusammenfügen von Kreisen geeigneter Größe zu prüfen. Bereits mit Hilfe von zwei großen und vier kleineren Kreisscheiben (als Vorlagen dafür können etwa die Kreise aus Abb. 3 genutzt werden) entsteht nach dem richtigen Zusammenstecken ein „roll-fähiges“ Gebilde, das durchaus an eine Kugel erinnert. Zur Verfeinerung der Kugel-Nachbildung sind weitere, nun enger bei einander liegende Kreisschnitte heranzuziehen, so dass das Modell Schritt für Schritt „runder“ wird. (Vgl. Abb. 2.)

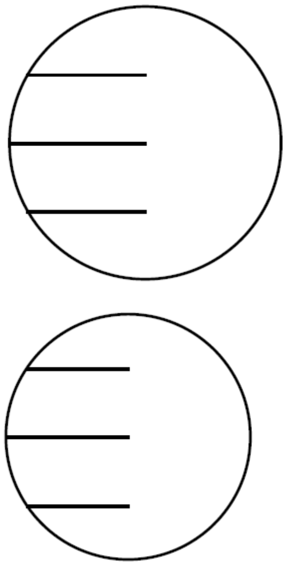
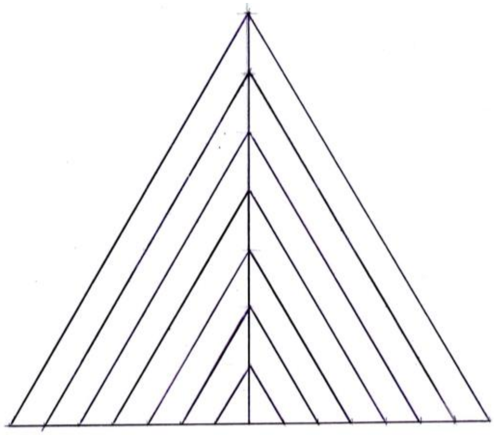


*Abb. 3: Vorlagen zu einer Steck-Kugel.*

Steht beim Kugel-Schnitt-Modell die Eigenschaft im Zentrum der Beobachtung, dass alle Körperschnitte Kreisscheiben sind, bieten andere Körper, wie etwa die quadratische Pyramide, vertiefende Entdeckungsmöglichkeiten hinsichtlich der auftretenden Schnittflächen.

### *Schnittflächen-Erkundung zur geraden quadratischen Pyramide*

Auch hier können eigene Erfahrungen zu Körperschnitten an einer geraden quadratischen Pyramide zunächst mit Hilfe von Modellen aus Blumensteckmasse gewonnen werden. Körperachsen parallele wie auch nichtparallele Schnitte bieten hier ein breites Erkundungsfeld. Nach einer ausführlichen Phase eigenen Experimentierens kann Schritt für Schritt an die eigene Erstellung eines Schnittflächenmodells vermittels achsenparalleler Schnitte herangeführt werden. Den Start bildet hierfür ein Schnitt durch eine Grundflächen-Diagonale und die Spitze der quadratischen Pyramide. Parallelschnitte zu dem so entstandenen gleichschenkligen „Start-Dreieck“ führen auf hierzu ähnliche Dreiecke. Diese Einsicht ermöglicht es Lernenden, anhand der nachfolgenden Abb. 4 das eigentliche Modell selbst zu entwickeln.



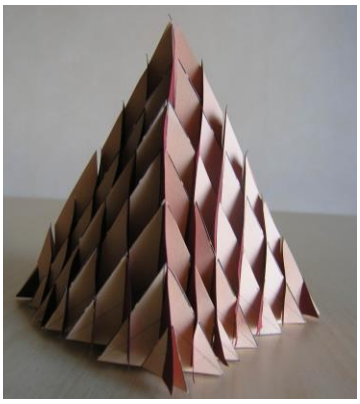


*Abb. 4: Steck-Pyramide (Bastelvorlage und Modell); Graphik und Foto: S. Schöneburg*

Bei der eigenen Erstellung einer Bastelanleitung zur Steck-Pyramide oder auch für die Steck-Kugel wird den Lernenden deutlich, wie anspruchsvoll und herausfordernd es ist, eine solche Anleitung inhaltlich korrekt und für andere nachvollziehbar zu verfassen. Neben dem mathematischen Aspekt steht hier die Kompetenz des Kommunizierens im Vordergrund.

Jedes dieser Modelle, sei es das Schnittflächenmodell der Kugel, der quadratischen Pyramide oder auch eines anderen geometrischen Körpers, lädt zu mathematischen Entdeckungen ein. Die Schwierigkeit der Umsetzung selbst ist variierbar: Je größer die Anzahl der verwendeten Schnittflächen, umso mehr Fingerfertigkeit ist gefragt. Je besser das Verständnis und damit einhergehend die Modellierung des vermittels seiner Schnitte darzustellenden Körpers ist, desto besser wird das entstehende Modell sein.

## Literatur

Hilbert, D.; Cohn-Vossen, St. (1996). Anschauliche Geometrie. Berlin u.a.: Springer.

Klein, F. (1974). Das Erlanger Programm. Eingeleitet von H. Wußing. Leipzig: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, 253.

Richter, K.; Schöneburg, S. (2011). Von Scheiben und Körpern. Entwicklung und Vertiefung von Vorstellungen zu geometrischen Körpern vermittels geeigneter Schnitte. In Richter, K.; Schöneburg, S. et al. (Hrsg.), *Mathematik für alle: Wege zum Öffnen von Mathematik – Mathematikdidaktische Ansätze* (S. 293–308). Hildesheim: Franzbecker.

Sebastian SCHORCHT, Gießen

# Mathematik mit historischem Hintergrund in Schulbüchern der Klassenstufen 1 bis 7 – Evaluation eines Aufgabentyps

Geschichte der Mathematik im Mathematikunterricht wird in den letzten 15 Jahren international intensiver beforscht. In Schulbüchern sind Aufgaben mit historischem Hintergrund jedoch bereits seit längerem vertreten. Die Praxis läuft so scheinbar der theoretischen Auseinandersetzung voraus. Überlegungen zum Umgang mit Mathematikgeschichte im Unterricht werden seit über 100 Jahren diskutiert (vgl. Schubring, 1978). Im Zuge der Auseinandersetzungen mit dem „Warum Mathematikgeschichte?“, stellt sich die Frage: Wie werden eigentlich didaktische Überlegungen zur Mathematikgeschichte im Schulbuch umgesetzt und wie kann mit solchen Aufgaben produktiv umgegangen werden?

In dem vorgestellten Dissertationsprojekt wurden 37 Schulbücher untersucht. Darin waren 145 Beispiele mit explizit mathematikhistorischem Hintergrund zu finden. Im Fokus der Untersuchung lagen auch die Ziele, die durch mathematikhistorische Exkurse verfolgt werden. Ein Ziel des Einsatzes von Mathematikgeschichte im Unterricht ist das Verständnis der Motive und Zwecke vergangenen mathematischen Handelns (vgl. Epple, 1999, S. 20-25). Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler vergangenes mathematisches Handeln verstehen, indem einflussnehmende innere und äußere Kräfte thematisiert werden (vgl. Jankvist, 2009, S. 22f). Die Motive und Zwecke, Grenzen und Möglichkeiten mathematischen Handelns können dabei offen diskutiert werden, um ein Orientierungswissen über ein Themengebiet anzubahnen (vgl. Radbruch, 1997; Mittelstraß 1982).

Folgt man diesen Überlegungen, so können Aufgaben mit mathematikhistorischem Hintergrund folgende Eigenschaften haben:

- Entweder sie präsentieren einfache *Informationen* (vgl. Reimann-Rothmeier/Mandl, 2002, S. 7-9);
- regen zum Schülerhandeln an – was im Folgenden als *Verfügungswissen* (vgl. Radbruch, 1997) verstanden wird – oder
- werfen Fragen auf, die ein *Orientierungswissen* (vgl. Radbruch, 1997) im oben genannten Sinne begünstigen.

In Lambacher Schweizer 5 (vgl. Jörgens u.a., 2009, S. 99) findet sich die im Folgenden abgebildete Aufgabe, die exemplarisch analysiert wird: Sie beginnt mit einem kurzen Einstieg in das Thema durch eine *historische Information*. Danach folgt eine mathematische Erklärung der abessinischen Bauernmultiplikation, die als *mathematische Information* klassifiziert wird.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1099–1102). Münster: WTM-Verlag

Das rechts abgebildete Musterbeispiel zeigt in einer Momentaufnahme, wie dieses Verfahren angewendet werden soll. Erst mit der abschließenden Aufgabenstellung: „Führe folgende Multiplikationen nach der abessinischen Bauernmethode durch und prüfe das Ergebnis mithilfe der schriftlichen Multiplikation. 16•15, 18•52, [...]“ (Jörgens u.a., 2009, S. 99), ist der Lernende zum Handeln und somit zur Anwendung des *Verfügungswissens* aufgefordert.

**Info**

**Andere Länder, andere Sitten**

Eine alte Geschichte erzählt von einem abessinischen Bauernvolk, das die schriftliche Multiplikation nicht kannte. Dennoch halfen sich die Leute auf eine recht merkwürdige Art.

Die abessinischen Bauernregeln (siehe Tabelle):

1. Der erste Faktor des zu berechnenden Produkts wird so oft halbiert, bis man auf 1 kommt. Tritt beim Halbieren von ungeraden Zahlen ein Rest auf, so lässt man diesen weg.
2. Der zweite Faktor wird so oft verdoppelt, wie der erste Faktor halbiert wurde.
3. Man streicht nun in der Tabelle die Zeilen weg, in denen der erste Faktor eine gerade Zahl ist.
4. Die Zahlen, die in der rechten Tabellenspalte übrig bleiben, werden zum Schluss addiert (oberste Zahl nicht vergessen!).
5. Die Summe ist das Ergebnis der Multiplikationsaufgabe.

| 80 | · 123 |
|---|---|
| ~~80~~ | ~~123~~ |
| ~~40~~ | ~~246~~ |
| ~~20~~ | ~~492~~ |
| ~~10~~ | ~~984~~ |
| 5 | 1968 |
| ~~2~~ | ~~3936~~ |
| 1 | 7872 |
| | 111 |
| | 9840 |

Führe folgende Multiplikationen nach der abessinischen Bauernmethode durch und prüfe das Ergebnis mithilfe der schriftlichen Multiplikation.

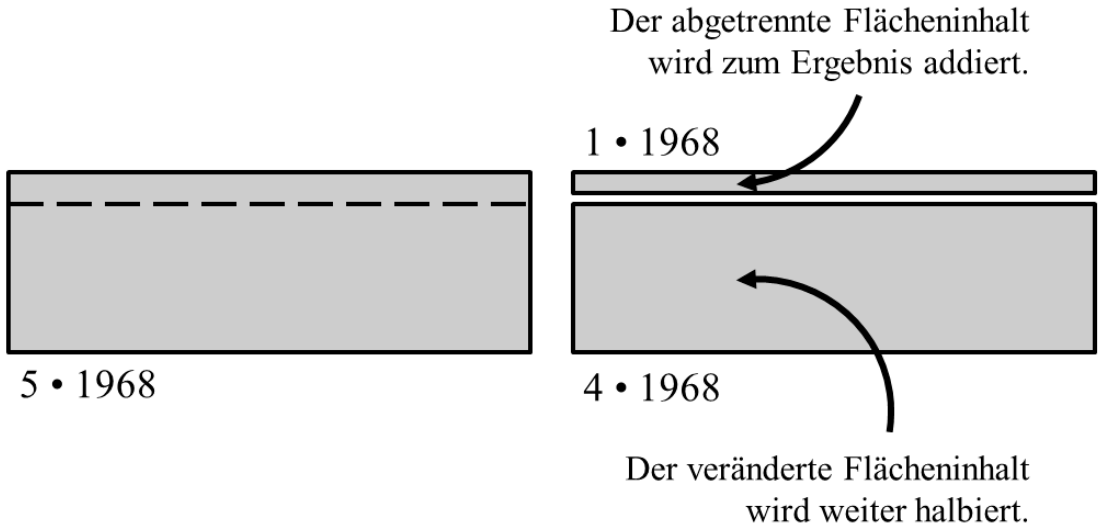
16 · 15, 18 · 52, 84 · 39, 128 · 7, 111 · 11, 298 · 24

**Aufgabe zur Multiplikation nach der abessinischen Bauernmethode Lambacher Schweizer 5, S. 99.**

Die Frage nach den Motiven und Zielen des Einsatzes dieser Methode zur Multiplikation stellt sich dem Lernenden in dieser Formulierung der Aufgabe nicht. Ebenfalls werden die inneren und äußeren Einflüsse auf die abessinische Bauernmethode nicht angesprochen. *Mathematisches* oder *mathematikhistorisches Orientierungswissen* wird mit dieser Aufgabe folglich vom Lernenden nicht gefordert.

In der gesamten Untersuchung der Schulbücher zeigte sich, dass nur 11 % aller Aufgaben mit historischem Hintergrund mathematisches Orientierungswissens anregen. Selbst die Frage nach den Motiven und Zwecken vergangenen mathematischen Handelns, die für die wissenschaftliche Disziplin paradigmatisch ist, taucht nur in 24 % der Aufgaben mit historischem Hintergrund auf. Dafür regen immerhin 67 % zum mathematischen Handeln an. Es liegt folglich Potential vor, um die entsprechenden Aufgaben reichhaltig zu erweitern. Wollte die geübte Lehrkraft mathematisches oder mathematikhistorisches Orientierungswissen von den Lernenden fordern, so kann sie die Aufgabe mit wenigen Zusätzen ergänzen. Im mathematikhistorischem Sinne: (1) „Wieso verwendete das abessinische Bauernvolk zur Multiplikation diese Methode?“ oder im mathematischen Sinne: (2) „Weshalb werden nur Zeilen mit ungeraden Zahlen addiert? Erkläre.“ oder (3) „Welche der Multiplikationsaufgaben passt besser zu welchem Verfahren? Sortiere.“

Die erste Aufgabenstellung (1) bedeutet selbst für Mathematikhistoriker eine Herausforderung, denn ob die abessinische Bauernmethode eine Abwandlung der Multiplikationsmethode der ägyptischen Hochkultur (siehe dazu Imhausen u.a., 2007) ist, bedarf aufwendiger Recherchearbeit. Ob dies von Lehrkräften realisierbar ist, muss jede und jeder Lehrende vor seinem eigenen Hintergrund beurteilen. Mathematikhistorisches Orientierungswissen bietet jedenfalls die Möglichkeit im Unterricht Einflüsse auf die Mathematik deutlich hervorzuheben. Beispielsweise der Einfluss mathematischer Darstellungen auf die Meinungsbildung oder die Abhängigkeit von Zahldarstellungen und Bündelungsvorstellungen.




**Mögliche Vorstellung zur abessinischen Bauernmethode an der entscheidenden Stelle 5 • 1968.**

Die zweite Aufgabenstellung (2), lässt sich dagegen sicherer beantworten. Elementarmathematisch betrachtet, kann die abessinische Bauernmethode als Fläche gedacht werden, so wird die „Breite“ – erster Faktor – halbiert, während die „Länge“ – zweiter Faktor – im gleichen Maße verdoppelt wird. Der Flächeninhalt bleibt bei dieser Methode gleich Mächtig, bis Breitenmaße auftauchen, die ganzzahlig nicht mehr zu halbieren sind. Es wird **eine** „Breite“ mit entsprechender „Länge“ entfernt, damit die „Breite“ wieder im gewohnten Verfahren halbiert werden kann. Diese fehlende Fläche muss am Ende zum Flächeninhalt des Ergebnisses addiert werden, damit das Ergebnis dem Flächeninhalt zu Beginn entspricht. Da die „Breite“ des abgetrennten Teils 1 ist, können die Faktoren der zweiten Zeile der abessinischen Bauernmethode einfach addiert werden, um den gesuchten Flächeninhalt zu erhalten.

Das Sortieren verschiedener Multiplikationsaufgaben in Aufgabenstellung (3) führt in einen Diskurs. Dieser ist sicherlich subjektiv geprägt und von Gewöhnung abhängig, denn ein geübter Anwender der schriftlichen Multiplikation wird diese auch bevorzugen. Letztendlich kann das Sortieren die Diskussion über Motive und Zwecke mathematischen Handelns entfachen.

Es zeigt sich, dass in Schulbüchern Aufgaben vertreten sind, die durch ihren mathematikhistorischen Bezug dazu dienen sollen, die kulturellen Aspekte der Mathematik einzubetten. Das Thematisieren der Motive und Zwecke mathematischen Handelns sowie der inneren und äußeren Einflüsse auf die Mathematik, die Gegenstand der Fachdisziplin sind, werden dabei nur marginal tangiert. Die Untersuchung zeigt, dass die Mehrheit der Aufgaben mit historischem Hintergrund kaum mathematisches oder mathematikhistorisches Orientierungswissen anbieten. Wertvolle Reflexionsanlässe bleiben so im Moment ungenutzt. Mit einfachen Zusatzfragen kann die reflektierte Lehrkraft die mathematische Orientierung ergänzen. Das mathematikhistorische Orientierungswissen dagegen stellt häufig eine Hürde dar, die unter anderem durch ein ausreichendes Studium der historischen Entwicklung der Mathematik kompensiert werden kann. Zudem können Schulbücher dann unterstützend wirken, wenn die Schulbuchautoren sich die Expertise der Mathematikgeschichte zu Nutze machen.

## Literatur


Jörgens, T., Jürgens-Engl, T., Riemer, W., Sonntag, R., Surrey, I. [Hrsg.] u.a. (2009): *Lambacher Schweizer 5: Mathematik für Gymnasien*. Nordrhein-Westfalen. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Epple, M. (1999). *Die Entstehung der Knotentheorie: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*. Braunschweig: Vieweg.

Imhausen, A. & Katz, V. J. [Hrsg.] u.a. (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam*. Princeton u.a.: Princeton Univ. Press.

Jankvist, U.T. (2009). *Using History as a 'Goal' in Mathematics Education: PhD Dissertation Roskilde University*. Roskilde: IMFUFA tekst.

Mittelstrass, J. (1982). *Wissenschaft als Lebensform: Reden über philosophische Orientierungen in Wissenschaft und Universität*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Radbruch, K. (1997). *Der philosophische Wille zur allgemeinen Mathematik* (Manuskript zum Vortrag an der TU Darmstadt). Darmstadt.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2002). Wissen. In G. Wenninger (Hrsg.), *Lexikon der Psychologie in 5 Bänden*, Bd. 5. Heidelberg & Berlin: Spektrum.

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Sven SCHÜLER, Bettina RÖSKEN-WINTER, Jochen WEIßENRIEDER, Sigrid BLÖMEKE, Berlin

# Wirkungsanalyse zu den Gestaltungsprinzipien von Multiplikatoren-Fortbildungen des DZLM

Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) setzt in seinen Fortbildungsangeboten den Fokus auf die kontinuierliche, professionelle Entwicklung von Multiplikatoren und Multiplikatorinnen (MuM). Aus der Forschungsperspektive des DZLM liegt das erhebliche Potenzial in der Arbeit mit MuM in deren mehrdimensionaler Rollen- und Aufgabenstruktur begründet. Auf der einen Seite verfügen die MuM über reichhaltige Erfahrungen und Expertise zu Unterrichtsprozessen aus der eigenen Lehrtätigkeit. Auf der anderen Seite arbeiten sie in erwachsenendidaktischen Wirkungsfeldern und eröffnen einen unmittelbaren Zugang zur Kompetenzentwicklung von Lehrerinnen und Lehrern. Vor diesem Hintergrund fokussiert dieser Beitrag die folgenden Fragen: Welche Kompetenzentwicklung lässt sich aus Sicht der MuM nach Teilnahme an einer Qualifizierung feststellen? Inwieweit beziehen sich praktisch arbeitende MuM in ihren Vorstellungen zur Fortbildungsgestaltung auf die theoretisch fundierten DZLM-Prinzipien?

## Theoretische Einbindung

Die Wirkung von Professionalisierungsangeboten wird durch ein breites Spektrum von Einflussfaktoren bedingt (Desimone, 2011; Lipowsky & Rzejak, 2012). In Anlehnung an Ergebnisse der empirischen Bildungsforschung, der Lehr-Lernforschung und der Forschung zur Professionalisierung von Lehrenden gliedert sich der theoretische Rahmen des DZLM in drei Dimensionen, welche die Basis für die Fortbildungsgestaltung und –forschung bilden. Die Kompetenzfacetten *(inhaltliche Dimension)* basieren auf den Standards der Lehrerausbildung der Kultusministerkonferenz und zentralen Erkenntnissen der empirischen Bildungsforschung (Blömeke, Suhl & Kaiser, 2011; Baumert et al., 2010) und umfassen neben Professionswissen, Überzeugungen und technischen Fähigkeiten auch Aspekte der Fortbildungsdidaktik. Auf der Design-Ebene *(methodische Dimension)* formuliert das DZLM ausgehend von einer Synopse relevanter Forschungsliteratur (Timperley et al., 2007; Desimone, 2011; Lipowsky & Rzejak, 2012) sechs Gestaltungsprinzipien (Kompetenzorientierung, Teilnehmerorientierung, Kooperationsanregung, Methodenvielfalt, Fallbezogenheit, Reflexionsförderung), die eine wirksame Gestaltung von Fortbildungsangeboten bewirken. Die dritte Säule im theoretischen Konzept der Fortbil-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1103–1106). Münster: WTM-Verlag

dungsforschung des DZLM bildet eine aus mehreren Ebenen bestehende Wirkungskette *(strukturelle Dimension),* die ausgehend von Fortbildungsangeboten für MuM Wirkungszusammenhänge über Lehrende bis hin zur Ebene der Kompetenzentwicklung von Schülerinnen und Schülern beschreibt.

## Forschungsfragen

Auf der Basis des theoretischen Rahmens des DZLM analysieren wir exemplarisch die Kompetenzentwicklung von MuM nach der Teilnahme an einer einjährigen DZLM-Qualifizierungsmaßnahme und zeigen Zusammenhänge zwischen den theoretischen Gestaltungsprinzipien des DZLM, und ihren Vorstellungen zur Gestaltung eigener Fortbildungen auf. Die Studie wird von folgenden Forschungsfragen geleitet: (1) Wie entwickeln sich die selbsteingeschätzten Kompetenzen der MuM entlang der Kompetenzfacetten? (2) Welche Relevanz messen die MuM den DZLM-Gestaltungsprinzipien in Bezug auf die Wirkung von Fortbildungen bei? (3) Inwieweit sind die DZLM-Gestaltungsprinzipien in den Vorstellungen der MuM für die eigene Fortbildungstätigkeit relevant?

## Methodologie

Die Datenerhebung wurde ein halbes Jahr nach Abschluss der Qualifizierungsmaßnahme durchgeführt. Teilgenommen haben 12 MuM aus NRW, die über durchschnittlich 20 Jahre Erfahrung und Expertise in der Lehr- und Fortbildungspraxis verfügen. In der Maßnahme alternierten Präsenz- und Distanzphasen (Sandwich-Prinzip), sodass sich theoretische und praxisbasierte Fortbildungselemente miteinander verschränkt haben. Zur Datenerfassung wurde ein Fragebogen mit 70 Items zu Kompetenzfacetten, Gestaltungsprinzipien und Wirkungseffekten als retrospektiver Selbsttest in Bezug auf die Zeitpunkte *vor*, *direkt nach* und *sechs Monate nach* der Qualifizierungsmaßnahme eingesetzt. Trotz bekannter Probleme von Selbstauskünften weist das retrospektive Verfahren eine vergleichsweise hohe Validität auf (siehe z.B. Lam & Bengo, 2003). Es wurden ergänzend qualitative Interviews durchgeführt. In Anlehnung an Methoden der qualitativen Inhaltsanalyse wurde ein Kategoriensystem entwickelt, das deduktiv Rückgriff nimmt auf den DZLM-Theorierahmen und induktiv eine Ausdifferenzierung der Kategorien ermöglicht (siehe Abb. 1). Dazu wurden die DZLM-Gestaltungsprinzipien in Unterkategorien differenziert, anhand zusätzlicher Aspekte aus den qualitativen Antworten der MuM illustriert und über Ankerbeispiele aus den Fragebögen und Interviews repräsentativ abgebildet (Abb.1).

| Kategorien | Unterkategorien | Kategorien | Unterkategorien |
|---|---|---|---|
| Kompetenz-orientierung (K1) | Kompetenzerwerb (K1.1) | Fallbezogen-heit (K4) | Integration von Alltagsbeispielen aus Unterricht / Fortbildung (K4.1) |
| | Kompetenzentwicklung (K1.2) | | Praxiserfahrung (K4.2) |
| | | | Integration von Material der Teilnehmenden (K4.3) |
| Teilnehmer-orientierung (K2) | Bedarfsorientierung(K2.1) | Methoden-vielfalt (K5) | Kontext- und methodenreiche Kompetenzaneignung (K5.1) |
| | Individuelle Voraussetzungen (K2.2) | | Vielseitig gestaltete Angebot (K5.2) |
| | Partizipative Gestaltung (K2.3) | | Vernetzende methodische Strukturen fördern (K5.3) |
| Kooperations-anregung (K3 | Gemeinsame Arbeit an Problemstellungen (K3.1) | Reflexions-förderung (K6) | Reflexions- und Selbstreflexionsanregung (K6.1) |
| | Nachhaltige Kooperation (K3.2) | | Lehr-Lernprozesse verstehen (K6.2) |
| | Kooperation als Unterstützung (K3.3) | | Reflexionsmethodik (K6.3) |

| Kategorie | Unterkategorie | Beschrei-bung | Ankerbeispiel |
|---|---|---|---|
| Kompetenzorien-tierung (K1) | Kompetenz-erwerb (K1.1) | (...) | *„Wichtig ist, die Teilnehmenden fachlich, didaktisch und methodisch kompetent und handlungsfähig machen und über neue Methoden und aktuelle Forschungsentwicklung informieren“* |
| | Kompetenz-entwicklung (K1.2) | (...) | *„Kompetenzaufbau bei den Teilnehmern einer Fortbildung ist ein langfristiger Prozess, der über eine Prozessbegleitung, um mit Schwierigkeiten auch über eine längere Praxisphase hinweg umzugehen, gelingt“* |

**Abbildung 1 –Kategoriensystem für die Analyse der Einschätzungen der MuM.**

## Ausgewählte Ergebnisse, Diskussion und Ausblick

*Forschungsfrage 1.* In allen sieben Kompetenzaspekten zeigt sich eine Verbesserung in der Selbsteinschätzung der MuM von *vor der Qualifizierung* bis *sechs Monate danach* (Tab. 2). Die Effektstärken der Veränderungen fallen mit jeweils rund einer Standardabweichung außerordentlich hoch aus, was als starker Indikator für die Wirksamkeit des DZLM-Angebots gedeutet werden kann. Im Zeitraum von *direkt nach* bis *sechs Monate danach* unterliegt die Kompetenzeinschätzung nur geringen Veränderungen, was zudem als starker Indikator für die Nachhaltigkeit des Angebots gedeutet werden kann. *Forschungsfrage 2.* Die Gestaltungprinzipien sind für die MuM hinsichtlich der Wirkung von Fortbildungen unterschiedlich relevant. Auf einer Skala von 1 – sehr relevant – bis 6 – weniger relevant – weisen die MuM den DZLM-Gestaltungsprinzipien durchschnittlich die folgenden Werte zu: Teilnehmerorientierung 1,6; Kompetenzorientierung 2,0; Kooperationsanregung 2,0; Reflexionsförderung 3,6; Fallbezogenheit 4,1; Methodenvielfalt 4,4. *Forschungsfrage 3.* In den Vorstellungen der Multiplikatoren sind Rückgriffe auf alle sechs Gestaltungsprinzipien vorhanden; Kompetenzorientierung und Fallbezogenheit sind dabei häufiger vertreten als die anderen Gestaltungsprinzipien. Unsere qualitativen Analysen zeigen weiter, dass die Vorstellungen der MuM implizit durch die Erfahrungen mit den DZLM-Gestaltungsprinzipien beeinflusst werden.

**Tabelle 2: Retrospektive Einschätzung der Kompetenzentwicklung der MuM.**

| Kompetenzfacetten | Before the CPD course | Directly after the CPD course | Six months after the CPD course |
|---|---|---|---|
| Mathematisches Inhaltswissen | 4.0 (1.25) | 5.1 (0.74) | 4.7 (0.67) |
| Prozessbezogene mathematische Fähigkeiten | 3.6 (1.51) | 4.6 (1.07) | 4.8 (0.92) |
| Fachdidaktisches Wissen | 4.1 (1.2) | 5.0 (0.82) | 5.1 (0.74) |
| Prozessbezogene fachdidaktische Föhigkeiten | 3.4 (1.07) | 4.6 (0.97) | 4.7 (0.97) |
| Erwachsenendidaktisches Wissen | 3.9 (1.1) | 4.4 (0.84) | 4.5 (0.71) |
| Prozessbezogene erwachsenendidaktische Fähigkeiten | 3.9 (0.88) | 4.4 (0.97) | 4.5 (0.71) |
| Technische Fertigkeiten | 3.1 (0.88) | 4.3 (0.67) | 4.2 (0.92) |

Exemplarisch sei dazu auf folgende Äußerung verwiesen: *„Einen Aspekt finde ich super wichtig, den ich vorher so nicht beachtet habe, die prozessbegleitende Reflektion der Teilnehmer, dass die sozusagen reflektieren, was sie in der Fortbildung gemacht haben, was in dem Sandwichprinzip auch drin ist... ich denke das Schlüsselwort im strukturellen Design von Fortbildungen ist die Prozessbegleitung“.* Für vertiefende Forschung zeigen unsere Resultate, dass die Vorstellungen von MuM zu den Gestaltungsprinzipien von effektiven Fortbildungen sind nur bedingt deckungsgleich mit denen, die sich aus der Theorie deduktiv ableiten. Das theoretische Verständnis der DZLM-Gestaltungsprinzipien in der praktischen Arbeit der MuM unterliegt Modifikationen, die einer differenzierteren Betrachtung bedürfen.

## Literatur


Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133–180.

Blömeke, S., Suhl, U. & Kaiser, G. (2011). Teacher education effectiveness: Quality and equity of future primary teachers’ mathematics and mathematics pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education, 62* (2), 154-171.

Lam, T. C. M. & Bengo, P. (2003). A Comparison of Three Retrospective Self-reporting Methods of Measuring Change in Instructional Practice. *American Journal of Evaluation, 24,* 65-80.

Desimone, L. M. (2011). Improving impact studies of teachers’ professional development: toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher, 38*(3), 81–199.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen effektiver Lehrerfortbildungen. *Schulpädagogik heute, 5*(3), 1-17.

Timperley, H., Wilson, A., Barrar, H., and Fung, I. (2007). *Teacher professional learning and development. Best Evidence Synthesis Iteration*. Wellington, New Zealand: Ministry of Education.

Stephanie SCHULER, Dagmar BÖNIG, Anne LEVIN, Katja MEYER-SIEVER, Bernadette THÖNE, Gerald WITTMANN, Bremen/Freiburg

# Computergestützte Erfassung der professionellen Kompetenz von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen

## 1. Erfassung der professionellen Kompetenz

In den letzten Jahren wurde das Konstrukt der professionellen Kompetenz von Lehrpersonen zunehmend ausdifferenziert (Baumert & Kunter, 2006) und es wurde versucht, dieses empirisch bei verschiedenen Zielgruppen zu erfassen (Kunter et al., 2011; Blömeke et al., 2010). Grund für das Forschungsinteresse ist der Einfluss der professionellen Kompetenz auf die Unterrichtsqualität und auf die Leistungen der SchülerInnen (vgl. zum Einfluss des Professionswissens z.B. Hill, Rowan & Ball, 2004; Kunter et al., 2011; vgl. zum Einfluss der Überzeugungen z.B. Staub & Stern, 2002). Die Erfassung der professionellen Kompetenz muss einerseits domänenspezifisch und andererseits zielgruppenspezifisch erfolgen und erfordert daher jeweils eigene Instrumente. Weiter muss das Verhältnis von Wissen und Handeln, das durch Überzeugungen moderiert wird, berücksichtigt werden. Verschiedene Formen der handlungsnahen Erfassung von Wissen versuchen, der Komplexität der beruflichen Anforderungen von Lehrpersonen gerecht zu werden: So gelten Videovignetten als Mittel der Wahl, wobei zusätzlich Spontanität (durch eine Begrenzung der Bearbeitungszeit) und Unmittelbarkeit (durch eine Adressierung der Antworten an die SchülerInnen) simuliert werden können (Lindmeier, 2013).

## 2. Der Projektkontext

Das Verbundprojekt *AnschlussM* der Universität Bremen und der Pädagogischen Hochschule Freiburg (www.anschluss-m.de) zielt auf elementarmathematische und mathematikdidaktische Teilaspekte der professionellen Kompetenz von GrundschullehrerInnen und ErzieherInnen, die für das Mathematiklernen am Ende der Kindergarten- und am Beginn der Schulzeit und damit für den Übergang relevant sind. Dem liegt die Annahme zugrunde, dass die professionelle Kompetenz beider Berufsgruppen wesentlichen Einfluss auf die Gestaltung des Übergangs zwischen Kindergarten und Grundschule hat. Der Fokus liegt einerseits auf Überzeugungen in Bezug auf das Lehren und Lernen von Mathematik in Kindergarten und Grundschule und andererseits auf dem elementarmathematischen und mathematikdidaktischen Professionswissen. Sowohl die Überzeugungen als auch das Professionswissen wurden in drei aufeinanderfolgenden Teilstudien durch jeweils spezifische Instrumente erhoben (s. Abb. 1).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1107–1110). Münster: WTM-Verlag

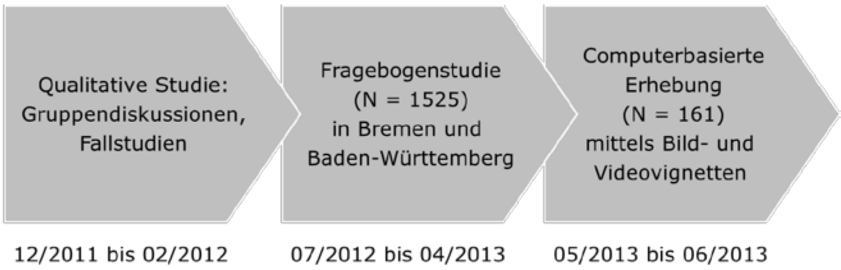



Abbildung 1: Teilstudien des Projekts *AnschlussM*

## 3. Computergestützte Erhebung

Im Rahmen der dritten Teilstudie sollten unter anderem die folgenden Forschungsfragen beantwortet werden:

- Unterscheiden sich ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen hinsichtlich ihres mathematikdidaktischen Wissens bzw. ihrer mathematikdidaktischen Kompetenz?
- Unterscheiden sich GrundschullehrerInnen mit bzw. ohne Mathematikstudium hinsichtlich ihres mathematikdidaktischen Wissens bzw. ihrer mathematikdidaktischen Kompetenz?

Das computergestützte Instrument umfasst sechs Bild- und vier Videovignetten zu mathematischen Lehr-Lern-Situationen mit Kindern im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule. Die Erstellung der Vignetten erfolgte unter Berücksichtigung sowohl der inhaltsbezogenen Leitideen als auch der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards für die Primarstufe im Fach Mathematik (KMK, 2005). Auf diese Weise werden nur diejenigen Aspekte des mathematikdidaktischen Wissens erfasst, die sich speziell auf das Mathematiklernen im Übergang beziehen und folglich für eine Begleitung mathematischer Lernprozesse zwischen Kindergarten und Grundschule als notwendig erachtet werden. Anhand von offenen Fragen zu diesen zehn Vignetten sollten die LehrerInnen und ErzieherInnen unter anderem (1) Situationen aus dem Kindergarten- bzw. Grundschulalltag hinsichtlich ihres Potenzials für das mathematische Lernen der Kinder einschätzen und (2) mögliche Impulse für das Aufgreifen und Vertiefen dieser Erfahrungen beschreiben. Die Untersuchung wurde am Computer durchgeführt. Die Antworten wurden bezüglich mehrerer Dimensionen von jeweils zwei Ratern zunächst unabhängig voneinander und anschließend konsensual kodiert.

## 4. Ausgewählte Ergebnisse und Diskussion

Im Folgenden wird nur auf eine Teilstichprobe (n = 123) der computergestützten Erhebung Bezug genommen, weil für diese bekannt ist, ob die beteiligten GrundschullehrerInnen Mathematik als Fach studiert haben oder nicht. Die Beantwortung der Forschungsfragen erfolgt auf der Grundlage univariater Varianzanalysen, die als unabhängige Variable die Profession (ErzieherInnen vs. GrundschullehrerInnen mit Mathematikstudium vs. GrundschullehrerInnen ohne Mathematikstudium) berücksichtigen.

Sowohl im Hinblick auf (1) das Erkennen des mathematischen Potenzials als auch (2) die Qualität der vorgeschlagenen Intervention zeigen sich signifikante Unterschiede zwischen den Professionen (s. Abb. 2): GrundschullehrerInnen mit Mathematikstudium erkennen das mathematische Potential einer vorgegebenen Situation besser als GrundschullehrerInnen ohne Mathematikstudium oder ErzieherInnen ($F=8.65$, $p<.001$, $\eta^2=.13$, großer Effekt). Dasselbe gilt für die Qualität der vorgeschlagenen Interventionen ($F=19.69$, $p<.001$, $\eta^2=.25$, sehr großer Effekt).

| **AV** | **UV** | ***n*** | ***M*** | ***SD*** | ***F*** | ***Sig.*** | ***η²*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Erkennen des mathematischen Potentials | ErzieherInnen | 82 | .79 | .45 | 8.65 | .00 | .13*** |
| | LehrerInnen fachfremd | 20 | .82 | .55 | | | |
| | LehrerInnen mit Math.studium | 21 | 1.23 | .55 | | | |
| Aufgreifen und Vertiefen der Aktivitäten von Kindern | ErzieherInnen | 82 | .57 | .37 | 19.69 | .00 | .25** |
| | LehrerIinnen fachfremd | 20 | .58 | .42 | | | |
| | LehrerInnen mit Math.studium | 21 | 1.15 | .49 | | | |

Abbildung 2: Unterschiede zwischen den drei Gruppen

Vergleicht man GrundschullehrerInnen mit und ohne Mathematikstudium, bleiben die Unterschiede mit fast identischen Effektstärken erhalten, wohingegen sich GrundschullehrerInnen ohne Mathematikstudium und ErzieherInnen nicht signifikant unterscheiden. So zeigen sich im Post-hoc-Test nach Scheffé in beiden Fällen 2 Gruppen: GrundschullehrerInnen mit Mathematikstudium vs. GrundschullehrerInnen ohne Mathematikstudium und ErzieherInnen.

Interessant an diesen Befunden ist, dass GrundschullehrerInnen ohne fachspezifische Ausbildung im computergestützten Instrument, das elementarmathematisches und mathematikdidaktisches Wissen handlungsnah und zielgruppenspezifisch erfasst, auf einem ähnlichen Niveau wie ErzieherInnen antworten. Darüber hinaus gibt es in allen drei Gruppen nur wenige

Personen, die auf einem substanziellen Niveau Aussagen zum mathematischen Potential einer Situation oder zu möglichen Interventionen machen. Diese Befunde bestätigen andere Studien. In TEDS-M beispielsweise zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen *angehenden* GrundschullehrerInnen mit und ohne fachspezifischem Studium in Bezug sowohl auf das mathematische als auch das mathematikdidaktische Wissen (vgl. Blömeke et al., 2010, S. 32). Es ergibt sich somit ein ähnliches Bild wie in der vorgestellten computergestützten Erhebung, bei der handlungsnahes, auf den Übergang bezogenes elementarmathematisches und mathematikdidaktisches Wissen bei *im Beruf stehenden* LehrerInnen erfasst wurde. Offen bleiben muss allerdings, woher diese Differenzen stammen, da das Mathematikstudium im Rahmen der Erhebung ein Oberflächenmerkmal ist. So könnten beispielsweise das Studium oder das Referendariat, die unterschiedlich häufige Teilnahme an mathematikbezogenen Fort- und Weiterbildungen, ein unterschiedlicher Unterrichtseinsatz im Fach Mathematik oder eine Selbstselektion bei der Fächerwahl ursächlich sein.

## Literatur


Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 4, 469–520.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010). *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Hill, H. C., Rowan, B. R. & Ball, D. L. (2004). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371–406

[KMK] – Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München, Neuwied: Wolters Kluwer Deutschland.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Lindmeier, A. (2013). Video-vignettenbasierte standardisierte Erhebung von Lehrerkognitionen. In U. Riegel & K. Macha (Hrsg.), *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (S. 45–62). Münster: Waxmann.

Staub, F. C. & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 344–355.



Das diesem Beitrag zugrundeliegende Verbundprojekt wird mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung und des Europäischen Sozialfonds der Europäischen Union unter den Förderkennzeichen 01NV1025/1026 (Universität Bremen) und 01NV1027/1028 (Pädagogische Hochschule Freiburg) gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

Thomas SCHULTIS, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Freiburg

# Wirksamkeit einer Fortbildung zum produktiven Üben im Mathematikunterricht

## Einleitung und Theoretischer Hintergrund

Üben ist ein wichtiges Element von (Mathematik-)Unterricht; wobei insbesondere das produktive Üben eine Form darstellt, die viel Differenzierungspotential bietet (vgl. Winter, 1984). Lehrkräfte sollten in der Lage sein, zugehörige Formate von Übungsaufgaben zu erkennen und nach lerntheoretischen Prinzipien auszuwählen. „This knowledge cannot be picked up incidentally […]. One of the next great challenges for teacher research will be to determine how this knowledge can best be conveyed to both preservice and inservice teachers.“ (Baumert, 2010, S. 168).

In diesem Sinne soll die Konzeption einer Fortbildung, die das Aneignen bzw. Fördern fachdidaktischen Wissens bei LehrerInnen nachhaltig unterstützt, im Detail empirisch untersucht werden, und zwar auf drei Ebenen (vgl. Lipowsky, 2011): (1) Kompetenzzuwachs der Lehrpersonen bezogen auf den Fortbildungsinhalt, (2) Aufgabeneinsatz im eigenen Unterricht und (3) Kompetenzzuwachs von SchülerInnen.

In der Untersuchung werden verschiedene Bedingungen des Erwerbs von theoretischem und Handlungswissen, das die Identifikation unterschiedlicher Aufgabentypen ermöglicht, systematisch variiert.

Neben dem fachdidaktischen Wissen in Hinblick auf Aufgaben werden in der Studie auch moderierende Elemente wie Einstellungen erfasst, da „neben den ‚Merkmalen der Fortbildung' […] auch individuelle Voraussetzungen auf Seiten der Lehrpersonen eine wichtige Erklärungskraft [haben], die bislang selten umfassend kontrolliert und auf ihre Interaktionen mit Fortbildungsmerkmalen untersucht wurden.“ (Lipowsky, 2010, S. 64f)

Neben diesen Beiträgen zur Grundlagenforschung soll auch die Wirksamkeit der gesamten Intervention ins Auge gefasst werden. Die Fortbildung wird nach Erkenntnissen der aktuellen Forschung konzipiert: So führen Lipowsky (2011), Yoon et al. (2008) und Zehetmeier (2009) unterstützende Faktoren zur Wirkung von Fortbildungen auf: u.a. Periodizität, Reflektion, Interaktion und Themenspezifizität. Diese sind fester Bestandteil der vorgesehenen Fortbildungskonzeption.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1111–1114). Münster: WTM-Verlag

## Studie und methodisches Vorgehen

In der hier berichteten Vorstudie wird das Messinstrument validiert und pilotierend untersucht, ob aufgrund der Fortbildung ein Kompetenzzuwachs bei der Typisierung von Aufgaben messbar ist. Die dabei durchgeführte Intervention (Fortbildung) hat das Ziel, das Potential von Übungsaufgaben hinsichtlich ihrer Differenzierungsmöglichkeiten erkennen zu können.

Die Messung erfolgt in einem Kontrollgruppendesign. Die Untersuchung gliedert sich in zwei Experimentalgruppen, die sich nur in einem Aspekt der Fortbildungskonzeption unterscheiden: Die erste Gruppe lernt eine Vielzahl an Variationen von Übungsaufgaben *nachvollziehend* an prototypischen Beispielen und Gegenbeispielen kennen. Die zweite Gruppe erstellt selbst Übungsaufgaben und lernt somit *aktiv-konstruierend* (vgl. Übersicht bei Renkl, 2008, S. 121ff). Dabei erhalten beide Gruppen ein identisches Kriterienraster, das verschiedene Aufgabentypen klassifiziert.

Die (Warte-)Kontrollgruppe erhält nach der Intervention einen Mix aus den Fortbildungsschwerpunkten der beiden Experimentalgruppen. Die Zuweisung der Testpersonen zu einer der drei Gruppen erfolgt randomisiert.

In einem Pre-Post-Test-Design wird vor und nach der Intervention (in Form der Fortbildung) das fachdidaktische Wissen in der Dimension *Aufgaben selegieren* als abhängige Variable erhoben. Dies erfolgt durch einen von drei Experten klassifizierten, 50 Aufgaben umfassenden Aufgabenpool. Diese Aufgaben müssen die Testpersonen in zwei Kategorien einordnen: sie entscheiden zum einen, ob eine Aufgabe *produktiv* oder *nicht produktiv* ist – zum anderen, ob eine Aufgabe *prozedurales* oder *konzeptuelles Wissen* erfordert (vgl. Rittle-Johnson et al., 2001). In jeder Kategorie wird die Abweichung von der Experteneinordnung gemessen. Zusätzlich werden bei einigen Aufgaben die Begründungen für die getroffene Entscheidung der Typisierung erhoben.

Als Moderatorvariablen werden unter anderem Einstellungen zum einen zu epistemologischen Überzeugungen (vgl. Grigutsch et al., 1998) und zum anderen zu Zielen im Mathematikunterricht und zu präskriptiven Theorien des Mathematiklernens aus der COACTIV-Studie (vgl. Krauss et al., 2004) erhoben.

## Erste Ergebnisse

Das Testinstrument, das den Kompetenzzuwachs beim fachdidaktischen Wissen zu Aufgaben auf der Ebene der LehrerInnen misst, wurde bei einer 2,5 Tage dauernden Fortbildung für MultiplikatorInnen zum Thema „Differenzierung und Produktives Üben“ pilotiert. An der Pilotierung nahmen 26 Personen teil. Diese mussten zu Beginn und am Ende der Fortbildung 50 Aufgaben hinsichtlich der Ebene *produktiv* und *nicht produktiv* sowie der Ebene *prozedural* und *konzeptuell* einordnen.

Die Werte für die Reliabilität (Cronbachs α) sind im Vergleich zum Pre-Test beim Post-Test bei drei Aufgabenklassen gestiegen (s. Tabelle 1). Dies lässt sich als eine kohärentere Einordnung der Aufgaben im Post-Test deuten und bestätigt die Validität des Testinstruments.

Die letzte Spalte der Tabelle 1 zeigt die Einordnung der Aufgaben durch die Experten. In Klammern ist die Interraterkorrelation mittels Cohens κ angegeben.

| *Aufgabenklasse* | *Cronbachs α (Pre-Test)* | *Cronbachs α (Post-Test)* | *Anzahl Aufgaben-nach Experten (κ)* | |
|---|---|---|---|---|
| produktiv | .646 | .751 | 20 | (1.0$^{***}$) |
| nicht produktiv | .728 | .754 | 30 | |
| prozedural | .738 | .650 | 23 | (.84$^{***}$) |
| konzeptuell | .455 | .710 | 27 | |

**Tabelle 1: Cronbachs *α* (Testpersonen) und Aufgabenanzahl sowie Cohens *κ* (Experten)**

Bei einzelnen ProbandInnen sind deutliche Wirkungen der Fortbildung sichtbar. In Tabelle 2 ist beispielhaft ein Teilnehmer dargestellt. Hier sind in den meisten Aufgabenklassen deutliche Anstiege sichtbar. Eine Analyse der gesamten Gruppe steht noch aus.

| *Aufgabenklasse* | *Pre-Test* | *Post-Test* | *max. erreichbar* |
|---|---|---|---|
| produktiv | 10 | 20 | 20 |
| nicht produktiv | 27 | 23 | 30 |
| prozedural | 16 | 18 | 23 |
| konzeptuell | 14 | 20 | 27 |

**Tabelle 2: Summenscore eines Multiplikators**

## Ausblick

Die erfolgreiche Entwicklung des Tests zur Erfassung der Kompetenzen von LehrerInnen bezogen auf die Identifizierung der oben aufgeführten Aufgabenklassen bildet die Grundlage dafür, das geplante Kontrollgruppendesign realisieren zu können.

Was den Kompetenzzuwachs durch die Fortbildung angeht, zeigen erste Auswertungen aus der Pilotierung deutliche Veränderungen bei denjenigen TeilnehmerInnen, die sich zuvor noch nicht mit dieser Thematik beschäftigt haben. Detailliertere Analysen stehen noch aus. Insbesondere die Einbeziehung der ebenfalls erhobenen Moderatorvariablen wie z.B. Einstellungen könnten tiefergehende Zusammenhänge aufzeigen.

## Literatur


Baumert, J.; Kunter, M.; Blum, W.; Brunner, M.; Voss, T.; Jordan, A. et al. (2010): Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. In: American Educational Research Journal 59 (5), S. 133–180.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. Journal für Mathematik-Didaktik 19 (1), S.3-45.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. et al. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), Die Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung (S. 31-53). Münster: Waxmann.

Lipowsky, Frank (2010): Lernen im Beruf. Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In: Florian H. Müller (Hg.): Lehrerinnen und Lehrer lernen. Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung. Münster [u.a.]: Waxmann, S. 51–70.

Lipowsky, Frank (2011): Theoretische Perspektiven und empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen. In: Hedda Bennewitz, Martin Rothland und Ewald Terhart (Hg.): Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf. Münster [u.a.]: Waxmann, S. 398–417.

Renkl, A. (Ed.). (2008). Lehrbuch Pädagogische Psychologie. Bern: Huber.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. Journal of Eductional Psychology, 93(2), 346-362.

Winter Heinrich (1984): Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren 2, S. 4–16

Yoon, K. S., Duncan, T., Lee, S. W.-Y., & Shapley, K. (2008). The effects of teachers' professional development on student achievement: Findings from a systematic review of evidence. Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, New York, NY.

Zehetmeier, Stefan (2009): The sustainability of professional development. Hg. v. Lyon (Frankreich) CERME6.

Andreas SCHULZ, Timo LEUDERS, Freiburg

# Entwicklung und Validierung eines kognitiven Diagnosemodells zur Eingangsdiagnose und -förderung in Klasse 5 – Teilmodell zu Schriftlichen Rechenverfahren

Die empirische Modellierung mathematischer Kompetenzen beruht auf der kohärenten Abstimmung vier grundlegender Arbeitsschritte: (1) Entwicklung eines theoretischen Modells, (2) Beschreibung durch ein psychometrisches Modell, (3) Operationalisierung mit geeigneten Messkonzepten und Messverfahren und (4) Nutzung im Rahmen von Diagnostik und Assessment. Vor dem Hintergrund des im schulischen Kontext wichtigen Anliegens, kriteriale individualdiagnostische Information bereit zu stellen, spielen kognitive Diagnosemodelle (Rupp & Mislevy, 2007) eine zunehmend bedeutsame Rolle (Leuders, 2014): Diese fokussieren (1) auf einen engen Kompetenzbereich, welcher über kognitive Theorien und Modelle definiert wird. Mittlerweile stehen (2) eine Vielzahl psychometrischer Modelle für die Anwendung zur Verfügung, die in Verbindung mit (3) validen Repräsentationen von Kognitionen, bspw. auf Grundlage von eingesetzten Aufgaben, (4) individuell unterschiedliche Merkmalsausprägungen auch auf kategorialen latenten Variablen rückmelden. Eine solche empirische Informationsgrundlage, welche in Passung zu einem kognitiven Modell über einen eng abgegrenzten Kompetenzbereich steht, eignet sich für die Anbahnung spezifischer Fördermaßnahmen.

Die kohärente Abstimmung dieser vier Arbeitsschritte für die Implementierung einer Eingangsdiagnose in Klasse 5, die in Baden-Württemberg landesweit und schulartenübergreifend zum Einsatz kommen soll, wird am Beispiel der schriftlichen Rechenverfahren mit Daten aus einer Pilotierungsstudie berichtet. In Entwicklung sind ebenfalls kognitive Diagnosemodelle für Operations- und Zahlverständnis sowie halbschriftliches/flexibles Rechnen.

Schriftliche Rechenverfahren sind Algorithmen, die sich der Stellenwertstruktur und mathematischer Verknüpfungsgesetze (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz) bedienen. Ihre Effektivität beruht darauf, dass nicht mehr komplette Zahlen im Blick behalten und miteinander verrechnet werden müssen, sondern dass regelgeleitete Operationen mit Ziffern zum Ergebnis führen. Aus Sicht der cognitive-load-Theory (vgl. Van Merrienboer & Sweller, 2005) können Rechenverfahren auch als domänenspezifische Schemata bezeichnet werden, welche im Langzeitgedächtnis gespeichert werden und welche es erlauben, Informationen so zu verarbeiten, dass kognitive Ressourcen im Arbeitsgedächtnis für weitergehende Aufga-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1115–1118). Münster: WTM-Verlag

ben frei werden. Schriftliche Rechenverfahren ermöglichen Schülerinnen und Schülern zudem einen Einblick in die Bedeutung von Algorithmen als eine der zentralen Leitideen der Mathematik, vermitteln Rechensicherheit und vereinfachen stark das Rechnen mit großen Zahlen (Padberg & Benz, 2011).

### Mehrdimensionales Stufenmodell zu schriftlichen Rechenverfahren

Bestehende Diagnosekonzepte und empirische Studien zu schriftlichen Rechenverfahren konzentrieren sich überwiegend auf die rechenartspezifische Erfassung und Analyse typischer Schülerfehler (bspw. Gerster, 1982/2012). Im Gegensatz hierzu war unser Ziel, ein rechenartenübergreifendes Stufenmodell zu entwickeln, welches Kompetenzen von Lernenden über Hierarchien in den Teilanforderungen schriftlicher Verfahren beschreibt. Für ein landesweites Screening-Instrument bietet dies den Vorteil, dass gut verständliche Rückmeldungen über den Leistungsstand von Einzelschülern und Schülergruppen generiert werden können. Hierbei kann ohne den vergleichsweise hohen Analyseaufwand bei der Erfassung von Fehlertypen dennoch zielgerichtet auf differenzierte Fördermaßnahmen auf unterschiedlichen Niveaustufen hingewiesen werden. Aus Sicht der Grundlagenforschung ergänzt die Studie den Forschungsstand zum Einfluss schwierigkeitsgenerierender Faktoren bei den schriftlichen Rechenverfahren.

<table>
<tr><th>Rechenartenübergreifende Stufenbeschreibung</th><th>Beispiele Subtraktion</th><th>Stufeninhärente Schwierigkeiten (Bsp. Subtraktion)</th></tr>
<tr><td>Stufe 1:<br>Einstellige Prozedur</td><td>8078 - 4018</td><td rowspan="4">- Unterschiedliche Stellenzahl<br>- Anzahl der Stellen<br>- Null im Minuend oder Subtrahend oder beides<br>- Null im Ergebnis (gleiche Ziffern) inkl. Wegfall der ersten Stelle<br>- Art des Übertrags (auf 0, 9, leere Stelle, mehrfach) ab Stufe 3</td></tr>
<tr><td>Stufe 2: Einschrittig-mehrstellige Prozedur</td><td>7037 - 5821</td></tr>
<tr><td>Stufe 3: Mehrschrittig-mehrstellige Prozedur</td><td>3018 - 74</td></tr>
<tr><td>Stufe 4:<br>Komplexe Prozedur</td><td>8765<br>- 4241<br>- 52</td></tr>
</table>

Auf Stufe 1 (einstellige Prozedur) sind alle Aufgaben durch rein ziffernweises Rechnen lösbar, es werden kein Übertrag (Subtraktion), Behaltensziffer (Multiplikation) oder Teilquotientenbildung mit Rest (Division) notwendig. Auf Stufe 2 (einschrittig-mehrstellig) erfordern die Aufgaben einen Übertrag, eine Behaltensziffer oder einen Teilquotienten mit Rest, wobei diese, im Unterschied zu Stufe 3 (mehrschrittig-mehrstellig), auf

Stufe 2 noch nicht mit zusätzlichen Schwierigkeiten im Übertrag etc. (Subtr.: Übertrag auf die 0, 9 oder leere Stelle, erneuter Übertrag) verbunden sind. Stufe 4 (komplexe Prozeduren) beinhaltet Aufgaben mit zweifachem Minuend oder zweistelligem Multiplikator bzw. Divisor. Die Variation der Aufgaben innerhalb einer Stufe ergibt sich aus den stufeninhärenten Schwierigkeiten (Subtr.: vgl. Tabelle). Das Stufenmodell postuliert, dass die Schwierigkeit einer Aufgabe vorrangig vom Stufenmerkmal bestimmt wird und nachrangig von den stufeninhärenten Schwierigkeiten (Subtr.: u.a. Rechnen mit der Null, ungleiche Stellenzahl, Anzahl der Stellen). Derart wurden Stufenmodelle für alle vier Rechenarten entwickelt.

Die Pilotierung erfolgte in 16 Klassen (GS: 2; WRS: 4; RS: 5; GY: 5; N = 403). Die relativen Lösungshäufigkeiten pro Verfahren gemittelt zeigten (Add: 0,94; Subtr: 0,79; Mult: 0,7; Div: 0,65), dass die schriftliche Addition im 4. bis 6 Schuljahr keine Schwierigkeiten mehr bereitet, sodass nur die 58 Items zu den drei anderen Rechenverfahren analysiert wurden.

## Überprüfung der Dimensionalität

Die explorative Faktorenanalyse wies auf eine eindeutig dreidimensionale Struktur hin, die sich in der konfirmatorischen Faktorenanalyse im Modellvergleich deutlich bestätigte (Kriterium AIC/BIC minimal; 1-dim.: 16120/16352; 3-dim.: 14901/15161). In die Analysen gingen 57 Items mit einem Fit-Residual-Wert im jeweils eindimensionalen Raschmodell kleiner als 2,5 ein (vgl. RUMM2030-Manual; Sub/Mult/Div: 26/17/14 Items). Die latenten Korrelationen sind moderat: Sub-Mult: 0,525; Sub-Div: 0,459; Mult-Div: 0,599, die Reliabilitäten sehr gut (PSI für Gesamtstichprobe, in Klammern Cronbach-Alpha für Klasse 5 als Zielstichprobe): Sub: 0,765 (0,823); Mult: 0,829 (0,871); Div: 0,845 (0,929). Damit stellen die drei Rechenverfahren nicht nur konzeptuell unterschiedliche, sondern auch messmethodisch klar voneinander abgrenzbare Fähigkeitsbereiche dar.

## Überprüfung der Stufen der Items / der Anforderungen

Die Hypothese, dass die Schwierigkeit der Items (Logitskala der Raschmodellierung) pro Rechenverfahren vorrangig über deren a-priori beschriebene Stufenzugehörigkeit erklärt werden kann, wurde mittels Regression der Dummy-codierten Stufenzugehörigkeiten (Stufe 1/2/3) auf die Itemschwierigkeit überprüft:

$$\textit{Itemschwierigkeit} = k + b_2(\textit{Stufe}2) + b_3(\textit{Stufe}3) + \mathrm{b}_4(\textit{Stufe}4)$$

Für die Subtr/ Mult/ Div ergab sich eine erklärte Varianz $R^2$ von 0,828/ 0,868/ 0,898. Nach einer leichten Präzisierung der Stufenmerkmale (nur noch Items mit 4-5 Stellenwerten & Gegebensein der Stufe 3-

Anforderungen auch für Stufe 4 Items) für Subtr./ Mult. vergrößerte sich deren erklärte Varianz nochmals auf 0,934/ 0,949. Die Itemschwierigkeit wird demnach zum allergrößten Teil von den originären Stufenmerkmalen und nicht von den stufeninhärenten Schwierigkeiten bestimmt.

### Bestimmung von Kompetenzstufen auf Personenebene

Gängiges Vorgehen zur Bestimmung von Kompetenzstufen ist es, für das schwierigste Item einer Stufe eine Lösungswahrscheinlichkeit von 0,65 (bzw.0,5) zu fordern und diesen Itemschwierigkeitswert als Schwellenwert auf der Personen-Fähigkeitsskala zu verwenden. Hierbei entscheidet jedoch nur ein einzelnes Item über die Lage des Schwellenwertes, dabei wird die inhaltliche Klammer um die kohärenten Itemmerkmale der Stufe nicht berücksichtigt. Daher wurde als Kriterium für die Schwellenwerte verwendet, dass im arithmetischen Mittel alle Items einer Stufe (anstelle nur des schwierigsten Items) mit einer bestimmten erwarteten Wahrscheinlichkeit gelöst werden. Für die Lösungswahrscheinlichkeiten 0,5/ 0,6/ 0,65/ 0,7/ 0,8 wurde vergleichend aus der Datenmatrix ermittelt, welcher Anteil der Aufgaben jeweils entsprechend stufenkonform gelöst bzw. nicht gelöst wurde. Bei geforderten Lösungswahrscheinlichkeiten von wahlweise 0,6 oder 0,65 werden ca. 90% der entsprechenden Items stufenkonform beantwortet, sodass eine verlässliche Rückmeldung pro Schüler ermöglicht wird.

In allen Schulformen identifizierte die gesonderte Auswertung für Klasse 5 in den drei Rechenverfahren substantielle Schülergruppen auf den Kompetenzstufen 0-2, was bedeutet, dass diesen Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben mit besonderen Anforderungen im Übertrag (bzw. bei der Behaltensziffer oder im Teilquotient) systematische Fehler unterlaufen. Erst ab Kompetenzstufe 3 ist davon auszugehen, dass die Rechenverfahren hinreichend sicher beherrscht werden und keine besondere Förderung/ Wiederholung in Klasse 5 notwendig ist.

## Literatur

Rupp, A. A., & Mislevy, R. J. (2007). Cognitive foundations of structured item response theory models. In J. Leighton & M. Gierl (Hrsg.), *Cognitive diagnostic assessment in education: theory and applications* (S. 205–241). Cambridge: Cambridge Univ. Pr.

Leuders, T. (2014). Modellierungen mathematischer Kompetenzen – Kriterien für eine Validitätsprüfung aus fachdidaktischer Sicht. *Journal für Mathematikdidaktik.*

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Springer.

Van Merrienboer, J., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent developments and future directions. *Ed. Psy. Review, 17,* 147–177.

Gerster, D.(1982/ 2012). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren. Diagnose und Therapie*. Münster: WTM.

Stefanie SCHUMACHER, Bielefeld

# Das Lehrerprofessionswissen von Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe I im Bereich der Beschreibenden Statistik („*BeSt Teacher*“)

Innerhalb der letzten Jahre konnte eine Veränderung in Bezug auf die Relevanz von Statistik in Schulen beobachtet werden. In Deutschland kam es mit der Einführung der Bildungsstandards zu einer größeren Wertschätzung des Bereichs „Daten und Zufall“, der als eine von fünf zentralen Leitideen herausgestellt wurde. Statistik ist somit ein wichtiger, aber trotz alledem häufig vernachlässigter Bereich mathematischer Bildung in der Schule. Auch das Wissen von Lehrkräften bezüglich dieser Thematik ist nicht zufriedenstellend: „[…] the teachers generally have […] little knowledge about statistics“ (Batanero et al. 2011, S.12). Die Ursachen dafür können unter anderem in der vormals vernachlässigten Rolle im Unterrichtskontext oder auch in der defizitären Berücksichtigung des Themengebiets in der Ausbildung der Lehrkräfte vermutet werden.
Ziel des hier vorgestellten Forschungsvorhabens „BeSt Teacher“ ist es, das Professionswissen von Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe I im Bereich der Beschreibenden Statistik mit Hilfe eines selbst konzipierten Testinstruments zu erfassen. Dabei werden zwei zentrale Fragen verfolgt: (1) In welchem Maße verfügen Lehrkräfte über schulbezogenes Wissen im Bereich der Beschreibenden Statistik? (2) Auf welche Art und Weise vermitteln Lehrkräfte ihr Wissen und über welches Wissen von typischen Schülerfehlern und -schwierigkeiten verfügen sie?

## 1. Theoretische Grundlagen

Im Folgenden werden das Lehrerprofessionswissen und ‘Statistical Literacy’ als theoretische Grundlagen für das hier vorgestellte Testinstrument kurz dargestellt.
„There is a powerful relationship between what a teacher knows, how she knows it, and what she can do in the context of instruction.” (Hill et al. 2008, S. 496). Um diese Beziehung näher zu untersuchen, wird hier auf das Modell zum Lehrerprofessionswissen von Ball (Loewenberg Ball et al. 2008) zurückgegriffen, welches in Anlehnung an Shulmans Modell entwickelt wurde. Es unterscheidet die zwei Hauptkategorien *Subject Matter Knowledge (SMK)* und *Pedagogical Content Knowledge (PCK)*. SMK wird weiter unterteilt in *Common Content Knowledge (CCK)*, also das Fachwissen, über das jeder gut ausgebildete Erwachsene verfügen sollte, *Specialized Content Knowledge (SCK)*, welches das notwendige mathematische

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1119–1122). Münster: WTM-Verlag

Wissen speziell für die Lehrsituation umfasst, sowie *Horizon Content Knowledge*. PCK wird differenziert in *Knowledge of Content and Students* (*KCS*, z.B. das Wissen über Schwierigkeiten bei Schülern oder typische Schülerfehler), *Knowledge of Content and Teaching* (*KCT*, z.B. das Wissen über Repräsentieren und Erklären von fachlichen Inhalten) und *Knowledge of Content and Curriculum*. Die Grenzen zwischen den einzelnen Komponenten sind zum Teil fließend. Da es in dem Forschungsprojekt um Beschreibende Statistik geht, bietet das Konzept der 'Statistical Literacy' eine inhaltliche Grundlage für die Itementwicklung. Hierunter wird „[…] the ability to understand and evaluate critically statistical results that permeate our daily lives – coupled with the ability to appreciate the contributions that statistical thinking can make in public and private, professional and personal decisions." verstanden (Wallman 1993, S. 1). Watson entwickelte anhand von Studien mit Lernenden eine dreistufige Hierarchie (Watson & Callingham 2003), die als grundlegend anzusehen ist und somit auch auf Lehrende übertragbar erscheint. Die erste Ebene umfasst das Verständnis grundlegender statistischer Begrifflichkeiten, die zweite das Verständnis von Begriffen, die in (soziale) Kontexte eingebettet sind und die dritte Stufe das kritische Hinterfragen von Aussagen, die ohne fundierte statistische Grundlage getroffen wurden.

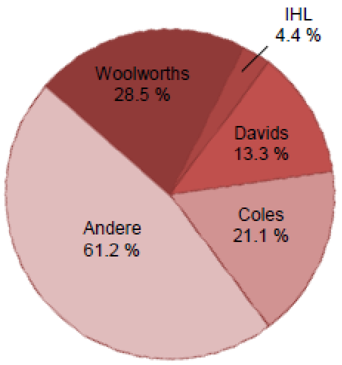
## 2. Praktische Umsetzung

Die Umsetzung zum Erfassen des Lehrerprofessionswissens erfolgt in Form eines Paper-Pencil-Tests. Dieser umfasst in derzeitiger Fassung 28 SMK- sowie 18 PCK-Items, die entweder im Multiple-Choice-Format oder als offene Aufgaben vorliegen. Sofern es möglich ist, wird eine Verbindung zwischen SMK- und PCK-Items angestrebt. Des Weiteren werden die Lehrkräfte nach biographischen Daten (z.B. besuchte Fortbildungen zu dem Thema) und subjektiven Überzeugungen bezogen auf Beschreibende Statistik gefragt, da Unterrichtskompetenz nicht unabhängig vom personalen Kontext betrachtet werden sollte (Haag & Lohrmann 2009). Auf letztere Aspekte wird in diesem Beitrag jedoch nicht weiter eingegangen.
Die Item-Inhalte entstammen den kerncurricularen Inhaltsbereichen der Lehrpläne und der darin abgebildeten inhaltsbezogenen Kompetenz ‚Daten und Zufall', wobei sich hier auf den Bereich ‚Daten' beschränkt wird. Folgende vier Schwerpunkte lassen sich in den Lehrplänen der Sekundarstufe I im Bereich der Beschreibenden Statistik ausmachen: (1) Absolute und relative Häufigkeiten, (2) Lage- und Streumaße, (3) Graphische Darstellungen und (4) Kritische Analyse von Daten.
Im Folgenden wird je ein exemplarisches Item für die Bereiche SMK und PCK vorgestellt.

Die SMK-Items werden einem der o.g. Inhalte zugeordnet sowie einer Ebene in Watsons Hierarchie. Das Item in Abbildung 1 ist dem Inhaltsbereich graphische Darstellungen sowie aufgrund der Authentizität und kritischen Herangehensweise Watsons dritter Stufe zuzuordnen. Es ist dem Wissensbereich *CCK* zugeordnet, d.h. Lehrkräfte sowie ein gut ausgebildeter Erwachsener sollten in der Lage sein, diverse Fehler in dem Kreisdiagramm zu identifizieren (z.B. die Summe aller Prozente ergibt mehr als 100%, ‚Andere' haben einen Anteil von 61,2%, nehmen aber weniger als 50% im Kreisdiagramm ein).

**Frage 16:**

a. Bitte beschreiben Sie Auffälligkeiten des nachstehenden Kreisdiagramms, das die Anteile verschiedener Lebensmittelhändler in den USA verdeutlicht.




[Graphik in Anlehnung an Watson]

**Abb.1:** Beispiel für ein CCK-Item

Auch die PCK-Items werden zunächst auf einer inhaltlichen Ebene kategorisiert, wobei die in Abbildung 2 dargestellte Aufgabe sich mit Lage- und Streumaßen (hier: das arithmetische Mittel) befasst. Um dieses Item, welches dem Wissensbereich *KCS* zugeordnet ist, angemessen lösen zu können, müssen Lehrkräfte typische Schülerfehler identifizieren können (hier z.B. die Nicht-Berücksichtigung der Zeitspanne während der Fahrt).

**Frage 4:**
Frau Schmidt legt eine Strecke von insgesamt 200 Kilometern mit ihrem Auto zurück.
Die ersten 100 Kilometer fährt sie mit 50 km/h, die zweiten 100 Kilometer mit 100 km/h.

Eine Schülerin löst diese Aufgaben und präsentiert Ihnen ihre Lösung.
Erläutern Sie kurz, was sich die Schülerin Ihrer Meinung nach bei der Lösung gedacht hat.

50 km/h
+ 100 km/h
150 km/h : 2 = 75 km/h

**Abb.2:** Beispiel für ein KCS-Item

Bisher wurde 41 Lehramtsstudierenden der Sekundarstufe I in einer Feldstudie der Fragebogen vorgelegt, um Verständnisschwierigkeiten aufzudecken und erste Hinweise auf das Antwortverhalten zu erhalten. Es zeigte sich, dass einige Aufgaben nur oberflächlich bearbeitet wurden (bspw. Konzentration auf eine graphische Darstellung ohne Berücksichtigung weiterer Diagramme). Zudem konnten Schwierigkeiten bei den PCK-Items festgestellt werden, was ggf. auf mangelnde Unterrichtspraxis der Studierenden zurückzuführen ist. Daher wird die Pilotierung des Fragebogens im Frühjahr 2014 mit 10 Lehrkräften an einer Gesamtschule durchgeführt werden. Die Hauptuntersuchung soll dann Ende 2014 mit ca. 100 Lehrkräften der Sekundarstufe I aus Nordrhein-Westfalen erfolgen.

## 3. Ausblick

Nach der Pilotierung und der Anpassung sowie Validierung des Testinstruments wird die Hauptstudie durchgeführt werden. Die Analyse dieser Ergebnisse soll einen Einblick in den Status quo des Lehrerprofessionswissens im Bereich der Beschreibenden Statistik geben. Ferner kann sie zu Fortbildungsmaßnahmen an Schulen bzw. zu einer Anpassung der Inhalte in der Lehrerausbildung an den Universitäten führen.

## Literatur

Batanero, C., G. Burrill, & C. Reading & A. Rossman (Eds.). (2011). Teaching statistics in school mathematics - challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study: the 18th ICMI study. Dordrecht [Netherlands]: Springer.

Haag, L. & Lohrmann, K. (2009). Lehrerhandeln: Lehrerkognitionen und Lehrerexpertise. In K.-H. Arnold, U. Sandfuchs & J. Wiechmann (Hrsg.), *Handbuch Unterricht* (S. 461-467). 2. Auflage. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430–511.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching Our Society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), 1-8.

Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal*, *Volume 2*(No. 2), 3–46.

Stefan SCHUMACHER, Jürgen ROTH, Landau

# Darstellungskompetenz – Ein Schlüssel zum forschenden Lernen?!

## 1. Forschendes Lernen

Eine erste Definition von forschendem Lernen in der Schule könnte lauten: Schülerinnen und Schüler (SuS) lernen forschend, wenn sie sich einen für sie subjektiv neuen Inhalt selbsttätig erarbeiten (vgl. u.a. Roth/Weigand 2014). Auch der kooperative Austausch mit anderen „Forschern" in einer Gruppe spielt beim forschenden Lernen eine entscheidende Rolle. Der Prozess des forschenden Lernens lässt sich, ausgehend von einer zentralen Fragestellung in drei Phasen gliedern, die von Roth und Weigand in diesem Band näher beschrieben werden.

In der vorgestellten empirischen Untersuchung arbeiten die SuS an einer Laborstation des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr" der Universität Landau mit enaktiven Materialien, anschaulichen Beispielen und dynamischen GeoGebra-Simulationen. Das Ziel ist hier inhaltlich-anschaulich Muster und Strukturen im Themengebiet der Bruchrechnung selbsttätig zu entdecken und zu erforschen. Aus didaktischer Perspektive ist demnach das Ziel, durch Eigenaktivität, anhand vielfältiger Anschauungsmittel, den Aufbau von Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff und ausgewählten Rechenoperationen der Bruchrechnung zu fördern.

Die verwendeten Arbeitsmaterialen werden u.a. in Schumacher & Roth 2013 und Roth 2013 näher beschrieben und können unter der Adresse www.mathe-labor.de/stationen/mathematik_und_kunst/ abgerufen werden.

## 2. Darstellungskompetenz

Darstellungen lassen sich nach Schnotz und Kollegen (2011) in Depiktionen und Deskriptionen unterscheiden. Depiktionen zeichnen sich durch eine strukturelle Analogie zum zu repräsentierenden Gegenstand aus. So ist eine „Pizzadarstellung" einer Bruchzahl als Depiktion zu verstehen, da eine strukturelle Analogie besteht: Ein Ganzes wird in drei deckungsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Bruchschreibweise hingegen ist als Deskription zu verstehen, da das Zeichen 1/3 nur über eine vorher festgelegte Konvention richtig zu entschlüsseln ist. Sowohl die Pizzadarstellung als auch das Zeichen 1/3 sind direkt wahrnehmbar und somit externe Repräsentationen. Das Konzept der Depiktionen und Deskriptionen lässt sich auch auf interne Repräsentationen übertragen und kann herangezogen werden, um die Grundvorstellung „Teil eines Ganzen" aus kognitionspsychologischer Sicht theo-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1123–1126). Münster: WTM-Verlag

retisch zu fundieren. Die Grundvorstellung „Teil eines Ganzen“ lässt sich als Zusammenspiel mehrerer interner Repräsentationen beschreiben. Wenn die interne Repräsentation des Zeichens 1/3 mit einer depiktionalen, internen Darstellung, einem mentalen Modell z.B. einer Pizzadarstellung und der dazu passenden mentalen Beschreibung/Deskription verknüpft ist, kann die Grundvorstellung als aufgebaut betrachtet werden. Die Schüler/innen können das Zeichen 1/3 dann auf eine semantisch reichhaltige Weise interpretieren. Auf diese Grundvorstellung zurückgreifend können sie z. B. Probleme lösen, oder syntaktische Operationen auf deren inhaltliche Bedeutung hin überprüfen.

Zur Darstellungskompetenz gehört neben der Fähigkeit vorgegebene Darstellungen zu interpretieren und mental zwischen Darstellungen zu wechseln als weitere Dimension die Fähigkeit eigenständig adäquate Darstellungen zu einem Inhalt zu erzeugen (vgl. Schnotz et al. 2011). Die beiden Dimensionen sind in Abbildung 1 durch Pfeile repräsentiert. Im Fall der ersten Dimension führen die Pfeile von Depiktionen bzw. Deskriptionen ins kognitive System während sie im Fall der zweiten Dimension aus dem kognitiven System zu Depiktionen und Deskriptionen führen.

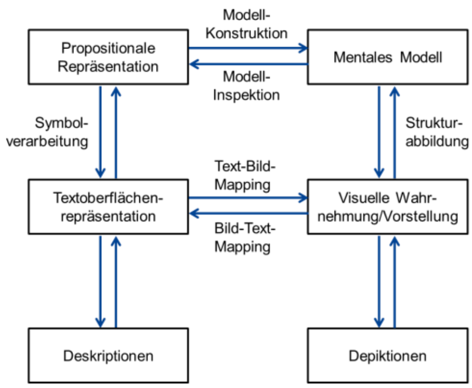



**Abb. 1:** Integriertes Modell des Text- und Bildverstehens aus Schnotz et al. 2011

## 3. Darstellungskompetenz und forschendes Lernen

In allen Phasen des forschenden Lernens ist mindestens eine der beiden Dimensionen der Darstellungskompetenz ausschlaggebend. In diesem Artikel soll die Bedeutung der zweiten Dimension hervorgehoben werden, denn „Forschendes Lernen kann nur gewinnbringend sein, (…) [wenn] Vorgehensweisen und Ergebnisse dargestellt werden.“ (Roth 2013, S. 2). Um Vorgehensweisen und Ergebnisse (extern) darzustellen, müssen Schüler/innen in der Lage sein, externe Darstellungen zu erzeugen. Unsere Erfahrungen aus dem Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ haben gezeigt, dass Schüler/innen selten intrinsisch motiviert sind, Ergebnisse festzuhalten und z.T. auch große Schwierigkeiten mit der adäquaten Darstellung der Vorgehensweisen und Ergebnisse haben.

Eine Lösung dieses Problems sehen wir, in der gezielten Gestaltung der Labor-Lernumgebung, denn „die Gestaltung experimenteller Lernumgebungen erfordert klare Vorstellungen darüber, was gelernt werden soll und wie das Labordesign das Arbeitsverhalten, die Lernprozesse sowie die Kooperation und Kommunikation der Lernenden beeinflusst.“ (Euler 2010, S. 811)

Deshalb geht die hier vorgestellte empirische Untersuchung der Frage nach, durch welche Gestaltungselemente die Schüler/innen bei der Darstellung der Vorgehensweisen und Ergebnisse unterstützt werden können. Eine Möglichkeit Schüler/innen zum Festhalten der Ergebnisse anzuregen, sind Prompts, die in den Arbeitsheften des Mathematik-Labors an geeigneten Stellen platziert werden. Nach Berthold, Eysing und Renkel (2008 S.347) sind Prompts Aufforderungen an die SuS, die Lerninhalte auf eine bestimmte Art zu verarbeiten. In der hier vorgestellten Untersuchung wurden Prompts auf zwei verschiedenen Instruktionsniveaus eingesetzt:

Instruktionsniveau 1: Aufforderung Ergebnisse festzuhalten

Instruktionsniveau 2: Aufforderung Ergebnisse festzuhalten und Vorgabe von Satzanfängen bzw. Ansätzen zu Skizzen

Dabei wurden sechs Schulklassen in zwei Untergruppen geteilt. Die erste Untergruppe (E1, $N$ = 59) arbeitete im Mathematik-Labor mit Arbeitsheften mit Prompts auf Instruktionsniveau 1 während die zweite Unterruppe (E2, $N$ = 65) mit Prompts auf Instruktionsniveau 2 arbeitete. Eine dritte Gruppe, die Kontrollgruppe (KG, $N$ = 30), besuchte nicht das Mathematik-Labor und wurde regulär, zu gleichen Inhalten, in der Schule unterrichtet.

## 4. Empirische Ergebnisse

In der Untersuchung wurden Daten zu drei Messzeitpunkten (Pre-, Post- und Follow-Up-Test) erhoben. Zum einen wurde die Leistung und zum anderen die Fähigkeit erfasst, zentrale Inhalte eines Problemlöseprozesses zu identifizieren und darzustellen, die im Folgenden als Protokollierfähigkeit bezeichnet wird. Die Leistung wurde mit einem klassischen Leistungstest erhoben. Die Messung der Protokollierfähigkeit basiert auf der Idee, den Schüler/inne/n in der Testsituation ein ca. 2 minütiges Video, ein sogenanntes Video-Item, zu präsentieren, in dem anhand von Legematerialien ein Problemlöseprozess

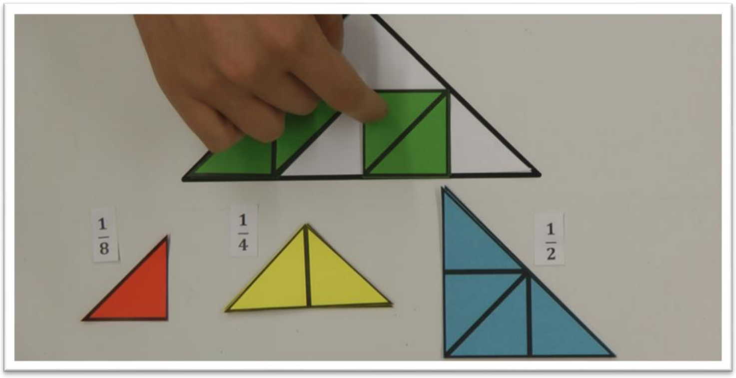



**Abb. 2:** Screenshot eines Video-Items

aus dem Bereich der Bruchrechnung beschrieben wird (siehe Screenshot Abb.2).

Der Auftrag an die Schüler/innen lautete, den Inhalt des Videos so darzustellen, dass die Aufzeichnungen zur Vorbereitung auf die nächste Klassenarbeit genutzt werden können.

Für alle Gruppen (E1, E2, KG) kann ein hoch signifikanter Leistungszuwachs nachgewiesen werden (Anova mit Messwiederholung: $F(2,302) = 395{,}98$; $p < .01$). Bezogen auf die Leistungsentwicklung ergeben sich, über die drei Messzeitpunkte hinweg, keine signifikanten Unterscheide zwischen den drei Gruppen. Daraus kann geschlossen werden, dass selbständig-forschendes Lernen ebenso erfolgreich sein kann, wie klassischer, lehrerzentrierter Unterricht.

Erste Ergebnisse bezogen auf die Entwicklung der Protokollierfähigkeit deuten darauf hin, dass Schüler/innen, die im Mathematik-Labor forschend gelernt haben, tendenziell mehr Inhalte des Video-Items erfassen und diese darstellen können (vgl. Abb. 3). Die Unterschiede der Gruppen sind allerdings nicht signifikant. Hervorzuheben ist allerdings, dass die Schüler/innen der KG zum dritten Messzeitpunkt wieder auf ihr Ausgangsniveau zurückfallen, während dies bei den Schüler/innen der beiden Experimentalgruppen nicht der Fall ist.

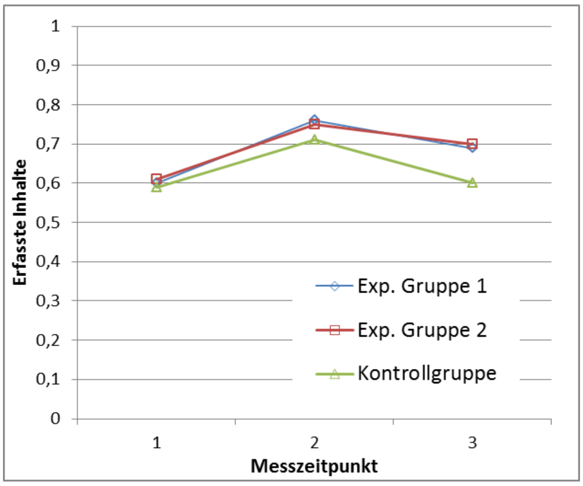



**Abb. 3:** Entwicklung bezogen auf den relativen Anteil erfasster Inhalte

## 5. Literatur

Berthold, K., Eysink, T. H. S., & Renkl, A. (2008). Assisting self-explanation prompts are more effective than open prompts when learning with multiple representations. *Instructional Science*, *37*(4), 345-363.

Euler, M. (2010): Schülerlabore: Lernen durch Forschen und Entwickeln. – In: Kircher, E./ Girwidz, R./ Häußler, P. (Hrsg.) (2010): Physikdidaktik - Theorie und Praxis. Springer, Berlin, Heidelberg. S. 799-818.

Roth, J. (2013): Vernetzen als durchgängiges Prinzip – Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“. In: Anna S. Steinweg (Hrsg.): Mathematik vernetzt. Band 3 der Reihe "Mathematikdidaktik Grundschule", UBP (University of Bamberg Press), Bamberg. S. 65-80.

Roth, J., & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen im Mathematikunterricht: Eine Annäherung. Erscheint in mathematik lehren, (184).

Schnotz, W.; Baadte, C.; Müller, A.; Rasch, R. (2011):Kreatives Denken und Problemösen mit bildlichen und beschreibenden Repräsentationen. In: Sachs-Hombach, K.,Totzke, R. (Hrsg.): Bilder-Sehen-Denken. Herbert von Halem Verlag,Köln. S.204-252

Schumacher, S., & Roth, J. (2013). Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung - Grundvorstellungen im Schülerlabor erarbeiten. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Eds.), BZMU 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik. Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien. S. 926-929.

Björn SCHWARZ, Philip HERRMANN, Gabriele KAISER, Birgit RICHTER, Jens STRUCKMEIER, Hamburg

# Lineare Algebra in der Lehramtsausbildung – Wenig Bezug zum Mathematikunterricht?

## 1. Der Projektrahmen

Die vorgestellten Analysen entstanden im Rahmen der Arbeit des Projektes „Mathematiklehramtsausbildung nachhaltig verbessern“, einem Teilprojekt des Universitätskollegs der Universität Hamburg (http://www.universitaetskolleg.de/, letzter Zugriff 19. März 2014). Das Projekt ist ausgerichtet auf eine nachhaltige Verbesserung der Studieneingangsphase von angehenden Mathematiklehrkräften für die gymnasiale Oberstufe mit dem Ziel einer Anhebung des Kompetenzniveaus der Studierenden und der gleichzeitigen Absenkung der Abbruchquoten. Entwickelt wurden dafür verschiedene E-Learning-Angebote sowie Beratungs- und Vortragsangebote für die Studierenden. Zur möglichst passgenauen Entwicklung der Projektangebote wurden weiterhin mit Hilfe einer projektbegleitenden Erhebung Stärken und Defizite der Studierenden ermittelt.

## 2. Ausgangslage

Als ein erstes zentrales Projektergebnis  zeigte sich die Notwendigkeit, für eine erfolgreiche Unterstützung der Studierenden in ihrer Studieneingangsphase im Sinne des Kompetenzaufbaus neben wissensbezogenen Unterstützungsmaßnahmen auch verstärkt affektiv-motivationale Aspekte zu berücksichtigen (vgl. Schwarz et al., 2013). Dies umfasst beispielsweise eine Unterstützung in der Reflektion über das Studium, unter anderem bei Fragen zum Umgang mit dem Bruch zwischen Schul- und Universitätsmathematik. In Bezug auf diesen Bruch zeigte sich im Rahmen der Beratungsangebote sowie durch die begleitende Veranstaltungsevaluation genauer, dass die Studierenden insbesondere in der Vorlesung „Lineare Algebra“ eine Diskrepanz zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik wahrnehmen, was zu einer Senkung der Studienmotivation beiträgt.

Die nachfolgende Analyse entstand in diesem Kontext aus der Zielsetzung heraus, vorlesungsbegleitende Materialien zu erstellen, in denen die Schulrelevanz der verschiedenen Inhalte der Eingangsvorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie I + II“ herausgestellt wird. Bezugsrahmen ist dabei durchgehend die gymnasiale Oberstufe, womit eine Relevanz von Inhalten der Linearen Algebra für die Mathematik der Primar- und Sekundarstufe nicht geleugnet werden soll. Jedoch wurde davon ausgegangen, dass das Auftreten der Inhalte der Hochschulvorlesung sich im curricularen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1127–1130). Münster: WTM-Verlag

Rahmen der Oberstufe direkter nachweisen lässt, wohingegen die entsprechenden Hochschulinhalte eher als Grundlagenwissen relevant für Primar- und Mittelstufeninhalte sind. Für die Analyse wurde als Grundlage der verbindliche curriculare Rahmen des gymnasialen Mathematikunterrichts, repräsentiert durch die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife („Abiturstandards", KMK, 2012), herangezogen. Um daneben auch gleichsam reale Manifestationen von Mathematikunterricht zu berücksichtigen, wurden darüber hinaus verschiedene gegenwärtig in Deutschland verwendete Schulbücher für den Mathematikunterricht der Oberstufe (Griesel et al., 2007, Baum et al., 2000, Weller, 2011) ausgewertet. Alle Materialien wurden inhaltsanalytisch (vgl. Mayring, 2010) auf das Auftreten von Standardinhalten der Eingangsvorlesung Lineare Algebra untersucht. Unterschieden wurde dabei zwischen dem direkten Auftreten von Hochschulinhalten in den schulbezogenen Dokumenten und einem indirekten Auftreten in dem Sinne, dass Hochschulinhalte aus Lehrerperspektive notwendig für ein tiefergehendes Verständnis der Schulinhalte sind. Als Bezugsrahmen für die Identifikation typischer Inhalte der Hochschulvorlesung wurde weiterhin auf ein weit verbreitetes Lehrbuch (Fischer, 2010) zurückgegriffen. Im Folgenden werden drei verschiedene Inhaltsbereiche der Hochschulmathematik und ihre Relevanz für den Mathematikunterricht der Oberstufe exemplarisch diskutiert.

## 3. Relevanz von Inhaltsgebieten der Linearen Algebra für die Schule

a) Das Vektorkonzept: In den Abiturstandards wird bezüglich des Vektorkonzepts im Bereich der „Leitidee: Raum und Form" ausgeführt: „Die Schülerinnen und Schüler können […] elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen." (KMK, 2012, S. 24). Ein typisches Vorgehen in Schulbüchern ist dabei die Einführung des Vektors als Zahlen-n-Tupel und die damit verbundene Betrachtung entsprechender Rechenregeln beispielsweise zur Vektoraddition und skalaren Multiplikation. Daneben werden die Vektoren mit Pfeilen im zwei- oder dreidimensionalen Raum identifiziert (vgl. beispielsweise Griesel et al., 2007). Es ist unmittelbar deutlich, dass das schulische Vektorkonzept unter dieser Sichtweise einen Spezialfall des universitären Vektorbegriffs, das heißt dem Verständnis eines Vektors als Element eines axiomatisch definierten Vektorraums (vgl. Fischer, 2010), darstellt. Teilweise verschieben sich dabei sogar auch die Unterscheidungen zwischen Satz und Definition, etwa, wenn die kommutative Addition in der Hochschulmathematik Teil der axiomatischen Grundlage eines Vektorraums ist (vgl. ebd.), jedoch zu einem beweisbaren Satz wird, wenn man einen Vektor als $n$-Tupel mit reellen Einträgen betrachtet und damit die Eigenschaften der Addition reeller Zahlen komponentenweise auf den Vektor übertragen kann (vgl. Griesel et al., 2004).

Hinsichtlich der Bedeutung der Hochschulvorlesung für die Lehrerausbildung kann dann für das Vektorkonzept festgehalten werden, dass die Vorlesung Lineare Algebra den allgemeinen Rahmen darstellen kann, vor dessen Hintergrund die verschiedenen schulischen Vektorkonzepte (algebraisch und geometrisch, s. o.) verglichen und vernetzt werden können. Darüber hinaus wird es den Studierenden durch die Vermittlung eines axiomatisch basierten Vektorbegriffs ermöglicht, für sie selber vertraute Vektorbegriffe als Spezialfälle zu erkennen (vgl. Malle, 2005).

b) Basis, Dimension und Basiswechsel: Ein etwas indirekteres Auftreten von Inhalten der Vorlesung in der Schulmathematik lässt sich am Themenstrang rund um die Begriffe Basis, Dimension und Basiswechsel verdeutlichen. In den untersuchten Schulbüchern treten Vektorräume oberflächlich nur mit fest gewählter Basis auf: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und seltener auch $\mathbb{R}^n$. Die Frage nach der Existenz oder den Möglichkeiten der Wahl einer Basis stellt sich damit zunächst nicht und auch die Dimension der Vektorräume ist in diesen Fällen extrinsisch aufgeprägt. Folglich kommt auch eine Diskussion der Systematik von Basiswechseln nicht unmittelbar in Frage. Diese Vorlesungsinhalte erfahren allerdings dennoch eine schulmathematische Repräsentation, da sie im Zusammenhang mit der Einführung und Unterscheidung von Geraden und Ebenen relevant werden und in den Schulbüchern auftreten. So wird beispielsweise in Schulbüchern explizit thematisiert, dass verschiedene Vektorpaare $(v_1,v_2),(w_1,w_2)$ die gleiche Ebene oder sogar Gerade aufspannen können. Daran anschließend stellt sich die Frage, wie ein und derselbe Punkt bezüglich verschiedener Vektorpaare parametrisiert darstellbar ist (vgl. Griesel et al., 2004, S. 276). Aus der fachmathematischen Vorlesung kann an dieser Stelle für den Schulunterricht zum einen eine Sensibilisierung für diese Art von Problemen gewonnen werden und die Einsicht, dass der stattfindende Parameterwechsel kontrollierbar ist. Zum anderen kann hier die zentrale Erkenntnis erworben werden, dass eine geeignete Koordinatenwahl für das Verständnis geometrischer Zusammenhänge häufig essentiell ist. Dieser Sachverhalt ist beispielsweise im schulischen Kontext als Hintergrundwissen für den Gauß-Algorithmus bedeutsam.

c) Skalarprodukt, Vektorprodukt und Determinante: Der Themenkomplex um den Zusammenhang von Skalarprodukt, Vektorprodukt und Determinante soll in diesem Zusammenhang dazu genutzt werden, ein deutlich indirektes Auftreten von Vorlesungsinhalten in der Schulmathematik zu demonstrieren. Sind Skalarprodukt und Vektorprodukt noch durchgängig mit einer gewissen Häufigkeit in den untersuchten Schulbüchern nachweisbar, so tritt die Determinante in aktuellen Schulbüchern in der Regel höchstens beiläufig auf. Dennoch ist stellenweise die Verflechtung von Skalarprodukt, Vektorprodukt und Determinante im schulischen Kontext sichtbar. Als typisches Beispiel dient hier eine Schulbuchaufgabe (vgl. Griesel et al., 2007, S.133), in der das Volumen eines durch drei Vektoren *a,b,c* aufgespannten Spats durch den Betrag des Skalarprodukts von a mit dem Vektorprodukt von b und c zu berechnen ist. Aus einer Vorlesung zur Linearen Algebra kann hier die fundierte Einsicht gewonnen werden, dass dieses Produkt, sogar ohne Absolutbeträge, gerade mit der Determinante übereinstimmt. An diesem Beispiel lässt sich zeigen, was ein für stärker indirektes Auftreten von Vorlesungsinhalten in der Schulmathematik typisches Phänomen ist: Das gemeinsame Auftreten von Konzepten erscheint aus dem Blickwinkel der Schulbücher sporadisch oder gar zufällig, und ist im Hintergrund doch durch ein solide verknüpfendes Netz bedingt, welches vom schulischen Standpunkt aus oft nicht klar sichtbar werden kann.

## Literatur


Fischer, G. (2010). *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Griesel, H., Postel, H., Suhr, F. (2004). *Elemente der Mathematik: Grundkurs.* Braunschweig: Schroedel Verlag.

Griesel, H., Postel, H., Suhr, F. (2007). *Elemente der Mathematik: Leistungskurs Lineare Algebra, Analytische Geometrie mit Orientierungswissen Stochastik.* Braunschweig: Schroedel Verlag.

Baum, M., Lind, D., Schermuly, H., Weidig, I., Zimmermann, P. (2000). *Lambacher-Schweizer, Lineare Algebra mit analytischer Geometrie. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium*. Stuttgart: Klett.

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *mathematik lehren*, 133, 8-14.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse – Grundlagen und Techniken*. Weinheim: Beltz Verlag.

Schwarz, B., Herrmann, P., Kaiser, G., Richter, B, Struckmeier, J. (2013). Ein Projekt zur Unterstützung angehender Mathematiklehrkräfte in der ersten Phase ihres Studiums - Erste Erfahrungen aus der Begleitung einführender fachmathematischer Lehrveranstaltungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013 (Band 2)* (S. 938-941). Münster: WTM-Verlag.

Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland [KMK] (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der* Kultusministerkonferenz *vom 18.10.2012).* Verfügbar unter:http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf [letzter Zugriff: 19. März 2014]

Weller, H. (2011). *Mathematik Neue Wege SII - Lineare Algebra / Analytische Geometrie, allg. Ausgabe*. Braunschweig: Schroedel Verlag.

Ulrike SIEBERT, Aiso HEINZE, Kiel

# Die Lernausgangslage von Auszubildenden: Erste Ergebnisse des Projekts ManKobE

In den Bildungsstandards Mathematik wird beschrieben, in welchem Umfang mathematische Kompetenzen am Ende der Regelschulzeit erworben werden sollen. Damit wird insbesondere normativ festgelegt, welche Kompetenzen für eine berufliche Ausbildung als relevant anzusehen sind. Die schulisch erworbene mathematische Bildung soll dabei anschlussfähig für das mathematische Lernen im Berufsbildungsbereich sein. Diese Anschlussfähigkeit stellt eine Herausforderung dar, da schulische Allgemeinbildung und berufliche Bildung unterschiedliche Ziele verfolgen. So liegt die Relevanz der Mathematik im beruflichen Bereich in ihrer Funktion als Hilfswissenschaft, wohingegen das Ziel im allgemeinbildenden Schulwesen eine mathematische Allgemeinbildung ist.

Bisherige empirische Untersuchungen zur mathematischen Kompetenz von Auszubildenden zeigen, dass diese je nach Ausbildungsberuf stark variieren (Lehmann, Ivanov, Hunger, & Gänsfuß, 2005). Generell gilt schulisch erworbene mathematische Kompetenz als guter Prädiktor für berufliche Fachkompetenz (Nickolaus & Norwig, 2009). Diese Ergebnisse dabei sind oft statistischer Natur, d.h. es gibt z. B. Korrelationen zwischen schulischen Mathematiknoten und Leistungen in theoretischen Abschlussprüfungen am Ende der Ausbildung. Studien auf Basis direkter Kompetenzmaße gibt es nur wenig. Insbesondere ist die Bedeutung schulisch erworbener Kompetenzen (im Sinne der Bildungsstandards) für den Ausbildungserfolg aus empirischer Sicht bisher unklar.

Auf theoretischer Ebene ist eine wesentliche Frage, wie schulisch erworbene mathematische Kompetenzen in der beruflichen Ausbildung wirksam werden. Im Projekt ManKobE (Mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung) wird dabei ein Kompetenzmodell zugrunde gelegt (Abbildung 1, Neumann et al., 2013), das die in der Ausbildung im beruflichen Kontext erworbenen mathematischen Kompetenzen als eigenständiges Konstrukt annimmt. Diese „berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz“ unterscheidet sich von der allgemeinbildenden mathematischen Kompetenz nur durch den berufsspezifischen Anwendungskontext. Da mathematische Kompetenz im Sinne der Bildungsstandards sich gerade dadurch auszeichnet, dass sie in verschiedenen Anwendungskontexten genutzt werden kann, dürfte sich die berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz empirisch nicht als eigenständiges Konstrukt abtrennen lassen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1131–1134). Münster: WTM-Verlag


**Abbildung 1: Kompetenzmodell in ManKobE**

Andererseits wird mathematische Kompetenz in der Ausbildung fast immer bezogen auf einen berufsspezifischen Kontext erworben. Entsprechend kann die Annahme einer allgemeinen und einer berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenz sinnvoll sein, da letztere potenziell kontextgebunden und damit nur eingeschränkt nutzbar ist. Vor diesem Hintergrund laute unsere Forschungsfrage:

> Bilden schulisch erworbene mathematische Kompetenz und berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz ein gemeinsames Konstrukt oder lassen sie sich trennen?

## Methode

Für die Analyse wird auf Daten der Längschnittstudie ManKobE zurückgegriffen. Die hier untersuchte Stichprobe besteht aus 1360 gewerblich-technischen und 653 kaufmännischen Auszubildenden wenige Wochen nach Beginn ihrer Ausbildung. Die Stichprobe wurde in Berufsschulen in Hessen, Baden-Württemberg und Bayern rekrutiert.

Zur Kompetenzmessung wurden direkte fachspezifische Kompetenzmaße eingesetzt. Hierbei handelt es sich zum einen um Bildungsstandardsaufgaben aus dem IQB-Ländervergleich 2012 (Pant et al., 2013) zur Messung der schulisch erworbenen mathematischen Kompetenzen. Dabei wurden aufgrund der Relevanz für die gewählten Berufsgruppen nur Items der Leitideen Zahl, Messen und funktionaler Zusammenhang eingesetzt. Zum anderen wurden fachspezifische Ergänzungsaufgaben (FSE-Aufgaben) zur Messung der berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenz eingesetzt. Diese orientieren sich an die Prüfungsaufgaben der Industrie- und Handelskammern, welche berufliche Kompetenzen erfassen. Die Prüfungsaufgaben wurden so abgeändert, dass der berufsspezifische Kontext erhalten blieb, sie aber mit schulisch erworbenem mathematischen Kompetenzen und allgemeinem Weltwissen lösbar sind. Damit sollte verhindert werden, dass nicht bereits aufgrund der Konzeptualisierung der FSE-Aufgaben eine Trennung der Konstrukte allgemeiner und berufsfeldbezogener mathematischer Kompetenz generiert wird. Die FSE-Aufgaben sind inhaltlich den Leitideen Zahl, Messen und funktionaler Zusammenhang zuzuordnen. Während die Bildungsstandardsaufgaben innermathematische und verschiedene außermathematische Kontexte besitzen, zeichnen sich die FSE-Aufgaben durch mathematische Anforderungen in einem berufsfeldspezifischen Kontext aus. Im Folgenden werden erste Ergebnisse zu den FSE-Aufgaben im beruflichen Kontext für Industriekaufleute betrachtet.

## Ergebnisse

Sowohl die Bildungsstandardsaufgaben als auch die FSE-Aufgaben ließen sich mit dem eindimensionalen Raschmodell skalieren (EAP/PV-Reliabilitäten: .70 bzw. .75). Die latente Korrelation zwischen der schulisch erworbenen mathematischen Kompetenz und der berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenz beträgt dabei $r = .83$. Dieses Ergebnis liefert ein erstes Indiz dafür, dass die Kompetenzbereiche erwartungsgemäß eng zusammenhängen, sie aber wohl nicht ein gemeinsames Konstrukt bilden. Letzteres wurde geprüft, indem die Items beider Kompetenzbereiche einmal gemeinsam eindimensional und einmal zweidimensional modelliert wurden. Dies wurde einmal für die gesamte Stichprobe und einmal nur für die Industriekaufleute vorgenommen. Da die eingesetzten FSE-Aufgaben nur den Kontext des Berufsbereichs Industriekaufleute aufweisen, sollte für die Teilstichprobe der Industriekaufleute bei einer angenommenen Anschlussfähigkeit des Mathematiklernens ein engerer Zusammenhang zwischen den beiden Kompetenzmaßen vorliegen.

In Tabelle 1 ist links der Modellvergleich gemeinsam für gewerblich-technische und kaufmännische Auszubildende dargestellt und auf der rechten Seite der Modellvergleich nur für kaufmännische Auszubildende. Als Gütekriterien für die Modelle wurden die klassischen Indizes AIC (Akaike Information Criterion) und BIC (Bayesian Information Criterion) herangezogen. Bei beiden Indizes wird das Modell mit geringerem Wert als das bessere Modell angesehen.

| Gesamte Stichprobe | | | Industriekaufleute | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Modell | AIC | BIC | Modell | AIC | BIC |
| 1-dim. | 43923.11 | 44556.12 | 1-dim. | 20060.11 | 20566.53 |
| 2-dim. | 43794.22 | 44438.44 | 2-dim. | 20023.05 | 20538.44 |

**Tabelle 1: Modellfitparameter für die gesamte Stichprobe (links) und für Industriekaufleute (rechts)**

Der Modellvergleich sowohl für alle Auszubildende als auch nur für kaufmännische Auszubildende zeigt für beide Indizes, dass die zweidimensionale Modellierung besser zu den Daten passt. Für die Stichprobe der kaufmännischen Auszubildenden unterscheiden sich die beiden Modellierungen in ihrer Güte aber nur sehr wenig.

## Diskussion

Im Rahmen der ManKobE-Studie ist es gelungen, ein reliables Testinstrument für berufsfeldbezogene mathematische Kompetenz für den kaufmännischen Ausbildungsbereich zu entwickeln. Die ersten Analysen der Daten vom ersten Messzeitpunkt geben Hinweise darauf, dass sich das Konstrukt der berufsfeldbezogenen mathematischen Kompetenz von dem der allgemeinbildenden mathematischen Kompetenz empirisch trennen lässt. Dennoch ist von einem (erwarteten) deutlichen Zusammenhang der beiden Konstrukte auszugehen. Ob eine zweidimensionale Modellierung mathematischer Kompetenz bei Auszubildenden einen wissenschaftlichen Mehrwert aufweist, wird sich im Ausbildungsverlauf der untersuchten Stichprobe herausstellen. Daten des zweiten Messzeitpunkts von ManKobE werden im Frühjahr 2014 erhoben. Deren Auswertung wird zudem aufzeigen, inwieweit schulisch erworbene mathematische Kompetenzen für das berufsfeldbezogene Mathematiklernen in der Ausbildung relevant sind.

## Literatur


Lehmann, R., Ivanov, S., Hunger, S. & Gänsfuß, R. (2005). *ULME I: Untersuchung der Leistungen, Motivation und Einstellungen zu Beginn der beruflichen Ausbildung*: Behörde für Bildung und Sport, Amt für Bildung, Referat Berufliche Bildung der Freien und Hansestadt Hamburg (Hrsg.).

Neumann, K., Vollstedt, M., Lindmeier, A., Bernholt, S., Eckhardt, M., Harms, U. et al. (2013). Strukturmodelle allgemeiner Kompetenz in Mathematik und den Naturwissenschaften und Implikationen für die Kompetenzentwicklung im Rahmen der beruflichen Ausbildung in ausgewählten kaufmännischen und gewerblich-technischen Berufen. In R. Nickolaus, J. Retelsdorf, E. Winther & O. Köller (Hrsg.), *Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik Beihefte: Vol. 26. Mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung. Stand der Forschung und Desiderata* (S. 113–137). Stuttgart: Steiner.

Nickolaus, R. & Norwig, K. (2009). Mathematische Kompetenzen von Auszubildenden und ihre Relevanz für die Entwicklung der Fachkompetenz - ein Überblick zum Forschungsstand. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 204–216). Münster: Waxmann.

Pant, H. A., Stanat, P., Schroeders, U., Roppelt, A., Siegle, T. & Pöhlmann, C. (Hrsg.). (2013). *IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I.* Münster: Waxmann.

Hans-Stefan SILLER, Regina BRUDER, Torsten LINNEMANN, Tina HASCHER, Eva SATTLBERGER, Jan STEINFELD, Martin SCHODL

# Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II – eine Konkretisierung

Um die Einordnung und Vergleichbarkeit von Prüfungsaufgaben am Ende der Sekundarstufe II im Rahmen der kompetenzorientierten standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Österreich (sR(D)P) zu ermöglichen, wurde eine Projektgruppe mit der Entwicklung eines Kompetenzstufenrasters beauftragt. In diesem werden die Dimensionen Operieren, Argumentieren und Modellieren auf jeweils vier Komplexitätsstufen begründet unterschieden. Im vorliegenden Beitrag werden aus dem anfänglichen Umgang mit dem Kompetenzstufenraster (Siller et al., 2013) Konsequenzen sowohl für die Kompetenzmodellierung als auch für die Entwicklung von Prüfungsaufgaben abgeleitet.

## 1. Zum Hintergrund des Kompetenzstufenrasters

Durch Kompetenzstufenmodelle wird den Lehrenden ein Konstrukt zur Kompetenzbeurteilung zur Verfügung gestellt. Kompetenzstufenmodelle sind darüber hinaus auch ein Hilfsmittel für die Auswahl von Prüfungsaufgaben hinsichtlich einer vergleichbaren Anforderungsbreite und -tiefe.

Empirisch gewonnene Kompetenzstufenmodelle zeigen an, inwiefern sich Aufgaben in ihrer Schwierigkeit für die Bearbeitung unterscheiden. Hinweise, worin diese Schwierigkeiten genau bestehen, lassen sich jedoch erst durch sorgfältige Analysen möglicher und tatsächlicher Lösungswege gewinnen. Normative Setzungen von Schwierigkeitsniveaus unterstellen, dass das gesetzte Niveau bei erfolgreicher Bearbeitung nicht unterschritten werden kann. Die Stufen des Kompetenzrasters postulieren, welche Kompetenzen notwendig sind, um diese zu lösen. Das schließt nicht aus, dass es bei komplexen Aufgabenstellungen immer mehrere Lösungsstrategien gibt.

In einem interaktiven mehrschrittigen Prozess, bestehend aus Aufgabenrating und der Diskussion von Kompetenzausprägungen und -ent–wicklungen wurde das vorliegende Kompetenzraster entwickelt, das einer Beschreibung von Kompetenzfacetten am Ende der Sekundarstufe II und als Grundlage für eine Bewertung von Beispielen der sR(D)P in Österreich dienen soll. Dies erfolgte vor dem Hintergrund, dass bei einer Zertifikatsvergabe, wie der sRP, das erreichte und messbare Kompetenzniveau im Fokus steht und nicht der zu diesen Ergebnissen im Detail führende Lernprozess.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1135–1138). Münster: WTM-Verlag

Für das erarbeitete Kompetenzstufenmodell (vgl. exemplarische Darstellung der Stufe 1 in Abb. 1) hat sich die Projektgruppe auf vier Ausprägungen (Stufen) der drei inhaltlichen Kompetenzbereiche verständigt, die in analoger Weise zu Meyer (2007) identifizierbar sind:

- Ausführen einer Handlung durch unreflektiertes Nachvollziehen (Stufe 1)
- Ausführen einer Handlung nach Vorgabe (Stufe 2)
- Ausführen einer Handlung nach Einsicht (Stufe 3)
- Selbstständige Prozesssteuerung (Stufe 4)

Die Stufe 4 wird im Rahmen einer Testsituation als Erwartungshorizont für alle Schüler/innen kaum erreichbar sein, ist jedoch für Lernprozesse wesentlich, da lt. gültigen Curricula Schüler/inne/n jedenfalls selbstständiges Arbeiten umsetzen müssen.

Neben diesen vier Stufen wurden drei Handlungsbereiche für das Modell definiert. Existierende Modelle (vgl. KMK, 2003; AECC, 2007; HarmoS, 2008) verwenden in der Regel einen vierten Bereich – das Interpretieren. Argumentieren beinhaltet immer (vorangegangene) Interpretationsarbeit, v.a. wenn es sich um (mathematische) Texte oder Kontexte handelt, auch beim (mathematischen) Modellieren muss die Interpretation mathematischer Resultate in der Realität immer berücksichtigt werden. Daher ist das Interpretieren in diesen beiden Handlungsbereichen in jeder Stufe integriert (vgl. Stufe 1 in Abbildung 1).

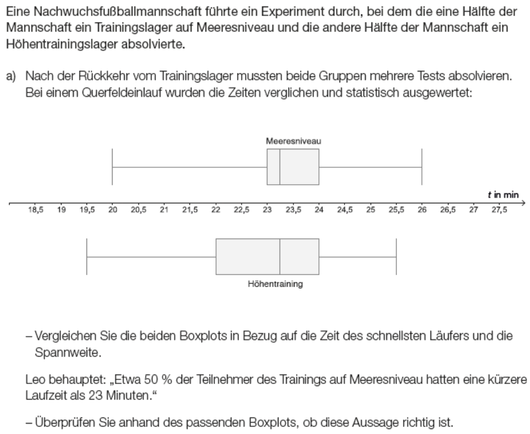
| Stufen | Operieren | Argumentieren | Modellieren |
|---|---|---|---|
| 1 | - Identifizieren der Anwendbarkeit eines gegebenen bzw. vertrauten Verfahrens<br>- Abarbeiten / Ausführen einer gegebenen bzw. vertrauten Vorschrift | - Einfache fachsprachliche Begründungen ausführen<br>- das Zutreffen eines Zusammenhangs oder Verfahrens bzw. die Passung eines Begriffes auf eine gegebene (innermathematische) Situation prüfen | - Durchführung eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation<br>- Verwendung vertrauter und direkt erkennbarer Standardmodelle zur Beschreibung einer vorgegebenen Situation mit entsprechender Entscheidung |

**Abbildung 1** Stufe 1 des vierstufigen Kompetenzstufenrasters in drei Handlungsbereichen

## 3. Erfahrungen im Umgang mit dem Kompetenzraster

Das Konzept der sR(D)P in Österreich beinhaltet zwei Kategorien von Aufgaben. Die Teil 1-Aufgaben, auf welche wir uns hier beschränken, fokussieren ausschließlich auf Grundkompetenzen (vgl. BIFIE, 2013a, S. 23). Es wird erwartet, dass diese Aufgaben jeweils genau einen Kompetenzbereich repräsentieren und Stufe 1 in der Regel nicht überschreiten.

Um sicherzustellen, dass die Aufgaben diese Anforderungen erfüllen, wurden sie einem unabhängigen Rating von 3 Expert/innen unterzogen. Nicht alle Aufgaben bestanden die Prüfung. An dieser Stelle sei eine Aufgabe exemplarisch dargestellt (vgl. BIFIE, 2013b), welche mit Hilfe des Kompetenzstufenmodells geratet wurde und im diesem Setting dahingehend aufgefallen ist, als sie allen Handlungsbereichen zugeordnet wurde.


Eine Nachwuchsfußballmannschaft führte ein Experiment durch, bei dem die eine Hälfte der Mannschaft ein Trainingslager auf Meeresniveau und die andere Hälfte der Mannschaft ein Höhentrainingslager absolvierte.

a) Nach der Rückkehr vom Trainingslager mussten beide Gruppen mehrere Tests absolvieren. Bei einem Querfeldeinlauf wurden die Zeiten verglichen und statistisch ausgewertet:



– Vergleichen Sie die beiden Boxplots in Bezug auf die Zeit des schnellsten Läufers und die Spannweite.

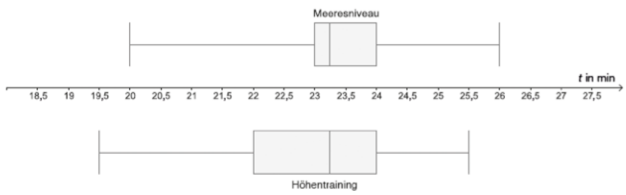
Leo behauptet: „Etwa 50 % der Teilnehmer des Trainings auf Meeresniveau hatten eine kürzere Laufzeit als 23 Minuten."

– Überprüfen Sie anhand des passenden Boxplots, ob diese Aussage richtig ist.

**Abbildung 2** Veröffentlichte Test-Aufgabe zur sR(D)P (bifie, 2013b, S. 14)

Aus fachdidaktischer Perspektive betrachtet, ist diese Mehrfachzuordnung wie folgt erklärbar: die in den beiden Aufgabenstellungen verwendeten Handlungsanweisungen „Vergleichen" bzw. „Überprüfen" sind an dieser Stelle ungünstig gewählt, da sich die Sinnhaftigkeit eines Vergleichs nicht erschließt und keine Überprüfung sondern eine Interpretation stattfindet und es werden in zwei elementare Grundkompetenzen gleichzeitig überprüft: Ablesen von Werten und interpretieren statistischer Kennzahlen (vgl. bifie 2013a, S. 16). Das sollte in Teil 1-Aufgaben vermieden werden. Um den Vorgaben (Teil 1-Aufgaben eher in Stufe 1) zu genügen, könnte eine mögliche Veränderung hilfreich sein:

Ein Teil einer Fußballmannschaft trainiert auf Meeresniveau, der andere in einem Höhentrainingslager. Nach der Rückkehr werden die Zeiten der Mitglieder beider Gruppen während eines Querfeldeinlaufs erfasst und dargestellt.




a) Deuten Sie die beiden Kastenschaubilder in Bezug auf die Zeit des schnellsten Läufers.

b) Leo interpretiert den 1. Boxplot wie folgt: „Etwa 50% hatten eine kürzere Laufzeit als 23 Minuten." Stimmt das?

Mit diesen Umformulierungen wird zweierlei erreicht: (1) Fokussierung auf eine eindeutige Grundkompetenz und (2) eindeutige Zuordnung zur Stufe 1 im Kompetenzstufenraster.

## 4. Konsequenzen

Die Erfahrungen im Umgang mit der in Abbildung 1 dargestellten Stufe 1 und den Teil 1-Aufgaben zur sRP zeigt, dass die Passung gut funktionieren kann. Würde man das Kompetenzstufenmodell graphisch mittels eines „Kompetenz-Dreiecks" (vgl. Abb. 3) aufbereiten, könnten die verwendeten Handlungsbereiche in die Ecken dieses Dreiecks gesetzt werden. Die Teil 1-Aufgaben würden dann sehr deutlich in den jeweiligen Ecken stehen.

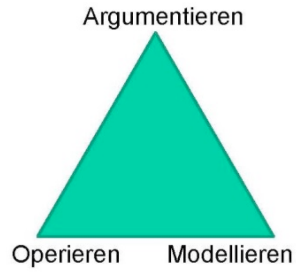



**Abbildung 3** Kompetenz-Dreieck (Linnemann, 2014)

Bei Teil 2-Aufgaben erweist sich die Einordnung als schwieriger. Es ist zwar erwünscht, dass eine solche auf Stufe 2 des Kompetenzmodells erfolgt, der formulierte Anspruch hinsichtlich der Vernetzung von Grundkompetenzen erschwert eine eindeutige und exakte Einordnung. Eine allfällige Schwerpunktsetzung bei der Einordnung hinsichtlich der Handlungsdimension kann hilfreich sein. Diese Aufgaben werden sich im „Kompetenz-Dreieck" eher innerhalb dieses wiederfinden, um die Streuung der „Kompetenzausprägungen" kenntlich zu machen.

## Literatur

AECC (2007): *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe*. Version 4/07. Institut für Didaktik der Mathematik (Hrsg.). Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

BIFIE (Hrsg.) (2013a). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen*. Wien. verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1442 [21.03.2014].

BIFIE (Hrsg.) (2013b). *Haupttermin 2013*. verfügbar unter https://www.bifie.at/system/files/dl/KL13_PT1_BHS_AMT_AA_CC_AU_0.pdf [21.03.2014].

HarmoS (2011). *Grundkompetenzen für die Mathematik*. Nationale Bildungsstandards. freigegeben von der EDK-Plenarversammlung.

KMK (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Luchterhand.

Linnemann, T. (2014). Elementare mathematische Handlungsaspekte. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM.

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., et al (2013). Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013.* (S. 950–953). Münster: WTM.

Johann SJUTS, Leer/Osnabrück

# Vorstellungen und Darstellungen: Evidenzbasierte Diagnostik und Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse

Erkenntnisse über Lernleistungen und damit auch über mathematisches Denken lassen sich sowohl aus Kollektiv- als auch aus Individualforschung gewinnen. Mehr als bisher gilt es indes, Verknüpfungen der Forschungsergebnisse herzustellen. Insbesondere sollte die Analyse von internen und externen Wissensrepräsentationen (Vorstellungen und Darstellungen) intensiviert werden, um praktikable und aussichtsreiche Hinweise für die Gestaltung wirksamer Unterrichtsarrangements in förderdiagnostischer Hinsicht zu erhalten. Dazu sei in den folgenden Ausführungen das Augenmerk auf das **Begründen** als allgemeine mathematische Kompetenz und auf das **Zerlegen einer Zahl in Summanden** als spezielle mathematische Denkhandlung gerichtet.

Aus der COACTIV-Studie bekannt ist die **31-Cent-Aufgabe**:

> Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Cent hinlegen, wenn du nur 10-Cent-, 5-Cent- und 2-Cent-Münzen zur Verfügung hast? Gib alle Möglichkeiten an und erläutere dein Vorgehen.

Sie gehörte in etwas anderer Form zum Aufgabenpool von PISA 2000 (Pfennig statt Cent, ohne den Zusatz „und erläutere dein Vorgehen“, dafür mit Hervorhebung des Wortes „alle“ in Fettdruck). Lediglich 2,9 % der 15-jährigen deutschen Schülerinnen und Schüler bei PISA 2000 haben diese Aufgabe gelöst. Damit zählte sie bei PISA 2000 zu den schwierigsten Aufgaben und deshalb zur höchsten Kompetenzstufe (Neubrand 2004, S. 261).

Wie wichtig das **Darstellen** ist, zeigt die Betrachtung eines möglichen Lösungsgangs. Die 5-Cent-Münzen können nur in ungerader Anzahl vorkommen, also einmal, dreimal oder fünfmal. Damit ergeben sich genau sechs Möglichkeiten:

$1\cdot5 + 0\cdot10 + 13\cdot2 = 31 \quad 3\cdot5 + 0\cdot10 + 8\cdot2 = 31 \quad 5\cdot5 + 0\cdot10 + 3\cdot2 = 31$

$1\cdot5 + 1\cdot10 + 8\cdot2 = 31 \quad 3\cdot5 + 1\cdot10 + 3\cdot2 = 31 \quad 1\cdot5 + 2\cdot10 + 3\cdot2 = 31$

Die 31-Cent-Aufgabe verlangt komplexes Argumentieren, denn es gilt, alle Möglichkeiten systematisch zu erfassen. Dabei sind die curriculare Wissensstufe (Arithmetik) und der rechnerische Anspruch niedrig (Jordan u. a. 2008, S. 93 f.). Nicht das Addieren selbst ist die Herausforderung, sehr wohl aber das **Zerlegen einer Zahl in Summanden unter gegebenen Bedingungen**. Die folgende Übersicht fasst die Ausprägung der jeweiligen Schwierigkeitsmerkmale zusammen (Cohors-Fresenborg, Sjuts & Sommer

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1139–1142). Münster: WTM-Verlag

2004, S. 114 f., Jordan u. a. 2008, S. 93 f.). Dabei wird hier lediglich nach geringer (0), mittlerer (1) und hoher (2) Schwierigkeit unterschieden.

| **Merkmal** | **Schwierigkeit** | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 |
| Curriculare Wissensstufe (Arithmetik) | x | | |
| Rechenfertigkeit | x | | |
| Außermathematisches Modellieren | x | | |
| Grundvorstellungsintensität | | x | |
| Sprachlogische Komplexität | | x | |
| Innermathematisches Modellieren (Darstellen) | | | x |
| Argumentieren | | | x |
| Kognitive Komplexität | | | x |

In welchem Ausmaß **Argumentieren** im Mathematikunterricht auftritt, ist aus der COACTIV-Studie bekannt. Die Auswertung von etwa 45.000 in den Schuljahrgängen 9 und 10 im Unterricht, in Klassenarbeiten und in Hausaufgaben eingesetzten Aufgaben zeigte, dass mathematisches Argumentieren auf einem absolut sehr niedrigen Niveau verlangt wird, „dass am Gymnasium immerhin jede zehnte Aufgabe in Klassenarbeiten mathematisches Argumentieren erfordert, während dies in anderen Schulformen nur für jede fünfzigste Klassenarbeitsaufgabe der Fall ist“ (Jordan u. a. 2008, S. 102). „Zieht man die von den Lehrkräften eingesetzten Aufgaben zu Rate, scheint mathematisches Argumentieren im deutschen Mathematikunterricht nahezu gar nicht gefordert zu sein“ (Jordan u. a. 2008, S. 99).

Schon nach ersten empirischen Ergebnissen über die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern und über die Bedeutung beruflicher Qualifikationen von Lehrerinnen und Lehrern sahen sich Bildungspolitik und Bildungsadministration zu Maßnahmen veranlasst. So beschloss die Kultusministerkonferenz recht bald Bildungsstandards und Standards für die Lehrerbildung. Gerade zum **Zerlegen einer Zahl in Summanden unter gegebenen Bedingungen** findet sich ein Niederschlag in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK 2004). **Argumentieren** und **Darstellen** gehören neben **Problemlösen**, **Kommunizieren** und **Modellieren** zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Eine Aufgabe zum **Zerlegen einer Zahl in Summanden unter gegebenen Bedingungen** dient als Musteraufgabe. In dieser Musteraufgabe wird verlangt, die Zahl 31 in zwei Summanden zu zerlegen. In der ersten Teilaufgabe ist einmal der Summand 12, einmal der Summand 0 und einmal gar kein Summand vorgegeben. In der zweiten Teilaufgabe ist das Zahlenpaar zu finden, bei dem eine Zahl um eins größer ist als die andere. In der dritten Teilaufgabe ist die Zahl 31 so in zwei Zahlen zu zerlegen, dass die eine durch 5, die andere durch 2 teilbar ist. Und in der vierten Teilaufgabe sind dazu zwei weitere Lösungen anzugeben. In dieser Teilaufgabenfolge treten daher alle **Anforderungsbereiche** auf (KMK 2004). Allerdings wird nur die Angabe der Summanden gefordert, eine Begründung dagegen nicht.

Die (vorwiegend **quantitative**) Kollektivforschung über mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern hat insgesamt eine Fülle von Ergebnissen erbracht, aus denen sich weiterführende diagnostische Befunde gewinnen lassen. Denn die Analyse der in Schulleistungsstudien eingesetzten Aufgaben ermöglicht eine Identifizierung schwierigkeitsbestimmender Merkmale, die für unterrichtliche Förderkonsequenzen nutzbringende Hinweise liefern. Bevor allerdings lerngruppen- oder personenbezogene Maßnahmen ergriffen werden können, ist eine gezielte Gruppen- oder Individualdiagnostik vorzusehen. Dafür kommen ergänzende (vorwiegend **qualitative**) Untersuchungen in Frage. Mit einem solchen Vorgehen wird insbesondere dem Anspruch an **Evidenzbasierung** im beruflichen Handeln Rechnung getragen.

Wie das folgende Beispiel zeigt, kann eine Studie, die sich im Tätigkeitsfeld Schule beinahe von selbst ergibt, wichtige Befunde über Schülerinnen und Schüler einer bestimmten Gruppe erbringen. Die folgende Aufgabe stammt aus der Regionalrunde der Mathematik-Olympiade 2013/2014 im Schuljahrgang 5:

Jens sitzt gerade im Zug, sieht sich in seinem Wagen um und denkt sich für seine Freunde in der Mathematik-AG eine Aufgabe aus:
(1) Die Anzahl aller Personen in meinem Abteil ist eine Quadratzahl zwischen 26 und 50.
(2) Es ist ein Erwachsener mehr als Kinder.
(3) Es sind zweimal so viele Mädchen wie Jungen.
(4) Es sind drei Frauen mehr als Männer.
a) Aus der Aussage (1) kann man herleiten, dass für die Anzahl der Personen nur zwei Zahlen in Frage kommen. Welche Zahlen sind das?
b) Aus der Aussage (2) kann man dann herleiten, wie viele Personen und wie viele Kinder im Wagen sind. Gib diese Anzahlen an und begründe.
c) Wie viele Frauen, Männer, Mädchen und Jungen fahren in dem Wagen? Begründe!

Liegt für eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern ein umfangreicher Satz authentischer Aufgabenbearbeitungen vor, bietet sich eine günstige Gelegenheit, diese qualitativ zu untersuchen, um so passgenaue Förderkonzepte entwickeln zu können. Dabei lassen die **Darstellungen** der Aufgabenbearbeitungen darauf schließen, welche **Vorstellungen** vom Zerlegen einer Zahl in Summanden unter gegebenen Bedingungen und welche **Vorstellungen** von einer Begründung oder von einer für vollständig gehaltenen Begründung bestehen. Hier aus dem Wettbewerb zwei Teillösungen zur Teilaufgabe c):

c) Es sind 24 Kinder.
5J & 10M klappt nicht, es fehlen noch 9.
8J & 16M klappt, also ist es richtig.

Es sind 25 Erwachsene.
10M & 13F klappt nicht, es fehlen noch 2.
11M & 14F klappt.

c) 24:3=8
8·2=16
8·1=8

25-3=22
22:2=11
11+3=14

Das Zerlegen einer Zahl in zwei Summanden mit gegebener Differenz und das Zerlegen einer Zahl in zwei Summanden mit gegebenem Verhältnis treten in zwei typisierbaren Varianten mathematischen Denkens auf. Sie unterscheiden sich deutlich und sind für Lehr-Lern-Prozesse in Mathematik von hoher Relevanz. Feststellbar ist der Unterschied in den **Darstellungen**. Diese sind Ausdruck unterschiedlicher **Vorstellungen** vom Zerlegen einer Zahl in zwei Summanden unter bestimmten Bedingungen. Als Befund über die Gruppe ist zugleich der unterschiedliche Begründungsgrad in den **Darstellungen** feststellbar, auch wenn die Notationsformen in ihren Anteilen (Text, Bild, Rechnung) variieren. Entsprechend dem Zerlegen wird man hier unterschiedliche **Vorstellungen** vom Begründen (und vom Begründungsgrad) annehmen dürfen. Aus den Analysen über eine bestimmte Gruppe, hier über eine Wettbewerbsgruppe, kann dann eine gezielte (evidenzbasierte) Förderung der beteiligten Schülerinnen und Schüler entstehen. Nimmt man nur das **Begründen** heraus, wäre eine Bearbeitung von Aufgaben denkbar, die mit nachdrücklichem Anspruch eine gestaffelte Vorgehensweise etwa in der folgenden Art verlangt:

Die Antwort ist aufzuschreiben. – Eine Begründung ist aufzuschreiben. – Die Vollständigkeit der Begründung ist zu prüfen. – Die Rechtschreibung ist zu überprüfen. – Die Lesbarbeit ist zu überprüfen. – Die Antwort samt Begründung ist ganz neu aufzuschreiben. Die individuell erstellten Aufgabenlösungen müssen sich dann einer Überprüfung im Diskurs der Gruppe unterziehen.

## Literatur:


Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J. & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, M. (2004), 109-144.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 29 (2), 83-107.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004.

Neubrand, M. (Hrsg.) (2004). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden: VS Verlag.

Anna-Christin SÖHLING, Münster

# Problemlösen – Wildes Probieren und Irrwege als Basis des Erfolgs

## 1. Einleitung

**Pferde-Fliegen-Problem**

In einem Stall werden Pferde und Fliegen gezählt. Es sind 15 Tiere. Zusammen haben sie 72 Beine. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es?

Aus: Das Zahlenbuch 4. (2005)

In eigenen Erkundungen lösten SchülerInnen klassische Problemaufgaben wie etwa das Pferde-Fliegen-Problem. Dabei konnte beobachtet werden, wie die Lernenden zunächst wild probierten, aber am Ende dennoch zu einer Lösung des Problems kamen. War es Zufall, dass die SchülerInnen zu einer Lösung kamen? In diesem Fall dürfte der Wert solcher Aufgaben für den Mathematikunterricht anzuzweifeln sein. Oder haben sie vielleicht die Aufgaben im Laufe ihrer Lösungsbemühungen mathematisch tiefer verstanden und sind eleganter zur Lösung gekommen? In diesem Fall würde die Chance bestehen, dass die SchülerInnen beim Lösen der Aufgaben über das Training von Fertigkeiten hinaus Mathematik gelernt haben.

Bei der Betrachtung der Problemlöseprozesse fiel auf, dass SchülerInnen beim wilden Probieren zunehmend systematischer vorgingen und wie sie letztlich eine schnellere, elegantere Lösungsmethode fanden. Doch wie kommen SchülerInnen zu einer Einsicht in die mathematische Struktur der Aufgabe, die ihnen beim Lösen hilft?

In der Literatur wird der Übergang vom wilden zum systematischen Probieren beispielsweise von Bruder und Collet (2011, S. 70) erwähnt, aber nicht näher beschrieben. Nach Schreiber (2011, S. 97) besteht das Potential des systematischen Probierens darin, dass aus den gewonnen Daten weitere Einsichten gewonnen werden können. Doch auch hier finden sich keine genaueren Beschreibungen eines solchen Erkenntnisweges.

## 2. Methoden

In Einzelinterviews wurden SchülerInnen der 4.-6. Klasse verschiedener Schulformen dazu aufgefordert, Problemaufgaben laut denkend zu lösen. Die Interviews wurden transkribiert und im Rahmen von Fallstudien interpretiert.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1143–1146). Münster: WTM-Verlag

## 3. Abduktionstheorie

Das Vorgehen der SchülerInnen wurde mithilfe der Abduktionstheorie nach Peirce rekonstruiert, die Meyer (2007) für die Mathematikdidaktik nutzbar machte. Bei der Abduktion wird von einem überraschenden Resultat aus auf einen erklärenden Fall und ein passendes Gesetz geschlossen. Dieser Schluss ist hypothetisch, da möglicherweise andere Gesetze und andere Fälle zum beobachteten Resultat führen.

Im Gegensatz zur Deduktion und zur Induktion ist die Abduktion ein Schluss, bei dem neue Erkenntnisse gewonnen werden können. Es kann die Anwendbarkeit bekannter Gesetze im neuen Kontext entdeckt werden oder es können neue Gesetze gefunden werden. Da sich SchülerInnen beim Problemlösen in ihnen unbekannten Bereichen bewegen, sind beide Möglichkeiten naheliegend.

## 4. Erkenntnisweg „Vom Probieren zur Strukturerkenntnis"

Das rationale Vorgehen von Schülern beim Problemlösen wurde also vor allem mithilfe des Abduktionsbegriffs rekonstruiert. Hier gelang es u.a., den typischen Erkenntnisweg strukturell zu bestimmen, der vom (wilden) Probieren zur strukturellen Einsicht führt. Dieser Erkenntnisweg besteht aus einer Reihe von logischen Schlüssen, die hier kurz skizziert und von denen der entscheidende erläutert werden sollen.

Zunächst deutet der Schüler die mathematische Struktur der Aufgabe, indem er sich beispielsweise fragt, durch welche Rechnungen er die Aufgabe lösen kann. Der Problemlöser kommt darauf, verschiedene Werte anzunehmen und nacheinander auszuprobieren (alter Lösungsweg W genannt).

Es kann nun sein, dass der Problemlöser innehält und seine bisherigen Probierresultate betrachtet und in ihnen eine Regelmäßigkeit feststellt. Der Problemlöser kann bemerken, dass man auch einfacher zu neuen Probierresultaten kommt oder dass man über eine „Abkürzung" direkt zur gewünschten Lösung kommt. Ausgangspunkt sind die bisherigen Probierresultate, die auf dem alten Lösungsweg W, willkürliches Probieren, erzielt wurden. Schematisch dargestellt:

Abduktion Finden eines neuen Lösungsweges $W_{neu}$

Resultat:

$$x_1 \overset{W}{\to} y_1$$
$$x_2 \overset{W}{\to} y_2$$
$$\vdots$$
$$x_i \overset{W}{\to} y_i$$

Und: Die Lösung ($x_L$,$y_L$) ist zu erreichen.

Gesetz: Wenn sich einige der bisher produzierten Paare ($x_i$,$y_i$) auf dem Lösungsweg $W_{neu}$ produzieren lassen, dann lassen sich auch alle beliebigen Paare ($x_i$,$y_i$) und damit auch die Lösung ($x_L$,$y_L$) auf dem Lösungsweg $W_{neu}$ erzeugen.

Fall: Einiges des bisherigen Produzierten lässt sich auf dem Lösungsweg $W_{neu}$ besser erzeugen.

$x_i$ ist ein angenommener Probierwert und $y_i$ sein Ergebnis. Beispielsweise ist $x_i$ die Aufteilung der 15 Tiere in 7 Pferde und 8 Fliegen und $y_i$ die 76 Beine dieser Tiere. $W_{neu}$ kann darin bestehen, Fliegen gegen Pferde zu tauschen, um von 76 Beinen ausgehend in Zweierschritten direkt auf das Ziel $y_L$ = 72 Beine zu gelangen. Die Zweierschritte in den Zahlen $y_i$ mag der Schüler an seinen vorigen Resultaten entdeckt haben.

Dieser abduktive Schluss ist unsicher, weil das Gesetz falsch sein kann und $W_{neu}$ nur zufällig für die betrachteten Resultate gilt. Der Problemlöser hat verschiedene Optionen, diese Unsicherheit zu reduzieren:

Option 1 Anwendung des neuen Lösungswegs (Der sich einstellende Lösungserfolg ist lediglich ein Indiz, aber bietet keine Gewähr für Gültigkeit des oben genannten Gesetzes).

Option 2 Untersuchung, ob der neue Lösungsweg zur mathematischen Struktur der Aufgabe passt.

Option 3 Untersuchung, ob der neue Lösungsweg zur eingekleideten Problemstellung passt.

Vor allem bei Option 2 und 3 besteht die Chance, dass der Problemlöser zu mathematischen Erkenntnissen kommt und etwas über die mathematische Struktur der Aufgabe lernt.

Im Vortrag wurde ein realer Fall beispielhaft analysiert, bei dem ein Schüler (6. Klasse) das Pferde-Fliegen-Problem löst. Der Schüler entdeckt den neuen Lösungsweg, die Gesamtanzahl der Beine durch eine bestimmte Anzahl von Tauschprozessen „Fliegen gegen Pferde“ zu verändern und nicht mehr jede beliebige Aufteilung der Gesamttiermenge zu überprüfen. Durch die sachbezogene Begründung seines neuen Lösungsweges, dass Fliegen 2

Beine mehr haben als Pferde und sich daher beim Tausch „Fliegen gegen Pferde“ die Gesamtanzahl der Beine verringert, zeigt er, dass er seinen neuen Lösungsweg auch im Kontext der Aufgabenstellung verstanden hat (Option 3).

Allerdings erkennt der Schüler nicht, dass unabhängig von der Einkleidung (Pferde, Fliegen) auf diesem Weg jegliches System von zwei linearen Gleichungen gelöst werden kann: Wenn das Ergebnis eines Probierwertes bekannt ist, kann stets die Differenz des Ergebnisses zum Zielergebnis genutzt werden, um direkt auf die Lösung zu kommen. Aus Platzgründen ist dieses hier nicht weiter ausgeführt und wäre Option 2. Um einen solchen Erkenntnisgewinn zu sichern, ist der Lehrer gefordert (siehe auch Wood, Bruner & Ross 1976).

## 5. Ausblick

Der vorgestellte Erkenntnisweg zeigt, wie es beim Probieren zu Struktureinsichten kommen kann. Außerdem stellte sich heraus, dass beim Probieren an bereits gewonnenen Probierresultaten weitere Erkenntnisse gewonnen werden können. Daher ist es sinnvoll, Probierresultate schriftlich festzuhalten und auch Rechnungen bis zum Ende durchzuführen, auch wenn sie nicht direkt auf die Lösung führen.

Weiterhin konnten SchülerInnen beim Gehen von Irrwegen beobachtet werden, also beim Anwenden von Lösungsverfahren, die für den Experten nicht erfolgversprechend sind. Trotzdem konnten die Lernenden das Problem am Ende lösen und es stellt sich die Frage, ob auch die Irrtümer einen Nutzen für die Lernenden hatten. Ein weiterer Erkenntnisweg, der den Weg von Irrtümern zu Einsichten in die mathematische Struktur der Aufgabe beschreibt, konnte ebenfalls herausgearbeitet, im Vortrag jedoch nur kurz angerissen werden.

## 6. Literatur

Bruder, R. & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Peirce, C. S. Collected Papers of Charles Sanders Peirce, (Band 1-6. Hartshorne, C. & Weiß, P. (Hrsg.), 1931-35; Band 7-8 Burks, A.W. (Hrsg.), 1985), Cambridge: Harvard University Press.

Schreiber, A. (2011). Begriffsbestimmungen. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung. Berlin: Logos Verlag.

Wittmann, E. & Müller, G. (Hrsg.) (2005). Das Zahlenbuch 4. Leipzig: Klett Verlag.

Wood, D., Bruner, J.S. & Ross, G. (1976) The Role of Tutoring and Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89-100.

Susanne SPIES, Ingo WITZKE, Siegen

# Bereichsspezifische Auffassungen von Analysis zu Studienbeginn

Auffassungen von Mathematik sind ein Faktor zur Erklärung der vielzitierten doppelten „Diskontinuität" im Lehramtsstudium und werden als ein Aspekt der Übergangsproblematik Schule-Hochschule gehandelt. So werden verschiedene hochschuldidaktische Bemühungen im Rahmen der universitären Lehrerbildung u.a. mit dem Ziel begründet, ein „tragfähiges Mathematisches Weltbild" bei den angehenden Lehrerinnen und Lehrern zu etablieren (vgl. z.B. Beutelspacher u.a., 2011). Dabei ist das Phänomen der „Mathematischen Weltbilder", „epistemologische Überzeugungen", „beliefs" oder des „beliefs systems" bezüglich der Disziplin Mathematik allgemein aber auch bezüglich des Lehrens und Lernen inzwischen viel beforscht. Eine umfängliche Erforschung der fachimmanenten Auffassungen bezogen auf Teilgebiete der Mathematik insbesondere mit Blick die Besonderheiten der Lehrerbildung steht in des noch aus. Hier setzt ein gemeinsames Forschungsprojekt der Universitäten Köln und Siegen an.

## Forschungsgegenstand und Untersuchungsdesign

Mit Blick auf den Übergang von Schule zur Hochschule von Lehramtsstudierenden liegt der Fokus der empirischen Untersuchung auf den bereichsspezifischen Auffassungen bezüglich der Nahtstellendisziplin Analysis. Dem liegt die Annahme zu Grunde, dass bei der Analysis als prominentem Teil der Oberstufenmathematik und einer der ersten hoschulmathematischen Inhalte im Studium ggf. vorliegende Auffassungsunterschiede in besonderer Weise wirksam werden. Das vorrangige Ziel der Untersuchung ist nun zunächst die *Beschreibung der bereichsspezifischen Auffassungen zur Analysis von Studienanfängern*. Dies bietet zum einen Bezüge sowohl zum Oberstufenunterricht als auch zur universitären Mathematikausbildung und ergänzt darüber hinaus die wenigen publizierten Untersuchungen zu dieser Teildisziplin (vgl. Tietze u.a. (2000), Törner (1999), Rösken & Rolka (2007), Erens & Eichler (2013)) um eine weitere Zielgruppe.

Als Untersuchungsinstrument entstand im Rahmen von Voruntersuchungen mit Schülerinnen und Schülern einerseits und Studierenden höherer Semester andererseits ein *gemischter halboffener Fragebogen*: Während der erste Teil zur Beschreibung einer Situation aus dem eigenen Analysisunterricht anregt und der dritte Teil aus einem standardisierten Fragebogen mit Blick auf die Mathematik allgemein besteht, werden im zweiten Teil freie Assoziationen zu zentralen Begriffen der (Schul-)Analysis, wie „Ableitung",

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1147–1150). Münster: WTM-Verlag

„Integral“, „Funktion“, „Tangente“ oder „Momentangeschwindigkeit“, erhoben. Bezüglich der beschriebenen Zielsetzung erwies sich die Erhebung der Assoziationen als Kernstück der Umfrage, so dass im Folgenden Auswertungsmethode und erste Ergebnisse dieses Fragebogenteils im Vordergrund stehen.

## Auswertungsinstrument

Aufgrund des qualitativen Charakters des Assoziationsfragebogens – neben Freitextantworten waren explizit auch Zeichnungen möglich – wurde zur Auswertung die *Qualitative Inhaltsanalyse* (vgl. Mayring 2010) herangezogen. Zur Erstellung des Kodierleitfadens wurde auf die Variante einer deduktiven Kategorienauswahl zurückgegriffen, die im Prozess induktiv weiterentwickelt wird. Als theoretische Grundlage dienten einerseits die gängigen „Aspekte des mathematischen Weltbildes: *Schema*, *Formalismus*, *Prozess* und *Anwendung*“ (Grigutsch u.a. 1998, S. 13). Andererseits wurden mit der *empirisch-gegenständlichen* und der *formalistischen Orientierung* auch solche Kategorien herangezogen, die die Auffassung bezüglich der ontologischen Bindung der Gegenstände beschreiben (vgl. Schoenfeld, 1989 und Burscheid & Struve 2010), da die Untersuchung gängiger Schulbücher hier mögliche Diskrepanzen zwischen schulischer Erfahrung und universitärer Erwartung vermuten lassen (vgl. Witzke, 2014).

| Kategorie | Beispielhafte schulanalytische Spezifikation | Ankerbeispiele (Assoziationsteil) |
|---|---|---|
| **Schemaorientierung** | Ableitungsbegriff = Anwenden von Ableitungsregeln, „Kurvendiskussion“, ... | 13. Wendepunkt<br>immer null geben<br>$f''(x)=0$<br>$f'''(x)\neq 0$ |
| **Logisch-strukturelle Orientierung** | Beweise (Ableitungsregeln, Hauptsatz), lokales Ordnen von Funktionseigenschaften, Vollständigkeit der reellen Zahlen, ... | 12. Integral<br>Die Gegenoperation zum ~~Ablte~~ Ableiten |
| **Formal-begriffliche Orientierung** | Begriffsunterscheidungen wie „hinreichend/ notwendig“, Funktion/ Graph/Funktionsterm, ... | Eine Funktion ordnet jedem x genau 1 y zu |
| **Anwendungs-orientierung** | Ableitung als lokale Änderungsrate, Integrieren als Rekonstruktion von Gesamteffekten, ... | 13. Wendepunkt<br>Berechnung, z.B. um wie viel Uhr oder Tag der Stausee wieder an Wasser verliert |
| **Empirisch-gegenständliche Orientierung** | Funktion = Kurve, Präexistenz des Flächeninhaltes beim kontextungebundenen Integrieren, . . . | <br>Integral d. Funktion (Flächeninhalt) |
| **Symbolische Orientierung** | Standardmäßig verwendete Symbole wie f‘(x), ∫ ... dx, f(x) | 11. Funktion<br>$f(x)$ |

**Abbildung 1: Kodierleitfaden verkürzt**

Nachdem in einer ersten theoriegeleiteten Phase die theoriebasierten Kategorien bezogen auf die Schulanalysis spezifiziert wurden, konnte nach der mehrmaligen Durchsicht des Materials der Kodierleitfaden induktiv angepasst werden: Der Prozessaspekt stellt sich als im Assoziationsteil nicht eindeutig erhebbar heraus, wohingegen dem Formalismusaspekt zwei sehr verschiedene Antwortmuster zugeordnet wurden und dieser daraufhin in eine *logisch-strukturelle* und eine *formal-begriffliche* Orientierung als Subkategorien aufgeteilt wurde. Desweiteren konnte im Rahmen des Assoziationsteils die formalistische Orientierung nicht eindeutig von diesen beiden Subkategorien unterschieden werden, so dass diese oben subsummiert wurde. In einem nächsten Iterationsschritt wurde mit der *symbolischen Orientierung* eine weitere Kategorie aufgenommen, die sich durch die Assoziation gängiger Symbole auszeichnet. In einem iterativen Prozess entstand so der in Abb. 1 verkürzt dargestellte Kodierleitfaden.

## Erste Ergebnisse und Ausblick

Mayring expliziert für die qualitative Inhaltsanalyse drei Grundformen des Interpretierens: *Zusammenfassung*, *Explikation* und *Strukturierung.* Der Fokus der derzeitigen Auswertungsarbeit liegt zunächst auf Letzterem, d.h. auf der Weiterentwicklung der oben angedeuteten Analyseeinheiten. Im Zentrum der Arbeit steht die Entwicklung valider und reliabler Kategorien, die als Einheit und Endprodukt der Qualitativen Inhaltsanalyse fungieren und deduktive wie induktive Aspekte vereinen. Das bisherige Kategoriensystem zeigte sich in ersten formativen Durchläufen bzgl. einer itemweise geführten Analyse als sinnhaft bzgl. der Ausgangsfragestellung. So wurden z.B. die hinzugenommenen gegenstangsbezogenen Kategorien wie „symbolisch“ oder „empirisch-gegenständlich“ häufig kodiert. Diskussionswürdig ist die noch vorhandene Möglichkeit der Mehrfachzuordnung einzelner Items. Diese ergibt sich in natürlicher Weise aus den unterschiedlichen theoretischen Ebenen der bisher verwendeten Kategorien. Ziel ist es in weiteren iterativen formativen Analysedurchgängen Oberkategorien zu entwickeln, um Trennschärfe für weitere (qualitative und quantitative) Analyseschritte sowie Einzelfallanalysen zu erhalten. Die erste itemweise Auswertung mit dem oben skizzierten Kodierleitfaden hinterließ den Eindruck häufiger Kombinationen von *empirisch-gegenständlicher und schematischer* auf der einen sowie *symbolischer und schematischer Orientierung* auf der anderen Seite.

Zusätzlich ergaben sich im inhaltsanalytischen Prozess weitere Ergebnisse die beachtenswert erscheinen: So zeigte eine signifikante Zahl von Befragten bzgl. des Items „Assoziationen zum Tangentenbegriff“ eine starke Dominanz elementargeometrischer Vorstellungen. Die Idee der „lokalen Schmieggeraden“ an eine Funktion war eher selten zu finden. Dies bestätigt ein häufig beschriebenes Phänomen (vgl. z.B. Danckwerts&Vogel 2006). Zudem zeigte sich, dass Grundlagenbegriffe wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit nur in seltenen Fällen überhaupt Assoziationen hervorriefen. Einen ähnlichen Effekt zeigte der Begriff der Momentangeschwindigkeit –

immerhin prominentestes Beispiel in Schulbüchern für lokale Änderungsraten. Interessanterweise zeigte sich ein ähnliches Bild bzgl. der Assoziationen zum Ableitungsbegriff. Nur ein verschwindend geringer Teil assoziierte hier den Begriff der Änderungsrate. Signifikant waren dagegen die Nennungen, die mit *Schema*, *symbolisch* oder *empirisch-gegenständlich* kodiert wurden. Insgesamt wurde die Kategorie *Anwendung* im Assoziationsteil erstaunlich selten kodiert, was Raum für die These lässt, dass Aufwand und Nutzen bzgl. des Curriculums hier nicht im gewünschten Zusammenhang stehen – wenn die Schüler Assoziationen mit semantischem Gehalt angaben, waren diese zumeist mit geometrischen Vorstellungen (Kurven, Flächen, Tangenten..) verknüpft und nicht mit Anwendungskontexten wie Sie das Konzept der Änderungsrate bereitstellt.

Weitere Analyseschritte im Projekt stellen – neben der Einbettung in aktuelle Forschungsergebnisse zur Thematik – eine geplante typisierende Strukturierung (Mayring 2010), eine vergleichende Analyse mit ebenfalls erhobenen Daten von Lehrenden sowie die Triangulation mit dem Standardisierten Teil der Befragung und Einzelfallanalysen (ggf. gestützt durch Folgeinterviews) dar.

## Literatur


Beutelspacher, A. & Danckwerts, R. & Nickel, G. & Spies, S. & Wickel, G. (2011): *Mathematik Neu Denken. Impulse für die universitäre Gymnasiallehrerbildung.* Wiesbaden.

Burscheid, H. J. & Struve, H. (2010): *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen*. Hildesheim: Franzbecker.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006): *Analysis verständlich unterrichten.* Wiesbaden.

Erens, R. & Eichler, A. (2013): *Reconstructing Teachers' beliefs on Calculus*. CERME8.

Mayring, P. (2010): *Qualitative Inhaltsanalyse*. Grundlagen und Techniken. Weinheim und Basel: Beltz.

Rösken, B. & Rolka, K. (2007): *Integrating Intuition: The Role of Concept Image and Concept Definition for Students' Learning of Integral Calculus.*In: The Montana Mathematics Enthusiast. S. 181-204.

Schoenfeld, Alan H. (1989): *Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior.* In: Journal for Ressearch in Mathematics Educations. 20 (4). S. 338-355.

Tietze, U. & Klika, M. & Wolpers, H. (Hrsg.) ($2000^2$): *Mathematikunterricht in der Sekundartufe II.* Band 1. Wiesbaden.

Törner, G. (1999): Domain-specific beliefs and calculus. In: Pehkonen & Törner (Hrsg.): *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of Mathematics.*S. 134-142.

Witzke, I. (2014): *Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichts.* In: Der Mathematikunterricht 2/14, S. 19-31.

Christian SPREITZER, Baden

# Numerisches Lösen von Differentialgleichungen: Realistische Modelle aus der Physik im Schulunterricht

## 1. Differentialgleichungen – in der Schulmathematik gerne ignoriert

In der angewandten Mathematik sind Differentialgleichungen (DGL) von immenser Bedeutung. Die grundlegenden physikalischen Theorien, auf denen ein großer Teil des technischen Fortschritts im 19. und 20. Jahrhundert beruht, sind als (Systeme von partiellen) DGL formuliert, darunter die Maxwellgleichungen für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, die Schrödingergleichung in der Quantenmechanik oder die Einsteingleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. Berühmte und gesellschaftsrelevante Beispiele von DGL finden sich jedoch nicht nur in der Physik, sondern in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften, aber auch in der Medizin, der Soziologie oder den Wirtschaftswissenschaften. Im Schulunterricht sind DGL allerdings kaum oder gar nicht zu finden. Dies liegt wohl zum einen an der geringen Vielfalt exemplarischer DGL, die exakt lösbar und einfach genug für eine Untersuchung im Rahmen der Schulmathematik sind. Zum anderen stößt man bei der Behandlung authentischer Fragestellungen und realitätsnaher Modelle sehr schnell auf DGL, die sich analytischen Lösungsmethoden ganz entziehen.

Mit numerischen Verfahren lässt sich für ein gegebenes System aus DGL und Anfangs- bzw. Randbedingungen hingegen immer eine (zumindest approximative) Lösung finden, sofern es sich um ein gut gestelltes Problem nach der Definition J. Hadamards handelt. Ein solches liegt vor, wenn die Existenz einer eindeutigen Lösung gesichert ist und diese stetig von den Daten abhängt (mit anderen Worten: die Voraussetzungen eines geeigneten Existenz- und Eindeutigkeitssatzes müssen erfüllt sein). Die Numerik spielt daher insbesondere in der angewandten Mathematik seit jeher eine große Rolle und ihre Bedeutung hat durch die digitale Revolution der letzten Jahrzehnte noch deutlich zugenommen. Im Zeitalter der Supercomputer werden physikalische Experimente durch Computersimulationen ergänzt, vielfach machen sie komplexe physikalische Vorgänge einer Modellierung überhaupt erst zugänglich. Beispiele dafür sind die Galaxienentstehung im frühen Universum, das Verschmelzen zweier Neutronensterne, der Kollaps eines massereichen Sterns zu einem schwarzen Loch oder irdische Probleme wie die Veränderung des Klimas durch den Einfluss des Menschen und damit verbundene Prozesse in der Natur. DGL sind ein zentrales Element in der Beschreibung, Modellierung und Simulation all dieser Vorgänge mithilfe von Hochleistungsrechnern.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1151–1154). Münster: WTM-Verlag

Die Wichtigkeit von DGL und numerischen Methoden in vielen Bereichen kommerzieller und wissenschaftlicher Forschung spiegelt sich im Schulunterricht nicht wider. Indes wäre das numerische Lösen von DGL durch die mittlerweile überall verfügbare Technologieunterstützung weder schwierig noch aufwendig. Vor allem würde die Behandlung von DGL und numerischen Lösungsverfahren die Beschäftigung mit realitätsnahen Problemen der angewandten Mathematik ermöglichen, in denen auch kompliziertere Wechselwirkungen, zusätzliche Einflussgrößen oder dissipative Vorgänge wie Reibung berücksichtigt werden. In der das Problem beschreibenden DGL äußert sich das Miteinbeziehen solcher Effekte in Form zusätzlicher Terme oder Abhängigkeiten in der DGL. Dies führt zwar in der Regel dazu, dass die Lösung nicht mehr durch elementare Funktionen ausgedrückt oder überhaupt nicht mehr exakt berechnet werden kann, für eine rein numerische Untersuchung der DGL ist es aber meist völlig unerheblich, ob weitere Terme dazukommen oder kompliziertere Funktionen in den Koeffizienten der DGL auftreten. Das Verfahren bleibt dasselbe und der Aufwand wächst nur unmerklich; es muss lediglich der Computer mit einer anderen Gleichung gefüttert werden. Durch die Verwendung technologischer Hilfsmittel bleibt also viel Raum für die Modellierung und die Diskussion der Ergebnisse.

## 2. Numerische Verfahren für Differentialgleichungen - keine Hexerei!

Um eine DGL numerisch zu lösen, muss diese zunächst diskretisiert werden; die „kontinuierliche" Beschreibung des betrachteten Vorgangs vermöge einer DGL wird durch eine diskrete Beschreibung mittels algebraischer Gleichungen ersetzt. Betrachten wir als Beispiel das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

eine gewöhnliche DGL erster Ordnung für eine Größe $x(t) \in \mathbb{R}$ ($t \in I \subseteq \mathbb{R}$) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$. Ist die Funktion $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfüllt sie eine globale Lipschitzbedingung bezüglich der zweiten Variable, dann existiert eine eindeutige Lösung dieser DGL; dies besagt der Satz von Picard-Lindelöf, ein zentrales Theorem in der Theorie gewöhnlicher DGL. Die einfachste numerische Methode zur Lösung des Anfangswertproblems (1) ist das Eulerverfahren. Dabei wird die Zeitvariable $t$ durch eine Folge von Zeiten $t_n = t_0 + nh$ ($n \in \mathbb{N}_0$) mit Schrittweite $h$ ersetzt und die DGL (1) durch eine Folge von Differenzengleichungen

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n). \tag{2}$$

Dieses Rechenschema kann für eine gegebene Funktion $f$ in wenigen Minuten in jeder Tabellenkalkulation programmiert werden. Je kleiner die Schrittweite $h$, umso besser approximiert die Folge $(x_n)_n$ die Werte der exakten

Lösung $x(t_n)$. Solche (und in der Regel viel raffiniertere) numerische Verfahren sind in jeder gängigen Mathematik-Software implementiert.

## 3. Ein Beispiel mit Vertiefungspotential – Stratosphärensprünge

Als am 14. 10. 2012 ein bekannter Getränkehersteller einen Fallschirmspringer aus einer mit einem Heliumballon bis in 39 Kilometer Höhe aufgestiegenen Kapsel springen ließ, war das weltweite Medienecho groß. Obwohl dieses Projekt keine neuen wissenschaftlichen Erkenntnisse zu Tage förderte, führte es zumindest dazu, dass sich überall auf der Welt Menschen mit physikalischen Fragen zum freien Fall und zum Aufbau der Atmosphäre beschäftigten, selbst wenn sie bis dahin kein Interesse an Physik hatten. Bei der Lektüre des offiziellen Berichts zum Sprung (Thompson et al., 2013), der Daten zur Höhe und Geschwindigkeit des Springers enthält, drängt es sich mathematisch und physikalisch interessierten Leser*innen geradezu auf, ein mathematisches Modell für Sprünge aus der Stratosphäre zu entwickeln und mit den Messdaten vom Sprung zu vergleichen.

Ausgangspunkt für die mathematische Beschreibung eines Stratosphärensprungs ist die Grundgleichung der Mechanik, Newtons zweites Gesetz:

$$ma = F_G - F_L \qquad (3)$$

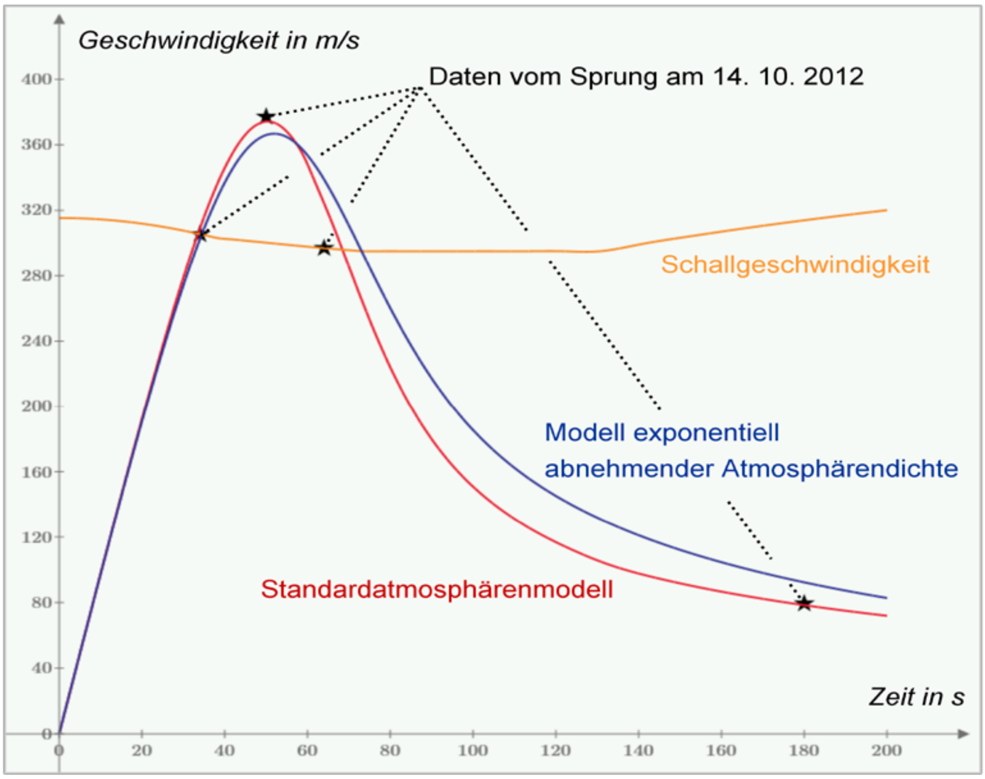
Hierin ist $m$ die Masse des fallenden Körpers, $a$ die Beschleunigung, $F_G$ die Schwerkraft und $F_L$ die Luftwiderstandskraft. Während $F_G = mg$ ($g \approx 9.81\mathrm{ms}^{-2}$) auch in der Stratosphäre in sehr guter Näherung gilt, gestaltet sich eine taugliche Beschreibung von $F_L$ ein wenig komplizierter. Der Luftwiderstand ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit und zur Atmosphärendichte $\rho$, die mit zunehmender Höhe abnimmt. Die Weg-Zeit-Kurve des fallenden Körpers ist Lösung der aus (3) resultierenden DGL

$$x''(t) + g - c\rho\big(x(t)\big)x'(t)^2 = 0 \qquad (4)$$

für die Höhe über Meeresniveau $x(t)$. In die Konstante $c$ gehen die Masse, die der Strömung ausgesetzte Querschnittsfläche des Körpers und das Strömungsprofil ein. Um von Gleichung (3) zur DGL (4) zu gelangen, wird neben dem mathematischen Zusammenhang zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung lediglich ein Modell für den Luftwiderstand benötigt. Dieses kann durchaus von Schüler*innen schrittweise erarbeitet werden (Spreitzer & Süss-Stepancik, 2014).

Charakteristisch für Sprünge aus der Stratosphäre ist ein ausgeprägtes Geschwindigkeitsmaximum aufgrund der in solchen Höhen bereits sehr geringen Atmosphärendichte. Diese beträgt in 39 Kilometern Höhe nur noch wenige Tausendstel ihres Wertes auf Meeresniveau. Ein einigermaßen realistisches Modell für die Atmosphärendichte zu verwenden ist daher essentiell.

In erster Näherung kann eine Exponentialfunktion $\rho(x) = \rho_0 e^{-x/x_0}$ benutzt werden, wie sie aus der Grundgleichung der Hydrostatik für eine Atmosphäre konstanter Temperatur folgt. Tatsächlich sind die Verhältnisse komplizierter, da die Temperatur stark mit der Höhe variiert. Für ein wirklich realitätsnahes Modell sollte $x \mapsto \rho(x)$ durch Interpolation tabellierter Werte der sogenannten US-Standardatmosphäre (NASA, 1976) konstruiert werden. Nach Wahl eines Modells für $\rho$ ist es ein Leichtes, die DGL (4) numerisch zu lösen und die Lösungskurven zu plotten.




Das Ergebnis kann nun mit den Daten verglichen und das Modell verfeinert werden (Modellierungskreislauf), etwa durch Berücksichtigung weiterer physikalisch relevanter Effekte. Gleichzeitig können Sprünge mit veränderten Parametern wie Ausgangshöhe, Masse, Strömungsprofil etc. simuliert werden, wodurch Schüler*innen ein tieferes Verständnis der physikalischen Hintergründe gewinnen.

## Literatur


National Aeronautics and Space Administration (1976). U.S. Standard Atmosphere, 1976. NOAA-S/T 76-1562.

Spreitzer, C. & Süss-Stepancik, E. (2014). Der freie Fall - Von der Stratosphäre bis zum Kuipergürtel. ISTRON-Schriftenreihe (erscheint im Juni 2014).

Thompson et al. (2013). Summary Report: Findings of the Red Bull Stratos Scientific Summit, http://www.redbullstratos.com (23. 3. 2014).

Lara SPRENGER, Dortmund

# Empirische Studie zum flexiblen Umgang mit Anschauungsmitteln beim Zahlvergleich von Dezimalzahlen

Im vorliegenden Beitrag wird ein laufendes Dissertationsprojekt vorgestellt, dass sich mit der Frage beschäftigt, inwieweit Lernende beim Zahlvergleich von Dezimalzahlen Anschauungsmittel wie Stellenwerttafel und Zahlenstrahl flexibel nutzen und welche Prozesse auf dem Weg zur Ablösung von Handlungen am konkreten Material von Bedeutung sind.

## 1. Lerngegenstand

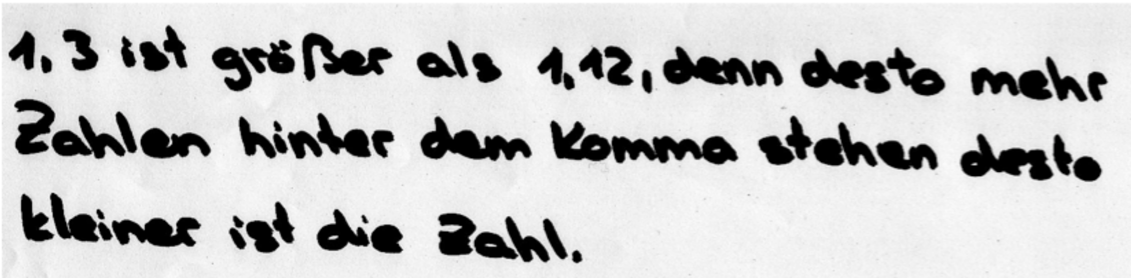



***Abb. 1: Aussage von Marie, 8. Klasse Realschule, beim Zahlvergleich von 1,3 und 1,12***

In Abb.1 ist die Aussage einer Schülerin zum Zahlvergleich von 1,3 und 1,12 dargestellt. Der Vergleich ist durchaus richtig, allerdings ist Maries Begründung nicht tragfähig. Lernende werden tagtäglich mit Dezimalzahlen konfrontiert und der Umgang mit ihnen hat hohe Relevanz für das alltägliche sowie das berufliche Leben (vgl. Padberg 2009). Durch die Erfahrungen z. B. mit Geld und Größen bringen die Schülerinnen und Schüler diverse Vorkenntnisse im Bereich der Dezimalzahlen mit. Dennoch zeigen zahlreiche Studien, dass es scheinbar große Probleme z. B. beim Zahlvergleich von Dezimalzahlen gibt (u. a. Padberg 2009; Steinle & Stacey 2004). Das Beispiel von Marie illustriert den aktuellen Forschungsstand, dass identifizierbare Schwierigkeiten beim Größenvergleich von Dezimalzahlen, auch noch in höheren Schulstufen der Sekundarstufe 1, auftreten. Die Ursache dafür ist nicht selten ein fehlerhaftes Dezimalzahlverständnis, dass u. a. auf einem falschen Transfer von Beziehungen und Strukturen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen beruht (vgl. u. a. Steinle & Stacey 2004; Padberg 2009). Im Bereich der natürlichen Zahlen haben die Lernenden Vorerfahrungen gesammelt und können diese im Normalfall abgelöst von Handlungen am konkreten Material nutzen. Dieses Wissen muss bei der Erweiterung des Stellenwertsystems von den natürlichen zu den positiv rationalen Zahlen in Dezimalschreibweise aufgrund verschiedener Grundvorstellungsumbrüche (Komma als neuer Bezugspunkt für die Stellenwerte; Abfolge der Stellenwerte; Zusammenhang zwischen ähnlich klingenden

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1155–1158). Münster: WTM-Verlag

Stellenwerten) restrukturiert, erweitert und abgegrenzt werden (vgl. Padberg 2009).

Ausgehend von Zahlvergleichen soll in der hier vorgestellten Studie untersucht werden, wie die Begriffsbildungsprozesse vom verstehenden Umgang mit Anschauungsmittels hin zur Ablösung von denselben gelingt. Ziel für die Schülerinnen und Schüler ist der Vollzug eines schematischen Zahlvergleichs auf symbolischer Ebene, wobei die inhaltliche Basis immer wieder reaktiviert werden kann. Die schematische Vorgehensweise beherrschen viele Lernende zwar durchaus, dies bedeutet allerdings nicht unbedingt, dass sie ein fehlerfreies Dezimalzahlverständnis besitzen, sondern meistens eher, dass sie ein auswendig gelerntes Rezept abspulen, ohne dies inhaltlich stützen zu können. Genau diese inhaltliche Verstehensgrundlage ist aber von großer Bedeutung (vgl. Steinle & Stacey 2004).

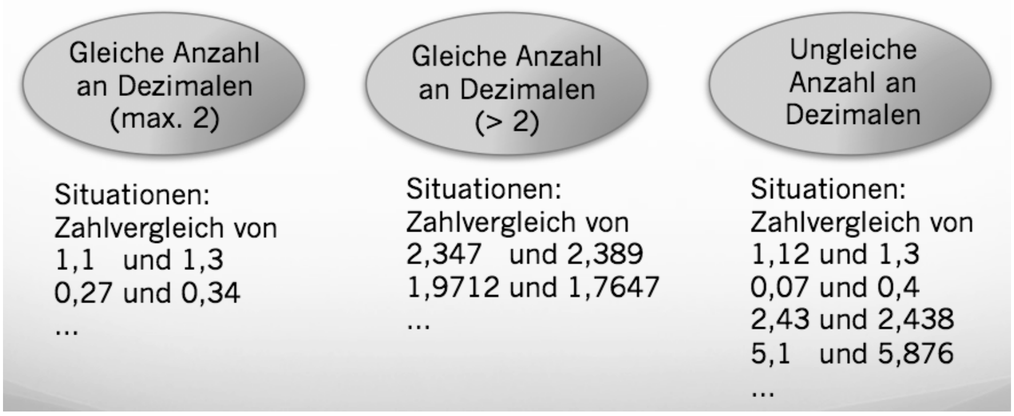



*Abb. 2: Auszug aus der normativen Gliederung in Situationsklassen*

Zur Strukturierung des Lerngegenstandes wurde dieser normativ in Situationsklassen gegliedert. Dazu wurden strukturgleiche Situationen identifiziert und zu Situationsklassen zusammengefasst. Eine Situation meint eine gestellte Aufgabe mit spezifischen Teilcharakteristika der zu lernenden Begriffe (vgl. Hußmann 2013). Abb. 2 zeigt einen beispielhaften Auszug dieser Klassifizierung aus normativer Sicht, wobei Lernende in der Empirie durchaus auch andere Situationsklassen identifizieren können.

## 2. Ablösung und Flexibilität

Meiner Studie liegt ein Verständnis von Ablösung zugrunde, welches Ablösung als Loslösung von konkreten Anschauungsmitteln begreift, in dem Sinne, dass die Anschauungsmittel tragfähig genutzt werden können, aber nicht mehr benötigt werden. Die zentralen Anschauungsmittel sind hier Stellenwerttafel und Zahlenstrahl. Ablösungsprozesse sind komplex, da sie sich sowohl auf eine Vielzahl von verschiedenen Situationen als auch auf verschiedene Anschauungsmitteln beziehen. Knüpft man an das Verständnis von Ablösung an, so wie es bei der Ablösung vom zählenden Rechnen verstanden wird, dann sind die (Weiter-)Entwicklung von Vorstellungen von und Einsichten über Zahlen und Rechenoperationen zentral für Ablösungsprozesse (vgl. Gerster 2009). Das bedeutet, dass Einblicke in und das Verständnis der Strukturen der Dezimalzahl positiv zu einer Ablösung beitragen und gleichzeitig eine inhaltliche Verstehensgrundlage bieten. Heinze, Star & Verschaffel (2009) treffen die Annahme, dass ein breites Wissen über Darstellungsformen und deren Gebrauch mit einem tieferen Verständnis der damit verbundenen mathematischen Bereiche einhergeht und sich daher vorteilhaft auf das weitere Lernen auswirkt. Diese Aussage lässt die Annahme zu, dass ein flexibler Umgang mit Anschauungsmitteln eine größere Chance bietet, ein tieferes Verständnis der Strukturen aufzubauen und somit wiederum eine Ablösung von den konkreten Anschauungsmitteln begünstigt. Unter Flexibilität wird hier die Fähigkeit verstanden, zwischen mindestens zwei Darstellungen auszuwählen, ohne dabei den Anspruch zu besitzen, die beste Wahl für die jeweilige Aufgabe zu treffen (vgl. u. a. Heinze, Star & Verschaffel 2009).

## 3. Forschungsinteresse

Die Studie wird im Rahmen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (vgl. Hußmann et al. 2013) umgesetzt und konzentriert sich auf die Rekonstruktion von Lernprozessen im Bereich des Zahlvergleichs von Dezimalzahlen und des Dezimalzahlverständnisses. Auf Grundlage der empirischen Ergebnisse wird der Lerngegenstand restrukturiert und das Lehr-/Lernarrangement weiterentwickelt. Dabei steht im Vordergrund, dass die Anschauungsmittel flexibel genutzt werden können und sich eine Basis bildet für langfristige Ablösungsprozesse. Das in diesem Beitrag beschriebene Forschungsinteresse liegt primär auf der Ebene der Betrachtung der individuellen Prozesse der Lernenden:

- Wie nutzen Schülerinnen und Schüler die Strukturen der Anschauungsmittel Zahlenstrahl und Stellenwerttafel?
- Inwiefern können sie diese flexibel beim Zahlvergleich von Dezimalzahlen nutzen?
- Welche Prozesse sind maßgeblich für eine nachhaltige Ablösung?

## 4. Design-Experimente

Der Blick auf die Empirie erfolgt in der fachdidaktischen Entwicklungsforschung durch Zyklen von Design-Experimenten (vgl. Hußmann et al. 2013). Für die vorgestellte Studie wurden erste Design-Experimente mit vier Schülerpaaren aus dem 8. Jahrgang verschiedener Realschulen durchgeführt, um die Validität des Forschungsfokus zu prüfen. Außerdem wurden erste empirische Erkenntnisse hinsichtlich der Schwierigkeiten und

Hürden bezüglich des Umgangs mit den Anschauungsmitteln Stellenwerttafel und Zahlenstrahl gewonnen. Über die in der Literatur beschriebenen Probleme ließen sich die Forschungsschwerpunkte weiter ausdifferenzieren. Zum einen betrifft dies die Kategorisierung verschiedener Situationen nach Situationsklassen: Z. B. treffen Lernende in bestimmten Situationen Aussagen, die sie dann auf andere Situationen übertragen, obwohl diese nicht strukturgleich sind. Hier ist interessant, welche Eigenschaften für diese nicht tragfähigen Transfers ursächlich sind. Weiter wird deutlich, dass die individuelle Einteilung in Situationsklassen sowohl bekannten Erfahrungsmustern folgt, aber auch maßgeblich von der situativen Rahmung abhängt. Und drittens scheint einiges darauf hinzuweisen, dass Fokuswechsel (also Wechsel zwischen den individuellen Ideen und Konzepten, mit denen Situationen individuell strukturiert werden (vgl. Hußmann 2013)) als Indiz für Flexibilität gesehen werden können, was auf ein tragfähiges inhaltliches Verständnis schließen lässt.

Auf diesen Beobachtungen und Erkenntnissen der ersten Design-Experimente bauen nun die nächsten Design-Experimente auf, in denen gezielt darauf geschaut wird, welche Prozesse für eine erfolgreiche Ablösung von Bedeutung sind, aber auch, welche Hürden überwunden werden müssen.

## Literatur

Gerster, H.-D. (2009): Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In: Fritz, A./Ricken, G./Schmidt, S. (Hrsg.): Handbuch Rechenschwäche, 248-268. Weinheim/Basel: Beltz.

Heinze, A./Star, J. R./Verschaffel, L. (2009): Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. In: ZDM 41, 535-540.

Hußmann, S. (2013): The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations, Preprint, TU Dortmund.

Hußmann, S./Thiele, J./Hinz, R./Prediger, S./Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In Kormorek, M./Prediger, S. (Hrsg.): Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme, 25-42. Münster: Waxmann.

Padberg, F. (2009): Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Steinle, V./ Stacey, K. (2004): A Longitudinal Study of Students´ Understanding of Decimal Notation: An Overview and Refined Results. In: Putt, I./Faragher, R./Mclean, M. (Hrsg.): Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education research Group of Australasia. Vol. 2, 541-548. Townsville: MERGA.

Ute SPROESSER, Joachim ENGEL, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

# Der Einfluss einer statistikbezogenen Unterrichtseinheit auf Selbstkonzept und Motivation bei Achtklässlern

Im Sinne der multikriterialen Zielerreichung (Pekrun & Zirngibl, 2004) stellt die Persönlichkeitsentwicklung neben der Förderung kognitiver Kompetenzen das Hauptziel von schulischem Unterricht dar. Dies liegt zum einen darin begründet, dass persönliche Merkmale wie Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit oder Interesse und Freude an Objekten und damit verbundenen Aktivitäten als wesentliche Determinanten des selbstregulierten Lernens angesehen werden, was wiederum einen Einfluss darauf hat, inwieweit Individuen lebenslang eigenaktiv lernen. Zum anderen besteht eine wechselseitige Beziehung zwischen Kompetenzerwerb und motivationalen Konstrukten wie Selbstkonzept und Interesse, die für das Lernen von Bedeutung sind.

Mit dem Begriff Fähigkeitsselbstkonzept werden „Überzeugungen zum eigenen Leistungsvermögen in einer bestimmten Domäne“ (ibid., S. 192f) zusammengefasst. Ein hohes Fähigkeitsselbstkonzept unterstützt die Initiierung von Leistungshandlungen sowie das diesbezügliche Durchhaltevermögen, während eine niedrige Ausprägung zu Vermeidungsstrategien, ungünstigen Attributionen und dem Auslassen von Lernsituationen führen kann (Helmke & Weinert, 1997). Neben dem Fähigkeitsselbstkonzept werden auch Emotionen und insbesondere das Interesse als wichtige Bedingungsfaktoren auf die Lernbereitschaft und den Kompetenzerwerb angesehen (Pekrun & Zirngibl, 2004). Intrinsische Motivation im Sinne von Freude an einer bestimmten Sache ist eng mit dem Konstrukt Interesse verwandt; beide werden als selbstbestimmte Person-Gegenstandsbeziehungen angesehen (Rheinberg, 2006).

Fähigkeitsselbstkonzept und Interesse gelten als Merkmale, die sich langfristig entwickeln (z.B. Möller & Trautwein, 2009; Hidi & Renninger, 2006), beide fallen aber dennoch über die Schullaufbahn hinweg tendenziell ab (z.B. Jacobs et al., 2010; Watt, 2004). Auch dies spricht dafür, diese motivationalen Dispositionen zu fördern. O’Mara und Kollegen (2006) stellen heraus, dass besonders domänenspezifische Interventionen das Fähigkeitsselbstkonzept beeinflussen können. Ebenso lässt sich auch Interesse durch schulische Settings verbessern (Krapp, 1998). Die fachspezifische Anlage dieser Konstrukte (Pekrun & Zirngibl, 2004) gab Anlass gezielt für den Bereich Statistik zu untersuchen, ob durch eine Intervention mit Unterrichtsinhalten aus diesem Teilbereich Interesse, Motivation und Selbstkonzept gefördert werden können (vgl. dazu auch Gundlach et al., 2010). Kon-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1159-1162). Münster: WTM-Verlag

kret stellten sich folgende Forschungsfragen: *Über welche auf Mathematik und auf Statistik bezogenen motivationalen Dispositionen verfügen Lernende in der 8. Realschulklasse? Inwiefern können diese motivationalen Dispositionen durch eine Unterrichteinheit gefördert werden? Inwiefern kann eine mit konkreten Aufgaben aus dem Inhaltsbereich Statistik verknüpfte Erhebung motivationaler Dispositionen diese Ergebnisse vertiefen?*

## Untersuchungsdesign

Diese Untersuchung bildet einen Teil des Projektes „ReVa-Stat", einer auf Förderansätze für Statistical Literacy fokussierenden Interventionsstudie. Den Auswertungen liegen Daten von 212 Mädchen und 238 Jungen zwischen 12 und 15 Jahren (M=13,50, SD=0,62) aus 25 achten Realschulklassen zugrunde. In einem Vor- und Nachtest-Design wurde neben einem Leistungstest und weiteren Fragebogenteilen ein Fragebogen zu motivationalen Dispositionen eingesetzt. Die darin enthaltenen mathematikbezogenen Skalen (Fähigkeitsselbstkonzept: 6 Items, Sachinteresse: 3 Items, intrinsische Motivation: 3 Items) gehen auf Pekrun und Kollegen (2002 bzw. 2003) zurück, während das statistikbezogene Fähigkeitsselbstkonzept (3 Items) und Interesse (3 Items) über eigene Adaptionen dieser bewährten Skalen (vgl. auch Gundlach et al., 2010) abgefragt wurden. Um Selbstkonzept, Interesse und Motivation aufgabenspezifisch zu erheben, gaben die Lernenden ihre Einschätzungen zu Statistik-Aufgaben mit verschiedenen inhaltlichen und prozeduralen Akzentuierungen ab. Alle motivationalen Konstrukte wurden über fünfstufige Likert-Skalen abgefragt. Zwischen den beiden Testzeitpunkten absolvierten die Lernenden jeder Klasse in vier leicht variierenden Treatmentgruppen eine materialiengestützte und lernendenzentrierte Unterrichtseinheit über vier Schulstunden.

## Ausgewählte Ergebnisse

Neben dem mathematikbezogenen Fähigkeitsselbstkonzept und dem mathematikbezogenen Interesse zeigten sich die entsprechenden auf Statistik bezogenen motivationalen Dispositionen als davon faktorenanalytisch trennbare Variablen, so dass Ergebnisse von Gundlach et al. (2010) repliziert werden konnten. Kovarianzanalysen mit Messwiederholung zeigten, dass sich die mathematikbezogenen Variablen von Vor- zu Nachtest kaum veränderten, es aber signifikante Zuwächse im Bereich einer kleinen Effektstärke (Cohen, 1988) beim statistikbezogenen Selbstkonzept und Interesse gab. Zwischen den einzelnen Treatmentgruppen waren keine signifikanten Unterschiede zu beobachten.

Bei der Auswertung der aufgabenbezogenen Schülereinschätzungen zu Fähigkeitsselbstkonzept, Motivation und Interesse zeigten sich einzelne aufgabenspezifische Unterschiede, es überwogen insgesamt jedoch ähnliche Einschätzungen der Aufgaben. Von Vor- zu Nachtest erhöhten sich fast alle aufgabenbezogenen Einschätzungen zu motivationalen Dispositionen leicht, wobei die Verbesserungen des aufgabenbezogenen Fähigkeitsselbstkonzeptes tendenziell höher ausfielen. Dabei hatte die Treatment-Zugehörigkeit keine signifikanten Effekte auf die berichteten Unterschiede. Auch in den durchschnittlichen Einschätzungen war das Fähigkeitsselbstkonzept insgesamt höher als die Werte von Interesse und Motivation, die sich als eng miteinander vernetzt herausstellten.

Die eher geringen Unterschiede zwischen den einzelnen Aufgaben legten es nahe, dass sich übergeordnete aufgabenspezifische Faktoren bilden lassen. Dies bestätigte eine explorative Faktorenanalyse, die auf der Basis von fünf Aufgaben die empirische Bildung aufgabenübergreifender Skalen erlaubte. Dabei ergab sich ein Faktor für das aufgabenbezogene Fähigkeitsselbstkonzept und ein weiterer, der aufgabenbezogen Interesse und Motivation verbindet. Sowohl bezogen auf das Fähigkeitsselbstkonzept als auch bezogen auf Interesse und Motivation ergaben sich damit empirisch trennbare und reliable ($\alpha \geq 0{,}83$) Skalen mit eindeutigen Faktorladungen.

## Diskussion und Ausblick

Die Forschungsfragen konnten dahingehend beantwortet werden, dass die domänenspezifische Förderung motivationaler Dispositionen wie dem auf Statistik bezogenen Fähigkeitsselbstkonzept und dem statistikbezogenen Interesse, das mit der intrinsischen Motivation für Statistik zusammenfiel, durch statistikbezogene Lernumgebungen möglich ist. Diese Erkenntnis konnte zusätzlich durch eine auf konkrete Aufgaben bezogene Analyse abgesichert werden, nach der Lernende ihre Fähigkeiten, die entsprechenden Aufgaben erfolgreich zu lösen, nach der Lernumgebung als größer einschätzten. Auch wenn weiterer Forschungs- und Auswertungsbedarf etwa zu Zusammenhängen mit der Kompetenzentwicklung besteht, ist davon auszugehen, dass die Förderung solcher domänenspezifischer motivationaler Dispositionen sich positiv auf nachfolgendes Lernen in dieser Domäne auswirken kann.

## Förderhinweis

Ute Sproesser ist Mitglied des Kooperativen Promotionskollegs „Effektive Lehr-Lernarrangements“ der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg und der Universität Tübingen, das vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg gefördert wird. Diese Studie wurde außerdem mit Forschungsmitteln der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg unterstützt.

## Literatur

Cohen, J. (1988): *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*, 2. Aufl., Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Helmke, A. & Weinert, F. E. (1997). Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie, Band 3 (Psychologie der Schule und des Unterrichts)* (S. 71-176). Göttingen: Hogrefe-Verlag.

Hidi, S. & Renninger, K. (2006). The four-phase model of interest development. *Educational Psychologist, 41*(2), 111-127.

Gundlach, M., Kuntze, S., Engel, J., & Martignon, L. (2010). Motivation and self-efficacy related to probability and statistics: Task-specific motivation and proficiency. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th Int. Conf. on Teaching Statistics*. Voorburg, The Netherlands: ISI. www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Jacobs, J.E., Lanza, S., Osgood, D.W., Eccles, J.S. & Wigfield, A. (2002). Changes in Children‘s Self-Competence and Values: Gender and Domain Differences across Grades One through Twelve. *Child Development 73*(2), 509-527.

Krapp, A. (1998). Entwicklung und Förderung von Interessen im Unterricht. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 45*, 186-203.

Möller, J. & Trautwein, U. (2009). Selbstkonzept. In E. Wild & J. Möller, *Pädagogische Psychologie* (S. 180 – 203). Heidelberg: Springer.

O'Mara, A.J., Marsh, H.W., Craven, R.G. & Debus, R.L. (2006). Do Self-Concept Interventions Make a Difference? A Synergistic Blend of Construct Validation and Meta-Analysis. *Educational Psychologist, 41*(3), 181-206.

Pekrun, R., Götz, Jullien, S., Zirngibl, A., v. Hofe, R., & Blum, W. (2002). *Skalenhandbuch PALMA: 1. Messzeitpunkt (5. Klassenstufe)*. Universität München: Institut Pädagogische Psychologie.

Pekrun, R., Götz, Jullien, S., Zirngibl, A., v. Hofe, R., & Blum, W. (2003). *Skalenhandbuch PALMA: 2. Messzeitpunkt (6. Klassenstufe)*. Universität München: Institut für Pädagogische Psychologie.

Pekrun, R. & Zirngibl, A. (2004). Schülermerkmale im Fach Mathematik. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, H.G. Rolff, J. Rost & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003*. Münster: Waxmann.

Rheinberg, F. (2006). *Motivation*. Stuttgart: Kohlhammer.

Watt, H.M.G. (2004). Development of Adolescents‘ Self-Perceptions, Values, and Task Perceptions According to Gender and Domain in 7th- through 11th-Grade Australian Students. *Child Development 75*(5), 1556-1574.

Anke STEENPASS, Essen

# „Rahmungsbasierte Deutungskompetenz“ – ein theoretisches Konstrukt zur Erkundung kindlicher Deutungen von Anschauungsmitteln

## Forschungsproblematik

In der mathematikdiaktischen Forschung ist mittlerweile eine weit verbreitete These, dass Anschauungsmittel keineswegs selbsterklärend sind und Schülerinnen und Schüler aktiv Strukturen hineinlesen müssen (vgl. Lorenz 1993, Söbbeke 2005, Steinbring 2005). *Wie* und vor welchem sinngebenden Hintergrund Grundschulkinder mathematische Darstellungen deuten differenzierter zu erkunden, ist die Intention dieses qualitativen Forschungsprojekts „KoRa“ (epistemologische **Ko**ntext und **Ra**hmenanalyse), gefördert vom BMBF. Soll ein Kind etwa den unbeschrifteten Zahlenstrahl in Abbildung 1 deuten, ist es vor eine komplexe und anspruchsvolle Aufgabe gestellt. Es muss die einzelnen Bestandteile der Darstellung, hier *Kontextelemente* genannt, wie den Bogen und die einzelnen Skalierungsstriche in ihrer unterschiedlichen Länge zueinander in Beziehung setzen und aktiv mit Bedeutung versehen.

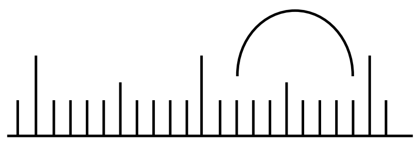


Abb. 1 Zahlenstahl mit Bogen

Dabei kommen Grundschulkinder zu sehr unterschiedlichen und vielfältigen Interpretationen. Der Drittklässler Medin zum Beispiel konstatiert zu Beginn seiner Deutungen: „Das ist Null *(zeigt auf den ersten kurzen Strich links)* weil Null am Anfang vom Zahlenstrahl ist. Hier ganz am Ende *(zeigt auf den rechten Rand der Darstellung)* kann ja keine Null sein“. Medin nutzt für seine Interpretation in seinem ersten Herangehen den ersten kurzen Skalierungsstrich. Weiter nimmt er eine bestimmte Deutungssicht ein: Es scheint hier als sei der Zahlenstrahl in diesem Moment eine Halbgerade für ihn, die bei Null beginnt. Diese Deutungssicht „der Zahlenstrahl ist eine Halbgerade“ beeinflusst in welcher Weise der Schüler das Diagramm mitsamt seiner Kontextelemente nutzt. Solch individuelle Deutungssichten, die Schülerinnen und Schüler – auch unbewusst – bei der Deutung von Anschauungsmitteln einnehmen, werden in diesem Forschungsprojekt herausgearbeitet. Dazu wird der Begriff der „Rahmung“ (vgl. Goffman 1977) genutzt, das hier ein durch Sozialisation erlerntes, meist unbewusst angewandtes Deutungsschema meint. Um diese Rahmungen rekonstruieren und kategorisieren zu können wurde das Analyseraster „Rahmungsbasierte Deutungskompetenz“ erarbeitet, das im Folgenden aspekteweise vorgestellt wird.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1163–1166). Münster: WTM-Verlag

## Das Analyseraster „Rahmungsbasierte Deutungskompetenz“

Das theoretische Konstrukt der rahmungsbasierten Deutungskompetenz ist als ein Analyseraster zu verstehen, das auf der Grundlage interpretativer Analysen klinischer Interviews erarbeitet wurde. Es stellt somit zugleich auch ein zentrales Ergebnis dieser Arbeit dar.

In einem ersten Schritt, der *Kontextanalyse* wird interpretativ analysiert, welche Kontextelemente einer Darstellung ein Kind nutzt und ob es sie in „dinglicher“ oder „relationaler“ Weise nutzt (vgl. Söbbeke 2005). Die dingliche Nutzung ist dadurch charakterisiert, dass die Kontextelemente einer Darstellung wie reale Dinge mit konkreten Eigenschaften gedeutet werden. Bei der relationalen Nutzungsweise hingegen werden die Kontextelemente in ihrer strukturellen Beziehung zu anderen Elementen verwendet.

Auf Grundlage der Kontextanalyse werden in einem zweiten Analyseschritt Rückschlüsse auf die zugrundeliegende Rahmung des Kindes vorgenommen. Als zwei wesentliche Rahmentypen konnten durch sorgfältige interpretative Analysen ausgewählter Fallsbeispiele *systembezogene* und *dingbezogene* Rahmentypen herausgearbeitet werden. Beide Rahmentypen werden im Folgenden anhand exemplarischer Beispiele vorgestellt.

## Der dingbezogene Rahmentyp

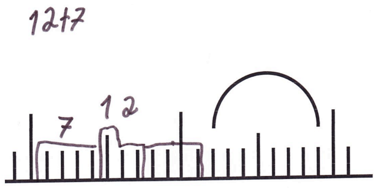



Abb. 2

In Abbildung 2 sehen wir eine Deutung der Drittklässlerin Sonja, die aus einer Auswahl an vorgegebenen Termen die Aufgabe „12+7“ als passend zum Zahlenstrahl ausgewählt hat. Die Abbildung zeigt, wie Sonja die Aufgabe eingezeichnet hat. Dazu erklärt sie: *„Wir haben das ja auch in Mathe gelernt, dass die kleinen Striche immer Einer sind, die Mittleren immer Fünfer oder Zehner und die ganz Großen Hunderter“*. Im Laufe des Interviews wird deutlich, dass sie die Skalierungsstriche als diskrete Einer- Zehner-, oder Hunderterstäbe nutzt, die ähnlich wie Cuisenairstäbe zusammengerechnet werden. Auf diese Weise sieht sie die Aufgabe „12+7“ in das Diagramm hinein, indem sie einen mittellangen und zwei kleine Striche zu „12“ und die vier kleinen Striche links, sowie die drei kleinen Striche rechts davon zu „7“ zusammenfasst. Die Ergebnisse der *Kontextanalyse* (Abb. 3) zeigen, dass Sonja einzelne Skalierungsstriche in ihrer unterschiedlichen Länge zur Deutung nutzt. Diese Kontextelemente werden von ihr wie diskrete Dinge genutzt, die als Einzelobjekte vorgegebene konkrete Eigenschaften aufweisen.

| Kontext-elemente | dinglich | relational |
|---|---|---|
| Striche | x | |
| Länge der Striche | x | |

Abb. 3

Welche Rahmung nimmt Sonja ein? Ihre vermehrt dingliche Nutzungsweise der Darstellung gibt Hinweise dafür, dass Sonja eine „Welt der Dinge“ heranzieht um das Diagramm zu deuten. In dieser Welt werden die Skalierungsstriche wie Einer- oder Zehnerstäbe gesammelt und zusammengerechnet. Diese subjektive „Rechenstäbe-Rahmung“ wird daher einem *dingbezogenen Rahmentyp* zugeordnet. (Auf eine vollständige Darstellung und Erläuterung des Rasters zur Rahmenanalyse musste aus Patzgründen im Rahmen dieses Artikels verzichtet werden.)

**Der systembezogene Rahmentyp**

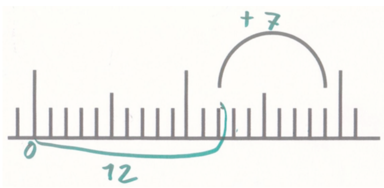


Abb. 4

Auch Anne wählt die Aufgabe „12+7“ als passend. Jedoch zeichnet sie den Term in anderer Weise ein (Abb.4). Wie im Interview durch Annes Äußerungen und ihre Zeigehandlungen deutlich wird, markiert sie die „12“ als einen Messabstand. Sie erklärt der Interviewleiterin wo sie „12“ sieht, indem sie den kurzen Skalierungsstrich unter dem Bogenanfang mit dem rechten Zeigefinger fixiert hält und mit dem linken Zeigefinger beim ersten langen Strich beginnend zwölf abmisst. Dabei macht sie eine kleine Pause am zweiten langen Strich. Sie zeichnet dann einen weiteren Bogen in die Darstellung und schreibt „12“ darunter. Anne scheint an dieser Stelle den Summanden zwölf nicht als Position an einem Skalierungsstrich, sondern als einen Abstand zu nutzen. Die Skalierungsstriche sind nun Markierungspunkte für Messabstände. Auch zur Null, die Anne an den ersten langen Strich schreibt, äußert sie sich: „Das muss keine Null sein *(zeigt auf den ersten langen Strich)*. Aber bei der Aufgabe [12+7, Anm. der Autorin] hier schon. Weil wenn hier die Null wär *(zeigt auf den zweiten langen Strich)* dann wär hier die zwei *(zeigt auf den kurzen Strich unter dem Bogenanfang)*“. Anne variiert an dieser Stelle ihre Beschriftung und positioniert „0“ und „2“ als Rangzahlen an den zweiten langen Skalierungsstrich bzw. an den Bogenanfang.

Die Ergebnisse der Kontextanalyse (Abb. 5) zeigen, dass Anne die Skalierungsstriche flexibel deutet und ihnen je nach Rolle im *System* verschiedene Bedeutungen zuweist. Die Länge der Skalierungsstriche wird nicht etwa wie bei Sonja zur Codierung vorgegebener fixer Zahlwerte genutzt, sondern zur Strukturierung des Diagramms verwendet. Ihre Äußerung zur Null deutet an, dass sie auch den ersten langen Strich flexibel deutet. Dies bestä-

| Kontext-elemente | dinglich | relational |
|---|---|---|
| Striche | | x |
| Länge der Striche | | x |
| erster langer Strich | | x |

Abb. 5

tigt sich im Laufe des Interviews als Anne den Term „99-7" am Zahlenstrahl verortet und dazu „80" an den ersten langen Strich schreibt. Anne nutzt Skalierungsstriche, ihre unterschiedliche Länge und den ersten langen Strich in relationaler Weise.

Wie lässt sich nun Annes Rahmung beschreiben? Die Schülerin weist dem Diagramm Bedeutung zu, indem sie die Kontextelemente zueinander in Beziehung setzt. Sie zieht zur Deutung eine „Welt der Beziehungen" heran. Ihre subjektive und situationsbezogene „Messabstand-Rahmung" wird daher einem *systembezogenen Rahmentyp* zugeordnet.

## Zusammenfassung

Die exemplarischen Auszüge aus den Analysen der Fallbeispiele „Sonja" und „Anne" bestätigen zum einen die Vermutung, dass die eingenommene Rahmung entscheidend beeinflusst in welcher Weise eine Schülerin, ein Schüler ein Anschauungsmittel deutet und nutzt. Weiter zeigen sie zwei grundlegend verschiedene Rahmentypen auf: Während ein Kind ein Anschauungsmittel innerhalb eines dingbezogenen Rahmens wie in einer „Welt der Dinge" nutzt, in der die Kontextelemente wie reale Einzelobjekte konkrete Eigenschaften in sich tragen, nutzt ein Kind die Kontextelemente innerhalb eines systembezogenen Rahmens als Teile eines Symbolsystems in Beziehung zu anderen Elementen der Darstellung. Die Mikroanalysen unter Verwendung des Konstruktes der rahmungsbasierten Deutungskompetenz ermöglichen dem Forscher, sich ein *Gesamtbild* der Nutzungsweise eines Kindes zu machen. Somit können auch so überraschende Deutungsweisen wie Sonjas vor ihrem prägenden Hintergrund gesehen werden um sie umfassender verstehen zu können.

## Literatur

Goffman, E. (1977). *Rahmen-Analyse*. Frankfurt: Suhrkamp.

Lorenz, J. H. (1993). *Mathematik und Anschauung*. Köln: Aulis Verlag.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – an Epistemological Perspective*. Mathematics Education Library (MELI), No. 38. Berlin, New York: Springer.

Anna Susanne STEINWEG, Bamberg, Thomas WETH, Erlangen-Nürnberg

# Auch das noch? Tablets im Kindergarten

## 1. Motivation

Eines der Ziele des Apple Mitbegründers Steve Jobs war es, einen ‚Computer' zu konstruieren, der auch von Kindern bedient werden kann. Unabhängig davon, ob man es begrüßt oder verurteilt (vgl. z. B. Spiewak 2012), wenn Kinder von klein an Computer bzw. Tablet-PCs verwenden, zeigen diverse Untersuchungen, dass es gelungen ist, ein Bedienkonzept zu entwickeln, das ‚kinderleicht' ist (vgl. z. B. Dworschak in Krauthausen 2012, 153).

Im Folgenden soll der Versuch der Autoren beschrieben werden, die sich bietenden Möglichkeiten zu nutzen und ein Applet für Tablets zur mathematischen Früherziehung zu entwickeln, das die Forschungskenntnisse zur mathematischen Früherziehung aufgreift und zum Ausgangspunkt der App MAIKE (Mathematik im Kindergarten entdecken) macht.

## 2. Mathematische Frühförderung

In der nationalen und internationalen mathematikdidaktischen Literatur finden sich etliche Hinweise darauf, welche Kompetenzen Kindergartenkinder bis Schulbeginn entwickelt haben sollten, um ihnen einen guten Start im Mathematikunterricht der Schule zu ermöglichen (z. B. Wittmann 2009, Steinweg 2013, 2008, NAEYC & NCTM 2010). Ebenso gibt es Forschungen in der Entwicklungspsychologie, die einige dieser Kompetenzen als prädikativ für schulische Leistungen nachweisen konnten (Dornheim 2008). Zu den wesentlichen Kompetenzen gehören u. a. Zählen und Abzählen, Anzahlen Erfassen (auch simultan), gleichmächtige Mengen Identifizieren (Invarianz) oder auch Seriation (in Reihen nach Größe zu- bzw. einordnen).

Ebenfalls liegen seit vielen Jahren Forschungsergebnisse darüber vor, in welcher Art mathematische Frühförderung gelingen kann (z. B. Gasteiger 2010, Gasteiger & Benz 2012). Insbesondere werden hierbei die Bedeutung der Anschlussfähigkeit der inhaltlichen Angebote sowie die Thematisierung zentraler Grundideen von Anfang an betont. Die Ausgestaltung der Aktivitäten geschieht dabei sinnvoll als angereicherte und anregungsreiche Spiel- und Lernumwelt.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1167–1170). Münster: WTM-Verlag

## 3. Struktur, Konzeption und Gestaltung der App MaiKe

Die Konzeption von MaiKe orientiert sich inhaltlich an anschlussfähigen, mathematischen Grundideen und wesentlichen (prädikativen) Kompetenzen (vgl. Abschnitt 2).

MaiKe begegnet den Kindern als eine Folge von 6 ‚Welten‘: Strand (Abb. 1), Bauernhof, Märchenwald etc., die jeweils 10 ‚Spiele‘ beinhalten (symbolisiert durch die Rechtecke, aus denen das Strandbild aufgebaut ist).

Abb. 1 ‚Welt‘
Beispiel Strand

Von ‚Welt’ zu ‚Welt’ variieren die Inhalte der ‚Spiele‘ und bilden somit insgesamt über alle ‚Welten‘ die wesentlichen Kompetenzen ab, die zum einen virtuell abbildbar sind und zum anderen bis Schulbeginn erworben werden sollten. Der Schwierigkeitsgrad steigt dabei von ‚Welt’ zu ‚Welt’.

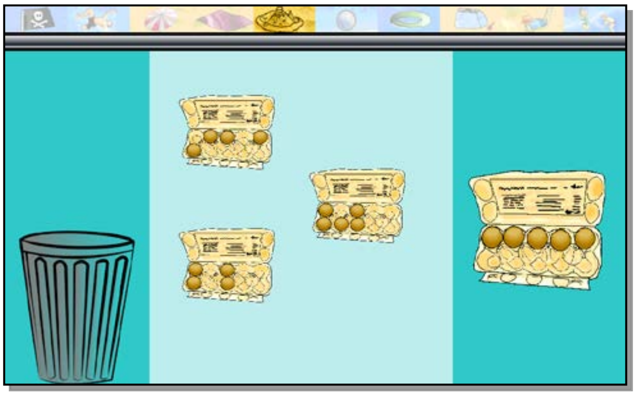


Abb. 2 ‚Spiel‘
Beispiel Mengenzuordnungen

Jedes ‚Spiel‘ wiederum besteht aus 6 bis 10 ‚Aufgaben‘ gleichen Typs, die z. B. auf den kardinalen Vergleich einer unstrukturierten mit einer strukturierten Menge (Abb. 2), Würfelzahlen, symmetrische Figuren, Seriation, Würfelbauten … abzielen.

In Folge einer Evaluation von ca. 40 bereits auf dem Markt verfügbarer Applets zur mathematischen Frühförderung erwiesen sich als wesentliche Gestaltungsaspekte beim Design der App MaiKe:

(I) Voraussetzungsfreier Zugang
(II) Mathematisch sinnvolle Veranschaulichungen
(III) Mathematische Korrektheit

ad (I)
Ein *voraussetzungsfreier Zugang* wird in MaiKe durch eine einheitliche Bedienungskonzeption realisiert. Diese beinhaltet im Wesentlichen folgende drei Aspekte:

- Verzicht auf Lese- und Ziffernkenntnis, d. h. keine Verbalbeschreibungen und keine Aufgaben in Symbolsprache.
- Bunte Objekte in der ‚Welt' sind zugänglich, graue und noch unsichtbare müssen noch erspielt/erarbeitet werden (vgl. Abb. 1 sowie auch oben ‚Welten' und ‚Spiele').
- Die ‚Aufgaben' innerhalb der ‚Spiele' werden stets durch Wischen gelöst: Objekte, die im hellen Bereich liegen (Abb. 2), sind immer beweglich und werden in den dunklen Bereich gezogen/gewischt – überflüssige/falsche Objekte werden in den Mülleimer ‚geworfen'.

ad (II)

Auf der Ebene der ‚Spiele' und ‚Aufgaben' sind *Veranschaulichungen* in MAIKE durchgängig *mathematisch sinnvoll* und an didaktischen Materialien orientiert, d. h. sie unterstützen die Lösungsprozesse und ermöglichen den Aufbau stimmiger Vorstellungsbilder (Abb. 2). Unsinnige Grafiken (Abb. 3) oder überflüssige Illustrationen werden innerhalb der ‚Spiele' – also bei allen ‚Aufgaben' – vermieden.

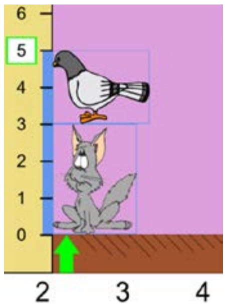


Abb. 3
Kindergarten
Addition Lite

Lediglich die Ebene der ‚Welt' bietet als Motivation eine dem Fortschritt entsprechende, zunehmend wachsende Bilderwelt. Als einzige, extrinsische Motivation wird verwendet, dass die ‚Welten' nur sukzessive freigespielt werden können und dass innerhalb einer ‚Welt' die Bilder – je nach Lösungsqualität der bearbeiteten ‚Spiele' – evtl. so lang graue (hässliche) Lücken aufweisen (vgl. Abb.1), bis die Aufgaben hinreichend gut gelöst ist.

ad (III)

Wie die oben erwähnte Analyse von Apps zur mathematischen Frühförderung weiter zeigte, ist die Forderung nach *mathematischer Korrektheit* der Aufgabenstellungen keineswegs unberechtigt. So gilt – offensichtlich entgegen der Meinung einiger App-Entwickler – bei MAIKE z. B. ein Quadrat als Rechteck und ein Rechteck als Parallelogramm (Abb. 4) und dergleichen mehr.

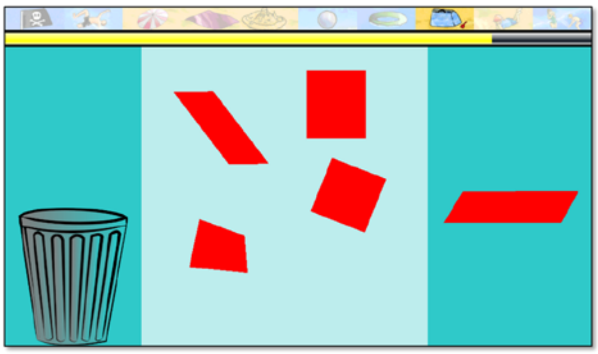


Abb. 4 ‚Spiel'
Geometrische Formen

## 4. Bemerkungen

Derzeit wird ein Prototyp von MAIKE in qualitativen Einzelfallstudien bezüglich spontaner Erstbegegnung, Akzeptanz durch die Kinder etc. evaluiert. Geplant sind Studien im Quasi-Längsschnitt zu Entwicklungsprofilen und möglichen Lerneffekten.

Die Autoren sind überzeugt davon, dass mathematische Frühförderung anregungsreiche Umgebungen und Interaktion mit anderen erfordert. MAIKE kann folglich nur ein Baustein einer sinnvollen Förderung sein.

MAIKE nutzt fundierte Aufgabenbeispiele, die auch als Anregung zu objektbezogenen Handlungsideen außerhalb der virtuellen Welt dienen können. Die Fokussierung auf prädikative und mathematisch anschlussfähige Kompetenzen ermöglicht Erwachsenen (Eltern, pädagogischen Fachkräften) zusätzlich einen geschulten Blick auf wesentliche Inhalte mathematischer Frühförderung.

## Literatur


Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche.* Berlin: logos.

Gasteiger, H. & Ch. Benz (2012). Mathematiklernen im Übergang - kindgemäß, sachgemäß und anschlussfähig. In S. Pohlmann-Rother & U. Franz (Hrsg.). *Kooperation von KiTa und Grundschule* (S. 104-120). Köln: Wolters Kluwer.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte*. Münster: Waxmann.

Kindergarten Addition Lite, Version 3.0. I did it Learning LLC. Online verfügbar unter: https://itunes.apple.com/us/app/kindergarten-addition-lite/id493046107?mt=8&ign-mpt=uo%3D4 (14.03.2014)

Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Heidelberg: Springer-Spektrum.

NAEYC (National Association for the Education of Young Children) & NCTM (National Council for Teachers of Mathematics) (2002/updated 2010). *Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings.* Online verfügbar unter: http://www.naeyc.org/files/naeyc/file/positions/psmath.pdf (14.03.2014)

Spiewak, M. (2012) Macht uns der Computer dumm? *DIE ZEIT*, Nr. 37. Online verfügbar unter: http://www.zeit.de/2012/37/Jugendliche-Medienkonsum-Spitzer-Vorderer (14.03.2013)

Steinweg, A. S. (2013). Mathematische Bildung. In J. Sechtig et al. (Hrsg.), *Augen auf im Kita-Alltag!* (S. 73–89). Berlin: logos.

Steinweg, A. S. (2008). Zwischen Kindergarten und Schule - Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.) *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und in den Naturwissenschaften* (S. 143 – 159). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Wittmann, E. (2009). *Das Zahlenbuch - Handbuch zur Frühförderung*. Stuttgart, Leipzig: Klett.

Julia STEMMER, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

# Mathematische Interaktionen zwischen Kindergartenkindern beim Spielen von Regelspielen

## 1. Theoretischer Hintergrund

Mit „Beginn des 21. Jahrhunderts rückte, gerade auch im Zusammenhang mit der Veröffentlichung der ersten PISA-Ergebnisse, die frühkindliche Bildung wieder vermehrt in den Fokus der Aufmerksamkeit" (Rathgeb-Schnierer, 2012, 50). Aufgrund dieser Neuorientierung im Elementarbereich geht es darum, „bereichsspezifisch, am individuellen Lernweg des Kindes orientierte Fördermöglichkeiten zu erkunden und nach adäquaten Formen zu suchen, das kindliche Interesse an der Erkundung dieser Bereiche zu wecken" (Roux, 2008, 14). Hierfür wurden zunehmend mathematische Frühförderprogramme veröffentlicht, welche diesen Ansprüchen gerecht werden, beziehungsweise gerecht werden wollen. Schuler (2013) teilt die verschiedenen Ansätze in lehrgangsorientierte Programme, alltagsintegrative Ansätze sowie punktuell einsetzbare Materialien ein.

Im vorgestellten Dissertationsprojekt, das sich dem Ansatz der punktuell einsetzbaren Materialien zuordnen lässt, wird das mathematische Lernen beim Spielen von Regelspielen untersucht. Generell finden sich diesbezüglich in der Literatur zwei verschiedene Ansätze: Zum einen wird auf die Spielbegleitung durch die pädagogische Fachkraft fokussiert und gefragt, wie das mathematische Lernen im Spielprozess durch diese angeregt und unterstützt werden kann (z.B. Schuler, 2013). Zum anderen wird betont, dass der eigentliche Spielcharakter durch die gezielte Begleitung und Anregung von Lernprozessen nicht erhalten bleibt und deshalb die pädagogische Fachkraft so wenig wie möglich begleitend eingreifen sollte (z.B. Hauser, 2013).

Abgesehen von der Art und Quantität der Spielbegleitung spielt die Interaktion für das Lernen eine große Rolle. Zahlreiche Autoren (z.B. Vygotski, 1978) heben in verschiedenen Zusammenhängen die Bedeutung von Interaktionen für das Lernen hervor. Daran anknüpfend werden die mathematischen Interaktionen zwischen Kindergartenkindern beim Spielen von Regelspielen im Mittelpunkt des Dissertationsprojekts stehen, denn „the key to construction of knowledge is interaction" (Williams, 1994, 158).

## 2. Forschungsinteresse und Fragestellungen

Das Ziel des Dissertationsprojekts liegt in der Analyse der mathematischen Interaktionen zwischen Kindergartenkindern beim Spielen von Regelspie-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1171–1174). Münster: WTM-Verlag

len. Ausgehend von diesem Forschungsinteresse wurden folgende Fragen formuliert, welche qualitativ, unter Beachtung der in der Literatur zu findenden Gütekriterien (z.B. Deppermann, 2008; Mayring, 2010), untersucht werden:

– Wie kann eine mathematische Interaktion definiert werden?
– Wie gestalten sich die mathematischen Interaktionen, mit Blick auf die Interaktionsauslöser, -muster, -inhalte und dem Interaktionsende?
– Wodurch zeichnen sich Spiele aus, die mathematische Interaktionen besonders fördern?

Sofern es das erhobene Datenmaterial zulässt, werden Unterschiede in den mathematischen Interaktionen abhängig von verschiedenen Variablen, wie Alter, Geschlecht, Gruppengröße und Länderzugehörigkeit betrachtet.

## 3. Datenerhebung

Die Datenerhebung fand im Rahmen des von der Internationalen Bodenseehochschule geförderten Projekts „Spielintegrierte Mathematische Frühförderung (SpiMaF)“ statt. Schwerpunkt des Projekts war die Entwicklung und Erprobung eines Sets von 20 Regelspielen zur arithmetischen Frühförderung. Der Fokus der Datenerhebung lag gekoppelt an die Erprobung der entwickelten Spiele und mit Blick auf das Dissertationsvorhaben, sowohl auf dem konkreten Handeln mit den Spielmaterialien als auch auf dem verbalen und nonverbalen Interaktionsverhalten der Kinder. Um möglichst naturalistische und abbildgetreue Aufnahmen (vgl. Deppermann, 2008) zu erhalten, welche verbale Äußerungen, „nonverbales kommunikatives Verhalten und gegenständliches Handeln (Deppermann 2008, 24) beinhalten, wurde die Videografie als Datenerhebungsinstrument gewählt.

Die Stichprobe setzt sich aus jeweils zehn Kindergärten der Länder Deutschland, Österreich und Schweiz zusammen. In jedem Kindergarten wurden zwölf Spiele (u.a. Halli Galli, Shut the box, Bohnenspiel, Früchtespiel) videografiert. Die einzelnen Videosequenzen dauern im Schnitt 20 bis 30 Minuten und zeigen die Spiel- und Interaktionsprozesse zwischen den Kindern.

## 4. Strukturierung des Datenmaterials

Das vorhandene Datenmaterial muss unter „*direktem Bezug zu den primären Untersuchungsfragen*“ (Deppermann, 2008, 36) sowie „thematisch bzw. handlungslogisch“ (Deppermann, 2008, 36) aufbereitet werden. Hierzu dient als Analyseeinheit die mathematische Interaktion. In Anlehnung an verschiedene Interaktionsdefinitionen (z.B. Piontkowski, 1976) verstehe ich unter einer mathematischen Interaktion eine Folge von mindestens zwei Äußerungen mehrerer Kinder über einen mathematischen Inhalt.

Ziel der Strukturierung des Datenmaterials ist es, anhand der vorangegangenen Definition die mathematischen Interaktionen zwischen den Kindern herauszufiltern, um diese für die spätere Analyse aufbereiten zu können. Das methodische Vorgehen hierfür gestaltet sich wie folgt:

Erstellung eines Kodierleitfadens und Kodierschulung

⇩

Erste Probekodierung zweier Kodiererinnen anhand eines Videos:
- Berechnung der prozentualen Übereinstimmung in MaxQDa
- Diskussion über unterschiedliche Kodierungen
- Überarbeitung des Kodierleitfadens

⇩

Zweite Probekodierung anhand 1/10 der Videos aus Deutschland:
- Berechnung der prozentualen Übereinstimmung in MaxQDa
- Diskussion über unterschiedliche Kodierungen
- Überarbeitung und Fertigstellung des Kodierleitfadens

⇩

Doppelkodierung von 1/10 des gesamten Datenmaterials:
- Berechnung der prozentualen Übereinstimmung in MaxQDa

⇩

Einfachkodierung aller Daten

⇩

Überprüfung der prozentualen Übereinstimmung in MaxQDa nach der Hälfte des gesamten Datenmaterials

⇩

Transkription der mathematischen Interaktionen

Im Anschluss an die Transkription erfolgt die Analyse der mathematischen Interaktionen. Einen Einblick in erste Überlegungen zur diesbezüglichen Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt gegeben.

## 5. Analyse mathematischer Interaktionen

In der gegenwärtigen Literatur finden sich verschiedene Aspekte, unter welchen sich (mathematische) Interaktionen betrachten lassen. Auf dieser Grundlage wurden deduktiv Kategorien entwickelt, die sich auf folgende Bereiche beziehen:

- Strukturierung der Interaktionen in Interaktionsauslöser, Interaktionsmuster und Interaktionsende (vgl. Straka & Macke, 2002)
- inhaltsbezogene mathematische Aspekte (vgl. Kaufmann, 2010), wie zum Beispiel im Inhaltsbereich Zahlen und Operationen das Zählen, das Mengen vergleichen oder das erste Rechnen

- inhaltsübergreifende mathematische Denk- und Handlungsweisen (vgl. Rathgeb-Schnierer, 2012), welche sich im Klassifizieren, Strukturieren und Seriieren zeigen
- Begründungs- bzw. Argumentationsgrundlage (vgl. Toulmin, 1969), wie zum Beispiel das verbale oder materialgestützte Begründen

Ergänzend zu diesen deduktiv entwickelten Kategorien werden anhand des vorhandenen Datenmaterials Subkategorien gebildet, um differenzierte Aussagen über die einzelnen Interaktionen treffen zu können.

Die Frage zur Erfassung der Qualität der Interaktionen mit Hilfe eines solchen Kategoriensystems ist noch offen. Allerdings soll es nach der Kategorisierung möglich werden, Spiele, welche gehaltvolle mathematische Interaktionen hervorrufen herauszufiltern, um hieraus Kriterien für interaktionsfördernde Spiele aufzustellen.

## Literatur


Deppermann, A. [4](2008). Gespräche analysieren. Eine Einführung. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Hauser, B. (2013). Spielen. Frühes Lernen in Familie, Krippe und Kindergarten. Stuttgart: Kohlhammer.

Kaufmann, S. (2010). Handbuch für die frühe mathematische Bildung. Braunschweig: Schroedel.

Mayring, P. [11](2010). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Piontkowski, U. (1976). Psychologie der Interaktion. München: Juventa Verlag.

Rathgeb-Schnierer, E. (2012). Mathematische Bildung. In: D. Kucharz (Hrsg.). Elementarbildung. Bachelor / Master. Weinheim; Basel: Beltz, 50-85.

Roux, S. (2008). Bildung im Elementarbereich – Zur gegenwärtigen Lage der Frühpädagogik in Deutschland. In: Hellmich, F., & Köster, H. (Hrsg.). Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 13-25.

Schuler, S. (2013). Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs. Münster: Waxmann.

Straka, G. A. & Macke, G. (2002). Lern-Lehr-theoretische Didaktik. Münster: Waxmann.

Toulmin, S. E. (2003). The uses of argument. Cambridge University Press: Cambridge.

Vygotski, L. S. (1978). Mind in society. The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Williams, L. R. (1994). Developmentally Appropriate Practice and Cultural Values. A Case in Point. In: Mallory, B. & New, S. (Hrsg.). Diversity and Developmentally Appropriate Practices. Challenges for Early Childhood Education. New York: Teachers College Press, S. 137-165.

Hannes STOPPEL, Münster

# Einflüsse unterschiedlicher Computeralgebrasysteme auf Tätigkeiten bei der Lösung von Aufgaben in der Sekundarstufe II

## 1. Einleitung

Computeralgebrasysteme (CAS) werden seit mehr als zwanzig Jahren im Mathematikunterricht eingesetzt. Hierbei veränderten sich die CAS im Laufe der Zeit. Dies schloss Veränderungen in der Syntax der Befehlsoberflächen ein. Ein deutliches Beispiel hierfür ist die im HP Advanced Scientific Calculator 28S enthaltene umgekehrt polnische Notation.

Unterschiede in den Syntaxen der Befehle bei CAS können zu Unterschieden in Lösungsansätzen und Lösungswegen führen. In dieser Untersuchung werden die Syntaxen der CAS Casio ClassPad, des TI Nspire und des HP Prime betrachtet. Hierzu wird in Abschnitt 3 eine Aufgabe des Zentralabiturs des Jahres 2007 in NRW betrachtet. Dabei werden sich Unterschiede in den Tätigkeiten in Verbindung zur Syntax der Befehlsbibliothek zeigen. Auf die Tätigkeiten wird von einem bestimmten Blickwinkel aus geschaut. Dieser wird in Abschnitt 2 kurz beschrieben.

## 2. Tätigkeiten

Unterschiede in den Lösungswegen in Verbindung mit der Syntax der Operationen eines CAS werden hier aus der Perspektive der Tätigkeitstheorie betrachtet. Es existieren bereits Untersuchungen bzgl. Tätigkeiten beim Einsatz von digitalen Werkzeugen (vgl. Kaptelinin & Nardi, 2006; Vandebrouck, Monaghan & Lagrange, 2013). Im Unterschied zu diesen Untersuchungen wird hier auf die Anwendung von CAS an bestimmten Stellen von Lösungen von Aufgaben eingegangen. Dabei wird auf die Struktur einer Lösung nach dem in Stoppel (2012b) beschriebenen Typ zurückgegriffen. Zum Verständnis des Prinzips betrachten wir Tätigkeiten vom Blickwinkel in Engeström (1987), wie es Abbildung 1 zeigt.

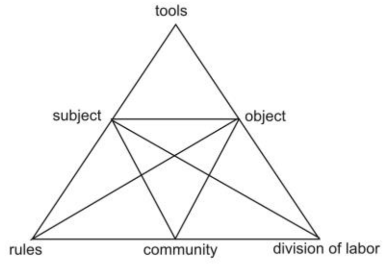



Abbildung 1: Tätigkeitssystem nach Engeström 1987

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1175–1178). Münster: WTM-Verlag

In dieser Studie werden die Punkte folgendermaßen interpretiert:

| | |
|---|---|
| Subject: | Sammlung von Informationen, Entwicklung von Methoden zur Lösung |
| Object: | Operation und Objekt für Vorschriften |
| Tool: | Technologisches Artefakt mit Leitung zum Ziel |
| Rules: | Fähigkeiten des CAS |
| Community: | Verhältnisse zwischen SchülerInnen und CAS |
| Division of labor: | Weg durch die Lösung |

In dieser Studie werden verschiedene technikbasierte Artefakte betrachtet. Es geht um den Gebrauch verschiedener technischer Hilfsmittel beim Lösen derselben Aufgabe. Hier stellt sich die Frage, wie Lernumgebungen und Wege durch Lösungen beim Gebrauch verschiedener technikbasierter Artefakte verändert werden.

In Anlehnung an Stoppel (2012b) werden Subjekte genauer untersucht, indem eine Hierarchie von Motiven und verschiedenen Methoden betrachtet werden. Diese Unterteilung wurde nicht zuletzt vorgenommen, um den Einsatz und die Funktion eines CAS durchleuchten zu können. Hierbei werden sich Unterschiede zwischen Lösungswegen zu Aufgaben in Verbindung mit den Syntaxen der CAS zeigen.

## 3. Aufgabenbeispiel

Als Beispiel wählen wir hier eine Aufgabe des Zentralabiturs in NRW, Mathematik GK 2007.

*Anlässlich der Fußball-Europameisterschaft 2008 in Österreich und der Schweiz plant ein Süßwarenhersteller eine Großproduktion von Überraschungseiern, von denen jedes zehnte – ein sogenanntes EU-Ei – eine witzige Fußballfigur enthalten soll. Zum Versand werden Paletten durch ein Zufallsproramm mit Eiern bestückt. EM-Eier sind von anderen Überraschungseiern äußerlich nicht zu unterscheiden.*

*a) Philipp kauft in einem Supermarkt zwei Paletten mit je 25 Überraschungseiern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er[...]*

*(2) in der ersten Palette mindestens 3 Figuren findet,[...]*

Ein Zyklus zu einer möglichen Lösung lässt sich in Verbindung zu Stoppel (2012b) wie in Abbildung 2 darstellen.

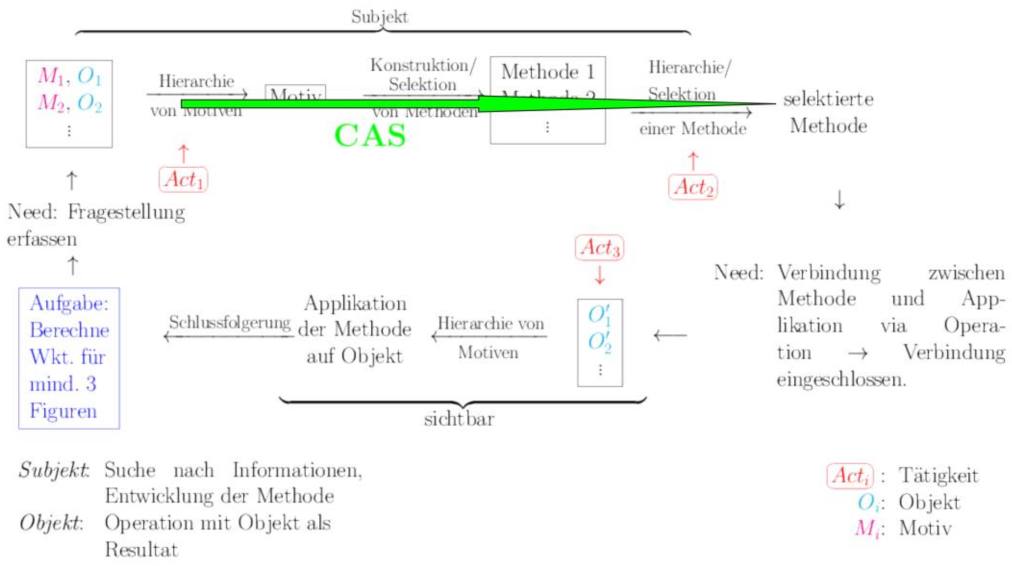



Abbildung 2: Zyklus einer möglichen Lösung nach Stoppel 2012b

Dabei wurden die Tätigkeiten folgendermaßen interpretiert:

- In Act1 wird ein Motiv/ein Objekt gewählt.
- In Act2 liegt die Wahl einer Methode vor. Hierbei ist zu unterscheiden, ob eine Methode konstruiert oder einfach ausgewählt wurde.
- In Act3 findet eine Auswahl eines Objekts zur Anwendung der Methode statt.

In diesem Beispiel kann es sich bei Act1 beispielsweise um eine Sammlung von Informationen handeln, die zu einem falschen Modell führt. (Für genauere Untersuchung solcher Aktivitäten vgl. Stoppel 2012b.) Mithilfe eines CAS lässt sich die Methodenwahl einschränken, was in der Zeichnung durch die Pfeilbrücke gekennzeichnet ist.

Betrachtet man die oben notierte Rechnung, so lässt sie sich in zwei Operationen unterteilen. Eine Operation besteht in der Berechnung einer Summe. Bei ClassPad, Prime und Nspire existieren Oberflächen, in denen Grundoperationen wie Summenberechnung enthalten sind. Diese Schritte unterscheiden sich vom Typ her bei diesen drei CAS nicht bedeutend. Im folgenden Schritt ist ein Operator zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit zu wählen. Hier unterscheiden sich die Syntaxen der drei CAS. An der Stelle Act1 sind hier für diese drei CAS im Menu die folgenden Pfade zu wählen:

ClassPad: Verteilung → Diskret → binomialPDF

Nspire: Wahrscheinlichkeit → Verteilung → binomial Pdf

Prime: (Mathe →) Wahrscheinlichkeit → Dichte → Binom

Beim Vergleich der drei Operationen zeigt sich, dass in den Syntaxen deutliche Unterschiede auftreten. Sie liegen darin, dass beim TI Nspire die Oberfläche der Verteilungen nicht weiter unterteilt ist. Damit werden hier keine weiteren Eigenschaften von Verteilungen berücksichtigt. Bei ClassPad ist *Verteilung* nicht weiter untergeordnet. Andererseits muss hier von den SchülerInnen erkannt werden, dass es sich um eine *diskrete Verteilung* handelt. Beim HP Prime zeigt sich ein auffälliger Unterschied in der Syntax darin, dass im Gegensatz zum TI Nspire eine Unterteilung von *Verteilungen* in *Dichte* und *Kumulativ* existiert, die sich von der Syntax des Casio ClassPads unterscheidet.

## 4. Reflexion

Am oben beschriebenen Beispiel zeigt sich, dass Unterschiede in der Syntax zu Unterschieden in Lösungswegen derselben Aufgabe führen können. Dies sollte bei Konzeption und Formulierung von Aufgaben berücksichtigt werden. Sollte dieselbe Aufgabe mit unterschiedlichen CAS gelöst werden können, wie es beispielsweise in landesweiten Abschlussprüfungen sein kann, so sind ggf. Schlüsse auf die Beurteilung von Lösungen zu ziehen. Aufgabenersteller sollten sich Tipps und Hinweise für ihre Schülerinnen und Schüler detaillierter überlegen. Bei der Lösung von Aufgaben zeigt sich unter Umständen wieder (vgl. Stoppel, 2012a) *CAS ist nicht gleich CAS*.

## Literatur


Engeström, Y. (1987). *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki: Orienta-Konsultit Oy.

Kaptelinin, V., & Nardi, B. A. (2006). *Acting with technology*. USA: MIT.

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik, 5*, 87–101.

Stoppel, H. (2012a). CAS ist nicht gleich CAS. In U. Kortenkamp & A. Lambert (Hrg.), *Medien verwenden. Zur Zukunft des Analysisunterrichts vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit Neuer Medien (und Werkzeuge)* (S. 43–47). Hildesheim: Franzbecker.

Stoppel, H. (2012b). *Verschiedene Tätigkeiten beim Einsatz von Medien zur Lösung von Aufgaben anhand eines Beispiels mit einem CAS*, Paderborn. http://www.math.uni-sb.de/lehramt/index.php/ak-mui-12

Vandebrouck, F., Monaghan, J., & Lagrange, J.-B. (2013). Activity Theoretical Approaches to Mathematics Classroom Practices with the Use of Technology. In A. M. Lindemeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 181–210). Kiel: PME.

Rudolf STRÄSSER, Gießen&Münster

# Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI) - Bericht über eine ICMI-Studie

Die Studie mit dem Titel "Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI)" war die erste ICMI-Studie, die gemeinsam von der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (ICMI) und dem International Council for Industrial and Applied Mathematics (ICIAM) durchgeführt wurde. Im Jahr 2009 begann die EIMI-Studie - wie bei ICMI-Studien üblich - mit einem Discussion Document (vgl. Damlamian & Sträßer 2009), das von einem international besetzten Komitee formuliert worden war. Das Dokument geht von einem weiten Begriff von „Industrie" aus, "… broadly interpreted as any activity of economic or social value, including the service industry, regardless of whether it is in the public or private sector" (OECD 2008, S. 4). In der Studie geht es also um die Beziehungen zwischen Industrie (im genannten weiten Sinne), Mathematik und Lernen und Lehren von Mathematik. Für die Studie bestand auch Einigkeit darüber, dass von einem weiten Begriff von Mathematik auszugehen ist. In diesem Verständnis findet Mathematik vielfältige Anwendungen in weiten Bereichen des täglichen wie beruflichen Lebens, wie für die Studie neben diesen Themen auch die akademische Behandlung dieser Disziplin (einschließlich der Statistik) gehört. Die Studie hat damit bewusst ein enges Verständnis von Mathematik vermieden, auch wenn so eine gewisse Zirkularität der Definition nicht zu umgehen ist.

Nachdem an der Studie interessierte Personen aus der ganzen Welt Texte zum Diskussionspapier eingereicht hatten, folgte im Oktober 2010 eine „Study Conference" in Lissabon (für den vorher erschienenen Tagungsband vgl. Araújo et al. 2010), zu der rund 100 Personen aufgrund ihrer Beiträge eingeladen worden waren. Ein vorläufiges Ende hat die Studie in einem „Study Book" gefunden, das kürzlich erschienen ist (vgl. Damlamian u. a. 2013). Das Buch beruht wesentlich auf den Arbeiten während der Konferenz in Lissabon. Im Folgenden soll über zentrale Themen und Ergebnisse der Studie berichtet werden.

## Mathematik in Erziehung und Industrie

Mathematik in Erziehung und Industrie haben einige Eigenschaften gemeinsam. Allerdings lassen sich auch deutliche Unterschiede festhalten. So ist Mathematik insbesondere in der Schule in der Regel eher elementar, muss aber von Schülerinnen und Schülern erst erlernt werden. Demgegen-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1179–1182). Münster: WTM-Verlag

über kann Mathematik besonders in der traditionell verstandenen Industrie durchaus sehr anspruchsvoll im Sinne der benutzten mathematischen Sachverhalte sein. Typisch ist etwa die Nutzung von Differentialgleichungen in mehreren Variablen in den Naturwissenschaften und in technischen Berufen. Zum Anderen kann man auf Anwendungen eher elementarer Mathematik im Finanz- und Rechnungswesen verweisen, bei denen elementare Rechenverfahren auf höchst komplexe Weise ineinander verschachtelt zur Anwendung kommen. Der größte Unterschied zwischen der Mathematik in der Industrie und der der Schule dürfte aber in der unterschiedlichen Bedeutung der Anwendungen von Mathematik liegen. In schulischen Kontexten liegt der Schwerpunkt eindeutig auf der Mathematik selbst, während in der Industrie gerade die Anwendungen der Mathematik auf außermathematische Problemstellungen im Vordergrund stehen.

**Kommunikation zwischen Hochschule, Industrie und Schule**

Die EIMI-Studie musste nun diese Unterschiede und Gegensätze mindestens für die Dauer der Study-Konferenz überbrücken. Ein wesentliches Hindernis der Kommunikation zwischen (Hoch)Schule und Industrie ist dabei die Sprache, der unterschiedliche Jargon in den verschiedenen Institutionen. Auch in der Industrie selbst bedarf es manchmal einer längeren Zeit gemeinsamen Arbeitens, bis die Personen aus den verschiedenen Institutionen eine gemeinsame und für alle Beteiligten verständliche Sprache entwickelt haben. Faktisch enthält diese gemeinsame Sprache in der Regel Metaphern, die in den beteiligten Institutionen verstanden werden, ohne dass sie zum üblichen Sprachgebrauch etwa der Anwender und Anwenderinnen oder der Mathematikerinnen und Mathematiker gehören müssen.

**Unterschiedliche Zeithorizonte, Ziele und Lernweisen**

Bei genauerem Hinsehen fallen weitere Unterschiede zwischen der Mathematik besonders der Schule und der gesellschaftlichen Verwendung von Mathematik auf. In der außerschulischen Verwendung von Mathematik geht es in der Regel um einen kurzfristig erfolgreichen Einsatz von meist bereits bekannter Mathematik. Demgegenüber geht es mindestens nach pädagogischem Verständnis in der Schule um einen langfristigen Aufbau mathematischer Strukturen bei den Lernenden. Dabei erscheint die Mathematik in der Schule oft als ein Gegenstand, der um seiner selbst willen betrieben wird. In der Industrie wird die Mathematik in der Regel mit dem Ziel benutzt, außermathematische Problemsituationen zu bewältigen. In der Schule wird dann auch ein begriffliches, verständnisvolles Lernen von Mathematik angestrebt, während es in der Industrie auf die Aneignung mathematischer Ideen und Verfahren zu deren effektiver Nutzung ankommt.

**Modellbildung, Schwarze Kästen und "Boundary Objects"**

In beiden Institutionen, (Hoch)Schule wie Industrie, ist das Modellieren außermathematischer Situationen der übliche Weg, um sich mit dem "Rest der Welt" auseinander zu setzen (für diese Sichtweise vgl. schon Pollak 1979). Beim Modellieren haben immer schon Artefakte (im allgemeinen Sinne von Wartofsky 1979) eine große Rolle gespielt. Seit der rasanten Entwicklung der mathematisch fundierten Informationstechnologie mit ihren entwickelten Möglichkeiten auch numerischer Simulation gewinnt die Mathematik neue Rollen bei der Modellierung außermathematischer Situationen. Mathematikhaltige Technik dient nicht mehr nur der Bearbeitung der Situationen, sondern auch zunehmend der Simulation der Situationen zum Zwecke des Erlernens der Situationsbewältigung. Man denke nur an den Einsatz von Simulationen für das Erlernen einer Programmierung von CNC-Maschinen, der gleichzeitig eine Schonung der kostspieligen Produktionsmaschinen im engeren Sinne ermöglicht. Allerdings bedeutet diese Technisierung keineswegs automatisch eine bessere Durchschaubarkeit der Situation. In der Industrie kann die Entwicklung eines mathematischen Modells und seine Implementierung in einem undurchschauten Mechanismus gerade dazu benutzt werden, um etwa zur Sicherung gegen externe Konkurrenz ein Verfahren gegen Imitation durch Konkurrenten zu sichern. Mathematik wird so möglicherweise bewusst in „Schwarzen Kästen" versteckt, bei denen ein detailliertes Verständnis ihrer Wirkungsweise ausdrücklich nicht erwünscht ist (vgl. Sträßer 1999).

Für die Kommunikation und Kooperation zwischen Industrie und (Hoch)Schule ergibt sich aus diesem Vorgehen das bekannte Phänomen, dass es schwer wird, die gesellschaftliche, speziell berufliche Verwendung von Mathematik zu identifizieren und zu erforschen. Die Forschungsgruppe um Celia Hoyles schlägt zur Bearbeitung dieses Problems die Analyse von "boundary objects" zwischen Industrie und (Hoch)Schule vor. Insbesondere technologisch anspruchsvolle Objekte auf der Grenze zwischen "Rest der Welt" und Mathematik („TeBOs", vgl. Hoyles u. a. 2013) können dazu beitragen, schwarze Kästen ein wenig "grauer" und damit durchschaubarer und die dabei benutzte Mathematik sichtbar zu machen, wenn solche TEBOs nicht nur identifiziert, sondern dann auch einer genauen Analyse unterzogen werden bzw. in pädagogischer Absicht eingesetzt werden. Beispiele dazu finden sich wiederum in dem genannten Text von Hoyles u. a. 2013.

## Institutionen zwischen Schule, Hochschule und Industrie

Auf der Study-Konferenz wurde eine Vielfalt von Aktivitäten vorgestellt, die gegenwärtig genutzt werden, um Verbindungen von (Hoch)Schule und Industrie zu entwickeln und zu stärken. Hierzu gehören zum Beispiel "Modellierungswochen" und Workshops in Industrie, Hochschule und Schule. Genauere Darstellungen hierzu finden sich wiederum in Damlamian u. a. 2013.

Dort wird allerdings abschließend darauf verwiesen, dass es keine Institution gibt, die sich auf das Zusammenwirken von Mathematik und Industrie zu Erziehungszwecken spezialisiert. Ausweislich des Buches von Damlamian u. a. 2013 gibt es zwar eine Vielzahl von Personen und schulischen wie industriellen Institutionen, die sich mit dieser Problematik beschäftigen. Nirgendwo wird sich jedoch kontinuierlich und hauptberuflich mit dieser Problematik beschäftigt, sodass die Gefahr groß ist, dass für eine Bearbeitung dieses Themas das Rad immer wieder neu erfunden wird und werden muss.

## Literatur


Araújo, A. u. a. (Hrsg.) (2010) *Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Proceedings of the EIMI 2010 conference*. Centro International de Matemática - Portugal (URL: http://www.cim.pt/files/proceedings_eimi_2010.pdf.

Damlamian, A. u. a. (Hrsg., 2013). *Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI). Report on an ICMI-ICIAM Study*. Cham et al.: Springer.

Damlamian, A., & Sträßer, R. (2009). ICMI Study 20: Educational Interfaces between Mathematic Interfaces between Mathematics and Industry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *41*(4), 525-533.

Hoyles, C., u. a. (2013). Mathematics in the Workplace: Issues and Challenges. In A. Damlamian u. a. (Hrsg.), *Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Report on an ICMI-ICIAM Study.* Cham u. a.: Springer, 43-50.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), Global Science Forum (2008). *Report on Mathematics in Industry*. URL: http://www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf .

Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) (Hrsg.), *New Trends in Mathematics Teaching* (Bd. 4, S. 232 - 248). Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organisation (UNESCO).

Sträßer, R. (1999). Über das allmähliche Verschwinden der Mathematik aus der gesellschaftlichen Wahrnehmung. In K.-P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999* (S. 528-531). Hildesheim - Berlin: Franzbecker.

Wartofsky, M. W. (1979). *Models. Representation and the Scientific Understanding* (Bd. 129). Dordrecht - Boston - London: Reidel Publishing Company.

Waldemar STRAUMBERGER, Bielefeld

# Wirksamkeit von Selbstdiagnose

Selbstdiagnose kann an unterschiedlichen Stellen im schulischen Alltag eingesetzt werden. In diesem Beitrag wird die Wirksamkeit während Übungsphasen thematisiert. Die Idee hinter der Selbstdiagnose ist die folgende: Das Individuum weiß selbst am besten, was es kann und was es noch nicht kann. In Übungsphasen soll die Selbstdiagnose, der selbstständige Abgleich zwischen dem Soll- und dem Ist-Zustand, zur Standortbestimmung des Lernenden dienen, um anschließend noch nicht ausreichend gefestigte Inhalte üben zu können. Es stellt sich daher die Frage, wie wird die Selbstdiagnose in den Übungsphasen wirksam? Wirkt sie sich auf die Leistung und Einstellungen der Lernenden aus? Zum Feststellen von Zusammenhängen wird auch die Kernkompetenz der Selbstdiagnose, die Selbsteinschätzung, gemessen. Mit Selbsteinschätzung ist die Bestimmung des Ist-Zustandes gemeint. Wenn der Lernende sein tatsächliches Können richtig einschätzen kann, wird die Selbstdiagnose auch wirksam. In einer Vorstudie wurde das im Folgenden vorgestellte Konzept diesbezüglich erprobt.

Erste Erfahrungsberichte zum Einsatz von Selbstdiagnosebögen liegen bereits von Rosel Reiff (2008) und Helmuth Achilles (2011) vor. Diese berichten über positive Effekte hinsichtlich des Einsatzes zur Prüfungsvorbereitung. Zu Beginn des Einsatzes von Selbstdiagnosebögen über- und unterschätzen sich die Lernenden häufig, jedoch nimmt dies mit der Zeit ab und die Selbsteinschätzung nähert sich dem tatsächlichen Können an. Neben Erfahrungsberichten gibt es im deutschsprachigen Raum keine Studien, die sich mit der Selbsteinschätzung, bezogen auf das Mathematik Lernen beschäftigen. Die Fülle an angebotenem Material zur Selbstdiagnose nimmt trotzdem zu.

Unter diesem Material gibt es zwei ähnliche und doch zu unterscheidende Formate: den Selbsteinschätzungsbogen und das Kompetenzraster. Beim Kompetenzraster werden in der ersten Spalte die Kompetenzen festgehalten und in den folgenden Spalten unterschiedliche Niveaus der Kompetenz ausformuliert. Die Anzahl der Niveaus variiert bei Kompetenzrastern zwischen drei und sechs, ist aber innerhalb eines Kompetenzrasters einheitlich. Diese formale Ausdifferenzierung ist bei Grundkompetenzen/Inhalten schwierig. Bei Selbsteinschätzungsbögen wird daher auf die Ausformulierung verzichtet. Stattdessen wird in der ersten Spalte eine prototypische Aufgabe für den Inhalt dargestellt. Vorteil dieser Variante ist, dass sprachlich bedingte Verständnisschwierigkeiten vermindert oder ganz vermieden werden kön-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1183–1186). Münster: WTM-Verlag

nen. Die weiteren Spalten des Selbstdiagnosebogens dienen dem Lernenden zur Selbsteinschätzung. Anders als beim Kompetenzraster werden die unterschiedlichen Niveaus nicht beschrieben. In dem für die Studie verwendeten Material wurden diese mit unterschiedlichen Smileys gekennzeichnet. Die vorletzte Spalte enthält dann zu jeder Kompetenz/jedem Inhalt, der in einer Zeile vermerkt ist, abgestimmte Übungsempfehlungen. In der letzten Spalte kann man die geübten Inhalte abhaken.

## Konzept der Übungs-/Erhebungsphasen

Um die Alltagstauglichkeit der Selbstdiagnose im Unterricht zu prüfen, wurde die Vorstudie so konzipiert, dass keine zusätzlichen Stunden und keine zusätzlichen Übungsmaterialien im Vergleich zum regulären Unterricht benötigt werden. Die Übungszeit während des Unterrichts wurde so verschoben, dass vor der Klassenarbeit vier Unterrichtsstunden zum Üben zur Verfügung standen. Das Übungsmaterial wurde aus dem Schulbuch entnommen. Zu jedem Inhalt standen mehrere unterschiedliche Aufgaben zur Auswahl. Zusätzlich wurden pro Übungsphase ein auf die Inhalte abgestimmter Selbstdiagnosebogen mit Übungsempfehlungen und ein Test mit Musterlösung erstellt.

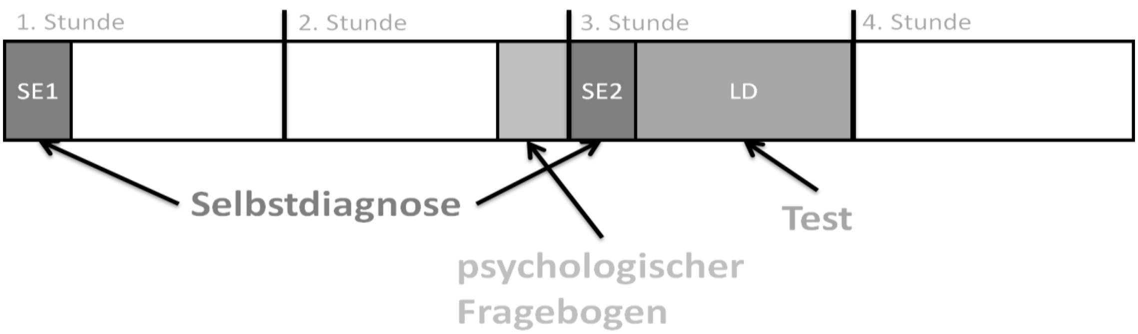



**Abbildung 1: Konzept der Übungs-/Erhebungsphasen**

Das folgende Konzept dient zum Strukturieren der Übungsphasen vor der Klassenarbeit. Zu Beginn der Übungsphase findet eine erste Selbsteinschätzung anhand des Selbstdiagnosebogens statt, die in den folgenden zwei Stunden auch Grundlage für das individuelle Üben ist. Am Ende der zweiten Stunde werden über einen Fragenbogen die vier Skalen *Freude im Unterricht*, *Angst im Unterricht*, *Anstrengungs-Erfolgs-Überzeugungen* und *Selbstregulation des Lernens im Mathematikunterricht* gemessen. Die Skalen sind aus dem Skalenhandbuch des PALMA Projektes entnommen (Pekrun et. al. 2002). In der dritten Stunde füllt der Lernende zu Beginn den Selbstdiagnosebogen ein zweites Mal mit einer anderen Farbe aus und bearbeitet im Anschluss einen Test zur Selbstüberprüfung. Die Korrektur wird durch einen Abgleich mit der Musterlösung vom Lernenden vorgenommen. Für die Notengebung spielt die Leistung im Test keine Rolle, um eventuelle Einflüsse von Prüfungsangst zu vermeiden. Am Ende der dritten Stunde wird der Test eingesammelt und nach einer Sicherung der Daten zurückgegeben. Durch einen Abgleich der zweiten Selbsteinschätzung und den Testwerten soll die Genauigkeit der Selbsteinschätzung ermittelt werden. Die letzte Stunde dient den Lernenden nochmals zum Üben.

Die Vorstudie wurde an einer zentral gelegenen Realschule in Bielefeld-Mitte in einer fünften Klasse (n = 28) gegen Ende des Schuljahres durchgeführt. Das ganze wurde zweimal wie beschrieben vor den beiden letzten Klassenarbeiten im Schuljahr zur Vorbereitung durchgeführt. Durch die zwei Messzeitpunkte sollte geprüft werden, ob eine Entwicklung erkennbar ist.

## Ergebnisse

In den dargestellten Diagrammen werden die Selbsteinschätzung zu Anfang der Übungseinheit (SE1), die Selbsteinschätzung vor dem Test (SE2) und die Leistung im Test (LD) von 12 Lernenden dargestellt. Es werden an dieser Stelle nur die Lernenden berücksichtigt, von denen alle Daten vorliegen.  Im oberen Diagramm sind die Werte des ersten Messzeitpunktes und im Unteren jeweils die Werte des zweiten Messzeitpunktes zu sehen. Ein Balken stellt jeweils das arithmetische Mittel aller Items des Selbstdiagnosebogens, bzw. des Tests in Prozent dar.

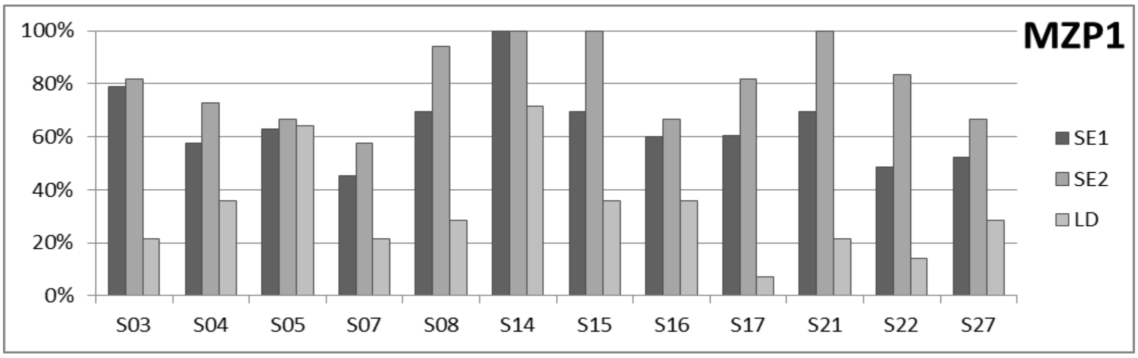



**Abbildung 2: Ergebnisse des ersten Messzeitpunktes**

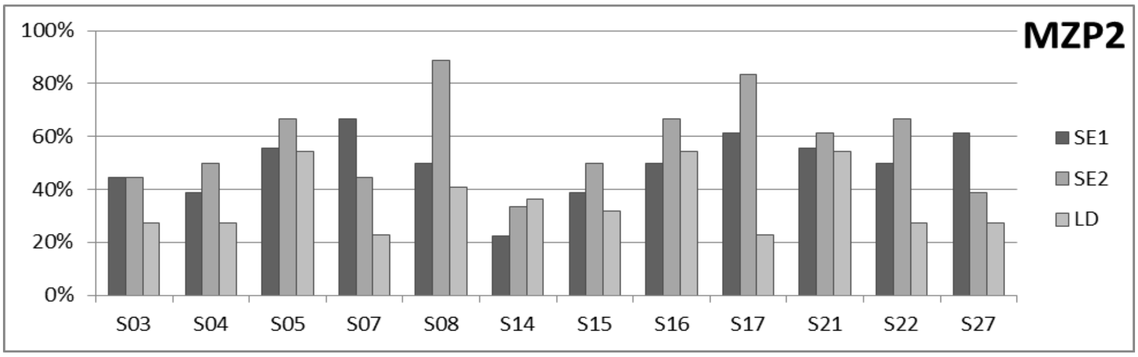



**Abbildung 3: Ergebnisse des zweiten Messzeitpunktes**

Es ist zu erkennen, dass die Selbsteinschätzung und Leistung zwischen den Lernenden innerhalb eines Messzeitpunktes variieren. Des Weiteren verändern sich die Messwerte der Lernenden zum zweiten Messzeitpunkt hin unterschiedlich. Beim ersten Messzeitpunkt gibt es Lernende, bei denen sich die Werte der Selbsteinschätzung (SE2) und der Leistung im Test (LD) stark unterscheiden, so z. B. bei S03, S08 und S21. Im Kontrast dazu liegen die Werte von S05 beim ersten Messzeitpunkt als auch beim zweiten Messzeitpunkt nah bei einander. Vergleicht man die zwei Messzeitpunkte fällt auf, dass sich die Werte der Selbsteinschätzung (SE2) der Lernenden an die Werte im Test (LD) zum zweiten Messzeitpunkt hin insgesamt angenähert haben. Besonders deutlich ist es bei S03 und S21 zu sehen. Eine interessante Veränderung in der Selbsteinschätzung ist im zweiten Messzeitpunkt bei S07 und S27 zu beobachten. Nach der Übungsphase fällt die Selbsteinschätzung schlechter aus als vor der Übungsphase. Es kann vermutet werden, dass durch die Übungsphase Defizite von den Lernenden erkannt wurden und daher auch die zweite Selbsteinschätzung negativer ausfiel.

## Folgerungen und Ausblick

Aus den Ergebnissen der Vorstudie ist zu sehen, dass sich mit dem erprobten Konzept die Erfahrungen bestätigen lassen, die es bereits gibt. Es ist allerdings die Frage, wie sich Selbsteinschätzung und Leistung der Lernenden innerhalb eines ganzen Schuljahres entwickeln. Es wird angenommen, dass sich die Selbsteinschätzung über ein Schuljahr bei den Lernenden weiter an ihr tatsächliches Können annähert und dies auch bei allen Lernenden der Fall ist. Eine Bestätigung der Hypothesen würde die bereits bekannten positiven Erfahrungen durch empirische Ergebnisse stützen. Bezüglich der erhobenen psychologischen Skalen wird eine positive Entwicklung bei den Skalen zu Anstrengungs-Erfolgs-Überzeugungen und Selbstregulation des Lernens im Mathematikunterricht erwartet. Diese würden eine positive Veränderung in der Einstellung der Lernenden dokumentieren, die sich auch auf das weitere Mathematik Lernen auswirken könnte.

## Literatur


Achilles, H. (2011). Selbst organisierte Prüfungsvorbereitung mithilfe von Selbsteinschätzungsbogen unterstützen. *PM. Praxis der Mathematik in der Schule*, *41*, 17–22.

Pekrun, R., Götz, Jullien, S., Zirngibl, A., v. Hofe, R., & Blum, W. (2002). *Skalenhandbuch PALMA: 1. Messzeitpunkt (5. Klassenstufe).* Universität München: Institut Pädagogische Psychologie.

Reiff, R. (2008). Selbst- und Partnerkontrolle.: Ein effizientes Verfahren zur produktbezogenen Diagnostik. *Mathematik Lehren*, *150*, 47–51.

Alexandra STURM, Andreas EICHLER, Freiburg

# Überzeugungen von Schülerinnen und Schülern zur Anwendbarkeit ihres statistischen Wissens

## 1. Einleitung

Informationen aus Medien adäquat verstehen und bewerten zu können, ist eine Kompetenz, die selbst Erwachsenen enorme Schwierigkeiten bereitet (Gal, 2004). Dies hat zur Folge, dass statistikbasierte Entscheidungen auf gesellschaftlicher Ebene nicht nachvollzogen und auf persönlicher Ebene individuelle Risiken nicht korrekt eingeschätzt werden können. Die Fähigkeit, mit quantitativen Daten angemessen umgehen zu können und statistische Daten im Alltag angemessen interpretieren zu können, wird innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung unter den Begriff der Statistical Literacy gefasst (Gal, 2004). Dabei umfasst Statistical Literacy nicht nur die Fähigkeit, Daten im täglichen beurteilen zu können, sondern auch anzuerkennen, welchen Beitrag statistisches Denken bei privaten, beruflichen oder öffentlichen Entscheidungen leistet (Wallman, 1993, S. 1).

In dem hier vorgestellten Forschungsprojekt wird das genannte Anerkennen der Bedeutung der Statistik im Sinne der individuellen Überzeugung verstanden, statistisches Wissen gewinnbringend einsetzen zu können. Speziell wird untersucht, ob sich die Statistical Literacy mit besonderem Bezug zu den genannten Überzeugungen durch eine Intervention bei Erwachsenen und Schülerinnen und Schülern fördern lässt.

## 2. Theoretischer Rahmen

Abb. 1 zeigt ein Modell für Statistical Literacy (Gal, 2004, S. 59), das neben Wissens- auch dispositionale Elemente umfasst.

| Knowledge elements of statistical literacy | Dispositional elements of statistical literacy |
|---|---|
| Literacy skills | Beliefs and Attitudes |
| Statistical knowledge | Critical stance |
| Mathematical knowledge | |
| Context knowledge | |
| Critical questions | |

**Abb. 1: Aspekte der Statistical literacy**

Um mit statistikhaltigen Situationen im Alltag angemessen umgehen zu können, ist demnach nicht nur mathematisches und statistisches Wissen von Belang, sondern beispielsweise auch das Textverständnis (Literacy Skills, Context Knowledge). Eine bedeutende Funktion kommt aber auch den individuellen Überzeugungen und Einstellungen (Beliefs and

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1187–1190). Münster: WTM-Verlag

Attitudes) zu. So ist es unabdingbar, dass Menschen die Bereitschaft besitzen, Anstrengungen auf sich zu nehmen, um ihr Wissen in statistikhaltigen Situationen anwenden zu können, was die individuelle Überzeugung voraussetzt, dass ein Nutzen in diesen Anstrengungen gesehen wird.

Die Überzeugungen selbst, die international unter dem Begriff Beliefs gefasst werden, können in Anlehnung an Hannula (2012) als die eher kognitive Komponente des sogenannten „mathematics related affect" gesehen werden, während die ebenfalls im Modell der Statistical Literacy genannten Einstellungen (Attitudes) die eher affektive Komponente erfassen. Überzeugungen bezüglich der Anwendbarkeit von Statistik können durch Items wie *„Ich werde in meinem Beruf keine Verwendung für Statistik haben."* oder auch *„Ich benutze Statistik in meinem Alltag."* operationalisiert werden. Im Gegensatz dazu zeigt sich in Items zur Erfassung der Einstellungen eine deutliche emotionale Färbung (*„Ich mag Statistik."*). In unserem Forschungsprojekt beziehen wir uns insbesondere auf die Überzeugungen bzw. Beliefs hinsichtlich der Anwendbarkeit des eigenen statistischen Wissens.

## 3. Thematik zur Förderung der Statistical Literacy

Um sowohl das Wissen als auch die genannten Überzeugungen von Schülerinnen und Schüler sowie Erwachsenen zu fördern, wurden Situationen im Themenfeld „Satz von Bayes" ausgewählt. Dies scheint ein geeignetes Themenfeld zu sein, da es Anwendung in Medien (vgl. Abb. 2) findet und somit sowohl den Nutzen von Statistik für die Gesellschaft als auch für jeden Einzelnen aufzeigen kann. Zusätzlich vermuten wir aber, dass es kein gewöhnliches Themenfeld in dem Sinne ist, dass Schülerinnen und Schüler sowie Erwachsene von vornherein entsprechende Situationen in diesem Themenfeld einschätzen können. Dadurch ermöglicht das Themenfeld potentiell einen neuen Einblick in den Nutzen von Statistik.

Zusätzlich existieren Forschungsergebnisse, die zeigen, dass bereits durch kurze Interventionen Kompetenzzuwächse zu erzielen sind (Sedlmeier & Gigerenzer, 2001; Bea, 1995). Dabei zeigte sich ferner, dass insbesondere verschiedene Visualisierungen (vgl. Abb. 3 zu einer fiktiven Situation im Umfeld des Satzes von Bayes), der Baum mit absoluten Häufigkeiten (Sedlmeier & Gigerenzer, 2001) und das Einheitsquadrat (Bea, 1995), Kompetenzzuwächse ermöglichen. Da das Einheitsquadrat insbesondere die mathematische Struktur zum Satz von Bayes visualisiert, während der Baum schnelle Lösungen zu Situationen im Rahmen des Satzes von Bayes verspricht, ist es denkbar, dass je nach untersuchter Personengruppe die eine oder andere Visualisierung in besonderem Maße auf das statistische Wissen und die Überzeugungen zur Anwendbarkeit dieses Wissens wirken.

**HIV-Schnelltest für zu Hause: Wirkungsvolle Notlösung**

Die Arzneimittelbehörde der USA hat einen HIV-Schnelltest für zu Hause zugelassen. Die vereinfachte Methode könnte dazu führen, dass sich mehr Menschen testen lassen. Die fehlende Beratung birgt jedoch auch Gefahren.

**Abb. 2: Schlagzeile im Spiegel Online vom 04.07.2012**

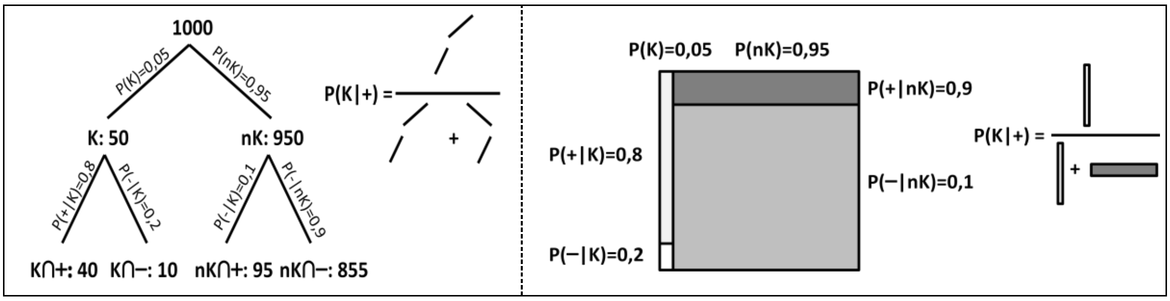



**Abb. 3: Der Satz von Bayes mittels Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten (links) bzw. Einheitsquadrat (rechts).**

## 3. Design und Methodik

Es werden 60 Schülerinnen und Schüler sowie jeweils 60 Studierende unterschiedlicher Disziplinen (Lehramt Mathematik, Erziehungswissenschaften, Deutsch, Gesundheitspädagogik) untersucht. Diese werden zufällig zwei Interventionsgruppen zugeteilt, die sich allein durch die Visualisierung (Baum/Einheitsquadrat) unterscheiden. Es wird angenommen, dass sich die Studierenden ohne Mathematikfokus (Erziehungswissenschaften, Deutsch) in ihren Überzeugungen bezüglich der Anwendbarkeit von Statistik von den Mathematikstudierenden sowie den Studierenden der Gesundheitspädagogik, welche in ihrem späteren Berufsfeld Statistik potentiell anwenden werden, unterscheiden. Geplant ist eine dreistündige Intervention zum Satz vom Bayes, die auf Medienberichten aufbaut (vgl. Abb. 2). Unmittelbar vor und nach der Intervention wird ein Kompetenztest sowie ein Fragebogen zur Erfassung der Überzeugungen eingesetzt werden. Durch diesen Fragebogen sollen verschiedene Konstrukte erfasst werden: Überzeugungen zur Mathematik (Grigutsch, 1996) sowie die Konstrukte „Anwendbarkeit der Statistik“ bzw. „Nutzen der Statistik für die Gesellschaft“ und „Nutzen der Statistik für das eigene Leben“ (vgl. Schau et al., 1995). Zu erwarten ist, dass die Konstrukte Anwendbarkeit der Mathematik und Anwendbarkeit der Statistik eng miteinander verbunden sind, da Statistik oftmals als Teil der Mathematik verstanden wird. Als potentielle moderierende Variablen werden zusätzlich das Mathematikinteresse (Lipowsky et al., 2005) sowie das Selbstkonzept und die Mathematikangst (Fennema & Sherman, 1976) miterhoben.

## 4. Ergebnisse einer Pilotstudie

Bei einer ersten Pilotierung des Fragebogen mit n=30 Studierenden der Erziehungswissenschaften konnten akzeptable Skalenreliabilitäten (Cronbachs $\alpha \geq 0{,}7$) gemessen werden. Es zeigte sich, dass die Konstrukte Anwendbarkeit der Statistik und Anwendbarkeit der Mathematik hoch korrelieren, was, wie oben beschrieben, zu erwarten war.

Ferner zeigte sich bei dieser Stichprobe von Studierenden ohne Mathematikfokus ein statisches Bild der Mathematik als System, das charakterisiert ist durch eine „strenge Logik“ (Formalismusüberzeugungen) und das Abrufen von Rechenregeln und -verfahren (Schemaüberzeugungen). Des Weiteren ließen die Ergebnisse erkennen, dass diese Studierenden ein hohes Maß an Mathematikangst aufweisen.

## 5. Ausblick

In einer weiteren Pilotierung sollen der Fragebogen um Statistikitems ergänzt sowie der Kompetenztest an einer größeren Stichprobe erneut getestet sowie die Intervention durchgeführt werden.

## Literatur


Bea, W. (1995). *Stochastisches Denken,* Univ, Frankfurt am Main, Berlin, Karlsruhe.

Fennema, E., & Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales. *JSAS Catalog of Selected Documents in Psychology, 6*(31), 324-326.

Gal, I. (2004). Statistical literacy: Meaning, Components, Responsibilities. In D. Ben Zvi & J. Garfield (Hrsg.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (S. 47-78). Dordrecht: Kluwer.

Grigutsch, S. (1996). Mathematische Weltbilder von Schülern: Struktur, Entwicklung, Einflußfaktoren. Duisburg, Univ., Diss., 1996.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14(2)*, 137-161.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Buff, A., & Klieme, E. (2005). Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie. "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis". *Materialien zur Bildungsforschung: Vol. 13*. Frankfurt am Main: DIPF.

Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. L., & Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the Survey of Attitudes Toward Statistics. *Educational and Psychological Measurement, 55*, 868-875.

Sedlmeier, P., & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. *Journal of Experimental Psychology: General, 130(3)*, 380–400.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching Our Society. *Journal of the American Statistical Association, 88(421)*, 1–8.

Nina STURM, Landau

# Sind Repräsentationen beim Lösen problemhaltiger Textaufgaben für Grundschulkinder lösungsunterstützend?

Das Lösen problemhaltiger Textaufgaben stellt für Grundschulkinder häufig eine Herausforderung dar, da sie nicht auf vertraute Grundmodelle der Rechenoperationen zurückgreifen können. Die anspruchsvolle mathematische Struktur der Aufgaben, die ungewohnten mathematischen Zusammenhänge aber auch deren Komplexität können als Barrieren der Transformation des Anfangs- in den Zielzustand angesehen werden (Franke & Ruwisch, 2010; Rasch, 2001). Repräsentationen können beim Entfalten mathematischer Situationen lösungsunterstützende Funktion übernehmen. Das Externalisieren mentaler Prozesse entlastet das Arbeitsgedächtnis und diese freien Kapazitäten können für den Lösungsprozess genutzt werden (Schnotz et al., 2011). Die Konstruktion einer Repräsentation mit lösungsrelevanten Struktureigenschaften sowie der Umgang mit dieser wird aus konstruktivistischer Sicht als bedeutsames Element des Lernprozesses angesehen (Papert, 1993). Franke und Ruwisch (2010) ordnen den Repräsentationen gerade in der kreativen Phase des Lösungsprozesses einen hohen Stellenwert zu.

Darüber hinaus können kommunikative Settings unter Gleichaltrigen als Lernunterstützung gesehen werden, da auch diese zu einem Lernzuwachs führen können (vgl. Piaget, 1986; Rohrbeck et al., 2003; Tarim, 2009). Das Kommunizieren über den eigenen Lösungsprozess und den Lösungsprozess des Anderen fördert das Lernen voneinander, das Hineindenken in einen noch unbekannten, fremden Lösungsweg, das Argumentieren sowie das Überdenken der eigenen Lösung und kann dadurch kognitive Entwicklungen anregen (Oswald, 1994; Lamberigts & Diepenbrock, 1993).

In einem quasi-experimentellen Pre-Post-Test-Kontrollgruppen-Design auf Klassenebene wird untersucht, ob ein Repräsentationstraining und kommunikative Zweiersettings einen positiven Einfluss auf den Lösungserfolg haben. An der Untersuchung haben 20 dritte Klassen teilgenommen, welche randomisiert den vier Bedingungen zugewiesen wurden: a) Training und kommunikative Zweiersettings, b) Training, c) kommunikative Zweiersettings und d) weder Training noch kommunikative Zweiersettings (Kontrollgruppe). Grundlage der randomisierten Zuweisung war die Messung personenbezogener Störvariablen vor Durchführung der Intervention: Leseverständnis (ELFE 1-6), mathematische Basiskompetenzen (HRT 1-4) und Intelligenz (CPM).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1191–1194). Münster: WTM-Verlag

Das Training zeichnete sich durch die Implementierung selbstkonstruierter Schülerrepräsentationen aus. Zunächst lösten die Kinder die problemhaltige Textaufgabe eigenständig, indem sie alle für sich wichtigen Schritte und Gedanken protokollierten. Diese Produkte stellten die Grundlage des Trainings in der Folgestunde dar, indem zu Stundenbeginn exemplarisch an vier bis fünf unterschiedlichen Schülerlösungen das mögliche Vorgehen thematisiert wurde. Dabei war der Lösungsprozess, der durch eine Zeichnung, Tabelle, Liste, Rechnung oder begründender Text externalisiert und kategorisiert wurde, entscheidend für die Auswahl der Lösungsbeispiele (vgl. Sturm et al., 2013). Diese ausgewählten Schülerlösungen sollten den Kindern ein möglichst facettenreiches Lösungsspektrum aufzuzeigen und durch die Tatsache, dass es sich nicht um konstruierte, von der Lehrkraft vorgefertigte Musterlösungen handelte, zusätzlich motivieren.

In den Klassen der experimentellen Bedingung a) fanden zusätzlich kommunikative Zweiersettings statt. In dieser zehnminütigen Unterrichtsphase stand die Kommunikation über den eigenen Lösungsweg mit einem Partner/einer Partnerin sowie das Hineindenken in die Mitschülerlösung im Vordergrund, so dass Argumentations- und Reflexionsprozesse angeregt wurden. Die Klassen der experimentellen Bedingung b) absolvierten anstelle der kommunikativen Zweiersettings ein Kopfrechentraining.

Den Lehrkräften, welche die Klassen der experimentellen Bedingungen c) und d) unterrichteten, wurde die Zielsetzung des Projektes, das Repräsentationstraining, nicht mitgeteilt. Die Lehrkräfte konnten die Textaufgaben in ihren Unterricht integrieren wie sie dies üblicherweise taten. Ein Fragebogen soll nach der Untersuchung Aufschluss über Unterrichtsgestaltung, Zielsetzungen, aber auch Schwierigkeiten geben.

Für alle 20 Klassen galt der gleiche organisatorische Rahmen. Zu Beginn des dritten Schuljahres startete die Untersuchung mit dem Pretest, der drei problemhaltige Textaufgaben unterschiedlicher Aufgabengruppen umfasste. Anschließend startete die Intervention. In einer festen Problemlösestunde wurde einmal wöchentlich eine problemhaltige Textaufgabe bearbeitet. Dabei wurden aus sechs verschiedenen Aufgabengruppen jeweils zwei Aufgaben berücksichtigt. Hierzu zählten Vergleichs-, Bewegungs-, und Ausgleichsaufgaben sowie Aufgaben mit komplexen Informationen, mit kombinatorischem Hintergrund sowie zum Verhältnis von Zwischenraum und Begrenzung (vgl. Rasch, 2008). An die Intervention schloss sich ein Posttest an. Die Grundschulkinder bearbeiteten erneut drei problemhaltige Textaufgaben, welche durch ihre Strukturgleichheit einen Pre-Post-Test Vergleich zuließen. 13 Wochen nach der Intervention wird der Follow-up Test die Intervention abrunden. Dieser steht aktuell noch aus.

In diesem Beitrag wird der Effekt der Unterrichtsgestaltung mit der Forschungsfrage, ob sich die vier Gruppen hinsichtlich ihres Lösungserfolgs unterscheiden, fokussiert. Deskriptiv ergibt der Pre-Post-Test Vergleich, dass 76,3 % der 355 Kinder im Pretest keine Aufgabe richtig gelöst haben. Im Posttest sinkt der Anteil auf 35,6 %. Eine Aufgabe lösten 19,0 % (Pretest) richtig, später 29,7 % (Posttest). Zwei Aufgaben 3,6 % (Pretest), später 21,0 % (Posttest). Alle drei Aufgaben lösten im Pretest 1,1 % aller Kinder, im Posttest waren es 13,7 %. Es zeigt sich deskriptiv, dass die Integration problemhaltiger Textaufgaben in den Unterricht eine Leistungssteigerung bewirkt. Dies bestätigt sich auch, wenn man jede experimentelle Bedingung für sich betrachtet (siehe Tabelle).

Experimentelle Bedingung a)

| | ***Pretest*** | ***Posttest*** |
|---|---|---|
| Keine Richtige | 72,3 % | 19,4 % |
| Eine Richtige | 20,2 % | 30,1 % |
| Zwei Richtige | 6,4 % | 31,2 % |
| Drei Richtige | 1,1 % | 19,4 % |

Experimentelle Bedingung c)

| | ***Pretest*** | ***Posttest*** |
|---|---|---|
| Keine Richtige | 74,4 % | 39,3 % |
| Eine Richtige | 23,3 % | 30,3 % |
| Zwei Richtige | 2,2 % | 20,2 % |
| Drei Richtige | 0 % | 10,1 % |

Experimentelle Bedingung b)

| | ***Pretest*** | ***Posttest*** |
|---|---|---|
| Keine Richtige | 72,9 % | 28,2 % |
| Eine Richtige | 18,8 % | 29,8 % |
| Zwei Richtige | 5,2 % | 21,3 % |
| Drei Richtige | 3,1 % | 20,2 % |

Experimentelle Bedingung d)

| | ***Pretest*** | ***Posttest*** |
|---|---|---|
| Keine Richtige | 85,7 % | 56,0 % |
| Eine Richtige | 13,1 % | 27,5 % |
| Zwei Richtige | 0 % | 9,5 % |
| Drei Richtige | 0 % | 3,7 % |

Vergleicht man die Mittelwerte innerhalb der Gruppen, so ergibt der t-Test für gepaarte Stichproben folgende Ergebnisse: Der Lösungserfolg (gemessen mit 0 für eine falsche Lösung und 1 für eine richtige Lösung) der trainierten Klassen mit kommunikativen Zweiersettings steigt höchst signifikant vom Pretest ($M = .12$, $SD = .219$) zum Posttest ($M = .50$, $SD = .341$), $t\ (91) = 10.758$, $p < .001$. Darüber hinaus erreichen sowohl die Trainingsklassen ohne kommunikative Zweiersettings (Pretest ($M = .13$, $SD = .245$); Posttest ($M = .44$, $SD = .367$), $t\ (91) = 8.951$, $p < .001$) als auch die untrainierten Klassen mit kommunikativen Zweiersettings (Pretest ($M = .09$, $SD = .167$); Posttest ($M = .34$, $SD = .335$), $t\ (88) = 7.865$, $p < .001$) eine höchst signifikante Steigerung des Lösungserfolgs. Auch in den Kontrollgruppen steigt der Lösungserfolg höchst signifikant vom Pretest ($M = .05$, $SD =$

.116) zum Posttest (*M* = .20, *SD* = .274), *t* (79) = 4.789, *p* < .001, so dass festzuhalten bleibt, dass die Implementierung problemhaltiger Textaufgaben eine Leistungssteigerung bewirkt, wenn diese auch mit .38 in der experimentellen Bedingung a am größten ist.

Der Pre-Post-Test Vergleich zwischen den Gruppen zeigt, dass sich die Gruppen höchst signifikant bezüglich des Lösungserfolgs unterscheiden *F* (3, 349) = 10.176, *p* < .001). Die Kontrastanalyse ergibt, dass sich die Kontrollgruppen höchst signifikant von den Gruppen mit kommunikativen Zweiersettings unterscheiden (*p* < .001) und die Gruppen mit kommunikativen Zweiersettings sich signifikant von den Trainingsgruppen unterscheiden (*p* = .002). Die Trainingsgruppen unterscheiden sich von den Trainingsgruppen mit kommunikativen Zweiersettings nur noch rein deskriptiv (*p* = .119). Somit konnte die Nullhypothese, dass sich die Gruppen nicht signifikant voneinander unterscheiden, verworfen werden. Weitere Analysen müssen nun sicherstellen, dass der Lernzuwachs auf das Training zurückzuführen ist und keine weiteren Faktoren diesen bedingen können.

## Literatur


Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Lamberigts, R. & Diepenbrock, J.-W. (1993). Aktivierender Unterricht in einer kooperativen Lernumwelt: Implementation und Effekte in einem Feldexperiment. In G. L. Huber (Hrsg.), *Neue Perspektiven der Kooperation* (S. 94-194). Hohengehren: Schneider.

Oswald, F. (1994). *Begabtenförderung in der Schule*. Wien: Facultas Universitätsverlag

Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the comuter.* New York, NY: Basic Books.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hildesheim: Franzbecker.

Rasch, R. (2008). *42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren.* Seelze: Kallmeyer.

Rohrbeck, C. A., Ginsburg-Block, M. D., Fantuzzo, J. W. & Miller, T. R. (2003). Peer-Assited Learning Interventions with Elementary School Students: A Meta Analytic Review. *Journal of Educational Psychology*, 95(2), 240-257.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A. & Rasch, R. (2010). Creative Thinking and Problem Solving with Depictive and Descriptive Representations. In L. Verschaffel, E. De Corte, J. Elen & T. de Jong (Eds). *Use of External Representations in Reasoning and Problem Solving* (pp. 11-35). Amsterdam: Elsevier.

Sturm, N., Rasch, R., & Schnotz, W. (2013). Wie knacke ich das Problem? Zeichnen, auflisten, tabellieren oder einfach nur rechnen... *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM-Verlag.

Tarim, K. (2009). The Effects of Cooperative Learning on Preschooler's Mathematics Problem-solving Ability. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 325-340.

Evelyn SÜSS-STEPANCIK, Baden

# Vertikale Vernetzung über Zahldarstellungen

Vertikale Vernetzung – also die Vernetzung von schon länger zurückliegenden Lerninhalten mit neuen – scheint sowohl hinsichtlich fachsystematischer als auch kognitiver Betrachtungen ein probates Mittel für die Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen im Sinne eines Spiralcurriculums (vgl. Brinkmann & Siller 2012). Eine besonders naheliegende Möglichkeit, solch eine vertikale Vernetzung von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II umzusetzen, kann das Arbeiten mit Darstellungen sein. Darstellungen haben ja in fast allen Inhaltsbereichen der Schulmathematik große Bedeutung und sie sind oft eine wesentliche Komponente in Begriffsbildungsprozessen. Beim Arbeiten mit Darstellungsformen können enaktive Darstellungsformen (Handlungen), ikonische Darstellungsformen (bildhafte, geometrische) symbolische Darstellungsformen (Zeichen) und sprachliche Darstellungsformen (Worte) zum Einsatz kommen. Besonderes Augenmerk verdienen in diesem Zusammenhang die Zahldarstellungen. Sie begleiten die Schüler/innen von der 1. bis 12. Jahrgangsstufe und sind einer ständigen Erweiterung unterworfen. Auf sie wird aber auch in den Bildungsstandards für Mathematik genauer eingegangen.

In den österreichischen Bildungsstandards Mathematik für die 4. Jahrgangsstufe wird bei den inhaltlichen mathematischen Kompetenzen das Arbeiten mit Zahlen und explizit auch das Darstellen von Zahlen angeführt (vgl. bifie 2011a). In den österreichischen Bildungsstandards Mathematik für die 8. Jahrgangsstufe wird auch wieder auf inhaltlicher Ebene von Zahldarstellungen gesprochen. Im Inhaltsbereich „Zahlen und Maße" werden unter anderem die Bruch- und Dezimaldarstellungen rationaler Zahlen angeführt (vgl. bifie 2011b). Bei der österreichischen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik werden die Zahldarstellungen nicht mehr explizit genannt, es heißt dort „Wissen über die Zahlenmengen ***N***, ***Z***, ***Q*** ***R***, ***C*** verständig einsetzen können" (bifie 2013). Durchforstet man nun die exemplarischen Aufgabenstellungen zu den Bildungsstandards und der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung, dann zeigt sich, dass eine vertikale Vernetzung der Zahldarstellungen höchst erstrebenswert ist.

## 1. Stellen(wert)tafel

Die Stellen(wert)tafel ist beispielsweise eine ganz typische Darstellungsform für Zahlen in der Primarstufe. Von den Kindern wird hier zumeist das Übertragen einer ikonischen Zahldarstellung in eine symbolische Zahldarstellung gefordert. Die Darstellung einer Zahl in der Stellen(wert)tafel

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1195–1197). Münster: WTM-Verlag

scheint über die Jahre verloren zu gehen. Doch wenn in der 9. Jahrgangsstufe die Zehnerpotenzen und die Gleitkommadarstellung von sehr großen und kleinen Zahlen am Lernplan steht, dann wird wieder mit ähnlichen Darstellungsformen gearbeitet. Die Stellen(wert)tafel wird also nach der Primarstufe noch einmal in der Sekundarstufe 2 aufgegriffen und benötigt.

## 2. Zahlengerade

Die Zahlengerade ist wohl *die* Darstellungsform, die die Lernenden kontinuierlich im Verlauf ihres Mathematikunterrichts begleitet. Sie wird in der Primarstufe – dort beschränkt auf natürliche und positive rationale Zahlen – eingeführt und danach fortwährend verwendet. Mit der Zahlengeraden wird dann aber auch in der Sekundarstufe 1 ganz intensiv gearbeitet und die Menge der reellen Zahlen erarbeitet. Während der Primarstufe und der Sekundarstufe 1 müssen zumeist ikonisch dargestellte Zahlen richtig abgelesen oder umgekehrt symbolisch vorgegebene Zahlen auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Häufig werden sogar irrationale Zahlen in der 8. Jahrgangsstufe auf der Zahlengeraden dargestellt und die Beziehungen der Zahlenmengen $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{R}$ sind ohnehin wichtiger Bestandteil in diesem voranschreitenden Begriffsbildungsprozess.

## 3. Balken und Säulen

Eine weitere Zahldarstellung, die sich erst vor einigen Jahren in der Primarstufe etabliert hat, ist die Darstellung einer Zahl in Form eines Balken bzw. einer Säule. Diese Darstellungsart bereitet wichtige statistische Darstellung vor und wird dann in der Sekundarstufe 1 und Sekundarstufe 2 auch ausgiebig genutzt.

## 4. Flächen und Strecken

Zu guter Letzt werden in der Primarstufe mit der Einführung der Bruchzahlen (vorwiegend auf Stammbrüche beschränkt) weitere Darstellungsform – nämlich Flächen und Strecken – eingeführt und extensiv genutzt. Das Augenmerk liegt hier auf dem Wechsel zwischen ikonischer und symbolischer Darstellung einer Bruchzahl. In der Sekundarstufe 1 kommt dann noch der Darstellungswechsel zwischen der Dezimaldarstellung, der Bruchdarstellung und der Prozentschreibe hinzu.

## 5. Fazit

Zahldarstellungen begleiten die Lernenden in ihrem Mathematikunterricht von Anbeginn. Beim Arbeiten mit diesen unterschiedlichen Darstellungen müssen Übertragung gegebener mathematischer Sachverhalte in eine andere Repräsentation vorgenommen werden und geeignete Repräsentationen erstellt, ausgewählt und genutzt werden. Die oben genannten vier Darstellungsformen werden bereits in der Primarstufe genützt und kommen im weiteren Verlauf des Mathematikunterrichts immer wieder – auch im Zusammenhang mit anderen Inhaltsbereichen – zum Einsatz. Dabei erfolgt vor allem in der Sekundarstufe 2 eine Loslösung von den ikonischen Darstellungsformen und der Wechsel zwischen verbaler und symbolischer Darstellung tritt in den Vordergrund. Im Zusammenhang mit den verbalen Darstellungen ist es daher unabdingbar, dass die Schüler/innen die Eigenschaften natürlicher, ganzer, rationaler, irrationaler, reeller und komplexen Zahlen kennen und angeben können. Ein weitere spannende Vernetzungsmöglichkeit zeigen uns die komplexen Zahlen auf – sie werden im österreichischen Lehrplan der 11. Jahrgangsstufe thematisiert. Zur Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene sind Kenntnisse der Vektorrechnungen gefordert. Insgesamt also zeigt sich, dass Zahldarstellungen viele Möglichkeiten zur vertikalen Vernetzung eröffnen, sie müssen nur noch ergriffen werden!

## Literatur


Brinkmann, A., Siller, H.-S. (2012): *Vertikale Vernetzung über außermathematische Anwendungskontexte*. In: (Hrsg.) Brandl, M., Brinkmann, A., Maaß, J., Siller, H.-S. Mathe vernetzt – Anregungen für einen vernetzenden Mathematikunterricht

Evelyn SÜSS-STEPANCIK, Baden

# Der Medien-Mix macht's aus! – Mit Papier und Bleistift beim Einsatz von Lernpfaden Darstellungskompetenzen fordern und fördern

Die online Lernpfade des österreichischen Projekts „Medienvielfalt“ (www.medienvielfalt.org) sowie andere Lernpfade vergleichbarer Initiativen bereiten für Lehrende und Lernende einen überschaubaren mathematischen Themenbereich in Form von HTML- oder Wiki-Seiten auf. Dabei kommen zumeist erläuternde Texte, Aufgabenstellungen, Bilder, dynamische Lernobjekte und Arbeitsblätter, die den Bearbeitungsprozess der Schüler/innen lenken, zum Einsatz.

Den Kern vieler Lernpfade bilden zweifellos die interaktiven Lernobjekte. Ein wesentliches Charakteristikum dieser interaktiven Lernobjekte ist ihre dynamische Veränderbarkeit, welche die im Begriffsbildungsprozess bedeutende systematische Variation unterstützt. Damit diese Variationen aber nicht nur gesehen, sondern von den Schülern und Schülerinnen auch dokumentiert und reflektiert werden, enthalten viele Lernpfade eigene Arbeitsblätter. Diese Arbeitsblätter sind am besten in ausgedruckter Form gemeinsam mit dem Lernpfad zu verwenden und zu bearbeiten.

Da Lernpfade aber mit den interaktiven Lernobjekten ganz unterschiedliche Darstellungsarten anbieten und von den Lernenden das Arbeiten mit diesen Darstellungen fordern, liegt es nahe, die Möglichkeiten zur Förderung der Darstellungskompetenz mit Lernpfaden genauer zu untersuchen. Exemplarisch wurde dazu zwei Lernpfade sowie die Dokumentationen zweier Lerngruppen der 7. Jahrgangsstufe dazu analysiert.

Der Lernpfad zum Satz des Pythagoras (Klinger und Schmidt 2011) startet mit der bekannten Aufgabenstellung des Seilspannens und fordert die Lernenden auf, selbst mit einer Schnur zu arbeiten und ein rechtwinkeliges Dreieck zu legen. Danach erfolgt die Hinführung zum Satz von Pythagoras mit drei unterschiedlichen dynamischen Lernobjekten, die rechtwinkelige Dreiecke mit Quadraten über den Katheten und der Hypotenuse zeigen. An jedes dieser Lernobjekte sind Aufträge zum Beobachten und Dokumentieren geknüpft. Den meisten Schülern/innen gelingt das schriftliche Dokumentieren ihrer Beobachtungen sehr gut. Auch der Satz von Pythagoras kann sowohl mit eigenen Worten formuliert als auch mit Formeln dargelegt werden. Grundsätzlich also gelingt der Darstellungswechsel – hier von einer geometrischen Darstellung zu einer verbalen oder symbolischen Darstellungsform – gut.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1199–1201). Münster: WTM-Verlag

Nach der Erarbeitung des Satzes von Pythagoras werden im Lernpfad vier Beweise des Satzes angeboten. Bei diesen Beweisen wurde bewusst die Anzahl der unterstützten Applets reduziert, um das haptische Arbeiten mit Papier und Schere sowie das algebraische Arbeiten zu unterstützen. Der Zerlegungsbeweis nach der Idee von Perigal wird von den Lernenden problemlos nachvollzogen – das heißt die einzelnen Teile konnten richtigen zusammengefügt werden. Eine Analyse der Dokumentationen, welche die Schüler/innen einer 7. Jahrgangsstufe angefertigt haben, zeigt jedoch, dass einige die besondere Teilung des größeren Kathetenquadrates durch zwei zueinander orthogonale Geraden nicht erkannt oder zumindest unzureichend dokumentiert haben.

Ein weiterer Lernpfad, bei dem der Darstellungswechsel sowie das Arbeiten mit unterschiedlichen Darstellungsformen wichtig ist, ist der Lernpfad zur direkten und indirekten Proportionalität (Bierbaumer et al 2011). Dabei wird, wie für Funktionen typisch, mit verbalen, tabellarischen, grafischen und symbolischen Darstellungen gearbeitet und eine Vernetzung dieser Darstellungsformen angestrebt. Mithilfe der dynamischen Lernobjekte erarbeiten die Lernenden sprachliche, tabellarische, grafische und symbolische Darstellungen direkt und indirekt proportionaler Funktionen. Auch in diesem Lernpfad wurde beim Sichern, Üben und Vertiefen des neu erworbenen Wissens auf dynamische Lernobjekte verzichtet und traditionelle Medien (Papier und Stift) eingesetzt. Bei einem Übungsspiel – vergleichbar mit einem Quartett – müssen die Schüler/innen nun Wertetabellen, Funktionsgraphen, Funktionsgleichungen und verbale Beschreibungen zusammenführen. Ähnlich gestaltet sich ein weiterer Arbeitsauftrag in dieser Arbeitsphase, bei dem die Schüler/innen ausgehend von Wertetabellen und Funktionsgraphen erkennen und begründen müssen, ob und welche Proportionalität vorliegt. Liegt eine solche vor, dann ist auch der Proportionalitätsfaktor anzugeben. Die Dokumentationen der Schüler/innen zeigen, dass die Art der Proportionalität, wenn sie mittels Wertetabelle gegeben ist, sehr gut erkannt wird. Noch deutlicher erkennen Schüler/innen nach dem Absolvieren des Lernpfades anhand der Funktionsgraphen ob und welche Art der Proportionalität vorliegt. Interessant sind jedoch die Begründungsversuche der Schüler/innen in Abhängigkeit von der vorliegenden Darstellung. Liegt eine tabellarische Darstellung vor, dann begründen die Schüler/innen ausführlicher – z.B. durch Angabe des Proportionalitätsfaktors oder eine Funktionsgleichung – die Art der Proportionalität. Liegt hingegen nur eine graphische Darstellung vor, dann wird von den Schüler/innen so gut wie gar nicht begründet, warum eine direkt oder indirekt proportionale Funktion vorliegt. Das vorliegen der jeweiligen Art wird bloß notiert. Die graphische Darstellung scheint für sich zu sprechen.

Für die beiden hier vorgestellten Lernpfade gilt jedenfalls, dass bei der Erarbeitung der mathematischen Inhalte dynamisch veränderbare Darstellungen wichtig sind und mit dem Medien-Mix bzw. dem Medienwechsel von Computer zu Papier ein Wechsel der Darstellungsform einhergeht. Die interaktiven Darstellungen müssen von den Schülern/innen beim Bearbeiten des Lernpfades verstanden und interpretiert werden, dabei sind die Beobachtungen (meist) in einer (anderen) Darstellungsform zu dokumentieren. Diese Dokumentationen wiederum ermöglichen den Lehrenden interessante Einblicke in die Sichtweisen der Schüler/innen. Insgesamt unterstützen die Lernpfade das Einfordern verschiedener Darstellungsarten und tragen unter der Voraussetzung, dass die Dokumentationen der Schüler/innen analysiert und genutzt werden, zu einer Förderung der Darstellungskompetenz bei.

## Literatur


Bierbaumer, I., Klinger, W. & Stepancik, E. (2011). *Direktes und indirektes Verhältnis*. http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Medienvielfalt/Medienvielfalt3/lernpfad_direktes_indirektes_verhaeltnis/iv_dv_final/ (18.03.2014)

Klinger, W. & Schmidt, R. (2011). *Pythagoras*. http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Medienvielfalt/Medienvielfalt3/lernpfad_pythagoras/pythagoras/ (18.03.2014)

Kathrin TALHOFF, Ralf BENÖLKEN, Münster

# Zur Bedeutung motivationaler Faktoren für die Entwicklung und für die Identifikation mathematischer Begabungen

## 1. Einleitung

Hinsichtlich einer differenzierten Diagnostik mathematischer Begabungen scheint eine ganzheitliche Herangehensweise, wie sie aktuelle Modellierungen zum Begabungsbegriff induzieren (z.B. Fuchs und Käpnick 2009), gerade mit dem Blick auf motivationale Determinanten konstruktiv – denn über mathematische Begabungsmerkmale als kognitive Indikatoren hinaus werden explizit co-kognitive Faktoren einbezogen, die die Entwicklung individueller Potenziale moderieren. Einen wichtigen Aspekt stellen in diesem Kontext geschlechtsspezifisch eventuell unterschiedliche Ausprägungen dar, da hohe mathematische Potenziale bei Mädchen vergleichsweise selten identifiziert werden, obwohl beide Geschlechter gemäß wissenschaftlichem Konsens bereichsübergreifend über gleiche Potenziale verfügen (Übersichten bei Benölken 2011). In diesem Beitrag wird die Bedeutung motivationaler Faktoren als Determinanten (a) für die Entwicklung und (b) für die Identifikation mathematischer Begabungen im Vor- und Grundschulalter diskutiert. Perspektive (a) wird anhand von Fallbeispielen behandelt, Perspektive (b) anhand der Skizze einer quantitativen Studie (Benölken 2013). Betrachtet werden dabei exemplarisch die motivationalen Komponenten Selbstkonzept, Attribution und Interessen.

## 2. Einflüsse auf die Entwicklung mathematischer Begabungen

**Julia und Tobias** sind Zwillinge. Ihre Entwicklung verlief hinsichtlich der Zuwendung zur Mathematik sehr unterschiedlich: Der Junge hatte früh (auch über den schulischen Bereich hinaus) großes Interesse an Mathematik. Da er zudem sehr gute Leistungen im Mathematikunterricht zeigte, schlug ihn die Lehrkraft zu Beginn des dritten Schuljahres für eine Teilnahme am Münsteraner Förderprojekt „Mathe für kleine Asse“ vor (zum Konzept siehe Käpnick 2008). Julias Leistungen waren demgegenüber im Unterricht solide, besonderes Mathematikinteresse ließ sie aber nicht erkennen. Dennoch nahm auch sie an dem Projekt teil – vornehmlich, da es den Eltern so besser möglich war, die Betreuung der Kinder parallel zu Beruf u.Ä. zu organisieren. Während sie ursprünglich mathematische Leistungen weniger günstig attribuierte und kein positives mathematisches Selbstkonzept besaß, induzierte die Teilnahme diesbezüglich sehr positive Effekte. Diese Entwicklung führte erst dazu, dass sie Mathematik zunehmend als Bereich wahrnahm, in dem sie besondere Leistungen erbringen kann. Julias

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1203–1206). Münster: WTM-Verlag

Mathematikinteresse entwickelte sich ebenfalls positiv, ordnete sich aber in andere Interessen ein (z.B. Kunst). Tobias hatte demgegenüber bereits vor der Projektteilnahme nicht nur ein großes Mathematikinteresse, sondern ein positives mathematisches Selbstkonzept und günstige Attributionen.

Im Vorschulbereich sind Interessen meist noch wenig gefestigt. Manche Kinder reagieren jedoch besonders auf angebotene mathematische Inhalte. **Philip** wurde in der KiTa mit dem Programm „Zahlenland" (Preiß 2004) gefördert. Daraufhin entwickelte er großes Interesse an Zahlen, am Zählen und am Rechnen. Er erarbeitete sich nach Beendigung der Förderung selbstständig den Zahlenraum von 10 bis 20 und führte darin erste Additionen durch. Später nahm Philip ab der dritten Klasse regelmäßig am Projekt „Mathe für kleine Asse" teil, was sein besonderes Interesse an Mathematik unterstreicht. Im Projekt überzeugte er mit herausragenden Leistungen.

Die skizzierten Fallbeispiele deuten an, dass Jungen ihre Interessen oft schon früh auf Mathematik fokussieren und die Identifikation besonderer Begabungen erheblichen Einfluss auf die (günstige) Ausprägung von Komponenten der Motivation besitzen kann. Die ungünstige Ausprägung solcher Faktoren könnte die Identifikation hoher Potenziale wiederum erschweren, da z.B. andere Interessen in den Vordergrund treten. So könnte die seltene Identifikation von mathematischen Begabungen bei Mädchen (mit) verursacht werden, falls sich solche Ausprägungen bei begabteren, jedoch nicht als solchen identifizierten Mädchen häufiger finden sollten.

## 3. Einflüsse auf die Identifikation mathematischer Begabungen

Der folgende Abschnitt referiert eine Studie von Benölken (2013). Sie hatte zum Ziel, Erkenntnisse zur Ausprägung von Selbstkonzept, Attribution und Interessen bei Mädchen und Jungen, die als mathematisch begabt identifiziert wurden (kurz „mbi"), im Vergleich zu solchen, die nicht als mathematisch begabt identifiziert wurden („n-mbi"), zu erlangen (für Details zur Hypothesenkonstruktion, zur theoretischen Basis der Fragebogeninstruktionen, zu Interpretationsgrenzen u.Ä. siehe dort). Die folgenden Hypothesen zu begabungs- und geschlechtsspezifisch variierenden Ausprägungen wurden theoretisch-analytisch abgeleitet:

(1) Mbi Mädchen und Jungen sowie n-mbi Jungen besitzen im Vergleich zu n-mbi Mädchen öfter ein funktionales mathematisches Selbstkonzept.

(2) Mbi Mädchen und Jungen attribuieren Erfolge in der Mathematik jeweils meist funktional, d.h. internal (2a.1). N-mbi Jungen attribuieren Erfolge in der Mathematik häufiger funktional als n-mbi Mädchen, d.h. internal (2a.2). Mbi Mädchen und Jungen attribuieren Misserfolge in der Mathematik jeweils meist funktional, d.h. external (2b.1). N-mbi Jungen attri-

buieren Misserfolge in der Mathematik häufiger funktional als n-mbi Mädchen, d.h. external (2b.2).

(3) Mbi Mädchen besitzen ein breiteres Interessenspektrum als mbi Jungen sowie als n-mbi Mädchen und Jungen.

Für die Erhebungen wurde ein Fragebogen verwendet, der Abschnitte aus den weiter gefassten Instrumenten von Benölken (2011) zu Selbstkonzepten, Attributionen und Interessen synthetisiert. So war es möglich, einen adäquaten Stichprobenumfang an mbi Mädchen zu erreichen. Befragt wurden N=288 Dritt- und Viertklässler (132w, 156m), darunter n=165 Kinder (66w, 99m) aus dem Projekt „Mathe für kleine Asse", sowie n=123 Kinder (66w, 57m) aus Regelklassen. Vornehmlich aufgrund stark vereinfachter Maße (siehe auch unten) und wegen der eingeschränkten Stichprobe ist diese Studie als weiterführende Erkundungsuntersuchung einzustufen.

Selbstkonzepte waren anhand einer vierstufigen Skala (kodiert von 1 bis 4, wobei 4 den höchsten Zustimmungsgrad anzeigt) zur Instruktion „Kreuze an, wie sehr jede Aussage für dich stimmt: [1] In Mathematik bin ich sehr gut. [2] Schwierige Mathe-Aufgaben machen mir besonders viel Spaß." einzuschätzen. Die Werte wurden als Mittelwert zu einer Skala zusammengefasst. Erfolgsattributionen sollten nach der Instruktion „Stell dir vor: Du hast ein kniffliges Mathe-Problem gelöst. Warum ist dir das wahrscheinlich gelungen? Weil… [1] du dich so angestrengt hast, [2] es Zufall war, [3] du Mathe sehr gut kannst, [4] die Aufgabe einfach war." beschrieben werden (analog Attributionen für Misserfolg). Zur Erhebung der Interessenanzahl diente ein Katalog, in dem einzelne Interessen angekreuzt werden und ggf. nicht enthaltene ergänzt werden konnten. Die Angaben wurden zu einer Variablen der Gesamtinteressenanzahl summiert. Die statistische Auswertung zu Selbstkonzept und Interessen geschah anhand einer zweifachen Varianzanalyse mit den Faktoren „Begabung" und „Geschlecht", zu Attributionen durch das Bilden von Kreuztabellen, die u.a. standardisierte Residuen auswiesen. Zur Signifikanzprüfung diente hier der exakte Fisher-Test.

Für Selbstkonzepte ergab sich bei den mbi Jungen ein Mittelwert von 3,58 (Standardabweichung 0,44), bei den mbi Mädchen von 3,60 (0,42), bei den n-mbi Jungen von 3,33 (0,59) und bei den n-mbi Mädchen von 2,58 (0,87). Für Begabung ($F(1,237)=63{,}39$, $p<0{,}001$, $\eta^2=0{,}211$) und Geschlecht ($F(1,237)=21{,}16$, $p<0{,}001$, $\eta^2=0{,}082$; nicht interpretierbar) gibt es signifikante Haupteffekte und einen signifikanten Interaktionseffekt ($F(1,237)=23{,}80$, $p<0{,}001$, $\eta^2=0{,}091$). Diese Ergebnisse bestätigen Hypothese 1.

Für Interessen ergab sich bei den mbi Jungen ein Mittelwert von 8,68 (3,43), bei den mbi Mädchen von 12,44 (3,82), bei den n-mbi Jungen von

7,44 (2,47) und bei den n-mbi Mädchen von 11,11 (3,21). Für Begabung (F(1,284)=10,50, p=0,001, $\eta^2$=0,036) und Geschlecht (F(1,284)=86,77, p<0,001, $\eta^2$=0,234) gibt es signifikante Haupteffekte, jedoch keinen Interaktionseffekt (F(1,284)=0,01, p=0,915, $\eta^2$=0,000). Hypothese 3 wurde für die mbi Mädchen bestätigt (jedoch haben auch n-mbi Mädchen im Mittel mehr Interessen als die Jungen).

Die Angaben der mbi Mädchen und Jungen zu Attributionen unterschieden sich nur unwesentlich und lassen sich für Erfolg und Misserfolg als funktional kennzeichnen. Zu den Hypothesen 2a.1 und 2b.1 können aber formal keine Aussagen getroffen werden (Fisher-Test=4,044, p=0,243 bzw. =3,656, p=0,282). Hypothese 2a.2 fand Bestätigung (=30,137, p<0,001). Die standardisierten Residuen zeigen, dass die n-mbi Mädchen seltener als die n-mbi Jungen internal-stabile (-2,6 zu 2,8) und öfter external-stabile (2,2 zu -2,4) Erfolgsattributionen benannten. Hypothese 2b.2 wurde ebenfalls bestätigt (=19,882, p<0,001). Die standardisierten Residuen lassen erkennen, dass die n-mbi Mädchen im Vergleich zu den n-mbi Jungen häufiger internal-stabile (2,3 zu -2,5) Misserfolgsattributionen benannten.

## 4. Zusammenschau

Die gemäß der Ergebnisse der quantitativen Studie unabhängig von der Identifikation von Begabungen häufiger auftretende günstige Ausprägung von Selbstkonzept und Attribution bei Jungen könnte ein Grund dafür sein, dass Begabungen hier öfter diagnostiziert werden. Das häufige Auftreten ungünstiger Ausprägungen bei Mädchen sowie die vorgestellten Fallbeispiele legen eine vorsichtig zu formulierende These nahe: Hohe mathematische Potenziale bei Mädchen werden aufgrund der im Vergleich zu Jungen häufigeren ungünstigen Ausprägung motivationaler Faktoren vielleicht seltener erkannt. Da Mädchen zudem mehr Interessen haben, könnten sie sich eher als Jungen einem anderen Interessenschwerpunkt zuwenden.

## Literatur


Benölken, R. (2013). Begabung, Geschlecht und Motivation. *Journal für Mathematik-Didaktik* [DOI: 10.1007/s13138-013-0059-9].

Benölken, R. (2011). *Mathematisch begabte Mädchen.* Münster: WTM.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). *Mathe für kleine Asse* (3. und 4. Schuljahr; Band 2). Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2008). „Mathe für kleine Asse". Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder* (S. 138–148). Berlin: Lit Verlag.

Preiß, G. (2004). *Leitfaden Zahlenland 1.* (2. Auflage). Bad Camberg: Zahlenland Prof. Preiß.

Julia TELLER, Bärbel BARZEL, Timo LEUDERS, Freiburg

# Erfassung der Entwicklung diagnostischer Kompetenzen von Lehrkräften - Validität im Mixed-Method-Design

Validität ist bei quantitativen Untersuchungsdesigns an Kennwerte gebunden, die sich lediglich auf Testergebnisse beziehen. Ein Mixed-Method-Design mit qualitativen Elementen stellt daher generell eine günstige Bedingung für Validität dar. In diesem Beitrag werden erste Auswertungsergebnisse einer Studie zur Förderung diagnostischer Kompetenzen durch eine Lehrkräftefortbildung vorgestellt, die auf qualitativen Auswertungen beruhen und dabei prozessbezogene Validität besonders ins Auge fassen.

## 1. Hintergrund der Studie: Diagnostische Kompetenzen

Diagnostische Kompetenzen werden als Fähigkeit aufgefasst, adäquate Urteile über Schülerinnen und Schüler zu treffen (Schrader, 2011). Hierzu zählen insbesondere die Fähigkeiten, lern- und leistungsrelevante Merkmale von Schülerinnen und Schülern zu beurteilen und Aufgabenanforderungen adäquat einzuschätzen (Lorenz & Artelt, 2009). In der vorliegenden Studie galt es, diese Facetten durch eine themenspezifische Lehrerfortbildung zu fördern. Zudem wurde ein Online-Fragebogen entwickelt, der Entwicklungsverläufe diagnostischer Kompetenzen aufdecken kann.

Im Rahmen von Large-Scale Studien wie COACTIV und TEDS-M werden diagnostische Kompetenzen als eine Facette von handlungsleitendem Professionswissen bzw. fachdidaktischem Wissen querschnittlich erhoben (Baumert et al., 2008; Döhrmann et al., 2012). Das Ziel der in diesem Beitrag vorgestellten Studie „Förderung diagnostischer Kompetenzen im Bereich Funktionen“ ist hingegen die Untersuchung der Entwicklung diagnostischer Kompetenzen in einem längsschnittlichen Design. Dabei muss die Kompetenzmessung spezifischer angelegt sein als bei oben genannten Ansätzen. Von Interesse sind die folgenden Forschungsfragen: Inwiefern können diagnostische Kompetenzen durch eine unterrichtsbegleitende Fortbildung zum Themenbereich Funktionen gefördert werden? Inwiefern können diese Entwicklungsverläufe valide erfasst werden?

## 2. Mixed-Method-Design der Studie

Zu diesem Zweck wurde ein quasiexperimentelles Design mit 26 Lehrkräften entwickelt (vgl. Teller, Barzel, & Leuders, 2013). Die Erhebung diagnostischer Kompetenzen vor und nach der Fortbildung geschah in Form eines Online-Fragebogens, der größtenteils offene Antwortformate enthielt,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1207–1210). Münster: WTM-Verlag

um Diagnoseprozesse der Teilnehmenden möglichst situationsspezifisch und valide zu erfassen. Die erhobenen Antworten wurden qualitativ auf der Basis der Grounded Theory ausgewertet und von zwei unabhängigen Ratern kodiert.

## 3. Erste Ergebnisse

Die am Datenmaterial entwickelten Kategorien beschreiben unterschiedliche diagnostische Zugänge zur Beurteilung von Schülerlernständen und erlauben die Darstellung in Form eines Diagnoseprofils. Entwicklungsverläufe der diagnostischen Kompetenzen können nachgewiesen werden, indem vor und nach der Fortbildung entstandene Diagnoseprofile einer Lehrkraft verglichen werden.

Ein Diagnoseprofil einer Lehrkraft bezieht sich auf deren Diagnoseurteile über vier Items hinweg. Es besteht aus 13 Elementen auf fünf Ebenen, die unabhängig voneinander und auch mehrmals erfüllt werden können. Qualitative Unterscheidungen der Diagnoseprofile werden getroffen, indem Diagnoseurteile entweder als allgemein oder konkret (Ebene 1) und korrigierend, beschreibend oder analytisch (Ebene 2) identifiziert werden. Des Weiteren kann sich ein Diagnoseprofil entweder auf ein Defizit oder zwei sowie mehrere Defizite beziehen (Ebene 3). Außerdem kann ein Diagnoseprofil zusätzliche Qualitätsmerkmale beinhalten wie die Anwendung fachdidaktischen Wissens, der Bezug zu Stärken der Schülerlösung, eine Erklärung für Defizite oder der Bezug zu möglichen Problemen des Unterrichts (Ebene 4). Abschließend kann ein Diagnoseurteil auch fehlerhaft oder unverständlich sein (Ebene 5). Situationsspezifische diagnostische Kompetenzen zeigen sich durch unterschiedliche Fähigkeiten (Korrigieren, beschreiben und analysieren) auf Ebene 2.

Auf der Grundlage der qualitativen Datenanalyse konnten bisher drei verschiedene Entwicklungsverläufe diagnostischer Kompetenzen aufgedeckt werden, die bei mehreren Lehrkräften auftreten:

1) Eine Lehrkraft diagnostiziert vor der Fortbildung allgemein, konkret, analytisch und bezieht sich auf ein Defizit. Im Anschluss an die Fortbildung wendet die Lehrkraft zusätzlich fachdidaktisches Wissen an.

2) Eine Lehrkraft diagnostiziert vor der Fortbildung konkret und beschreibend. Nach der Fortbildung diagnostiziert die Lehrkraft konkret, korrigierend, beschreibend, analytisch und bezieht sich auf ein Defizit der Schülerlösung.

3) Eine Lehrkraft diagnostiziert vor der Fortbildung konkret und beschreibend, nach der Fortbildung konkret, analytisch und auf ein Defizit bezogen. Dies stellt eine profundere Diagnose dar, da Förderpotential aus dieser Diagnose abgeleitet werden kann.

## 4. Zur Frage der Validität

Aus Sicht der quantitativen Forschung ist Validität durch das Forschungsdesign und den gezielten Ausschluss validitätsgefährdender Aspekte sicherzustellen. Bei der vorliegenden Studie wurden beispielsweise Vorerfahrungen der Probanden in den Bereichen Diagnose und Fortbildung erhoben, damit diese möglichen Störfaktoren ausgeschlossen werden oder in der Auswertung Berücksichtigung finden können. Die direkte Übertragung des Gütekriteriums der Validität aus der quantitativen Forschung ist nicht ausreichend, da sich Validität nicht nur auf Kennwerte eines Tests bezieht sondern auch während des Forschungsprozesses eine Rolle spielt.

Aus der qualitativen Forschung sind Validierungsmaßnahmen bekannt, die sich auf den kompletten Forschungsprozess beziehen (Winter, 2000). Nach Meyrick (2006) stellen Transparenz und Systematik zentrale Charakteristika valider qualitativer Forschung dar. Winter (2000) unterscheidet dabei zwei Typologien von Validität. Zum einen kann ein Forschungsprojekt den Anspruch der Inhalts-, Kriteriums- oder Konstruktvalidität verfolgen und zum anderen interne und externe Validität erfüllen. In dieser Studie wurde die Inhaltsvalidität als zentral zu erfüllendes Gütekriterium angesehen. Zur Instrumententwicklung wurde eine Pilotierung und Expertenbefragung durchgeführt, was nach Messick (1995) zur Inhaltsvalidität beitragen kann. Außerdem wurde bei der Interpretation der Ergebnisse regelmäßig Rückmeldungen anderer Forscherinnen und Forscher eingeholt. Interne Validität als der Grad, zu dem die Ergebnisse der untersuchten Kompetenzfacette zuzuordnen sind, sollte durch die im folgenden vorgestellte Maßnahme gesichert werden (Winter, 2000; Hammersley, 1987). Der Online-Fragebogen enthielt Items zu Vorerfahrungen der Probanden bezüglich Fortbildungen und Diagnose sowie dem Unterrichten von Funktionen. Mit dieser Maßnahme konnte die interne Validität erhöht werden. Externe Validität kann lediglich innerhalb der Theoriegenerierung (Kategorienbildung) bezogen auf die untersuchte Population als erfüllt angesehen werden.

## 5. Ausblick

Im weiteren Verlauf der Studie sollen quantitative Datenanalysen durchgeführt werden und dabei unterschiedliche Ausprägungen der Kategorien erfasst werden. Da sich bisherige Auswertungen lediglich auf ein Drittel des

Datensatzes beziehen, werden die Überprüfung und eine mögliche Erweiterung der Entwicklungsverläufe an weiteren Daten vorgenommen. Bei der Interpretation der Ergebnisse werden sowohl validitätsgefährdende Aspekte im Projekt als auch alternative Argumentationsstränge in die Ergebnisdarstellung integriert, um die Ergebnisinterpretation so valide wie möglich zu gestalten (Kane, 2001).

## Literatur


Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann U., Krauss, S., Kunter, M., Löwen, K., Neubrand, M., Tsai, Y.-M. (2008). *Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz (COACTIV). Dokumentation der Erhebungsinstrumente.* Materialien aus der Bildungsforschung, 83. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Döhrmann, M., Kaiser, G., Blömeke, S. (2012). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *ZDM Mathematics Education, 44*, 325-340.

Hammersley, M. (1987). Some notes on the terms 'validity' and 'reliability'. *British Educational Research Journal, 13* (1), 73-81.

Kane, M.T. (2001). Current concerns in validity theory. *Journal of Educational Management, 38* (4), 319-342.

Lorenz, C., Artelt, C. (2009). Fachspezifität und Stabilität diagnostischer Kompetenz von Grundschullehrkräften in den Fächern Deutsch und Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 23* (3-4), 211-222.

Messick, S. (1995). Validity of Psychological Assessment. Validation of inferences from persons' responses and performances as scientific inquiry into score meaning. *American Psychologist, 50* (9), 741-749.

Meyrick, J. (2006). What is good qualitative research? A first step towards a comprehensive approach to judging rigour/ quality. *Journal of Health Psychology, 11* (5), 799-808.

Schrader, F.-W. (2011). Lehrer als Diagnostiker. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 683-698). Münster: Waxmann.

Teller, J., Barzel, B., & Leuders, T. (2013). Förderung Diagnostischer Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern im Bereich Funktionales Denken: Eine Interventionsstudie. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*, *2* (S. 1002-1005). Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Winter, G. (2000). A comparative discussion of the notion of 'validity' in qualitative and quantitative research. *The Qualitative Report, 4* (1&2). Online 20.03.2014: ttp://www.nova.edu/ssss/QR/QR4-3/winter.html

Bernd THALLER, Patrick-Michel FRÜHMANN, Graz

# Begründungsorientierter vs. faktenpräsentierender Unterrichtsstil - eine empirische Vergleichsstudie

Gerade wieder hat eine Umfrage [GDM 2013] unter Studienanfängern des Lehramts Mathematik in Österreich gezeigt, dass Mathematikunterricht überwiegend als fragend-entwickelnder Frontalunterricht stattfindet. Etwa die Hälfte der Befragten gab an, dass dabei (inner-) mathematische Begründungen nur eine sehr geringe Rolle spielten. Auch Erfahrungen aus Hospitationen lassen es plausibel erscheinen, dass beim fragend-entwickelnden Unterricht folgende Ausprägungen eine Rolle spielen.

Im *begründungsorientierten Unterricht* werden, zumindest bei der Einführung neuer Inhalte, mathematische Resultate hergeleitet und detailliert begründet. Dabei werden Schülerinnen und Schüler durch Aufforderungen und Fragen der Lehrperson in den Herleitungsprozess einbezogen. Auf die gegebene Begründung wird später bei sich bietenden Gelegenheiten wieder Bezug genommen, etwa bei der Besprechung von Übungsaufgaben. Primär erfüllen die Begründungen dabei eine Überzeugungsfunktion. Sie sollen Vertrauen in die Richtigkeit der gewonnenen Einsichten, und in das Funktionieren der Methoden schaffen. Von Lernenden aktiv ausgeführte Begründungen werden jedoch meist nicht eingefordert.

Der *faktenvermittelnde Unterricht* hingegen präsentiert Resultate und Formeln „fertig zum Gebrauch“. Diese werden dann unter Einbeziehung der Lernenden durch Beispiele und Gegenbeispiele illustriert, ohne aber auf innermathematischer Begründungen einzugehen. Das Vertrauen in die Richtigkeit mathematischer Sachverhalte wird durch Gewöhnung daran erzeugt, dass die vorgestellten Methoden und Rechenverfahren in den Anwendungsbeispielen und Übungsaufgaben funktionieren und zu glaubwürdigen Resultaten führen. Die Einbeziehung der Lernenden geschieht durch Diskussion der Anwendung oder Fragen zur Wiederholung.

Lehrpersonen laufen manchmal Gefahr, der Tendenz zur reinen Faktenvermittlung zu unterliegen, vor allem im berufsbildenden Unterricht, in dem die Kompetenz des Anwenders wichtiger scheint, als mathematisch vertieftes Verständnis. Sie machen oft die Erfahrung, dass die eigentliche Herleitung eines Resultats mehrheitlich nicht verstanden wird und die Aufmerksamkeit der Klasse erst dann wieder steigt, wenn Beispiele vorgerechnet werden, die die Lernenden dann nachahmen. Eventuell finden es Lehrpersonen sogar zeitsparend und jedenfalls einfacher, das „Warum“ durch ein einfaches „Wie“ zu ersetzen. Der Unterricht wird so vermeintlich

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1211–1214). Münster: WTM-Verlag

von einem „Ballast“ befreit, da Begründungen bei den (meist eher repetitiv angelegten) Schularbeiten ohnehin kein Thema sind.

Es ist eine naheliegende Hypothese, dass ein begründungsorientierter Unterricht besser das Verstehen fördert als ein faktenvermittelnden Unterricht und diesem daher überlegen ist. Der Erwerb von Kompetenzen erfolgt eben nicht bloß durch Anhäufung von Fakten und Anwendung automatisierter Regeln, sondern benötigt die mentale Vernetzung durch Einsicht in Begründungszusammenhänge [Ziegler, Stern, Neubauer 2012]. Unsere Ergebnisse lassen vermuten, dass selbst bei gleicher Übungsintensität und gleichem Aufwand an Unterrichtszeit der begründungsorientierte Unterricht auch hinsichtlich der reinen „Anwendungskompetenz“ zu besseren Leistungen der Lernenden führen kann. Ein Grund mag darin liegen, dass besseres Verstehen mehr Sinnhaftigkeit und Stimmigkeit empfinden lässt und dadurch Unterrichtsbeurteilung und Lernhaltung verbessert.

Um die beiden Unterrichtsstile zu vergleichen, wurde ein psychologisches Experiment mit zwei Parallelklassen eines steirischen Gymnasiums in der siebten Schulstufe durchgeführt [Frühmann 2012]. Für die Schüler/innen stellte ein überwiegend faktenvermittelnder Unterricht die zuvor fast ausschließlich erlebte Unterrichtsform dar.

Die beiden Klassen bildeten zwei sehr gut vergleichbare Jahrgangs-Stichproben jeweils der Größe N=30, die in allen äußeren Merkmalen übereinstimmten: Einzugsgebiet, Geschlechterverhältnis (Klasse A: 19 Mädchen, 11 Burschen; Klasse B: 18 Mädchen und 12 Burschen), Altersstruktur (alle ca. 13 Jahre alt, keine Repetenten), Notenschnitt (in jeder Klasse ca. 2,3). Die Vergleichbarkeit der beiden Gruppen in Bezug auf weitere relevante „innere“ Merkmale wurde außerdem in einer Voruntersuchung mit dem Kompetenzen Fähigkeiten Test (KFT), dem Leistungsmotivationsinventar (LMI) und ausgewählten Items aus den PISA-Studien 2003–2006 sehr gut bestätigt.

Danach fand die erste Intervention statt, Unterrichtsthema waren Flächenformeln für ebene Figuren: Die Kontrollgruppe wurde, wie sie es gewohnt war, weiterhin faktenvermittelnd unterrichtet: Die Flächenformeln für die behandelten Figuren wurden einfach präsentiert, und der Umgang damit trainiert. Die andere Klasse wurde von *derselben* Lehrperson begründungsorientiert unterrichtet: das Zustandekommen der Flächenformeln wurde mit geometrischen Zerlegungsbeweisen erklärt. Ansonsten wurde die Intervention minimal gehalten, alle anderen Parameter waren in beiden Gruppen identisch insbesondere ide Anzahl von Unterrichtseinheiten (8 Stunden fragend-entwickelnder Vortrag und 3 Stunden zur Übung/Vorbereitung auf den Test) und alle behandelten Übungsbeispiele. Der erhöhte Zeitaufwand zu Beginn, der durch die Diskussion der Herleitungen entstand, konnte nach Aussage der Lehrperson leicht ausgeglichen werden, zumal sie einen höheren Bedarf an Wiederholungen in der „Fakten-Gruppe“ wahrnahm.

Um den Versuchsleitereffekt möglichst zu minimieren, bzw. um zu beobachten, ob im Engagement der Lehrperson Unterschiede auftraten oder unbewusste Manipulationen in einer der Gruppen stattfanden, hospitierte eine weitere Lehrperson alle durchgeführten Unterrichtseinheiten. In den jeweiligen Nachbesprechungen sollte diesbezüglich Feedback gegeben werden, es wurde aber durch die beobachtende Lehrperson keine über die Interventionsabsicht hinausgehenden Unterschiede wahrgenommen.

Die Leistungsfeststellung erfolgte durch einen am selben Tag abgehaltenen einstündigen Test, der die selben Beispiele für beide Gruppen umfasste Dieser Test wurde von einer außenstehenden Lehrperson (einer anderen Schule) zusammengestellt und korrigiert, um auch hier den Versuchsleitereffekt auszuschließen. Im Test wurden *keine* Begründungen gefordert, die Beispiele ließen sich alle durch Anwendung der Flächenformeln lösen.

Von insgesamt 100 erreichbaren Punkten entfielen 24 Punkte auf Beispiele zu einem früheren Thema. Dabei zeigte sich kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen. Für die maximal 76 Punkte der themenbezogenen Beispiele jedoch erzielten die beiden Gruppen folgende signifikant verschiedene Mittelwerte (Standardabweichungen in Klammern):

**Klasse A**: **„mit Begründung“:** **61,50** (10,922)

**Klasse B**: **„nur Fakten“:** **53,13** (11,826)

Würde sich dieses sehr eindeutige Ergebnis reproduzieren lassen, wenn man die Rollen von Interventionsgruppe und Kontrollgruppe vertauschte? Nach vier Monaten, in denen alle Kinder wieder vorwiegend faktenpräsentierend unterrichtet wurden, fand eine zweite Intervention statt, die organisatorisch exakt gleich wie die erste Intervention durchgeführt wurde, aber mit vertauschten Rollen: Klasse B als „Begründungs-Gruppe“ und Klasse A als Kontrollgruppe. Unterrichtsthema war der Pythagoräische Lehrsatz, in Klasse B mit Betonung auf einem geometrischen Zerlegungsbeweis, in Klasse A wurde nur die Formel präsentiert und geübt. Anwendungs- und Übungsbeispiele unterschieden sich nicht, ebensowenig wie die Unterrichtszeit in den beiden Gruppen. Das Ergebnis der Leistungsüberprüfung nach der zweiten Intervention ergab folgendes Bild (wieder waren maximal 76 Punkte zum Interventionsthema erreichbar):

**Klasse A**: **„nur Fakten“:** **56.13** (11.169)

**Klasse B**: **„mit Begründung“:** **62.07** (10.913)

Wieder schnitt die Begründungs-Gruppe besser ab, als die Fakten-Gruppe, wobei der Unterschied zwar signifikant, aber weniger deutlich ausfiel wie bei der ersten Intervention. Und wieder war die Performanz der beiden Gruppen bei einem nicht zum Thema „Pythagoras“ gehörigem Beispiel vergleichbar. Eine genauere statistische Analyse (ANOVA mit Messwiederholung, Tukey-HSD) verifizierte folgende Hypothesen:

- *Hypothese A (interindividueller Vergleich)*: Eine Gruppe von Lernenden, die begründungsorientiert unterrichtet wird, erzielt höhere Leistungen als eine Gruppe, die faktenvermittelnd unterrichtet wird.
- *Hypothese B (intraindividueller Vergleich)*: SchülerInnen, die zuerst faktenvermittelnd unterrichtet werden und später begründungsorientiert, verbessern sich in ihren Leistungen. SchülerInnen, die zuerst begründungsorientiert unterrichtet werden und später faktenvermittelnd, verschlechtern sich in ihren Leistungen.

Es wurden auch Daten zur individuellen Unterrichtsbewertung, zu Interesse und Motivation, Selbstkonzept, Lernstrategien, etc. erhoben und deren Beeinflussung durch die Unterrichtsmethode bzw. Interventionsreihenfolge untersucht. Erwartungsgemäß zeigte sich, dass die „Begründungs-Gruppe“ den Unterricht jeweils besser beurteilte als die „Fakten-Gruppe“, ein ähnliches Bild ergab sich bezüglich des Interesses. Eine multiple lineare Regressionsanalyse führte zu einem Modell mit den Einflussfaktoren Unterrichtsbeurteilung, arithmetisches Denken, Ausmaß an Elaborationsstrategien und Ausmaß an Übungsstunden, die gemeinsam 91% der Leistungsvarianz vorhersagen konnten. Einen weit geringeren Einfluss hatten in diesem Fall die folgenden Faktoren: allgemeine Rechenfähigkeiten, Selbstkonzept, Interesse, inhaltliche Relevanz der Unterrichtsinhalte, Ausmaß an Kontroll- und Übungsstrategien, Leistungsmotivation und bisherige Mathematikleistung. Details findet man in [Frühmann, 2012]. Es ist geplant, diese Ergebnisse in weiterer Folge im Detail zu veröffentlichen.

## Literatur


Frühmann P.-M. (2012). Nur ein kleines Rädchen oder doch ein großes Rad? Der Einfluss eines begründungsorientierten Mathematikunterrichts auf die (Lern-)Leistung der SchülerInnen in der Sekundarstufe I. Dissertation, Karl-Franzens-Universität Graz.

GDM (2013). Lernstandserhebung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich“, in Arbeit.

Ziegler, E., Stern, E. & Neubauer, A. (2012). Kompetenzen aus der Perspektive der Kognitionswissenschaften und der Lehr-Lern-Forschung. In M. Paechter et.al. (Eds.), Kompetenzorientiertes Unterrichten in der Schule (S. 14-26). Weinheim Basel: Beltz Verlag.

Alexandra THIEL-SCHNEIDER, Dortmund

# Exponentielles Wachstum verstehen – Unterschiedliche Deutungsmöglichkeiten des Wachstumsfaktors

Der Begriff des exponentiellen Wachstums bildet einen zentralen Aspekt für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. Ein tragfähiger Vorstellungsaufbau ist für die Weiterentwicklung des funktionalen Verständnisses exponentieller Funktionen in der Sekundarstufe II von großer Bedeutung. Erste Ergebnisse im Rahmen von Design-Experimenten zeigen, dass die Schüler die Zinseszinsformel $K_n=K_0(1+p/100)^n$ in Aufgaben mit gegebenen Startkapital und Zinssatz nennen und damit rechnen können, aber ihre einzelnen Elemente nicht erklären und sie nicht auf Situationen mit ganzzahligen Wachstumsfaktoren übertragen können.

Der vorliegende Beitrag konzentriert sich darauf, die Hürden im Lernprozess bei der Verbindung vom Konzept des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors zu beschreiben.

## 1. Spezifiziertes Forschungsinteresse und methodologischer Zugang

Unterschiedliche Studien zeigen, dass Lernende dazu neigen, exponentielle Wachstumsprozesse falsch zu deuten, wenn sie vorher lineare Prozesse betrachtet haben (vgl. Ebersbach, Van Dooren 2008). Als mögliche Ursache wird ein gut entwickeltes lineares Konzept genannt, das auf nicht lineare Zusammenhänge übergeneralisiert wird (vgl. Ebersbach, Van Dooren 2008). Confrey & Smith (1995) zeigen in einer Studie, dass Lernende das Konzept der exponentiellen Änderungsrate verwenden, auch wenn sie den Begriff noch nicht kennen gelernt haben. Die Lernenden sollten am Beispiel von Zellen, die sich pro Stunde verneunfachen, die Veränderung der Funktionswerte in einer Tabelle beschreiben und zeigten drei intuitive Vorstellungen von exponentiellen Änderungsraten: (a) multiplikativ, d.h. die Lernenden erkannten, dass pro Schritt mit dem selben Faktor multipliziert wird, (b) additiv, sie berechneten die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Funktionswerte und (c) proportional new to old, zu dem vorherigen Wert wird ein proportionaler Anteil davon, in dem Beispiel der Verneunfachung das 8-fache des vorherigen Werts, hinzuaddiert. Ihre Studie zeigt außerdem, dass die Verbindung der Vorstellungen vom ‚splitting' mit dem Kovariationsaspekt einen tragfähigen Ansatz zur Vorstellungsentwicklung bei exponentiellen Funktionen herstellen kann. Unter ‚splitting´ wird eine multiplikative Operation verstanden, indem z.B. gleichzeitig multiple Ver-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1215–1218). Münster: WTM-Verlag

sionen eines Originals erzeugt werden. Ein Bespiel hierfür ist das Wachstum von Bakterienkulturen, bei dem sich ein Bakterium in eine feste Anzahl an Bakterien teilt. Weitere differenziertere Ergebnisse über Entwicklungen in Lernprozessen in diesem Themenfeld gibt es bislang wenig. Deshalb setzt sich diese Studie im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung (vgl. Hußmann et al. 2013) u.a. mit der Erforschung von Lernprozessen zur Begriffsbildung von exponentiellen Funktionen auseinander, um zu analysieren, welche Gelingensbedingungen beim Vorstellungsaufbau unterstützen und welche Hürden sich zeigen.

## 2. Methodische Umsetzung

Die Erhebung der Daten fand in drei Zyklen von Designexperimenten (vgl. Hußmann et al. 2013) statt, größtenteils in Form von klinischen Interviews. Zur Analyse der Begriffsbildungsprozesse werden im Transkript die Festlegungen und Fokussierungen, die die Lernenden eingehen, analysiert. Festlegungen sind explizite Aussagen mit propositionalen Gehalt, die ein Individuum für wahr hält. Fokussierungen sind Kategorien in Form von individuellen Ideen bzw. Konzepten, mit denen Situationen individuell strukturiert werden. Unter einer Situation wird eine nach spezifischen begrifflichen Teilcharakteristika strukturierte Aufgabe verstanden. Auf normativer Ebene werden strukturgleiche Situationen identifiziert und bezogen auf den Wachstumsfaktor zu verschiedenen Situationsklassen zusammengefasst (vgl. Hußmann 2013). In den Design-Experimenten werden vor allem die Situationsklassen der ganzzahligen Wachstumsfaktoren (verdoppeln, verdreifachen, ...) und der nicht ganzzahligen (prozentual steigenden) Wachstumsfaktoren gegenübergestellt.

| Zyklus | Forschungsfokus | Entwicklungsfokus | Designexperiment; Stichprobe |
|---|---|---|---|
| 1 | Ausschärfung des Forschungsinteresses; Erkenntnisse über die Lernendenperspektive | Entwicklung der Kernidee und des sinnstiftenden Kontextes | 2 Partnerinterviews; Gym., Jgst. 9, n=4<br>Fragebogen; Ge., Jgst. 9, n=93; Gym., Jgst. 7, n=31 |
| 2 | Beforschung von Lernprozessen und individuellen Vorstellungen zu spezifischen Aspekten des exponentiellen Wachstums | Strukturierung des Lehr- Lernarrangements; Optimierung von Aufgabenformulierungen | Klassenerprobung; Gym., Jgst. 9, n=93<br>2 x Serie von 6 Partnerinterviews; Ge., Jgst. 9, n=4<br>2x7 Einzel- und Partnerinterviews; Gym., Jgst. 11, n=2; Ge., Jgst. 11, n=6 |
| 3 | Wie kann man die Entwicklung eines „Wachstumsfaktordualismus“ verhindern? | Entwicklung einer Fördereinheit | 2 x Serie von 4 Einzelinterviews; Gym., Jgst. 10, n=2 |

Auf der Entwicklungsebene wurde im Rahmen des Projektes KOSIMA (vgl. Hußmann, Leuders, Prediger & Barzel 2011) ein Lehr-Lernarrangement mit dem sinnstiftenden Kontext ‚Sparstrategien – Wie kann ich mein Geld gewinnbringend anlegen?' entwickelt. Im ersten Teil soll das Kapital bei gegebenem Zinssatz und Startkapital nach mehreren Jahren in einem Schritt bestimmt werden, im zweiten Teil erkunden die Lernenden u.a., welche Strategien vom proportionalen Denken auf exponentielles Wachstum übertragen werden können.

## 3. Wachstumsfaktordualismus

Im zweiten Design-Zyklus wurde beobachtet, dass das entwickelte Lehr-Lernarrangement die Lernenden u.a. bei der Generierung eines Terms und beim Einschätzen und Beschreiben des exponentiellen Wachstums unterstützt hat. Die bereits vorhandenen proportionalen Strategien wurden entsprechend modifiziert und eine Übergeneralisierung proportionaler auf exponentielle Strategien war nicht mehr vorhanden. Allerdings war bei einigen Lernenden, unabhängig davon, ob sie mit der Lernumgebung gearbeitet haben oder im Unterricht ein anderes Lehrwerk verwendet wurde, am Ende des Lernprozesses ein Wachstumsfaktordualismus zu beobachten, der an dem folgenden Ausschnitt eines Interviews verdeutlicht werden soll.

Veronika hat zu einem Sparangebot, bei dem mit 1 Cent gestartet wird und dieser Cent sich jeden Monat verdoppelt, eine richtige Wertetabelle erstellt und einen Graphen inklusive Steigungsdreiecke gezeichnet. Als sie gefragt wird, wie der Term lautet, mit dem man das Kapital nach mehren Monaten berechnet, notiert sie den Term $1 \cdot 2^x$. Als die nach dem Wachstumsfaktor gefragt wird, nennt sie die Zahl 1,02. Dies soll Veronika nun erklären:

| | |
|---|---|
| V | Also, ehm, das ist halt so, dass, ehm, Eins sind halt die 1 Cent und Zwei – also es wird ja verdoppelt. Mal Zwei und das hoch wäre dann je nach dem, wie viele Monate, also das ist immer – weil, ehm, lang aufgeschrieben wäre das ein mal Zwei mal Zwei mal Zwei mal Zwei, aber stattdessen kann man das dann auch hoch der Monatszahl nehmen. |

Hier fokussiert Veronika auf die Verdopplung und geht die inhaltlich richtige Festlegung ein: Der Verdopplungsterm ist $1 \cdot 2^x$, x steht für die Monate.

| | |
|---|---|
| V | Und der Wachstumsfaktor dazu ist als dieses 1,02, also 0,02 ist halt, was dazukommt und die eins, diese 1% sind halt das Ganze, was dann dazu direkt gerechnet wird. Weil mit 0,02 würde man halt nur ausrechnen, was dazukommt, aber nicht, was da raus kommt. |

Im zweiten Teil ihrer Aussage gerät diese Fokussierung in den Hintergrund und Veronika fokussiert nun auf die Bildungsweise und Funktion des (in ihren Augen prozentualen) Wachstumsfaktors und geht zum einen die Festlegung ein, 1,02 sei der Wachstumsfaktor der Verdopplung und ‚mit dem Wachstumsfaktor (1,02) multiplizieren heißt, dass man zu dem Ganzen (sie bezieht sich hier auf das Startkapital) das addiert, was hinzukommt (die Zinsen).

Sowohl bei Veronika als auch bei den Lernenden, die einen ‚Wachstumsfaktordualismus' ausgebildet haben, ist in der Situationsklasse des ganzzahligen Wachstumsfaktors die Vorstellung der proportional new to old-Änderungsrate nicht hinreichend vorhanden. Es fehlt die Vorstellung, dass bei einer Ver-n-fachung zu dem vorherigen Wert das (n-1)-fache des vorherigen Werts addiert wird und somit fehlt auch die vorstellungorientierte Verbindung zur Zinseszinsformel. Andersherum ist in der Situationsklasse des prozentualen Wachstumsfaktors die Vorstellung der multiplikativen Änderungsrate nicht hinreichend vorhanden. Die Fokussierung auf die Zinseszinsformel bewirkt, dass ein prozentualer Zuwachs nicht als Ver-n-fachung identifiziert wird. Es findet also keine entsprechende Vernetzung des Konzeptes des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors statt. Beide Situationsklassen werden von den Lernenden eher nebeneinanderstehend betrachtet.

## 4. Konsequenzen für das Design

Im dritten Design-Zyklus wird deshalb untersucht, ob und wie die oben genannte Vernetzung vom Konzept des nicht ganzzahligen Wachstumsfaktors mit dem Konzept des ganzzahligen Wachstumsfaktors mit Hilfe eines geeigneten Anschauungsmittels vorstellungsorientiert hergestellt werden kann.

## Literatur


Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26,* S. 135-164.

Ebersbach M., Van Dooren, W., Van Den Noortgate, W., Resing, W. (2008). Understanding linear and exponential growth: Searching for the roots in 6- to 9-years-olds. *Cognitive Development 23(2),* S. 237-257.

Hußmann, S. (2013). The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations, Preprint, TU Dortmund.

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. *Beiträge zum Mathematikunterricht,* S. 419-422.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Kormorek & S. Prediger (Hrsg.): *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S.25-42). Münster: Waxmann.

Kerstin TIEDEMANN, Köln

# Der Gebrauch von Fachsprache im Mathematikunterricht der Grundschule

Sowohl in der schulischen Praxis als auch in der mathematikdidaktischen Forschung ist es inzwischen unstrittig, dass eine differenzierte Sprachförderung mathematische Lernprozesse auf jedem Niveau unterstützen kann. Um eine Sprachförderung theorieorientiert planen und reflektieren zu können, bedarf es Kenntnisse über den alltäglichen Gebrauch von Fachsprache und dessen Entwicklung. In dem vorliegenden Beitrag wird nachgezeichnet, dass der alltägliche Gebrauch von Fachsprache ganz wesentlich von der Situation abhängt, in der über Mathematik gesprochen wird. In jeder Mathematikstunde wird Fachsprache nicht nur gebraucht, sondern auch neu normiert.

## 1. Fachsprache im Prozess sozialer Aushandlung

Wenn im Folgenden von Fachsprache gesprochen wird, so soll damit jene Varietät der deutschen Sprache benannt sein, die nicht zuerst über verwendete Worte oder grammatische Strukturen charakterisiert wird, sondern über ihren Bezug zur Mathematik (vgl. Maier & Schweiger 1999). Damit ist die Fachsprache nicht länger allein die Sprache der Mathematiker als Vertreter einer wissenschaftlichen Disziplin, sondern umfasst auch jene Sprache, mit der Schülerinnen und Schüler, aber auch Lehrerinnen und Lehrer im alltäglichen Mathematikunterricht über Mathematik sprechen. So mag die Fachsprache im einen Fall weniger, im anderen Fall mehr mit alltags- oder bildungssprachlichen Elementen durchmischt sein (s. dazu Meyer & Prediger 2012). Eine wichtige Folge aber ist, dass die Fachsprache für den Mathematikunterricht der Grundschule keine außerhalb des Unterrichts existente Vergleichsgröße mehr ist, sondern in ihm ausgehandelt werden kann und muss. Im Hinblick auf damit einhergehende Lernprozesse betont Luckmann (1979, S. 36), dass niemals nur die Sprache, sondern mit ihr immer auch die „Normen des Sprachgebrauchs" erworben werden. Was aber orientiert den Gebrauch von Fachsprache im Mathematikunterricht der Grundschule? Welche Normen des Fachsprachgebrauchs erlernen die Schülerinnen und Schüler?

## 2. Normen als Orientierung im Fachsprachgebrauch

Arbeiten, die im Hinblick auf diese Frage hilfreiche Hinweise geben, sind jene zu Regeln und Normen in sozialer Interaktion (s. dazu Sfard 2000). Dem hier formulierten Anliegen kommen die Arbeiten von Voigt (1994)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1219–1222). Münster: WTM-Verlag

und von Yackel und Cobb (1996) zu mathematischen bzw. soziomathematischen Normen besonders nahe. Die Autoren zeigen, wie im Vollzug alltäglichen Mathematikunterrichts „Wertkriterien für mathematische Aktivitäten“ ausgehandelt, verändert und gefestigt werden (Voigt 1994, S. 105). Beispielsweise wird untersucht, wie die Lehrperson und die Lernenden gemeinsam aushandeln, was im Unterricht als elegante mathematische Erklärung gilt. Auf ähnliche Weise werden im Mathematikunterricht Normen für den Fachsprachgebrauch etabliert. Sie werden im Unterrichtsgespräch ausgehandelt und legen fest, was in der jeweiligen Situation als angemessenes Sprechen über Mathematik gilt. Solche Normen nenne ich *fachsprachliche Normen*.

## 3. Fachsprachliche Normen – zwei Beispiele

Vor dem Hintergrund der skizzierten theoretischen Festlegungen können der Fachsprachgebrauch und mit ihm die fachsprachlichen Normen nur an tatsächlich stattfindender Interaktion nachgezeichnet werden. Methodisch orientiere ich mich dabei an der Interpretativen Forschung, die in den 1980er Jahren in der Arbeitsgruppe um Heinrich Bauersfeld entwickelt wurde (s. dazu Tiedemann 2012).

Im Folgenden sollen zwei kurze illustrative Beispiele zeigen, wie die Rekonstruktion von fachsprachlichen Normen unsere Wahrnehmung vom Fachsprachgebrauch bereichern kann. Die beiden Szenen stammen aus zwei zweiten Klassen einer Kölner Grundschule, deren Lehrerinnen ihren Mathematikunterricht gemeinsam planen und weitestgehend parallel gestalten. Inhaltlich geht es um die Orientierung an der Hundertertafel. Die beiden Lehrerinnen haben ein Satzmuster für sog. Zahlenrätsel etabliert: „Die Zahl steht in 7. Zeile und in der 5. Spalte.“ Nach einigen Durchgängen, bei denen die Lehrerinnen das Rätsel formuliert und die Schülerinnen und Schüler es gelöst haben, sollen die Lernenden nun eigene Zahlenrätsel stellen. [Hinweis zu den nachfolgenden Transkripten: Betont Gesprochenes ist fett gedruckt.]

In der Klasse 2a lernen wir Ozan, einen Jungen mit Türkisch als Erstsprache, und Frau A kennen. Ozan meldet sich und Frau A nimmt ihn dran.

| | |
|---|---|
| Ozan: | Die Zahl steht in der 4. Spalte und… in der 3. Zei- |
| Frau A: | Nein, erst die **Zeile**. |
| Ozan: | Äh.. Die Zahl steht in der 3. Zeile und in der 4. Spalte. |
| Frau A: | Okay. Nimm ein Kind dran, Ozan. |

Wenn wir annehmen, dass Ozan seinen Satz mit dem Wort „Zeile“ beenden würde, produziert er eine fachlich wie sprachlich korrekte Äußerung. Mit seinem Zahlenrätsel wäre die 24 als gesuchte Zahl eindeutig bestimmt. Dennoch interveniert die Lehrerin. Sie unterbricht Ozan und weist darauf hin, dass zuerst die Zeile zu nennen ist. Damit beharrt sie auf dem etablierten Satzmuster. Ozan orientiert sich in seiner folgenden Äußerung tatsächlich daran und formuliert sein Rätsel neu, ohne es inhaltlich zu verändern. Er nennt zuerst die Zeile und dann die Spalte. Somit wird in dieser Szene von Ozan und Frau A gemeinsam eine fachsprachliche Norm etabliert, gemäß der es zur Beschreibung einer Position auf der Hundertertafel genau *eine* passende Formulierung gibt. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass man zunächst die Zeile und erst dann die Spalte nennt.

In der Klasse 2b sind nun ebenfalls die Schülerinnen und Schüler gefordert, ein eigenes Zahlenrätsel zu nennen. Wir lernen Zeynep, ein Mädchen mit Türkisch als Erstsprache, und Frau B kennen. Zeynep meldet sich und Frau B ruft sie auf.

| | |
|---|---|
| Zeynep: | In der 9. Speile- |
| Frau B: | Äh, entweder Zeile oder Spalte. |
| Zeynep: | **Zeile**. Zeile 9 und Spalte 4. |
| Frau B: | Ja, **super**. So können wir das auch sagen, wie die Zeynep das gemacht hat, ne. Wer kann denn der Zeynep jetzt die Zahl **sagen**, die in der **4.** Spalte und in der **9.** Zeile steht? |

Zeynep bildet mit „Speile“ ein nicht korrektes Wort, das wohl aber an eine Mischung aus „Zeile“ und „Spalte“ denken lässt. Frau B unterbricht sie und fordert eine Entscheidung zwischen Zeile und Spalte. Zeynep antwortet mit „**Zeile**“ und formuliert dann ihr Rätsel. Dabei betont sie nicht mehr, wie bisher in der Klasse und auch in ihrem ersten Versuch erfolgt, den Ordinalzahlaspekt („In der 9. Speile-“), sondert formuliert um: „Zeile 9 und Spalte 4.“ Mit dieser Äußerung ist die 84 eindeutig als die gesuchte Zahl bestimmt. Frau B lobt Zeyneps Äußerung und thematisiert dann explizit die sprachliche Gestaltung des Rätsels: „So können wir das auch sagen, wie die Zeynep das gemacht hat, ne.“ In ihrer anschließenden Frage, wer Zeyneps Rätsel lösen könne, nähert sie sich selbst wieder dem bisher genutzten Satzmuster an, vertauscht dabei aber die Reihenfolge von Zeile und Spalte: „die Zahl […], die in der **4.** Spalte und in der **9.** Zeile steht“. Damit ist in diesem Beispiel eine fachsprachliche Norm etabliert, gemäß der es *mehrere* passende Formulierungen gibt, um eine Position auf der Hundertertafel zu beschreiben. Die Lehrerin macht es in ihrer zweiten Äußerung ganz klar: So kann man es „auch“ sagen.

## 4. Kurze Einordnung der Ergebnisse

An den beiden illustrativen Beispielen wird deutlich, dass fachsprachliche Normen, die in unterschiedlichen Situationen hervorgebracht werden, unterschiedlich sein oder wie in diesem Fall einander sogar widersprechen können. Entweder gibt es genau eine passende Formulierung zur Beschreibung einer Position auf der Hundertertafel oder mehrere; beides gleichzeitig ist unmöglich. Damit wird ersichtlich, dass wir den Fachsprachgebrauch im Mathematikunterricht nicht unabhängig vom jeweiligen Kontext rekonstruieren und beschreiben können, sondern seine situative Gebundenheit an fachsprachliche Normen stets berücksichtigen müssen. Für Schülerinnen und Schüler ergibt sich daraus, dass fachsprachliche Normen ein weiterer Lerngegenstand sind (s. dazu Meyer & Prediger 2012). Die Lernenden müssen erfassen, wie sie im Hier und Jetzt sozial passend über Mathematik sprechen können. Für Lehrerinnen und Lehrer folgt, dass ihre Reaktion auf die sprachlichen Äußerungen ihrer Schülerinnen und Schüler noch mehr an Bedeutung gewinnt, da sie damit wesentlich die Aushandlung fachsprachlicher Normen bestimmen. Die wohl spannendste Folge aus der Rekonstruktion fachsprachlicher Normen ist, dass sich auch die aktuell viel diskutierte Sprachförderung im Mathematikunterricht an den fachsprachlichen Normen der Situation orientieren muss, wenn sie für die Schülerinnen und Schüler ein stimmiger Bestandteil des Unterrichts sein soll.

## Literatur


Luckmann, T. (1979). Soziologie der Sprache. In R. König (Hrsg.), *Handbuch der empirischen Sozialforschung, Band 13* (S. 1-116). Stuttgart: Enke.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache: Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht.* Wien: öbv & hpt.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht. Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik, 54*(45), 2-9.

Sfard, A. (2010). *Thinking as communicating.* Cambridge: University Press.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(3), 157-189.

Tiedemann, K. (2012). Mathematik in der Familie, Zur familialen Unterstützung früher mathematischer Lernprozesse in Vorlese- und Spielsituationen. Münster: Waxmann.

Voigt, J. (1994). Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung – Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (S. 77-111). Köln: Aulis.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 468-477.

Christoph TILL, Ludwigsburg

# ‚Risk Literacy' in der Grundschule – Ergebnisse einer Interventionsstudie

„Sind Vorsorgeuntersuchungen nützlich?" „Wie sollte ich mein Geld anlegen?" Kompetenzen, Risiken einzuschätzen und auf Basis von Daten, Entscheidungen unter Unsicherheit zu treffen, spielen heutzutage eine bedeutende Rolle. Befunde aus der kognitionspsychologischen Forschung belegen, dass statistische Informationen über Chancen und Risiken in der Medizin, der Umwelt oder Finanzwelt oft nicht richtig interpretiert werden (Gigerenzer, 2013; Spiegelhalter, 2011). Dies liegt oft am Darstellungsformat dieser Informationen: Bei der Kommunikation von Risiken sollten statt Wahrscheinlichkeiten in Form von Prozenten vermehrt intuitiv greifbare ikonische Darstellungen (in Form von Piktogrammen) eingesetzt werden (Brase, 2008). Dies erleichtert die Interpretation von Statistiken, denen wir tagtäglich in den Medien und in unserer Umwelt ausgesetzt sind. Darüber hinaus sollten bereits in der Schule verschiedene (mathematische) Kompetenzen zu *Risiko* gefördert werden (Gigerenzer, 2013).

## 1. Risk Literacy in der Grundschule

Auch Kindern kann mithilfe enaktiver Informationsformate und ikonischer Darstellungen ein erster elementarer und phänomenologischer Zugang zu *Risiko* ermöglicht werden (Kurz-Milcke et al., 2011; Latten et al., 2011). Dadurch ist es für sie ohne den Bruchzahl- und Prozentbegriff möglich, elementare und qualitative Wahrscheinlichkeitsaussagen in risikobehafteten Situationen zu treffen. In einer Interventionsstudie wurden Belege dafür gefunden, dass sich erste elementare Kompetenzen zu *Risiko* fördern lassen. Neben allgemeinen Kompetenzen, wie das Erkennen und Sprechen über Wahrscheinlichkeiten, Unsicherheit, Variabilität und Risiko konzentriere ich mich dabei auf ein Bündel elementarer mathematischer Konzepte wie dem des Proportionsbegriffs, des Erwartungswerts und der bedingten Wahrscheinlichkeit. Diese spielen für die mathematische Modellierung von Risiko eine wichtige Rolle (Martignon & Krauss, 2009).

## 2. Forschungsfragen

Die Forschungsfragen lauten:

– Sind bei Schülerinnen und Schülern in Klasse 4 Intuitionen zu verschiedenen stochastischen Konzepten vorhanden, mit denen Risiko und Entscheidungen unter Unsicherheit modelliert werden können?

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1223–1226). Münster: WTM-Verlag

- Lassen sich elementare stochastische Konzepte zu Risiko bereits durch eine kurze Lerneinheit anhand enaktiver Materialien fördern?
- In welchen Bereichen stellen sich besonders hohe/niedrige Lernzuwächse ein?[1]

## 3. Methode

Der Erhebungszeitraum erstreckte sich von Dezember 2012 bis Juli 2013. Es nahmen insgesamt 244 Schülerinnen und Schüler im Alter zwischen 8 und 12 Jahren aus sechs Grundschulen im Umkreis von Ludwigsburg teil ($M=9.5$; $SD=.612$). Die 12 Klassen wurden in 8 Versuchs- und 4 Kontrollklassen aufgeteilt. Die Versuchsklassen erhielten ein vierstündiges Training, während die Kontrollklassen nicht unterrichtet wurden. Vor der Intervention wurde das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler durch einen 30-minütigen Test abgefragt. Der Test enthielt offene und geschlossene Aufgabenformate zu den Themen:

- Vergleichen und Erweitern von Proportionen
- Veränderung von Proportionen/Verhältnissen durch neue Information (Risikoreduktion)
- bedingte Proportionen als Vorstufe zur bedingten Wahrscheinlichkeit
- Abwägen von Handlungsoptionen in Form einer Erwartungswertaufgabe
- Abschätzen von Ausgängen von Zufallsexperimenten

Nach der Unterrichtseinheit schloss ein Nachtest an, in welchem die gelernten Konzepte abgefragt wurden. Drei Monate nach der Unterrichtseinheit mussten die Schülerinnen und Schüler einen Nachhaltigkeitstest bearbeiten. Die Items dieser beiden Tests waren analog zum Vortest; es wurden lediglich die Zahlen in den Aufgaben, die Reihenfolge der Aufgaben und die Aufgabengeschichten verändert, mit dem Ziel Erinnerungseffekte zu verhindern. Der Vergleich der Ergebnisse von Vor- und Nachtest sollte letztendlich Aussagen über den Wissenszuwachs der Versuchsklassen ermöglichen. Mögliche Langzeiteffekte des Trainings wurden anhand eines Nachhaltigkeitstest nach drei Monaten festgestellt.

## 4. Ergebnisse

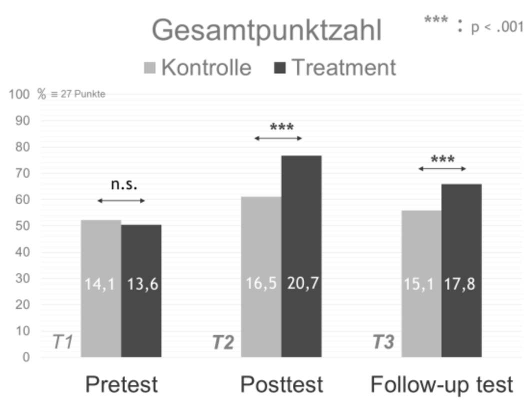
Der Ergebnisteil gliedert sich in zwei Teile, entsprechend der beiden ersten Forschungsfragen.

[1] Die dritte Forschungsfrage wurde im Vortrag nicht explizit thematisiert. Aus diesem Grund wird im Ergebnisteil nicht darauf eingegangen.

Die Analyse der Daten deutete auf ein Vorwissen der Kinder bezüglich der trainierten Konzepte hin. Das Vorwissen einer Schülerin / eines Schülers wurde als „Summenscore im Vortest (T1)“ operationalisiert. Von maximal 27 Punkten erreichten die Schülerinnen und Schüler vor der Unterrichtseinheit im Schnitt etwa die Hälfte der Punkte ($\boldsymbol{T1}_{\text{Kontrolle}}$=14.1; $\boldsymbol{T1}_{\text{Treatment}}$=13.6). Spezifische Aussagen darüber, wie sich das Vorwissen zusammensetzt, können zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht getroffen werden. Es zeichnet sich jedoch eine Tendenz ab: Einfache Proportionsvergleiche werden von den meisten Schülerinnen und Schülern zufriedenstellend gelöst. Proportionsvergleiche, die auf einem Erweitern eines Verhältnisses basieren, konnten kaum gelöst werden. In den mathematischen Bereichen „Erwartungswert“ und „bedingte Proportionen/Wahrscheinlichkeit“ brachten die Schülerinnen und Schüler bereits vor der Intervention zufriedenstellende Lösungen hervor.

Das Vorwissen zu den Konzepten wurde durch die Intervention erfolgreich gefördert und es ergab sich somit ein signifikant höherer Lernzuwachs der Kinder aus den Versuchsklassen gegenüber denen der Kontrollklassen. Gute Prädiktoren für die Voraussage für den Lernerfolg waren das jeweilige Vortestergebnis des Kindes und allgemeine mathematische Fertigkeiten (Mathematiknote).

| | Predictor Variable | β | SE (β) | $_{(adj.)}$ $R^2$ | $\Delta R^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Model 1** | Intercept | | .052 | .399 | .404 |
| | Pretest | .453*** | .061 | | |
| | Mathematiknote | -.273*** | .062 | | |
| **Model 2** | Intercept | | .073 | .577 | **.178** |
| | Pretest | .483*** | .051 | | |
| | Mathematiknote | -.281*** | .052 | | |
| | **Testbedingung** | .424*** | .091 | | |




Auch drei Monate nach der Intervention unterschieden sich die Testleistungen von Kontroll- und Versuchsgruppe signifikant voneinander, weswegen von einem nachhaltigen Lernzuwachs gesprochen werden kann. Weitere Analysen sollen Aufschluss darüber geben, auf welche mathematischen Konzepte die Intervention den größten/geringsten Lernzuwachs bewirkt hat.

## 5. Diskussion

Es konnte gezeigt werden, dass Kinder im Alter von 8 bis 10 Jahren Vorläuferfähigkeiten zu verschiedenen mathematischen Bereichen besitzen, die helfen können, Risiko zu modellieren. Bereits eine kurze Unterrichtseinheit hat dazu geführt, dass Schülerinnen und Schüler in diesen Bereichen ihr konzeptuelles Wissen erweitern konnten. Der Lerneffekt war darüber hinaus nachhaltig. Die Konsequenz aus den Befunden sollte sein, die geförderten Inhalte im Stochastikunterricht der Sekundarstufe auf formaler Ebene zu vertiefen. Der konkrete Anwendungsbezug und die Bedeutsamkeit von Risiko sollte dann noch expliziter dargestellt werden; ein mögliches Beispiel hierfür wäre die Auseinandersetzung mit Problemen in der medizinischen Diagnostik oder der Gefahr unterschiedlicher Verkehrsmittel.

Insgesamt verbindet Risiko als Thema für den Stochastikunterricht der Grundschule die frühe Förderung stochastischen Denkens mit einem spannenden und lebensnahen Thema. Die spielerische Auseinandersetzung mit Proportionen, Erwartungswerten und bedingten Wahrscheinlichkeiten kann helfen, die in der Sekundarstufe als oft abstrakt und formal erlebten Konzepte zu durchdringen. Gleichzeitig werden Kompetenzen gefördert, die einen ersten Beitrag einer „Risk Literacy“ leisten.

## 6. Acknowledgement

Christoph Till ist Mitglied des Kooperativen Promotionskollegs „Effektive Lehr-Lernarrangements“ der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg und der Universität Tübingen, das vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg gefördert wird.

## Literatur

Brase, G. L. (2008). *Pictorial Representations in Statistical Reasoning*. Retrieved from http://www.k-state.edu/psych/research/documents/2009ACP.pdf

Gigerenzer, G. (2013). *Risiko. Wie man die richtigen Entscheidungen trifft*. München: Bertelsmann Verlag.

Kurz-Milcke, E., Gigerenzer, G.& Martignon, L. (2011). Risiken durchschauen: Grafische und analoge Werkzeuge. *Stochastik in der Schule*, (31), 8–16.

Latten, S., Martignon, L., Monti, M. & Multmeier, J. (2011). Die Förderung erster Kompetenzen für den Umgang mit Risiken bereits in der Grundschule. Ein Projekt von RIKO-STAT und dem Harding Center. *Stochastik in der Schule*, (31), 17–25.

Martignon, L & Krauss, S. (2009). Hands-On Activities for Fourth Graders: A Tool Box for Decision-Making and Reckoning with Risk. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 227-258.

Spiegelhalter, D. et al. (2011). Visualizing uncertainty about the future. *Science*, (333), 1393-1400.

Günter TÖRNER, Duisburg-Essen

# Verborgene Bedingungs- und Gelingensfaktoren bei Fortbildungsmaßnahmen in der Lehrerbildung Mathematik

**1. Daten und Belege.** Über viele Jahre hat der Autor – wie nicht wenige seiner Kollegen/innen – erfahrungsgeleitet und spontan Lehrerfortbildungen in unterschiedlichen Organisationsformen durchgeführt. Mit dem Projekt der Deutschen Telekom-Stiftung *Mathematik Anders Machen* und nicht zuletzt aufgrund seiner aktuellen Mitwirkung in dem Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) hat diese Auseinandersetzung eine neue, eher grundsätzliche Reflektionsebene erreicht; Erfahrungen und Einsichten aus dem Alltag der Lehrerfortbildung in Deutschland liegen diesem Text zugrunde; eine ausführliche Publikation ist in Vorbereitung.

Wurde viele Jahre lang Lehrerfortbildung vom anbietenden *Referenten* oder einer *neuen Idee* in der Elementarmathematik, vielleicht von scheinbar einem *neuen Schlüssel der fachdidaktischen Erschließung* her gedacht – im Sinne eines ingenieurwissenschaftlichen Verständnis von Fachdidaktik –, so muss der bewusste Einbezug von *sozialen Kontexten* (u.a. der einbezogenen Lehrer/innen) durchaus als wesentlicher Fortschritt angesehen werden (vgl. z.B. Krainer, 2008). In seinem Ansatz spielt u.a. das Initiieren von dauerhaften professionellen Lerngemeinschaften eine entscheidende Rolle.

Doch wie die Erfahrungen des Autors beim diversen Sondieren in den Länderbildungsministerien belegen, dürfen darüber hinaus gehende *systemische und personale Aspekte* nicht ignoriert werden, im Gegenteil: In Fortentwicklung des bekannten Krainer'schen Satzes, dass Lehrerfortbildung eigentlich ein Beitrag zur Schulentwicklung ist, erscheint uns zusehends die folgende Aussage leitend: *Erfolgreiche Lehrerfortbildung ist politische Teilhabe an Entscheidungsprozessen im schulischen Raum* (vgl. die ausführlichen Berichte in Timperley et al., 2008).

**2. Ausgangssituation.** Vorherrschendes Paradigma in der Lehrerfortbildung in der Nachkriegszeit war die Kompensation von Defiziten der adressierten Lehrpersonen und gegebenenfalls ein Vertrautmachen mit bislang nicht vermittelten unterrichtlichen Inhalten, Lehrerfortbildungsveranstaltungen sollten zum inhaltlichen ‚Nachladen' dienen (Batterie-Metapher). Eine weitergehende Diskussion über Prozesse in der Lehrerfortbildung findet in der didaktischen Literatur der letzten 60 Jahre eher am Rande statt (vgl. Bong/Günther, 1980). Nach dem Scheitern unterschiedlicher Reforminitiativen in den 80er Jahren wurde auch vereinzelt Kritik gegen die Praxis der Mathematiklehrerfortbildungen laut (Heidenrich, 1980).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1227–1230). Münster: WTM-Verlag

Es dauerte bis Mitte der 90er Jahre, dass Lehrerfortbildung als eigenständiges Forschungsthema der Mathematikdidaktik gesehen wurde. Es sind möglicherweise die schlechten TIMSS-Ergebnisse, die den Ruf nach Fortbildungen laut werden lassen. So nimmt sich auch die Kultusministerium-Konferenz (KMK) dieses Themas  an (Priebe, 1999).

Parallel dazu hatte sich auch international das leitende Paradigma (Pehkonen & Törner, 1999) verändert; ging es anfangs nur um die Frage, welche ‚Change Factors' Lehrerverhalten beeinflussen, so erfand die internationale Community das (fachübergreifende, nur eingeschränkt übersetzbare) Schlagwort des *Continuous Professional Development* (vgl. die Ausführungen bei Peter-Koop, 1996 und Rösken, 2011). Oelkers (2009) hob eine andere Sichtweise hervor; er stellte mit Blick auf die in der Phase 3 unterrichtenden Lehrpersonen erhebliche Defizite in unserem Bildungssystem fest, wenn man diesen Bereich mit den selbstverständlichen Weiterqualifizierungsanstrengungen in der Wirtschaft vergleicht.

Viele Impulse hat die mathematische Fortbildung auch durch die Schule der *Aktionsforschung* mit Altrichter und dem Mathematikdidaktiker Krainer (Klagenfurt) erhalten. Insbesondere findet *Nachhaltigkeit* zentrale Aufmerksamkeit. Zehetmeier & Krainer (2011) beschäftigten sich u.a. in einer viel beachteten Arbeit mit der immer wieder eingeforderten 'Sustainability' von Fortbildungen.

**3. Systemische Aspekte.** Wenn in diesem Beitrag Gelingens- und Erfolgsfaktoren unsere Aufmerksamkeit finden sollen, so müssen wir den gesamten Kontext der Lehrerfortbildung *systemisch* beleuchten. Allerdings können wir vieles aus Platzgründen nur anreißen (vgl. insbesondere Timperley et al., 2008).

Zunächst darf die *länderspezifische Diversität* nicht unterschätzt werden, wie ein Workshop auf der 2011er-NORMA Tagung in Reykjavik belegt hat. Insofern muss mit Blick auf zahlreiche internationale Publikationen festgehalten werden, dass das *bloße Kopieren* von überzeugenden Pilotprojekten noch nicht die Gewähr für den Erfolg liefert. Diese ländertypischen Spezifika lassen sich auch auf die 16 bundesdeutschen Länder anwenden! Diese Diversität setzt sich fort, wenn man die sich *überlagernden Rahmungen* beleuchtet: verantwortliche *Beamte in der Schuladministration*, zu berücksichtigende *Schulprogramme* (deklarative Normungen), curriculare *Randbedingungen* (Schulbuch, Curriculum), agierende *Fachkonferenzen* (kollegiale Normungen) usw. Eine weitere Sichtweise kann hier nur angedeutet werden: Jeder Lehrerfortbildungskurs ist eigentlich mit *Projekten im IT-Bereich von Unternehmen vergleichbar*. Hier weiß man sehr genau, dass die Erfolgsrate von Projekten (http://de.wikipedia.org/wiki/Chaos-Studie) in der Größenordnung von 30 % liegt, ohne sicher sein zu können, dass erfolgreiche Projekte überdies einen wirklichen Impact besitzen. Daraus wäre zu schließen, dass die allgemeinen Erwartungen an Lehrerfortbildung nicht zu hoch gehängt werden dürfen.

**4. Allgemeine personale Aspekte.** Selbstverständlich haben alle ‚Stakeholders' in der Lehrerfortbildung auch eigene Interessen und unterschiedliche Sozialisationen, die nicht notwendigerweise kohärent sind. Wir listen wesentliche Beteiligte auf, ihre *Interessen* erklären sich von selbst: *Politik, Administration, Anbieter, Nachfrager* usw. Auch innerhalb der Lehrerschaft sind die Sichtweisen sehr heterogen, wenn man Schulstufen als Merkmal heranzieht (vgl. Bodensohn & Jäger, 2007). Lehrerfortbildung ist Erwachsenenlernen teilweise nicht nur *‚Hinzulernen'* sondern auch das nicht unproblematische *‚Umlernen'* (Bruner: *Culture of Education, 1996*) einer sehr spezifischen Gruppe von Personen, nämlich Lehrern/innen, ein Forschungsbereich, der relativ unbeforscht ist.

**5. Individuelle personale Aspekte.** Wie Timperley et al. (2008) hervorhebt, ist Lehrerfortbildung nicht zuletzt eine Auseinandersetzung mit *Beliefs aller Beteiligten* (Adressaten, Referenten, Organisatoren). Wir verstehen *Beliefs* hier primär funktional: als subjektive Theorien, als ‚Welterklärungen', reduktionistische Sichtweisen, als Knowledge-Ersatz, oft nicht reflektiert, ‚taken for granted'. Die Fachwissenschaft verwendet auch die Metapher *‚Besitztümer'*. Während in der Beliefsforschung vielfach mathematische Objekte im Vordergrund stehen, geht es hier primär um *soziale Objekte*, z.B. um Erklärungen für Rezeption, für den Lern- oder auch Misserfolg, das Leistungsvermögen der Schüler/innen, Beliefs rund um das ‚classroom'. Da Beliefs in der Regel hartnäckig gegen Veränderungen sind, scheint das Ertragen und Ausdiskutieren von Beliefs, ‚challenge problematic beliefs, dissonance' (Timperley) zentral, wozu professionelle Lerngemeinschaften eine entscheidende Rolle spielen.

**6. Ausblick und Konsequenzen.** Es gibt wohl kaum einen Bericht in der fachdidaktischen Literatur, der uns das Scheitern einer Fortbildung vermeldet. Was für Projekte im Unternehmensbereich in der Literatur zugestanden wird, ist vermutlich auch für Fortbildung zutreffend, Fortbildungen werden oft ‚schön' gelogen. Die üblicherweise durchgeführten Evaluationen nach Fortbildungsmaßnahmen berühren möglicherweise nur die sehr oft nur die Oberfläche und können nur bedingt als objektive, empirische Daten angesehen werden. Was schon mehrfach angesprochen wurde, ist die Beobachtung, dass *nicht kohärente Maßnahmen* sich bestenfalls intern neutralisieren, wenn sie sich nicht insgesamt als kontraproduktiv herausstellen.

Die vorgängigen Ausführungen haben deutlich gemacht, dass das System, in dem Lehrerfortbildung realisiert wird, hoch komplex ist. Hochkomplexe Systeme lassen sich höchstens dann betreiben, wenn es vielfältige (auch emotionale) Unterstützung durch einbezogene Agenten gibt. Es ist also wie im wirklichen Leben: gute Ideen brauchen Freunde, sie brauchen potente und loyale Unterstützer, erst recht politisch wirksame Fortbildung.

## Literatur


Bodensohn, R.; Jäger, R. (2007). Einstellungen zu und Erfahrungen mit sowie Erwartungen an Lehrerfortbildungen. Eine empirische Untersuchung bei Mathematiklehrkräften. *Empirische Pädagogik* 21 (1), 20-37.

Bong, U. & Günther, K. (1980). Ergebnisse einer Lehrerbefragung zur Lehrerfortbildung in Mathematik. *mathematica didactica* 3, 113 - 128.

Heidenreich, R. (1980). Konzeptionslosigkeit x Kompetenzwirrwarr = Lehrerfortbildung. *Neue Deutsche Schule* 19, 424 - 427.

Krainer, K. (2008). Reflecting the development of mathematics teacher educator and his discipline. In Jaworsky, B.; Wood, T. (Ed.) *Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 4: The Mathematics Teacher - Educator as a developing Professional.* Rotterdam: SensePublisher.

Oelkers, J. (2009). *I wanted to be a good teacher... Zur Ausbildung von Lehrkräften in Deutschland - Studie.* Berlin: Friedrich Ebert Stiftung.

Pehkonen, E. & Törner, G. (1999). Teachers' professional development: What are the key factors for mathematics teachers to change? *European Journal of Teacher Education* 22 (2/3), 259 – 275.

Peter-Koop, A. (1996). *Aktion und Reflexion. Lehrerfortbildung aus international vergleichender Perspektive.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Priebe, B. (1999). Situation und Perspektiven der Lehrerfortbildung. In KMK (Hrsg.), *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland - Materialband zum Abschlussbericht der von Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission,* 87-103.

Rösken, B. (2011). *Hidden dimensions in the professional development of mathematics teachers. In-Service Education for and with Teachers.* Rotterdam: SensePublishers.

Timperley, H., Wilson, A., Barrar, H. & Fung, I. (2008). *Teacher professional learning and development: Best evidence synthesis on professional learning and development.* Wellington: Report to the Ministry of Education.

Zehetmeier, St.& Krainer, K. (2011). Ways of promoting the sustainability of mathematics teachers' professional development. *ZDM Mathematics Education* 43 (6), 875–887.

Sabrina TRANSCHEL, Dortmund

# Entwicklung und Erforschung multiplikativer Aufgabenformate für den Gemeinsamen Unterricht

Für ein Multiplikationsverständnis sind die Vorstellung der Zusammensetzung von Einheiten sowie der Umgang mit und die Übersetzungsprozesse zwischen verschiedenen Darstellungen zentral. Zudem kommt der impliziten Verwendung von Rechengesetzen beim Herstellen von Relationen zwischen Aufgaben - mit anderen Worten beim Erkennen und Nutzen von multiplikativen Strukturen - eine besondere Bedeutung zu.

Aus Studien zu Vorgehensweisen von Grundschulkindern ist bekannt, dass die Kinder zum Multiplizieren bereits Vorerfahrungen mitbringen, um kontextgebundene Aufgaben vor der eigentlichen Behandlung im Unterricht erfolgreich zu bearbeiten (vgl. Selter 1994; Bönig 1995) und beim Lösen von Aufgaben auf verschiedene Zähl- und Rechenstrategien zurückgreifen (vgl. Gasteiger & Paluka-Grahm 2013). Zur Entwicklung des multiplikativen Verständnisses von lernschwächeren Kindern liegen kaum Hinweise vor, wie diese verläuft und welche stofflichen Hürden sich dabei ergeben können. Zudem fehlen Konzeptionen zur Behandlung der Multiplikation für den Gemeinsamen Unterricht. Von besonderer Bedeutung sind fördernde Anregungen, die auf vielfältige Fokussierungen multiplikativer Strukturen abzielen und so ein gemeinsames Mathematiklernen von Kindern mit und ohne sonderpädagogischem Förderbedarf im Gemeinsamen Unterricht ermöglichen.

## 1. Forschungskontext: Fachdidaktische Entwicklungsforschung

Dieses Forschungsanliegen wird im Rahmen des Forschungsprogramms der fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell des Forschungs- und Nachwuchskollegs FUNKEN realisiert (vgl. Prediger et al. 2012), bei der die Entwicklung von Lehr-Lernarrangements für den Unterrichtseinsatz und für die Erforschung von Lernprozessen zur Ableitung gegenstandsspezifischer lokaler Theorien innerhalb eines Forschungsprojektes miteinander vernetzt sind. Für die Entwicklung dieses Arrangements ist zunächst eine Analyse des Lerngegenstandes erforderlich.

## 2. Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes

Wesentlich für multiplikative Vorstellungen ist das Verständnis der Multiplikation als Vereinigung von Mengen gleicher Mächtigkeit, also die Auffassung der Multiplikation als eine wiederholte Addition gleicher Summanden. Diese scheint - besonders für lernschwächere Kinder - ein Zugang

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1231–1234). Münster: WTM-Verlag

zur Multiplikation darzustellen, da Kinder vor der Behandlung der Multiplikation bereits sukzessive addieren, wenn sie kontextgebundene Aufgaben lösen (vgl. Selter 1994; Bönig 1995). Jedoch sollte sich die Interpretation der Multiplikation aus fachdidaktischer Sicht nicht ausschließlich auf die wiederholte Addition beschränken, sondern auch den Umgang mit zusammengesetzten Einheiten beinhalten (vgl. Killion & Steffe 1989, 35). Dafür ist das Verständnis einer konkreten Zahl als Menge (z. B. Vierer) und nicht nur als (vier) einzelne Dinge entscheidend. Dieses Verständnis „erlaubt es, zu halbieren, zu verdoppeln und von Stützpunkten ausgehend zu addieren bzw. zu subtrahieren“ (Selter 1994, 80) (z. B. 5 Vierer + 1 Vierer = 6 Vierer) und so Aufgaben aus Kernaufgaben abzuleiten. Das Erkennen und Nutzen derartiger struktureller Beziehungen ist ein zentrales Ziel beim Lernen des Einmaleins, das für alle Kinder im inklusiven Mathematikunterricht mit differenten Ausprägungen gilt.

Ein umfassendes multiplikatives Verständnis beinhaltet zudem den Umgang mit verschiedenen Darstellungen und die damit verbundenen Übersetzungsprozesse. Entscheidend dabei ist, dass die Kinder die Relation - die Beziehungen zwischen den Zahlen - transferieren, also die Anzahl der Einheiten und die Elemente einer Einheit berücksichtigen (vgl. Kuhnke 2013, 50). Insbesondere Rückübersetzungen aus der symbolischen in die enaktive oder ikonische Ebene sollten thematisiert werden, da bekannt ist, dass auch leistungsstärkere Kinder hier Probleme haben (vgl. Bönig 1995).

## 3. Entwicklung des Designs in Form eines Lehr-Lernarrangements

Aus den Analysen des Lerngegenstandes lassen sich folgende drei Design-Prinzipien ableiten, die die Design-Entwicklung prägen: 1. Nutzung eines strukturorientierten Zugangs, 2. Einsatz verschiedener Darstellungen, 3. Konstruktion kooperativer Lernsituationen. Das Lehr-Lernarrangement wurde für Kinder der 3. Klasse im 1. Halbjahr entwickelt, ist speziell für die Zusammenarbeit in heterogenen Paaren ausgelegt und beinhaltet drei Aufgabenformate mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen im Umfang von acht Sitzungen.

Legt mit den Punktestreifen die Zahl 20. Schreibt passende Rechenaufgaben dazu auf.

Vergleicht eure gelegten Punktestreifenbilder. Was fällt euch auf? Sortiert die Bilder und Aufgaben.


20
Meine Aufgabe:
____________

Aufgabenbeispiel aus dem Aufgabenformat 1 (1. Sitzung)

Anhand des obigen Aufgabenbeispiels (vgl. Transchel, Häsel-Weide & Nührenbörger 2013) sollen die drei Design-Prinzipien im Folgenden konkretisiert werden:

*Design-Prinzip 1: Strukturorientierter Zugang*

Die aus den Punktestreifen zusammengelegten Punktestreifenbilder lassen sich auf verschiedene Weise arithmetisch interpretieren, wodurch die Möglichkeit besteht, unterschiedliche strukturelle Beziehungen zwischen den Aufgaben in den Blick zu nehmen. Dadurch, dass sich die Punktestreifenbilder auf additive Weise deuten lassen, können sie eine Grundlage für die Einsicht in die Multiplikation als wiederholte Addition bieten. Eine weitere Deutung der Bilder kann auch in Form von zusammengesetzten Einheiten vorgenommen werden beispielsweise in der Form, dass fünf Vierer zu zehn Zweiern uminterpretiert werden. Die verschiedenen Punktestreifensorten (2er-10er-Streifen), die die zusammengesetzten Einheiten repräsentieren, können somit dazu beitragen, den Umgang mit Einheiten zu fördern.

*Design-Prinzip 2: Einsatz verschiedener Darstellungen*

Bei dem Aufgabenbeispiel stehen die enaktive und symbolische Ebene im Fokus. Der Darstellungswechsel findet von der enaktiven auf die symbolische Ebene statt, wenn die Kinder zunächst (probierend) ein Punktestreifenbild zur vorgegebenen Zielzahl finden und anschließend die Aufgabe notieren. Finden sie zuerst die Aufgabe und legen dann das zugehörige Punktestreifenbild wird ein Wechsel von der symbolischen auf die enaktive Ebene vorgenommen. Zudem werden beide Darstellungen gemeinsam betrachtet, wenn die Kinder die gelegten Punktestreifenbilder mit den passenden Aufgaben sortieren.

*Design-Prinzip 3: Konstruktion kooperativer Lernsituationen*

Das Kooperationsmodell „Weggabelung“ (vgl. Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich 2013) bietet eine Möglichkeit Lernsituationen zu gestalten und ein gemeinsames Lernen auch zwischen den Kindern mit unterschiedlichen Kompetenzen anzuregen. Jedes Kind arbeitet dabei zunächst an einer Aufgabenstellung für sich allein; anschließend erfolgt eine gemeinsame Phase des Arbeitens, bei der die Kinder sich z. B. über Gemeinsamkeiten und Unterschiede ihrer Aufgaben austauschen oder eine weiterführende Aufgabenstellung zusammen bearbeiten. Voraussetzung dafür ist, dass das eingesetzte Material für das Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus aufeinander bezogen ist. In diesem Beispiel wird dies durch vielfältige Lösungswege in Bezug auf die Gestaltung und Deutung der Punktestreifenbilder als additive oder multiplikative Zerlegungen ermöglicht.

## 4. Durchführung und Auswertung der Design-Experimente

Die Erprobung erfolgte durch die Durchführung von Design-Experimenten in Form von Partnerinterviews mit insgesamt 16 Kinderpaaren aus fünf verschiedenen Grundschulen in NRW innerhalb von drei Zyklen, um so schrittweise Einsichten zu gewinnen, einerseits zur Optimierung des Lehr-Lernarrangements andererseits zur Erforschung des multiplikativen Verständnisses sowie möglicher Hürden im Lernprozess. Die Auswahl der heterogenen Paare wurde durch die Einschätzungen der jeweiligen Klassenlehrerin vorgenommen und beinhaltete, dass stets ein Kind mit sonderpädagogischem Förderbedarf im Lernen und ein Regelschulkind mit durchschnittlichen Mathematikleistungen zusammenarbeiteten. Im Gegensatz zum Kind mit Förderbedarf, welches bisher nur erste Erfahrungen mit der Multiplikation sammeln konnte, hatte das Regelschulkind das gesamte kleine Einmaleins bereits im 2. Schuljahr behandelt.

Erste Ergebnisse bekräftigen, dass strukturelle Beziehungen auf additiver Ebene Potential für den Aufbau eines strukturellen multiplikativen Verständnisses bieten. Die wiederholte Addition kann die Gesprächsbasis für ein gemeinsames Mathematiklernen von Kindern mit und ohne sonderpädagogischem Förderbedarf bilden, die zum einen zum Aufbau eines multiplikativen Verständnisses und zum anderen zur Vertiefung von multiplikativen Einsichten beitragen kann. Im Rahmen des Forschungsprojekts erfolgen tiefergehende Analysen, um diese erste Einschätzung zu untermauern.

## Literatur


Bönig, D. (1995): *Multiplikation und Division.* Münster: Waxmann.

Gasteiger, H. & Paluka-Grahm, S. (2013). Strategieverwendung bei Einmaleinsaufgaben - Ergebnisse einer explorativen Interviewstudie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *34*(1), 1–20.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen*. Seelze: Kallmeyer.

Killion, K. & Steffe, L. P. (1989). Children's Multiplication. *Arithmetic Teacher*, *37*(1), 34–36.

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht*, *65*(8), 452–457.

Selter, Ch. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe*. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

Transchel, S., Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2013). Zahlen treffen!: Kooperation und Kommunikation im Gemeinsamen Mathematikunterricht. *Mathematik differenziert. Zeitschrift für die Grundschule*, *4*(2), 22–26.

Natalie TROPPER, Lüneburg

# Von Zahlenjongleuren, Gelegenheitsabbrechern und Interpretationsmuffeln – Heuristische Lösungsbeispiele zum mathematischen Modellieren

Der vorliegende Beitrag skizziert ein laufendes Promotionsvorhaben, welches sich mit der Förderung modellierungsbezogener Strategien durch heuristische Lösungsbeispiele befasst. Der Fokus der Darstellung liegt dabei, im Sinne eines work-in-progress-Berichts, auf der Instrumentenentwicklung sowie den bei der Erprobung der Instrumente erzielten Resultaten.

## 1. Modellierungsbezogene Strategien

Deskriptive Analysen modellierungsbezogener Lösungsprozesse belegen, dass alle Schritte des Modellierungskreislaufs potentielle kognitive Hürden für Lernende darstellen (z.B. Galbraith & Stillman, 2006; Kramarski et al., 2002). Zugleich wird auf die Relevanz strategischer und metakognitiver Handlungen für mathematisches Modellieren hingewiesen (z.B. Doerr, 2007), insbesondere als Reaktionen auf derartige Hürden (Stillman, 2011). Dass Lernende jedoch spontan zumeist unangemessen auf im Modellierungsprozess auftretende Probleme reagieren (ebd.), weist darauf hin, dass adäquate Strategien häufig nicht verfügbar sind und entsprechend gezielt im Lehr-Lern-Prozess vermittelt werden müssen. Sollen Strategien nicht isolierte, auf einen Anwendungskontext beschränkte Hilfsmittel bleiben, müssen bei deren Vermittlung verschiedene Aspekte der allgemeinen Lernstrategieforschung berücksichtigt werden. So erfordert etwa der flexible Einsatz einer Strategie neben deren inhaltlicher Vermittlung auch die Förderung des selbstregulierten Strategiegebrauchs, z.B. durch die Bereitstellung konzeptuellen Wissens (Leutner & Leopold, 2006). Zudem setzt der Transfer von Strategien deren Demonstration und praktische Erprobung in unterschiedlichen Handlungskontexten voraus (Brunstein & Spörer, 2006).

## 2. Lösungsbeispiellernen

Ein Instruktionsansatz, der die vorangegangenen Aspekte berücksichtigt, ist das Lernen durch Lösungsbeispiele. Bei Lösungsbeispielen handelt es sich um Aufgabenbeispiele, die neben der Aufgabenstellung auch eine schrittweise Darstellung der Aufgabenlösung enthalten. Das Grundprinzip des Lösungsbeispiellernens ist, ein zu vermittelndes Schema einer Reihe von Lösungsbeispielen zugrunde zu legen, sodass Lernende im Laufe der Beispielbearbeitung das Schema durch Analogiebildung nach und nach extrahieren können. In empirischen Studien konnte bereits vielfach der

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1235–1238). Münster: WTM-Verlag

sog. *Lösungsbeispieleffekt* (Sweller et al., 1998) nachgewiesen werden: Die Konfrontation mit einer Reihe von Lösungsbeispielen führt in der Regel zu besseren Transferleistungen als die eigenständige Bearbeitung derselben Aufgaben. Bislang wurde der Effekt vor allem in algorithmischen Kontexten nachgewiesen. Für nicht-algorithmische Zusammenhänge entwickelten Reiss und Renkl (2002) *heuristische Lösungsbeispiele*, die einen realistischen statt eines idealtypischen Lösungsprozesses abbilden und auch explorative Elemente enthalten, um konzeptuelles Wissen zu verwendeten Operatoren sowie allgemein ein problemlösendes Herangehen an komplexe Aufgabenstellungen vermitteln zu können. Durch eine Serie heuristischer Lösungsbeispiele können daher insbesondere die oben genannten Voraussetzungen eines flexiblen Strategieeinsatzes berücksichtigt werden.

## 3. Zielsetzung und Methodik der Studie

Im Rahmen der hier berichteten Laborstudie soll die Wirkung einer Lösungsbeispielintervention auf strategische Handlungen im Modellierungsprozess von Lernenden der 8. Jahrgangsstufe untersucht werden. Die zentrale Forschungsfrage hierzu lautet:

- Wie wirkt sich der Einsatz heuristischer Lösungsbeispiele mit strategischem Fokus auf modellierungsbezogene Lösungsprozesse und Strategiegebrauch der Lernenden sowie ihr diesbezügliches explizites Strategiewissen aus?

Zunächst werden mithilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring sowohl schriftliche Aufgabenbearbeitungen wie auch Laut-Denken-Protokolle ausgewertet, um differenzierte Einblicke in die modellierungsbezogenen Lösungsprozesse der Lernenden und dabei ablaufende kognitive Prozesse zu erhalten. Weiterhin soll durch den Vergleich mehrerer Experimentalbedingungen qualitativ herausgearbeitet werden, welchen Einfluss eine Serie heuristischer Lösungsbeispiele zum mathematischen Modellieren – z.T. mit ergänzenden Prompts zur Generierung von Selbsterklärungen – auf das strategische Vorgehen der Lernenden bei nahen Transferaufgaben sowie auf deren explizites modellierungsbezogenes Strategiewissen, welches handlungsnah in einem schriftlichen Test erfragt wird, hat.

## 4. Entwicklung der Instrumente und Resultate der Erprobung

Für die Umsetzung der Laborstudie wird ein umfangreiches Instrumentarium benötigt. Im Folgenden sollen beispielhaft für die beiden zentralen Elemente *Modellierungsaufgaben* und *heuristische Lösungsbeispiele* der Prozess der Instrumentenkonstruktion und -erprobung skizziert sowie diesbezügliche Ergebnisse zusammengefasst werden:

Modellierungsaufgaben: Zunächst wurde ein Set von zehn Modellierungsaufgaben entwickelt. Alle Aufgaben stellen vielfältige, auf unterschiedliche Prozessschritte des Modellierens verteilte Anforderungen an den Aufgabenbearbeiter, sodass sich bei deren Bearbeitung ein deutlicher Vorteil durch den Einsatz modellierungsbezogener Strategien ergeben dürfte. Tatsächlich zeigte die Erprobung der Aufgaben in einem schriftlichen Test mit 127 Schülerinnen und Schülern, dass für alle Aufgaben in jedem Schritt des Modellierungsprozesses Probleme auftraten. Die häufigsten Schwierigkeiten ergaben sich dabei für das Verstehen der Aufgabe (in 20 % der bearbeiteten Schülerlösungen), das Bilden eines Realmodells (18 %) sowie die Interpretation errechneter Ergebnisse (7 %). Zudem wurde etwa jede fünfte Aufgabenbearbeitung im Prozess abgebrochen. Meist geschah dies nach der Feststellung, dass nicht alle benötigten Informationen im Aufgabentext gegeben waren (siehe z.B. Abb. 1).

Kann man nicht sagen weil da nicht drinne steht wie hoch die Frisuer ist.

**Abb. 1: Abgebrochene Schülerlösung**

Die Analyse der schriftlichen Schülerlösungen bezüglich (sichtbar) angewandter Strategien ergab zudem, dass die Lernenden nur sehr selten Strategien beim mathematischen Modellieren einzusetzen scheinen. Weitaus am häufigsten (mit 3,8 % der Fälle) war die Strategie *Angaben im Aufgabentext markieren bzw. herausschreiben* festzustellen.

Heuristische Lösungsbeispiele: Basierend auf den Resultaten der Aufgabenerprobung wurden vier der zehn Modellierungsaufgaben für die Intervention ausgewählt und zugehörige heuristische Lösungsbeispiele konstruiert. Im Sinne einer strukturbetonten Beispielsequenz mit variierenden Oberflächenmerkmalen, aber gleicher Tiefenstruktur liegt allen Lösungsbeispielen dasselbe Schema zur strategieorientierten Bearbeitung realitätsbezogener Problemstellungen zugrunde. Zudem wurden charakteristische Vorgehensweisen und Schwierigkeiten, die im schriftlichen Test für die jeweiligen Aufgaben festzustellen waren, bei der Ausgestaltung der zugehörigen Lösungsbeispiele berücksichtigt. Die Resultate der Pilotierung im Labor weisen insgesamt darauf hin, dass die Lernenden durchaus in der Lage sind, mit den konstruierten Lösungsbeispielen umzugehen und adäquat auf die zugehörigen Selbsterklärungsprompts zu reagieren (siehe beispielhaft Abb. 2).

| |
|---|
| (!) Begründe kurz, warum Sara und Paul ihr Ergebnis 9,76 auf 10 aufgerundet haben. |
| Man kann ja nicht 9,76 Zug fahren, also muss sie eig. 10 mal fahren. |

**Abb. 2: Schülerantwort auf einen Selbsterklärungsprompt im Lösungsbeispiel (nachgestellt)**

Der Einfluss der Beispiele auf das strategische Verhalten der Schüler bei der eigenständigen Aufgabenbearbeitung im Nachtest kann jedoch aufgrund der geringen Fallzahl (N=4) noch nicht abgeschätzt werden, sodass diesbezüglich die Ergebnisse der Hauptstudie abzuwarten sind.

## 5. Schlussbetrachtung

Der flexible Einsatz von Strategien ist nicht durch kurzfristige Trainings erlernbar, sondern stellt das Ergebnis langfristiger Gewohnheitsbildung dar (z.B. Friedrich & Mandl, 2006). Vor diesem Hintergrund dient das hier skizzierte Promotionsvorhaben zunächst vor allem einer detaillierten qualitativen Untersuchung der Wirkungsweise einer Lösungsbeispielintervention auf modellierungsbezogene Strategien von Lernenden, bevor in späteren Forschungsprojekten die längerfristige Implementierung in unterrichtliche Lernprozesse untersucht werden kann.

## Literatur


Brunstein, J. C., & Spörer, N. (2006). Selbstgesteuertes Lernen. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (S. 677–685). Weinheim: Beltz.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 69–78). New York: Springer.

Friedrich, H. F. & Mandl, H. (2006). Lernstrategien: Zur Strukturierung des Forschungsfeldes. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 1-23). Göttingen: Hogrefe.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM, 38* (2), 143-162.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics, 49* (2), 225–250.

Leutner, D., & Leopold, C. (2006). Selbstregulation beim Lernen aus Sachtexten. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 162–171). Göttingen: Hogrefe.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM, 34* (1), 29 – 35.

Stillman, G. A. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. In G. Kaiser (Ed.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 165–180). New York: Springer.

Sweller, J., van Merriënboer & J., Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, 10* (3), 251 - 296.

Dorothea TUBACH, Dortmund

# Zahlbeziehungen erkennen und nutzen im Übergang von der Kita in die Grundschule

Mit der zunehmenden Bedeutung des Lernortes Kita für das mathematische Lernen wird die Frage nach der Anschlussfähigkeit der Lernprozesse am Lernort Schule zentral. Studien zu Kooperationsmaßnahmen zwischen Erzieherinnen und Lehrkräften im Rahmen des Übergangs von der Kita in die Grundschule weisen darauf hin, dass bisher selten über abgestimmte Lernsituationen nachgedacht wurde, hier daher ein großes Potential zur Gestaltung anschlussfähiger Lernprozesse ungenutzt bleibt (z.B. Eckerth et al.). Aus mathematikdidaktischer Perspektive stellt beim Übergang von der Kita in die Grundschule insbesondere die Vernetzung von konkreten Spiel- und Alltagserfahrungen mit systematischeren Betrachtungen eine Herausforderung dar (z.B. Hasemann 2004). Es gilt, die Balance zwischen Bekanntem und Neuem zu finden, so dass das Kind in der Kita spielerische (Handlungs-)Erfahrungen und Einsichten gewinnen kann, an diese es im Anfangsunterricht anknüpfen kann, aber darüber hinaus weitere operative Erkundungen und neue Einsichten möglich sind.

## 1. Spielen und Mathematik

Im Hinblick auf die Gestaltung von Lerngelegenheiten gewinnt somit das Spiel in einem doppelten Sinne an Bedeutung: Einerseits als *natürliche Lernsituation* in der Kita - in dem Sinne, dass das Angebot eines Regelspiels für die Kinder einen vertrauten sozialen Kontext bietet, der durch spezifische Regeln und Rollen charakterisiert ist (vgl. Oerter 1999). In einem Spiel mit mathematischem Potential können sich dann unter bestimmten Voraussetzungen mathematische Lernsituationen für die Kinder entwickeln. Eine günstige Bedingung stellt die Begleitung des Spiels durch eine Erzieherin dar, die mathematische Interaktionen aufbauen und durch gezielt am Kind und an der Spielsituationen orientierten Impulse, mathematische Aspekte hervorheben kann (vgl. Schuler 2013). Andererseits ist das Spiel als *natürlicher Zugang zur Mathematik* relevant. So gesehen zeigt sich im Spiel eine spezifische Art der Auseinandersetzung mit Mathematik: Zahlen werden in ihrem Beziehungsgefüge wahrgenommen in diesem und mit diesem gespielt wird, d.h. es werden operative Veränderungen vorgenommen und die Auswirkung wird zum Ausgangspunkt für weitere (systematische) Veränderungen (vgl. Steinweg 2001). Somit wird das Spiel als charakteristisches Handlungselement der Kita aufgegriffen und zugleich werden vom Fach her authentische Gelegenheiten angeboten, die es den Kindern erlau-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1239–1242). Münster: WTM-Verlag

ben, bewusst mathematisch zu spielen. Von besonderer Bedeutung sind hierbei einerseits Erkundungen zum Zählen und ersten Rechnen. Andererseits gilt nach Wittmann und Müller (2009, S. 14) „die Fähigkeit, Beziehungen zwischen Zahlen zu erkennen und zu nutzen", als wichtiges Ziel für die Kita, welches gleichzeitig auf den Anfangsunterricht verweist. Es existieren allerdings keine wesentlichen empirischen Erkenntnisse, wie Kinder im Übergang von der Kita elementare numerische Relationen erfassen und verstehen.

## 2. Design der Studie

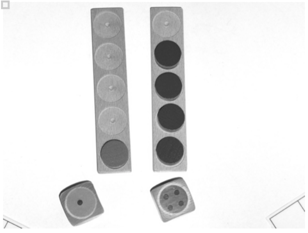
Im Rahmen der qualitativ-explorativen Studie soll es daher darum gehen, Lernumgebungen zur Erkundung numerischer Beziehungen zu entwickeln, die unter dem Aspekt der „Komplementarität" die Spezifika der Lernorte berücksichtigen und gleichzeitig aufeinander bezogen sind, d.h. den Kindern in der Kita reichhaltige Erfahrungen und Erkundungen zu Zahlbeziehungen im Spiel anbieten, die im Anfangsunterricht am gleichen Spielmaterial aufgegriffen und weitergeführt werden.

In der Studie wurden 10 Kinderpaare in zwei Erhebungszeiträumen von der Kita in die Grundschule begleitet. Der Zeitraum umfasste das letzte Kita-Halbjahr und das erste Schuljahr. Dabei wurden jeweils drei Spielsituationen in der Kita (Einführung des Spiels) unter Begleitung einer Erzieherin und jeweils drei dreistündige Lernsituationen im Klassenverband mit der Lehrkraft videografiert. In einem zweiten Erhebungszeitraum wurden zusätzlich Interviews zum Ende der Kita und zum Ende des ersten Schuljahres geführt.

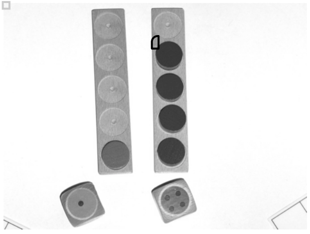
## 3. Eine Lernumgebung für Kita und Grundschule: Wer hat mehr?

Das auf der Basis der Idee des Lernspiels „Hamstern" (Verboom 2010) weiter entwickelte Spiel „Wer hat mehr?" ist eine von drei entwickelten „komplementären Lernumgebungen" (Nührenbörger & Tubach 2014) für den Übergang. In der Kita ist „Wer hat mehr?" ein Regelspiel für zwei Kinder mit strukturierten Materialien, welches punktuell eingesetzt werden kann. Es besteht aus zwei Würfeln mit den Augenzahlen von 0 bis 5, zwei 5er-Blöcken, zwei 10er-Feldern und Wendeplättchen.

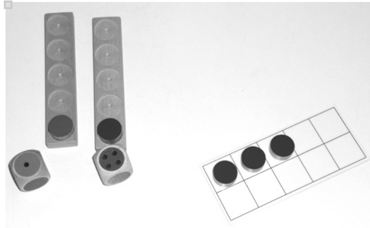
*Spielregel*: Nach dem Würfeln legt jeder Spieler entsprechend der Augenzahl Plättchen in einen 5er-Block. Der Spieler mit der größeren Anzahl darf die Differenz an Plättchen auf sein 10er-Feld legen (s. Abb.). Anschließend werden die 5er-Blöcke geleert und es wird erneut gewürfelt. Der Spieler, der als erstes sein 10er-Feld (genau) gefüllt hat, gewinnt das Spiel.



Entsprechend der Augenzahl werden Plättchen in die 5er-Blöcke gelegt.



Vergleich: rechts sind 3 Plättchen mehr



Der (rechte) Spieler darf die 3 Plättchen nehmen und auf sein 10er-Feld legen.

Im Kern des Spiels steht also die Herausforderung, stets neue linear strukturierte Mengenpaare zu vergleichen und den Unterschied zu quantifizieren.

## 4. Erkenntnisse zum Lernort Kita

Die *Deutungen des Unterschiedes* der Mengen in den 5er-Blöcken gelingt den Kindern während des Spiels auf verschiedene Weisen, die in ihren Beschreibungen und Begründungen zum Ausdruck kommen:

- Eine Korrespondenz zwischen dem Gleichen wird hergestellt, um das Ungleiche, d.h. den Unterschied zu ermitteln (Zuordnung).
- Es wird ermittelt, wie viele Plättchen hinzugefügt oder weggenommen werden müssen, um einen Gleichstand zu erzielen, die ermittelte Anzahl gibt den Unterschied an (Angleichen).
- Die Anzahl der kleineren Menge wird von der größeren Menge weggenommen, der Rest gibt den Unterschied an (Differenz herstellen).

Gegen Ende des Spiels, wenn die noch unbesetzten Felder auf dem 10er-Feld für den Spielausgang interessant werden, beginnen die Kinder hypothetisch darüber nachzudenken, was gewürfelt werden müsste, um eine gewünschte Anzahl zu erhalten. Hier zeigt sich eine neue Herausforderung für die Kinder: Um *mental Unterschiede herzustellen*, muss die benötigte absolute Anzahl an Plättchen umgedeutet werden in eine Beziehung zwischen zwei Zahlen.

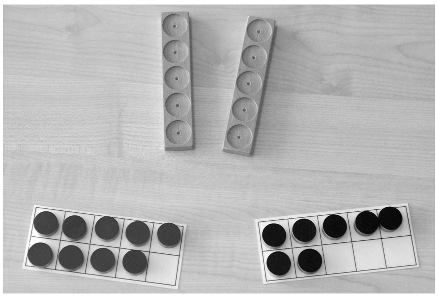


Bild zu einer möglichen Spielsituation

Somit bietet der Spielkontext das Potential für einen *mathematischen Spielraum*: Die Kinder können Zahlenpaare testen und feststellen, dass nicht der gewünschte Unterschied entsteht, um diese zu variieren und erneut zu überprüfen, d.h. in dem Beziehungsgefüge spielen.

## 5. Ausblick auf den Lernort Schule

Am Lernort Schule gilt es im Sinne der Komplementarität, das Potential des *mathematischen Spielraums* zum *Herstellen von Unterschieden* im Anfangsunterricht zu entfalten. Die Frage, mit welchen Zahlenpaaren z.B. drei Plättchen gewonnen werden können, kann nun systematischer erkundet werden. Dabei können die Kinder das Material nutzen und unabhängig von gewürfelten Augenzahlen, Mengenpaare operativ verändern, um Unterschiede zu vergrößern, zu verkleinern oder konstant zu halten. So erhält das Spielmaterial den Charakter eines Anschauungsmaterials. Der Spielkontext dient als Anlass für mathematische Erkundungen von Zusammenhängen, das Regelspiel verliert dabei aber an Bedeutung. Dafür gewinnt die Dokumentation von Zahlenpaaren und ihren Unterschieden auf der ikonischen und symbolischen Ebene an Relevanz. Diese Dokumente können geordnet, ergänzt und genutzt werden, um Beziehungen, wie die Konstanz der Differenz zu erkunden und zu begründen.

„Wer hat mehr?“ in der Kita verweist also im Hinblick auf das Potential des mathematischen Spielraums auf die mögliche Fortsetzung und Vertiefung am Lernort Schule. Gleichzeitig kann den Kindern im Anfangsunterricht durch das Aufgreifen des bekannten Spielkontextes und Materials das Anknüpfen an bisherige Erfahrungen und Einsichten ermöglicht werden.

## Literatur


Eckerth, M., Hanke, P. & Hein, A.K. (2012). Schutzfaktoren zur Unterstützung der Übergangsbewältigung von der Kindertageseinrichtung in die Grundschule. In S. Pohlmann-Rother & U. Franz (Hrsg.), *Kooperation von KiTa und Grundschule* (S. 57-70). Köln: Carl Link.

Hasemann, K. (2004). Mathematisches Wissen und Verstehen im Vor- und Grundschulalter. In G. Faust et al. (Hrsg.), *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich* (S. 64-77). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Nührenbörger, M. & Tubach, D. (2014): Verständnis mathematischer Zusammenhänge bei Kindern am Ende der Kita und zu Beginn der Grundschule. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 7, 48-61.

Oerter, R. (1999). *Psychologie des Spiels*. Weinheim und Basel: Beltz.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen*. Münster: Waxmann.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT.

Verboom, L. (2010): „Ich habe drei Plättchen mehr als du“. *Grundschule Mathematik*, 7(25), 6-7.

Wittmann, E.C. & Müller, G.N. (2009): *Das Zahlenbuch. Handbuch zum Frühförderprogramm*. Leipzig: Klett.

Alexander UNGER, Berlin

# Interessengemeinschaften in der DDR und die Rolle der Mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*

Interesse ist ein wesentlicher Motor für Lernerfolg. Aktive Gemeinschaften basierend auf Interesse an Mathematik sind gewinnbringend, auch für die Persönlichkeitsentwicklung der Beteiligten. Neben Arbeitsgemeinschaften, Mathematikzirkeln und ähnlichem gibt es viele weniger offensichtliche Gemeinschaften hinter formalen Strukturen. In diesem Artikel werden die in der ehemaligen DDR zahlreichen außerunterrichtlichen Aktivitäten zur Förderung von Interesse und Begabung vorgestellt und Wechselwirkungen angerissen. Der theoretischen Einordnung dient die Theorie der *Communities of Practice*, die das Wesen solcher Aktivitäten beschreibt und Lernen im sozialen Kontext zu erklären versucht. Abschließend wird die *Mathematische Schülerzeitschrift alpha* als Lieferant von Inhalten, Bindeglied und Medium vorgestellt.

## 1. Historischer Überblick

Die Entstehung so zahlreicher Aktivitäten ist zum einen in der wachsenden Bedeutung der Mathematik durch technische Entwicklungen Mitte des letzten Jahrhunderts begründet, ein weiterer Anstoß war die Olympiadebewegung in anderen Ländern. 1959 fand in Rumänien die erste *Internationale Mathematikolympiade* (*IMO*) statt. In der DDR wurde, ausgehend von Städtewettbewerben in Berlin und Leipzig, in den folgenden Jahren die vierstufige *Olympiade Junger Mathematiker* (*OJM*, heute Mathematik-Olympiaden) zur Förderung talentierter Schülerinnen und Schüler ab Klasse 5 aufgebaut. 1966 waren in der 1. Stufe mit rund 987.000 Teilnehmern etwa 75% aller zur Teilnahme berechtigten registriert (Engel 2011). 1963 entstand die einstufige *ABC-Olympiade* für Schülerinnen und Schüler der Klassen 2 bis 4. Die Olympiade-Aufgaben wurden in Zeitungen und Zeitschriften veröffentlicht (*Junge Welt*, *Trommel*, *ABC-Zeitung*, *alpha*).

Dem Eindruck nach gab es „im Schnitt an jeder Schule einen Lehrer, der sich bei der Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler engagierte" (Sill 2002). In Schulen entstanden *Arbeitsgemeinschaften* (*AGs*), Materialien und Bücher wurden in *Mathematik-Kabinetten* zusammengetragen, in *Mathe-Clubs* oder sogenannten *alpha-Clubs* sowie ab den 1960er Jahren schulübergreifend in *Kreis-* und *Bezirksklubs Junger Mathematiker* fanden zudem Vorträge und Exkursionen statt, Wandzeitungen und mathematische Spiele wurden hergestellt. Vielerorts wurden in den Ferien sogenannte *Mathe-Spezialistencamps* durchgeführt. Die Einrichtung von

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1243–1246). Münster: WTM-Verlag

*Spezialklassen* ab 1963 ist Ausdruck der verstärkten Förderung mathematisch-naturwissenschaftlichen Nachwuchses. Mit der Gründung *Mathematischer Schülergesellschaften* (*MSG*) ab 1970 erhielt die außerunterrichtliche Tätigkeit zusätzlich universitäre Anbindung und Unterstützung.

Publikationen zur Unterstützung dieser Aktivitäten sind z. B. die knapp 100 ab 1962 herausgegebenen *Mathematischen Lesebögen* mit Sammlungen von Olympiade-Aufgaben, mathematischen Artikeln und Aufgaben oder die ab 1966 von mehreren Verlagen herausgegebene Reihe *Mathematische Schülerbücherei* mit weit über 100 Bänden. Mathematische Beilagen der *Leipziger Volkszeitung* (*LVZ*) regten zur Beschäftigung mit Mathematik zu Hause im Kreise von Freunden und Familie an. Es erschien jährlich eine 16-seitige *Mathe-LVZ* mit Aufgaben und Preisausschreiben (z. B. 1978: ca. 26000 Einsendungen, Mathe-LVZ 1979), zwischen 1965 und 1971 gab es einmal monatlich unterhaltsame Matheaufgaben in der LVZ und ab 1970 die Sonderhefte *LVZ Mathe-ABC* für Schülerinnen und Schüler der Klassen 1 und 2. Die *Mathematische Schülerzeitschrift alpha*, die ab 1967 erschien und deren Auflage an die 100.000 Exemplare reichte, bot vielfältige Inhalte und vernetzte Aktivitäten und Akteure. Die Zeitschrift *Wurzel* für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 11 und 12 war weniger verbreitet. Zahlreiche Lehrer und Mathematiker, aber auch Methodiker, Wissenschaftshistoriker und andere beteiligten sich an den Aktivitäten, schrieben für die *alpha,* teilten Erfahrungen.

## 2. Communities of Practice

*Communities of Practice* (*CoPs*) sind Gemeinschaften von Menschen, die aufgrund eines gemeinsamen Interesses einer gemeinsamen Tätigkeit nachgehen, um dieses gemeinsame Interesse zu wahren oder zu fördern (vgl. Wenger et al. 2002). CoPs sind zahlreich in unserer Gesellschaft, das theoretische Modell versucht zu erklären, wie Individuen in sozialen Gemeinschaften lernen (vgl. Wenger 2010). Lernen in einer CoP ist offen, problemorientiert, entdeckend, kooperativ und oft gleichberechtigt. Vielfalt (an Perspektiven, Methoden, Beispielen) und Erfahrungen unterstützen die Schärfung von Bedeutung, Vorstellung und Verständnis (von Begriffen, Methoden), das Ausräumen von Fehlvorstellungen, Reflexionsvermögen, Sicherheit und Kreativität. Darüber hinaus sind CoPs identitätsstiftend, fördern eine gemeinsame Sprache, helfen bei der Einordnung des (gemeinsamen) Interesses oder der Verortung von Stärken und Schwächen und stärken so die Persönlichkeit jedes Einzelnen. Sie bieten Anerkennung und Erfolgserlebnisse, Orientierungshilfe und Ideen und sind Forum für eigene Produkte. In ihnen wird Lernen deutlich zum eigentlichen Produkt und bleibt nicht nur Mittel zum Zweck.

CoPs bilden z. B. Schülerinnen und Schüler, die in einer AG gemeinsam Mathematik treiben, aber auch „Mathematikschaffende“, die eher informell ihr Interesse an Mathematik oder der Vermittlung von Mathematik teilen. CoPs produzieren Eigeninitiative, z. B. schlüpfen Schüler später in die Rolle von AG- oder Zirkelleitern, CoPs erhalten sich so selbst.

## 3. Die Mathematische Schülerzeitschrift *alpha*

Die *Mathematische Schülerzeitschrift alpha* für die Klassenstufen 5 bis 10 erschien in der von Johannes Lehmann konzipierten Form im Verlag Volk und Wissen mit Redaktionssitz in Leipzig ab 1967 mit 6 Ausgaben pro Jahr, erhältlich zu 50 Pfennig im Abonnement oder am Kiosk. Leser waren Schüler, Lehrer und andere Interessierte, teilweise kauften Schulen größere Stückzahlen, um die Hefte an Schüler weiterzureichen oder gezielt in AGs einzusetzen. Die Auflage der Zeitschrift lag zwischenzeitlich knapp unter 100.000 Exemplaren (alpha 11-12/1995). Die Entwicklung nach 1990 war wechselhaft, die *alpha* wurde mehrfach umbenannt, die letzten Ausgaben sind kopierte Zusammenstellungen älterer Artikel aus Büchern und Zeitschriften. Laut Register der Deutschen Nationalbibliothek wurde das Erscheinen 2012 eingestellt.

Die alpha kennzeichnet inhaltliche Fülle und Vielfalt, ebenso in Anspruch und Schwierigkeit. Es gibt zahlreiche mathematische Artikel, z. B. Weiterführendes zu Schulthemen, Problemlösestrategien oder Mathematik in vielfältigen Kontexten, die meist mit Aufgaben zur Anregung einer aktiven Beschäftigung ergänzt sind. Die Aufgaben der OJM, kleine Knobeleien, beliebte Aufgaben von Wissenschaftlern wurden veröffentlicht und verschiedene Lösungsmöglichkeiten unter Wertschätzung der Vielfalt diskutiert. Die Rubrik „*alpha* heiter“ enthielt unterhaltsame Knobeleien, ebenso die „*alpha*-Wandzeitung“ oder das „*alpha*-Ferienmagazin“ zum Heraustrennen. Weiter finden sich eine Reihe historischer Beiträge zu mathematischen Errungenschaften oder berühmten Mathematikern, Berichte über aktuelle Entwicklungen, Anwendungen und die Rolle von Mathematik in der Gesellschaft. Berufe und Studiengänge wurden vorgestellt, ebenso Aktivitäten in Schulen, Kreis- und Bezirksklubs, Mathematischen Schülergesellschaften oder Spezialklassen. Den Blick über den Tellerrand gewähren Berichte und Aufgaben aus Büchern, Zeitschriften und Wettbewerben aus anderen Ländern sowie Aufgaben auf englisch, französisch und russisch in der „Sprachenecke“. Buchvorstellungen, Schachaufgaben, Leserbriefe, die Lösungen der Aufgaben und einiges mehr runden das Spektrum ab. Von besonderer Bedeutung war der *alpha-Wettbewerb*. Neben Mathematikaufgaben gab es Probleme aus Physik, Chemie und Naturwissenschaften/Technik. Für eingesandte Lösungen wurden Antwortkarten und die begehrten *alpha-Abzeichen* verschickt. In den 1980er Jahren gab es jährlich rund 90.000 Einsendungen zum alpha-Wettbewerb (alpha 5/1982, alpha 5/1986). Ein großer Teil der Aufgaben stammte aus Einsendungen der Leser, die redaktionell überarbeitet und zusammengestellt wurden (alpha 6/1986).

Die *alpha* bot stetig Material zu verschiedenen Themen, zur eigenen Beschäftigung und für die AG-Tätigkeit. Die Einordnung der Artikel nach Klassenstufe erleichterte die Nutzung. Weiter lieferten ausgewählte Artikel (z. B. Unterhaltungsmathematik) für Lehrer Alternativen oder Ergänzungen für den Unterricht (vgl. Sill 2002). Außerdem spielte die *alpha* die Rolle eines Mediums zwischen verschiedenen CoPs, einmal indem sie über verschiedene Aktivitäten mit konkreten Inhalten berichtete und Anregungen für die eigene Arbeit weitertrug, aber auch als Forum für eigene Ideen, zum Beispiel durch das Einsenden von Aufgaben oder auch Artikeln.

## 4. Zusammenfassung und Ausblick

Der Artikel bietet einen Abriss historischer Entwicklungen und einen Vorschlag zur theoretischen Einordnung. Gerade die persönlichen Beziehungen, der Kern dieser mathematischen Kultur, sind noch verborgen. Diese Kultur zu verstehen, scheint lohnenswert mit Blick auf heutige Aktivitäten.

## Literatur


Mathematische Schülerzeitschrift *alpha* (1967–1991). Berlin: Verlag Volk und Wissen.

*alpha* – Mathematische Schülerzeitschrift (1991–1993). Velber: Friedrich Verlag.

*alpha* – Mathematik als Hobby (1994–1998). Velten: Reinhardt Becker Verlag.

Engel W. (2011). Zur 50. Mathematikolympiade 2011 in Deutschland. Preprint, Universität Rostock.

Girlich, H.-J. (2013): Von Ladies' Diary zur Jenenser Wurzel – Wege zu mathematischen Schülerzeitschriften. Preprint, Universität Leipzig.

Gräbe, H.-G. (2005). Die Förderung mathematisch talentierter Schüler in der Region Leipzig (S. 16–32). In Gräbe, H.-G. (Hrsg.): 10 Jahre LSGM – 30 Jahre MSG. Leipzig: Eigenverlag. lsgm.de/lsgm/Geschichte/Heft-05.pdf

Sill, H.-D. (2002). Literatur für Mathematiklehrer in der DDR und ihre Rolle in der Aus- und Weiterbildung sowie der täglichen Arbeit. In Henning, H., Bender, P. (Hrsg.): Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern – Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR (S. 109–116). Magdeburg/Paderborn: Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg/Universität Paderborn.

Wenger, E., McDermott, R., Snyder W.M. (2002). Cultivating Communities of Practice. Boston: Harvard Business School Press.

Wenger, E. (2010). Communities of Practice and Social Learning Systems: the Career of a Concept. In Blackmore, C. (Hrsg.): Social Learning Systems and Communities of Practice. London: The Open University in association with Springer Verlag.

Christian VAN RANDENBORGH, Würzburg

# Verborgene Ideen aufdecken – ein historisches Zeichengerät im heutigen Mathematikunterricht

In der Mathematik wurden immer wieder Werkzeuge erfunden und verwendet. Doch ist eine Beschäftigung mit historischen Zeichengeräten im heutigen Mathematikunterricht noch sinnvoll? Welche Bedeutung können historische Geräte für den heutigen Mathematikunterricht haben? Wie kann ein Zeichengerät eingesetzt werden? Was und wie lernen Schüler bei einem derartigen Einsatz? Eine wichtige, weiterführende und ganz grundsätzliche Perspektive ergibt sich, wenn ein Zeichengerät als ***Ideenkonglomerat*** unterschiedlicher Ideen verstanden wird.

## Ideenkonglomerat als Grundverständnis

Diese Auffassung bedeutet, dass ein Zeichengerät sechs Arten von Ideen enthält. Zunächst hat ein derartiges historisches Gerät eine *Einsatzidee*. Es wird benutzt, um damit etwas zu zeichnen. Die *mechanische Idee* ist für die Bauweise des Geräts verantwortlich. Eine weitere – besonders auch für den Mathematikunterricht – wichtige Idee ist die *mathematische Idee*. Sie findet sich in der Funktionsweise des Geräts wieder. Wird ein Artefakt im Mathematikunterricht untersucht, dann wird es mit einem bestimmten Ziel, einer bestimmten Absicht eingesetzt. Dass Gerät enthält somit eine *didaktische Idee*. Die Schüler erforschen das Zeichengerät und entwickeln so bestimmte *Erklärungsideen*. Ein derartiges Gerät bzw. speziell ein Zeichengerät ist zu einer bestimmten Zeit und in einer bestimmten Situation entstanden. Daher ist es immer Ausdruck eines bestimmten mathematischen Interesses und Blicks auf die Geometrie. Damit ist die *kulturell-historischen Idee* angesprochen.

Im Mathematikunterricht steht die Erforschung der mechanischen und mathematischen Idee und ihres Zusammenhangs im Zentrum. Ein wesentliches Ziel ist es, die im Zeichengerät implizite Mathematik explizit zu machen. Genaueres zu dem Ideenkonglomerat des Parabelzirkels von FRANS VAN SCHOOTEN und Hinweise und Erfahrungen zum Unterrichtseinsatz finden sich bei VAN RANDENBORGH (2012a).

## Empirische Untersuchung

In unserer empirischen Studie wurde der Einsatz des Parabelzirkels von FRANS VAN SCHOOTEN (1615–1660) und des Pantographen von CHRISTOPH SCHEINER (1573–1650) im Mathematikunterricht untersucht. Dabei standen den Schülern zur Erforschung einerseits reale Nachbauten und andererseits

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1247–1250). Münster: WTM-Verlag

digitale Simulationen (mit GeoGebra) zur Verfügung. Die Ergebnisse wurden vor dem Hintergrund der theoretischen Modelle der Instrumentellen Genese und der Semiotischen Vermittlung analysiert und interpretiert. Hieraus wurde unser Modell der ***Instrumentellen Wissensaneignung*** entwickelt. (Zum Begriff siehe VAN RANDENBORGH (2012b))

Beim Unterrichtseinsatz von Zeichengeräten stehen die mechanische und die mathematische Idee im Zentrum der Erforschung durch die Schüler. Durch das Aufdecken der Ideen und ihres Zusammenhangs gelangen Schüler zur der im Zeichengerät inhärenten aber verborgenen Mathematik. In unserer Studie konnten verschiedene Beschäftigungshasen der Schüler unterschieden werden. Bei der Instrumentwerdung eines Zeichengeräts vom Artefakt hin zum Instrument der Wissensvermittlung traten spezifische Zeichen auf, die sich vier verschiedenen Zeichenkategorien zuordnen ließen. Es konnte zwischen *Artefakt-, Schlüssel-, Instrument- und Mathematikzeichen* unterschieden werden (vgl. auch VAN RANDENBORGH (2012b), BARTOLINI BUSSI (2008)). Dabei traten im Laufe dieses Prozesses besondere Zeichen – ***Trägerzeichen*** – auf, die über die aktuelle Zeichenebene hinausgingen und für die Schülertätigkeiten in der nächsten Phase wichtig waren. Die Schüler gelangten also im Prozess der Instrumentellen Wissensaneignung durch die Trägerzeichen von der einen Zeichenebene zur nächsten. Dieser Weg von den Artefaktzeichen hin zu den Mathematikzeichen bildet die stattfindende Verständnisentwicklung ab. Solche Prozesse konnten bei verschiedenen Zeichengeräten und dem entsprechend auch bei realen und digitalen Zeichengeräten festgestellt werden. Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede beim Einsatz eines realen bzw. digitalen Parabelzirkels sind ausführlicher bei VAN RANDENBORGH (2012a) dargestellt. An dieser Stelle sollen einige *Beeinflussungsfaktoren* dargestellt werden. Diese wurden im Zusammenhang mit den in der Studie festgestellten ***Instrumentalisationstypen*** deutlich. Bei der Untersuchung der Zeichengeräte durch die Schüler spielte die Beschäftigung mit Grenzen und Zwängen oder mit Möglichkeiten und Veränderungsmöglichkeiten eine entscheidende Rolle. Es konnten sowohl beim Parabelzirkel als auch beim Pantographen – bei den digitalen und auch bei den realen Modellen – im Wesentlichen drei Instrumentalisationstypen festgestellt werden. So spielte bei einem Instrumentalisationstyp des realen Parabelzirkels das Betrachten, Aufdecken und Erklären von Grenzen und Zwängen des Geräts eine die Erforschung leitende Rolle. Beim zweiten Typ standen dabei die Möglichkeiten und Veränderungsmöglichkeiten des jeweiligen Geräts im Vordergrund. Dieses war hier die Leitperspektive für die Erforschung des Geräts. Beim dritten Typ ließ sich keine Dominanz des ersten oder zweiten Blickwinkels feststellen. Die Instrumentelle Wissensaneignung gelang je nach Instrumentalisationstyp unterschiedlich. Ein Beeinflussungsfaktor für diesen Prozess ist sicherlich der Instrumentalisationstyp. Damit hingen auch die weiteren Faktoren zusammen. So waren die Wege der Instrumentellen Wissensaneignung bei einem realen Gerät anders als bei einem digitalen Nachbau. Die Ausbildung von Zeichen der jeweiligen Zeichenkategorien und insbesondere der Trägerzeichen war wichtig. Ein weiterer Punkt war, ob und welche Erklärungsideen von den Schülern gefunden wurden. In diesem Zusammenhang zeigte sich noch einmal ganz deutlich, dass es darauf ankam, ob die Zwänge, Grenzen und (Veränderungs-) Möglichkeiten des Geräts für die Schülertätigkeiten wichtig waren. Der entscheidende Faktor dafür, ob aus dem Artefakt ein Instrument der Wissensvermittlung werden konnte, war, ob die *zugrundeliegenden Zwänge erkannt, erforscht und mathematisch erklärt* wurden.

## Fazit: Instrumentelle Genese und Semiotische Vermittlung

In unserer Studie ließ sich der wechselseitige Beeinflussungsprozess der *Instrumentellen Genese* beobachten. Dabei ließ sich feststellen, dass die Instrumentation die erste Richtung der Instrumentellen Genese ist. Die dem Zeichengerät (Artefakt) inhärenten Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten bestimmen die Tätigkeit des Schülers (Subjekt). Die Erforschung des Geräts wird auf der Seite des Subjekts von seinem Vorwissen, seinen Fähigkeiten und Fertigkeiten (Kompetenzen) bestimmt. Darüber hinaus konnte je nach Instrumentalisationstyp die Leitperspektive für die Untersuchung des Geräts einerseits die Erforschung von Zwängen und Grenzen oder anderseits ein Veränderungsdenken sein. In dem Prozess der Instrumentwerdung spielten insbesondere die Trägerzeichen eine wichtige und weiterführende Rolle. Aus diesen entwickelten sich Erklärungsideen. Diese machten es möglich, dass aus dem Artefakt ein Instrument der Wissensvermittlung wurde. Die besondere Bedeutung der Trägerzeichen ist auch für das Modell der *Semiotischen Vermittlung* aufschlussreich.

Schon PEIRCE schrieb den Zeichen eine Vermittlungsfunktion zwischen Subjekt und Objekt zu. Sie sind für ihn Mittel der Erkenntnis (vgl. auch HOFFMANN (2003)). Auf Grund unserer empirischen Untersuchung können wir hier noch genauer formulieren: Die Trägerzeichen vermitteln zwischen Objekt und Interpretant. Sie lenken die Verständnisentwicklung der Schüler (vgl. VAN RANDENBORGH (2012b)). Diese Ergebnisse sollen nun mit Blick auf das Lernen von Mathematik verdeutlicht werden.

## Folgerungen für das Lernen von Mathematik

Geht man von den drei Repräsentationsmodi nach BRUNER (1974) aus und berücksichtigt, dass es letztlich darum geht, alle drei zu beherrschen, so sind die Übergänge zwischen den einzelnen Ebenen besonders wichtig. Dabei lässt sich die beschreibende Ebene der Artefaktzeichen der enaktiven Ebene zuordnen. Die deutende Ebene der Schlüsselzeichen entspricht dann der ikonischen Ebene. Der symbolischen Ebene sind die Instrument- und Mathematikzeichen zuzurechnen. Genauer: Bei der begründenden Ebene der Instrumentzeichen sprechen wir von der symbolischen Ebene *mit* Bezug zum Zeichengerät. Bei der abstrakten Ebene der Mathematikzeichen sprechen wir von der symbolischen Ebene *ohne* Bezug zum Zeichengerät. Den Prozess von den Artefaktzeichen hin zu den Mathematikzeichen bezeichnen wir dementsprechend als ***Abstraktion***. Der Übergang von der einen zur anderen Ebene wird durch die Trägerzeichen ermöglicht und gelenkt. Betrachten wir die Schülertätigkeiten beim Erforschen eines Zeichengeräts so gibt es hier Bezüge zum Modellieren. Interessant erscheint uns zunächst, dass das Zeichengerät selbst einerseits Bestandteil der realen Welt und auch der mathematischen Welt ist. Als Gegenstand (Artefakt, materielles Objekt) ist das Zeichengerät zunächst in der realen Welt sichtbar und bestimmte Elemente des Ideenkonglomerats sind bereits erkennbar. Aber erst im Laufe der Erforschung des Geräts durch die Schüler wird auch die zugrundeliegende Mathematik aufgedeckt. Durch dieses Mathematisieren werden die verborgenen Ideen sichtbar. Zu weiteren Aspekten, z.B. der Bedeutung der Zeichenkategorien im Modellierungsablauf, siehe VAN RANDENBORGH (2013). Abschließend wollen wir noch einmal betonen, dass der Aufforderungscharakter der Zeichengeräte nicht nur Neugier und Freude bei den Schülern weckt. Didaktisch bedeutsamer ist noch, dass die Erforschung des Geräts direkt zu mathematischen Tätigkeiten und Themen führt.

## Literatur


Bartolini Bussi, M.G. / Mariotti, M.A. (2008): Semiotic meditation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective; in: L. Englisch (Hrsg.): Handbook of international research in mathematics education, New York [2]2008, S. 746-783

Bruner, J.S. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin 1974

Hoffmann, M.H.G. (2003): Semiotik als Analyse-Instrument; in: M.H.G. Hoffmann (Hrsg.): Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven, Hildesheim/Berlin 2003, S. 34-77

van Randenborgh, Chr. (2012a): Parabelzirkel real und digital. Wissensaneignung durch Modelle und Simulationen; in: Mathematik lehren 174, S. 11-14

van Randenborgh, Chr. (2012b): Instrumentelle Wissensaneignung im Mathematikunterricht; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Bd. 2, S. 893-896

van Randenborgh, Chr. (2013): Zeichengeräte erforschen – Modellieren erleben; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, Bd. 2, S. 1022-1025

Sebastian VOGEL, Kay ACHMETLI, Janina KRAWITZ, Werner BLUM, Kassel

# Wie können die Lernstandserhebungen in Klasse 8 effektiv genutzt werden? – Evaluation des Projekts VELM-8

## 1. Lernstandserhebungen

Seit dem Schuljahr 2008/2009 wird jährlich deutschlandweit im Jahrgang 8 eine einheitliche Vergleichsarbeit („VerA-8“, in Hessen als Lernstandserhebung bezeichnet) in den Fächern Mathematik, Deutsch und der ersten Fremdsprache durchgeführt. In Hessen ist die Teilnahme in einem der genannten Fächer verpflichtend, wird jedoch in jedem Fach empfohlen. Die Lernstandserhebungen (LSE) werden unter Leitung des IQB sowie fachdidaktischer Beratung zentral konzipiert. Die Testung wie auch die Auswertung und Kodierung der Schülerbearbeitungen wird von den Lehrkräften anhand von Durchführungs- und Auswertungsmanualen übernommen (vgl. http://www.iqb.hu-berlin.de/vera). Basierend auf dieser richtig/falsch-Kodierung erhalten die Lehrkräfte nach Abschluss der onlinebasierten Dateneingabe sofortige Rückmeldungen, orientiert an den Kategorien der Bildungsstandards (Leitideen, Kompetenzen, Anforderungsbereiche). Nach einigen Wochen erhalten sie zusätzliche Rückmeldungen über das Abschneiden ihrer Klasse, welche sie ebenso online abrufen können. Dabei lassen sich i. W. die folgenden Arten von Rückmeldungen unterscheiden: *sozial-vergleichend*, *kriterial* und *individuell*. Die *sozial-vergleichende* Rückmeldung gibt Auskunft über das Abschneiden der eigenen Klasse und ermöglicht einen Vergleich mit einem korrigierten Landesmittel (ein adjustierter Mittelwert, in dem Hintergrundvariablen berücksichtigt werden). Bei der *kriterialen* Rückmeldung handelt es sich um eine Einordnung in die Kompetenzstufen der Bildungsstandards. Mit dem Schuljahr 2013/2014 werden in Hessen *individuelle* Rückmeldungen für jede/n einzelne/n Schüler/in eingeführt, mit der jede/r Schüler/in einen „Prozentbereich“ zugeordnet bekommt, in dem sie/er mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt. Des Weiteren kann im Schulbericht für alle beteiligten Fächer und über alle Jahre der Teilnahme hinweg der Schulmittelwert im Vergleich zum korrigierten Landesmittelwert abgelesen werden (HKM, 2009; Neumann, 2014).

Die Lehrkräfte erhalten also vielfältige Rückmeldungen, die zum Großteil auf Klassenebene aggregiert sind. Die ausgewiesenen Ziele der LSE sind jedoch neben der (1) *Orientierung* über Bildungsstandards, kompetenzorientierte Aufgaben etc. vor allem eine (2) *Diagnose* mit dem Ziel darauf aufbauender (3) *individuellen Förderung* und *Unterrichtsentwicklung*. Um eine Unterrichtsentwicklung anstoßen zu können, sind auf Klassenebene

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1251–1254). Münster: WTM-Verlag

aggregierte Mittelwerte sicherlich nutzbar, aber nicht ausreichend. Als Ausgangspunkt für eine individuelle Förderung einzelner Schülerinnen und Schüler in Bezug auf deren Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen können die Rückmeldungen zu den LSE (auch wegen der Kodierung) in keinem Fall genügen. Hierzu ist eine individuelle Analyse der einzelnen Schülerbearbeitungen notwendig. Den Lehrkräften wird diese Analyse durch begleitende didaktische Materialien[1] erleichtert. In diesen ebenfalls online verfügbaren Materialien erhalten die Lehrkräfte zu jeder in den LSE enthaltenen Aufgabe eine bildungsstandardsbezogene Klassifikation, eine tiefgreifende Aufgabenanalyse mit Blick auf mögliche Fehlvorstellungen und Schülerschwierigkeiten sowie – ausgehend von dieser Analyse – Anregungen zur unterrichtlichen Weiterarbeit.

## 2. Das Projekt VELM-8

Die LSE bieten ihrer Zielgruppe, Lehrkräften und Fachkollegien, also eine Vielzahl von Informationen sowie Möglichkeiten und Anregungen für den weiteren Unterricht. Dennoch ist die Haltung der Lehrkräfte gegenüber den LSE eher indifferent (Maier, 2008). Die Downloadquoten der Materialen liegen nicht im erhofften Bereich und aktuelle Umfrageergebnisse aus Hessen zeigen, dass nur gut ein Drittel der Lehrkräfte die LSE als sinnvolle Maßnahme erachtet (Neumann, 2014). Ausgehend von dieser unbefriedigenden Situation wurde das Kooperationsprojekt VELM-8 („**V**erbesserung der **E**ffektivität der **L**ernstandserhebungen **M**athematik Klasse **8**") im Auftrag des Hessischen Kultusministerium gemeinsam mit den LSA Hessen (ehemals IQ Hessen), dem LSA-Projekt KuMN („Kompetenzorientiert unterrichten in Mathematik und Naturwissenschaften") und dem Förderverein MNU im Schuljahr 2012/2013 ins Leben gerufen. Die Projektziele waren (1) mit Blick auf die individuelle Auswertung eine *Weiterbildung der Lehrkräfte in Diagnose und Rückmeldung*, (2) das Aufzeigen von *Ansatzpunkten zur unterrichtlichen Nutzung* der LSE und (3) die Unterstützung bei *Schlussfolgerungen aus den LSE* sowie (4) die Unterstützung bei der *Nutzung und Verbreitung des didaktischen Materials*.


**Abbildung 1: Projektablauf VELM-8**

[1] Aufgaben und didaktische Materialien der letzten Jahre sind unter http://www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben/ma1 zu finden.

Nach einer Auftaktveranstaltung konnten sich interessierte nordhessische Schulen um die Teilnahme bewerben. Davon wurden 6 Schulen nach verschiedenen Kriterien (u. a. Streuung bzgl. Schulformen und Regionen) als *Projektgruppe* ausgewählt. Diese erhielt im Schuljahr 2012/2013 vier Fortbildungen, gerahmt von einem Vor- und Nachtest. Für die *Kontrollgruppe* wurde eine Kompaktfortbildung im Anschluss an den Nachtest durchgeführt (vgl. Abbildung 1). Innerhalb der Fortbildungen wurden dabei die folgenden Inhalte angesprochen (für Details siehe Vogel u. a., 2013): In Fortbildung 1 wurde die Kompetenz des Problemlösens in den Fokus gestellt und anhand dieser die enge Verknüpfung der LSE und der Bildungsstandards aufgezeigt. Hierauf aufbauend ging es in der zweiten Fortbildung um die Diagnose von authentischen Schülerlösungen und um die Rückmeldung der Diagnoseergebnisse an die Schüler/innen. Der Schwerpunkt der dritten Fortbildung lag auf der Arbeit am authentischen Material aus der aktuellen LSE. In der abschließenden Fortbildung wurden Möglichkeiten für die Nutzung der LSE bzw. deren Ergebnisse auf kollegialer Ebene thematisiert.

## 3. Evaluation des Projekts

Unsere Stichprobe setzt sich aus 29 Lehrkräften (57,7% weiblich; $N_{\text{Projektgruppe}} = 18$; $N_{\text{Kontrollgruppe}} = 11$) zusammen. Die Lehrkräfte weisen eine durchschnittliche Unterrichtserfahrung von etwa 14 Jahren auf und verteilen sich folgendermaßen auf die drei Bildungsgänge: 17% Hauptschule, 33% Realschule, 50% Gymnasium. Fast zwei Drittel der Lehrkräfte hatten noch keine Vorerfahrungen mit den LSE.

Zur Evaluation des Projekts wurden zu Vor- und Nachtest erprobte Skalen zu den Einstellungen der Lehrkräfte gegenüber den LSE (Maier, 2008) sowie Schülerleistungstests eingesetzt. Erhoben wurden u. a. die folgenden vier Skalen: (1) Allgemeine Akzeptanz, (2) LSE als Belastung, (3) Förderdiagnostische Nutzung, (4) Hinweise für die zukünftige Unterrichtsgestaltung. Die Skalen zeigen zu beiden Messzeitpunkten akzeptable Reliabilitäten von $0{,}71 < \alpha < 0{,}89$.

In ersten kovarianzanalytischen Auswertungen zeigen sich für die genannten Skalen wünschenswerte Effekte, die tendenziell signifikant ($p < 0{,}10$) ausfallen (siehe Tabelle 1 mit den Mittelwerten der Skalen zu den beiden Messzeitpunkten).

Bei den Veränderungen der Schülerleistungen zwischen Vor- und Nachtest lassen sich keine Unterschiede zwischen den Gruppen feststellen.

**Tabelle 1: Mittelwerte (Standardabweichung) ausgewählter Skalen zu Vor- und Nachtest**

| | Kontrollgruppe | | Projektgruppe | |
|---|---|---|---|---|
| | Vortest | Nachtest | Vortest | Nachtest |
| Allgemeine Akzeptanz | 2,93 (0,75) | 2,99 (0,82) | 3,26 (0,94) | 3,56 (0,63) |
| Belastung | 2,03 (0,73) | 2,30 (0,66) | 2,23 (0,66) | 1,82 (0,54) |
| Förderdiagnostische Nutzung | 3,18 (0,69) | 3,19 (0,70) | 3,48 (0,69) | 3,71 (0,55) |
| Hinweise für Unterrichts-gestaltung | 3,31 (0,54) | 3,21 (0,82) | 3,11 (0,85) | 3,56 (0,67) |

## 4. Reflexion und Ausblick

Die Ergebnisse der Evaluation des Projekts VELM-8 und die individuellen Rückmeldungen der teilnehmenden Lehrkräfte lassen den Schluss zu, dass die Fortbildungen Veränderungen in den Einstellungen und der Sichtweise der Lehrkräfte erreichen konnten. Als Grenzen des Projekts müssen u. a. für die Auswertung die sehr kleine Stichprobe und die unzureichende Randomisierung bei der Besetzung von Projekt- und Kontrollgruppe genannt werden. Trotz dieser Beschränkungen ist eine Weitergabe der Informationen in die Breite notwendig. Um dies zu erreichen, wird im laufenden Schuljahr 2013/2014 im Auftrag des Hessischen Kultusministeriums eine hessenweite Fortbildung für Multiplikatoren durchgeführt, welche wiederum die weitere Fortbildung von Lehrkräften übernehmen werden.

## Literatur


Hessisches Kultusministerium (HKM) (2009). *Lernstandserhebungen*. Wiesbaden: Hessisches Kultusministerium.

Maier, U. (2008). Vergleichsarbeiten im Vergleich – Akzeptanz und wahrgenommener Nutzen standardbasierter Leistungsmessungen in Baden-Württemberg und Thüringen. *Zeitschrift Für Erziehungswissenschaft*, 11(3), 453–474.

Neumann, D. (2014). Die Lernstandserhebungen nutzen. Fortbildung für die Unterrichtsentwicklungsberater/innen. Dienstversammlung am 05. Februar 2014 in Gießen.

Vogel, S., Blum, W., Achmetli, K., Krawitz, J. (2013). Zum Potential von Lernstandserhebungen für die Unterrichtsentwicklung – Das Projekt VELM-8. In. Bausch, I., Pinkernell, G., Schmitt, O. (Hrsg.). Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. (S. 105-120). Münster: WTM.

Rose VOGEL, Sandra SPECHT, Peter LUDES, Henrieke WICHERT, Frankfurt am Main

# Kinder handeln in unterschiedlichen mathematischen Bereichen – ausgewählte Ergebnisse aus der Längsschnittstudie erStMaL

Im Projekt erStMaL (early Steps in Mathematical Learning) wird die mathematische Denkentwicklung von Kindern (3 bis 9 Jahre) in den mathematischen Bereichen: Zahlen & Operationen, Geometrie & Räumliches Denken, Messen & Größen, Muster & Strukturen und Daten & Zufall untersucht (vgl. Brandt, Vogel & Krummheuer 2011). „erStMaL" ist im Forschungszentrum IDeA (Individual Development and Adaptive Education of Children at Risk) Frankfurt/Main angesiedelt. In mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen aus den genannten Bereichen setzen sich Kinder in Tandems oder Kleingruppen (bis zu 4 Kinder) mit mathematischen Arbeitsaufträgen auseinander. Der Auseinandersetzungsprozess wird durch eine erwachsene Person begleitet und durch ein spezifisches Material-Raum-Arrangement unterstützt. Die hier ausgewählten Ergebnisse beziehen sich auf die mathematische Spiel- und Erkundungssituation „Marienkäfer" aus dem mathematischen Bereich „Zahlen & Operationen".

## Kinder ordnen und strukturieren – mathematische Spiel- und Erkundungssituation „Marienkäfer"

Hefendehl-Hebeker (1999, S. 5) beschreibt „gedankliches Ordnen" als „eine grundlegende Tätigkeit in der Mathematik." Wie kommt dieses „gedankliche Ordnen" in Handlungen von Kindern zum Ausdruck? Kinder fokussieren meist zunächst ein Merkmal und stellen Vergleiche bezüglich dieses Merkmals zwischen den gegebenen Objekten an. Die in den Augen der Kinder zusammenpassenden Objekte werden dann im Handlungs- bzw. Spielraum räumlich zusammengelegt. Auf diese Weise entstehen Gruppen von Objekten. Oftmals versuchen die Kinder auch diese identifizierten Gruppen nach der Anzahl der Objekte zu vergleichen.

In der mathematischen Situation „Marienkäfer" stehen den Kindern 36 Karten mit Marienkäfern zur Verfügung. Diese unterscheiden sich jeweils in mindestens einem Merkmal. Verwendete Merkmale sind Farbe (drei Farben), Markierung auf dem Rücken der Käfer (Quadrat, Dreieck oder Kreis) und Anzahl der Markierungen (max. 4). Die hier präsentierten Ergebnisse beziehen sich auf die erste, dritte und fünfte Erhebungswelle (EW) der Längsschnittstudie „erStMaL". In EW1 haben die Kinder den

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1255–1258). Münster: WTM-Verlag

Auftrag die Karten zu sortieren und Gruppen zu bilden. Das Sortieren und Gruppieren wird in EW3 an logische Verknüpfungen gebunden: „Suche Marienkäfer, die blau oder grün sind und vier Markierungen (Punkte) haben.“ Ab EW5 kommt zu den Marienkäfer-Kärtchen weiteres Material hinzu, z.B. je vier Rechtecke in den drei Farben der Marienkäfer, deren Flächeninhaltsverhältnis innerhalb einer Farbe 1:2:3:4 beträgt. Die Kinder sollen nun Zuordnungen zwischen den Gruppen der Marienkäfer und den Gruppen der geometrischen Figuren finden und diese begründen.

**Forschungsfrage und Datenanalyse**

Es soll hier der Frage nachgegangen werden: Welche mathematischen Handlungen zeigen Kinder in den mathematischen Spiel- und Erkundungssituation im Verlauf der Zeit und welche Veränderungen lassen sich feststellen?

Ausgangspunkt für die Datenanalyse sind die videografierten mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen. Diese werden mit Hilfe eines speziell entwickelten Kategoriensystems kodiert, das alle fünf mathematischen Bereiche der Studie umfasst und die relevanten mathematischen Konzepte aufgreift (vgl. Vogel & Jung, 2014). Zur Auswertung der ausgewählten Situationen beschränken wir uns auf drei von insgesamt elf Hauptkategorien: Anzahlbestimmung/Operationen (AO), mathematische Strukturen (MS) und Daten (DA). Diese Hauptkategorien fassen mehrere Unterkategorien zusammen. Die Kategorie MS beschreibt das Erkennen von Strukturen in und zwischen Mengen (MS1-MS3). DA-Kodierungen liegt ein Sortiervorgang zugrunde (DA1-DA3) und die Kategorie AO beschreibt Ordnungs- und Zählvorgänge sowie die Anwendung mathematischer Operationen (AO1-AO5). Von den Unterkategorien werden in die Ergebnisdarstellung nur diejenigen einbezogen, die am häufigsten identifiziert werden konnten.

**Ergebnisse sechs ausgewählter Kinder**

Für die hier präsentierten Analysen wurden sechs Kinder ausgewählt, die sich durchgängig in allen sechs Erhebungswellen mit der mathematischen Erkundungssituation „Marienkäfer“ beschäftigt haben. Die Diagramme geben den prozentualen Anteil der Codes innerhalb der Videos an. Abb. 1 zeigt den prozentualen Anteil der drei Hauptkategorien: Anzahlbestimmung (AO), Daten (DA) und Mathematische Strukturen (MS) in den drei ausgewählten EWs. Der Bereich des Sortierens (DA) ist über alle drei Erhebungszeiträume hinweg gleichermaßen zu beobachten. Die große Anzahl von Objekten, die sich in einzelnen Merkmalen unterscheiden, scheint die Kinder dazu anzuregen, Ordnung in die Vielfalt zu bringen und Gruppen von Objekten zu bilden, denen bestimmte Strukturen zugrunde liegen. Der

Bereich der mathematischen Strukturen (MS) tritt erst in der dritten und fünften Erhebungswelle auf. Dies ist vermutlich einerseits eine Folge der Arbeitsaufträge sowie die zunehmende Fähigkeit der Kinder die Strukturen einzelner Gruppen zu benennen und mit anderen Gruppen zu vergleichen. Schwerpunktmäßig wird in der dritten Erhebungswelle die Anzahlbestimmung deutlich. Bei der genaueren Betrachtung der Unterkategorien zeigt sich, dass die Kinder in der dritten Erhebungswelle vor allem einfache Zählvorgänge durchführen. Der Zeitpunkt der Erhebung entspricht bei den meisten Kindern dem der Einschulung, was die erhöhte Zählbereitschaft der Kinder erklären könnte. Das Zählen wird von den Kindern als eine Fähigkeit wahrgenommen, der in der mathematischen Unterrichtskultur eine große Bedeutung zugeordnet wird.

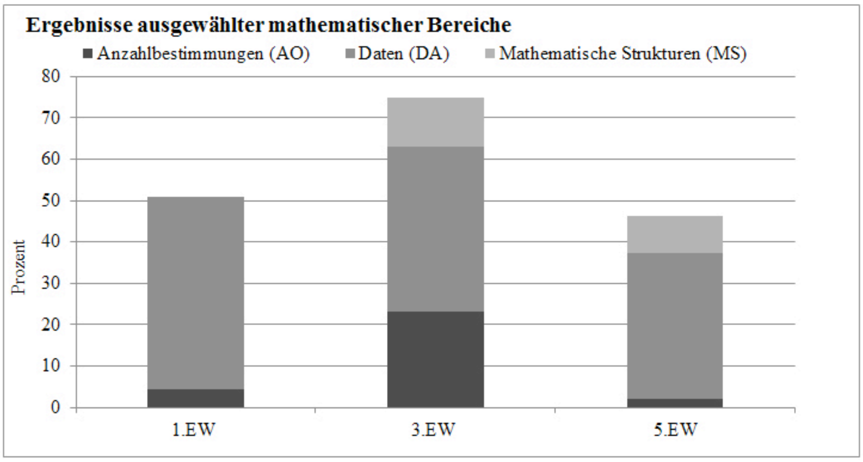



Abb. 1: Ergebnisse von sechs Kindern über die Bereiche „Anzahlbestimmung“ (AO), „Daten“ (DA) und „Mathematische Strukturen“ (MS)

Der Vergleich zwischen den Unterkategorien DA1 und DA2 (Abb. 2) und MS1 und MS2 (Abb. 3) zeigt einen deutlichen Zusammenhang zwischen der Zunahme von komplexen Sortiervorgängen und einem verstärkten Arbeiten im Bereich der mathematischen Strukturen.

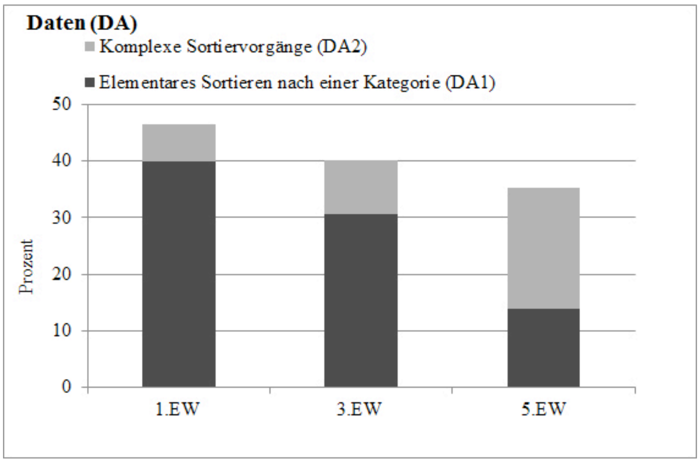



Abb. 2: Ergebnisse von sechs Kindern im Bereich „Daten“ (DA) nach den beiden Unterkategorien DA1 und DA2 aufgeschlüsselt.

Ab der dritten Erhebungswelle erfolgt langsam der Wechsel vom elementaren zum komplexen Sortieren, d.h. im Sortiervorgang werden mehrere Merkmale berücksichtigt. Gleichzeitig treten in der dritten EW zum ersten Mal Kodierungen im Bereich der mathematischen Strukturen auf (MS1) (siehe Abb. 3), die mit zunehmender Erhebungswelle komplexer werden. Zunächst werden Objekte anhand ausgewählter Merkmale gruppiert und strukturell in Zusammenhang gebracht (MS1). Diese Fähigkeit differenziert sich weiter aus und die Kinder vergleichen strukturell verschiedene Gruppen von Objekten.

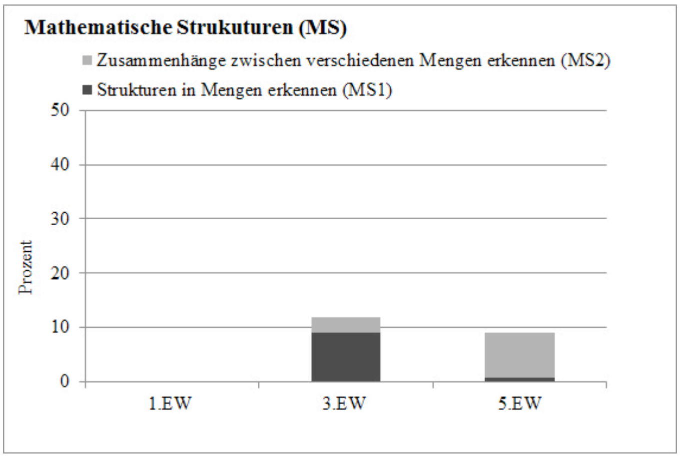



Abb. 3: Ergebnisse von sechs Kindern im Bereich „Mathematische Strukturen“ (MS) nach den beiden Unterkategorien MS1 und MS2 aufgeschlüsselt

## Zusammenfassung

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass die von den Kindern gezeigten mathematischen Handlungen innerhalb der untersuchten mathematischen Spiel- und Erkundungssituation „Marienkäfer“ im Verlauf der sechs Erhebungswellen weitgehend gleichen Hauptkategorien zuzuordnen sind. Gleichzeitig wird die mathematische Denkentwicklung der Kinder in diesen mathematischen Bereichen über die Zeit deutlich (siehe Ausdifferenzierung in den Unterkategorien). Die Analyse zeigt somit das Potential dieser mathematischen Situation für die Diagnose mathematischer Basisfähigkeiten.

Die Erstellung dieses Beitrags wurde gefördert durch die LOEWE-Initiative der Hessischen Landesregierung.

## Literatur

Brandt, B., Vogel, R. & Krummheuer, G. (Hrsg.) (2011). Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am “Center for Individual Development and Adaptive Education” (IDeA). Münster: Waxmann.

Hefendehl-Hebeker, L. (1999). Das Entdeckungspotenzial gedanklichen Ordnens – Beispiel aus dem Arithmetikunterricht. Der Mathematikunterricht, Jg. 45 (5), S. 5-16.

Vogel, R. & Jung, J. (2014). Videocoding – A Methodological Research Approach to Mathematical Activities of Kindergarten Children. In B. Ubuz, Ç. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), Proceedings oft he Eighth Congress oft he European Society for Research in Mathematics Education (S. 2248-2257). Ankara: MET Universität.

Anna-Marietha VOGLER, Dortmund

# Worauf kommt es in Unterrichtsinteraktion an? Rekonstruktion von Deutungsmustern handlungsentlasteter Lehrkräfte

Während vielfältige Theorien über die Ermöglichung einer erfolgreichen Partizipation am unterrichtlichen Diskurs existieren, scheinen die daraus resultierenden Ansprüche an den Unterrichtsalltag zwischen individueller Förderung und Erreichen eines kollektiven Lernziels vielen Akteuren kaum umsetzbar. Zur genaueren Untersuchung der Akteursperspektive werden im Projekt INTERPASS videostimulierte Gruppendiskussionen geführt und daraus Relevanzsetzungen handlungsentlastet beobachtender Lehrpersonen rekonstruiert.

## 1. Ausgangspunkt und Zielsetzung

In den vergangenen Jahren haben sich neben der Perspektive auf Lehr-Lern-Situationen als innerpsychisch verortete Prozesse auch sozial-konstruktivistische, interaktionistische Ansätze von Lernen etabliert, nach denen Lernen durch die Partizipation am Diskurs und einem wechselseitigen Aushandlungsprozess bedingt wird (vgl. hierzu u.a. Sfard 2008; Krummheuer 2011). Im Zuge dieser Entwicklung wird auch in der Lehrerbildung das Spannungsfeld zwischen Instruktion und Konstruktion verstärkt aufgegriffen. So wird nicht mehr nur die Anleitung von Lernenden durch die Lehrpersonen als Hauptaufgabe im Lernprozess angesehen, vielmehr soll der Blick für die Schaffung von Möglichkeiten zur Beteiligung von Lernenden an Unterrichtsinteraktionen geschärft werden. In empirischen Unterrichtsstudien können auf Basis dieser Überlegungen verschiedene Ausformungen wünschenswerter Handlungsrepertoires rekonstruiert werden. Hierzu gehören beispielsweise die kommunikative Bereitstellung von Möglichkeiten zur Gesprächsübernahme und die inhaltliche Würdigung von mehr oder weniger gelungenen Schülerbeiträgen in der Unterrichtsinteraktion (u.a. Prediger & Erath 2014 sowie Prediger et al. i.V.). Obwohl durch diese Beiträge der Unterrichtsforschung konkrete Handlungsempfehlungen für die unterrichtliche Gesprächsführung identifiziert werden können, scheinen die Ansprüche an Unterrichtsgespräche teilweise nur eingeschränkt von Lehrkräften realisierbar zu sein. Im Kontrast zu jener kritischen Betrachtung von Unterrichtsinteraktionen, sollen im Folgenden Aspekte der inneren Logik des Lehrerhandelns rekonstruiert werden, die sich eventuell maßgeblich auf die Partizipationsförderlichkeit der Gesprächsführung von Lehrpersonen im Unterricht auswirken. Zur Rekonstruktion dieser inneren Logik werden in diesem Beitrag Relevanzsetzun-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1259–1262). Münster: WTM-Verlag

gen in der Bewertung von Unterrichtsinteraktionen handlungsentlasteter Lehrkräfte im Rahmen videostimulierter Gruppendiskussionen analysiert. So soll die Möglichkeit geschaffen werden, Wahrnehmungs-, Deutungs-, und Bewertungsmuster, die eventuelle Rückschlüsse auf die Logik des jeweiligen Lehrerhandelns zulassen, identifizieren zu können. Diese können wiederum als Ansatzpunkt für Fortbildungskonzepte zur Etablierung wünschenswerter Handlungsrepertoires – konzeptuell als Basis für einen Lernprozess – dienen.

## 2. Die professionelle Sicht von Lehrpersonen als mögliche Basis unterrichtlichen Handelns

Theoretische Basis für die Rekonstruktion der inneren Logik unterrichtlichen Handelns von Lehrpersonen bilden die Untersuchungen von Sherin (2007) zu Diskussionsrunden handlungsentlasteter Lehrpersonen. Sherin (ebd.) sieht dabei einen engen Zusammenhang zwischen rekonstruierbaren Wahrnehmungs-, Deutungs- und Bewertungsmustern von Lehrkräften und deren aktiven Handlungsrepertoires in Bezug auf die unterrichtliche Gesprächsführung. In ihren Ausführungen entwickelt sie diesbezüglich den Ansatz der *professionellen Sicht von Lehrkräften*. Diese stellt nach Sherin eine sozial (durch ihr Selbstverständnis als Lehrer) vorgeprägte Perspektive der Wahrnehmung dar, mit der Lehrpersonen nicht nur (fremde) Handlungen interpretieren und beurteilen, sondern die auch entscheidend für ihr eigenes Handeln ist (ebd., S. 23). Als besonders aussagekräftig für die Rekonstruktion der professionellen Sichtweise sieht Sherin dabei (neben der argumentativen Auseinandersetzung) die selektive Wahrnehmung an, d.h. die Relevanzsetzungen von Lehrpersonen im Aushandlungsprozess.

## 4. Forschungsdesign und methodisches Vorgehen

Für die Rekonstruktion dieser selektiven Wahrnehmung in Aushandlungsprozessen von Lehrkräften werden vier Gruppendiskussionsrunden von ca. 90-120 Minuten mit 5-11 Mathematik- und Deutschlehrern verschiedener Schulformen videografiert (im Rahmen des interdisziplinären Projekts INTERPASS an der TU Dortmund, für einen Überblick vgl.: BzMU14_ERATH_Passung). Die Videostimulation erfolgt durch authentische Unterrichtsinteraktionen, in denen eine Lehrkraft eine Schüleräußerung als passend oder unpassend markiert und hinsichtlich ihres Inhalts oder ihrer Präsentation mehr oder weniger würdigt. Zur Analyse der Diskussionen werden sequenzielle Analysen der Interaktionen durchgeführt und die Aushandlungsprozesse bezüglich ihrer inhaltlichen Ausprägung zu Interaktionseinheiten gegliedert, um die emergierenden Relevanzsetzungen der Lehrpersonen und somit deren professionelle Orientierungen rekonstruieren zu können.

## 5. Erste Ergebnisse

Erste Ergebnisse der Rekonstruktion der professionellen Sichtweisen handlungsentlasteter Lehrpersonen aus verschiedenen Gruppendiskussionen zeigen, dass diese vornehmlich auf pädagogische und nicht auf fachliche Aspekte des Lehrerverhaltens in den Unterrichtsinteraktionen fokussieren. Dieses Ergebnis steht dabei in Einklang mit den Untersuchungen von Sherin, die ähnliche Relevanzsetzungen auch in den von ihr untersuchten Diskussionsrunden feststellt. Über diese selektive Wahrnehmung hinaus, kann in den Analysen hier jedoch auch rekonstruiert werden, dass die Lehrpersonen Schülerbeiträge hauptsächlich in Bezug auf ihre Passung zum Erreichen des angestrebten Unterrichtsziels wahrnehmen. Beispielsweise würdigen Mathematik- und Deutschlehrer verschiedener Gymnasien in einer Diskussionsrunde den Beitrag des Schülers Kostas zunächst, indem sie bei ihm eine ‚Expertenrolle' vermuten und ihn als ‚fitten Lerner' einstufen. Der Schüler äußert in einer gezeigten Unterrichtsinteraktion eine mathematisch besonders hochwertige Formulierung für die Regel des Rundens auf den nächsten Zehner mit Hilfe der Vorstellung von Nähe und Distanz auf dem mentalen Zahlenstrahl durch die Beschreibung „man muss einfach ABrunden, (--) und nä (.) nähere zahl mit ner NULL muss man dahin schreiben (-)" (zur detaillierten Beschreibung dieser Unterrichtssequenzen siehe Prediger & Erath 2014). Auch beschreiben die Lehrer der Diskussionsrunde Kostas Überlegung zunächst mit Bewertungen wie ‚sicher (allgeMEIner.)' und ‚ist SCHON ne leistung da' und würdigen damit seine Idee hinsichtlich ihrer Allgemeingültigkeit und konzeptuellen mathematischen Güte. Die Lehrkräfte rechtfertigen jedoch die im Folgenden im Video wahrgenommene Zurückweisung dieses Beitrags von Kostas durch seinen Mathematiklehrer Herrn Maler zu Gunsten des Beitrags der Schülerin Katja, die eine konkrete numerische Rundungsregel angibt:

| | |
|---|---|
| Lehrer1: | aber er hats nicht über ne REgel formuliert. ne? das ist ja was FEHLT. und das ist- |
| Lehrer2: | geNAU |
| Lehrer1: | (im grunde aber HÖren die.) und der kostas hats ihm nicht gegeben |
| Lehrer3: | (jetzt kams.) (wunderBAR.) |

In Bezug auf die professionellen Sichtweisen der Lehrkräfte kann in dieser sowie in weiteren Diskussionssequenzen die Priorisierung einer strukturell passenden Antwort gegenüber einer mathematisch anspruchsvollen Lösungsvorstellung rekonstruiert werden. Die Effizienz im Unterrichtsfortkommen und in Bezug auf das Erreichen des interpretierten Unterrichtsziels wird dabei durchgehend als besonders erstrebenswert betrachtet und dient als Rechtfertigungsgrund für Zurückweisungen von mehr oder weniger korrekten Schüleräußerungen. Dem inhaltlichen Voranschreiten wird dabei auch die Möglichkeit untergeordnet, solche Beiträge beispielsweise in einem Klassengespräch weiterzuentwickeln. So wird im Beispiel von Kostas und Katja das Potential, eine Äußerung, wie die von Kostas, an eine angestrebte Regelformulierung, wie die von Katja, anzubinden, nicht aufgegriffen. Die analysierte professionelle Sicht der Lehrpersonen lässt sich unter dieser Perspektive als einseitige Relevanzsetzung des funktionalen Fortgangs der Wissensvermittlung auf Basis einer „gelungenen" Interaktionsstruktur beschreiben. Folge hiervon kann sein, dass auch inhaltlich-mathematisch hochwertige Beiträge von Schülerinnen und Schülern, ob ihrer Abweichung vom „Lehrerplan", als unpassend bewertet werden.

Vergleicht man die hier dargestellten Analyseergebnisse mit Erkenntnissen der Unterrichtsforschung, so kann konstatiert werden, dass sich auch bei handlungsentlasteten Lehrkräften eine Priorisierung der Sicherung des Interaktionsverlaufes bzw. der Zielsetzung des Unterrichtsgespräches zu Ungunsten der Würdigung von Schülerbeiträgen abzeichnet, die zunächst so nicht erwartet wurde. Eine Folge dieser scheinbar sehr stark ausgeprägten Relevanzsetzung von Lehrpersonen könnten Zurückweisungen von Schülerbeiträgen sein, die zwar mathematisch gehaltvolle Ansätze beinhalten, jedoch einen hohen kommunikativen Aufwand im Stundenverlauf nach sich ziehen. Betrachtet man die Partizipation als Bedingung für die Möglichkeit des Lernens, könnte darüber hinaus ein weiterer negativer Aspekt der Ausschluss von Lernenden mit solchen unpassenden Beiträgen sein, der sich im zeitlichen Verlauf eventuell verfestigen kann.

**Dank.** Das Projekt INTERPASS wird mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert (Förderkennzeichen 01jc1112; Projektleitung S. Prediger & U. Quasthoff).

## Literatur

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion "learning-as-participation" in everyday situations of mathematics classes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 43*(1/2), 81 - 90.

Prediger, S., & Erath, K. (2014). Content or interaction, or both? Synthesizing two German traditions in a video study on learning to explain. Eingereicht.

Prediger, S; Quasthoff, U.; Vogler, A.-M. & Heller, V. (in Vorbereitung). How to determine what teachers should learn? Five steps for content specification of professional development programs, illustrated for the exemplary content "moves which support participation".

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sherin, M. G. (2007). The Development of Teachers' Professional Vision in Video Clubs. In R. Goldman, R. Pea, B. Barron & S. J. Derry (Hrsg.), *Video Research in the Learning Siences* (S. 383-395). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Maike VOLLSTEDT, Berlin, Rudolf STRÄSSER, Gießen

# Zum Sinn der Geometrie: Spekulationen über einen vernachlässigten Forschungsgegenstand

## Sinn und Lernen

Geht man von dem wohlbekannten „didaktischen Dreieck“ von Mathematik – Lehrer(in) – Lernende(r) aus (für eine kommentierende Erweiterung vgl. Rezat & Sträßer, 2012), so erweist sich Didaktik der Mathematik als eine Humanwissenschaft, in der die Frage nach Sinn und Bedeutung des Lehrens und Lernens höchst angemessen ist. Verschiedenste Stellen in der Literatur verweisen darauf, dass Lehr-Lernprozesse dann erfolgreich und nachhaltig sind, wenn sich das Gefühl von subjektivem Sinn einstellt (z. B. Gebhard, 2003). Die Konstruktion von Sinn wird damit, zumindest aus der Perspektive der Lernenden, zum wichtigsten Gütekriterium für die Unterrichtsgestaltung (Meyer, 2008).

Allerdings gibt es kein allgemein geteiltes Verständnis darüber, was unter Sinn zu verstehen ist. Kilpatrick, Hoyles und Skovsmose (2005, 14) stellen fest: “Even if students have constructed a certain meaning of a concept, that concept may still not yet be ‘meaningful’ for him or her in the sense of relevance to his/her life in general.” In der Literatur zeigt sich eine Mischung philosophischer und nicht-philosophischer Interpretationen, wobei in der Regel zwischen individuellem Sinn (der Frage nach individueller Relevanz) und objektivem Sinn (gesellschaftlich geteilte Bedeutung) unterschieden wird (vgl. z. B. Howson, 2005). Wir gehen im Folgenden von einem Sinnbegriff aus, der die persönliche Relevanz eines Objekts oder einer Handlung in den Mittelpunkt der Betrachtungen stellt (für dieses Verständnis vgl. Vollstedt, 2011) und nehmen damit vor allem die Perspektive der Schülerinnen und Schüler ein. Dabei nähern wir uns der Frage nach dem Sinn (hier der Geometrie) unter zwei Perspektiven, nämlich einmal durch theoretische Überlegungen, zum anderen aber auch unter Nutzung empirischer Ergebnisse (insbesondere aus Vollstedt, 2011). Dort ergaben sich in einer explorativen Interview-Studie mit qualitativen Methoden die folgenden sieben Sinnkonstruktionstypen: „Erfüllung gesellschaftlich geprägter Anforderungen“, „Aktive Auseinandersetzung mit Mathematik“, „Effiziente und unterstützende Gestaltung von Unterrichtsprozessen“, „Kognitive Selbstentwicklung“, „Anwendungsrelevanz“, „Wohlbefinden durch eigene Leistung“ und „Emotional geprägte Entfaltung“. Ein Blick zurück auf das didaktische Dreieck legt noch nahe, dass zwischen dem Sinn für Lernende und dem für Lehrende zu unterscheiden ist (vgl. auch Meyer, 2008).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1263–1266). Münster: WTM-Verlag

## Fundamentale Ideen, Grundbegriffe und Grundvorstellungen

Nicht nur in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik werden Konzepte untersucht, die das Umfeld des Sinn-Begriffes markieren, sich aber von diesem durchaus abgrenzen lassen. Bruner (1960) führte den Begriff der *fundamentalen Ideen* in die pädagogisch-didaktische Diskussion, der dann von Schreiber wie folgt charakterisiert wurde: Fundamentale Ideen zeichnen sich durch „Weite (‚logische' Allgemeinheit)", „Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen)" und „Sinn (Verankerung im Alltagsdenken)" aus (Schreiber, 1983 zit. nach Bender, 1983; weitere Überlegungen in Schweiger, 2006 und Rezat, 2012). Zentral ist dabei, dass der Blick nicht primär auf einzelnen Fakten ruht, sondern die Struktur des Faches ersichtlich wird. Diese Orientierung einerseits sowie die Anwendungsmöglichkeit in der Welt kann Sinn sein und enthält eine individuell-subjektive Komponente (vgl. auch Birkmeyer et al., in Vorbereitung). Davon unterschieden sind *Grundbegriffe*, die zentralen Begriffe der einzelnen mathematischen Gebiete (für die Geometrie z. B. Punkt, Gerade, Körper). Sie haben eine gewisse Nähe zum Konzept der Bedeutung, bestimmen vor allem das Gerüst einer Wissenschaft und können, müssen aber nicht persönlich bedeutsam sein. Das in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik verbreitete Konzept der *Grundvorstellungen* sucht Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und individueller Begriffsbildung herzustellen. Hier geht es u. a. um „Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen" und die „Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit" (vom Hofe, 1995, 97). Mit Hilfe von Grundvorstellungen kann Sinn folglich durch Verknüpfung mit vertrauten Konzepten und durch deren Anwendungsmöglichkeit in der Welt entstehen. Auch für Grundvorstellungen gilt wiederum, dass sie mehr nach einer allgemeinen Bedeutsamkeit einer Vorstellung fragen und weniger die individuellen Sinnkonstruktion, also die persönliche Relevanz eines Objekts oder einer Handlung in den Mittelpunkt der Betrachtungen stellen.

## Spekulationen über den Sinn der Geometrie

Wir wollen nun der Frage nach dem Sinn speziell der Geometrie nachgehen. Die Geometrie scheint uns für eine erste Bearbeitung der Sinn-Frage deshalb geeignet, weil sie in der von uns wahrgenommenen Welt allgegenwärtig ist und in der Schule eine Gelegenheit zum Argumentieren und Beweisen bietet. Weiterhin ermöglichen kreative Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (oder heutzutage Dynamischer Geometrie-Software) umfassende und bedeutsame Eigentätigkeiten der Lernenden und lassen die Schönheit der Mathematik erfahrbar werden.

In der Literatur finden sich nun einige Hinweise auf den Sinn der Geometrie (in der Bedeutung von persönlicher Relevanz von Objekten und/oder Handlungen). Insbesondere hat Bender (1983) mit einer Liste „Zentrale[r] Ideen der Geometrie für den Unterricht“ Vorarbeiten geleistet. Er führt dabei drei Dimensionen des Sinns von Geometrie weiter aus: die „praktische Nutzung von Geometrie“ (z. B. in Prozessen der Passens unter Nutzung von Symmetrie, bei der Optimierung sowie beim Messen, 11-12), die Rolle der Geometrie für die „Repräsentation und Visualisierung“ von Gegenständen und Beziehungen (13), vergisst aber auch nicht den „theoretische(n) Wesenszug“ der Geometrie (z. B. bei der Bearbeitung von Konzepten wie Kontinuität und Invarianz, 14-15). Hier finden sich bereits eine Fülle von Kandidaten für die persönliche Relevanz geometrischer Konzepte und Tätigkeiten.

Auf eine andere Zugangsweise zum Sinn der Geometrie sei nun durch die Theorie der *embodied cognition* verwiesen (vgl. z. B. Núñez, 2000, insbesondere S. 11ff). Mit den Vorstellungen von “image schemas“ und “conceptual metaphors“ eröffnet Núñez einen Zugang zum Sinn der Geometrie über allgemeinere, die Geometrie umfassende Vorstellungen, wobei sich geometrische, speziell topologische Beziehungen wie das “container schema” mit seinen drei Teilen Inneres (“interior”), Grenze (“boundary”) und Äußeres (“exterior“) als fundamental für die menschliche Erfahrung von Welt erweisen.

**Ausblick: Empirische Studie zum Sinn der Geometrie**

Für empirische Studien zum Sinn der Geometrie sei zunächst noch einmal daran erinnert, dass eine Unterscheidung zwischen dem Sinn der Geometrie für Lehrend und dem für Lernende zu unterscheiden ist (vgl. die unterschiedlichen „Landkarten“ in dem einschlägigen Text von Andelfinger, 1988, 170f). Dies muss in einem Forschungsansatz berücksichtigt werden.

Ansonsten bietet sich beim gegenwärtigen Forschungsstand ein rekonstruktives Vorgehen an. Möglicherweise nach Art eines Grounded-Theory-Ansatzes sollte das Betreiben von Geometrie beobachtet werden und dann – mit Hilfe von nachträglichem lauten Denken (*stimulated recall*) – der individuelle Sinn von Geometrie rekonstruiert werden. Ist es gelungen, durch theoretische Überlegungen einschlägige Situationen zu identifizieren, so kann man auch versuchen, den Sinn von Geometrie über fokussierte Interviews zu erfassen.

Alternativ zu einem rekonstruierenden Verfahren kann man natürlich auch ein theoriegeleitetes Vorgehen versuchen. Möglicherweise auf der Grundlage bestehender Überlegungen (wie z. B. in Vollstedt, 2011) könnte man eine geometriespezifische Ausdifferenzierung bestehender Theorie zur Sinnkonstruktion versuchen, um der persönlichen Relevanz geometrischer Begriffe und Verfahren auf die Spur zu kommen.

## Literatur


Andelfinger, B. (1988). *Geometrie*. Soest: Soester Verlagskontor.

Bender, P. (1983). Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 1983*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker. 8-17.

Birkmeyer, J., Combe, A., Gebhard, U., Knauth, T. & Vollstedt, M. (in Vorbereitung). Lernen und Sinn: 10 Grundsätze zur Ermöglichung von Sinn in schulischen Bildungsprozessen. In: U. Gebhard (Hrsg.). *Sinn im Dialog*. Heidelberg: Springer VS.

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Gebhard, U. (2003). Die Sinndimension im schulischen Lernen: Die Lesbarkeit der Welt. In B. Moschner, H. Kiper, & U. Kattmann (Hrsg.), *PISA 2000 als Herausforderung. Perspektiven für Lehren und Lernen* (205-223). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Howson, A. G. (2005). "Meaning" and School Mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Hrsg.), *Meaning in Mathematics Education* (17-38). New York: Springer.

Kilpatrick, J., Hoyles, C., & Skovsmose, O. (2005). Meanings of 'Meaning of Mathematics'. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Hrsg.), *Meaning in Mathematics Education* (9-16). New York: Springer.

Meyer, M. A. (2008). Unterrichtsplanung aus der Perspektive der Bildungsgangforschung. In M. A. Meyer, M. Prenzel, & S. Hellekamps (Hrsg.), *Sonderheft Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Perspektiven der Didaktik* (10. Jg, 117-137). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Núñez, R. E. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakahara, & M. Koyama (Hrsg.), *Proceedings of PME 24* (Bd. 1, 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

Rezat, S. (2012). Fundamental ideas: A means to provide focus and identity in didactics of mathematics as a scientific discipline? In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of PME 36* (Bd. 4, pp. 3-10). Taiwan: PME.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From triangle to tetrahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 44*(5), 641-651.

Schweiger, F. (2006) Fundamental ideas. A bridge between mathematics and mathematics education. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), *New mathematics education research and practice* (63-73). Rotterdam: Sense.

Vollstedt, M. (2011). *Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong: Eine rekonstruktiv-empirische Studie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Rudolf VOM HOFE, Bielefeld

# Primäre und sekundäre Grundvorstellungen

Es ist unbestritten, dass ein verständiges Umgehen mit mathematischen Begriffen und Verfahren die Ausbildung adäquater Grundvorstellungen erfordert. Sie sollen abstrakte Begriffe auf einer anschaulichen Ebene repräsentieren und so eine Verbindung zwischen reinem Zahlenrechnen und außer- und innermathematischen Anwendungszusammenhängen ermöglichen.

Die Tragweite von Grundvorstellungen ist jedoch nicht unbegrenzt. Wenn neue Felder der Mathematik betreten werden, können alte, vertraute und bislang erfolgreiche Vorstellungen an ihre Grenzen stoßen; die entsprechenden mathematischen Inhalte bedürfen dann neuer Interpretation und Sinngebung. Wird eine geordnete Erweiterung des Grundvorstellungsgefüges nicht erreicht, so können alte intuitive Annahmen zu unbewusst wirksamen Fehlvorstellungen werden und das Verständnis neuer mathematischer Inhalte beeinträchtigen. So kann etwa die Annahme, dass ein Produkt stets größer sei als beide Faktoren - eine Vorstellung, die aus dem Rechnen mit natürlichen Zahlen stammt - bei den Bruchzahlen zu erheblichen Konflikten führen (vgl. Wartha & vom Hofe, 2005).

Im Laufe der Schulzeit werden *primäre* Grundvorstellungen, d. h. solche, die ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen aus der Vorschulzeit haben, immer mehr durch *sekundäre* Grundvorstellungen ergänzt, die aus der Zeit mathematischer Unterweisung stammen. Während erstere den Charakter von konkreten Handlungsvorstellungen haben, handelt es sich bei letzteren um Vorstellungen, die zunehmend mit Hilfe von mathematischen Darstellungsmitteln wie der Zahlengeraden, dem Koordinatensystem oder symbolischen Darstellungen repräsentiert werden. Diese Entwicklung soll im Folgenden am Beispiel der negativen Zahlen konkretisiert werden.

## Von den natürlichen zu den negativen Zahlen

Welche der alten und vertrauten Grundvorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen sind in den negativen Zahlen weiterhin tragfähig? Welche müssen revidiert bzw. erweitert werden? Und welche müssen neu hinzukommen?

Betrachten wir zunächst die Grundvorstellungen, die charakteristisch für das Rechnen mit natürlichen Zahlen sind.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1267–1270). Münster: WTM-Verlag

Die wichtigsten Vorstellungen von natürlichen Zahlen konkretisieren sich im kardinalen (Wie viel sind es?) und ordinalen (Der wievielte ist es?) Zahlaspekt. Für die Anwendung ist vor allem der kardinale Aspekt von Bedeutung. Die dominanten Vorstellungen der Grundrechenarten sind das Zusammen- oder Hinzufügen (Addition), das Wegnehmen oder Abtrennen (Subtraktion), das sukzessive oder simultane Vervielfachen (Multiplikation) und das Verteilen oder Aufteilen (Division).

All diese elementaren Deutungen von Zahlen und Operationen sind nicht nur anschaulich – z. B. durch Bilder oder Graphiken – repräsentierbar, sondern sogar gegenständlich realisierbar. Man kann in diesem Sinne von einer *Realisantenebene* unterhalb einer *Repräsentantenebene* sprechen. Zahlen sind dabei als konkrete Dingmengen realisierbar, Verknüpfungen als durchführbare Handlungen.

| |
|---|
| Zahlen |
| Repräsentanten |
| Realisanten |

Die Entstehung dieser elementaren Vorstellungen wurzelt in einer Vielzahl unterschiedlicher Handlungserfahrungen, die das Kind spielerisch erworben hat, weit vor einer systematischen Beschäftigung mit Mathematik, es handelt sich daher um primäre Grundvorstellungen.

Nun hängt der Grad der Ausbildung von Grundvorstellung zum einen vom Umfang der zugrundeliegenden Handlungserfahrungen ab und zum anderen von der Häufigkeit ihrer Aktivierung. Beides ist bei elementaren primären Vorstellungen in hohem Maße gegeben, daher besitzen sie eine hohe Stabilität und sind von großer Robustheit gegenüber Änderungen von außen.

Wie sehen nun adäquate Grundvorstellungen für negative Zahlen aus und welche Darstellungen eignen sich als Vorstellungsgrundlage?

Während sich die Vorstellungen der natürlichen Zahlen über jahrelange vielfältige reale Handlungen entwickeln, fehlt für die negativen Zahlen eine ähnliche Handlungsgrundlage. Zwar gibt es Vorerfahrungen aus dem Alltag, wie negative Temperaturen oder Kontostände, das systematische Rechnen mit negativen Zahlen ist jedoch ein Produkt mathematischer Unterweisung. Typische Anwendungsfelder sind lineare Systeme, die nach beiden Seiten unbegrenzt sind. Die wichtigste Zahlvorstellung ist nicht mehr die kardinale, es geht nicht um das Abzählen von Dingmengen; vielmehr geht es darum, Zustände oder Änderungen innerhalb eines Systems zu beschreiben.

Eine gegenständliche Repräsentation auf Realisantenebene ist bei den negativen Zahlen nicht möglich. Zwar lassen sich auch hier die Strukturen Zustand-Änderung-Zustand bzw. Änderung-Änderung-Änderung darstellen, Zahlen und Operationen beschreiben dabei jedoch nicht konkrete Dingmengen oder Gegenstände, sondern Zustände und Zustandsveränderungen innerhalb eines Systems. Während sich dabei etwa die Multiplikation einer negativen mit einer positiven Zahl noch darstellen lässt, gibt es für die Multiplikation zweier negativer Zahlen in diesen Kontexten keine sinnvolle Deutung. Zum Aufbau entsprechender Grundvorstellungen sind Kontexte dieser Art daher nur begrenzt geeignet.

## Geometrische Objekte als neue Vorstellungsgrundlage

Eine Möglichkeit für eine umfassende und tragfähige Vorstellungsgrundlage finden wir hingegen auf der Zahlengeraden, kombiniert mit einem entsprechenden Pfeilmodell. Wenngleich dieses Modell abstrakter ist als gegenständliche Modelle, so knüpft es doch auch an anschauliche Erfahrungen an, da Zahlengerade und Pfeile bereits aus der Grundschule bekannt sind. Es handelt sich hier um sekundäre Vorstellungen, die bereits im Kern angelegt sind und an dieser Stelle weiter ausgebaut werden können. Sowohl die Zahlen als auch die Addition und die Multiplikation mit einem positiven Faktor können hierbei naheliegend und leicht dargestellt werden. Erklärt man die Multiplikation mit (–1) als Operation, die einen Zustand bzw. einen vom Nullpunkt ausgehenden Pfeil invertiert, d. h. am Nullpunkt spiegelt, so lässt sich die Multiplikation allgemein als Kombination aus Strecken bzw. Stauchen und Spiegeln umfassend geometrisch deuten. Diese Interpretation kann zum einen plausibel motiviert werden und ist zum anderen auch bei weiteren Inhalten der folgenden Jahrgangsstufen tragfähig (vgl. Griesel et al., 2012; Fast & vom Hofe, 2014).

Auch bei der Erklärung der Subtraktion und Division kann eine bereits seit der frühen Grundschulzeit angelegte Idee helfen, die hier eine neue Bedeutung gewinnt: Die Idee des Rückwärtsrechnens bzw. der Gegenoperation: Eine Subtraktion ist nichts anderes als die Addition der Gegenzahl, eine Division nichts anderes als die Multiplikation mit dem Kehrwert. Ohne dass dies bewusst thematisiert oder problematisiert werden muss, wird hier den bisherigen Operationen Subtraktion und Division ein neuer Stellenwert zugewiesen: Sie werden bei den rationalen Zahlen als eigenständige Operationen eigentlich nicht mehr benötigt, da nun das Operieren mit den inversen Elementen möglich ist (vgl. vom Hofe & Hattermann, 2014).

Insgesamt können wir damit zur Entwicklung von Grundvorstellungen für negative Zahlen Folgendes festhalten:

- Die Einführung der negativen Zahlen erfordert Erweiterungen bzw. Modifizierungen der bisherigen Grundvorstellungen.
- Diese Erweiterungen verlangen zunehmend die Integration von sekundären Grundvorstellungen.
- Charakteristisch hierfür sind nicht mehr reale, sondern vorgestellte Handlungen an mathematischen Darstellungsmitteln (z. B. Bewegungen auf der Zahlengeraden oder im Koordinatensystem).
- Für die Darstellung der negativen Zahlen bietet sich die Geometrie als angemessene Vorstellungsgrundlage an: Die Begriffe Zahlengerade, Pfeil und Spiegelung sind abstrakter als gegenständliche Modelle, dennoch werden diese bereits in der Grundschule angelegt.
- Über die ebenfalls bereits angelegte Idee des Rückwärtsrechnens bzw. der Gegenoperation wird das Pfeilmodell zu einer umfassenden Vorstellungsgrundlage.
- Dieses Modell verkörpert gleichzeitig tragfähige mathematische Strukturen (inverse Elemente, eindimensionaler Vektorraum) und bereitet somit weiteres mathematisches Lernen vor.

Dies alles sind Gründe, neben anschaulichen Spielen und alltagsnahen Modellen das Pfeilmodell als umfassende und allgemeine Vorstellungsgrundlage anzubieten und dadurch die Ausbildung von sekundären Grundvorstellungen zu flankieren.

## Literatur


Fast, V. & vom Hofe, R. (2014). Das Pfeilmodell als Vorstellungsbasis für negative Zahlen. In: *mathematik lehren,* 183, S. 20 - 24

Griesel, H.; Postel, H. & vom Hofe, R. (2012). *Mathematik heute*. Braunschweig: Schroedel

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum

vom Hofe, R. & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. In: *mathematik lehren,* 183, S. 2 - 7

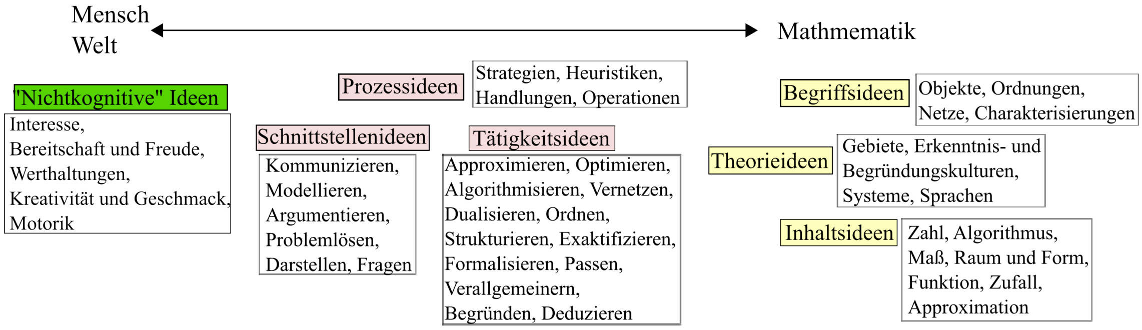
Wartha, S. & vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. In: *mathematik lehren,* 128, S. 10 – 17

Marie-Christine VON DER BANK, Saarbrücken

# Fundamentale Ideen – (Weiter)Entwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung

## 1. Fundamentale Ideen im Spannungsverhältnis *Mensch/Welt – Mathematik*

Seit der deutschen Übersetzung des Buches „The Process of Education" von BRUNER wird das Konzept der Fundamentalen Ideen erneut in der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Forschung diskutiert (vgl. von der Bank 2013). Auffällig ist dabei, dass Fundamentalen Ideen in fast allen Forschungsarbeiten eine große Bedeutung bei der lebensweltlichen Verankerung von Mathematik zukommt. BENDER und SCHREIBER sprechen von „Sinn" (Bender/Schreiber 1985), SCHWEIGER von „Archetypen" (Schweiger 2010) und HEYMANN von „Stiftung kultureller Kohärenz" (Heymann 1995). Das so in den Fokus rückende Spannungsverhältnis *Mensch/Welt – Mathematik* kann durch den Ideenkatalog von LAMBERT in ganzer Breite ausgefüllt werden (Lambert 2012). Sein Ideensystem leitet sich zum einen aus schon bestehenden Ideenkatalogen ab und gliedert diese stärker in abstrakt(er)e Ideenkategorien wie Begriffs-, Theorie-, Prozess- und „Nichtkognitive" Ideen und konkret(er)e Ideenkategorien wie Inhalts-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen (vgl. von der Bank 2013). Zum anderen schließt es mit den „Nichtkognitiven" Ideen eine Auslassung im bisherigen Forschungsstand. Diese Ideenkategorien werden somit zur theoretischen Basis für die im Folgenden vorgestellte unterrichtliche Nutzung Fundamentaler Ideen.




Im genannten Spannungsverhältnis lassen sich die Begriffs-, Inhalts- und Theorieideen auf der Seite *Mathematik* verorten. Begriffs- und Inhaltsideen enthalten mathematische Inhalte verschiedener Gebiete und Ideen, die bei mathematischen Begriffen bedeutsam sind, wie beispielsweise die Objekte, die diese Begriffe definieren und deren Ordnungen zu (Begriffs-)Netzen. Diese beiden Ideenkategorien dienen also einer direkten Beschreibung und Ordnung von Mathematik. Gebiete und Erkenntnis- und Begründungskul-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1271–1274). Münster: WTM-Verlag

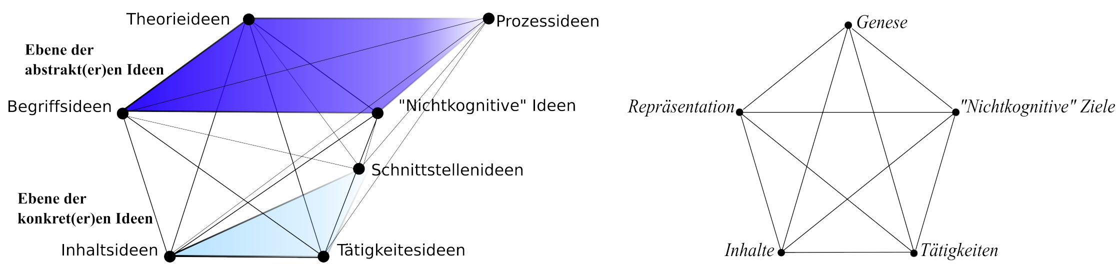
turen, die in den Theorieideen zusammengefasst sind, beschreiben hingegen nicht in erster Linie Inhalte von Mathematik sondern deren Rahmen. Sie enthalten wissenschaftshistorische Veränderungen und bildungspolitische Einflüsse auf Mathematik. Bspw. unterliegt es einem stets wandelbaren wissenschaftlichen Zeitgeist, bestimmte Inhalte zu Gebieten zusammenzufassen und einem bildungspolitischen Zeitgeist, aus den Gebieten der Mathematik jene für den Mathematikunterricht auszuwählen. Auch der geforderte Grad von Strenge bei Begriffsdefinitionen oder Beweisen kann sich verändern (Bsp. Strukturmathematik). Die Theorieideen liegen daher auf einer Meta-Ebene, die sowohl Begriffsideen als auch Inhaltsideen beeinflusst.

Bei den Theorieideen deutet sich schon der Einfluss der Seite *Mensch/Welt* auf die Seite *Mathematik* an. Das direkte Zusammenspiel dieser beiden Seiten wird in obigem Modell durch Prozess-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen beschrieben. Die abstrakt(er)en Prozessideen stehen dafür, dass (Nicht-)Mathematiker bei der Beschäftigung mit Mathematik typische Vorgehensweisen entwickeln, die sich in Strategien, Heuristiken, Handlungen und Operationen (als umkehrbar denkbare Handlungen) einteilen lassen. Schnittstellen- und Tätigkeitsideen umfassen den konkreten Umgang von Menschen mit Mathematik. Die Schnittstellenideen gehen dabei eher von der Mathematik aus, in dem Sinne, dass der Mensch ein konkretes mathematisches Problem löst und dazu modelliert, kommuniziert, fragt etc. Tätigkeitsideen sind (eher) umgekehrt gerichtet. Hier wirkt der Mensch auf Mathematik, indem er Operationen mit und auf mathematischen Inhalten (z. B. das Optimieren einer Zielfunktion) oder mit und auf Mathematik selbst (z. B. beim Formalisieren seines Sachverhaltes) ausführt.

Die „Nichtkognitiven" Ideen können auf der Seite *Mensch/Welt* eingeordnet werden. Diese Ideenkategorie ist der Diskussion um Fundamentale Ideen zumindest in solch expliziter Form neu und bedarf daher einer Begründung. Zunächst ist unstrittig, dass Mathematik und der Prozess des Mathematiktreibens (ob als Wissenschaft oder im Unterricht) nicht nur aus kognitiven Komponenten besteht. Bspw. stellte HARDY 1940 in seinem Buch „A Mathematician's Apology" heraus, dass zum Mathematiktreiben Kreativität und Geschmack - typische Ziele eines ästhetischen Faches - gehören. Er verglich damals Mathematiker mit Künstlern und Poeten, deren Aufgabe es sei, schöne Muster zu kreieren. Auch in (manchen) kompetenzorientierten Bildungsstandards spielen „Nichtkognitive" Aspekte eine Rolle, wie ein Blick in die österreichischen Standards für die AHS Oberstufe zeigt. Dort findet sich der „Schöpferisch-kreative Aspekt" von Mathematik, der Mathematik als Schule des Denkens, die Phantasie anregt und Kreativität fördert, betont (BMUKK 2004, S. 1). BRUNER wusste ebenfalls um die Bedeutung „Nichtkognitiver“ Ideen. Er weist darauf hin, dass es zusätzlich zum inhaltlichen Erfassen auch bestimmter Einstellungen, Freude beim Lernen und Kreativität beim Entdecken von Zusammenhängen bedarf, um einen Lerngegenstand ganzheitlich zu verstehen (vgl. von der Bank 2013, S. 102). Sich BRUNER anschließend haben andere Fachwissenschaften die Wichtigkeit „Nichtkognitiver“ Ideen längst erkannt und diskutieren sie in ihren Theorien Fundamentaler Ideen mit. Bspw. enthält der Ideenkatalog von SCHWILL, der für die Informatikdidaktik prägend ist, die Idee „Teamarbeit“ (Schwill 1993). Weiter findet sich im Vorschlag für Bildungsstandards für das Fach Informatik der GESELLSCHAFT FÜR INFORMATIK der Inhaltsbereich „Informatik, Mensch und Gesellschaft“, der einen verantwortungsvollen Umgang mit digitalen Medien und Daten enthält und so auf bestimmte Werthaltungen abzielt (GI 2008). Eine Betonung von „Nichtkognitiven“ Ideen ist aus diesen (hier nur unvollständig aufzählbaren) Gründen auch in der Mathematikdidaktik angebracht.

## 2. Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie

Die so entstandene Theorie ist für eine direkte unterrichtliche Nutzung zu komplex. Sie bedarf einer Reduktion auf ihren unterrichtspragmatischen Kern, bei der die Frage nach den wesentlichen Aspekten und Funktionen Fundamentaler Ideen im Unterricht leitend ist. Eine Antwort auf diese Frage ist, ganz in Sinne der Forschungstradition Fundamentaler Ideen, dass Fundamentale Ideen auch im Mathematikunterricht Vernetzungen ermöglichen sollen u. a. zwischen den Knoten dieses (in der Abbildung rechts stehenden) Vernetzungspentagraphen.




Die Knoten des Vernetzungspentagraphen können aus den oben vorgestellten Ideenkategorien wie folgt hergeleitet werden (vgl. von der Bank 2013).

Die eher abstrakten Prozessideen konkretisieren sich im Unterricht als Tätigkeiten, beispielsweise als Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten (Heuristiken) oder gezieltes Termumformen (Strategien). Weiterhin sind, ausgehend vom eingenommenen pragmatischen Standpunkt, Schnittstellenideen und Tätigkeitsideen zusammenzufassen. So entsteht der Knoten „*Tätigkeiten*“ aus Prozess-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen.

Der Knoten „*Inhalte*" umfasst die Inhaltsideen (als Konkretisierung mathematischer Gebiete) sowie inhaltliche Aspekte der Begriffsideen wie Objekte und deren Charakterisierung. Von den Begründungskulturen der Theorieideen gehören Beweise zum Knoten „*Inhalte*".

Im Mathematikunterricht spielt der Umgang mit Inhalten und Begriffen eine wichtige Rolle. Gemeint sind die Verwendung unterschiedlicher Darstellungsformen von Objekten und Begriffen aber auch wichtige Aspekte von Begriffsbildung wie zum Beispiel die Unterscheidungen zwischen Vorstellung und Darstellung, zwischen kognitiven Präferenzen bzw. Darstellungsebenen. Diese Aspekte leiten sich aus den Inhalts- und Begriffsideen ab und werden im Knoten „*Repräsentation*" zusammengefasst.

Um ein angemessenes Bild von Mathematik als Prozess und Produkt zu vermitteln, sollte an geeigneten Problemen und Lösungen auch auf deren Genese eingegangen werden. Die oben beschriebenen Einflüsse der Theorieideen auf Begriffs- und Inhaltsideen werden daher im Knoten *„Genese"* für den Unterricht wirksam gemacht.

„Nichtkognitive" Ideen enthalten im Wesentlichen *„Nichtkognitive" Ziele* von Unterricht und bilden daher diesen Knoten.

Der so entstandene Vernetzungspentagraph kann von Lehrpersonen als (individuelle) didaktische Brille zur Analyse von Vernetzungsmöglichkeiten, die in Unterrichtsmaterialien (beispielsweise Schulbüchern) vorhanden oder ausgelassen sind, genutzt werden. Dabei dienen die Knoten dem Erfassen der im Material angesprochenen Fundamentalen Ideen. Die Kanten ergeben sich aus Vernetzungen, die im analysierten Material zwischen den Knoten des Vernetzungspentagraphen angeregt werden. Solche Analysen sind anhand verschiedener Schulbücher in (von der Bank 2014) demonstriert.

## Literatur


von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler et al. (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Bericht über die 29. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Geometrie" vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83-124). Hildesheim: Franzbecker. Darin zitiert: (Bender/Schreiber 1985), (BMUKK 2011), (Heymann 1995), (Lambert 2012), (Schweiger 2010), (Schwill 2004).

von der Bank, M.-C. (2014). Vernetzung mit Diskreter Mathematik. Erscheint in U. Kortenkamp et al. (Hrsg.), *Diskrete Mathematik. Bericht über die 31. Arbeitskreistagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" vom 27. bis 29. September 2013 in Saarbrücken*. Hildesheim: Franzbecker. Darin zitiert (GI 2008).

Sebastian WARTHA, Christiane BENZ, Lukas FINKE, Karlsruhe

# Rechenstrategien und Zahlvorstellungen von Fünftklässlern im Zahlenraum bis 1000

## 1. Stand der Forschung

Flexibles Rechnen wird in allen mathematikdidaktischen Forschungsrichtungen als bedeutende Kompetenz angesehen und hat mittlerweile auch in vielen bildungspolitischen Dokumenten Eingang gefunden. Trotz unterschiedlicher Nuancen bei der Definition von flexiblem Rechnen bzw. der adaptiven Wahl von Rechenstrategien (vgl. Rathgeb-Schnierer & Green 2013) ist allen Untersuchungen gemein, dass neben dem Wissen von Grundaufgaben (*basic facts*) und dem Wissen über Rechengesetze der Zahl- und der Operationsvorstellung ein große Bedeutung eingeräumt wird. Threlfall (2002) weist darauf hin, dass das intuitive Erkennen (*noticing*) als Zusammenspiel von gegebener Aufgabe (Rechenoperation, Zahlen, Zusammenhang zwischen Zahlen) und verfügbarem Wissen um Grundaufgaben, Rechengesetzen und weiteren Konzepten wie z.B. Stellenwertverständnis den Lösungsweg bestimmt. Heirdsfield (2003) identifiziert in einer empirischen Wiederholungsstudie mit 41 Drittklässlern und 33 Viertklässler eine revidierte Version eines konzeptuellen Wissensnetzes bei erfolgreichen flexiblen Rechnern. Sie beschreibt ein Netzwerk aus Wissen über Zahlen (Zerlegung in Stellenwerte, Nähe zu anderen Zahlen), Wissen über Auswirkung von Operationen auf Zahlen und aus Wissen von auswendig gewussten Grundaufgaben und Strategien aus dem Zahlenraum bis 20. Der jeweils genutzte Rechenweg ist demnach nicht nur abhängig vom eingesetzten Zahlenmaterial der Aufgabe, sondern vor allem auch von den Voraussetzungen, die die Kinder mitbringen: dem Nutzen von Zahlbeziehungen und Aktivieren von Operationsvorstellungen. Im Zahlenraum bis 100 existieren einige Untersuchungen mit Grundschulkindern, die den Zusammenhang von Voraussetzungen und genutzten Rechenweg untersuchen und beschreiben (z.B. Rathgeb-Schnierer & Green 2013). Weniger erforscht ist jedoch der Zusammenhang von Voraussetzungen und adaptiver Strategiewahl im Zahlenraum bis 1000 mit älteren Kindern. Eine bereits ältere Untersuchung von Selter (2000) befragt zu drei Messzeitpunkten (Mitte und Ende der dritten und Beginn der vierten Jahrgangsstufe) längsschnittlich rund 100 Kinder zu jeweils sechs Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 1000. Bei jeweils fünf der sechs Aufgaben ist das Zahlmaterial so gewählt, dass bei entsprechender Aktivierung von Zahl- und Operationsvorstellungen die Aufgaben im Kopf z.B. über Hilfsaufgaben gelöst werden können. Selter (2000) weist eindrucksvoll nach, dass Rechenme-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1275–1278). Münster: WTM-Verlag

thode (schriftlich, gestützt oder im Kopf) und die Rechenstrategie in der Regel *nicht* adaptiv gewählt wird. Beispielsweise ist 701 − 698die Aufgabe, die über alle drei Messzeitpunkte am seltensten gelöst wurde. Interessant ist, dass die Aufgabe nicht nur besonders fehleranfällig ist, sondern meist über den schriftlichen Algorithmus oder über Strategien des Wegnehmens (z.B. schrittweise oder Stellenwerte extra mit den typischen Fehlern) bearbeitet wurde. Eine aufgabenadaptive Strategiewahl über Aktivierung von (ordinalen) Zahlvorstellungen (die Zahlen liegen nahe beieinander) und der passenden Grundvorstellung zur Subtraktion (Minus bedeutet auch Unterschiedsbestimmung) findet häufig nicht statt.

## 2. Fragestellung

Anknüpfend an den dargestellten Forschungsstand stellt sich einerseits die Frage, ob sich an den zentralen Ergebnissen der Selter-Studie in den letzten 12 Jahren grundsätzliches geändert hat. Die Hoffnung ist berechtigt, da in curricularen Vorgaben und Schulbüchern die Diskussion um die Wahl einer aufgabenbezogenen Rechenstrategie thematisiert wird. Darüber hinaus sollen Ursachen diskutiert werden, warum häufig eine adaptive Wahl der Bearbeitungsstrategie nicht vorgenommen wird bzw. werden kann. Am Beispiel der in 601 – 598 leicht geänderten Rechenaufgabe sollen mögliche Gründe beleuchtet werden, warum die Aufgabe *nicht* „schnell" gelöst wird:

(1) Können keine Zahlvorstellungen aktiviert werden (wird die „Nähe" nicht erkannt)?

(2) Ist die Grundvorstellung zur Subtraktion eingeschränkt auf ihre Bedeutung des Wegnehmens?

(3) Stehen andere Lösungswege zwar zur Verfügung, werden aber nicht gewählt aufgrund von Erfahrungen oder (geheimen) Vereinbarungen („mehr Fehler, wenn Kopfrechnen", „häufiger begründen müssen")?

Diese Fragen sollen im Rahmen einer empirischen Studie untersucht werden, die im Großraum Karlsruhe im Rahmen von (derzeit 13) wissenschaftlichen Hausarbeiten durchgeführt wird. Hierzu werden Lernende der fünften Jahrgangsstufe an Werkrealschulen in halbstandardisierten Einzelinterviews zur Bearbeitung der Subtraktionsaufgaben 723 – 376 und 601 – 598, sowie weiterer Fragen zu Zahl- und Subtraktionsvorstellungen aufgefordert. Gegenstand der Auswertung ist die Analyse der gewählten Rechenstrategie und -methode sowie die Untersuchung der aktivierten Zahl- und Operationsvorstellungen. Hierzu gehören die Frage nach alternativen Lösungswegen, die Frage nach passenden Rechengeschichten und der Zahl- und Strategiedarstellungen an geeigneten Materialien (ordinal: Rechenstrich oder Zahlenstrahl bzw. kardinal: Mehrsystemblöcke). Bei der

Auswertung wird beispielsweise unterschieden, ob adäquate Zahl- und Operationsvorstellungen spontan, auf gezielte Nachfrage oder gar nicht aktiviert werden können. Derzeit können die Ergebnisse von N = 313 Kindern aus 23 Klassen und 15 Schulen ausgewertet werden. Die Studie wird weitergeführt.

## 3. Erste Ergebnisse und Diskussion

Die Aufgaben 723 – 376 und 601 – 598 unterscheiden sich in der Lösungshäufigkeit nicht signifikant: gut 60 % der befragten Lernenden lösen die Aufgabe richtig, jedoch über unterschiedliche Methoden. Die häufigste gewählte ist bei beiden Aufgaben ein schriftlicher Subtraktionsalgorithmus. Bei 723 – 376 ist die Wahl erwartungsgemäß und es wählen 72 % eine schriftliche Methode. Bei 601 – 598 läge eine Bearbeitung im Kopf bei Aktivierung entsprechender Vorstellungen nahe, die Aufgabe wird aber von 49 % der Lernenden schriftlich und nur von 44 % im Kopf bearbeitet. Gestütztes Kopfrechnen spielt bei beiden Aufgaben kaum eine Rolle (10 % bzw. 7 %).

**Tabelle 1: Gewählte Rechenmethoden**

| | | 601 - 598 | | | | Gesamtsumme |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | im Kopf | gestützt | Schriftlich | am Material | |
| 723 - 376 | im Kopf | 43 | 2 | 7 | 0 | 52 |
| | gestützt | 17 | 12 | 2 | 0 | 31 |
| | Schriftlich | 73 | 8 | 142 | 0 | 223 |
| | am Material | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| Gesamtsumme | | 135 | 23 | 151 | 1 | 310 |

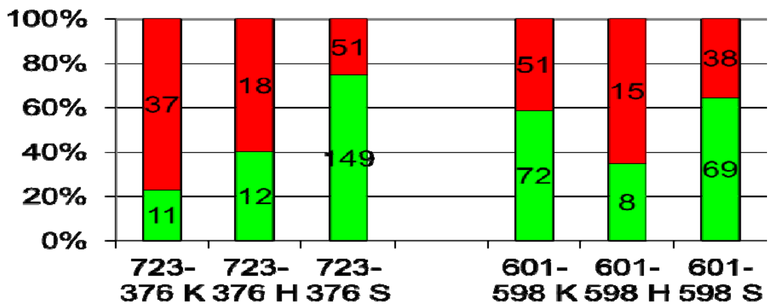
Die große Mehrzahl der Befragten wählt die Rechenmethode nicht in Abhängigkeit des verwendeten Zahlenmaterials: Die Hauptdiagonale in Tab. 1 listet alle Kinder auf, die bei beiden Aufgaben die gleiche Methode gewählt haben: Das sind 197 von 310 Kinder (64 %). Die nahe liegende adaptive Wahl bei entsprechenden Voraussetzungen (schriftliche Bearbeitung der Aufgabe 723 – 376 und 601 – 598 im Kopf) wird nur von 24 % der Befragten getroffen.

**Tabelle 2: Rechenstrategien bei 601-598**

| **Rechenstrategie 601 – 598 im Kopf und richtig gerechnet** | **∑ 72** |
|---|---|
| Ergänzen | 38 |
| Ergänzen (Schriftliches Verfahren im Kopf) | 8 |
| Wegnehmen (Hilfsaufgabe) | 5 |
| Wegnehmen (Schrittweise, Misch, Stellenw./Ziffern extra) | 21 |

Die Wahl einer adaptiven Strategie bei 601 – 598 gelingt gut der Hälfte der Kinder, die diese Aufgabe im Kopf und richtig löst: Nur 38 Kinder nutzen die Zahlennähe und die Grundvorstellung der Subtraktion als Differenz für eine Ergänzungsstrategie mit Zahlen. 5 Kinder der über 300 nutzen eine Hilfsaufgabe. Die anderen erfolgreichen Kopfrechner verwenden Wegnehmstrategien wie Stellenweise extra, Mischform und schrittweises Rechnen bzw. führen den schriftlichen Algorithmus vollständig im Kopf durch.

**Diagramm 1: Erfolgsquoten der verschiedenen Rechenmethoden**




Vordergründig kann die Dominanz des schriftlichen Algorithmus (auch bei der Ergänzungsaufgabe) über die Erfolgsquoten der Methoden begründet werden.

Bei beiden Aufgaben wird über den schriftlichen Algorithmus anteilig am häufigsten ein richtiges Ergebnis ermittelt. Als besonders fehleranfällig erweisen sich bei beiden Aufgaben halbschriftliche Methoden.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass nur einem Bruchteil der befragten Lernenden eine adaptive Wahl der Rechenmethode und –strategie gelingt (12 % wählen die Methode adaptiv und eine Ergänzungs- bzw. Hilfsaufgabenstrategie bei 601 – 598 und erhalten das richtige Ergebnis). In weiteren Auswertungen sollen die anderen oben genannten Fragestellungen systematisch untersucht werden.

## Literatur

Heirdsfield, A. (2003). Mental computation: Refining the cognitive frameworks. In Bragg, L., Campbell, C., Herbert, H. & Mousely, J., Eds. *Proceedings Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity,* 421-428, Geelong, Victoria.

Rathgeb-Schnierer, E. & Green, M. (2013). *Flexibility in Mental Calculation in Elementary Students from Different Math Classes.* http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG2/WG2_Rathgeb_Schnierer.pdf

Selter, Ch. (2000). Vorgehensweise von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21(3/4)*, 227–258.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50(1)*, 29-47.

Sebastian WARTHA, Karlsruhe

## Grundvorstellungen und schriftliche Rechenverfahren

Wird seitens der curricularen Vorgaben und des Anspruchs der Lehrperson gefordert, dass Inhalte nicht nur reproduziert, sondern auch *verstanden* werden, so bietet sich zur inhaltlichen Ausschärfung und Operationalisierung von „Verstehen“ das Konzept mathematischer Grundvorstellungen an. Grundvorstellungen ermöglichen die Übersetzung von Zahlen, Rechenoperationen und Bearbeitungsstrategien zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen – z.B. mathematisch-symbolischen Sprech- oder Schreibweisen, Bildern, Handlungen oder Rechengeschichten (vgl. Wartha & Schulz 2012). Ein Verständnis kann dann unterstellt bzw. untersucht werden, wenn arithmetische Prozesse nicht nur auf einer (z.B. der symbolischen) Darstellungsebene durchgeführt werden, sondern diese auch über die Aktivierung einer Grundvorstellung in eine andere übersetzt werden können (z.B. der Angabe einer passenden Rechengeschichte oder einer Handlung).

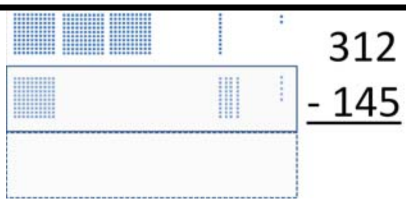
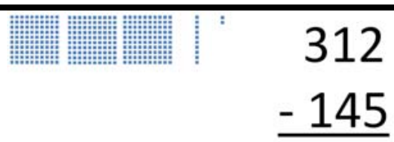
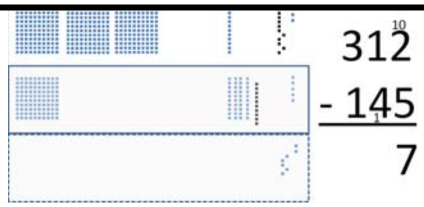
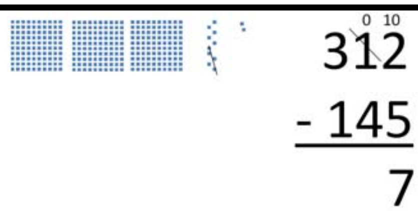
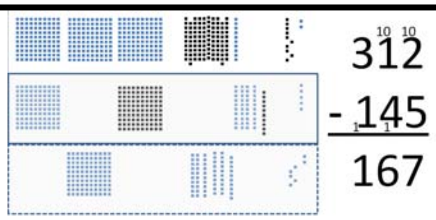
Gerade für Kinder, die Schwierigkeiten bei der Aktivierung adäquater Grundvorstellungen haben (z.B. Zahl als Position und Subtraktion als Unterschied bei der Aufgabe 601 − 598), stellt die Einführung der schriftlichen Rechenverfahren eine (scheinbare, aber) deutliche Erleichterung dar, da sich *Rechen*prozesse auf den Zahlenraum bis 20 beschränken und durch Befolgen des Algorithmus Fehler minimieren lassen. Der Vorteil der Beschränkung auf das Ziffernrechnen ist gleichzeitig ein Nachteil, da bei der Berechnung von Aufgaben auch in größeren Zahlenräumen *keine Aktivierung* von Zahlvorstellungen und Zahlzusammenhängen mehr nötig ist. Zudem wird ein Verständnis des Verfahrens zwar curricular erwartet, häufig jedoch nicht erworben.

Etabliert haben sich fünf Verfahren der schriftlichen Subtraktion, die sich einerseits in der Rechenrichtung (Abziehen oder Ergänzen) und andererseits in Techniken der Behandlung von Übergängen zwischen den Stellenwerten unterscheiden. Ist die Ziffer des Minuenden kleiner als die des Subtrahenden, so kann

1) von der nächsthöheren verfügbaren Stelle entbündelt und die Ziffer um 10 erhöht („Entbündeln“, auch missverständl. *Borgen* genannt).
2) der Subtrahend um 10 und der Minuend um 1 in der nächsthöheren Stelle gleichsinnig verändert werden („Erweitern“).
3) der Subtrahend bis zur gewünschten Ziffer weitergezählt und damit die nächsthöhere Stelle des Subtrahendens um 1 vergrößert werden („Auffüllen“).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1279–1282). Münster: WTM-Verlag

Die Strategien des Übertrags (1) und (2) können mit beiden Rechenrichtungen verknüpft werden, bei Auffüllen (3) muss die Subtraktion zwingend ergänzend interpretiert werden. Sollen die Verfahren durch die Übersetzung einer Handlung an didaktischem Material abgeleitet (und somit eine Grundvorstellung zum Algorithmus aufgebaut) werden, so sind diese Handlungen durch sehr verschiedene Aufgabenstellungen motiviert und völlig verschieden in der Durchführung. Stellvertretend werden die handlungsauslösenden Rechengeschichten und die auf die symbolische Notation führende Handlung an den Verfahren *Abziehen mit Entbündeln* sowie *Ergänzen mit Erweitern aufgezeigt*. Zu vereinbarende Konvention beim Arbeiten mit Geld ist, dass nur Stückelungen in Zehnerpotenzen betrachtet werden (max. also Hunderter). Beim Verfahren Ergänzen und Erweitern wird der Unterschied (und damit das Ergebnis) durch ein ergänzendes Legen der Differenz bei der „ärmeren“ Person ermittelt.

| *Ergänzen und Erweitern* | *Abziehen und Entbündeln* |
|---|---|
| Frederik hat 312 €, Klaus hat 145 €. Wie groß ist der Unterschied? | Hedwig hat 312 €. Sie gibt Volker 145 €. Wie viel hat sie noch? |
|  |  |
| 5 + ? = 2 geht nicht, also schenkt jemand Fred 10 E, Klaus 1 Z. | Sie kann ihm keine 5 E geben, also 1 Zehner in 10 Einer wechseln |
|  |  |
| 5Z + ? = 1 Z geht erst, wenn Fred 10 Z und K. 1 H erhalten. | Es können 4 Z erst dann weggenommen werden, wenn 1 H = 10 Z |
|  |  |
| Unterschied: 1 H, 6 Z, 7 E. | 10 Z – 4 Z = 6 Z, 2 H – 1 H = 1 H |

Um den schriftlichen Algorithmus des Ergänzens und Erweiterns zu erhalten, muss der Unterschied durch gleichsinniges Verändern ermittelbar gemacht werden (auch wenn andere Handlungsweisen zur Differenzbildung näher gelegen hätten). Bei der Übersetzung in eine Rechengeschichte sind die Vermögen der betrachteten Personen hierdurch erfreulicherweise jeweils um 110 € angewachsen, die gesuchte Differenz hat sich natürlich nicht verändert. Aus diesem Grunde sind Kontexte des Ergänzens (Klaus besitzt 258 €, der Fernseher kostet 412 €) unbrauchbar, da während der Handlung das Vermögen und der Preis des Fernsehers stets gleichsinnig angehoben werden – sehr unrealistisch.

Werden zu den Verfahren Grundvorstellungen aufgebaut, so geht deren Nutzen über das Verfügbarmachens einer universellen Rechenmethode deutlich hinaus: Es können vertiefte Einsichten in das Stellenwertsystem erlangt werden. Insbesondere das Subtrahieren nach dem Verfahren Abziehen mit Entbündeln mit Aufgaben, bei denen viele Nullen im Minuenden stehen sind hierzu hervorragend geeignet: Bei der Aufgabe 2 002 – 738 muss bereits im ersten Schritt ein Tausender fortgesetzt entbündelt werden, um genügend Einer zur Verfügung zu haben und die 8 Einer des Subtrahendens wegnehmen zu können. Nicht nur auf anschaulicher Ebene ist das eine große Chance, fortgesetztes Entbündeln im Stellenwertsystem zu wiederholen (1 T = 9 H, 9 Z, 10 E).

Derzeit ist in den meisten Bundesländern die Wahl des Subtraktionsverfahrens curricular nicht vorgegeben. Die Freigabe des Verfahrens hat zur Folge, dass an Grundschulen verschiedene (fünf) Subtraktionsverfahren unterrichtet werden. Im Rahmen einer empirischen Studie wurden im Großraum Karlsruhe Lernende aus 23 fünften Klassen von Werkrealschulen befragt, mit welchem Verfahren sie subtrahieren und die Anzahl der *verschiedenen* Verfahren pro Klasse ermittelt.

| Anzahl verschiedener Subtraktionsverfahren | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Anzahl Klassen | 4 | 7 | 10 | 2 |

In den meisten Klassen sieht sich die Lehrperson wenigstens zwei (7 von 23 Klassen), meistens sogar drei oder vier (12 von 23 Klassen) unterschiedlichen Verfahren konfrontiert. Wenn sie die Vorkenntnisse der Kinder (also das in der Grundschule gelernte Verfahren) berücksichtigt und nicht nur bei falschen Lösungen Grundvorstellungen (re)aktivieren möchte, so ist dies eine gewaltige Herausforderung. Da sich die Verfahren nicht nur in der Rechenrichtung, sondern vor allem in der Behandlung des Übertrags grundsätzlich unterschieden, ist eine Kommunikation im Klassenverband („Rechenkonferenz“) nicht oder nur höchst eingeschränkt möglich.

In Bezug auf Strategien des (gestützten) Kopfrechnens ist ein hohes Maß an Flexibilität gewünscht und die aufgabenangepasste Wahl der Rechenstrategie kann als Indikator für besonders hohe arithmetische Kompetenzen gewertet werden. Werden kulturhistorische Aspekte außer Acht gelassen, so scheint es wenig sinnvoll, Kindern mehr als ein Verfahren für die schriftliche Subtraktion an die Hand zu geben. Die Verfahren werden unabhängig vom Zahlenmaterial durchgeführt und der Vorteil des Wissens um ein zweites Verfahren ist verschwindend gering. Wenn kraft curricularer Vorschriften kein Verfahren vorgegeben ist, so liegt es in der Hand der Lehrperson oder der Fachkonferenz, sich auf ein Verfahren zu einigen. Entscheidungsgrundlage können folgende Fragen sein:

- Besteht der Anspruch, dass die Lernenden das Verfahren verstehen sollen, d.h., dass der Algorithmus nicht nur symbolisch, sondern z.B. auch durch eine Handlung durchgeführt werden kann?
- Soll die dem Verfahren zu Grunde liegende Situation und Handlung intuitiv sein, d.h. soll sich ein (schwacher) Lerner bei Unsicherheiten, wie der Algorithmus durchgeführt wird, durch eigene nahe liegende Überlegungen diesen (wieder) überlegen können?
- Kann die Lehrperson selbst den Algorithmus befriedigend auf verschiedenen Darstellungsebenen (z.B. Handlung) erklären?

Die Diskussion um das geeignete Verfahren (bzw. deren Freigabe) ist nicht neu (Ross & Pratt Cotter 2000; Padberg & Wittmann 2001). In o.g. Studie konnte nachgewiesen werden, dass die Fehlerquoten der Aufgabe 723 – 376 unabhängig von der Technik des Übertrags ist (N = 195): Bei Entbündelungsstrategien beträgt die Fehlerquote 20 %, bei Erweiterungs- & Auffüllstrategien 24 % [Unterschied ist statistisch nicht relevant $\chi^2(1, N = 196) = 0.205$, $p=.65$]. Wichtiger als die Frage nach der höheren Lösungshäufigkeit sollte für die Wahl des Subtraktionsalgorithmus allerdings sein, bei welchem Verfahren der Anteil der Kinder am höchsten ist, die eine Vorstellung hierzu aufgebaut haben. Ein Indikator hierfür kann die Übersetzung in Kontext und/oder Handlung sein. Hierzu sind weitere Auswertungen der Studie in Arbeit.

## Literatur

Padberg, F., & Wittmann, E.Ch. (2001). Freigabe des Verfahrens zur schriftlichen Subtraktion. *Die Grundschulzeitschrift.* 14 – 15.

Ross, S., & Pratt Cotter, M. (2000). Subtraction in the United States. *The Mathematics Educator, 10 (1),* 49 – 56.

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen.* Berlin: Cornelsen.

Christof WEBER, Christian RÜEDE, Christine STREIT, Basel

# Zur kategorialen Wahrnehmung von Fachdidaktikern und Lehramtsstudierenden bei der diagnostischen Beurteilung von Schülerdokumenten

Diagnose und Förderung stellen wichtige Komponenten professionellen Lehrerhandelns dar. Da das zugrundeliegende Handlungswissen aufgrund seines impliziten Charakters schlechter zugänglich ist als etwa Faktenwissen, kann versucht werden, sich ihm durch den Fokus auf *handlungsnahes Wissen* (Riese & Reinhold, 2010) anzunähern. Um erklären zu können, was derart handlungsnahes Wissen im Kontext von Diagnose und Förderung bedeutet, haben wir *Vignetten* entwickelt (Streit & Weber, 2013) und verschiedenen Experten – Mathematikdidaktikern, Fachmathematikern, Diagnostikern der Sonderpädagogik und Psychologie und Lehrerexperten – wie auch Novizen – Studierenden im Lehramt Grundschule – vorgelegt. In diesem Beitrag werden erste Ergebnisse zur Frage vorgestellt, welche Denkweisen und Vorstellungen der Kinder die beteiligten Fachdidaktiker und Novizen aufgrund der Schülerdokumente diagnostizieren.[1]

## 1. Diagnostische Beurteilung wird von Kategorien geleitet

Wie die Experten-Novizen-Forschung zeigt, fokussieren Experten in ihrer Wahrnehmung auf wenige Details, die sie zueinander in Beziehung setzen und hinter denen sie Prinzipien ausmachen (*Tiefenstruktur*, Chi et al., 1981). Novizen hingegen nehmen viele Details wahr, ohne sich immer einen Reim darauf machen zu können (*Oberflächenstruktur*, ebd.). Die Lehrerexpertise-Forschung legt nahe, dass insbesondere auch die Wahrnehmung von Lehrerexperten und -novizen von sehr unterschiedlichen Begriffen und Kategorien geleitet wird (Bromme, 1992; Bromme, 1997). Lehrerexperten und -novizen unterscheiden sich nicht zuletzt auch darin, wie sie beobachtbare Sachverhalte strukturieren. Damit ist *„die Wirkung des professionellen Wissens als eine Veränderung der kategorialen Wahrnehmung von Unterrichtssituationen“* (Bromme, 1997, S. 199) aufzufassen.

Entsprechend ist anzunehmen, dass auch Schülerdokumente nicht diagnostisch beurteilt werden können, ohne Kategorien heranzuziehen und sie *kategorial wahrzunehmen*. Welche Kategorien leiten nun aber die kategoriale Wahrnehmung von Experten respektive Novizen, wenn sie Schülerdokumente (im Hinblick auf deren Nutzung) diagnostisch beurteilen?

[1] Der Forschungsgruppe gehören – neben den Autoren – weiter Franco Caluori und Seline Heinrich (alle Pädagogische Hochschule Nordwestschweiz) an.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1283–1286). Münster: WTM-Verlag

## 2. Vignette „Zahlbilder legen und zeichnen“

Der Hintergrund der für diesen Beitrag verwendeten Vignette ist die Aufgabe, die Zahl 9 mit Plättchen zu legen und das gelegte Zahlbild anschließend abzuzeichnen. Unsere Vignette zeigte die Zahlbilder und die transkribierten Kommentare von acht Kindern (durchschnittlich 6;3 Jahre alt). Die erste, diagnostische Frage an die Experten und Novizen lautete wie folgt: *„Was können Sie aufgrund der Schülerdokumente und -interviews über die Denkprozesse und Vorstellungen der Kinder sagen?“* (In der zweiten Frage war die Weiterarbeit mit der ganzen Gruppe von Kindern in der anschließenden Schulstunde schriftlich zu skizzieren und zu begründen. Ihre Auswertung ist jedoch nicht Gegenstand dieses Beitrags.)

## 3. Auswertung der Vignettenbearbeitungen

In diesem Abschnitt werden erste Ergebnisse und Trends vorgestellt, die wir in den Antworten von acht Fachdidaktikern sowie sechs Novizen auf die diagnostische Frage feststellen.

Zur Anonymisierung wurden die Antworten in eine einheitliche Form gebracht. Anschließend wurden sie bezüglich der Argumentations- wie auch der Vorgehensweise untersucht, und zwar wie folgt:

a) „Wie wird in der Antwort argumentiert?“: In einem ersten Durchgang wurden alle vorkommenden mathematikdidaktischen Begriffe bestimmt und die Antworten in disjunkte Aussagen (Sinneinheiten) zerlegt. Aus diesen Sinneinheiten wurden induktiv fünf *Argumentationskategorien* gewonnen. Sie erlauben die Kategorisierung von nahezu allen Sinneinheiten:

| ***Bezeichnung der Argumentations-kategorie*** | ***Umschreibung der Argumentations-kategorie*** | ***Ankerbeispiel einer entsprechen-den Aussage (Sinneinheit)*** |
|---|---|---|
| **A1: „Beschrei-bung im weite-ren Sinne“** | Beschreibung, lehnt sich eng an Schülerdokumen-te an, ohne Fachbegriffe | *„Es macht zwei Kolonnen und gibt abwechslungsweise einen Punkt dazu. Sobald nur noch ein Punkt fehlt, setzt es diesen in die Mitte.“* |
| **A2: „Behauptung ohne Beleg“** | Interpretation ohne Beleg und ohne Fachbegriffe | *„Das Kind geht beim Legen der 9 so vor, dass es sich auf eine Vor-stellung stützt, die ihm bekannt ist.“* |
| **A3: „Aufzählung von Fachbegrif-fen“** | Interpretation ohne Beleg und mit Fachbegriffen | *„Es hat die Zahl Neun durch zäh-lendes Rechnen dargestellt.“* |

| | | |
|---|---|---|
| **A4: „Behauptung mit Beleg“** | Interpretation mit Beleg und ohne Fachbegriffen | *„Es gibt Kinder, die eine deutlich sichtbare Struktur wählen, die sie meist erklären können (mit einer Rechnung wie Marie oder Emilia)“* |
| **A5: „Belegte Verwendung von Fachbegriffen“** | Interpretation mit Beleg und mit Fachbegriffen | *„Simultane Erfassung einer Punktgesamtheit als figurierte Zahl: bei Emilia die 6 vom Würfel, bei Annalena die 9 als 3x3- Feld.“* |

Dabei sind zwei Tendenzen zu beobachten: Erstens belegen die Fachdidaktiker ihre Behauptungen fast durchwegs, indem sie sich auf konkrete Äußerungen oder Darstellungen der Kinder beziehen. Im Gegensatz dazu belegen die Novizen ihre Aussagen viel seltener. Zweitens brauchen die Fachdidaktiker in ihren Antworten entweder Fachbegriffe oder eigene sprachliche Fassungen von fachdidaktischen Konzepten. Die Novizen verwenden ebenfalls Fachbegriffe, die sich jedoch teilweise von den Fachbegriffen der Experten unterscheiden. Kurz: die Aussagen der Fachdidaktiker sind eher in den Argumentationskategorien A4 und A5 zu verorten, während die Aussagen der Novizen eher in die Kategorien A2 und A3 fallen.

b) „In welcher Reihenfolge wird vorgegangen?“: In einem weiteren Durchgang wurde jeder Antworttext auf die diagnostische Frage integral in einen Begriffsbaum übertragen, um das Vorgehen zu erfassen. Die entstandenen Begriffsbäume lassen sich vier *Vorgehenskategorien* zuordnen:

| ***Bezeichnung der Vorgehenskategorie*** | ***Umschreibung der Vorgehenskategorie*** | ***Ankerbeispiel einer entsprechenden Antwort*** |
|---|---|---|
| **V1: „Einzelbetrachtung nach vorgegebener Reihenfolge“** | Diagnose der einzelnen Schülerdokumente gemäß der vorgegebenen Reihenfolge | *„Kind 1: ..., Kind 2: ..., Kind 3: ..., Kind 4: ..., Kind 5: ..., Kind 6: ..., Kind 7: ..., Kind 8: ... .“* |
| **V2: „Einzelbetrachtung nach eigener Reihenfolge“** | Diagnose der einzelnen Schülerdokumente gemäß einer eigenen Reihenfolge | *„Kind 1: ..., Kind 7: ..., Kind 6: ..., Kind 5: ..., Kind 4: ..., Kind 2: ... Kind 3: ..., Kind 8: ... .“* |
| **V3: „Einzelbetrachtung nach vorgegebener Reihenfolge, dann Gruppierung“** | Diagnose der einzelnen Dokumente gemäß vorgegebener Reihenfolge, anschließend eigene Strukturierung | *„Kind 1: ..., Kind 2: ..., Kind 3: ..., ..., Kind 8: ... . Dabei gibt es zwei Typen: Kind 1, 4, 5, 7: ..., Kind 2, 3, 6, 8: ...“* |
| **V4: „Gruppenbetrachtung nach eigener Reihenfolge“** | Diagnose der gruppierten Schülerdokumente gemäß einer eigenen Strukturierung | *„Marie, Emilia, Annalena und Nele: ...; Simon und Moritz: ...; Niko: ... .“* |

Auch hier lassen sich erste Tendenzen erkennen: So machen viele unserer Novizen eine „Einzelbetrachtung nach vorgegebener Reihenfolge“ (V1), zeigen aber auch Ansätze eigener Strukturierungen (V2 und V3). Die meisten der befragten Fachdidaktiker hingegen machen eine „Gruppenbetrachtung nach eigener Reihenfolge“ (V4), einige wenige eine „Einzelbetrachtung nach vorgegebener Reihenfolge“ (V1). Experten könnten sich also dadurch auszeichnen, dass sie bei der Diagnose eher eigene Strukturierungen einsetzen als Novizen. Falls Novizen die vorgegebene Gliederung aufbrechen, dann nicht von Anfang an, sondern erst im Sinne eines Resümees.

## 4. Diskussion und Ausblick

Inwiefern die aufgefundenen Kategorien nicht bloß artifizielle Konstrukte, sondern relevant für die unterrichtliche Diagnose und Förderung sind, bleibt zu klären. Dass aber Lehrkräfte ihre Aussagen über Kinder belegen wenn nicht sogar begründen, versteht sich für eine Schule, die durch Einsicht und nicht durch Autorität überzeugen möchte, von selbst.

Als nächstes wird zu analysieren sein, ob die rekonstruierten Argumentations- und Vorgehenskategorien auch von anderen Expertengruppen – Fachmathematikern, Diagnostikern und Lehrerexperten – eingesetzt werden und inwiefern sie auszudifferenzieren sind. In einem weiteren Durchgang werden die Antworten inhaltlich („Was wird diagnostiziert?“) ausgewertet. Vor diesem Hintergrund können dann auch die Antworten auf die Frage nach der Weiterarbeit mit den Kindern in den Blick genommen werden. Dabei wird von besonderem Interesse sein, welche Folgen die unterschiedlichen Kategorien der kategorialen Wahrnehmung von Experten und Novizen für ihr unterrichtliches Planen und Handeln haben.

## Literatur

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte*. Bern: Hans Huber Verlag. [2014 neu aufgelegt im Waxmann Verlag, Münster]

Bromme, R. (1997). Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln des Lehrers. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Psychologie des Unterrichts und der Schule. Enzyklopädie der Psychologie* (Serie I, Bd. 3), Göttingen: Hogrefe, 177–212.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981). Categorization and Representation of Physics Problems by Experts and Novices. *Cognitive Science, 5*(2), 121–152.

Riese, J. & Reinhold, P. (2010). Empirische Erkenntnisse zur Struktur professioneller Handlungskompetenz von angehenden Physiklehrkräften. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaft, 16*, 167–187.

Streit, C. & Weber, C. (2013). Vignetten zur Erhebung von handlungsnahem, mathematikspezifischem Wissen angehender Grundschullehrkräfte. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM-Verlag, 986–989.

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

# Wohin, Warum und Wie? – Zum Einsatz digitaler Technologien im zukünftigen Mathematikunterricht

Vor- und Nachteile des Einsatzes digitaler Technologien und speziell des Einsatzes von Computer Algebra Systemen (CAS) im Mathematikunterricht werden weltweit kontrovers diskutiert. Im Folgenden wird der Frage nachgegangen, welche Bedeutung digitale Technologien (DT) in den nächsten Jahren und Jahrzehnten bekommen werden oder könnten. Es wird insbesondere gefragt, auf welchen aktuellen Erkenntnissen sich eine vorausschauende Antwort aufbauen lässt, und es sollen (einige) Thesen für die zukünftige Entwicklung aufgestellt werden.

## 1. Theoretische Grundlagen für den Einsatz DT (CAS)

Wir fragen zunächst einmal danach, auf welchen bewährten und weitgehend akzeptierten theoretischen Grundlagen wir heute im Hinblick auf den Einsatz DT aufbauen können. Ich sehe drei Theoriemodelle, die sich bewährt haben. Das ist zum einen die Einbettung DT in das „klassische" didaktische Dreieck „Lernende – Lehrende – Inhalte". DT können bzgl. dieser drei „Ecken" Lern-, Lehr- und Rechen-, Darstellungs- oder Kontrollmittel sein (vgl. Bichler 2010). Dabei wirkt sich der DT-Einsatz auch auf die Beziehungen zwischen den „Ecken" aus.

Die zweite theoretische Grundlage ist die „Instrumentelle Genese", die die Wechselbeziehung zwischen „Lernenden" und „Gerät" ausdrückt (vgl. Guin et al. 2005). Das Gerät beeinflusst das Denken des Benutzers, etwa durch neue numerische oder graphische Lösungsstrategien, und umgekehrt formt der Benutzer das Gerät, etwa durch die Konstruktion von Modulen, insbesondere in Form verallgemeinerter Funktionen.

Die dritte Theorie betrifft die Sichtweise der Mathematik als Darstellen, Operieren und Interpretieren und die These, dass im „klassischen" Unterricht das Operieren ein großes Übergewicht hat (Fischer & Malle 1985). Insbesondere CAS können kalkülhaftes Operieren übernehmen, wodurch sich die Möglichkeit ergibt, dass das begriffliche, konzeptuelle Wissen gegenüber dem prozeduralen Wissen stärker betont wird.

## 2. Hoffnungen und Enttäuschungen

In der *ersten* ICMI-Studie von 1986 mit dem Titel "The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching" (Churchhouse) wurde ein großer Enthusiasmus bzgl. der Entwicklungsperspektiven des

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1287–1290). Münster: WTM-Verlag

Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit neuer Technologien deutlich. Das hat sich auch in den NCTM-Standards von 1989 (bzw. 2000) in dem sog. „Technologie Prinzip“ fortgesetzt.

In der „Hattie-Studie“ (2013) wird dem Einsatz von Computern ein positiver Effekt zugeschrieben, wobei allerdings die Effektstärke (d = 0,37) gering ist, was zu einem „Rangplatz 71“ in einer Auflistung von 138 Faktoren resultiert, die die Qualität des Mathematikunterrichts beeinflussen.

Allerdings wird dann in der 17. ICME-Study mit dem Titel “Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain” (Hoyles & Lagrange 2010) an vielen Stellen die Enttäuschung deutlich, dass sich neue Technologien trotz zahlloser Ideen, unterrichtspraktischer Erfahrungen und Forschungsberichten zum Unterrichtseinsatz nicht in der Weise durchgesetzt haben, wie das viele zu Beginn der 1990er Jahr erwartet oder erhofft hatten.

**1. These**: Wir haben die Schwierigkeiten des Einsatzes DT (technisch und inhaltlich) im realen Unterricht unterschätzt. Lehrkräfte, Dozenten, Eltern konnten nicht – oder zu wenig – vom Mehrwert des Einsatzes DT überzeugt werden.

## 3. (Langfristige) Empirische Untersuchungen

Trotz zahlloser gut begründeter Unterrichtsvorschläge fehlt es an langfristigen Strategien der Integration DT in das Gesamtcurriculum und es fehlt an empirischen Überprüfungen von Langzeitwirkungen. In Weigand & Bichler (2010) wurde ein Kompetenzmodell für den Einsatz von Taschencomputern beim Verständnis von Funktionen entwickelt, das Stufen des Verständnisses des Funktionsbegriffs mit Arten des Werkzeugeinsatzes sowie verschiedenen Stufen der kognitiven Aktivierung in Beziehung setzt. Im Rahmen des seit 2005 laufenden $M^3$-Projekts zum Einsatz von Taschencomputern an bayerischen Gymnasien[1] (Bichler 2010) zeigte sich insbesondere, dass ohne eine hinreichende *Werkzeugkompetenz*, die viel mehr bedeutet, als das ledigliche technische Bedienen eines Rechners, sondern vor allem eine sinnvolle kontextgebundene Benutzung des Rechners bedeutet, keine höhere Stufe der kognitiven Aktivierung zu erreichen ist.

**2. These**: Die Frage nach dem positiven Effekt von DT lässt sich nur *bereichsspezifisch* im Rahmen *langfristiger* empirischer Untersuchungen beantworten. „Kompetenzmodelle“ ermöglichen dabei eine bereichsspezifische Planung und Bewertung.

---

[1] $M^3$ = **M**odellprojekt **M**edieneinsatz im **M**athematikunterricht

## 4. Abituraufgaben

Mit der folgenden Aufgabe begann das bayerische Abitur für CAS-Klassen im Mai 2013:

**1** Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,b}: x \mapsto ax \cdot e^{-bx^2}$ mit $a,b \in \mathbb{R}^+$.

**a)** Zeigen Sie, dass der Graph von $f_{a,b}$ punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

Parameterabhängige Funktionen sind wohl technisch einfach mit einem CAS darzustellen, die Bewältigung der damit einhergehenden Komplexität der Aufgabenstellung stellt allerdings eine kognitive Herausforderung dar, die vielen Aufgabenstellern nicht bewusst ist (war).

**3. These**: Die technischen Möglichkeiten DT stellen kognitive Herausforderungen an Lernende, die langfristig entwickelt werden müssen.

**4. These**: Das Erstellen von Prüfungsaufgaben im Rahmen einer *traditionellen* Klausurprüfung wird durch den Einsatz DT wesentlich erschwert. (Realitätsnahe) Modellierungsaufgaben und Aufgaben etwa zum entdeckenden Lernen sind wenig geeignet.

Mittlerweile wird in vielen Bundesländern in den Abiturprüfungen ein sog. hilfsmittelfreier Teil mit häufig kurzen Aufgaben zum mathematischen Grundverständnis integriert. Der Einsatz DT im Mathematikunterricht muss (oder sollte) dazu beitragen, dass Wissen und Fähigkeiten im Zusammenhang mit diesen Aufgaben besser entwickelt werden.

**5. These**: DT sind Anlässe, stoffdidaktische Aspekte – und damit die *didaktische (Sach-)Analyse* wieder stärker unter einem neuen Blickwinkel – zu betonen.

## 5. Lösungsdokumentationen

Es gibt verschiedene Vorschläge, aber keine einheitliche Strategie für die schriftliche Darstellung von Lösungen beim Arbeiten mit Taschencomputern. Es ist weiterhin offen, welche konstruktiven Hilfen Schülerinnen und Schülern gegeben werden können oder sollen und ob bzw. inwieweit der Einsatz des Taschencomputers aus der schriftlichen Darstellungen von Lösungen hervorgehen muss.

**6. These**: Wir benötigen Regeln für die Wechselbeziehung zwischen „digitalem“ und „traditionellem Arbeiten“, insbesondere für die schriftliche Darstellung (auf Papier oder digital) von Lösungen!

## 6. Beziehungshaltigkeit und Digitale Technologien

Ein Gesamtkonzept für den Einsatz digitaler Technologien hat verschiedene Aspekte zu berücksichtigen. So geht es insbesondere darum, die Beziehung herzustellen

- zwischen verschiedenen digitalen Werkzeugen wie Taschencomputern, Computern, Laptops, Smartphones, Whiteboards, Navigationssystemen in Klassenzimmern und dem Internet;
- zwischen traditionellen und digitale Materialien und Arbeitsmitteln;
- zwischen Schulbüchern und elektronischen Materialien;
- zwischen verschiedenen Gruppen im Bildungsprozess wie Lehrkräften, Fachleitern, Schulleitung, Eltern und Dozenten (von Fortbildungen) oder
- zwischen Kollegschaften verschiedener Schulen.

Zukünftige Entwicklungen müssen darüber hinaus in einem größeren Umfeld oder einer größeren Lernumgebung unter Einbeziehung des Arbeitsplatzes zu Hause bzw. anderen Lernorten gesehen werden.

**7. These**: Beziehungshaltigkeit und Vernetzung werden Schlüsselwörter in der Zukunft sein. Die Akzeptanz und der gewinnbringende Einsatz digitaler Technologien erfordert diesbezüglich ein globales Konzept des Lehrens und Lernens.

## Literatur


Bichler, E. (2010). *Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M³) am Gymnasium.* Kovac: Hamburg

Churchhouse, R. F. (Ed.) (1986). The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. University Press: Cambridge

Fischer, R. & G. Malle (1985). Mensch und Mathematik. BI: Mannheim u. a.

Guin, D., Ruthven, K. & L. Trouche (Eds.) (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators*. Springer: New York u. a.

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen.* Schneider: Hohengehren

Hoyles, C. & J.-B. Lagrange (Eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*. The 17th ICMI Study, Springer: New York u. a.

NCTM (1989, 2000). Principles and Standards for School Mathematics. NCTM, Inc.: Reston. http://standards.nctm.org/

Weigand, H.-G., Bichler, E. (2010). Towards a Competence Model for the Use of Symbolic Calculators in Mathematics Lessons – The Case of Functions, *ZDM - The International Journal on Mathematics Education 42(7)*, 697–713

Julia WEINSHEIMER, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

# Diagnostische Fähigkeiten von Grundschullehrkräften im Bereich Arithmetik erfassen und analysieren

Diagnostische Fähigkeiten von Lehrkräften gelten als Grundvoraussetzung für die Gestaltung guten Unterrichts und somit für den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern. Im Rahmen des vorgestellten Forschungsvorhabens wird ein Instrument zur Erfassung diagnostischer Fähigkeiten von Mathematik-Lehrkräften des Primarbereichs entwickelt und evaluiert. Mehrere theoretische Modelle bilden hierfür die Basis (vgl. Weinsheimer, Rathgeb-Schnierer, 2013). Um verschiedene Diagnosebereiche alltagsnah widerzuspiegeln, finden neben Beurteilungen von Schülerdokumenten und Mathematikaufgaben auch Videovignetten Eingang in das Instrument. Das anschließende mehrstufige Analysevorgehen soll eine Betrachtung verschiedener Facetten diagnostischer Fähigkeiten ermöglichen.

## Erfassung der diagnostischen Fähigkeiten

Für das Forschungsvorhaben wurde ein qualitatives methodisches Vorgehen gewählt. Um die diagnostischen Fähigkeiten der Lehrkräfte adäquat erfassen zu können, wurden für das Instrument vierzehn offene Fragen formuliert, in denen sich unterschiedliche Aspekte des Diagnostizierens im Lehreralltag widerspiegeln. Die Anforderungen, mit denen Lehrkräfte im Berufsalltag konfrontiert sind, sollen entsprechend abgebildet werden. Hierzu sind die Fragen beispielweise durch Filmsequenzen ergänzt, in denen Lehr-Lernsituationen eingeschätzt und eine anschließende Reaktion formuliert werden soll. Teilweise ist die Beantwortung der Fragen mit einer entsprechenden zeitlichen Limitierung verknüpft. Auf diese Weise wird ein spontanes Antworten der Lehrkräfte gewährleistet. Ein indirektes Rückschließen auf das Diagnostizieren und anschließende Reagieren in vergleichbaren Unterrichtssituationen soll so ermöglicht werden. Inhaltlich decken die Fragen verschiedene Bereiche ab: So wird das Nachvollziehen von Rechenwegen der Kinder ebenso erfasst wie die Beurteilung von mathematischen Aufgaben und Schülerdokumenten. Ein besonderer Schwerpunkt liegt auf der Einschätzung von Lernständen, die anhand von Fallvignetten erfolgt.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1291–1294). Münster: WTM-Verlag

### Analyse der diagnostischen Fähigkeiten – Vorgehensweise

Um die erfassten diagnostischen Fähigkeiten der Lehrkräfte analysieren zu können, wurde ein mehrstufiges Vorgehen entwickelt (Abb. 1). Dabei ist eine Analyse auf verschiedenen Ebenen vorgesehen, die Rückschlüsse auf die jeweiligen Ausprägungen unterschiedlicher Facetten der Diagnosefähigkeiten ermöglichen soll.

Anhand von ausgewählten Fragebögen wurde induktiv datenbasiert und teilweise theoriegestützt ein Kategoriensystem entwickelt. Um einer Zufallsverteilung bei der Auswahl möglichst gerecht zu werden, wurden hierzu aus bearbeiteten Fragebögen von Lehrkräften und von Lehramt-Studierenden jeweils der erste, der letzte sowie ein Bogen aus der Mitte ausgewählt. Es wurde darauf geachtet, dass die Fragebögen für die jeweilige Gruppe möglichst repräsentativ sind bezüglich der Variablen Berufserfahrung, praktischer Erfahrung des Mathematikunterrichtens, fachlicher Hintergründe (Mathematik studiert versus fachfremdes Unterrichten) bzw. Semesteranzahl (bei Studierenden). Zusätzlich wurden sechs Fragebögen, die von Experten (Mathematikdidaktiker/-innen unterschiedlicher Hochschulen) bearbeitet worden waren, für die Erstellung des Kategoriensystems herangezogen. Mit der Entwicklung des Kategoriensystems erfolgt die Erstellung eines Codierleitfadens, der durch Definitionen und Ankerbeispiele ergänzt wird.

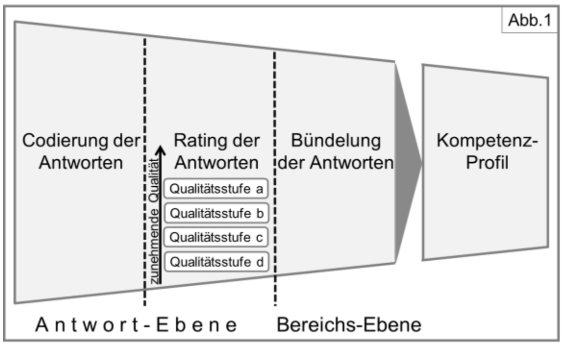
Anhand des entwickelten Kategoriensystems ist eine **Codierung** der gesamten Antwort eines Items vorgesehen, wobei eine Mehrfachcodierung möglich ist.

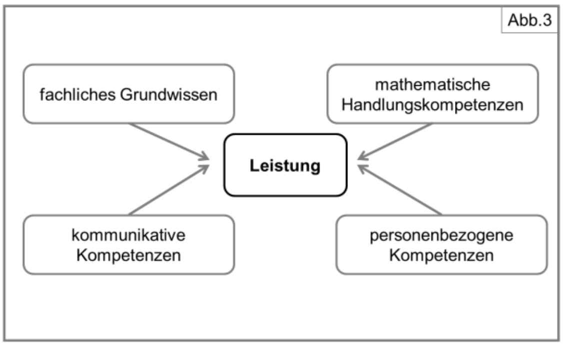
Die codierten Antworten werden anschließend einer von vier Qualitätsstufen zugeordnet. Auch für die Generierung des Qualitäts-**Rating**s wurden die ausgewählten Fragebögen herangezogen; dabei lieferten die Antwortformate der Experten eine Normierung des Ratings.

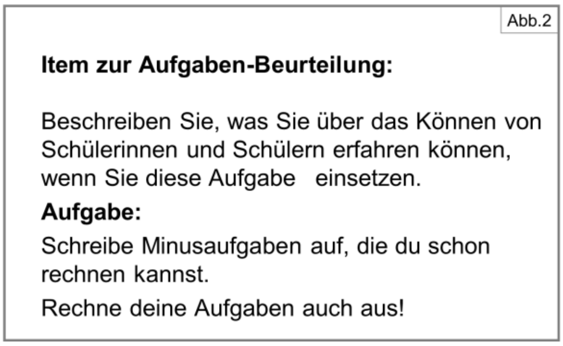
Im Anschluss an das Rating erfolgt eine **Bündelung** der einzelnen Items in Bereiche, die unterschiedliche Facetten diagnostischer Fähigkeiten widerspiegeln. Hierzu wurden zunächst verschiedene Fähigkeitsbereiche identifiziert, ehe eine entsprechende Einordnung der Items erfolgen konnte. Als Grundlage für die Bereichsbildung wurde unter anderem das Modell professioneller Kompetenzen von Lindmeier (2011) herangezogen und bezüglich diagnostischer Fähigkeiten spezifiziert.

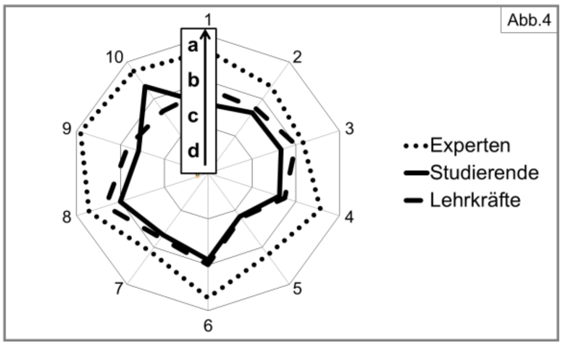
Auf dieser Basis kann schließlich ein sogenanntes **Kompetenzprofil** erstellt werden. Durch die Visualisierung in Form eines Netzdiagramms (in Anlehnung an Beutler, 2013) lassen sich nun Aussagen zu Ausprägungen der diagnostischen Fähigkeiten machen (Abb. 4). Die einzelnen Dimensionen des Netzdiagramms bilden dabei unterschiedliche Facetten der diagnostischen Fähigkeiten ab. Eine Deskription und Interpretation der erfassten diagnostischen Qualität wird möglich: Je weiter außen im Netzdiagramm die jeweiligen bereichsspezifisch zusammengefassten Antwortformate zu liegen kommen, umso stärker sind die jeweiligen Facetten der Diagnosefähigkeit in diesem Bereich ausgeprägt.

Neben Aussagen zu individuellen Ausprägungen der jeweiligen Diagnosefähigkeiten sind im Projekt auch Vergleiche zwischen verschiedenen Gruppen geplant. Diese interindividuellen Vergleiche zwischen Experten, Lehrkräften und Studierenden sollen zum einen Aufschluss über die jeweiligen diagnostischen Fähigkeiten geben, zum anderen Hinweise auf die Qualität des Instruments liefern.




## Analyse der diagnostischen Fähigkeiten – Beispiel

Am Beispiel eines Items zur Einschätzung einer Mathematikaufgabe (Abb. 2) soll das Analysevorgehen exemplarisch veranschaulicht werden. Die Antworten zur Aufgaben-Beurteilung werden in Anlehnung an ein Modell von Rathgeb-Schnierer und Schütte (2011, Abb. 3) inhaltlich differenziert und codiert. In nachfolgender Tabelle sind die Kategorien[1] und Ankerbeispiele dargestellt.

[1] Farbig hinterlegte Kategorien wurden aus dem Modell von Rathgeb-Schnierer und Schütte (2011) übernommen; die nicht farbig hinterlegte Kategorie wurde ergänzend induktiv aus den Daten abgeleitet.

| Kategorie | Ankerbeispiel | Punkte | | Punkte | Qualitäts stufe |
|---|---|---|---|---|---|
| fachliches Grundwissen | Operationsverständnis, Fertigkeiten im Bereich der Subtraktion, gewählter Zahlenraum, gewählte Aufgaben | 3 | | ≥ 6 | a |
| mathem. Handlungs-kompetenzen | Einblicke in Rechenwege | 2 | | 4 – 5 | b |
| personenbezogene Kompetenzen | Zutrauen in mathematische Fähigkeiten | 2 | | 2 – 3 | c |
| Beurteilung aus der Metaperspektive | potentielle Abweichung von realen Fähigkeiten des Kindes | 1 | | 0 – 1 | d |

Auf der Basis von Expertenantworten wurden die Kategorien anschließend gewichtet und die entsprechenden Qualitätsstufen für das Rating definiert. Die Tabelle gibt ebenfalls Aufschluss über die Antwortgewichtung und das Rating des gezeigten Items zur Aufgaben-Einschätzung.

Aus den zusammengefassten Ratings eines Bereichs lassen sich Facetten der diagnostischen Fähigkeiten ableiten und im Kompetenzprofil visualisieren. Das präsentierte Item zur Aufgaben-Einschätzung spiegelt die Facette der reflexiven Kompetenz wider, welche prä-instruktional von Lehrkräften gefordert wird (Abb. 4): Vor der Gestaltung des Unterrichts (prä-instruktional) wählen Lehrkräfte mathematische Aufgaben aus, deren diagnostisches Potential sie entsprechend einschätzen müssen. Da den Lehrkräften für die Aufgabenauswahl Zeit zur kritischen Auseinandersetzung mit dem Aufgabenpotential bleibt – und von ihnen kein spontanes Reagieren (wie beispielsweise in konkreten Unterrichtssituationen) gefordert ist – lässt sich das Item dem reflexiven Kompetenzbereich zuordnen.

## Literatur


Beutler, B. (2013). Zerlegen und Zusammensetzen: Fähigkeiten von Vorschulkindern beim Umstrukturieren von Bauwerken unter Berücksichtigung von Teil-Ganzes-Beziehungen. *mathematica didactica, 36(2),* Hildesheim: Franzbecker, 242-271.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers*. Münster: Waxmann.

Rathgeb-Schnierer, E., Schütte, S. (2011). Mathematikunterricht neu gestalten. In G. Schönknecht (Hrsg.), *Lernen fördern – Deutsch, Mathematik, Englisch, Sachunterricht* (S. 143-208). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Weinsheimer, J., Rathgeb-Schnierer, E. (2013). Diagnosekompetenz von Grundschullehrkräften erfassen – Einblicke in die Entwicklung eines Erhebungsinstruments. In G. Greefrath, F. Käpnick, M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 1078-1081). Münster: WTM-Verlag.

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

# Verfremdung durch historische Perspektiven - Beispiele

Der Verwendung von Geschichte der Mathematik im Mathematikunterricht sind zahlreiche Beiträge gewidmet. Dies betrifft sowohl theoriebildende Sichtweisen als auch empirische Studien zu konkreten Umsetzungen. Die Einbeziehung historischer Quellen kann zu tiefem fächerübergreifenden Verständnis mathematischer Zusammenhänge führen, Perspektivwechsel initiieren, Mathematik als Prozess erlebbar machen und auch einen Beitrag zu einem Selbstverständnis als Erben einer langen mathematischen Kultur leisten. Geschichte der Mathematik kann auch genutzt werden, um durch Verfremdung mathematische Denkgewohnheiten und Denkroutinen, beherrschte Rechenverfahren, auswendig gelerntes mathematisches Vokabular wieder in Frage zu stellen und neu zu interpretieren. Wir ließen uns für diesen Beitrag von einer Idee von Evelyne Barbin (2000) inspirieren, welche die Geschichtlichkeit des Offensichtlichen zum Anlass zur Reflektion über mathematische Kultur, Eigenheiten mathematischer Disziplinen und der Rolle individueller Interessen und Denkmuster nimmt. Geschichte der Mathematik dient in diesem Beitrag als Hintergrundwissen und Quelle der Inspiration des Lehrenden zur Entwicklung und Gestaltung von Mathematikdidaktik-Veranstaltungen für Lehramtsstudierende. Die Beschreibung der Beispiele und der an ihnen entwickelten Methode zur Erzeugung kognitiver Konflikte erfolgt in der Sprache mathematischer Bewusstheit. Die dafür notwendigen Grundlagen und Begriffe führen wir im ersten Teil exemplarisch ein. Im zweiten Teil geben wir einige Beispiele von Verfremdung unter Einbeziehung historischer Quellen, in welchen Studierende ihr Wissen und ihre Fertigkeiten in einer neuen Rolle erlebten und diese selbstständig hinterfragten und neu interpretierten. Dabei werden die Beispiele aus der Perspektive mathematischer Bewusstheit reflektiert, um eine Methode zur Unterrichtsgestaltung zu entwickeln, die von stoffdidaktischen Betrachtungen ausgeht.

## 1. Einordnung

Ähnlich wie im Beitrag (Kaenders, Kvasz & Weiss-Pidstrygach, 2013) nutzen wir die historische Perspektive, um eine Sprache zur Beschreibung von Verständnis- und Darstellungsproblemen mathematischer Inhalte bei Studierenden zu entwickeln, die man gemeinhin unter fehlende mathematische Denkweisen oder unzureichendes mathematisches Interesse einordnen könnte. Das Konzept mathematischer Bewusstheit dient uns dabei zur Beschreibung von Bezügen zwischen der individuellen mathematischen Kul-

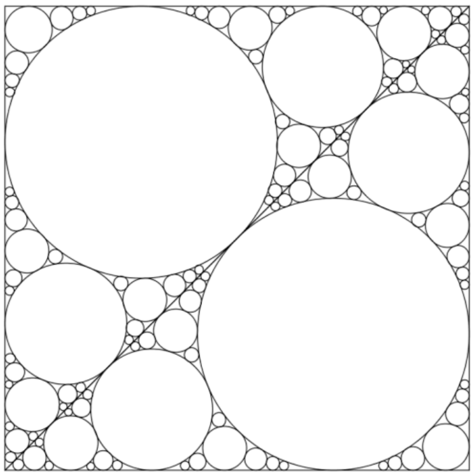
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1295–1298). Münster: WTM-Verlag

tur und Bildung Studierender einerseits und der in einem mathematischen Konzept enthaltenen mathematischen Kultur und historischen Begriffsentwicklung andererseits.

Im den folgenden Beispielen werden durch historische Bezüge Perspektivwechsel angeregt, die zu Veränderungen der Motivation, des Selbstverständnisses und zu größerer Neugier auf mathematische Vielfalt führen können. Soziale und manipulative Bewusstheit sind durch Nachahmung mathematischer Tätigkeiten gekennzeichnet. Dabei zu beobachtende Herangehensweisen an mathematische Probleme sind oft formale Übertragung und nicht reflektierte Anpassung vorhandener Fertigkeiten. Erfolgt die Vermittlung in einer Gruppe (wie z.B. in der Vorlesung) kann der Lehrende leicht die häufig mit sozialer und manipulativer Bewusstheit einhergehende unkritische Wiederholung, und Passivität als Desinteresse und fehlendes Problembewusstsein empfinden. Der Beitrag von Evelyne Barbin zur Geschichtlichkeit des Offensichtlichen erzählt eine spannende Geschichte zu unterschiedlichen Vorstellungen dessen, was für offensichtlich gehalten wird. Er zeigt viele Möglichkeiten, auf der Ebene sozialer und manipulativer Bewusstheit kognitive Konflikte zu schaffen. Den Studierenden sind aus dem Alltag des Mathematikstudiums Formulierungen wie *offensichtlich ist ...*, *wie leicht nachzuweisen ...*, *direktes Nachrechnen zeigt ...*, *leicht einzusehen ...* bekannt. Ein *in Frage stellen* dieses O*ffensichtlichen* hinterfragt einerseits die mathematische Kultur des Lehrenden und andererseits die vom Lehrenden angenommene mathematische Bildung der Gruppe. Die Formulierung *offensichtlich* ist von Seiten der Lehrenden oft als Aufforderung an die Studierenden gemeint, die Sachverhalte selbst nachzuprüfen. Nicht alle erkennen, dass mit *elementar* nicht *mathematisch trivial* oder *einfach* gemeint ist, sondern für den Lehrenden bedeutet: im Rahmen instrumenteller und logischer Bewusstheit, die Beherrschung einiger Fertigkeiten vorausgesetzt, zu lösen. Der Artikel von Evelyne Barbin diskutiert verschiedene Sichtweisen auf das Offensichtliche in der Geometrie, beginnend mit Euklid und endend mit Hilbert. Dabei wird Offensichtlichkeit vom Standpunkt der Schlussfolgerichtigkeit, der Methode und der geometrisch-intuitiven Sichtweise in Frage gestellt wird. Vom mathematischen Standpunkt ist der Diskurs für Studierende ohne spezielle begleitende Fachvorlesung wahrscheinlich nur anhand der Beispiele Euklids, Proklus und Descartes nachzuvollziehen. Hier kann der Studierende eigene Vorlieben, seine Bildung und kognitive Veranlagung reflektieren und hinterfragen. Der hohe fachliche Anspruch birgt die Gefahr, dass die an Erfahrungen im Bereich sozialer und manipulativer Bewusstheit anknüpfende Problemstellung *Was meint offensichtlich?* nicht zu *Was heißt für mich offensichtlich?* wird. In der Sprache mathematischer Bewusstheit wird eine in sozialer und manipulativer Bewusstheit gewohnte Sichtweise und Routine erst in Problemstellungen verfremdet, die kontextuelle, intuitive, argumentative, logische und sogar theoretische Bewusstheit betreffen. Für ein reflektiertes Wechselspiel zwischen historischen mathematischen Entwicklungen und der Entwicklung und Individualität der eigenen mathematischen Sichtweise scheinen uns Problemstellungen, die zwischen sozialer und manipulativer Bewusstheit einerseits und intuitiver, instrumenteller und experimenteller Bewusstheit andererseits liegen für mathematikdidaktische Veranstaltungen geeignet. Dafür geben wir nun einige Beispiele.

## 2. Verfremdung als Mittel zur Selbstwahrnehmung mathematischer Denk- und Herangehensweisen

Zwei Studentinnen entwickelten in Ihrer Bachelorarbeit zu Umsetzungen konstruktivistischer Ansätze in einer mathematischen Lernumgebung ein Sangaku[1]. Die begleitende Anleitung bestand in einer Reihe aufeinander aufbauender Impulse zur Konstruktion und Berechnung der weiteren Kreise. Eine zusätzliche Strukturierung der Impulse bestand in den beiden Sichtweisen Tangente an gegebenen Kreis konstruieren oder berührenden Kreis zu gegebener Tangente konstruieren. Die mathematischen Tätigkeiten bei der Erarbeitung trugen vorrangig instrumentellen und experimentellen Charakter. Der Hinweis, dass es sich



bei der  im Sangaku verborgenen Problemstellung um spezielle Fälle der Berührungsprobleme des Apollonius handelt, führte zu einer Verfremdung der Sichtweise auf das von ihnen entwickelte Sangakuproblem. Bisher hatte es sich um eine spezielle Geometrieaufgabe zur Illustration konstruktivistischer Ansätze gehandelt und nun war es eine Aufgabe mit Namen, die (wenn auch in allgemeinerer Form) eine lange historische Entwicklung durch bekannte Mathematiker genommen hatte. Sie nahmen sich als Mathematikerinnen und Glied der Kette von Mathematikern wahr, die das Berührungsproblem kennen und darüber nachgedacht haben. Die Beschäftigung mit der Geschichte des Problems führte zu neuen Darstellungen der Lösungswege.

[1] Abbildung aus der Bachelorarbeit von S. Hansmann und C. Steines: *Sangaku – eine mögliche Umsetzung konstruktivistischer Herangehensweisen im Mathematikunterricht.*

Ein Beispiel zur Verfremdung, in welchem eine Herangehensweise, die stärker in kontextueller, experimenteller, argumentativer Bewusstheit angesiedelt ist, gibt die von Polya gestellte Aufgabe (Polya, 1954, S. 122): Ein Fußballer läuft auf einer Geraden auf ein Tor zu. Wann muss er schießen, um den größten Schusswinkel zu haben? Dieses in der Mathematikdidaktik als typische Anwendungsaufgabe behandelte Problem ist ebenfalls mit dem Berührungsproblem und mehreren Sätzen aus den Büchern Euklids I und II verknüpft. Der historische Bezug erlaubt die Verfremdung des Alltagsbezugs.

Ein weiteres Beispiel kognitive Konflikte und Neugier durch Verfremdung gewohnter Sichtweisen zu initiieren, ist die Ansiedlung mathematischer Sachverhalte in fremden Welten. Der historische Bezug in diesem Beispiel ist durch die Erzählung Flatland von Edwin Abbott Abbott (Abbott, 1884) gegeben. Der Leser ist in die eindimensionale und zweidimensionale Welt eingeladen und vor das Problem gestellt, aus dieser Perspektive geometrische Formen durch Beschauen oder Berühren zu erkennen. Dabei kann er von sich selbst als einer regelmäßigen geometrischen Form ausgehen. Hier gibt es vielfache Möglichkeiten eine Verfremdung der instrumentellen, durch kartesische Koordinaten geprägten Wahrnehmung und unser räumlichen Intuition anzuregen.

Nimmt man die hier exemplarisch vorgeführte Sichtweise ein, so erweisen sich viele Unterrichtsmaterialien mit historischen Bezügen als geeignet, um Verfremdungseffekte zu erzielen, die soziale und manipulative Bewusstheit einerseits mit intuitiver, instrumenteller, experimenteller, argumentativer Bewusstheit andererseits in Beziehung setzen und damit Selbstreflektion individueller mathematischer Herangehensweise unterstützen können.

## Literatur


Abbott, Edwin A. (1884). *Flatland: A romance of many dimensions.* Seeley, London.

Barbin, E. (2000). The Historicity of the Notion of What is Obvious in Geometry. In Katz, V. (2000): *Using history to teach Mathematics.* (S.89-99), MAA Notes #51.

Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning, Vol 1. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, S.122.

Weiss-Pidstrygach, Y., Kvasz, L. & Kaenders, R. (2013). Geschichte der Mathematik als Inspiration zur Unterrichtsgestaltung. In M. Rathgeb, et al (Hrsg.), *Mathematik im Prozess.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Simon WEIXLER, Stefan UFER, München

# Sample size neglect – Effekte von Aufgabenmerkmalen

Bei Sample-size-neglect-Problemen wie „The likelihood of getting heads at least twice when tossing three coins is smaller than / equal to / greater than the likelihood of getting heads at least 200 times out of 300 times" (Fischbein und Schnarch 1997, S. 99) werden oftmals recht unterschiedliche Lösungsraten berichtet (vgl. hierzu Rubel 2009; Kustos 2010). In einer Studie mit 242 Studierenden des Lehramts wurde der Einfluss der *relativen Trefferhäufigkeit*, des *Unterschieds in der Anzahl an Versuchen* sowie des *Problemkontexts* systematisch untersucht.

## 1. Theoretischer Hintergrund

Lem et al. (2011, S. 132f.) vermuten, dass bei Sample-size-neglect-Problemen verschiedene Aufgabenmerkmale, u. a. die *relative Trefferhäufigkeit*, der *Unterschied in der Anzahl an Versuchen* und der *Problemkontext*, einen Einfluss auf die Lösungsrate haben.

In der Studie von Bar-Hillel (1982) ging mit einer Erhöhung der relativen Trefferhäufigkeit von 60% auf 70%, 80% und 100% in Kahneman und Tverskys (1972) *Hospital Problem* eine Erhöhung der Lösungsrate einher. Murray et al. (1987) fanden, dass eine Vergrößerung des Unterschieds in der Anzahl an Versuchen von 15 vs. 45 auf 5 vs. 50 und 5 vs. 1000 mit einer marginalen Erhöhung der Lösungsrate einher ging.

Ob der Problemkontext einen Einfluss auf die Lösungsrate hat, ist bei Sample-size-neglect-Problemen bisher nicht untersucht (Lem et al. 2011).

## 2. Fragestellungen

Bezogen auf die von Lem et al. (2011) aufgeführten Aufgabenmerkmale wurde untersucht, ob die systematische Variation folgender Aufgabenmerkmale die Lösungsrate von Sample-size-neglect-Problemen beeinflusst:

- relative Trefferhäufigkeit
- Unterschied in der Anzahl an Versuchen
- Problemkontext

Zusätzlich wurde untersucht, ob die Lösungsrate von der Art der Repräsentation problemrelevanter Informationen beeinflusst wird.

## 3. Methode und Design

242 Studierende (108 männlich; 134 weiblich) des Lehramts Mathematik an Realschulen bzw. Gymnasien an der LMU München (Alter in Jahren:

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1299–1302). Münster: WTM-Verlag

M = 21,3; SD = 3,1; Spannweite 17-41; Semesteranzahl: M = 2,6; SD = 2,2; Spannweite 1-11) bearbeiteten u. a. 16 Aufgaben (vgl. Abb. 1 und 2), die in den Merkmalen *relative Trefferhäufigkeit* (70% bzw. 90% bzw. 100%), *Unterschied in der Anzahl an Versuchen* (10 vs. 100 bzw. 10 vs. 1000) und *Problemkontext* (Münzwürfe bzw. Geburten) variierten. Bei Aufgaben mit relativer Trefferhäufigkeit 100% variierte zudem die *Art der Repräsentation der Trefferhäufigkeit* (als Zahl, z. B. „10-mal“, bzw. Wort, „jedes Mal“). Die Aufgabenreihenfolge wurde randomisiert.

Abb. 1 und 2 zeigen exemplarisch zwei Aufgaben mit relativer Trefferhäufigkeit 70%, 10 vs. 100 Versuchen sowie den unterschiedlichen Problemkontexten *Münzwürfe* bzw. *Geburten*.

*Kreuzen Sie die korrekte Antwort an.*

**Aufgabe:**

In den Trevi-Brunnen werden immer wieder Münzen geworfen.

Dass bei 10 Würfen mindestens 7-mal die Zahlseite oben liegt

☐ ist wahrscheinlicher als

☐ ist gleich wahrscheinlich wie

☐ ist weniger wahrscheinlich als

dass bei 100 Würfen mindestens 70-mal die Zahlseite oben liegt.

Abb. 1: Problemkontext *Münzwürfe*

*Kreuzen Sie die korrekte Antwort an.*

**Aufgabe:**

In der Uni-Klinik werden immer wieder Kinder geboren.

Dass bei 10 Geburten mindestens 7-mal ein Junge zur Welt kommt

☐ ist wahrscheinlicher als

☐ ist gleich wahrscheinlich wie

☐ ist weniger wahrscheinlich als

dass bei 100 Geburten mindestens 70-mal ein Junge zur Welt kommt.

Abb. 2: Problemkontext *Geburten*

Bei der Auswertung wurde jede richtig gelöste Aufgabe mit Score 1, jede falsch gelöste Aufgabe mit Score 0 bewertet.

## 4. Erste Ergebnisse

Der Vergleich sich entsprechender Aufgaben (s. Abb. 3) deutet darauf hin, dass sowohl die Variation der *relativen Trefferhäufigkeit* als auch die Variation der *Art der Repräsentation der Trefferhäufigkeit* einen Einfluss auf die Lösungsrate hat. Interessant ist, dass sich kaum ein Unterschied zwischen Aufgaben mit den relativen Trefferhäufigkeiten 70% und 90% zeigt, Aufgaben mit der relativen Trefferhäufigkeit 100% jedoch deutlich zuverlässiger korrekt bearbeitet werden. Bei Aufgaben mit relativer Trefferhäufigkeit 100% geht mit der Repräsentation der Trefferhäufigkeit als Wort eine höhere Lösungsrate einher als mit der Repräsentation als Zahl.

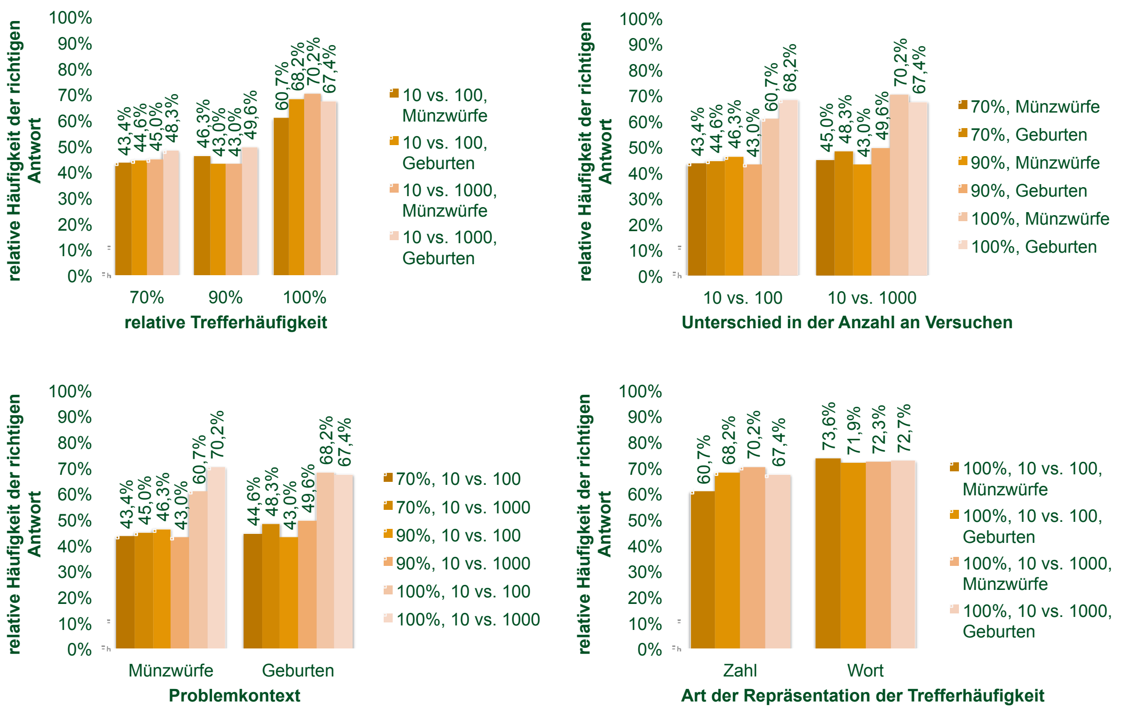



Abb. 3: Lösungsraten

Erst der Vergleich der Mittelwerte der Summenscores, die von den Probanden bei zusammengehörenden Aufgaben (z. B. gleicher Unterschied in der Anzahl an Versuchen) erreicht wurden, deutet darauf hin, dass auch ein größerer *Unterschied in der Anzahl an Versuchen* mit einer höheren Lösungsrate einhergeht (10 vs. 100 Versuche: M = 3,06; SEM = 0,14; 10 vs. 1000 Versuche: M = 3,24; SEM = 0,14). Die Variation des *Problemkontexts* scheint dagegen kaum einen Einfluss auf die Lösungsrate zu haben (Münzwürfe: M = 3,09; SEM = 0,14; Geburten: M = 3,21; SEM = 0,14).

## 5. Diskussion

Die Ergebnisse einer systematischen Variation von Aufgabenmerkmalen deuten an, dass eine Erhöhung der *relativen Trefferhäufigkeit* von 70% bzw. 90% auf 100% und eine Vergrößerung des *Unterschieds in der Anzahl an Versuchen* von 10 vs. 100 auf 10 vs. 1000 jeweils mit einer höheren Lösungsrate einhergeht. Dies deckt sich im Wesentlichen mit der Vermutung von Lem et al. (2011) sowie den Befunden von Bar-Hillel (1982) und Murray et al. (1987). Zwischen Aufgaben mit den relativen Trefferhäufigkeiten 70% und 90% zeigt sich kaum ein Unterschied in der Lösungsrate, während Aufgaben mit relativer Trefferhäufigkeit 100% deutlich einfacher fallen. Letztere können durch einfache intuitive Überlegungen gelöst werden (z. B. „Immer das gleiche Ergebnis zu erhalten ist bei einer kleinen Anzahl an Versuchen wahrscheinlicher als bei einer großen“). Auf eine Aktivierung solcher Strategien deutet auch die größere Lösungsrate hin, welche bei diesen Aufgaben mit der *Repräsentation der Trefferhäufigkeit* als Wort im Vergleich zur Repräsentation als Zahl einhergeht. Dass sich zwischen den beiden anderen Bedingungen kein Unterschied zeigt, deutet darauf hin, dass die hier verwendeten analytischen oder intuitiven Lösungsstrategien nicht von der relativen Trefferhäufigkeit abhängen. Der *Problemkontext* zeigte erwartungsgemäß keinen Einfluss auf die Lösungsrate.

## Literatur


Bar-Hillel, M. (1982). Studies of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (eds.), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases* (pp. 69-83). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgement of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

Kustos, P. N. (2010). Trends concerning four misconceptions in students' intuitively based probabilistic reasoning sourced in the heuristic of representativeness. Doctoral dissertation, University of Alabama.

Lem, S., van Dooren, W., Gillard, E., & Verschaffel, L. (2011). Sample size neglect problems: A critical analysis. *Studia Psychologica*, 53(2), 123-135.

Murray, J., Iding, M., Farris, H., & Revlin, R. (1987). Sample-size salience and statistical inference. *Bulletin of the Psychonomic Society*, 25, 367-369.

Rubel, L. H. (2009). Middle and high school students' thinking about effects of sample size: an in and out of school perspective. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 636-643). Atlanta, GA: Georgia State University.

Birgit WERNER, Heidelberg

# Mit Mathematik „Fit fürs Leben“? Kompetenzorientierte mathematische Grundbildung im Übergang Schule-Beruf

## 1. Kompetenz im System

„Erfolgreiche Bildung zeigt sich neben dem erreichten Schulabschluss am individuellen Bildungserfolg, an einer umfassenden Persönlichkeitsentwicklung, am Erwerb lebenspraktischer, sozialer, kognitiver, sprachlich-kommunikativer und personaler Kompetenzen und an der Fähigkeit zu einer so weitgehend wie möglich selbstbestimmten Lebensführung sowie einer aktiven Teilhabe an der Gesellschaft“ (KMK 2011, 8). Die Intention erfolgreicher Bildung konzentriert sich demnach nicht allein auf ein schulisch formales Zertifikat, sondern auf gesellschaftliche Teilhabe. Diese drückt sich – besonders bei Jugendlichen ohne formalen Schulabschluss – vor allem in einer gelungenen Eingliederung auf den Ausbildungs- und Arbeitsmarkt aus. Zentral ist die Frage, ob die in der Schule vermittelten Kompetenzen tatsächlich für das nachfolgende Ausbildungs- und Beschäftigungssystem anschlussfähig sind. Kompetenzen lassen sich zusammenfassend als normative Deskriptionen in je unterschiedlichen Handlungsfelder beschreiben, die sowohl Wissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten als auch Einstellungen und Haltungen einschließen (Weinert 2001, Jung 2010; Erpenbeck & v. Rosenstiel 2007, Basendowski 2013).

## 2. Kompetenzen zwischen den Systemen

Beliebt ist im Mathematikunterricht die Verwendung von Kochrezepten, um realitätsnahe Anforderungen im Unterricht zu simulieren. Deren Angaben sind meist für vier Personen vorgesehen. Ein typisches Aufgabenformat wäre: *Das Rezept für Tomatensoße ist für vier Personen ausgelegt. Berechne die Zutaten für 100 Personen*. Avisiert wird hier die Anwendung des Zwei- bzw. Dreisatzes sowie der Umgang mit Maßeinheiten. Es sind bekannte Rechenverfahren, -techniken zu reproduzieren und Zusammenhänge herzustellen, die den Anforderungsbereichen I und II der KMK-Bildungsstandards entsprechen (vgl. KMK 2004). Um das Niveau des Verallgemeinerns und Reflektierens (Anforderungsbereich III) zu erreichen, könnte die Aufgabe wie folgt modifiziert werden: *In einer Großküche müssen 123 Portionen ausgeliefert werden. Berechne die notwendigen Zutaten*. Die mathematisch exakte Lösung dokumentiert dann die mathematische Kompetenz eines Schülers in der Schule.

Innerhalb der beruflichen Bildung wiederum ist das Lehrangebot auf Handlungskompetenzen orientiert, der Unterricht wird nach beruflichen Lernfel-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1303–1306). Münster: WTM-Verlag

dern und nicht nach klassischen Unterrichtsfächern organisiert. In der realen Situation einer Großküche sind die Anforderungen berufsfeldbezogenen, meist von nicht-mathematischen Faktoren geprägt, zum Beispiel dadurch, dass anstelle der gewohnten 100 Portionen morgen die unerwartete Information kommt, dass 123 Portionen ausgeliefert werden sollen. Ein Auszubildender zum Beikoch ist dann kompetent, wenn es ihm gelingt, die Tomatensauce in der gewohnten Qualität, in ausreichender Menge und in der vorgegebenen Zeit bereit zu stellen, unabhängig von der Wahl der Rechen- bzw. Lösungsstrategie. Analysen von Schroeder über den Gebrauch der Kulturtechniken in einfachen Tätigkeiten des Niedriglohnsektors zeigen, dass nur „geringe Rechenkompetenzen" (Schroeder 2011, 172) erforderlich sind. Gleichzeitig aber werden situative Spezialkenntnisse, z.B. exakte Bestell- und Abrechnungsvorgänge, eigenständige zeitliche Organisation, der sichere Umgang mit verschiedensten Messinstrumenten u.a. erwartet (Basendowski 2013, 194). Zudem erfolgt die Bewältigung dieser Situationen häufig unter Zeitdruck und muss möglichst fehlerfrei ablaufen.

Diese Beispiele mögen die Diversität in der Kompetenzdiskussion verdeutlichen. Um das skizzierte Spannungsfeld von Kompetenzen in den Handlungsfeldern Schule, Berufsbildung und Erwerbstätigkeit aufzulösen, ist eine Orientierung an berufsrelevanten Anforderungen/Kompetenzen notwendig. Arbeitsplatzbezogene Grundbildung ist demnach eine Querschnittsaufgabe aller pädagogischen Teilsysteme und evaluiert gleichzeitig extern schulische Bildungsangebote.

## 3. Kulturelle Grundbildung/Literacy als systemverbindendes Konzept

Das Konzept der Grundbildung/Literacy wird als Sprachform, als Programm zwischen diesen institutionell bedingten Handlungssituationen gesehen, um Kompetenzen kommunizierbar zu machen. Grundbildung schafft die Voraussetzungen für eine gleichberechtigte Teilnahme am gesellschaftlichen Leben. Nicht grundgebildet zu sein bedeutet, sich an zielgerichteten Aktivitäten, bei denen Lesen, Schreiben und Rechnen erforderlich sind, nicht beteiligen zu können. Sie gilt als Minimalstandard, ist arbeits- und berufsorientiert angelegt und bewegt sich im Spannungsfeld von individueller Lebensbewältigung sowie fach- und arbeitsmarktbezogener Qualifizierung (vgl. Tröster 2000). Literacy wird als eine menschliche Aktivität verstanden, die sich als eine soziale Praxis beschreiben lässt und sich auf einzelne Events stützt (vgl. Nickel o.J.). Auch die PISA-Studie (2001) rahmt ihre Konzeption mit diesem Begriff.

Innerhalb dieses Konzeptes hebt sich die schulische Trennung zwischen Deutsch und Mathematik auf. Kompetenzen sind in hohem Maße abhängig von der sozialen Rolle, dem Selbstbild und den situationsbezogenen Vorerfahrungen des Einzelnen. Schulisch vermittelte Grundfertigkeiten wie Lese-, Schreib- und Rechenstrategien werden erst mit ihrem Transfer, mit ihrer Anwendung in sozialen Situationen zu Kompetenzen. Das nachfolgende Mehrebenenmodell erfasst und systematisiert die verschiedenen Kompetenzebenen (Prozess-, Subjekt- und soziale Ebene) und -elemente (literale Events und Praxen, soziale Praxen). Es basiert auf dem bekannten Modell zur Beschreibung schriftsprachlicher Kompetenzen (vgl. Rosebrock/Nix 2008) sowie auf dem Ansatz einer „situativen Mathematik" (vgl. Basendowski 2013).

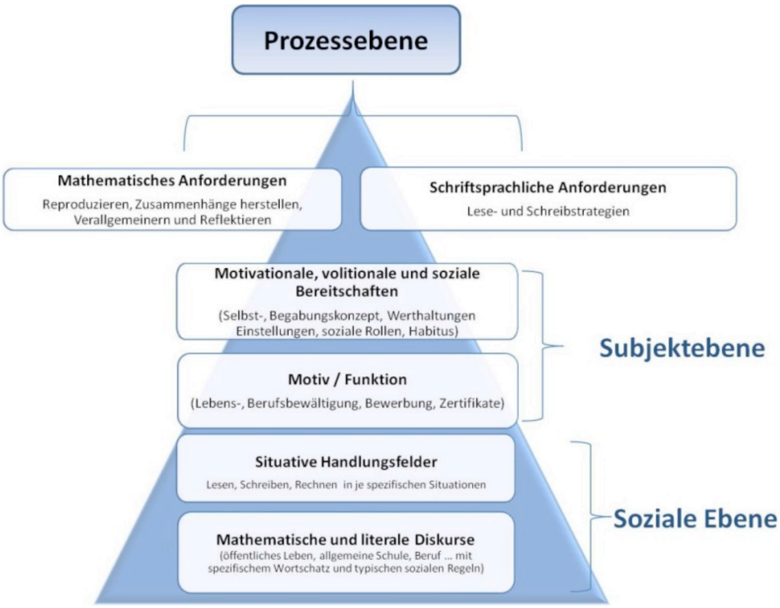



Abb. : Mehrebenenmodell schriftsprachlicher und mathematischer Kompetenzen (nach Basendowski 2013, Rosebrock/Nix 2008)

Die *Prozessebene* wird gegenwärtig mehrheitlich als Auftrag von Schule wahrgenommen und umgesetzt. Mathematische und schriftsprachliche Anforderungen markieren Lesen, Schreiben und Rechnen als literale Praxen, bei denen u.a. auch Lese- und Rechentrainings durchaus ihre Bedeutung haben. Die *Subjektebene* erfasst allem psychologische Aspekte wie Leistungsmotivation, Selbstbild, Begabungskonzepte, Einstellungen und Motivationen ein. Die *soziale Ebene* fokussiert auf die jeweils situationsabhängigen sozialen Kontexte, wie beispielsweise den Wortschatz in der öffentlichen Verwaltung.

## 4. Fazit

Das Konzept der kulturellen Literalität bietet zahlreiche Implikationen für eine kompetenzorientierte Didaktik, die das Dilemma der Kompetenzbeschreibungen auf der Ebene der Institutionen/Systeme auflöst. Sowohl die Umgestaltung des Schulsystems auf ein inklusives als auch die Individualisierung und Entstandardisierung von Lebensläufen gebieten dies. Eine Flexibilisierung der Bildungswege und Öffnung der Grenzen zwischen Bildungsinstitutionen fordert auch der Bildungsbericht 2012. So mag es gelingen, Bildungsangebote tatsächlich als individuelle Kompetenzentwicklung zu verstehen und zu realisieren und gerade bei Jugendlichen ohne Schulabschluss auf der Basis ihrer individuellen Kompetenzen gesellschaftliche Teilhabe zu sichern.

## Literatur


Basendowski, S. (2013): Die soziale Frage an (mathematische) Grundbildung: Eine empirische Studie zu dem Wesen, der Funktion und der Relevanz mathematischer Kompetenzen in einfachen Erwerbstätigkeiten sowie Analysen für didaktische Implikationen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Bildungsbericht (2012): Bildung in Deutschland 2012. Ein indikatorengestützter Bericht mit einer Analyse zur kulturellen Bildung im Lebenslauf. Online unter: http://www.bildungsbericht.de/?seite=10203 (06.03.2014)

Erpenbeck, J./v. Rosenstiel, L. (2007): Handbuch Kompetenzmessung. Erkennen, verstehen und bewerten von Kompetenzen in der betrieblichen, pädagogischen und psychologischen Praxis. Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Jung, E. (2010): Kompetenzerwerb: Grundlagen, Didaktik, Überprüfbarkeit. München: Oldenbourg.

KMK (2004): Bildungsstandards Mathematik für den Hauptschulabschluss. Online unter: ttp://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf (06.03.2014)

KMK (2011): Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in Schulen (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 20.10.2011). Online unter: http://www.kmk.org/bildung-schule/allgemeine-bildung/sonderpaedagogische-foerderung.html (10.10.2013).

Nickel, S. (o.J.): Literacy. Hochschuldidaktische Handreichungen. Sprach- und Literaturdidaktik im Elementarbereich. Bremen: Eigenverlag Universität Bremen.

Rosebrock, C./ Nix, D. (2008): Grundlagen der Lesedidaktik und der systematischen schulischen Leseförderung. Baltmannsweiler: Schneider-Verlag Hohengehren.

Schroeder, J. (2011): Gar nicht so einfach! Arbeitsplatzanalysen zum Gebrauch der Kulturtechniken in einfachen Tätigkeiten des Niedriglohnsektors. In: Bindl, A./Schroeder, J./Thielen, M. (Hrsg.): Arbeitsrealitäten und Lernbedarfe wenig qualifizierter Menschen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 159-208.

Weinert, F. (2001) zitiert in Klieme, E. (2004): Was sind Kompetenzen und wie lassen sie sich messen? In: Pädagogik, 56. Jg., 10-12.

Benedikt WEYGANDT, Reinhard OLDENBURG, Frankfurt am Main

# Weltbilder von Lehramtsstudierenden zur genetischen Sicht auf Mathematik

Es ist ein allgemein anerkanntes Ziel, dass Schülerinnen und Schüler die Mathematik möglichst aktiv erlernen und diese dabei nach Möglichkeit selbst konstruieren sollen. Damit künftige Lehrkräfte einen solchen Unterricht gestalten können, erscheint es notwendig, dass sie selbst ein Mathematikbild gewinnen, das nicht durch die Präsentation fertiger Mathematik dominiert wird, sondern auch deren Entstehungsprozesse umfasst. Um dies zu unterstützen hat die Goethe Universität Frankfurt mit der Vorlesung „Entstehungsprozesse von Mathematik" eine neue Lehrveranstaltung eingeführt, die maßgeblich der genetischen Idee des Lernens von Mathematik verpflichtet ist (Toeplitz 1949, Beutelspacher, Danckwerts et al. 2011). Besucht wird diese zeitgleich zur Analysis I.

Inhaltlich umfasste die Vorlesung dabei u.a. das eigenständige Aufstellen von Definitionen; die Betrachtung unterschiedlicher, aber mathematisch äquivalenter Formulierungen desselben Begriffs sowie die Bewertung der aus ihnen jeweils resultierenden Konsequenzen (z.B. in Bauer 2013); mathematische Genese von Vermutungen und Beweisen (Lakatos 1979) und historische Rückblicke. Dies geschah mit den Zielen, deutlichere Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik herzustellen und den Studierenden so die Möglichkeit zu geben, Mathematik als ein menschliches Produkt kennenzulernen, ein tiefergehendes Konzeptwissen zu erlangen und ihre mathematischen Arbeitsweisen zu reflektieren.

Um einen Einblick in diese Bereiche zu erhalten und etwaige Veränderungen aufzudecken, untersuchten wir mittels eines Fragebogens die zugrundeliegenden *beliefs*, auch *mathematische Weltbilder* genannt. Als Grundlage verwendeten wir 37 Items aus der Untersuchung von Törner et. al. von 1995; diese wurden um 60 Items aus dem Bereich der Mathematikgenese erweitert. Die Zustimmung wurde dabei auf einer fünfstufigen Likert-Skala gemessen. Dieser Fragebogen wurde allen Erstsemester-Studierenden der Studiengänge Bachelor Mathematik und gymn. Lehramt vorgelegt. Dabei kamen 178 vollständig ausgefüllte Datensätze zustande, welche einer explorativen Hauptachsen-Faktorenanalyse mit anschließender Varimax-Rotation unterzogen wurden. Dabei ergaben sich für die von Törner et. al. übernommenen Items erwartungsgemäß vier Eigenwerte größer eins. Bei der anschließenden Interpretation der vier extrahierten Faktoren zeigte sich, dass diese insofern stabil sind, als dass jedes Item seine Hauptladung weiterhin in dem ursprünglich formulierten Faktor besitzt und keine nennenswerten Nebenladungen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1307–1310). Münster: WTM-Verlag

auftreten; indes unterscheiden sich die Reihenfolgen der Items innerhalb der Faktoren aufgrund der Natur empirischer Erhebungen. Daher kann an dieser Stelle gesagt werden, dass die von Törner et. al. formulierten Faktoren *Formalismus (F)*, *Schema-Orientierung (SO)*, *Anwendungs-Charakter (AC)* und *Prozess-Charakter (PC)* bestätigt werden konnten.

Bei den restlichen 60 Items legte es die Betrachtung des Screeplots nahe, fünf Faktoren zu extrahieren, welche insgesamt 27% der Varianz erklären. Um eine Idee der entstandenen Faktoren zu erhalten, werden je ein bis zwei der zugehörigen Items nachfolgend abgedruckt, die vollständige Liste kann bei Interesse zugesandt werden.

Beispiel-Item aus dem Faktor *Struktur der Mathematik (SM)*:

- Mathematik ist wie ein Gebäude, bei dem jedem Satz und jedem Begriff eine unentbehrliche Rolle als Baustein zukommt.

Beispiel-Items aus dem Faktor *Ergebniseffizienz (EE)*:

- Die Herleitung oder der Beweis einer Formel ist nicht so wichtig wie diese anwenden zu können.
- Beim Lernen von Mathematik sind nicht-zielführende Wege hinderlich.

Beispiel-Item aus dem Faktor *Kreativität (K)*:

- Mathematische Definitionen sind ein Produkt von Kreativität.

Beispiel-Items aus dem Faktor *Universalität (U)*:

- Die Definitionen der Mathematik verhalten sich wie Naturgesetze, d.h. sie können von Menschen entdeckt werden, sind aber nicht veränderbar.
- Falls es Marsbewohner gäbe, so hätten sie auf jeden Fall dieselbe Mathematik mit denselben Erkenntnissen.

Beispiel-Items aus dem Faktor *Ermessensspielraum (ES)*:

- Wenn einem die Konsequenzen einer Definition nicht gefallen, so darf man diese Definition entsprechend abändern.
- Wenn ein/e Mathematiker/in einen neuen Begriff definiert, so hat er/sie dabei einen willkürlichen Spielraum.

Zur Prüfung der inhaltlichen Konsistenz der insgesamt neun Faktoren wurde jeweils das Reliabilitätsmaß Cronbachs Alpha ermittelt und maximiert.

| Faktor | F | SO | AC | PC | SM | EE | K | U | ES |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cronbachs $\alpha$ | .78 | .71 | .79 | .64 | .81 | .75 | .86 | .73 | .61 |

Da die α-Werte der Faktoren *Prozess-Charakter* und *Ermessensspielraum* formal unzureichend sind, ist eine Überarbeitung der zugehörigen Items notwendig und angedacht.

Im nächsten Schritt hilft ein Blick auf die Korrelationsmatrix, signifikante Zusammenhänge zwischen den Faktoren zu erkennen:

| | SM | EE | K | U | ES | F | AC | SO |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SM | 1 | | | | | | | |
| EE | - .13 | 1 | | | | | | |
| K | .20** | - .28*** | 1 | | | | | |
| U | .09 | .20 | - .17 | 1 | | | | |
| ES | - .19** | .32*** | .06 | - .05 | 1 | | | |
| F | .52*** | .08 | .08 | .09 | .02 | 1 | | |
| AC | .20* | - .33*** | .19* | .01 | .02 | .07 | 1 | |
| SO | .10 | .60*** | - .25** | .32*** | .13* | .18* | - .11 | 1 |
| PC | .39*** | - .25*** | .56*** | - .09 | .16 | .27*** | .29*** | - .20* |

Im Gegensatz zur Untersuchung von Törner et. al. sind die Faktoren *Prozess-Charakter* und *Formalismus* positiv korreliert (0.27*** statt -0.13*). Eine Erklärung hierfür kann sein, dass durch einen inzwischen deutlich geringeren Grad an Formalismus im Schulunterricht eben dieser Formalismus nicht mehr als hinderlich für das prozesshafte Treiben empfunden wird.

Die Mittelwerte der Faktoren der Erst-Erhebung wurden hinsichtlich etwaiger Unterschiede zwischen Studienanfängern des Bachelor- bzw. Lehramtsstudienganges untersucht. Dabei zeigten die Bachelor-Studierenden signifikant höhere Werte in den Faktoren *Formalismus* (Cohens d=0,46; p=0,005), *Kreativität* (d=0,36; p=0,032) und *Prozess-Charakter* (d=0,32; p=0,048). Dies passt zu den Erkenntnissen von Blömeke 2009: „*Diplom-Mathematiker und Mathematiklehrkräfte unterscheiden sich nicht hinsichtlich ihrer kognitiven Eingangsvoraussetzungen. [...] Das fachliche Interesse und eine fachliche Studienmotivation sind bei Absolvierenden eines Diplom-Mathematikstudiums stärker ausgeprägt [...].*“

Zudem wurde der Fragebogen den 21 Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Vorlesung EnProMa am Ende des Semesters erneut vorgelegt. Insgesamt kamen so 15 vollständig ausgefüllte Datensätze zustande. Da die Differenzen der Faktorwerte hinreichend normalverteilt sind, ließ sich mittels eines paired-t-test nach Student in den Bereichen *Schema-Orientierung* und *Universalität* jeweils ein signifikanter Mittelwertunterschied feststellen. Bei den Faktoren *ES* und *AC* konnte die Signifikanz nicht bestätigt werden, jedoch liegt hier zumindest ein Verdacht auf Signifikanz vor.

| | MW Pre-Test | MW Post-Test | Zuwachs | Effektstärke Cohens d | p-Wert |
|---|---|---|---|---|---|
| SO | 27,8 | 24,6 | -3,2 | 0,70 | 0,017 |
| U | 25,9 | 22,4 | -3,5 | 0,61 | 0,034 |
| ES | *22,1* | *24,5* | *2,4* | *0,49* | *0,079* |
| AC | *40,7* | *38,4* | *-2,3* | *0,43* | *0,083* |

Der geringere Wert bei der *Universalität* passt dabei sehr gut zum Anstieg der Zustimmung im Faktor *Ermessensspielraum*: Beide stellen Indikatoren für ein gesteigertes Bewusstsein hinsichtlich einer gewissen Willkür beim Formulieren von Mathematik dar und haben sich u.a. durch die Eigentätigkeit beim Aufstellen mathematischer Definitionen herausgebildet. Zudem sind auch die Abnahmen in den Bereichen *Schema-Orientierung* und *Anwendungs-Charakter* inhaltlich konsistent. Im Laufe des ersten Fachsemesters findet i.d.R. sowohl eine deutliche Erweiterung mathematischer Lösungswege und Arbeitsmethoden statt, zugleich rückt der im Schulunterricht stärker vermittelte Anwendungscharakter in den Hintergrund. Diese Entwicklung scheint uns allgemein im Mathematikstudium begründet zu sein; die Veränderung in den Faktoren *Ermessensspielraum* und *Universalität* hingegen ist eine durchaus erwünschte Folge des Schnittstellenmoduls. Im Bereich der unterschiedlichen Sichtweisen auf *Kreativität* konnte in diesem Durchgang der Vorlesung Entstehungsprozesse von Mathematik keine Veränderung gefunden werden. Jedoch bietet es sich für nächstes Wintersemester an, die Items zur Kreativität hinsichtlich einer Unterscheidung zwischen *zur Eigentätigkeit benötigter Kreativität* und *Mathematik als kreativem Produkt anderer Menschen* noch einmal unter die Lupe zu nehmen. Eine Präzisierung der Items inklusive einer zugehörigen Nachfolgeuntersuchung ist vorgesehen.

## Literatur


Bauer, Th. (2012). *Arbeitsbuch Analysis*. Wiesbaden: Teubner.

Beutelspacher, A. et al. (2011). *Mathematik Neu Denken*. Wiesbaden: Teubner.

Blömeke, Sigrid (2009). Ausbildungs- und Berufserfolg im Lehramtsstudium im Vergleich zum Diplomstudium. Zur prognostischen Validität kognitiver und psycho-motivationaler Auswahlkriterien. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 12 (1)*, 82-110.

Lakatos, Imre (1979). *Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen*. Originaltitel: *Proofs and Refutations*. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung - eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*. Berlin: Springer.

Törner, G., Grigutsch, S. & Raatz, U. (1998). Mathematische Weltbilder bei Mathematiklehrern. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität Duisburg 296 (1995). *Journal für Mathematikdidaktik 19 (1998)*, 3 - 45.

Tobias WIERNICKI-KRIPS, Aachen

# Invertieren als fundamentale Idee in der Mathematik?

*“Von jedem anderen Fach hat ein Schüler am Ende der Schulzeit wenigstens eine Idee – sogar von Jura oder Wirtschaftswissenschaften, die gar nicht im Lehrplan vorkommen. Nur bei Mathematik kommt der Schulunterricht nicht einmal in die Nähe dessen, was das Fach wirklich ist.“* (Beutelspacher, SPIEGEL 50/2004)

Schülerinnen und Schülern das Wesen der Mathematik nahezubringen ist eines der Ziele, das mit diversen Konzepten von fundamentalen Ideen erreicht werden soll. Im Zentrum dieses Beitrags stehen die These, dass Invertieren zu den fundamentalen Ideen zählt, und die Vorteile einer Berücksichtigung dieser Idee in der Unterrichtspraxis. Dazu wird zunächst kurz auf den Begriff der fundamentalen Idee eingegangen und werden auf dessen Hintergrund Forschungsfragen formuliert.

## 1. Fundamentale Ideen in der Mathematik

Fast jedes Konzept zu mathematischen Ideen setzt andere Zielrichtungen. In vielen werden fundamentale Ideen als übergeordnete Ideen, typische Denkweisen oder Grundpinzipien der Mathematik gesehen, denen eine gewisse Vagheit innewohnt (vgl. Schweiger 1992; Schwill 1993; Vohns 2007). Schwill fasst in einer „Definition“ zusammen:

*„Eine fundamentale Idee (bezgl. einer Wissenschaft) ist ein Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema, das (1) in verschiedenen Bereichen (der Wissenschaft) vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (Horizontalkriterium), (2) auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (Vertikalkriterium), (3) in der historischen Entwicklung (der Wissenschaft) deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (Zeitkriterium), (4) einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (Sinnkriterium).“* (Schwill 1993, S. 23)

Diese Ideen werden bei Lernenden erst durch die Beschäftigung mit mehreren stellvertretenden Inhalten wirksam, denen eine gemeinsame Idee zugeordnet werden kann. In der Literatur genannte Ziele, die durch eine Orientierung an fundamentalen Ideen im Mathematikunterricht erreicht werden sollen, sind z.B.: Wesen der Mathematik transportieren, günstige Transferbedingungen schaffen, Stoff vertikal gliedern, Inhalte strukturieren, besseres Behalten von Inhalten fördern, inner- und außermathematischen Sinn erschließen helfen, herausfordern, Problemlösefähigkeiten verbessern, Me-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1311–1314). Münster: WTM-Verlag

tawissen bei Lehrkräften aufbauen, Reflexion des eigenen Unterrichts anregen (vgl. Schweiger 1992, S. 210-211).

## 2. Forschungsfragen

Mögliche Forschungsfragen im Bereich fundamentale bzw. grundlegende Ideen werden von Schweiger und Vohns genannt (vgl. Schweiger 1992, S. 211-212; Vohns 2007, S. 25, 171). Die Idee des Invertierens selbst wird nur an wenigen Stellen erwähnt (vgl. Mason 1988, S. 35; Schwill 1993, S. 23; Kuntze 2012, S. 3). Eine umfangreiche fachdidaktische Einordnung und Aufarbeitung fehlt. Es ergeben sich z.B. folgende Fragestellungen, auf die hier aus Platzgründen nur kurz eingegangen werden kann: Was versteht man unter der Idee des Invertierens? Welche Chancen eröffnet eine Berücksichtigung dieser Idee in der Unterrichtspraxis? Inwiefern ist Invertieren eine *fundamentale* Idee in der Mathematik? Wie sehen aus stoffdidaktischer Perspektive entsprechende Aufgaben für die Sekundarstufen aus?

## 3. Invertieren als fundamentale Idee

Die hier zugrundeliegende allgemeine Arbeitsdefinition des Invertierens lautet: *Eine Handlung x heißt invertierbar, wenn die durch x verursachte Zustandsänderung rückgängig gemacht werden kann*. Die Idee des Invertierens kann auf diesem Hintergrund unter drei zusammenhängenden und wechselwirkenden Perspektiven gesehen werden: *lernpsychologisch*, *fachdidaktisch* und *fachmathematisch.*

Die *lernpsychologische Perspektive* ist eng mit dem Begriff der Reversibilität nach Piaget verknüpft. Reversibilität beschreibt bei ihm die Fähigkeit, eine Handlung im Geiste rückwärts zu vollziehen, und ist ein Kennzeichen für Verständnis sowie bewegliches Denken. Krutetskii fasst diese als eine von mehreren mathematischen Fähigkeiten auf (vgl. Krutetskii, S. 88). Als Beispiele nennt Krutetskii zueinander inverse Operationen (im mathematischen Sinn) und den Übergang von einem mathematischen Satz zu seiner Umkehrung (vgl. Krutetskii, S. 188-189).

Unter die *fachdidaktische Perspektive* fallen das operative Prinzip und das Prinzip der inversen Denkoperationen (vgl. Wittmann 1985, Laußermayer 1980). Durch das operative Prinzip sind heute sog. Umkehraufgaben im Unterricht weit verbreitet. Eine Standardaufgabe kann durch eine Umkehrfragestellung geöffnet werden und leistet als selbstdifferenzierende oder selbst von den Lernenden zu stellende Aufgabe einen Beitrag zur Binnendifferenzierung (vgl. Ambrus & Schulz 2002). Darüber hinaus wird durch das Betrachten der Umkehrung ein Thema für Schülerinnen und Schüler oft zugänglicher (vgl. Mason 1988; www.abcmaths.net).

Wichtige inhaltsbezogene Beispiele aus *fachmathematischer Perspektive* sind das Gleichungslösen, Umkehrfunktionen und –operationen, inverse Elemente, Zahlbereichserweiterungen (vgl. Heitzer 2011; Greer 2012; Kuntze 2012). Invertieren als heuristische Strategie umfasst z.B. das Rückwärtsarbeiten als Problemlösestrategie (vgl. Ambrus & Schulz 2002, S. 72-73; Kuntze 2012, S. 3).

Somit sehe ich die Idee des Invertierens als eine fundamentale Idee: Das Horizontalkriterium ergibt sich aus der fachmathematischen Perspektive. Das Vertikal- und Sinnkriterium sind erfüllt, da das Rückgängigmachen in vielerlei Kontexten vom Vorschulalter bis in die Wissenschaften vorkommt (vgl. Schwill 1993, S. 22). Das Zeitkriterium ergibt sich aus einer historischen Betrachtung der fachmathematischen Perspektive: z.B. werden Gleichungen seit ca. 2000 v. Chr. gelöst und inverse Elemente sowie Umkehrabbildungen von geometrischen Abbildungen seit ca. 1850 betrachtet.

## 4. Beispielaufgaben für die Sekundarstufen

Nicht überschneidungsfreie mögliche Aufgabenbereiche zur Idee des Invertierens sind: a) Umkehraufgaben, b) Probe, Gleichungen, Rückwärtsarbeiten- / schließen, Satzumkehrungen, c) inverse Elemente, Umkehrabbildungen, Pseudoinverse von Abbbildungen, Umkehroperationen. Dabei korrespondieren der Bereich a) vor allem mit der lernpsychologischen und fachdidaktischen Perspektive und die Bereiche b) und c) eher mit der fachwissenschaftlichen.

Expanding brackets

$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$

| | x | 3 |
|---|---|---|
| x | x² | 3x |
| 2 | 2x | 6 |

$(x+1)(x^2+2x-3)=x^3+3x^2-x-3$

| | x² | 2x | -3 |
|---|---|---|---|
| x | x³ | 2x² | -3x |
| 1 | x² | 2x | -3 |

How can you reverse this process to divide

(i) $x^2+x-12$ by $x+4$?  (ii) $x^3+x^2-5x-2$ by $x-2$?

Das erste Beispiel von Murphy (siehe obenstehende Abbildung, www.abcmaths.net) behandelt das Ausmultiplizieren von Polynomen sowie als Rückrichtung das Faktorisieren und ist den Bereichen a) und b) zuzuordnen. Ein Beispiel für den Bereich c) ist: *„Beim Würfeln mit drei Würfeln erhält man als Augensumme 8. Welche Augensummen sind möglich?“*. Hier ist in der Oberstufe ein Eingehen auf die mathematische Modellierung durch die Pseudoinverse einer Zufallsgröße möglich. Anschließend könnten Zusammenhänge zu Umkehrfunktionen herausgearbeitet werden. Durch diese und weitere Beispiele kann im Sek.-II-Unterricht ein roter Faden zum Rückgängigmachen von Abbildungen sichtbar werden. Weitere Beispiele zum Invertieren sind auf www.abcmaths.net und in Mason 1988 zu finden.

## 5. Fazit und Ausblick

Nach den Kriterien von Schwill sehe ich Invertieren als eine fundamentale Idee. Deren Berücksichtigung kann bei den Schülerinnen und Schülern das Metawissen über Mathematik stärken, Inhalte verknüpfen und ein Verständnis der zugehörigen Themen vertiefen. Für die Lehrkräfte bietet sich die Möglichkeit, ihren eigenen Unterricht im Hinblick auf die Idee des Invertierens zu reflektieren. Die Aufgaben deuten an, dass eine Implementierung dieser Idee im regulären Mathematikunterricht möglich ist.

Eine entscheidende weitergehende Frage ist: Wie kann die Idee des Invertierens konkret für den Unterricht fruchtbar gemacht werden? Denn wichtiger als die Eigenschaft der Fundamentalität einer Idee ist deren unterrichtspraktischer Nutzen, den eine Idee für die Schule erst legitimiert.

## Literatur


Ambrus, A., Schulz, W. (2002). Aufgabenumkehrung - eine Fundgrube für offene Aufgaben. In: Peschek, W. (Hrsg.). *BzMU 2002*. Hildesheim: Franzbecker, S. 71-74.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics 79 (3)*, S. 429-438.

Heitzer, J. (2011). Operation und Umkehroperation. Eine Strategie zum Lösen vieler Gleichungen. *mathematik lehren 169*, S. 49-53.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago, London: University of Chicago.

Kuntze, S. (2012, Hrsg.). Vernetzungsideen. *mathematik lehren 173*. Velber: Friedrich.

Laußermayer, R. (1980). Das Prinzip der inversen Denkoperationen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik 22 (8)*, S. 238-245.

Mason, J. (1988). Doing and undoing. *Project mathematics update*. Walton Hall, Milton Keynes: Open University.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematikdidaktik, 13 (2)*, S. 199-214.

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 25 (1)*, S. 20-31.

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Entwicklung und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips*. Norderstedt: Books on Demand.

Wittmann, E. C. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren 11*, S. 7-11.

Nadine WILHELM, Dortmund

# Modellierungshürden für sprachlich schwache Lernende am Beispiel zweistufiger Zufallsversuche

## 1. Ausgangspunkt: Vielfältige Herausforderungen für sprachlich schwache Lernende in mathematischen Prüfungsaufgaben

Ausgangspunkt der empirischen Studie ist die Analyse der Zentralen Prüfungen 10 (ZP10) 2012 Mathematik NRW mit der Frage, welche potentiellen sprachlich bedingten Hürden für sprachlich schwache Lernende besonders schwierig sind (vgl. Prediger et al. 2013). Neben bereits analysierten sprachlichen und konzeptuellen Hürden (Gürsoy et al. 2013, Wilhelm i.V.) können weitere sprachlich bedingte individuelle Hürden im Modellierungsprozess auftreten. Dies wird exemplarisch an der scheinbar banalen Modellierung zweistufiger Zufallsversuche an Baumdiagrammen betrachtet.

Die Untersuchung der Modellierungsprozesse sprachlich schwacher Lernender ist insofern auch für die Stochastikdidaktik interessant, als die existierende Literatur zwar zahlreiche Unterrichtsvorschläge zur Einführung von Baumdiagrammen macht (vgl. u.a. Kütting & Sauer 2008, Bartz 2008), aber kaum empirische Analysen zu Lösungsprozessen und Fehlvorstellungen bei der Modellierung von zweistufigen Zufallsversuchen an Baumdiagrammen existieren. Daher ist es notwendig, ein Analysemodell zu entwickeln, das im Folgenden vorgestellt wird (vgl. auch Wilhelm i.V.).

## 2. Modellierung von zweitstufigen Zufallsversuchen in den ZP10 2012

Exemplarisch betrachtet wird hier die Baumdiagramm-Aufgabe der ZP10 2012 für den mittleren Schulabschluss (Abb. 1).

Zentrale Prüfungen 10 2012 NRW (Realschule) Prüfungsteil 2: Items 3b & 3c

Bei der Fußball-WM 2010 wurde der Krake Paul international berühmt. Vor jedem Fußballspiel wurden zwei Futterboxen in sein Aquarium gesenkt. […] Seine Wahl wurde dann von den Medien als „Vorhersage" des Gewinners des Fußballspiels gedeutet. […]

Gehe davon aus, dass Pauls „Vorhersagen" zufällig geschehen sind. Mathematisch betrachtet handelt es sich bei den „Vorhersagen" also um einen Zufallsversuch mit zwei gleich wahrscheinlichen Ergebnissen. [...]

b) Zeichne ein Baumdiagramm, das die Wahrscheinlichkeiten für zwei Vorhersagen angibt.

c) Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Paul zwei Spiele hintereinander richtig tippt, ¼ beträgt.

**Abb. 1: Baumdiagramm-Aufgabe der ZP10 2012**

In der DIF-Analyse zeigt sich die Aufgabe als eine derer, die von sprachlich schwachen Lernenden signifikant seltener richtig gelöst wurden als dies aufgrund ihrer Gesamtleistung zu erwarten war. Die Analyse von 13

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1315–1318). Münster: WTM-Verlag

im Interviewsetting videographierten Bearbeitungsprozessen zu dieser Aufgabe macht deutlich, dass auch die meisten sprachlich schwachen Lernenden durchaus adäquate Situationsmodelle bilden, also nicht Hürden im Leseprozess hier ursächlich für die danach auftauchenden Modellierungsschwierigkeiten sind.

Folgende konkrete Schritte sind bei der Modellierung notwendig (Abb. 2): Ausgangspunkt der Überlegungen zur Aufstellung eines Baumdiagramms ist die Frage nach dem *Ergebnisraum*. Wie unter Abschnitt 3 beispielhaft illustriert wird, bestehen dabei für die in der Aufgabe geforderten zwei Vorhersagen mehrere Möglichkeiten. Dem folgt die *Benennung der möglichen Ergebnisse*, wo sich neben Ergebnistupeln aus den Elementarergebnissen „Richtig“ und „Falsch“ gemäß dem festgelegten Ergebnisraum weitere Möglichkeiten ergeben. Die *Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten* bezieht sich bei einer tragfähigen Modellierung auf genau diese Ergebnistupel. Aus dem Schritt der *Übertragung auf das Baumdiagramm* resultiert das schriftliche Produkt der Aufgabenbearbeitung.

Schritte zur Modellierung eines zweistufigen Zufallsexperiments

- Grobe Spezifizierung des Ergebnisraums
- Benennung der möglichen Ergebnisse
- Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten
- Übertragung auf das Baumdiagramm

**Abb. 2: Schritte zur Modellierung eines zweistufigen Zufallsexperiments**

## 3. Kontrastierung von zwei exemplarischen Bearbeitungsprozessen

*Fallbeispiel Alexandros (10. Klasse Gesamtschule, Mathematik-E-Kurs; DaZ, sprachlich stark):* Er zeichnet sich in seiner Aufgabenbearbeitung durch die strukturierte Planung der Modellierung aus. Alexandros nimmt sich viel Zeit zur Klärung der Sachsituation, nachdem er die kleinste allgemeine Struktur eines Baumdiagramms (zwei Äste ausgehend von einem Knoten) gezeichnet hat. Er baut sein Baumdiagramm sukzessive durch das Wechselspiel der Ebene des Modells Baumdiagramm und der vorliegenden Sachsituation auf. Er hält sich dabei nicht lange auf der Ebene des einstufigen Zufallsversuchs auf, sondern geht durch die Verkettung mit einer weiteren Vorhersage schnell zum zweistufigen Zufallsversuch über. Den Ergebnisraum spezifiziert er durch die Entscheidungen von Krake Paul. Die möglichen Ergebnisse wählt er dazu passend als Tupel (Deutschland, Gegner), (Gegner, Gegner) usw. (im schriftlichen Produkt nicht vermerkt, siehe Abb. 3). Folglich zeichnen sich seine gewählten Konstrukte durch ein hohes Maß an Kohärenz aus. Seine Äußerungen, aus denen diese Konstrukte rekonstruiert wurden, weisen zudem einen hohen Explizitheitsgrad auf

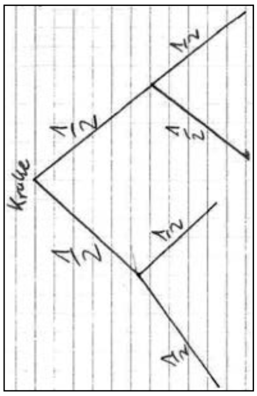



**Abb. 3: Alexandros' schriftliches Produkt**

(vgl. zur Benennung der möglichen Ergebnisse: „Und er muss hier entscheiden, dass zwei mal Deutschland gewinnen wird zum Beispiel.“), wodurch er während des Interviews nach und nach ein tiefes Verständnis seines mathematischen Modells in Anbindung an die Sachsituation erhält.

*Fallbeispiel Delia (10. Klasse Gesamtschule, Mathematik-E-Kurs; bilingual, sprachlich schwach):* Sie startet ihre Bearbeitung der Baumdiagramm-Aufgabe mit dem Zeichnen eines zweistufigen Baumdiagramms, an dessen Äste sie Brüche schreibt (Abb. 4). Sie zieht dabei verschiedene Überlegungen aus dem Bereich der Stochastik heran, die bei der vorliegenden Sachsituation als nicht passend einzuordnen sind. In all ihren Ausführungen bleibt Delia konzeptuell und sprachlich sehr vage (vgl. zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten: „Ich würde da ein Zweitel nehmen.“). Aussagen, die sich direkt auf die Sachsituation beziehen, müssen oftmals von der Interviewerin initiiert werden. Die Bearbeitung von Item 3b schließt mit einem rein technischen Bezug zu den im Baumdiagramm vermerkten Brüchen. Item 3c bearbeitet Delia durch das Aufschreiben einer nicht passenden Rechnung ohne Rückgriff auf das zuvor erstellte Baumdiagramm. Bzgl. der in Abschnitt 2 vorgestellten Schritte zur Modellierung eines zweistufigen Zufallsversuchs zieht Delia – sofern sie expliziter in ihren Ausführungen wird – verschiedene zueinander konkurrierende Konstrukte heran. Vermutlich aufgrund der mangelnden Durchdringung der Sachsituation verbleiben ihre Ausführungen auf der Stufe der Modellierung des einstufigen Zufallsversuchs.

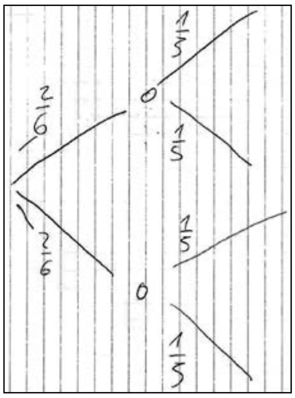


**Abb. 4: Delias schriftliches Produkt**

## 4. Fazit und Konsequenzen für den Unterricht

Die Hürden bei den ZP10 2012 liegen für sprachlich schwache Lernende nicht lediglich im rezeptiven Umgang mit Aufgabentexten und der Konstruktion des Situationsmodells, sondern auch auf der Ebene typischer Diskursfunktionen, die sich in prozessualen Hürden niederschlagen können. Diskursfunktionen werden hier verstanden als „Kategorien des sprachlich realisierten Denkens und des Strukturierens von Wissen sowie der damit zusammenhängenden wissensbasierten Äußerungsformen.“ (Vollmer & Thürmann 2010, S. 116) Die exemplarische Kontrastierung von Alexandros und Delia zeigt, dass Schwierigkeiten durch ein komplexes Zusammenspiel sprachlicher und prozessualer Hürden entstehen können, in dem sich die explizitsprachlichen Mittel der Bildungssprache als Voraussetzung für „Higher order thinking skills“ (vgl. Feilke 2012) wie dem Modellieren erweisen. So geht Delias unzureichende Aktivierung der Diskursfunktion

‚Sich Festlegen' einher mit einer auffälligen Vagheit ihrer sprachlichen Realisierungen. Gerade für diese Funktion der Bildungssprache, „Sachverhalte und ihre Zusammenhänge […] möglichst nachvollziehbar, d. h. explizit darstellen und fokussieren [zu können]" (Feilke 2012, S. 8), sind explizitsprachliche Mittel optimiert, die Delia jedoch in der Situation nicht zur Verfügung stehen. Damit zeigt sich ein interessantes Beispiel für den Zusammenhang von prozessualen Hürden (hier beim Modellieren), Diskursfunktionen (wie dem Sich Festlegen) und den dazu notwendigen explizitsprachlichen Mitteln. Dies verweist auf eine wichtige Tiefendimension der kognitiven Funktion von Sprache jenseits der Begriffsbildung.

Welche unterrichtlichen Konsequenzen folgen aus diesen Befunden? Bildungs- und fachsprachliche Förderung im Mathematikunterricht sollte sich nicht nur auf Wort- und Satzebene beziehen, sondern auch auf der Ebene der Diskursfunktionen erfolgen, bei denen sprachliche Mittel in ihrer pragmatischen Funktion für typische Denkhandlungen thematisiert werden sollten. Prozessuale Hilfestellungen müssen die wichtigen Denkhandlungen unterstützen: Welche Möglichkeiten willst du im Baumdiagramm unterscheiden? Wie heißen die Ergebnisse an den Knoten und Ästen genau? Passen deine Bezeichnungen zusammen? Um zu vage Herangehensweisen und Erläuterungen zu überwinden und das Sich Festlegen zu unterstützen, können entsprechende sprachliche Mittel zur Verfügung gestellt werden (In der Vorhersage geht es um…, Der Ast steht für…).

## Literatur


Bartz, S. (2008): Baumdiagramme als roter Faden der Schulstochastik. Vorstellung eines baumorientierten Stochastiklehrgangs. *Stochastik in der Schule, 28(1),* 6–10.

Feilke, H. (2012): Bildungssprachliche Kompetenzen – fördern und entwickeln. *Praxis Deutsch, 39(233),* 4–13.

Gürsoy, E., Benholz, C., Renk, N., Prediger, S. & Büchter, A. (2013): Erlös = Erlösung? – Sprachliche und konzeptuelle Hürden in Prüfungsaufgaben. *Deutsch als Zweitsprache, 1,* 14–24.

Kütting, H. & Sauer, M. J. (2008): *Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte* (2. Auflage). Berlin, Heidelberg: Spektrum.

Prediger, S., Renk, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2013): Family background or language disadvantages? In: *Proceedings of PME 37* (S. 4.49–4.56), Vol. 4. Kiel, Germany: PME.

Vollmer, H. J. & Thürmann, E. (2010): Zur Sprachlichkeit des Fachlernens: Modellierung eines Referenzrahmens für Deutsch als Zweitsprache. In B. Ahrenholz (Hrsg.), *Fachunterricht und Deutsch als Zweitsprache* (S. 107–132). Tübingen: narr Verlag.

Wilhelm, N. (i.V.): *Hürden in Löseprozessen von mathematischen Prüfungsaufgaben durch sprachlich schwache Lernende – Quantitative und qualitative Analysen* (Arbeitstitel). Dissertation in Vorbereitung, TU Dortmund.

Gerald WITTMANN, Stephanie SCHULER, Maria PELZER,
Anika WITTKOWSKI, Freiburg

# Anschlussfähigkeit der mathematikdidaktischen Überzeugungen von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen

## 1. Theoretischer Rahmen

Im Hinblick auf das Verhältnis von Kindergarten und Grundschule unterscheidet Roßbach (2006, 285 f.) zwei idealtypische Positionen: Einerseits die Forderung nach einer Erhöhung der Kontinuität zwischen beiden Bildungsinstitutionen mit dem Ziel eines gleitenden, bruchlosen Übergangs für das einzelne Kind, andererseits die Sichtweise, dass *Diskontinuitäten als entwicklungsförderliche Herausforderungen* anzusehen sind, bei deren Bewältigung das Kind durch alle am Übergang Beteiligten unterstützt werden muss. Für die *Anschlussfähigkeit* von Kindergarten und Grundschule ist demnach entscheidend, dass diese *Unterschiede gezielt gestaltet werden* und nicht lediglich das Ergebnis von Zufälligkeiten oder Traditionen sind.

Es ist davon auszugehen, dass die Gestaltung des Übergangs vom Kindergarten in die Grundschule maßgeblich durch die professionellen Überzeugungen der pädagogischen Fachkräfte beider Einrichtungen beeinflusst wird. So stellen *auf Mathematik und das Mathematiklernen bezogene Überzeugungen* von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen eine wichtige Komponente ihrer professionellen Kompetenz dar, hinzu kommen unter anderem Motivation und Selbstregulation (vgl. Anders 2012, Baumert & Kunter 2006).

## 2. Forschungsfragen und Untersuchungsdesign

Bezogen auf die Anschlussfähigkeit beider Institutionen lassen sich drei Untersuchungsfragen formulieren:

1. Wie beschreiben und begründen ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen ihr Handeln in Bezug auf das Mathematiklernen im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule?
2. Wie beschreiben und bewerten beide Professionen die stattfindende Kooperation ihrer Einrichtungen in Bezug auf das Mathematiklernen?
3. Welche Erwartungen richten beide Professionen an die jeweils andere Institution in Bezug auf die Anschlussfähigkeit des Mathematiklernens?

Da die Studie auf möglichst handlungsrelevante professionsbezogene Überzeugungen zielt, sollten bei den TeilnehmerInnen Beschreibungen und vor allem Bewertungen von Materialien für das Mathematiklernen, des eigenen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1319–1322). Münster: WTM-Verlag

professionellen Handelns, des Handelns der jeweils anderen Profession und der Erwartungen an dieses Handeln angeregt werden. Dazu wurden zwei Settings wie folgt initiiert: Im Rahmen von zehn *Fallstudien* wurden fünf Mathematikangebote von ErzieherInnen und fünf Mathematikstunden von LehrerInnen zu Beginn des ersten Schuljahres, die nach Aussage der Betreffenden jeweils typisch waren, per Video aufgezeichnet. Anschließend wurden die ErzieherInnen und LehrerInnen in einem halboffenen Leitfadeninterview zum zuvor stattfindenden Angebot bzw. Unterricht und darüber hinaus zur Kooperation mit der jeweils anderen Institution befragt. In zwei *Gruppendiskussionen* tauschten sich insgesamt 35 TeilnehmerInnen beider Professionen zunächst in getrennten Gesprächsrunden untereinander aus. Sie sollten hierzu Materialien, die sie regelmäßig einsetzen und als gut erachten, mitbringen und vorstellen. Anschließend trafen sich alle TeilnehmerInnen im Plenum, diskutierten ihre Erfahrungen zum Mathematiklernen im Übergang vom Kindergarten in die Grundschule und formulierten diesbezügliche Erwartungen an die jeweils andere Institution.

Der erste Schritt zur Auswertung der Transkripte, eine *qualitative Inhaltsanalyse*, diente in erster Linie der inhaltlichen Strukturierung des umfangreichen Datenmaterials (vgl. Mayring 2010, 63 ff.). Hierbei wurde das Datenmaterial kodiert, indem Textpassagen vorab festgelegten übergreifenden Kategorien sowie aus den Daten heraus gebildeten Unterkategorien zugeordnet wurden. Eine anschließende Interpretation (formulierend und reflektierend) in Anlehnung an die *dokumentarische Methode* nach Bohnsack (2010, 134 ff.) erfolgte, um neben expliziten auch implizite Überzeugungen rekonstruieren zu können. Insgesamt lässt sich so ein *Spektrum von Überzeugungen* beider Professionen beschreiben.

## 3. Ergebnisse

Gegliedert gemäß den drei Untersuchungsfragen werden im Folgenden ausgewählte Ergebnisse vorgestellt (für weitere Ergebnisse und deren Diskussion vgl. Schuler & Wittmann 2014).

*Beschreibung und Begründung des eigenen Handelns in Bezug auf das Mathematiklernen im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*: Die *LehrerInnen* stellen verschiedene didaktische Arbeitsmittel für den Anfangsunterricht vor, die zumeist auf den Aufbau des Zahlverständnisses zielen. Über ihre Relevanz besteht unter den beteiligten LehrerInnen große Einigkeit; diese Überzeugungen spiegeln überwiegend an der aktuellen Fachdidaktik oder den Bildungsplänen orientierte Überzeugungen wider. Daneben spielen Schulbücher und Übungshefte bzw. Übungsmaterialien mit Selbstkontrolle eine wichtige Rolle. Die beteiligten *ErzieherInnen* beschreiben zwei grundsätzlich unterschiedliche Formen des Materialeinsatzes: Erstens finden in kindergartentypischen (Alltags-)Situationen wie Freispiel oder offenen Angeboten Aktivitäten mit (Alltags-)Materialien statt. Dahinter kann die implizite Überzeugung rekonstruiert werden, dass Mathematiklernen im Kindergartenalltag stattfinden kann und soll: Die Materialien sind ständig verfügbar und ein flexibles Eingehen auf die Interessen der Kinder ist möglich. Zweitens wird der Einsatz spezieller Programme zum vorschulischen Mathematiklernen (häufig: „Zahlenland") in Form von Angeboten oder in altershomogenen Gruppen im vorletzten und letzten Kindergartenjahr mit unterschiedlichen Argumenten begründet. Praktizieren ErzieherInnen sowohl das Mathematiklernen im Alltag als auch den Einsatz von Programmen, so ist dahinter die Überzeugung erkennbar, dass sich beide Ansätze ergänzen: Während Mathematiklernen im Alltag immer ein Stück weit zufällig bleiben muss, gelingt mittels eines Programms die Schulvorbereitung aller Kinder. Lehnen ErzieherInnen mathematische Frühförderprogramme hingegen grundsätzlich ab, dann mit dem Argument, dass solche Programme die Interessen der Kinder nicht aufgreifen oder sogar übergehen, was durchaus im Einklang mit fachdidaktische Positionen steht.

Für die beteiligten *LehrerInnen* stellt sich der Umgang mit Heterogenität als eine der großen Herausforderungen ihres Berufsalltags dar, insbesondere am Schulanfang. So zeigt sich die Möglichkeit der Differenzierung, besonders die Individualisierung (einschließlich der Selbstkontrolle von Ergebnissen), als ein wesentliches Beurteilungskriterium für Schulbücher und Übungshefte. Das Augenmerk der LehrerInnen gilt durchgängig den leistungsschwachen Kindern, mit der Zielsetzung, dass auch diese die nötigen Grundlagen des Zahlbegriffs erwerben. Eine spezielle Förderung von Stärken der Kinder wird nicht erwähnt. Hier tritt ein großer Unterschied beider Professionen zutage, denn alle beteiligten *ErzieherInnen* beschreiben ausnahmslos den Umgang mit heterogenen (insbesondere auch altersgemischten) Gruppen als üblichen Alltag. Im Hintergrund lassen sich hier verschiedene Lernkulturen erkennen sowie ein jeweils spezifisches Bild vom Kind rekonstruieren – diesbezüglich sind die Unterschiede zwischen den Professionen deutlich größer als die Unterschiede innerhalb der Professionen.

*Beschreibung und Bewertung der stattfindenden Kooperation*: Die Kooperationsmaßnahmen umfassen in den Beschreibungen beider Professionen zwei Elemente: Erstens besuchen Kindergartenkinder die Schule, um diese kennenzulernen. Zweitens kommt die Kooperationslehrkraft in den Kindergarten, um den Entwicklungsstand der Kinder festzustellen. Die ErzieherInnen spielen hierbei als Akteure eine marginale oder keine Rolle. Aus der Außenperspektive betrachtet verläuft die Kooperation asymmetrisch, auch wenn sie weder von den LehrerInnen noch von den ErzieherInnen explizit so beschrieben wird. Es scheint die Überzeugung beider Professionen zu sein, dass die KooperationslehrerInnen die wesentlichen AkteurInnen sind. Insbesondere bei den ErzieherInnen widerspricht dies offenbar nicht einer Einschätzung der Kooperation als sehr gut und funktionierend.

*Erwartungen an die jeweils andere Institution*: Die befragten LehrerInnen äußern in großer Übereinstimmung konkrete Erwartungen, was die Kinder am Schulbeginn bereits können sollen. Ein gezieltes und weiter führendes Mathematiklernen im Kindergarten sehen LehrerInnen vielfach kritisch: Erkennbar ist dahinter die implizite Überzeugung, dass nur sie über die nötige Kompetenz für die Gestaltung mathematischer Lernprozesse verfügen, nicht jedoch ErzieherInnen. Hinter den seitens der LehrerInnen explizit geäußerten Erwartungen an die Schulvorbereitung im Kindergarten ist weiter die implizite Überzeugung erkennbar, dass diese die alltägliche Arbeit im Klassenverband erleichtern soll, und zwar sowohl inhaltlich als auch in Bezug auf die Klassenführung: Je mehr die Kinder am Schulanfang bereits können, desto weniger Schwierigkeiten und individueller Förderbedarf treten auf und umso einfacher kann der Unterricht fortschreiten. Die Erwartungen von *ErzieherInnen* bleiben hingegen eher diffus.

## Literatur


Anders, Y. (2012). *Modelle professioneller Kompetenzen für frühpädagogische Fachkräfte. Aktueller Stand und ihr Bezug zur Professionalisierung. Expertise für den Aktionsrat Bildung.* http://www.aktionsrat-bildung.de [Zugriff am 05.02.2014].

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4), 469–520.

Bohnsack, R. (2010). *Rekonstruktive Sozialforschung: Einführung in qualitative Methoden* (8. Auflage). Opladen: Leske + Budrich.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (11. Auflage). Weinheim und Basel: Beltz.

Roßbach, H.-G. (2006). Institutionelle Übergänge in der Frühpädagogik. In: Fried, L. & Roux, S. (Hrsg.): *Pädagogik der frühen Kindheit*. Weinheim: Basel, 280–292.

Schuler, S. & Wittmann, G. (2014). Mathematiklernen im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule aus der Sicht von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen. *Zeitschrift für Grundschulforschung, Bildung im Elementar- und Primarbereich*, 7(1), 46–59.



Das diesem Beitrag zugrundeliegende Verbundprojekt wird mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung und des Europäischen Sozialfonds der Europäischen Union unter den Förderkennzeichen 01NV1025/1026 (Universität Bremen) und 01NV1027/1028 (Pädagogische Hochschule Freiburg) gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

Ingo WITZKE, Köln

# Forschend lernen zu lehren - ein Projekt zur Gestaltung der neu geschaffenen Praxisphase in NRW

Ziel des mit dem Wintersemester 2013/14 gestarteten Projektes ist es, ein Format zu entwickeln und zu erproben, das eine optimale Vorbereitung und Begleitung der Studierenden im (Master-) Lehramtsstudium während der neu geschaffenen Praxisphase in NRW (Beginn: WS 2015/16) ermöglicht. Das Projekt wird im Rahmen der „Innovation in der Lehre“ an der Universität zu Köln durch Qualitätsverbesserungsmittel für die Dauer von 4 Semestern unterstützt.

In einem Vorbereitungsseminar werden den Studierenden zunächst wichtige Inhalte für die Praxisphase vermittelt: Entwicklung von Lernkonzepten und -materialien, Sammeln von Lehrerfahrung im Rahmen von eigenverantwortlich gestalteten Seminarsitzungen sowie Vermittlung von theoretischen Konzepten zur Dokumentation und Evaluation von Lehr-Lern-Prozessen. Die entwickelten Lernszenarien werden dann im Praxissemester in Begleitung implementiert und evaluiert. Die gewonnenen Erkenntnisse sollen im Rahmen von Abschlussarbeiten (Masterarbeiten) aufgearbeitet und für den folgenden Durchlauf des Projekts fruchtbar gemacht werden. Mithilfe des Projekts soll der „Praxisschock“ für die Studierenden abgemildert, ein forschend-reflexiver Blick auf Unterricht vermittelt und ein vernetzter Unterricht (Mathematik und Physik) ermöglicht werden. Dabei ist ein Begriff des forschenden Lernens, der die Bedeutsamkeit einer wissenschaftlichen Perspektive auf Lehr-Lernprozesse unterstreicht, für das Projekt zentral:

„Hochschulausbildung soll die Haltung forschenden Lernens einüben und fördern, um die zukünftigen Lehrer zu befähigen, ihr Theoriewissen für die Analyse und Gestaltung des Berufsfeldes nutzbar zu machen und auf diese Weise ihre Lehrtätigkeit nicht wissenschaftsfern, sondern in einer forschenden Grundhaltung auszuüben. Der Erwerb dieser Kompetenz zur Vermittlung aktuellen disziplinären Wissens verbunden mit reflexivem Berufswissen soll in fachwissenschaftlichen, erziehungswissenschaftlichen und didaktisch-methodischen Studien erreicht werden.“ (Wissenschaftsrat 2001, S. 41)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1323–1326). Münster: WTM-Verlag

## 1. Zusammenarbeit Mathematik und Physik

Es besteht Konsens unter Didaktikern wie Fachwissenschaftlern, dass für ein umfassendes Verständnis der jeweiligen Disziplin zumindest Grundkenntnisse in den benachbarten wissenschaftlichen Feldern erforderlich sind. Während die Mathematik wesentliche Anwendungen in der Physik erfährt, benötigt die Physik in genuiner Weise die Mathematik zur Abbildung und Erklärung von Umweltprozessen. Beide Fächer können nur dann im Schulunterricht authentisch und gewinnbringend vermittelt werden, wenn immer wieder Querverbindungen gesucht und Synergieeffekte ausgenutzt werden. Didaktische Forschungsbeiträge insbesondere der Arbeitsgruppe „Rekonstruktion von mathematischem Wissen“ (Universität zu Köln) zeigen, dass diese Synergieeffekte weit über den im Lehrplan Naturwissenschaften (Sek I, NRW) geforderten „Werkzeugkompetenzen“ (wie z.B. Nutzung einer Tabellenkalkulation) liegen:

So hat die didaktische Forderung nach beziehungshaltigem Mathematik- und Physikunterricht zur Folge, dass gerade auch im Fach Mathematik anschaulich und kontextgebunden Wissen vermittelt wird. Mathematik, so die wissenschaftlich belegte These (u.a. Burscheid & Struve 2010, Schoenfeld 1985 & 2011, Witzke 2012 & 2014), wird in vielen Teilen des Schulunterricht als eine gegenständlich-naturwissenschaftliche Theorie vermittelt und erfahren. Wesentliche Tätigkeiten wie Begriffsbildung, Hypothesengewinnung oder das Formulieren von Begründungen verlaufen demnach in den benachbarten Fächern analog – die Forderung nach einem angemessen vernetzten Unterricht von Mathematik und den Naturwissenschaften, wie sie das Projekt befördern soll, ist damit eine logische Konsequenz.

## 2. Design-Based Resarch

Fachdidaktik verstehen wir dabei nicht als Lieferant von Unterrichtsvorschlägen, sondern als Wissenschaft zur Erforschung und Entwicklung von Lehr-Lernprozessen einschließlich ihrer Voraussetzungen, Zielsetzungen und Rahmenbedingungen. *Design-Based Research* Ansätze suchen aus einem wissenschaftlichen Erkenntnisstand heraus authentische und motivierende Lernszenarien zu „designen“ (vgl. Prediger et al. 2012/13). Diese werden in der Praxis erprobt und evaluiert, um sie dann in überarbeiteter Form wieder in den Unterricht einzubringen. Wissensentwicklung und Fortschritt bzgl. des Schulunterrichts ist in diesem Sinne nicht als Einbahnstraße sondern als fortwährender iterativer reflexiver Prozess aufzufassen. Im Entwicklungs- und Evaluationsprozess sind dabei idealerweise alle der an Unterricht beteiligten Personen eingebunden: Wissenschaftler, Studierende, Lehrer und Schüler. Die Arbeit im „DBR-Ansatz“ für das vorliegende Pilotprojekt ist dabei durch zwei Ebenen gekennzeichnet:

Zum einen werden an geeigneten praxisrelevanten Fragestellungen exemplarisch Konzepte und Materialien für den fächerübergreifenden Unterricht erarbeitet (*konstruktive Dimension*), zum anderen wird der forschend-reflexive Blick auf Probleme schulischen Lernens geschärft (*rekonstruktive Dimension*). Dazu werden z. B. Unterrichtssequenzen aufgezeichnet, transkribiert und im Rahmen von Interaktionsforschung und interpretativer Lehr-Lernforschung (Bauersfeld, Voigt, Meyer) analysiert. Die Vernetzung beider Ebenen erscheint dabei als ein Schlüssel zu sinnstiftendem Unterricht.

## 3. Erste Erfahrungen

Zielvorgabe für ein Pilotseminar war es, 15 Studierende aus verschiedenen Lehramtsstudiengängen (G, HR und Gym) unter der Perspektive von forschendem Lernen, auf ihren Einsatz im Schulpraktikum vorzubereiten.

Dazu wurden zunächst Peergroups von jeweils 3 Studierenden konstituiert, in denen jeweils Studierende der Fächer Mathematik *und* Physik zusammenarbeiten konnten. Diese Teams blieben das ganze Semester über bestehen und erhielten zwei Arbeitsaufträge: Zum Einen galt es für die Studierenden eine vorgegebene Theoriesitzung (Subjektive Erfahrungsbereiche, Nature of Science, Interaktionstheorie, Basismodelltheorie...) vorzubereiten, zum Anderen wurden die Studierenden mit der Aufgabe betraut eine Unterrichtskonzeption für unsere Schülerlaborsitzungen vorzubereiten. Die Teams wurden jeweils durch einen Dozenten und eine erfahrene Lehrkraft betreut und gecoacht – der Schwerpunkt lag dabei auf der Motivation einer selbstständigen forschenden Tätigkeit durch die Studierenden. Die besondere Zielvorgabe für die Theoriesitzungen lag darin, Ansätze aus der Mathematikdidaktik und der Physikdidaktik gewinnbringend miteinander zu verbinden um diese dann später für die Konzeption und Analyse eines Lernszenarios sinnhaft nutzen zu können; gerade unser Pretest zu Erwartungen der Studierenden hatte in diesem Kontext ergeben, dass die Mehrzahl der Lehramtsstudierenden insbesondere bzgl. der Vernetzung von Theorie und Praxis in Hinblick auf die Schule noch Defizite an sich feststellten.

## 4. Zielvorgaben für den nächsten Iterationsschritt

Zunächst werden die im Seminar durch die Studierendenteams entwickelten, sowie im Schülerlabor erprobten Unterrichtskonzepte, von den Studierenden in ihrem Praktikum eingesetzt, dokumentiert und interpretiert. Zudem entwickeln wir eine Internetplattform (vgl. http://www.portal.uni-koeln.de/5238.html), welche die von den Studierenden entwickelten Konzepte, Seminarverlaufsplan sowie den Beobachtungsbogen der Öffentlichkeit zur Übernahme und Diskussion zugänglich macht.

Die im Vorbereitungsseminar und im Praktikum erarbeiteten Materialien sollen den Studierenden im kommenden Semester zur Verfügung gestellt werden. Auf diese Weise erhalten sie Forschungsmaterial um ihrerseits Unterricht zu gestalten und zu erforschen. Gerade die ersten Theoriesitzungen des kommenden Durchganges im Sommersemester 2014 werden stark davon profitieren, dass wir mit authentischen Materialen (z.B. Transkripte) der Vorgänger arbeiten können. Der Posttest des ersten Pilotseminars hat ergeben, dass die Studierenden das Format in der überwiegenden Mehrzahl als sehr gewinnbringend für ihren weiteren Weg in das Lehramt sehen – gewünscht werden noch klarere theoretische Beobachtungsaufträge für die Schülerlaborsitzungen. Noch mehr Augenmerk wird daher im zweiten Durchgang auf die Intensivierung der Verbindung theoretischer Modelle und der praktischen Schülerlaborsitzungen gelegt. Wie gewinnbringend die theoretische Ebene sein konnte, zeigte sich z.B. auf der Ebene der Interaktionsmuster (Voigt 1984). Hier wurde den Studierenden in den Praxiselementen sehr deutlich wie Schmal der Grad zwischen Trichtermustern (inszenierte Alltäglichkeit, Erarbeitungsprozessmuster...) und einem wirklich verständnisorientierten Unterricht sein kann.

## Literatur


Burscheid, H. J., Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen*. Hildesheim: Franzbecker.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B., Thiele, J. (2012). *Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell*. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht. 65(8), S. 452-457

Schoenfeld, A., (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando, Academic Press.

Schoenfeld, A., (2011). *How We Think*, In: Studies in mathematical thinking and learning, New York: Routeledge.

Voigt, J., (1984). *Die Kluft zwischen didaktischen Maximen und ihrer Verwirklichung im Mathematikunterricht* — dargestellt an einer Szene aus dem alltäglichen Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik 5/4, S. 265-283.

Wissenschaftsrat (2001). Empfehlungen zur künftigen Struktur der Lehrerausbildung. Berlin.

Witzke, I. (2012). *Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht?* In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 46, Bd. 2, S. 949-952.

Witzke, I. (2014). *Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichts.* In: Der Mathematikunterricht 2/14, S. 19-31.

Deborah WÖRNER, Nürnberg

# Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – eine exemplarische Studie

Laut Vollrath ist ein „Spannungsverhältnis zwischen Formenkunde und Flächeninhaltslehre" bereits seit der Grundschule eine Ursache für Probleme bei der Ausbildung des Flächeninhaltsbegriffs. Als Folge eines häufigen „formellastigen Kalkülrechnens" im Unterricht ist ein Defizit beim Flächeninhaltsbegriff bis ins Gymnasium zu beobachten. (Vollrath, 1999, S. 194; vgl. hierzu auch Besuden, 1984, S. 34ff, Fricke, 1983, S.9). Von Lehrern wird immer wieder wahrgenommen, dass Schüler über keine geeignete Strategien zur Bestimmung des Flächeninhalts von unterrichtlich untypischen Figuren[1] verfügen und bei der Anwendung der Formeln zur Umfangs- und Flächeninhaltsberechnung eine große Unsicherheit zeigen. Es stellt sich also die Frage, in wie weit Schüler überhaupt über mathematisch sinnvolle Grundvorstellungen (GV) zum Flächeninhaltsbegriff verfügen und in wie weit die genannten Defizite durch die Ausbildung von sinnvollen GV behoben werden können. Der folgende Beitrag stellt einen Vorschlag zur Ausbildung von *Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff* zur Diskussion und beschreibt erste Ergebnisse einer Pilotstudie zur Wirkung von GV zum Flächeninhaltsbegriff auf die Lösungshäufigkeit von Kalkülaufgaben.

## 1. Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff

Der *Flächeninhalt einer ebenen Figur* ist eine Zahl, die durch eine Funktion $F$ der Figur zugeordnet wird. Dabei muss die Funktion $F$ folgende Eigenschaften besitzen: *Positivität, Invarianz, Additivität* und *Normiertheit* (vgl. Fricke, 1983). Hieraus ergeben sich folgende mathematische *Leitideen*[2], die die Basis für eine Formulierung sinnvoller GV bilden:

*Mathematische Leitideen zum Flächeninhaltsbegriff*

1. Der Flächeninhalt einer Figur ist eine positive Maßzahl.
2. Zwei deckungsgleiche Figuren sind immer auch inhaltsgleich.

---

[1] Unter mathematisch untypischen Figuren werden Figuren verstanden, die keinem im Lehrplan geforderten n-Eck entsprechen. Beispiele sind: Grundrisse von Wohnungen und Kontinenten, geschlossene Kurven oder zusammengesetzte Figuren, usw.

[2] Wir beschränken uns zunächst bewusst ausschließlich auf sinnvolle, von der Mathematik angestrebte Leitideen, um daran orientiert passende Grundvorstellungen auszuformulieren (vgl. vom Hofe, 1995).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1327–1330). Münster: WTM-Verlag

3. Haben zwei Figuren keinen gemeinsamen Schnittpunkt (ausgenommen dem Rand), so ist der Flächeninhalt der zusammengesetzten Figur, die Summe aus den Flächeninhalten der jeweiligen Einzelfiguren.
4. Dem Flächeninhalt eines Quadrats mit der Kantenlänge 1 cm wird (willkürlich) die Maßzahl 1 cm² zugeordnet.

Diese stark mathematisch orientierten Leitideen lassen sich durch weitere zentrale Erkenntnisse aus der Grundschule (zu kongruenten Figuren) ergänzen. Dabei werden zwei Figuren als flächeninhaltsgleich angesehen, wenn sie deckungsgleich, zerlegungsgleich oder auslegungsgleich sind (vgl. z.B. Franke, 2007). Anhand der unterschiedlichen Leitideen und Erkenntnisse lassen sich nun die folgenden vier GV gemäß vom Hofe (1995) zum Flächeninhaltsbegriff formulieren:

1. *Maßzahl-Aspekt:* Die Schüler erkennen den Flächeninhalt einer Figur als eine positive Maßzahl, die mit Hilfe von normierten Flächeninhaltmaßen bestimmt wird. (Strategie des Parkettierens und Messens)
2. *Vereinigungs-Aspekt:* Die Schüler erkennen, dass der Flächeninhalt einer Figur sich durch die Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren, aus denen die Figur sich zusammensetzen ergibt. (Strategie des Parkettierens und Messens)
3. *Kongruenz-Aspekt:* Schüler erkennen, dass kongruenten Figuren dieselbe Maßzahl zugeordnet wird. (Strategie des indirekten und direkten Vergleichs)
4. *Ergänzungs- und Zerlegungs-Aspekt:* Schüler erkennen, dass zwei Figuren flächeninhaltsgleich sind, wenn sie sich in dieselbe Anzahl von deckungsgleichen Teilfiguren zerlegen oder sich durch dieselbe Anzahl an Teilfiguren zu neuen deckungsgleichen Figuren ergänzen lassen. (Strategie des Zerlegens und Ergänzens)

Um die einzelnen Vorstellungen und die damit verbundenen Strategien des Parkettierens, Vergleichens und Zerlegens oder Ergänzens im MU auszubilden, dient das bereits 1983 entwickelte Modell Frickes (1983) als Grundlage. In aller Kürze dargestellt, nennt Fricke dabei folgende Schritte:

1. Unmittelbar qualitativer Vergleich von Figuren und deren Flächeninhalten;
2. Indirekte Vergleiche von Figuren und deren Flächeninhalten durch eine Hilfsgröße;
3. indirekter Vergleich mit einer konkreten Maßeinheit;

4. ausdifferenzierter „Gebrauch“ von Maßeinheiten.

Bis heute finden sich seine Ideen als Ausgangspunkt für zahlreiche Ansätze zum Lehren des Flächeninhaltsbegriffs (vgl. z.B. Greefrath, 2014; Neubert & Thies, 2012; Franke, 2007; Vollrath, 1998). Knüpft man nun an die eingangs genannten Defizite an und rückt die Ausbildung von GV in den Fokus eines Lehrgangs, stellt sich natürlich die Frage, in wie weit eine Ausbildung der genannten GV sinnvoll und notwendig für den Flächeninhaltsbegriff im MU und letztendlich die Lösungsfähigkeit von Aufgaben bei Schülern ist. Um die Auswirkungen einer fundierten Ausbildung von GV auf das „Formeldenken“ zur Flächeninhaltslehre aufzuzeigen, sollen die ersten Ergebnisse einer Interventionsstudie betrachtet werden und als Grundlage zur Generierung entsprechender Thesen dienen.

## 2. Konzeption und Durchführung der Studie

Im Rahmen des Förderprojekts Litcam – Fußball trifft Kultur (litcam.de) wurden Schüler unterschiedlichen Leistungsniveaus verschiedener Mittelschulen aus dem Raum Nürnberg gefördert und mit ihren Klassenkameraden bezüglich GV zum Flächeninhaltsbegriffs und ihrer Rechenfertigkeit verglichen. Die folgenden Ergebnisse stammen aus einer Befragung im Rahmen der Evaluation des Projekts:

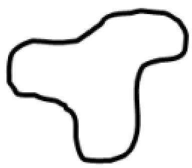


**Abb. 1:** Untypische Figur

Bei einer vorangestellten Erhebung des Leistungsstands der Schüler, zeigte sich das erstaunliche und durchaus auch erschreckende Bild, dass keiner der befragten Schüler mathematisch sinnvolle GV zum Flächeninhaltsbegriff nennen konnte und tatsächlich alle Befragten ausschließlich mit Formeln (meist falschen) den Flächeninhaltsbegriff beschrieben, ohne ihr Vorgehen begründen zu können. Außerdem waren ausnahmslos alle Befragten nicht in der Lage, eine Näherung für den Flächeninhalt von untypischen Figuren (Abb.1) anzugeben. Bei typischen Kalkülaufgaben zur Berechnung von Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks verwendeten die Schüler nur in 50% der Fälle die richtige Formel. Dies lässt die erste These zu, dass bei der Anwendung der Formel ohne passende GV meist geraten wird.

Mit zeitlichem Abstand wurde im Anschluss an eine mehrwöchige Intervention erneut die Lösungsfähigkeit von Schülern zu passenden „Kalkülaufgaben“ und ihren Grundvorstellungen erhoben. Die folgende Grafik zeigt beispielhaft Ergebnisse aus dieser Umfrage zum Thema Flächeninhalt auf, wobei die beiden Versuchsgruppen nach Vergleichsgruppe (VG: n=53) und Untersuchungsgruppe (Litcam: n=17) unterschieden werden.

In den Ergebnissen des Nachtests zeigt sich mehr als deutlich, dass zwischen den beiden Schülergruppen ein signifikanter Unterschied in den vorhandenen GV zum Flächeninhaltsbegriff gegeben ist. Auf Grund der speziellen Förderung von GV bei Litcam-Schülern ist die angetroffene Abweichung zwischen den Gruppen aber wenig überraschend. Betrachtet man jedoch Abb. 2, dann lassen sich durchaus erste Thesen in Bezug auf die Nachhaltigkeit und den Einfluss von Grundvorstellungen formulieren. Knapp 65% der Litcam-Schüler wenden die beiden Formeln zur Berechnung des Umfangs und Flächeninhalts sicher auf das vorgegebene Rechteck an, bei der Vergleichsgruppe gelang dies nur rund einem Zehntel. Fast 90% der Vergleichsgruppe schafft es nicht, die Formeln für Flächeninhalt und Umfang fehlerfrei zu berechnen bzw. die Begriffe sicher zu unterscheiden[3]. Außerdem verfügen fast 100% der Litcam-Schüler über geeignete Strategien, den Flächeninhalt näherungsweise zu bestimmen, während auch hier keiner der Regelschüler die Aufgabe erfolgreich löst. Es begründen sich somit folgende Thesen:

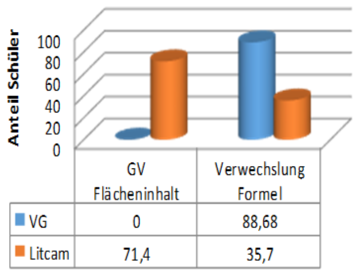



**Abb. 2:** Pilotstudie 2013

1. Schüler mit GV beherrschen Näherungsverfahren zur Flächeninhaltsbestimmung signifikant besser als Schüler ohne GV.
2. Schüler mit GV können die Begriffe Umfang und Flächeninhalt signifikant besser unterscheiden als Schüler ohne GV.
3. GV zum Flächeninhaltsbegriff, orientiert an den genannten mathematischen Leitideen, zeigen einen Einfluss auf die Lösungsfähigkeit von Schülern bei Kalkülaufgaben zum Flächeninhaltsbegriff.

## Literatur

Barzel, B. & Hußmann, S. (2008). Rechtecke im Einheitsquadrat. Experimente auf verschiedenen Darstellungsebenen. *mathematik lehren*, 14–16.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. München: Spektrum.

Fricke, A. (1983). *Didaktik der Inhaltslehre*. Stuttgart: Ernst Klett.

Greefrath, G. & Laakmann, H. (2014): Mathematik eben – Flächen messen. *PM*, 55, 2–10.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellung mathematischer Inhalt*. Heidelberg: Spektrum.

Neubert, B. & Thies, S. (2012). Zur Entwicklung des Flächeninhaltsbegriffs. *mathematik lehren*, 172, 15–19.

Vollrath, H.-J. (1999). Ein Modell für das langfristige Lernen des Begriffs „Flächeninhalt. In Henning, H.: *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung*. Oldenburg: Büttmann und Gerriets, 191–198.

Julia ZERLIK, Rose VOGEL, Patrick SEIDEL, Frankfurt am Main

# Schwierigkeiten von Studierenden mit Deutsch als Fremdsprache in Mathematik(didaktik)klausuren im Grundschullehramt

Das Bundesamt für Migration und Flüchtlinge fordert in seinem „Bundesweiten Integrationsprogramm“ die verstärkte Gewinnung von Lehrkräften mit Migrationshintergrund (2010, S.79). In Folge dessen kann davon ausgegangen werden, dass vermehrt Personen mit Deutsch als Fremdsprache (DAF), also diejenigen, die ihre Hochschulzulassung im Ausland erworben haben, sich für einen Lehramtsstudiengang interessieren. An der Goethe-Universität Frankfurt/Main ist im Lehramtsstudiengang Grundschule besonders auffällig, dass die Durchfall-Quote der DAF-Studierenden in den Mathematik(didaktik)klausuren hoch ist.

Studien, wie die der Universität Bremen (Karakaşoğlu u.a., 2013), der Universität Duisburg-Essen (Zentrum für Lehrerbildung, 2008) und der Universität Kassel (Naumann, 2011) belegen bereits, dass Studierende mit Migrationshintergrund im Lehramtsstudium zum Teil Unterstützung brauchen, dies von den Studierenden selbst aber unterschiedlich eingeschätzt wird. Welche spezifischen Schwierigkeiten Grundschullehramtsstudierende mit Deutsch als Fremdsprache beim Prüfungsformat „Klausur“ im Fach Mathematik aufweisen, wird erstmals in der im Folgenden vorgestellten Studie erforscht.

## 1. Auswahl und Vergleich der Klausuren

Für die Analyse werden drei Mathematik(didaktik)klausuren (SoSe 2012, WiSe 12/13 und SoSe 2013) aus dem Modul „Grundlagen der Elementarmathematik und mathematikdidaktische Grundlagen für die Klassen 5 und 6“ entlang von fünf Kategorien kodiert: (A) Komplexität der Aufgabenstellungen und Handlungen, (B) Einordnung der Aufgabenstellung, (C) Satzstruktur, (D) Hilfsmittel, (E) Art der geforderten mathematischen Handlung. Ergebnisse für drei dieser Kategorien werden hier vorgestellt. Das Modul stellt an der Goethe-Universität Frankfurt/Main ein Pflichtmodul für alle Grundschullehramtsstudierenden dar.

*Kategorie A: Komplexität der Aufgabenstellungen und Handlungen*: Diese Kategorie setzt sich aus dem Handlungsmuster und der Art der Aufgabenstellung zusammen. Beim Handlungsmuster wird erfasst, ob die Studierenden einen Algorithmus anwenden (1) und diesen eventuell auch noch kurz begründen bzw. erklären müssen (2) oder ob sie ein textbasiertes mathema-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1331–1334). Münster: WTM-Verlag

tisches Handlungsmuster verfassen sollen (3) und dies eventuell auch begründen müssen (4). Bei der Aufgabenstellung wird unterschieden zwischen „der Fachbegriff initiiert die mathematische Handlung“ (a) und „die sprachlich komplexe Aufgabenstellung initiiert die mathematische Handlung“ (b). Jede der vier Handlungsmuster-Unterkategorien wird infolgedessen mit zwei Varianten für die Aufgabenstellung kombiniert, so dass sich insgesamt acht Unterkategorien (Items) ergeben.

*Kategorie B: Einordnung der Aufgabenstellung*: Bei dieser Kategorie wird den Teilaufgaben der Klausur entweder die Unterkategorie „fachwissenschaftlich“ oder „fachdidaktisch“ zugeordnet. Da sich einige Aufgaben nicht eindeutig zuordnen lassen, wird noch die Unterkategorie „fachwissenschaftlich und fachdidaktisch“ aufgenommen.

*Kategorie E: Art der geforderten Handlung*: Hier wird genauer untersucht, welche Handlungen die Studierenden bei den Aufgaben durchführen mussten. Es werden 13 Handlungskategorien identifiziert, von denen an dieser Stelle nur einige beispielhaft genannt werden: zeichnen (1), rechnen (2), selbst eine Aufgabe formulieren (und lösen) (3), mathematikdidaktische Erklärung (4), Fehlermuster erkennen und konzeptionell einordnen (6), mathematische Erklärung (12).

Um die Ergebnisse besser einordnen zu können, werden zunächst die drei Klausuren untereinander verglichen. Hierbei zeigt sich, dass die Studierenden beim Lösen der Klausur im SoSe 2012 im Gegensatz zu den beiden anderen Klausuren deutlich mehr Text produzieren mussten. Auch die Aufgabenstellungen waren im SoSe 2012 überwiegend komplex gestaltet, so dass hier die Anforderung an ein gutes Textverständnis höher war, als in den beiden folgenden Klausuren. Auch der fachdidaktische Aufgabenteil war im SoSe 2012 höher als bei den beiden anderen Klausuren.

## 2. Stichprobe und Forschungsfragen

Im SoSe 2012 nahmen drei Personen mit Deutsch als Fremdsprache an der Klausur teil. Im WiSe 12/13 konnten lediglich zwei DAF-Studierende identifiziert werden. Im darauffolgenden SoSe wurden sechs DAF-Studierende gefunden.

Um die Ergebnisse besser einschätzen zu können wurden jeweils zwei weitere Probandengruppen gebildet: Studierende ohne DAF, die die Klausur nicht bestanden haben (jeweils drei bis vier Personen) und Probanden, die bei den Klausuren zwischen sieben und neun Notenpunkte (also im Dreierbereich) abschnitten (jeweils vier bis fünf Personen).

Es soll folgenden vier Forschungsfragen nachgegangen werden:

- Schneiden Studierende mit DAF bei Aufgaben, bei denen Aufgabenstellungen und Handlungen komplexer sind, schlechter ab, als bei anderen Aufgaben?
- Fallen fachdidaktische Aufgaben bei den Probandengruppen schlechter aus als fachwissenschaftliche?
- Gibt es Unterschiede zwischen den Schwierigkeiten bei den Klausuren von Studierenden mit DAF und den anderen Probandengruppen?
- Welche fachwissenschaftlichen beziehungsweise fachdidaktischen Handlungen fallen Studierenden mit DAF im Gegensatz zu den anderen Gruppen am schwersten?

## 3. Ergebnisse

Für die Auswertung der ersten Forschungsfrage wird der prozentuale Anteil der richtig gelösten Aufgaben der Probandengruppen berechnet. Es zeigt sich in allen drei Klausuren deutlich, dass sowohl die Studierenden mit DAF, als auch diejenigen, die die Klausur nicht bestanden haben, bei komplexeren Aufgaben deutlich weniger Punkte erreichen konnten, als bei weniger komplexeren Aufgaben. Bei den Probanden, die mit sieben bis neun Notenpunkten abschnitten, zeigte sich dieser Punktabfall in deutlich geringerem Maße. Im SoSe 2012 und SoSe2013 konnten auch signifikante negative Korrelationen zwischen Kategorie A und den Probanden mit DAF gefunden werden (SoSe 2012: -.759**, SoSe 2013: -.431*). Damit kann die erste Forschungsfrage bejaht werden.

Beim Vergleich der prozentualen Anteile richtig gelöster fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Aufgaben zeigte sich, dass alle Probandengruppen etwas höhere Punktzahlen in den fachdidaktischen Aufgaben erreichten. Lediglich die Studierenden mit DAF schnitten in der Klausur SoSe 2012 fachdidaktisch schlechter ab als fachwissenschaftlich (siehe Tabelle 1). Somit kann die zweite Forschungsfrage verneint werden.

| Einordnung der Aufgabenstellung | DAF | Nicht bestanden | Notenpunkte 7-9 |
|---|---|---|---|
| SoSe 2012: fachwissenschaftlich | 53,82% | 48,76% | 58,20% |
| SoSe 2012: fachdidaktisch | 34,52% | 48,33% | 71,26% |
| WiSe 12/13: fachwissenschaftlich | 49,18% | 36,24% | 64,62% |
| WiSe 12/13: fachdidaktisch | 51,00% | 62,00% | 67,63% |
| SoSe 2013: fachwissenschaftlich | 37,56% | 39,72% | 59,04% |
| SoSe 2013: fachdidaktisch | 43,30% | 40,05% | 61,75% |

Tabelle 1: Prozentuale Anteile richtig gelöster Aufgaben der Kategorie B

Es ist zu vermuten, dass sich die Probandengruppen mit DAF und die Probandengruppen, die die Klausur nicht bestanden haben, ähneln. Bestätigt wird diese Vermutung durch signifikante Korrelationen zwischen den Gruppen in beiden Sommersemester-Klausuren: SoSe 2012: .508*, SoSe 2013: .470*. Daher ist die dritte Forschungsfrage tendenziell zu verneinen.

Bei Aufgaben, bei denen die Studierenden ausschließlich rechnen oder zeichnen sollten, erreichten alle Probandengruppen im Schnitt 57% der Punkte. Diese Aufgaben scheinen insgesamt am leichtesten zu fallen. Sollte dagegen selbst eine Aufgabe formuliert werden, fielen die Personen mit DAF, wie auch die Personen, die nicht bestanden haben, deutlich zurück (nur knapp 30% der Punkte wurden erreicht). Sehr schwache Ergebnisse zeigten die Studierenden mit DAF bei mathematischen (13% der Punkte) und didaktischen Erklärungen (30% der Punkte). Gerade bei den didaktischen Erklärungen blieben sie damit deutlich hinter den anderen Probandengruppen zurück (jeweils ca. 60% der Punkte). Bei den mathematischen Erklärungen dagegen, erreichten Personen mit DAF ebenfalls nur diese geringe Punktzahl.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Studierende mit DAF im Grundschullehramt größere Probleme mit dem Verfassen von Texten haben, vor allem wenn diese erklärenden Charakter aufweisen sollen. Ob die Aufgaben hierbei von fachwissenschaftlicher oder fachdidaktischer Art sind, spielt eher eine untergeordnete Rolle.

## Literatur

Bundesamt für Migration und Flüchtlinge (BAMF) (2010). *Bundesweites Integrationsprogramm. Angebote der Integrationsförderung in Deutschland – Empfehlungen zu ihrer Weiterentwicklung.* Zugriff am 4.10.2013 unter http://www.bamf.de/SharedDocs/Anlagen/DE/Downloads/Infothek/Integrationsprogramm/bundesweitesintegrationsprogramm.pdf?__blob=publicationFile.

Naumann, I. (2011). *Lehramtsstudierende mit Migrationshintergrund an der Universität Kassel. Eine Analyse qualitativer Interviews im Rahmen des Projektes „Mentoring für Lehramtsstudierende mit Migrationshintergrund“*. Zugriff am 4.10.2013 unter http://www.mentoring-mig.uni-kassel.de/wp-content/uploads/2011/11/Forschungsbericht_mentoring_naumann_end.pdf.

Drüke, S., Pitton, A., Chlosta, C. (2008). *Förderbedarfe und Förderungswünsche von Lehramtsstudentinnen mit Migrationshintergrund*. Essen: ZLB (Continuum, 3).

Karakaşoğlu, Y., Wojciechowicz, A., Bandorski, S., Kul, A. (2013). *Zur Bedeutung des Migrationshintergrundes im Lehramtsstudium. Quantitative und qualitative empirische Grundlagenstudie und Reflexion von Praxismaßnahmen an der Universität Bremen*. Zugriff am 17.03.2014 unter http://www.fb12.uni-bremen.de/fileadmin/-Arbeitsgebiete/interkult/Publikationen/Bedeutung_Migrationshintergrund_Lehramtsstudium_Stand_AK18.05..pdf.

Larissa ZWETZSCHLER, Dortmund

# a·b+a·h·1/2=a·(b+h/2)? „ist ja eigentlich die gleiche Formel" – Lernprozesse zur Gleichwertigkeit von Termen

Welche Vorstellungen brauchen Lernende um zu verstehen, dass a·b+a·h·1/2=a·(b+h/2) gilt? In der Algebradidaktik wird immer wieder berichtet, dass Lernende Termumformungen oft unverstanden durchführen und keine Beziehungen zwischen zwei Termen herstellen können (Rosnick & Clement 1980; Demby 1997; Ball, Peirce & Stacey 2003; u.a.). Zudem ist der Umgang mit Termen, dem Gleichheitszeichen und den Variablen eine große Herausforderung für Lernende und scheint die Vorstellungsentwicklung zu limitieren (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens 2011; u.a. als Überblick s. Malle 1993; Kieran 2007; u.a.). Wenig ist hingegen über die Vorstellungsentwicklung zur Gleichwertigkeit von Termen bekannt. Zwar zeigen Studien, dass Vorstellungen angebahnt werden können (Kieran & Sfard; Pilet 2012; u.a.), eine systematische Beforschung von Lernprozessen steht allerdings noch aus. Dadurch ergab sich für das Dissertationsprojekt (Zwetzschler 2014) das folgende verschränkte Forschungs- und Entwicklungsinteresse:

Welche individuellen Vorstellungen zur Gleichwertigkeit haben die Lernenden und inwiefern können diese weiterentwickelt werden? Inwiefern kann ein Lehr-Lernarrangement entwickelt werden, das einen Vorstellungsentwicklungsprozess hin zur Gleichwertigkeit ermöglicht?

## 1. Methodischer Rahmen der Studie

Verfolgt wurde das Forschungs- und Entwicklungsinteresse der Studie zur Gleichwertigkeit von Termen im Forschungsprogramm der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Prediger et al. 2012). Dazu wurden im Rahmen des langfristigen Projekts KOSIMA fünf Zyklen der Entwicklung und Beforschung in Design-Experimenten durchlaufen. Ausgewählte Designelemente des Lehr-Lernarrangements wurden dabei in Labor- und Klassensettings erprobt und videographiert. Die qualitativen Daten wurden anschließend in Anlehnung an Vergnauds Konstrukte (1996) ausgewertet. Die Ziele der einzelnen Zyklen waren dabei: die Entwicklung erster Designelemente (Zyklus 1), die Beforschung zentraler Herausforderungen (Zyklus 2), die Analyse von Lernprozessen (Zyklus 3) und die Absicherung und Finalisierung des Lehr-Lernarrangements für den Einsatz im regulären Unterricht (Zyklus 4, 5). Die hier skizzierten empirischen Einblicke stammen aus Zyklus 3, in dem mit zwei 8. Klassen und sechs

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1335–1338). Münster: WTM-Verlag

Lernendenpaaren einer Realschule Design-Experimente in Klassen- und Laborsettings durchgeführt wurden.

## 2. Spezifikation des Lerngegenstandes: inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen

Sehen zwei Terme unterschiedlich aus, bedeuten aber das Gleiche, so sind sie gleichwertig: $a \cdot b+a \cdot h \cdot 1/2=a \cdot (b+h/2)$. Die Anwendung von Umformungsregeln, dem Kalkül, ermöglicht die Überprüfung zweier Terme hinsichtlich der Gleichwertigkeit.

Um aber inhaltlich zu begründen, warum zwei Terme gleichwertig sind, braucht man ein *Referenzobjekt*, an dem die Gleichwertigkeit der Terme gezeigt und verstanden werden kann (Kieran & Sfard 1999): Terme mit gleicher Bedeutung bei unterschiedlicher Herkunft werden auf ein Objekt (z.B. geometrische Figuren oder Werte als Ergebnisse) bezogen und die gleiche Bedeutung zwischen den einzelnen Termen und dem Objekt erkannt. Diese Beziehung zweier Terme auf ein Objekt wird anschließend auf die Beziehung zwischen den Termen - die Gleichwertigkeit der Terme - übertragen (Pilet 2012; in Anlehnung an Drouhard 1992; s. Abb. 1).

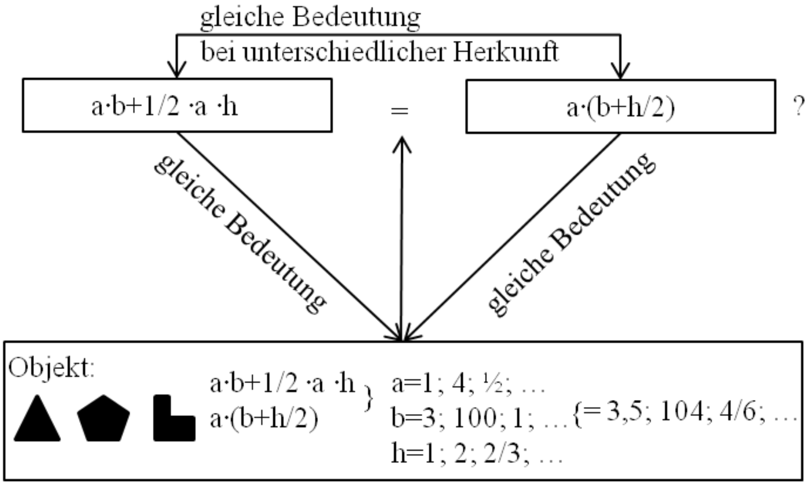



Abb. 1 Lerngegenstand: inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen

Der Bezug von Termen auf geometrische Figuren und Werte als Ergebnisse - der Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit (Prediger 2009; in Anlehnung an Malle 1993, Wellstein 1978) - ist hier die Grundlage.

## 3. Lernprozesse zur Beschreibungsgleichheit

In der Analyse von Lernprozessen zur Beschreibungsgleichheit - dem Vergleich zweier allgemeiner Objekte (Variablenterme) an einem dritten allgemeinen Objekt (Figur) - zeigten sich Zwischenstufen in der Vorstellungsentwicklung:

- Vergleich konkreter Objekte
- Vergleich an konkreten Objekten
- Vergleich von/ an Berechnungsstrategien[1] anstelle von Termen/ Figuren (s. Abb. 4)

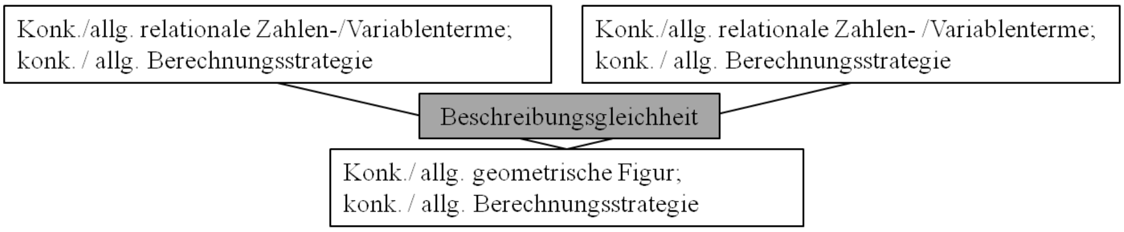


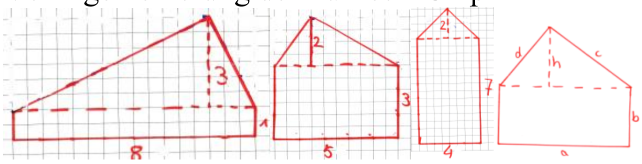

Abb. 4 Zwischenstufen in Vorstellungsentwicklung zur Beschreibungsgleichheit

## 4. Empirische Einblicke: Zwischenstufen in der Vorstellungsentwicklung zur Beschreibungsgleichheit

Wie solche Zwischenstufen in der Vorstellungsentwicklung zur Beschreibungsgleichheit aussehen können wird im Folgenden anhand einer Lernenden aus Zyklus 3, Meike, exemplarisch veranschaulicht.

Bevor im Lehr-Lernarrangement explizit Vorstellungen zur Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit erarbeitet wurden, wurde mit Hilfe der in Abb. 2 abgedruckten Aufgabe bereits Flächeninhalte zu einer Figur in unterschiedlichen Gestalten bestimmt. Im vorzustellenden Ausschnitt bearbeitet Meike die Aufgabe *Verallgemeinerung der Fünfeck-Graphik*:

Verallgemeinerung der Fünfeck-Graphik



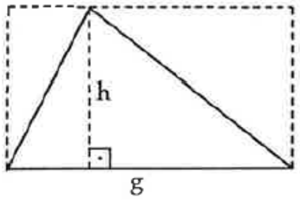

Berechne den Flächeninhalt der Figuren. Was ändert sich? Was bleibt gleich?
Welche Figuren kannst du mit deiner Formel berechnen?

Abb. 2 Vorbereitende Aufgabe zur Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen zur Gleichwertigkeit

Um Terme zu den dreieckigen Teilfiguren aufstellen zu können, nutzt die Schülerin Meike, die folgenden beiden Umformungen der Flächen als Berechnungsstrategien.

[1] Berechnungsstrategien sind alle verbalen und deiktischen Äußerungen zur Berechnung einer Graphik, die noch nicht hinreichend mit den Termen oder der gegebenen Graphik verbunden sind (Zwetzschler 2014).

||*Dreieckige Figur als ergänzbar zu einer rechteckigen Figur*||




$A = \frac{1}{2} g \cdot h$

(Hefendehl-Hebeker 2002)

||*Dreieckige Figur als umlegbar zu einer rechteckigen Figur*||

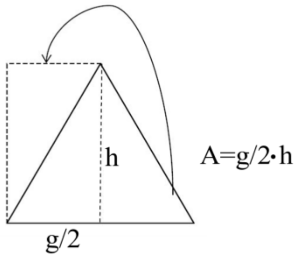
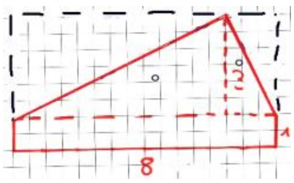



Abb. 3 Berechnungsstrategie für dreieckige Figuren

Als Meike anschließend nach einer allgemeinen Möglichkeit zur Berechnung von Fünfeck-Graphiken (s. Abb. 2) gefragt wird, setzt sie die beiden Berechnungsstrategien aus Abb. 3 miteinander in Beziehung: Sie vergleicht die Berechnungsstrategie durch den Bezug auf eine Figur miteinander und bewertet diese als gleichwertig (auch wenn diese Bewertung noch nicht hinreichend tragfähig ist, durch die Situationsspezifität der zweiten Strategie - für gleichschenklige Dreiecke).

Z229 Meike:
Dass man das erstmal aufteilt, dass man das zu einem Rechteck so aufteilt. Also entweder so abnehmen und dranhängen oder verdoppeln und dass man das dann – dass man das dann aufteilt, dass man ein Rechteck hat *[zeigt auf das untere Teilrechteck]* und die oberen Dreiecke *[zeigt auf die beiden °]* und dass man da das untere Rechteck einzeln berechnet *[zeigt auf die Zahlen 8 und 1]* mal, also Breite mal Höhe.




Meike entwickelt hier, ähnlich zu weiteren Lernenden der Studie, die Vorstellung der ||*Gleichwertigkeit von Berechnungsstrategien als Beschreibungsgleichheit*||, eine Zwischenstufe im Lernprozess zur Beschreibungsgleichheit. Solche Gleichwertigkeitsvorstellungen zeigten sich als trag- und anschlussfähige Zwischenstufen in der Entwicklung von Vorstellungen zur Beschreibungsgleichheit und wurden dadurch expliziter Bestandteil des Lerngegenstandes: inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen (Zwetzschler 2014).

## 5. Literatur

Die verwendete Literatur ist in der folgenden Quelle vollständig ausgewiesen:


Zwetzschler, L. (2014): Gleichwertigkeit von Termen - Entwicklung und Beforschung eines diagnosegeleiteten Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse. Dissertation, TU Dortmund (Erscheint später bei Springer Spektrum).

# 5 Beiträge zu den Posterpräsentationen

Nils BUCHHOLTZ, Hamburg, Sebastian SCHORCHT, Gießen

# Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zur Geschichte der Mathematik

Die Einbeziehung des historischen, philosophischen und entwicklungsgeschichtlichen Kontextes der Mathematik in das Lehramtsstudium stellt unbestritten eine Bereicherung des hochschuldidaktischen Curriculums für angehende Lehrkräfte dar. Durch die Auseinandersetzung mit der Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte mathematischer Fachinhalte kann bspw. eine prozessartige Anschauung dieser Inhalte gewonnen sowie Einsicht in die gesellschaftliche und kulturelle Relevanz der Mathematik genommen werden (vgl. Beutelspacher et al. 2011).

Bisherige Arbeiten zur Einbindung von historischen Bezügen in den MU und in die Mathematiklehrerbildung beschäftigen sich vor allem mit den Fragen *warum* geschichtliche Bezüge sinnvoll sind und *wie* diese Bezüge sinnvoll eingesetzt werden können (z.B. Tzanakis & Arcavi, 2000; Fauvel & van Maanen, 2000). Bemängelt wird jedoch, dass es nur wenig empirische Arbeiten in diesem Bereich gibt (vgl. Jankvist, 2009).

Unklar ist bislang, wie Studierende die Einbeziehung dieses Kontexts im Studium wahrnehmen – eine Frage, die nicht zuletzt auch die Normativität fachdidaktischer Überlegungen zur Einbindung geschichtlicher Bezüge in die Mathematiklehramtsausbildung und letztlich auch den Mathematikunterricht berührt. In einem gemeinsamen Forschungsprojekt der Universität Hamburg und der Justus-Liebig-Universität Gießen sollen dazu folgende Fragen beantwortet werden:

1. Welche Überzeugungen haben Lehramtsstudierende zur Geschichte der Mathematik und zum Lehren und Lernen historischer Bezüge im Mathematikunterricht?
2. Wie hängen Überzeugungen zur Mathematik und zur Geschichte der Mathematik miteinander zusammen?
3. Wie kompetent fühlen sich Studierende, historische Bezüge in ihrem späteren Mathematikunterricht einzusetzen?

In Form eines Online-Fragebogens sollen die Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zu verschiedenen Aspekten geschichtlicher Bezüge in der Mathematik erhoben werden. Dabei wird Bezug auf empirische und theoretische Forschungsarbeiten zu Beliefs zur Struktur der Mathematik (Grigutsch et al., 1998) und Einstellungen zur Geschichte der Mathematik (Jankvist, 2009; Alpaslan et al., 2014; Tzarnakis & Arcavi, 2000) genom-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1341–1342). Münster: WTM-Verlag

men. Ziel ist u.a. die Überprüfung der Hypothesen, dass sich die Einstellungen der Studierenden zur Struktur der Mathematik auf den Bereich der Geschichte der Mathematik übertragen lassen, sowie, dass die Zustimmung bzw. Ablehnung von geschichtlichen Bezügen im Mathematikunterricht mit Einstellungen zum Lehren und Lernen von Geschichte der Mathematik und den Selbstwirksamkeitserwartungen der Studierenden in diesem Bereich zusammenhängen. Exemplarische Beispiele für den Unterschied zwischen statischen und dynamischen Überzeugungen zum Wesen und zur Struktur der Geschichte der Mathematik sind bspw. folgende Einstellungen:

| Dynamische Überzeugungen | Statische Überzeugungen |
|---|---|
| „Die Geschichte der Mathematik zeigt uns, dass die Axiomatik der Mathematik ständig hinterfragt werden muss.“<br>„Mathematikgeschichte zeigt, dass Mathematik einem stetigen Wandel unterzogen ist.“<br>„Die Mathematikgeschichte zeigt, dass es für mathematische Probleme verschiedene Lösungswege gibt.“ | „Die Geschichte der Mathematik zeigt, dass die grundlegenden mathematischen Erkenntnisse schon Jahrhunderte alt sind und die Zeit überdauert haben.“<br>„Die Geschichte der Mathematik zeigt uns die Allgemeingültigkeit der Mathematik.“<br>„Geschichte der Mathematik ist im Wesentlichen die Sammlung von Biographien.“ |

## Literatur


Alpaslan, M., Işıksal, M. & Haser, C. (2014). Pre-service Mathematics Teachers' knowledge of History of Mathematics and Their Attitudes and Beliefs Towards Using History of Mathematics in Mathematics Education. *Science & Education, 23*, 159-183.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spieß, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerausbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*(1), 3–45.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (S. 201–240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71,* 235–261.

Ulrike DREHER, Timo LEUDERS, Lars HOLZÄPFEL, Freiburg

# Zusammenhänge beim Umgang von Lernenden mit graphischen und numerischen Repräsentationen von Funktionen

In den letzten Jahren wurden zahlreiche Studien zur Erfassung und Beschreibung von Kompetenzen zum Umgang mit Funktionen und deren verschiedenen Repräsentationen vorgelegt (Bayrhuber et al. 2010; Acevedo Nistal et. al. 2012). Während Bayrhuber et al. (2010) die Übersetzungsfähigkeit zwischen verschiedenen Repräsentation bei Siebt- und Achtklässlern erfassten und in Kompetenzdimensionen einteilen konnten, ging es Acevedo Nistal et al. (2012) um die Erfassung des flexiblen Umgangs mit Repräsentationen von Neunt- bis Elftklässlern. Beide Studien zeigen, dass sich der Umgang mit Repräsentationen über die Schuljahre hinweg verändert und dass verschiedene Fähigkeitsfacetten messbar und trennbar sind. In einer Interviewstudie von Acevedo Nistal et al. (2013) mit linearen Funktionen konnten zudem aufgrund selbstberichteter Urteile der Schülerinnen und Schüler verschiedene Wirkfaktoren (individuums-, aufgaben-, kontextspezifisch) auf die Nutzung herausgestellt werden, aber noch nicht systematisch mit den tatsächlichen Leistungen in Beziehung gesetzt werden. Als weiteren Einflussfaktor auf die Leistungen im Umgang mit Repräsentationen konnten Gagatsis et al. (2009) im Themengebiet Bruchrechnung die Bedeutung von Selbstwirksamkeitsüberzeugungen herausstellen und auch zeigen, dass sich die Selbstwirksamkeitsüberzeugungen bezüglich der verschiedenen Repräsentationen von Primar- zu Sekundarstufe tendenziell rückläufig entwickeln. Dieser Aspekt soll als weiterer Moderator im Wirkgefüge repräsentationaler Kompetenzen untersucht werden. Das Konstrukt des „Metarepräsentationalen Wissens“ (diSessa et al. 2000) ist dazu geeignet den Umgang mit Repräsentationen umfassend zu beschreiben.

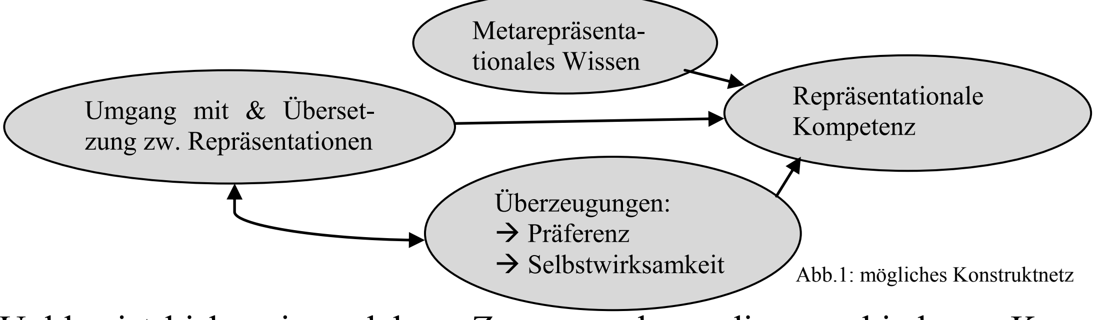



Abb.1: mögliches Konstruktnetz

Unklar ist bisher, in welchem Zusammenhang die verschiedenen Kompetenzfacetten (Übersetzungsfähigkeiten, adaptive Kompetenzen, Metawissen, Präferenzen, Selbstwirksamkeit) stehen. Gezielt soll zunächst folgende explorative Forschungsfrage verfolgt werden:

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1343–1344). Münster: WTM-Verlag

Welcher Zusammenhang besteht bei Lernenden zwischen ihren Kompetenzen bezüglich der Übersetzung verschiedener Repräsentationen, ihren Präferenzen für einzelne Repräsentationen und der flexiblen Nutzung mehrerer Repräsentationen im Bereich Funktionen?

Dazu wird ein dreischrittiges Mixed-Methods-Design angestrebt. In der Vorstudie (n=6) werden aufgabenbasierte Interviews mit einzelnen Schülerinnen und Schülern der achten Klasse an Realschulen durchgeführt. Dabei werden die Präferenzen für einzelne Visualisierungen sowohl allgemein erfragt und eine Erklärung dazu eingefordert, als auch spezifisch bei einzelnen Aufgaben im Nachhinein begründet gelassen, um Aufschluss über die bewusste und unbewusste Nutzung bestimmter Visualisierungen zu bekommen. Auch das Wissen über den Nutzen der einzelnen Repräsentationen (Metawissen) soll dabei abgefragt werden. Des Weiteren werden Fragebogenskalen zu Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und Präferenzen mittels Comprehension Probing optimiert.

In einer umfangreicheren Stichprobe (n=100-150) wird in der Hauptstudie eine Messung der verschiedenen Facetten vorgenommen. Bestandteile sind dabei geschlossene Items, offene Aufgabenformate und Skalen zu den Moderatoren Präferenz, Selbstwirksamkeit und Metawissen.

Bei der Auswertung wird eine Extremgruppenbildung vorgenommen, diese dient der Rekrutierung der in einer dritten Phase geplanten Interviewstudie. Einzelinterviews dienen zur Rekonstruierung der Prozesse beim einzelnen Lernenden und der Validierung der Instrumente.

## Literatur


Acevedo Nistal, A.; van Dooren, W.; Verschaffel, L. (2013): Students' reported justifications for their representational choices in linear function problems: an interview study. In: *Educational Studies in Mathematics 39 (1),* S. 104–117.

Bayrhuber, M.; Leuders, T.; Bruder, R.; Wirtz, M. (2010): Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen - Identfikation von Kompetenzprofilen auf der Basis eines Kompetenzstrukturmodells. Projekt HEUREKO. In: *Zeitschrift für Pädagogik; Beiheft 56 (56),* S. 28–39.

diSessa, A.; Sherin, B. (2000): Meta-representation: an introduction. In: *Journal of Mathematical Behavior (19),* S. 385–398.

Gagatsis, A.; Panaoura, A.; Deliyianni, E.; Elia, I. (2009): Student's Belief about the Use of Representations in the Learning of Fractions. In: Proceedings of CERME 6. CERME. Lyon, France, 28.1.-1.2., S. 64–73.

van Acevedo Nistal, A.; Dooren, W.; Verschaffel, L. (2012): What counts as a flexible representational choice? An evaluation of students' representational choices to solve linear function problems. In: Instructional Science 40 (6), S. 999–1019.Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: *Didaktik der Mathematik, 5*, 87–101.

Edda EICH-SOELLNER, Rainer FISCHER, Kathrin WOLF, München

# Ein Praxisbeispiel: Problembasiertes Lernen in der Veranstaltung „Angewandte Mathematik“

Studierende in Mathematik-Pflichtveranstaltungen neigen häufig dazu, Mathematik auf das Erlernen von „Kochrezepten“ beschränken zu wollen. Dabei kommen problemlösendes Denken und Modellbildungskompetenz zu kurz. Aus diesem Grund wird in der Pflichtveranstaltung „Angewandte Mathematik“ an der Fakultät Informatik und Mathematik der Hochschule München im zweiten Semester die Methode „Problembasiertes Lernen“[1] (Weber 2007) eingesetzt.

Die Studierenden entwickeln in Zweierteams anhand anwendungsorientierter Aufgaben mathematische Modelle für praktische Problemstellungen und implementieren diese im Computeralgebrasystem *Mathematica*. Die Praxisnähe fördert die Motivation der Studierenden und bereitet sie durch die Teamarbeit auf den beruflichen Alltag vor. So werden neben den fachlichen auch überfachliche Kompetenzen wie Eigenverantwortung, Selbst- und Zeitmanagement weiterentwickelt. Darüber hinaus üben die Studierenden, sich auch eigenständig neue Inhalte anzueignen, ihre Ergebnisse zu interpretieren und kritisch zu hinterfragen sowie diese zu visualisieren und zu präsentieren.

## Veranstaltungsablauf

Der Ablauf der Veranstaltung gliedert sich in drei aufeinander aufbauende Abschnitte (Wolf, Kämper, Nissler 2013): In den ersten vier Wochen erlernen die Studierenden die Grundlagen von *Mathematica*.

Nach Einführung der Methode des „Problembasierten Lernens“ anhand eines einfachen Beispiels bearbeiten die Studierenden im zweiten Abschnitt anwendungsorientierte Problemstellungen: In Zweierteams lösen sie Aufgaben, deren Lösungswege nicht direkt vorgezeichnet sind, erarbeiten sich gegebenenfalls benötigtes neues Wissen eigenständig und implementieren und visualisieren ihr Modell in *Mathematica*. Am Ende jeder Problemstellung erfolgt eine Dokumentation der Vorgehensweise sowie der Ergebnisse, die jeweils dem Dozenten zur Bewertung abgegeben werden muss. Je-

[1] „Problembasiertes Lernen“ wird im Rahmen des Projekts „HD MINT“ an der Hochschule München eingesetzt. Dieses Vorhaben wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01PL12023F gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1345–1346). Münster: WTM-Verlag

der Studierende bearbeitet in dieser Phase in wechselnden und vom Dozenten eingeteilten Teams nacheinander drei Probleme.

Darauf aufbauend schließt sich im letzten Teil des Semesters eine komplexere Problemstellung an. Diese erfordert mehr Einsatz in der Selbstlernphase und dauert ca. drei Wochen. Die Zweierteams können sich nun selbstständig finden und bekommen jeweils verschiedene Aufgabenstellungen. Abschließender Teil dieser Phase ist die bewertete Präsentation und Dokumentation der Arbeitsergebnisse.

## Beispiele für Aufgabenstellungen

Ein Beispiel für eine Problemstellung, die die Studierenden in der zweiten Phase bearbeiten, ist die Reflexion an einer Satellitenschüssel. Neben der Berechnung der Strahlengänge bei der Reflexion an gekrümmten Flächen, sollen die Studierenden auch beweisen, dass sich bei der Reflexion an Paraboloiden alle Strahlen in einem Punkt treffen. Die Abbildung zeigt neben diesem Beispiel auch weitere Ideen für Problemstellungen.


## Erfahrungen

Die Erfahrungen mit dieser Art von Mathematikveranstaltung sind äußerst positiv: Bei Evaluationen werden von Studierenden vor allem der Praxisbezug, das eigenständige Arbeiten und die Tatsache, dass ein handfestes Ergebnis am Ende steht, hervorgehoben. Aus Dozentensicht sind die Studierenden in dieser Veranstaltung sehr motiviert und deutlich über das geforderte Maß hinaus engagiert. So stellt diese Veranstaltung eine wertvolle Ergänzung zu den üblichen Mathematikveranstaltungen dar.

## Literatur

Weber, A. (2007). *Problem-Based Learning: Ein Handbuch für die Ausbildung auf der Sekundarstufe II und der Tertiärstufe*. 2.Auflage. Bern: h.e.p.

Wolf, K., Kämper, A., Nissler, A. (2013). „Problembasiertes Lernen“ (PBL) in Mathematik und Technik – Ein Ansatz für mehr Anwendungsbezug und Praxisnähe. In: *DiNa-Sonderausgabe 2013, Tagungsband zum ersten HD-MINT-Symposium*.

MVV Münchener Verkehrs- und Tarifverbund, Schnellbahnnetz 2014, http://www.mvv-muenchen.de/de/netz-bahnhoefe/netzplaene/ [Stand: 17.02.2014]

Joana ENGLER, Bärbel BARZEL, Lars HOLZÄPFEL, Freiburg

# Wirksamkeitsvergleich statischer und dynamischer Visualisierungen beim Erlernen von Äquivalenzumformungen

Elementare Algebra ist ein Themengebiet im schulischen Mathematikunterricht, das meist primär abstrakt und symbolisch mit syntaktischem Schwerpunkt vermittelt wird (Vollrath & Weigand, 2009). Dabei kommt es häufig zu rezeptartig gelerntem Wissen, ohne dass Vorstellungen aufgebaut werden und Verstehen für die notwendigen Prozeduren angebahnt wird (Barzel & Holzäpfel, 2011). Die Nachhaltigkeit dieses Wissens wird in Frage gestellt, da oftmals nur unverstandene Regeln memoriert werden, an die sich die Schülerinnen und Schüler zu späteren Zeitpunkten nur schwer erinnern können (Fischer, Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2010). Dies ist umso bedauerlicher, als im Rahmen der Elementaren Algebra Algorithmen erarbeitet werden, die für zentrale Themenbereiche in den späteren Jahrgängen und in den Naturwissenschaften unerlässlich sind. Dazu gehören vor allem das „Umformen von Termen“ und das „Lösen von Gleichungen“; beide Prozeduren werden z. B. beim mathematischen Modellieren und Problemlösen gebraucht. Die vorliegende Studie widmet sich dem Erlernen, Verstehen und Anwenden von Äquivalenzumformungen und in diesem Zusammenhang mit der Rolle von Visualisierungen als „Lernhilfe“ (Ainsworth, 2006) und Schlüssel für den Wissenserwerb (Kaput, 1989).

In der fachdidaktischen Forschung besteht Konsens zum Nutzen des Einsatzes von Visualisierungen (Ainsworth, 2006; Kaput 1989; Heinze, Star & Verschaffel, 2009). Empirische Befunde zur Verwendung von Visualisierungen bei Term- und Äquivalenzumformungen liegen teilweise bereits vor, wie in der Metastudie von Vlassis (2002) deutlich wird. Hier wird das Waage-Modell als tragfähiges Modell betont, um Vorstellungen zu Äquivalenzumformungen nachhaltig aufzubauen (Barzel & Holzäpfel, 2011).

In einem Experimental-Kontrollgruppen-Design mit vier Experimentalgruppen und einer Kontrollgruppe sollen verschiedene Darbietungen des Waage-Modells einbezogen und ihre Auswirkungen auf den Kompetenzerwerb bei Schülerinnen und Schülern in fachlicher Hinsicht untersucht werden. Dabei wird eine standardisierte Unterrichtssequenz mit einer Dauer von vier Unterrichtsstunden mit Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe sechs bzw. sieben an Realschulen (n=500) durchgeführt. Die einzelnen Gruppen unterscheiden sich dabei nur in der Wahl der Visualisierungen. Die Wirksamkeit der Interventionen wird mittels eines Pre-, Post- und Follow-Up-Tests überprüft.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1347–1348). Münster: WTM-Verlag

Fokussiert werden dabei insbesondere folgende Fragestellungen:

- Welche Wirkungen haben Visualisierungen für den Vorstellungsaufbau beim Lernen von Äquivalenzumformungen? Mit dieser Fragestellung ist die Hypothese verbunden, dass die Experimentalgruppen hinsichtlich des konzeptuellen Wissens zu Äquivalenzumformungen der Kontrollgruppe überlegen sind.
- Inwieweit macht es einen Unterschied, ob konkrete enaktive Handlungen integriert werden oder nicht? Es ist zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler durch die Integration konkreter enaktiver Handlungen ihre Ideen und Vermutungen einfacher überprüfen und besser beschreiben können.
- Inwieweit macht es einen Unterschied, ob statische Bilder oder dynamische Visualisierungen, in Form digitaler Applets, verwendet werden? Nach Kieran & Yerushalmy (2004) trägt die Integration dynamischer Visualisierungen zum besseren Verstehen des algebraischen Symbolismus und der Konzepte bei und unterstützt das Lernen von Fertigkeiten. Diese Hypothese gilt es zu prüfen.

## Literatur


Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and instruction, 16*, 183-198.

Barzel, B., Holzäpfel, L. (Hrsg.). (2011). Gleichungen verstehen. *Mathematik lehren, 169*, 2-7.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkprozesse im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 52 (33)*, 1-7.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (Hrsg.). (2009). Flexible and Adaptive Use of Strategies and Representations in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education, 41 (5)*, 535-540.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (S. 167-194). Hillsdale, NY: LEA.

Kieran, C. & Yerushalmy, M. (2004). Research on the Role of Technological Environments in Algebra Learning and Teaching. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Hrsg.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study (Volume 8)* (S. 99-154). Dordrecht: Springer Netherlands.

Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hinderance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49 (3)*, 341-359.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2009). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

Kirstin ERATH, Anna-Marietha VOGLER, Susanne PREDIGER,
Vivien HELLER, Uta QUASTHOFF, Dortmund

# Interaktive Verfahren der Enkulturation von Lernenden in fachspezifische Praktiken im Mathematik- und Deutschunterricht

Schulerfolg wird nicht nur durch kognitive Leistungen bestimmt, sondern auch durch die mehr oder weniger erfolgreiche Enkulturation in unterrichtliche Praktiken. Das Poster stellt erste Ergebnisse des interdisziplinären Projektes InterPass zur Analyse von Passungen und Divergenzen dieser Enkulturationsprozesse vor, die zwischen den unterrichtlichen sprachlich-diskursiven und fachkulturell-epistemischen sowie den sozialisatorisch verankerten, habituellen Praktiken emergieren.

## 1. Ausgangspunkt und Zielsetzung des Projektes InterPass

Bekannt ist, dass Schulerfolg eng an die soziale Herkunft gebunden ist. Doch warum genau? Im Projekt InterPass wird ein interdisziplinärer Erklärungsansatz entwickelt, der die subtile Rolle fachkulturell geprägter interaktiver Praktiken im Unterricht fokussiert. Diese Praktiken sind bislang kaum in ihrer Bedeutung für die Reproduktion von Bildungsungleichheit untersucht worden. Dabei stellen Diskurspraktiken zunehmend komplexe sprachlich-kommunikative Aktivitätsfelder eines jeden Unterrichts mit verschiedenen fachkulturellen und epistemischen Ausprägungen dar. Diese zumeist implizit erworbenen fachkulturellen Handlungslogiken dürften Lehrenden kaum bewusst zugänglich sein, sodass Divergenzen zu Erwartungen selten zum expliziten Gegenstand von Unterricht gemacht werden. Ziel des Projektes ist es, subtile Mechanismen der impliziten Etablierung von Praktiken und der Ausgrenzung einiger Lernender genauer zu verstehen.

## 2. Empirische Daten und methodischer Zugang

Der *Datenkorpus* der Studie besteht aus 120 h videografiertem Mathematik- und Deutschunterricht aus fünf 5. Klassen zu Beginn des Schuljahrs und zum Halbjahr. Zudem werden videostimulierte Diskussionsrunden mit Lehrenden und Lernenden videografisch erfasst. Dies geschieht mit dem Ziel, die Akteursperspektive in Bezug auf Momente, in denen Divergenzen oder Passungen emergieren, detailliert zu betrachten und eventuelle Relevanzsetzungen Lehrender und Lernender nachzeichnen zu können. Zur *rekonstruktiven Datenanalyse* werden verschiedene, interdisziplinäre methodische Zugänge vorgenommen: Fachspezifisch werden die unterrichtlichen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1349–1350). Münster: WTM-Verlag

Praktiken im Hinblick auf Erwartungsmuster bzgl. der jeweils adressierten sogenannten epistemischen Felder sowie die sie regelnden interaktiv konstituierten expliziten und impliziten soziofachlichen Normen rekonstruiert (vgl. Prediger & Erath 2014). Zusätzlich werden interaktive Verfahren der Annahme und Zurückweisung von Gesprächsbeiträgen von Lernenden im Unterrichtsdiskurs gesprächsanalytisch rekonstruiert (vgl. Heller 2014). Durch Kombination der Datensorten – Unterrichtsinteraktionen und Gruppendiskussionen – wird eine systematische Perspektiven-Triangulation angestrebt. Hierdurch werden die Phänomene Passung und Divergenz auch in ihrer Bedeutung für Lernende und Lehrende beschrieben.

## 3. Erste Ergebnisse

Die rekonstruktiven Analysen deuten darauf hin, dass Divergenzen auf unterschiedlichen Ebenen manifest werden: z.B. bzgl. inkongruenter Kontextualisierungen, divergenter Erklär-/Argumentationsverfahren und -bezügen (epistemische Felder) sowie unterschiedlicher inhaltlicher Relevanzsetzungen der Interaktanden. Die würdigenden bzw. zurückweisenden Verfahren, mit denen Lehrpersonen Passungen bzw. Divergenzen markieren, lassen sich hinsichtlich des Grades an Explizitheit differenzieren. Dies gilt auch für die Etablierung diskursiver und fachkulturell-epistemischer Normen (Heller 2014). Auch weisen die Erklär-/Argumentationspraktiken zwar klassenspezifische Konsistenz auf, klassenübergreifend dagegen eine bemerkenswerte Kontingenz (Prediger & Erath 2014). In ersten Analysen zur Lehrendenperspektive in Gruppendiskussionen lässt sich zusätzlich auch bei handlungsentlasteten Lehrpersonen eine einseitig lehrpersonorientierte Deutung von Relevanzsetzungen in der unterrichtlichen Gesprächsführung rekonstruieren: So werden für den Unterrichtsdiskurs Impulssetzungen und Evaluationen von Lehrpersonen als vornehmlich bedeutend für eine lernförderliche Unterrichtsinteraktion, Schülerbeiträge jedoch nur in Hinblick auf ihre Passung in einen vermuteten Unterrichtsplan hin bewertet.

**Dank.** Das Projekt INTERPASS wird mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert (Förderkennzeichen 01JC1112). Für den Inhalt dieser Veröffentlichung sind die Autorinnen verantwortlich.

## Literatur

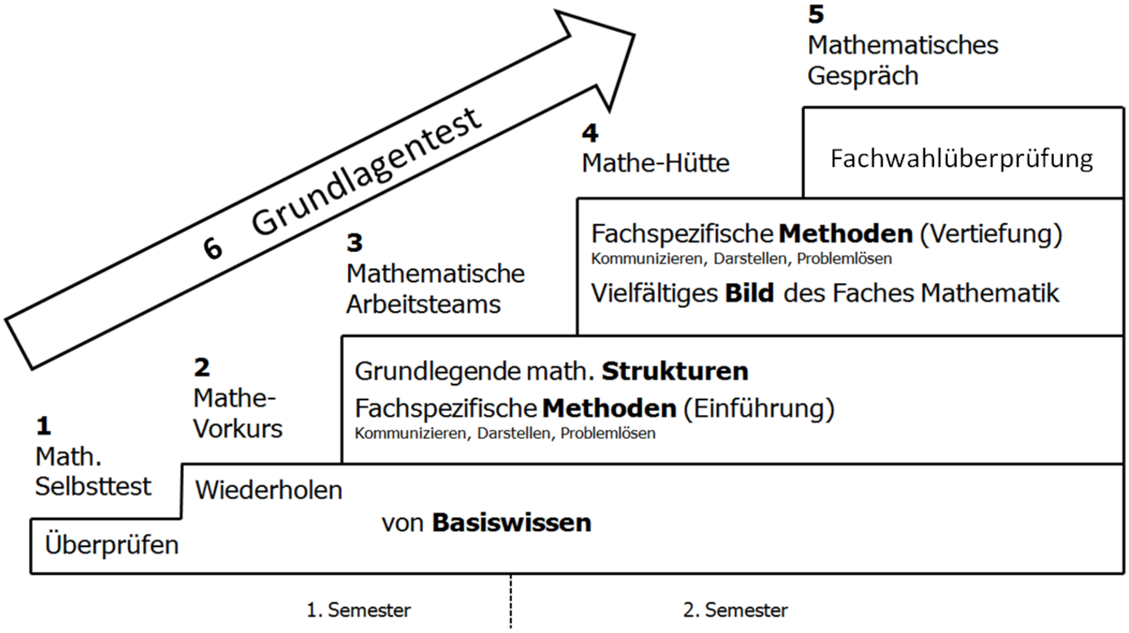
Heller, V. (2014, eingereicht). Academic discourse practices in situ: Invoking discursive norms in mathematics and language lessons. Submitted to *Academic Discourse as Situated Practice. Special Issue of Linguistics & Education*.

Prediger, S., & Erath, K. (2014, eingereicht). Content or interaction, or both? Synthesizing two German traditions in a video study on learning to explain. Eingereichtes Manuskript.

Tanja HAMANN, Stephan KREUZKAM, Daniel NOLTING, Heidi SCHULZE, Barbara SCHMIDT-THIEME, Hildesheim

# HiStEMa: Das erste Studienjahr. Hildesheimer Stufen zum Einstieg in die Mathematik

Das an der Universität Hildesheim entwickelte Programm begleitet Studienanfänger/innen der Mathematik (v.a. GHR-Lehramt) beim Einstieg in die universitäre Mathematik, indem es mit den aus der Schule kaum bekannten Merkmalen und typischen Arbeitsweisen der „universitären Mathematik“ vertraut macht. „HiStEMa“ gliedert sich in sechs ineinandergreifende Module: Vorkurs, Selbsttest, Grundlagentest, Mathematische Arbeitsteams, Mathe-Hütte und mathematisches Gespräch.




Insgesamt werden mit dem Konzept vier Ziele verfolgt, welche im Folgenden näher vorgestellt werden sollen.

## Aufbau von Routine in mathematischen Grundfertigkeiten

Durch eine „[…] (teilweise) Automatisierung können Aufgaben ohne größere mentale Anstrengung (Arbeitsgedächtnis) und schnell erledigt werden. Sie befreien das Arbeitsgedächtnis von Routineaufgaben, sodass mehr mentale Kapazität für das Erreichen anspruchsvollerer Lernziele zur Verfügung steht.“ (Wild & Möller, 2009, S. 19f.) Hierzu sind mathematische Grundfertigkeiten (mathematische Routinefertigkeiten, klientelbezogenes notwendiges mathematisches Handwerkszeug) eine Voraussetzung, welche durch einen semesterweise zu wiederholenden Grundlagentest aufgebaut und gefördert werden (vgl. Nolting et al in diesem Band). Durch eine per

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1351–1352). Münster: WTM-Verlag

permanente Behandlung der Inhalte wird ebenfalls ein Überlernen erreicht, welches ebenfalls den Aufbau von Routinen fördert (vgl. z. B. Renkl, 2002, S.16f.).

### Erwerb von Methodenkompetenz für das Bearbeiten mathematischer Problemstellungen

Neben den mathematischen Grundfertigkeiten werden durch die Stufen der „Mathematischen Arbeitsteams" (Kleingruppen von 8-10 Studierenden mit einem Tutor/Tutorin) und der „Mathe-Hütte" (dreitägige Exkursion fernab der Universität mit intensiver Beschäftigung mit einem mathematischen Thema) auch Möglichkeiten zum Erwerb des notwendigen methodischen Handwerkszeugs (Spezialfälle betrachten, Sachverhalte anders darstellen, in der Gruppe kommunizieren…) für die Studierenden geschaffen (vgl. Hamann et al., 2014, S. 375ff.).

### Einführung in die universitäre Mathematik (im Unterschied zur Schulmathematik)

Ebenfalls in den Mathematischen Arbeitsteams wird den Studierenden der Aufbau der universitären Mathematik mit ihrem streng formal-logischen Aufbau näher gebracht. Durch eine Beschäftigung hiermit wird der Unterschied zum Mathematikunterricht in der Schule verdeutlicht.

### Vermittlung eines positiven Bildes des Faches Mathematik und die damit verbundene Sicherheit in der Studienfachwahl

Durch das Angebot des „Mathematischen Gesprächs" zwischen mehreren Studierenden und einem Dozierenden am Ende des zweiten Semesters wird die Studienfachwahl überprüft, individuelle Rückmeldungen gegeben und das Bild des Faches Mathematik in positiver Weise verfestigt.

## Literatur

Hamann, T., Kreuzkam, S., Schmidt-Thieme, B. & Sander, J. (2014). „Was ist Mathematik?" Einführung in mathematisches Arbeiten und Studienwahlüberprüfung für Lehramtsstudierende. In Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S. & Wassong, T. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 375-388). Wiesbaden: Springer.

Renkl, A. (2000). *Automatisierung allein reicht nicht aus: Üben aus kognitionspsychologischer Perspektive* (S. 16-19). In Übern und Wiederholen. Friedrich Jahresheft 2000.

Wild, E. & Möller, J. (2009). *Pädagogische Psychologie*. Heidelberg: Springer.

Steffen JUSKOWIAK

# (Wie) können Selbstreflexionen helfen, mathematische Probleme zu lösen?

Im Rahmen des auf dem Poster und hier überblicksartig beschriebenen Forschungsprojektes werden Selbstreflexionen während der Arbeit an mathematischen Problemen hinsichtlich ihrer charakteristischen Merkmale und ihrer Wirkung auf Problembearbeitungsprozesse qualitativ (deskriptiv) untersucht (vgl. a. JUSKOWIAK 2012, JUSKOWIAK 2013).

Ziel der Forschungen ist es, über die bisher bestehenden Kenntnisse hinausgehende Anregungen zur Förderung der Problemlösefähigkeit von SchülerInnen zu erhalten. Sechszehn ElftklässlerInnen Braunschweiger Gymnasien haben dafür als Probanden je fünf geometrische Beweisprobleme individuell und extern unbeeinflusst bearbeitet. Die Probanden wurden während der Problembearbeitungen videographiert und sollten dabei laut denken. Die Auswertung der gewonnenen Materialien fand mittels konsensueller Validierung statt. Neben den Validierungen am Subjekt war durch die Verwendungen so genannter zusätzlicher Audioreflexionen (vgl. JUSKOWIAK/ALEXY/HEINRICH 2009) eine Validierung am Objekt möglich.

## Zum Begriff der Selbstreflexion und deren potenziellen Wirkung

Was wird unter Selbstreflexionen verstanden? „Menschen machen mitunter ihr eigenes Denken und Handeln zum Objekt desselben. Sie betreiben Selbstreflexion.“ (DÖRNER 1994) Solche Selbstreflexionen im Sinne eines Auseinandersetzens mit dem bisher selbst Getanen können vor oder nach dem Ende des Problembearbeitungsprozesses durchgeführt werden. Gegenstand dieses Forschungsvorhabens sind ausschließlich Selbstreflexionen vor Beendigung der Problembearbeitung.

Welche Auswirkungen können solche Selbstreflexionen auf die Bearbeitung von Problem haben? „Ein sowohl mächtiges wie einfach zu erlernendes Instrument zur Verbesserung der Problemlösefähigkeit scheint die Selbstreflexion zu sein.“ (DÖRNER 1982) Diese These wir durch die u. a. von KILPATRICK (1985) veröffentlichten Maßnahmengruppen zur Förderung der Problemlösefähigkeit gestützt und wird hier bezogen auf das Bearbeiten mathematischer Probleme untersucht.

## Identifizierung und Bewertung der Wirkung von Selbstreflexionen

Die Identifizierung von Selbstreflexionen erfolgte mit einem an DÖRNER (1994) angelehnten Arbeitsbegriff (vgl. JUSKOWIAK 2013) anhand der laut-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1353–1354). Münster: WTM-Verlag

sprachlichen Äußerungen der Versuchspersonen. Bei der Analyse der Selbstreflexionen haben sich markante Merkmale herauskristallisiert (vgl. dazu JUSKOWIAK 2012).

Die Bewertung der Wirkung von Selbstreflexionen ist wesentlich für das Gewinnen von Anregungen zur Förderung der Problemlösefähigkeit. Bewertungskriterien und konkrete Befunde sind in JUSKOWIAK (2013) beschrieben. Besonders deutlich stach die Dämpfung der Wirkung von Selbstreflexionen durch (temporär) fehlendes mathematisches Wissen hervor.

Diese Befunde zeigen, dass Selbstreflexionen als Mittel zur Zielerreichung beim Bearbeiten mathematischer Probleme dienen können, insbesondere wenn dabei ein Misserfolg auftritt. Als förderlich für das Erreichen des Ziels haben sich solche Selbstreflexionen erwiesen, bei denen sich die/der ProblembearbeiterIn den gesamten bisherigen Problembearbeitungsprozess (oder zumindest dem aktuellen Lösungsanlauf) zeitlich chronologisch nachvollzieht (so genannte lineare Selbstreflexion mit globaler Betrachtung). Wesentlich ist dabei auch die richtige Wahl des so genannten Gegenstandes der Selbstreflexion: Die Betrachtung des strategischen Vorgehens darf nicht hinter der der Anwendung mathematischer Fertigkeiten bzw. mathematischen Wissens zurückstehen. Die Kenntnis der möglichen Maßnahme „Selbstreflexion“ und das Vermögen, diese durchzuführen, dienen somit der Förderung der Problemlösefähigkeit.

## Literatur

Dörner, D. (1982): Lernen als Wissens- und Kompetenzerwerb. In: Treiber, B. / Weinert, F. E.: *Lehr-Lern-Forschung*. München: Urban & Schwarzenberg.

Dörner, D. (1994): Selbstreflexion und Handlungsregulation: Die physischen Mechanismen und ihre Bedingungen. In: Lübbe, W.: *Kausalität und Zurechnung – über Verantwortung in komplexen kulturellen Prozessen*. Berlin: De Gruyter.

Juskowiak, S. / Alexy, C. / Heinrich, F. (2009): „Audioreflexion“ als mögliche Maßnahme zur Förderung der Problemlösefähigkeit. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 675 – 678). Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Juskowiak, S. (2012): Ist Selbstreflexion beim Bearbeiten mathematischer Probleme lösungsförderlich? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 421 – 424). Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Juskowiak, S. (2013): Zur Wirkung von Selbstreflexion beim Bearbeiten mathematischer Probleme. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 512 – 515). Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Kilpatrick, J. (1985): A Retrospective Account of the Past 25 Years on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E.A. (Ed.): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (S. 1 – 15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Nicole KOPPITZ, Gießen

# Mit Sicherheit Mathematik im Grundschullehramt – Ein Projekt zur Unterstützung der Studierenden

## Ausgangslage

In Hessen sind Mathematik, Deutsch und ein weiteres selbstgewähltes Unterrichtsfach für das Lehramt an Grundschulen verpflichtend. Für Studierende, die das Unterrichtsfach Mathematik nicht primär im Fokus ihrer Unterrichtswahl haben kann dieser Teil des Studiums eine Hürde darstellen. Dies trifft nach den ersten eigenen Erhebungen auf etwa die Hälfte der Studierenden zu. Vielfältige Untersuchungen haben ergeben, dass die mathematische Grundbildung für Grundschullehrkräfte eine entscheidende Komponente für guten Unterricht ist (z.B. Blömeke et al., 2010). Daher muss eine gute mathematische Grundbildung für die Studierenden auch bei schwachen Voraussetzungen unbedingt gewährleistet werden.

## Projektidee

Trotz der teilweise schwierigen Ausgangslage allen Studierenden das erfolgreiche Absolvieren des Studiums prinzipiell ermöglicht werden. Im Rahmen des Studienstrukturprogrammes 2013 wird an der Justus–Liebig–Universität Gießen unterstützt durch Mittel des Hessischen Ministeriums für Wissenschaft und Kunst seit Beginn des Wintersemesters 2013/14 das Projekt „Reaktivierung mathematischer Schulkenntnisse für das Unterrichtsfach Mathematik im Studiengang Lehramt an Grundschulen“ von mir unter der Leitung von Schreiber, Lengnink und Neubert durchgeführt.

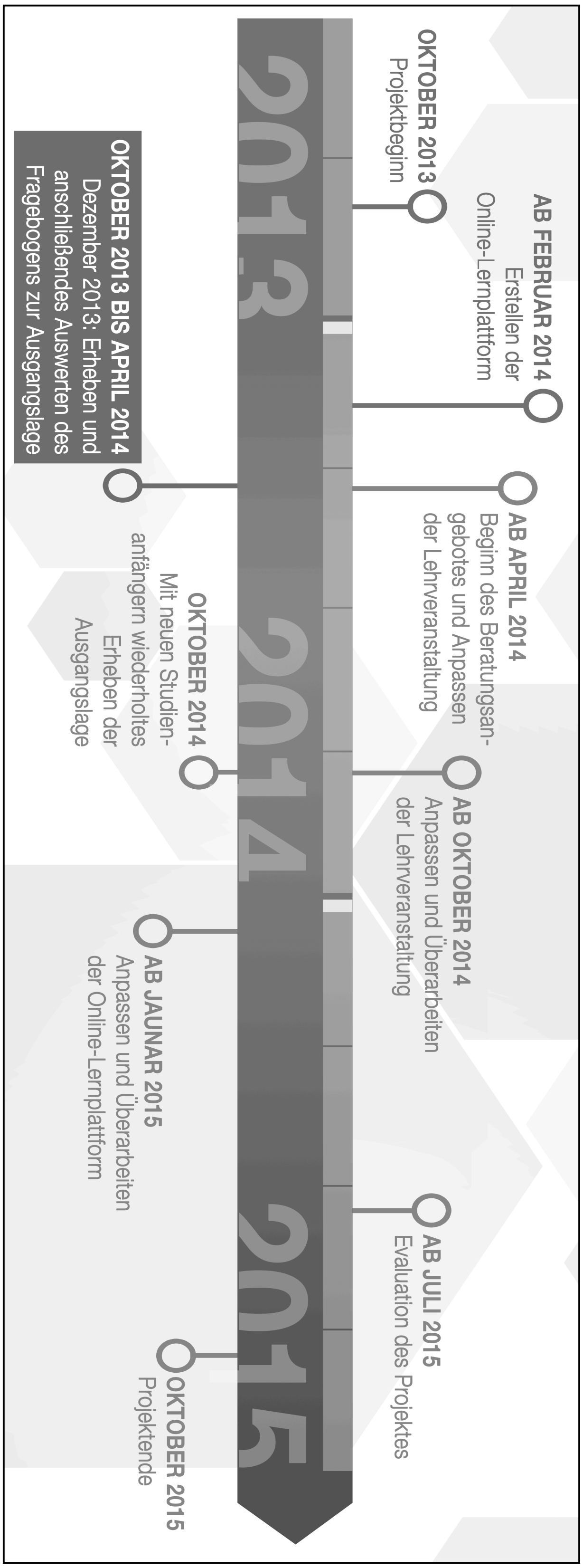
Um Unsicherheiten und Ängste der Studierenden vor der Mathematik, die sich vor Studienbeginn etabliert haben, zu nehmen, sollen die Studierenden zur Auseinandersetzung mit der Mathematik bestärkt und motiviert werden. Denn wie in den Leitvorstellung von „Mathematik verständlich unterrichten“ erläutert, müssen mathematische Gegenstände und ihre Beziehungen zum Menschen eine spannende Suche werden, wenn man Mathematik auf allen Ebenen des Lernens verständlich unterrichten möchte (Allmendinger et al., 2013). Damit die Lehramtsstudierenden dies erreichen, soll im Zuge des Projektes ein Lehr-, Lern- und Beratungskonzept entwickelt werden, in dem sie ihrem jeweiligen Leistungsstand entsprechend gefördert werden.

## Umsetzung

Am Anfang des Projektes wurde eine erste Befragung der Studierenden zur Ausgangslage durchgeführt, die zu Beginn des Wintersemesters 2014/15 wiederholt wird. Hierbei wurde neben den mathematischen Grundkenntnis-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1355–1356). Münster: WTM-Verlag

sen die Motivation und Selbsteinschätzung abgefragt, um einen ersten Einblick in die fachlichen Kenntnisse, persönlichen Grundhaltung und deren Zusammenhänge zu bekommen. Nach Abschluss der Auswertung werden gezielte Beratungsgespräche mit Studierenden, die einen erhöhten Förderbedarf haben, geführt. Es wird im weiteren Verlauf eine Online-Lernplattform erstellt, um den Studierenden das eigenständige Wiederholen der vorlesungsrelevanten Schulkenntnisse zu ermöglichen und weitere Übungen zum Vertiefen der Vorlesungsinhalte anzubieten. Neben den zusätzlichen Angeboten wird die Lehrveranstaltung aufgrund der gewonnenen Erkenntnisse methodisch und didaktisch angepasst.




## Literatur


Allmendinger, H.; Lengnink, K.; Vohns, A.; Wickel; G. (2013). *Mathematik verständlich Unterrichten: Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Blömeke, S., Kaiser, G., Lehmann, R. (Hrsg.) (2010). *TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Bertolt LAMPE, Joachim LOTZ, Bielefeld

# „richtig einsteigen.“: Hochschuldidaktische Unterstützung für Mathematikdozenten in der Studieneingangsphase

Die Mathematik spielt in zahlreichen Studiengängen eine wesentliche Rolle - die von Studienanfängern häufig unterschätzt wird. Ungenügende Vorkenntnisse und Schwierigkeiten mit den neuen Lern- und Arbeitsmethoden erschweren in vielerlei Hinsicht die Vermittlung mathematischer Kompetenzen in der Studieneingangsphase. Das Programm „richtig einsteigen.“[1] der Universität Bielefeld enthält das hier vorgestellte Teilprojekt „Mathematische Kompetenzen“ (MathKom), das in Zusammenarbeit mit den Lehrenden der Fächer ein produktives Aufgabenfeld für mathematikdidaktische Analysen und Konzepte gefunden hat. Das Projekt „richtig einsteigen. – Programm zur Weiterentwicklung von Studium und Lehre an der Universität Bielefeld“ ist ein Beitrag zum Qualitätspakt Lehre von Bund und Ländern. Die Ausgangslage an der Universität Bielefeld wird durch drei Befunde charakterisiert: 1. Studierende, die die vorgesehene Studienzeit deutlich überschreiten, sehen eine Ursache wesentlich in einem missglückten Start ins Studium. 2. Lehrende stellen fest, dass viele Studierende über unzureichende Kompetenzen verfügen, die für einen Einstieg in eine fachwissenschaftliche Ausbildung notwendig sind - besonders prominent die mathematischen Kompetenzen. 3. Lehrende haben kaum Möglichkeiten zur fachdidaktischen Qualifizierung innerhalb der Hochschullehre. Zielsetzung des Projekts ist es, die Studieneingangsphase so weiter zu entwickeln, dass den Studienanfängern der Einstieg ins fachwissenschaftliche Lernen, Denken und Arbeiten nachhaltig besser gelingen kann. Dazu werden aufeinander abgestimmte Analysen und Maßnahmen in den Feldern Professionalisierung der Hochschullehre, Studienerfolgsmonitoring, Beratung und Orientierung, Peer Learning, literale Kompetenzen und eben mathematische Kompetenzen durchgeführt. In der Arbeitsgruppe MathKom sind Fachwissenschaftlerinnen und Fachwissenschaftler aus neun Fachbereichen beschäftigt: Biologie, Chemie, Gesundheitswissenschaften, Mathematik, Physik, Psychologie, Sportwissenschaften, Technische Fakultät und Wirtschaftswissenschaften. Die Zielsetzung dieses Teilprojekts hat zwei Schwerpunkte:

[1] „richtig einsteigen. – Programm zur Weiterentwicklung von Studium und Lehre an der Universität Bielefeld“ wird im Rahmen des „Gemeinsamen Bund-Länder-Programms für bessere Studienbedingungen und mehr Qualität in der Lehre“ gefördert (BMBF-Förderkennzeichen: 01PL12045). Den Inhalt dieser Veröffentlichung verantworten die Autoren. Weitere Informationen unter http://www.uni-bielefeld.de/richtig-einsteigen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1357–1358). Münster: WTM-Verlag

A. Durchführung von Analysen in allen beteiligten Fächern mit folgenden Fragestellungen: Welche mathematischen Kompetenzen werden an welcher Stelle des Studiums gefordert, um fachlich arbeiten zu können? Über welche dieser Kompetenzen verfügen welche Gruppen von Studierenden zu welchem Grad bereits bei Studienbeginn? Wie und zu welchem Zeitpunkt werden typische Mängel beseitigt und weitergehende Kompetenzen erworben? Wie geschieht die Überprüfung des Kompetenzerwerbs?

B. Konzipierung, Erprobung und Weiterentwicklung von Maßnahmen, insbesondere: Entwicklung von Selbsttests zur Unterstützung bei der Studienwahl; Konzipierung von Vorkursen; Erstellung von Eingangstests mit Diagnosefunktion; systematische Schulung von Tutoren; Einrichtung von Lernzentren zur Unterstützung des studentischen Lernens; Überarbeitung von Eingangsveranstaltungen, ihrer Materialien und Prüfungen. Die Entscheidung über die zu ergreifenden Maßnahmen liegt in der Autonomie der Fachbereiche. Aktivitäten dieser Art über Fakultätsgrenzen hinaus zu verfolgen, ist an der Universität Bielefeld erst durch das Teilprojekt MathKom ermöglicht worden. In Zusammenarbeit zwischen den primär fachwissenschaftlich orientierten MathKom-Mitarbeitern in den beteiligten Fakultäten und den primär mathematikdidaktisch orientierten Koordinatoren können mathematische Lernprozesse im Rahmen der fachlichen Bedürfnisse des betreffenden Fachs entwickelt werden. Auf der einen Seite überblicken nur die Lehrenden die Rolle der Mathematik in ihrem jeweiligen Fach und bestimmen – wenn auch vielleicht nur implizit – die mathematischen Ausbildungsziele ihrer Studierenden. Nur sie können einen eigenständigen, kreativen Umgang mit mathematischen Methoden in Bezug auf konkrete fachliche Kontexte aufzeigen. Auf der anderen Seite bedarf es der mathematikdidaktischen Unterstützung, um die notwendigen Lernprozesse der Studierenden erfolgreich zu gestalten. Erst durch genaue mathematikdidaktische Analysen lassen sich die vorhandenen Kompetenzen der Studienanfänger ermitteln und beispielsweise typische Mängel gezielt beseitigen. Gleiches gilt für die exakte Beschreibung der von den Fächern (implizit) vorgegebenen Anforderungen an mathematisch kompetentes Handeln. Häufig kann die Mathematikdidaktik auch praktische Unterstützung geben, die den Übergang von der Schule zur Hochschule glättet und erfolgreich gestaltet. Die Herausforderung des Projekts besteht also darin, vieles von dem, was in der Mathematikdidaktik bereits entwickelt wurde, nun für den Hochschulkontext fruchtbar zu machen. Gleichzeitig bietet die spezielle Einbettung des Lernens von und des Arbeitens mit Mathematik in den beteiligten Fachwissenschaften ein bisher relativ unbearbeitetes Forschungsfeld für die Mathematikdidaktik.

Rolf OECHSLER, Jürgen ROTH, Landau

# Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

## Schülerlabor Mathematik und Lehr-Lern-Labor

Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ ist ein Schülerlabor Mathematik der Universität Koblenz-Landau am Campus Landau. „Schülerlabore Mathematik (SLM) sind außerschulische Lernstandorte mit vorstrukturierten, regelmäßig einsetzbaren Lernumgebungen in festen Räumen, in denen Schüler/innen unter expliziter Zielsetzung selbstständig, handlungsorientiert und experimentell mathematische Grundlagen und Zusammenhänge an Phänomenen in einem begrenzten Zeitrahmen entdecken, erarbeiten und durchdringen können, ohne dabei dem für den Lernort Schule typischen Leistungsdruck zu unterliegen.“ (Baum, Roth & Oechsler 2013, S. 8) Das Mathematik-Labor „hat sich zum Ziel gesetzt, Schüler/innen der Sekundarstufen ein authentisches Bild der Mathematik zu vermitteln, indem sie anhand von entsprechenden Lernumgebungen forschend lernen […]. […] [Es] ist darüber hinaus ein Lehr-Lern-Labor. Als solches dient es der praxisnahen Ausbildung von Studierenden, der Weiterbildung von Lehrkräften und der Unterrichtsentwicklung im Fach Mathematik. Nicht zuletzt ist das Mathematik-Labor aber auch eine Einrichtung, in der fachdidaktische Entwicklungsforschung vorangetrieben wird.“ (Roth 2013, S. 12)

## Angebot für Schulklassen

Ein wesentlicher Teil der Konzeption ist die Vernetzung mit dem Mathematikunterricht an der Schule. Diese Vernetzung wird sichergestellt durch die Bearbeitung von Lehrplanthemen, die Vorbereitung der Laborbesuche anhand von Informationen zu den Lernvoraussetzungen und Inhaltszielen und die inhaltliche Nachbereitung mit Hilfe von Materialien und Anregungen zur Weiterarbeit im Unterricht.

Schulklassen arbeiten in der Regel an drei aufeinanderfolgenden Wochen jeweils für eine Doppelstunde in Kleingruppen im Mathematik-Labor. Die folgenden Stationen für die Sekundarstufe I sind mit allen Materialien im Klassensatz verfügbar (vgl. www.mathe-labor.de):

Klassenstufe 5/6

- „Mathematik und Kunst“ (Brüche und Bruchrechnung)
- „Von Zuckerwürfeln und Schwimmbecken“ (Quader und Würfel)
- „Tatort Tankstelle“ (Achsen- und Drehsymmetrie)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1359–1360). Münster: WTM-Verlag

Klassenstufe 7/8

- „Baustelle Schule“ (Aufstellen und Umformen von Termen)
- „Figurierte Zahlen“ (Terme und Termumformungen)
- „Aktivurlaub“ (Funktionale Zusammenhänge)

Klassenstufe 9/10

- „Jakobsstab & Co.“ (Strahlensätze)
- „Ziegenproblem“ (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

## Forschend Lernen im Mathematik-Labor

Durch den experimentellen Umgang mit gegenständlichen Modellen sowie die systematische Variation von Computersimulationen wird sowohl das Verständnis von alltäglichen oder technischen Phänomenen als auch das mathematische Grundlagenwissen verbessert. Dabei geht es nicht um die Phänomene als solche, sondern um deren mathematische Durchdringung. Die Schüler/innen entdecken durch eigenständiges Experimentieren und Modellieren mathematische Prinzipien, setzen diese in Beziehung zu ihrem mathematischen (Vor-)Wissen und vernetzen beides durch das Arbeiten mit Simulationen. Sie halten ihre Ergebnisse und Vorgehensweisen in Arbeitsheften fest und reflektieren auf dieser Grundlage ihre Erkenntnisse. Auf diese Weise durchlaufen sie alle Prozesse des forschenden Lernens (vgl. Roth & Weigand 2014).

## Bildungsforschung im Mathematik-Labor

Aktuelle Schwerpunkte stellen die fachdidaktische Entwicklungsforschung sowie die Analyse von Lernprozessen von Schüler/innen dar. Zum Forschungspotenzial zählen die Vernetzung zwischen unterschiedlichen Fachdidaktiken und den Bildungswissenschaften sowie die Evaluation der Nutzung des Mathematik-Labors als Lehr-Lern-Labor durch Studierende. Angestrebt werden die Entwicklung von Stationen für die Sekundarstufe II und die Erweiterung des bisherigen Konzeptes unter besonderer Berücksichtigung heterogener Lerngruppen.

## Literatur


Baum, S., Roth, J. & Oechsler, R. (2013). Schülerlabore Mathematik – Außerschulische Lernstandorte zum intentionalen mathematischen Lernen. *MU, 5,* 4-11.

Roth, J. (2013). Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ – Forschendes Lernen im Schülerlabor mit dem Mathematikunterricht vernetzen. *MU, 5,* 12-20.

Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. Erscheint in: *Mathematik lehren, 184,* S. 2-10.

Frank ROTHE, Salzburg

# Denkfähigkeiten & Selbsteinschätzung im Mathematikunterricht

## Projektbeschreibung

Inwiefern können Lernende durch die Entwicklung und das Bewusstsein von differenzierten Lernzielen und kognitiven Fähigkeiten im Fach Mathematik (12. Klasse) eine realistische Selbsteinschätzung gewinnen? Diese Frage wurde als Praxisforschungsprojekt im Rahmen des Forschungsprojektes *Selbstverantwortliches Lernen an Freien Waldorfschule* von Harslem & Randoll (Harslem & Randoll, 2013) untersucht.

Die methodische Realisierung der Lern-Möglichkeiten wurde durch die didaktische Unterrichtsgestaltung und spezielle Aufgabendifferenzierung angestrebt. Die Frage inwiefern sich diese Fähigkeiten in einer verstärkten realistischen Selbsteinschätzung niederschlugen wurde methodisch durch ein Fragebogenprojekt (Kirchhoff, Kuhnt, Lippmann, & Schlawin, 2008) angegangen. Die Auswertung orientiert sich an Bortz (Bortz, Lienert, & Boehnke, 1990) und Lienert (Lienert, Eye, & Lienert-von, 1994).

## Forschungsergebnisse

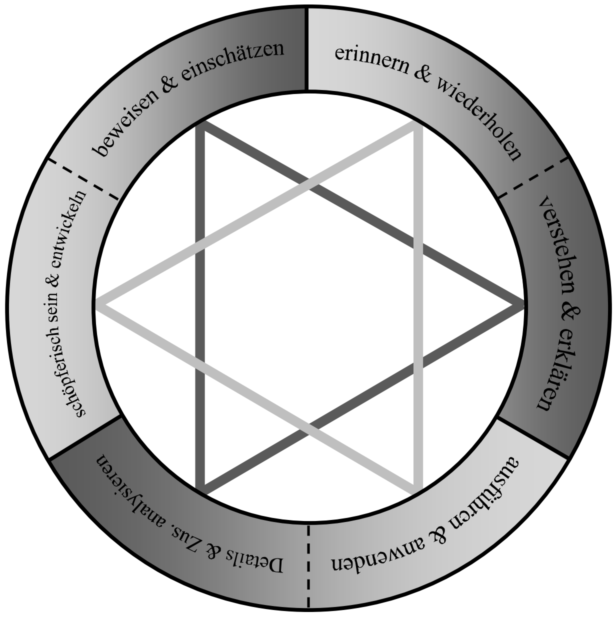



Abb.: Denkkategorien u. Strukturen im SKP

Den Ausgangspunkt für die kognitiven Fähigkeiten bildete die (Lernziel-)Taxonomie von Benjamin Bloom im kognitiven Bereich. In der Praxis zeigten sich Möglichkeiten aber auch deutliche Probleme bei deren Umsetzung. Eine Anpassung an die Taxonomie nach Anderson & Krathwohl (Anderson & Krathwohl, 2001) brachte deutliche Verbesserungen – sowohl was die didaktische Unterrichtsgestaltung als auch die konkrete Beobachtung der Denkfähigkeiten betraf. Nicht alle Fragen wurden hierdurch beantwortet. Vor allem wichtige Fragen die Hierarche der Kategorien von Denkprozessen untereinander betreffend blieben unbeantwortet.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1361–1362). Münster: WTM-Verlag

Hieraus resultiert das *Strukturmodell kognitiver Prozesse* (Rothe, 2011) indem es systematisch die zuvor gemachten Praxiserfahrungen und theoretischen Kenntnisse integriert. Es besteht aus sechs Denkkategorien – in Anlehnung an Anderson & Krathwohl – und drei wechselseitigen Beziehungen (Strukturen) der Kategorien untereinander. Sie bilden als Struktur der drei Ebenen und Struktur der Ebene ein klar gegliedertes Zusammenspiel zweier (Teil-)Hierarchien mit unterrichtsorientierten Einsatzmöglichkeiten.

Inwiefern gelang es nun aufbauend auf die entwickelten Denkfähigkeiten eine verstärkte realistische Selbsteinschätzung zu entwickeln?

Hierzu wurde zunächst ein Konstrukt der realistischen Selbsteinschätzung abgeleitet (vgl. Rothe, 2011, S. 137 - 140). Dies berücksichtigt sowohl die Fähigkeit der individuell konsistenten Selbsteinschätzung, als auch die Kongruenz von Selbst- und Fremdeinschätzung. Es zeigten sich erkennbare bis deutliche Fähigkeiten in Teilbereichen der Selbsteinschätzung der Schüler/innen. Jedoch bleibt offen, ob diese statisch gegeben oder steigend als Ergebnis der Beschäftigung mit den Denkkategorien zu betrachten sind.

Zusammenfassen lässt sich sagen: Die kognitiven Fähigkeiten (im SKP) erscheinen geeignet für eine differenzierte Unterrichtsgestaltung und Entwicklung derselbe als konkrete Fähigkeiten der Lernenden. Die realistische Selbsteinschätzung der Lernenden steigerte sich im Laufe des Jahres erkennbar. Inwiefern diese jedoch ursächlich-kausal mit den im Unterricht geförderten Denkfähigkeiten zusammenhängt muss noch offen bleiben.

## Literatur


Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing : a revision of Bloom's Taxonomy of educational objectives* (Abridged Ausg.). New York: Longman.

Bortz, J., Lienert, G. A., & Boehnke, K. (1990). *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik : mit 247 Tabellen*. Berlin [u.a.]: Springer.

Harslem, M., & Randoll, D. (2013). *Selbstverantwortliches Lernen an freien Waldorfschulen : Ergebnisse eines Praxisforschungsprojektes ; Beispiele aus der Unterrichtspraxis*. Frankfurt, M.: Lang.

Kirchhoff, S., Kuhnt, S., Lippmann, P., & Schlawin, S. (2008). *Der Fragebogen : Datenbasis, Konstruktion und Auswertung* (4., überarb. Aufl. Ausg.). Wiesbaden: VS.

Lienert, G. A., Eye, A. v., & Lienert-von, E. (1994). *Erziehungswissenschaftliche Statistik : eine elementare Einführung für pädagogische Berufe*. Weinheim [u.a.]: Beltz.

Rothe, F. (2011). *Struktur kognitiver Prozesse*. Münster u.a.: LIT.

Markus RUPPERT, Jan F. WÖRLER, Würzburg

# 3D-Technologie – Hype oder Chance? Eine Prognose für den Raumgeometrieunterricht 2030

Derzeit erfasst – wieder einmal – eine Welle der 3D-Euphorie den Sektor der Unterhaltungsmedien. Neue 3D-Technologien, wie zum Beispiel 3D-Fernseher, 3D-Kameras, 3D-Smartphones, Spielekonsolen mit 3D-Anzeige oder 3D-Steuerung, halten Einzug in Privathaushalte – und Kinderzimmer.

Vor allem der Raumgeometrieunterricht könnte von den neuen technischen Möglichkeiten räumlicher Darstellungen und mausunabhängiger Softwaresteuerung profitieren, denn Computerprogramme zur Arbeit mit und an virtuellen dreidimensionalen Objekten im Geometrieunterricht haben bislang eklatante Schwächen im Bereich der Schnittstelle Mensch-Computer (Bedienung und Darstellung, vgl. Ruppert/Wörler, 2010, 2011a).

Um aktuelle Entwicklung hinsichtlich ihrer Bedeutung für den Einsatz im Raumgeometrieunterricht beurteilen zu können, sind die folgenden Fragen zu klären (Ruppert/Wörler, 2010, 2011a):

- Welche Entwicklungen sind bei den gegebenen Rahmenbedingungen für den Unterrichtseinsatz *realistisch*?
- Welche der aktuellen Entwicklungen sind für den Raumgeometrieunterricht *sinnvoll*?

Zur Beantwortung dieser Fragen ist einerseits eine Prognose für die Entwicklung von Schule und Unterricht nötig, die hier jedoch nicht eingehend aufgestellt werden kann (siehe dazu Ruppert/Wörler, 2011a). Als *realistisch* und *sinnvoll* werden deshalb hier Einsatzszenarien moderner 3D-Technologien bezeichnet, die bezogen auf die aktuellen Rahmenbedingungen unter denen Schule stattfindet (finanzielle und räumliche Ausstattung, Organisation von Unterricht) umsetzbar sind und diesbezüglich bestimmten Kriterien genügen, die im Folgenden gleichzeitig als **Bewertungskriterien** (vgl. Ruppert/Wörler, 2010, 2011a) für die Beurteilung bestimmter Entwicklungen herangezogen werden:

B I. Wie intuitiv ist das Arbeiten mit der Technologie?

B II. Wie ökonomisch ist die Verfügbarkeit der Geräte?

B III. Wie gut kann die Technik organisatorisch und methodisch in den regulären Unterricht eingebettet werden?

B IV. Wie wird die Technologie von den Beteiligten akzeptiert?

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1363–1364). Münster: WTM-Verlag

Um nun zu einer Einschätzung zu kommen, welche Möglichkeiten sich für den Raumgeometrieunterricht ergeben, kann, ausgehend von diesen Bewertungskriterien, eine technische Prognose aufgestellt werden. Dabei sollen einige Entwicklungen der Schnittstelle „Mensch-Computer“ in den Bereichen Ein- und Ausgabe näher unter die Lupe genommen werden:


## Prognose und Fazit

Für die Zukunft erwarten wir eine Konzentration der technischen Entwicklung auf Trackingsysteme, die dann der Ein- und Ausgabe dienen und Zusatzgeräte wie Maus, Tastatur und Brillen ersetzen. Die derzeitigen Trends im Bereich der 3D-Technologien eröffnen demnach für den Raumgeometrieunterricht die Chance auf eine intuitivere Bedienung und Darstellung entsprechender Software – Vorschläge für Anwendungen gibt es bereits (vgl. Ruppert, Wörler, 2011b, 2012).

## Literatur

RUPPERT, M.; WÖRLER, J. (2010): Aktuelle Entwicklungen der Mensch-Computer-Schnittstelle – Eine Chance für die Raumgeometrie. Erscheint in: KORTENKAMP, U.; LAMBERT, A. (Hrsg.). Tagungsband des GDM Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik 2010.

RUPPERT, M.; WÖRLER, J. (2011a): Die Zukunft der Raumgeometrie liegt in Menschenhand – Raumgeometriesoftware und ihre Schnittstellen zum Menschen. In: FILLER, A.; LUDWIG, M.; OLDENBURG, R. (Hrsg.):Werkzeuge im Geometrieunterricht. Hildesheim: Franzbecker. S. 149-172.

RUPPERT, M.; WÖRLER, J. (2011b): Verknüpfung von Lehrbuchinhalten mit virtuellen Modellen, oder: Wie kommen digitale Inhalte ins Schulbuch? Erscheint in: KORTENKAMP, U.; LAMBERT, A. (Hrsg.). Tagungsband des GDM-Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik 2011.

RUPPERT, M.; WÖRLER, J. (2012): Virtuell und trotzdem greifbar – Mit Augmented-Reality-Modellen experimentieren. In: mathematik lehren, 174. S. 20-24.

WEITERE INFORMATIONEN UNTER: http://www.dmuw.de/projekt/rg-zukunft

Kerstin SITTER, Renate RASCH, Landau

# Geometrische Körper – entdeckt und protokolliert an außerschulischen Lernorten

## 1. Theoretischer Hintergrund

Geometrische Körper finden sich überall in der Lebenswelt der Kinder. Zur Erkenntnisgewinnung nutzten wir im vorliegenden Projekt außerschulische Lernorte. Untersuchungen zeigen, dass eine nachhaltige Leistungssteigerung nur durch eine adäquate Vernetzung schulischen und außerschulischen Lernens gelingen kann (z. B. Klaes, 2008). Wesentlich für die Vernetzung ist eine intensive Vor- und Nachbereitung im Unterricht sowie das lehrplankonforme Arbeiten an einem Thema an beiden Standorten. Als zentrales Mittel zur Reflexion und Schematisierung von Lernprozessen und ihren Ergebnissen werden Protokolle (Dörfler, 1989) vorgeschlagen. Protokolle können zu einer Steigerung der kognitiven Aktivierung führen und damit der mentalen Verarbeitung von wichtigen Aspekten, Schritten, Phasen und Ergebnissen von Erkenntnisprozessen dienen. Zudem können sie für die Weiterarbeit im Unterricht genutzt werden und somit zu einer adäquaten Vernetzung schulischen und außerschulischen Lernens beitragen.

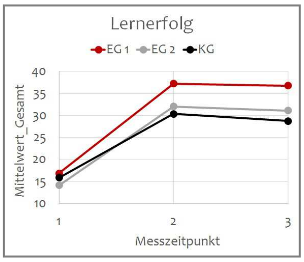
## 2. Methode und Design

Die Studie basiert auf einem Prä-Post-Test-Kontrollgruppendesign mit zwei Experimental- und einer Kontrollgruppe (N=120 Viertklässler). Während die EG 1 über sechs Doppelstunden hinweg verschiedene Gebäude aus der nahen Umgebung der Schule unter geometrischen Gesichtspunkten betrachtete, selbstständig erforschte und die Beobachtungen protokollierte, erweiterte die EG 2 ihr Wissen und Können zu Körpern anhand von Abbildungen an Stationen im Klassenzimmer. Der Geometrieunterricht orientierte sich dabei an dem Vier-Phasen-Modell von Bezold (2009, S. 182 ff.): (1) Reflexion, (2) Initiierungsphase, (3) gemeinsames Erkunden – skizzenhaftes Protokollieren (außerschulisch vs. schulisch), (4) individuelles Darstellen – Protokollieren. Die KG erweiterte ihr geometrisches Wissen und Können zu Körpern nach dem „klassischen" Unterrichtsstil (ohne außerschulischen Lernort, ohne Protokollieren). Inhaltlich sowie zeitlich war der Unterricht der KG an die EG angepasst. Um die Wirksamkeit des Unterrichtkonzeptes nachweisen zu können, wurden mehrere Messinstrumente zu verschiedenen Diagnosezwecken entwickelt und erprobt. Zur Erfassung geometrischer Fähigkeiten und Fertigkeiten wurde ein Leistungstest entwickelt. Für die Analyse der Protokollierfähigkeit wurden in gruppenüber-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1365–1366). Münster: WTM-Verlag

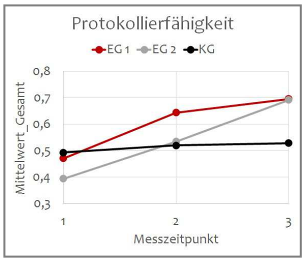
greifender Zusammenarbeit sogenannte „Video-Items“ sowie ein entsprechendes Analyseschema entwickelt (Engl et al., 2014).

## 3. Erste Ergebnisse




Die Studie belegt, dass sich durch die adäquate Vernetzung schulischen und außerschulischen Lernens in Verbindung mit dem Protokollieren geometrische Kompetenzen nachhaltig entwickeln lassen. Zwischen den drei Gruppen gibt es einen höchst signifikanten Effekt ($F(2,116) = 8.273$, $p < .001$). Der Post-hoc Vergleich mit dem Tukey HSD Test zeigt, dass sich der Mittelwert der EG 1 bezüglich des Lernerfolgs sowohl von der EG 2 als auch der KG signifikant unterscheidet. Dieser signifikante Unterschied zwischen den Gruppen ist allerdings nicht bei allen Aufgabentypen gleich stark vertreten. Während der Mittelwert der EG 1 bei Aufgaben, die das Realisieren ansprechen, sich hoch signifikant von dem Mittelwert der EG 2 und KG unterscheidet, konnten bei einfachen Identifikationsaufgaben lediglich zwischen der EG 1 und der EG 2 signifikante Effekte gefunden werden. Ein Grund dafür könnte sein, dass es sich bei der Identifikationsaufgabe um eine typische Schulbuchaufgabe handelt. Eine Ursache könnte auch darin liegen, dass das Identifizieren den Lernenden grundsätzlich leichter fällt als das Realisieren.

Während die KG ihre Fähigkeiten im Protokollieren kaum erweitern konnte, zeigten die EG einen minimal deskriptiven Zuwachs. Zwischen den drei Gruppen gibt es einen marginal signifikanten Effekt ($F(2,116) = 2.680$, $p = .073$). Eine vertiefende Analyse der Fähigkeiten im Protokollieren ist notwendig.




## Literatur


Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hamburg: Dr. Kovac.

Dörfler, W. (1989). Begriffsentwicklung durch Handlungsprotokolle. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 139-142). Bad Salzdetfurth: Franzdecker.

Engl, L., Schuhmacher, S., Sitter, K., Größler, M., Niehaus, E., Rasch, R., Roth, J. & Risch, B. (2014, eingereicht). Ein Messinstrument zur Erfassung der Protokollierfähigkeit – initiiert durch Video-Items. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften.*

Klaes, E. (2008). Stand der Forschung zum Lehren und Lernen an außerschulischen Lernorten. In D. Höttecke (Hrsg.), *Kompetenzen, Kompetenzmodelle, Kompetenzentwicklung. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik. Jahrestagung in Essen 2007* (S. 263-268). Berlin: LIT Verlag.

Jonathan VON OSTROWSKI, Bremen

# Struktursinn bei Schüler_innen der vierten Klasse

## 1. Hintergrund und Ziele

Mathematik gilt als die „Wissenschaft von den Mustern“. Die Ergebnisse verschiedener empirischer Untersuchungen zeigen, dass sich die Vorgehensweisen, die Schüler_innen beim Bearbeiten von Aufgaben aus dem Bereich Muster und Strukturen nutzen, einer von vier Ebenen der Strukturierungsfähigkeit zuordnen lassen (vgl. z.B. Mulligan & Mitchelmore 2009). Es gibt darüber hinaus Anzeichen dafür, dass sich diese Vorgehensweisen aufgaben- und inhaltsbereichsübergreifend auf einem überwiegenden Niveau einordnen lassen (ebd.). Der kompetente Umgang mit Mustern und Strukturen wird allgemein als „Struktursinn“ bezeichnet und durch Angabe verschiedener Fähigkeiten charakterisiert (z.B. Lüken 2012). Anknüpfend an die Erkenntnisse der Studie von Lüken (2012) stellen sich für vorliegende Studie folgende Forschungsfragen:

1. Welche Fähigkeiten zeigen Viertklässler_innen beim Bearbeiten von Aufgaben aus dem Bereich Muster und Strukturen?
2. Unterscheiden sich diese Fähigkeiten in Bezug auf geometrische und arithmetische Muster?
3. Wie lässt sich Struktursinn bei Viertklässler_innen beschreiben?

## 2. Forschungsdesign

Anhand eines halbstandardisierten Interviews wurde das Vorgehen von 46 Kindern der vierten Klasse beim Bearbeiten von Musteraufgaben erhoben. Die Schüler_innen bearbeiteten jeweils sechs arithmetische und geometrische Aufgaben, die basierend auf einer Schulbuch- und Literaturanalyse zusammengestellt wurden. In einem ersten Analyseschritt werden die Interviews mithilfe der inhaltlich strukturierenden Qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2014) analysiert, um die Vorgehensweisen der Kinder zu ordnen. Dabei soll die Bandbreite der individuellen Deutungen der vorgelegten Aufgaben dargestellt werden (vgl. Forschungsfrage 1).

Nach einem theoretischen Sampling soll anhand des Vorgehens ausgewählter Kinder eine Typenbildung nach Kelle & Kluge (2010) durchgeführt werden, um die zweite und dritte Forschungsfrage beantworten zu können.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1367–1368). Münster: WTM-Verlag

## 3. Erste Ergebnisse

Die Bandbreite der Vorgehensweisen soll anhand der Bearbeitungen zweier Kinder zur Kochkurve illustriert werden. Den Schüler_innen wurden die ersten drei Iterationsschritte der Kochkurve mit der Bitte zur Fortsetzung vorgelegt. Vergleichend wurden die Bearbeitungen derselben Schüler_innen zur Fortsetzung der Zahlenfolge 1, 4, 10, 19, 31 ergänzt.

Georg (vgl. Abb.1) nutzte die Selbstähnlichkeit der Kochkurve konsistent; er übertrug den Schritt von der ersten zur zweiten Iteration entsprechend für den Schritt von der dritten zur vierten Iteration, indem er „an jede gerade Linie wieder ein Dreieck“ setzte, während sich Tine (vgl. Abb.2) eher an figuralen Aspekten orientierte und die Kurve (in zwei Schritten) zu drei Sternen veränderte. Bei der Zahlenfolge setzte Georg die Differenzen als Dreierfolge fort, während Tine in ihrer Bearbeitung die Regel „immer +3“ inkonsistent erst auf die Differenzen und dann auf die Folgenglieder anwendete.

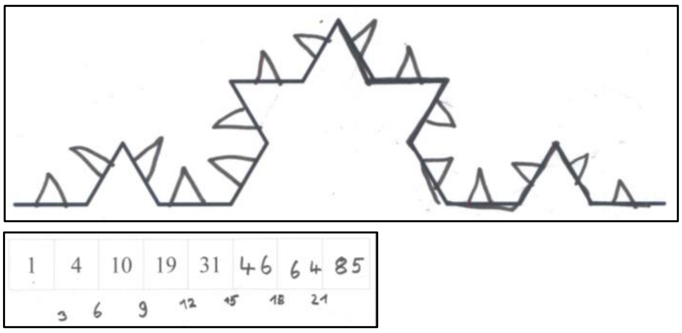



**Abb.1: Bearbeitungen von Georg**

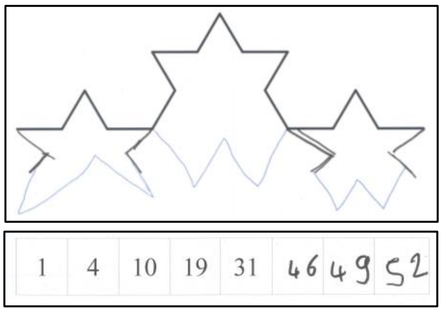



**Abb.2: Bearbeitungen von Tine**

In der weiteren Analyse soll untersucht werden, ob sich der hier vorliegende Eindruck eines inhaltsbereichsübergreifenden Struktursinns bestätigt.

## Literatur

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung.* 2., überarbeitete Auflage. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* 2., durchgesehene Auflage. Weinheim, Basel: Beltz Juventa (Grundlagentexte Methoden).

Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern.* Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal* 21 (2), 33–49.

Sabine WEIDENEDER, Stefan UFER, München

# Auswahl und Analyse von Aufgaben als professionelle Kompetenz einer Mathematik-Lehrkraft

## 1. Forschungsstand

Aufgaben sind wesentliche Schüleraktivität und somit zentrales Element des Mathematikunterrichts (Hiebert et al., 2003). Dabei geht verständnisvolles Lernen einher mit kognitiven Prozessen auf hohem Niveau, weswegen das Potential der verwendeten Aufgaben zur kognitiven Aktivierung als Indikator für nachhaltig wirksamen Unterricht betrachtet wird (Baumert et al., 2010; Seidel & Shavelson, 2007). Dies zeigt sich auch in der Unterrichtsplanung von Mathematiklehrkräften: Hier liegt der Fokus auf der Auswahl von Aufgaben und der Antizipation deren Bearbeitung (Bromme, 1981).

Trotzdem berichten Untersuchungen ein niedriges Aufgabenpotential in der Praxis (Jordan et al., 2008). Auch bleibt das Potential von kognitiv anspruchsvollen Aufgaben im Unterricht häufig ungenutzt, wenn beispielsweise Aufgaben durch schrittweise Einengung in Routine-Aufgaben verwandelt werden (Stein et al., 1996). Die Analyse, Auswahl, Sequenzierung und Implementation von Aufgaben stellt damit eine komplexe und für die Qualität von Unterricht relevante Anforderung an Lehrkräfte dar („choice of themes, methods, sequencing of learning processes – selecting and justifying content of instruction“, Schmidt et al., 2007, S.13). Damit gewinnt die Frage nach der professionellen Kompetenz von Lehrkräften, Aufgaben für ihren Unterricht auszuwählen und zu analysieren, als eine Facette professioneller Kompetenz, an besonderer Bedeutung.

Der Umgang mit Aufgaben wird von verschiedenen Kompetenzmodellen aufgegriffen, eine fundierte theoretische Beschreibung und Spezifizierung fehlt jedoch (Brunner et al., 2006; Döhrmann et al., 2012). Eine Operationalisierung erfolgt i.d.R. mit Items, in denen z.B. Aufgaben richtig gelöst oder in leichtere Aufgaben umgewandelt werden, oder möglichst viele substantiell verschiedene Lösungen zu Aufgaben gefunden werden sollen. Um eine umfassendere Erfassung dieses Kompetenzbereichs zu ermöglichen, befasst sich diese Arbeit mit dem Bereich der Analyse von Aufgaben und einer möglichen Operationalisierung der damit verbundenen Kompetenzanforderungen.

## 2. Konzeptualisierung des Kompetenzkonstrukts

Eine wesentliche Grundlage der Arbeit ist die Konzeptualisierung des *Aufgabenpotentials* als in der Aufgabe angelegte, aber noch nicht realisierte Nutzungsmöglichkeiten für verständnisvolle Lernprozesse. Die Kompetenz zur Analyse von Aufgabenpotential umfasst damit die Identifikation und Beschreibung solcher Nutzungsmöglichkeiten. Unterschieden wird hierbei

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1369–1370). Münster: WTM-Verlag

zwischen dem generellen Potential zur kognitiven Aktivierung sowie dem Aufgabenpotential in Bezug auf spezifische inhaltliche Einsichten, die im Unterricht erreicht werden sollen.

### 3. Entwicklung des Erhebungsinstruments

Aufbauend auf einer qualitativen, explorativen Vorstudie mit N=17 Lehrkräften wurden wesentliche Anforderungen in Bezug auf die Analyse und Auswahl von Aufgaben identifiziert und in Items für einen Kompetenztest umgesetzt. Erfasst werden insbesondere die Facetten „Einschätzung des Potentials zur kognitiven Aktivierung", „Einschätzung didaktischer Aufgabenmerkmale" und „Analyse des Aufgabenpotentials zur Bearbeitung eines gegebenen Lernziels". Nach einer Pilotierung und ggf. Adaption des Instruments sollen in der Hauptstudie Zusammenhänge der umgesetzten Kompetenzfacetten mit Indikatoren professionellen Wissens analysiert werden.

## Literatur


Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A.,… (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133–180.

Bromme, R. (1981). *Das Denken von Lehrern bei der Unterrichtsvorbereitung: Eine empirische Untersuchung zu kognitiven Prozessen von Mathematiklehrern*. Basel: Beltz.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Klusmann, U., Baumert, J., Blum, W., ... & Tsai, Y. M. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften. Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms*, 54-82.

Döhrmann, M., Kaiser, G. & Blömeke, S. (2012). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 44 (3), 325-340.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study.* Washington, DC: NCES.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M. & Brunner, M. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, 29 (2), 83–107.

Schmidt, W. H., Tatto, M. T., Bankov, K., Blömeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., et al. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries. Mathematics teaching in the 21st century (MT21).* East Lansing: Center for Research in Mathematics and Science Education, Michigan State University.

Seidel, T., & Shavelson, R. J. (2007). Teaching effectiveness research in the past decade: The role of theory and research design in disentangling meta-analysis results. *Review of educational research*, 77(4), 454-499.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, *2*(1), 50-80.

Julia WEINSHEIMER, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

# Diagnostische Fähigkeiten von Grundschullehrkräften im Bereich Arithmetik erfassen und analysieren

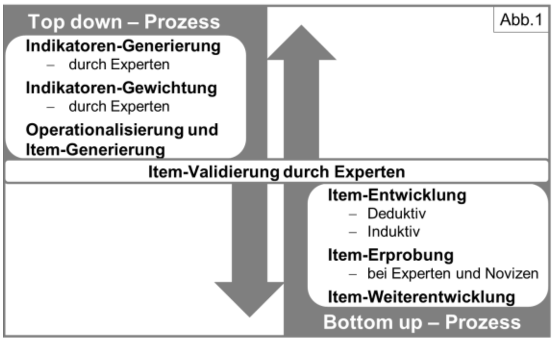
Im Rahmen des Forschungsprojekts wird ein Instrument zur Erfassung und Analyse der diagnostischen Fähigkeiten von Grundschullehrkräften entwickelt und evaluiert. Dabei stehen verschiedene Facetten diagnostischer Fähigkeiten im Bereich des arithmetischen Anfangsunterrichts (Klassen 1 und 2) im Fokus. Bei der Erfassung sollen die Anforderungen an das Diagnostizieren abgebildet werden, mit denen Grundschullehrkräfte im Berufsalltag konfrontiert sind.

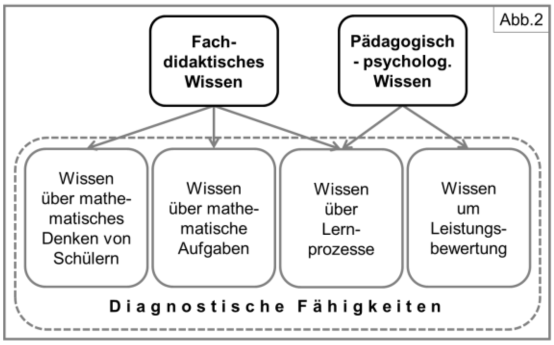
## Methodische Umsetzung

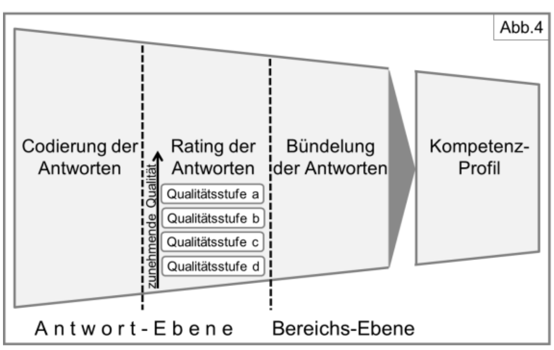
Die Entwicklung und Evaluierung des Instruments basiert auf verschiedenen qualitativen Methoden. In zwei gleichzeitig ablaufenden Prozessen (Abb. 1) erfolgt die Operationalisierung der diagnostischen Fähigkeiten (vgl. Weinsheimer, Rathgeb-Schnierer, 2013).

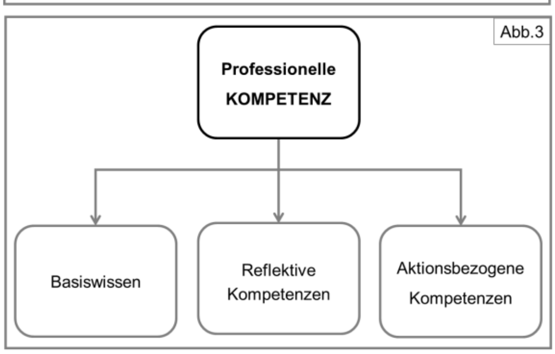
Theoretische Hintergründe liefern hierbei

- das Modell diagnostischer Fähigkeiten der COACTIV-Studie (Brunner, Anders, Hachfeld, Krauss, 2011, Abb. 2), das auf das Projekt bezogen modifiziert wurde, und
- das Modell professioneller Kompetenz (Lindmeier, 2011, Abb. 3).




In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1371–1372). Münster: WTM-Verlag

## Analyse der diagnostischen Fähigkeiten

Das Instrument besteht aus einem offenen Fragebogen, der an entsprechenden Stellen auch durch Filmsequenzen ergänzt wird. Diese sogenannte „animierte Fragenpräsentation“ zielt auf die Erfassung verschiedener Facetten diagnostischer Fähigkeiten ab. Um unterschiedliche Diagnosebereiche alltagsnah widerzuspiegeln, finden neben Beurteilungen von Schülerdokumenten und Mathematikaufgaben auch Videovignetten Eingang in das Instrument.

Die Analyse gliedert sich in einen mehrstufigen Prozess (Abb. 4). Zunächst werden die Antworten anhand von induktiv und deduktiv entwickelten Kategorien codiert. Anschließend erfolgt ein Rating in vier Qualitätsstufen, das auf der Grundlage von Expertenantworten generiert wurde. Der letzte Analyseschritt umfasst die Zusammenfassung der einzelnen Items in verschiedene Bereiche, die unterschiedliche Facetten diagnostischer Fähigkeiten widerspiegeln.

Auf der Basis des zusammenfassenden Qualitätsratings in den Bereichen wird schließlich das Kompetenzprofil erstellt und so visualisiert, dass differenzierte Aussagen zur Ausprägung einzelner Facetten diagnostischer Fähigkeiten möglich werden.

Die Erstellung von individuellen Kompetenzprofilen ermöglicht sowohl interindividuelle als auch intraindividuelle Vergleiche: Interindividuelle Vergleiche können Auskunft über diagnostische Fähigkeiten von verschiedenen Gruppen geben, wie z. B. Lehrkräften und Studierenden. Intraindividuelle Vergleiche von Kompetenzprofilen der einzelnen Personen ermöglichen Aussagen bezüglich der (Weiter-) Entwicklungen ihrer Diagnosefähigkeiten. Somit kann das Instrument beispielsweise zur Evaluation von Fortbildungen eingesetzt werden.

## Literatur

Brunner, M., Anders, Y., Hachfeld, A., Krauss, St. (2011). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, St. Krauss, M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften*. Münster: Waxmann.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers*. Münster: Waxmann.

Weinsheimer, J., Rathgeb-Schnierer, E. (2013). Diagnosekompetenz von Grundschullehrkräften erfassen – Einblicke in die Entwicklung eines Erhebungsinstruments. In G. Greefrath, F. Käpnick, M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 1078-1081). Münster: WTM-Verlag.

Deborah WÖRNER, Nürnberg

# Faszination Unendlich – Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht

Der Begriff „Unendlich“ ist zwar in allen Schularten und -stufen Bestandteil des MU, wird aber kaum thematisiert, obwohl laut Weyl die „Mathematik [als] die Wissenschaft des Unendlichen“ gesehen werden kann.

## 1. Forschungsstand und Lehrmittelanalyse

Die Fachmathematik einigt sich derzeit auf zwei Sichtweisen des Begriffs: ein aktuales Verständnis von „unendlichen Mengen nach dem Vorbild der Mengenlehre Cantors und [ein potentielles Verständnis] in den Begriffen und Methoden der Analysis“ (Marx, 2013); Beide Ansätze greift die fachdidaktische Forschung auf. Neben konkreten Vorschlägen zur Umsetzung spezifischer Inhalte im Unterricht (Tsamir, 2001; Schimmöller, 2012) wird das Augenmerk vor allem auf die Vorstellungen von Schülern und Studenten zum Unendlichkeitsbegriff und die dahinter verborgenen kognitiven Strukturen gelegt (z.B. Fischbein et al., 1979; Tsamir, 1999; Marx, 2011). Allen Forschungsergebnissen ist gemein, dass Schüler kaum mehr als über ein rein intuitives Alltagsverständnis zu dem zentralen Begriff verfügen und häufig mit ihren eigens entwickelten individuellen Vorstellungen im Mathematikunterricht (MU) alleine gelassen werden. Insbesondere für den MU im deutschsprachigen Raum bestätigen Ergebnisse einer empirischen Studie eben diese Vermutungen: Schüler aller Schultypen kommen nicht über ein intuitiv Verständnis des Begriffs hinaus. Sogar fast alle Lehrer antworten auf die Frage „Was verstehst du unter Unendlich?“ mit intuitiven Vorstellungen, wie „Gott“, „die größte Zahl“ oder „etwas ohne Ende“ (Wörner, 2013). Ein mathematisches Verständnis im Sinne Cantors wird zwar von der Literatur gefordert, ist aber so gut wie nie nachzuweisen (z.B. Marx, 2013; Wörner, 2013; Tsamir, 1999). Auch eine Analyse der zugelassenen Lehrmittel zeigt, dass der MU den Unendlichkeitsbegriff zwar an zahlreichen Stellen benutzt, ihn aber nicht eigens thematisiert.

## 2. Vorschlag zur konzeptionellen Umsetzung

Ausgehend von diesen Ergebnissen, bietet der folgende Vorschlag einen Ansatzpunkt für den MU, die vorhandenen Defizite zu einem seiner zentralen Begriffe zu beheben. Dabei wird, anders als in bereits bekannten Vorschlägen, der Unendlichkeitsbegriff langfristig in den MU integriert und am Ende jeder Zahlbereichserweiterung verortet. Beginnend in der Grundschule wird zunächst an alltägliche Vorstellungen der Schüler angeknüpft

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1373–1374). Münster: WTM-Verlag

und der Fokus nach und nach auf den Kontext Mathematik gelegt. Neben den individuellen „concept images“ der Schüler rücken vor allem Aufgaben zum kritischen Vergleich von endlichen und unendlichen Mengen in den Mittelpunkt einer ersten Begriffsbegegnung (Tall & Vinner, 1981; Tsamir, 1999). In der Sek. I folgen Inhalte zu einem mathematischen (aktualen) Verständnis. Zum Ende der 5ten Jahrgangsstufe lernen Schüler die Mächtigkeit des Zahlbereichs der natürlichen Zahlen zu bestimmen, Bijektionen zu echten Teilmengen herzustellen und eine Definition für den Unendlichkeitsbegriff entsprechend zu formulieren. Dieses erste formalintegrierte Verständnis wird bei der Zahlbereichserweiterung der ganzen und rationalen Zahlen erneut aufgegriffen. Neben weiteren bijektiven Zuordnungen zur Menge der natürlichen Zahlen lernen Schüler den Begriff des abzählbar Unendlichen an Beispielen zu erklären und ihn von potentiellen Vorstellungen abzugrenzen. Speziell das 1. Diagonalverfahren Cantors ist Ausgangspunkt für erstaunliche Erkenntnisse zum Phänomen Unendlich. Schüler lernen entgegen jedes intuitiven Verständnisses („es gibt doch viel mehr Brüche als natürliche Zahlen“), dass genauso viele Brüche wie natürliche Zahlen existieren. Eine kritische Auseinandersetzung mit außermathematischen Inhalten (z.B. Kunst und Religion) gibt Anlass zur Diskussion und bietet Gelegenheit, geschichtliche Elemente in den Unterricht zu integrieren. Um das Bild des Unendlichkeitsbegriffs aus Sicht der Mathematik weiter auszudifferenzieren, folgen ergänzende Inhalte im Rahmen der reellen Zahlen. Neben dem 2. Diagonalverfahren Cantors, gehört die Erkenntnis „es existiert nicht nur eine Unendlichkeit“ genauso zum Lehrstoff, wie die Behandlung von Phänomenen in IR (z.B. Abbildung der Ebene auf ein Intervall). Alle weiteren Inhalte (z.B. Axiomatik) erfordern vertiefte mathematische Erkenntnisse und bieten sich deshalb ausschließlich für die gymnasiale Oberstufe oder eine universitäre Ausbildung an. Trotzdem zeigt der Lehrgang eine Möglichkeit auf, einen der zentralen Begriffe der Mathematik in den MU zu integrieren und so ein langfristiges Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs beginnend bei den „Kleinsten“ anzubahnen.

## Literatur


Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educ. Stud. Math.*, 10, 3–40.

Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen. *JMD, 34 (*1), 73–98.

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: teaching prospective teachers. *Educ. Stud. Math., 38*, 209–234.

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ. Stud. Math.* 12, 151–169.

Wörner, D. (2013): Zum Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs im Mathematikunterricht –eine empirische Studie. In: BzMU 2013. Münster: WTM Verlag.

# 6 Berichte der Arbeitskreise

## Liste der Arbeitskreistreffen

Henrike ALLMENDINGER, Martina SCHNEIDER, Ysette WEISS-PIDSTRYGACH
**Geschichte der Mathematik**

Birgit BRANDT, Frank FÖRSTER
**Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik**

Astrid BRINKMANN, Thomas BORYS
**Vernetzungen im Mathematikunterricht**

Katja EILERTS
**HochschulMathematikDidaktik**

Andreas FILLER, Anselm LAMBERT
**Geometrie**

Gilbert GREEFRATH, Katja MAASS
**ISTRON-Gruppe**

Markus HELMERICH, Andreas VOHNS
**Mathematik und Bildung**

Gert KADUNZ
**Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik**

Gabriele KAISER, Timo LEUDERS
**Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik**

Ulrich KORTENKAMP, Anselm LAMBERT
**Mathematikunterricht und Informatik**

Katja KRÜGER, Elke WARMUTH
**Stochastik in der Schule**

Silke LADEL, Christof SCHREIBER
**PriMaMedien**

Anke LINDMEIER, Silke RUWISCH
**Psychologie und Mathematikdidaktik**

Renate MOTZER
**Frauen und Mathematik**

Edith SCHNEIDER, Susanne EISNER
**Mathematikdidaktik und Mathematikunterricht in Österreich**

Birgit BRANDT, Halle, Frank FÖRSTER, Braunschweig

# Bericht aus dem Arbeitskreis Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik

Schon seit ungefähr drei Jahrzehnten existiert innerhalb der GDM eine Gruppe von Forscherinnen und Forschern, die sich für die Entwicklung und Entfaltung der interpretativen Forschung in der Mathematikdidaktik einsetzt. Dabei gab es in der Vergangenheit immer wieder Herbsttreffen (zunächst an der Universität Regensburg und später in der Tagungsstätte Reinhardwaldschule bei Kassel) und auch Arbeitstreffen auf den Jahrestagungen der GDM. Auf dem letzten Herbsttreffen im Oktober 2013 wurde nun beschlossen, diesem Forschungsinteresse durch die Gründung eines offiziellen Arbeitskreises innerhalb der GDM wieder mehr Nachdruck und Aufmerksamkeit zu verschaffen. Im Januar 2014 hat schließlich der Vorstand der GDM der Gründung zugestimmt. Auf der Jahrestagung der GDM 2014 gab es somit die erste Sitzung des neu gegründeten Arbeitskreises *Interpretative Forschung*.

Die Sitzung war sehr gut besucht und auch das traditionelle Arbeitstreffen zum gemeinsamen Interpretieren am Ausflugsnachmittag konnte trotz verlockender Wetterlage erfolgreich wieder belebt werden. Der Arbeitskreis wird das damit gezeigte Interesse an der nun ‚offiziellen Existenz' für die Weiterentwicklung der interpretativen Forschung in der Mathematikdidaktik nutzen.

Auf der Sitzung wurde auf die Tradition des Arbeitskreises verwiesen sowie die Zielsetzung des neu gegründeten Arbeitskreises vorgestellt. Grundlage war der Gründungsantrag, der im Folgenden in modifizierter Form wiedergegeben wird.

## Entwicklung der interpretativen Forschung

Aus einer Kritik an den herrschenden Forschungsprogrammen der Unterrichtsforschung heraus hat Terhart 1978 den Begriff der Interpretativen Unterrichtsforschung geprägt und diesen mit einer symbolisch-interaktionistischen Konzeptualisierung begründet. Der im selben Jahr erschienene Aufsatz „Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht – Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung" (Bauersfeld 1978), in dem Heinrich Bauersfeld das Trichtermuster als eine von Lehrperson und Lernenden gemeinsam hervorgebrachte Stereotype der Unterrichtswirklichkeit beschreibt, kann als der Beginn der interpretativen Unterrichtsforschung in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik gesehen werden. Die Bielefelder Arbeitsgruppe um Bauersfeld am IDM hat sich in

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1379–1382). Münster: WTM-Verlag

der Folge mit ersten Fallstudien der Eigengesetzlichkeit des schulischen Alltags genähert und dabei auch die methodologische und methodische Auseinandersetzung mit der Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe und Konzepte aus dem konkreten Feld heraus in der Mathematikdidaktik vorangetrieben. Dieser damals neue Forschungsansatz wurde bald von weiteren Forschungsgruppen in der Mathematikdidaktik aufgegriffen, und es entstand eine bundesweit agierende Arbeitsgruppe *Interpretative Unterrichtsforschung*, die sich ab Mitte der 80'er Jahre des letzten Jahrhunderts regelmäßig auf Arbeitstagungen zu gemeinsamen Interpretationssitzungen unterschiedlicher Unterrichtsmitschnitte traf (siehe dazu die frühen Sammelbände der Interpretativen Unterrichtsforschung der Mathematikdidaktik Maier & Voigt 1991, 1994).

### Grundlage der Gründung des Arbeitskreises

Die interpretative Forschung ist dem qualitativen Forschungsparadigma zuzuordnen und beruft sich für die Rekonstruktionen des Unterrichtsgeschehens *„aus der Binnenperspektive der Handelnden"* (Maier/Voigt 1991, 8) auf die hermeneutischen Traditionen der Sozial- und Geisteswissenschaften. Sie nimmt eine beschreibende Funktion ein, die mit dem Ziel einer Ausarbeitung theoretischer Konstrukte zum begründeten Verstehen der Handlungsprozesse und Funktionsweisen dieser Alltagspraxis verbunden ist und gerade in dieser rekonstruktiven Haltung Ansatzpunkte zur Veränderung und zur Etablierung neuer Unterrichtswirklichkeiten sieht.

Der Arbeitskreis *Interpretative Forschung* der Mathematikdidaktik als offizielles Organ der GDM sieht sich dieser Tradition verpflichtet und möchte insbesondere auch den wissenschaftlichen Anspruch empirisch gegründeter Theoriebildung mit Nachdruck vertreten:

*"Ihre Leistungsfähigkeit sehen wir in ihrer spezifischen, soziologisch orientierten Perspektive begründet, die geeignet ist, den Mathematikunterricht ohne Wenn und Aber als banales soziales Ereignis wahrnehmbar zu machen. Sie führt zu Theorien mit großem empirischen, kontextbezogenen Gehalt, die sich bewusst von Theorieentwicklungen mit möglichst globalem, dekontextualisiertem Geltungsanspruch distanzieren."* (Jungwirth & Krummheuer 2006, 8)

Interpretative Forschung versteht sich als Denkrahmen und bietet einen spezifischen theoretischen Zugriff auf die Welt, der den Forschungsprozess in der Konzeptualisierung des Forschungsgegenstandes und der methodischen Annäherung an denselben vorstrukturiert. Dieser Denkrahmen ist dabei dem jeweils konkreten Forschungsgegenstand anzupassen – der Ansatz ist somit nicht auf bestimmte mathematische Inhaltsfelder, Schularten oder Altersstufen der Lernenden begrenzt und ist zudem offen für viele unterschiedliche Themen und Fragen. Gemeinsam ist jedoch die interpretative Grundhaltung im Sinne des Symbolischen Interaktionismus (Blumer 1973; Wilson 1973), der im Laufe der nun über 30-jährigen Geschichte der interpretativen Forschung in der Mathematikdidaktik je nach Verortung der Praxis oder Zielrichtung der Begriffsentwicklung durch weitere theoretische Konzepte erweitert und ergänzt wurde (vgl. z.B. die Aufsatzsammlungen in Jungwirth & Krummheuer 2006, 2008).

### Zielsetzung des Arbeitskreises

Eine Zielsetzung des Arbeitskreises *Interpretative Forschung* besteht in einer Auseinandersetzung mit den Verflechtungen und Verträglichkeiten theoretischer Basiskonzepte und Denkfiguren für die mathematikdidaktische Forschung, um dem in den Grundlagen formulierten Anspruch empirischer Theoriebildung gerecht zu werden. Diese methodologische Diskussion soll in enger Beziehung zum wissenschaftlichen Diskurs außerhalb der mathematikdidaktischen Forschung zum Beispiel auch auf den Herbsttagungen geführt werden. Zur Etablierung und Wahrung einer interpretativen Forschungspraxis mit methodisch kontrollierten Analyseverfahren sollen weiterhin auf diesen Herbsttagungen sowie in den Arbeitstreffen auf den Jahrestagungen der GDM gemeinsame Interpretationssitzungen durchgeführt werden, z.B. zu Dokumenten mathematischer Entwicklungsprozesse bzw. aus dem Alltag der Lehr-Lern-Praxis. Durch diese Rekonstruktionen der Wirklichkeiten ohne implizite Bewertung möchte der Arbeitskreis *Interpretative Forschung* zu einer differenzierten Wahrnehmung und daraus resultierenden Veränderung der Unterrichtsrealität beitragen.

### Forschungsfeld

Das mathematikdidaktische Feld interpretativer Forschung ist in den letzten 30 Jahren breiter geworden. Auch wenn die schulische Alltagspraxis noch immer ein Schwerpunkt der interpretativ orientierten Forschungsprojekte ausmacht, so lassen sich doch zahlreiche Projekte finden, die diesen Rahmen verlassen und z.B. auch mathematische Entwicklungsprozesse in anderen sozialen Institutionen betrachten (vgl. Sammelband Brandt, Fetzer & Schütte 2010). Dieser Entwicklung kommen wir in der Namensgebung des neu zu gründenden Arbeitskreises nach, indem wir mit *Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik* auf den Zusatz Unterricht verzichten.

## Organisatorisches und Aktuelles

Als SprecherInnen des Arbeitskreises wurden Birgit Brandt (birgit.brandt@paedagogik.uni-halle.de) und Frank Förster (f.foerster@tu-bs.de) gewählt.

Vom 24. - 26.10.2014 wird die diesjährige, und somit erste, Herbsttagung des Arbeitskreises in Dresden stattfinden. Im Gästehaus der Universität ist ein Kontingent an Zimmern reserviert. Interessenten melden sich bitte bei Marcus Schütte (marcus.schuette@tu-dresden.de).

Weitere aktuelle Informationen lassen sich ab sofort auf der Madipedia-Seite des Arbeitskreises finden: http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Interpretative_Forschung

## Literatur


Blumer, Herbert (1973): Der methodologische Standort des Symbolischen Interaktionismus. In: Arbeitsgruppe Bielefelder Soziologen (Hrsg.): Alltagswissen und Interaktion und gesellschaftliche Wirklichkeit 1 – Symbolischer Interaktionismus und Ethnomethodologie. Hamburg: Rowohlt, S. 80-146.

Bauersfeld, Heinrich (1978): Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht. Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In: Heinrich Bauersfeld (Hrsg.): Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht. Festschrift für Walter Breidenbach zum 85. Geburtstag. Hannover u.a: Schroedel, S. 158–180.

Brandt, Birgit; Fetzer, Marei & Schütte, Marcus (Hrsg.) (2010): Auf den Spuren interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. Götz Krummheuer zum 60. Geburtstag. Unter Mitarbeit von Götz Krummheuer. Münster: Waxmann.

Jungwirth, H. und G. Krummheuer (Hrsg.) (2006): Der Blick nach innen. Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht. Band 1. Münster: Waxmann.

Jungwirth, Helga & Krummheuer, Götz (Hrsg.) (2008): Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht, Band 2. Münster: Waxmann.

Maier, H. und J. Voigt (Hrsg.) (1991): Interpretative Unterrichtsforschung. Untersuchungen zum Mathematikunterricht. IDM 17. Köln: Aulis Verlag.

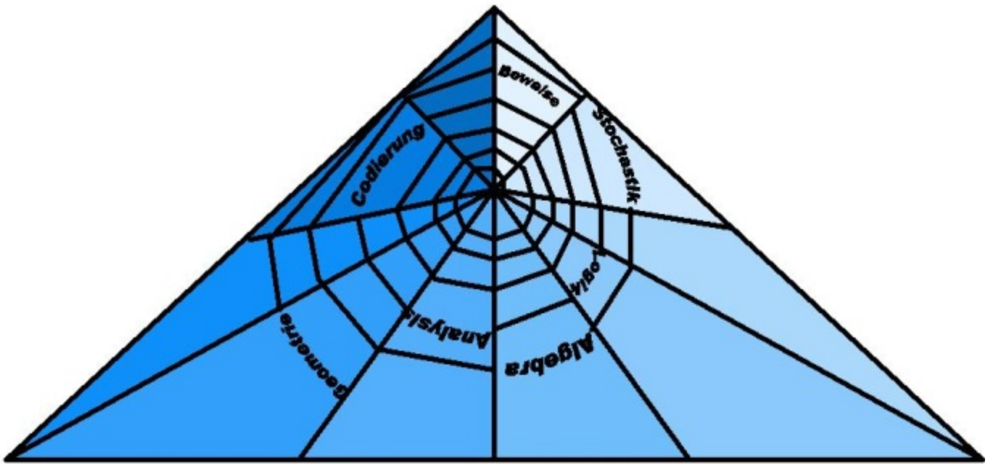
Maier, Hermann & Voigt, Jörg (Hrsg.) (1994): Verstehen und Verständigung, Untersuchungen zum Mathematikunterricht. IDM 19 Köln: Aulis-Verlag.

Terhart, E. (1978): Interpretative Unterrichtsforschung. Kritische Rekonstruktion und Analyse konkurrierender Forschungsprogramme der Unterrichtswissenschaft. Stuttgart: Klett.

Wilson, T.P. (1973). Theorien der Interaktion und Modelle soziologischer Erklärung. In: Arbeitsgruppe Bielefelder Soziologen (Hrsg.): Alltagswissen und Interaktion und gesellschaftliche Wirklichkeit 1 – Symbolischer Interaktionismus und Ethnomethodologie. Hamburg: Rowohlt, S. 54-79.

Astrid BRINKMANN, Münster, Thomas BORYS, Karlsruhe

# Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“




Der Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ konnte dieses Jahr sein fünfjähriges Bestehen feiern. Nach wie vor arbeiten wir an der altbekannten und zentralen Forderung an das Lernen von Mathematik: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voneinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

Die Sitzung des Arbeitskreises auf der GDM-Tagung 2014 wurde durch einen Bericht von Astrid Brinkmann zu den Aktivitäten des Arbeitskreises eröffnet. Da sich auch viele neue Teilnehmer/innen für die Arbeit des Arbeitskreises interessierten, wurden die zentralen Intentionen des Arbeitskreises vorgestellt.

Anschließend wurde von Thomas Borys zur 6. Tagung des Arbeitskreises vom 16. bis 17. Mai 2014 in Karlsruhe eingeladen.

Es folgte ein Impulsvortrag von Astrid Brinkmann zum Spannungsfeld Maps und Lernlandkarten, der eine anschließende rege Diskussion einleitete.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1383–1385). Münster: WTM-Verlag

**Top 1. Astrid Brinkmann:**
**Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“**

In der Reihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (Verlag Aulis) werden die Arbeitsergebnisse des Arbeitskreises vorgestellt. Jeder der Bände umfasst drei Teile:

- Unterrichtsmethoden
- Mögliche inhaltliche Vernetzungen
- Vernetztes Denken fördern

Inzwischen sind drei Bände dieser Reihe erschienen. Des Weiteren ist auch ein Materialienband: „Mathe vernetzt – Kopiervorlagen und Materialien zu Band 1–3“ (Hrsg. von Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß) erschienen. Der Materialienband bietet als Ergänzung zu den drei bislang erschienenen Bänden von "Mathe vernetzt" direkt einsetzbare, fertig aufbereitete Arbeitsblätter für die Unterrichtsvorbereitung. Zu jedem Arbeitsblatt gibt es Musterlösungen bzw. Lösungsvorschläge sowie didaktische Hinweise, Stichwörter zur Zuordnung hinsichtlich Stoff und Altersstufe und nicht zuletzt den Hinweis auf jenen Artikel in einem der drei "Mathe vernetzt"-Bände, der den Hintergrund für das Arbeitsblatt bildet.

Zurzeit arbeiten wir an der Erstellung des vierten Bandes, der herausgegeben wird von Astrid Brinkmann, Thomas Borys und Matthias Brandl. In diesem Band wäre noch Platz für weitere Artikel, daher möchten wir ausdrücklich auch Nicht-Mitglieder unseres Arbeitskreises ermuntern, uns passende Beiträge für diese Schriftenreihe einzureichen!
(An: astrid.brinkmann@math-edu.de)

**Top 2. Thomas Borys:**
**Einladung zur 6. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe, 16. – 17. Mai 2014**

Die sechste Tagung des Arbeitskreises wird von Thomas Borys organisiert. Die Tagung wird am 16. Mai um 14.00 Uhr beginnen. Freitags ist ein Fortbildungsnachmittag für Lehrer/innen geplant. Samstags findet eine „interne“ Sitzung des Arbeitskreises statt.

Das Tagungsprogramm und weitere Informationen zur Tagung werden auf der Homepage des Arbeitskreises www.math-edu.de/Vernetzungen.html (siehe: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html) veröffentlicht.

## Top 3. Astrid Brinkmann: „Maps versus Lernlandkarten“

In der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ haben Astrid Brinkmann und Thomas Borys verschiedene Einsatzmöglichkeiten von Maps (Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Map-Formen) im Mathematikunterricht beschrieben und passende Unterrichtsmethoden vorgestellt. Die Maps zeigen hierbei vornehmlich fachinhaltliche Vernetzungen zwischen mathematischen Objekten.

Lernlandkarten wiederum, wie sie von Michael Wildt verwendet werden, visualisieren mögliche Lernwege und individuelle Lernprozesse von Schülern und Schülerinnen. Die Knoten in den Lernlandkarten sind „Ich-kann-Sätze“.

Fraglich ist, ob eine sinnvolle Unterrichtsmethode entwickelt werden kann, welche die fachinhaltlich bezogene Darstellungsweise vernetzter mathematischer Objekte in Map-Form mit der auf Selbsteinschätzung und Lernprozessplanung und –visualisierung angelegten der Lernlandkarten zusammenbringt.

### Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. O. O.: Aulis Verlag.

http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Katja EILERTS, Potsdam, Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, Nürtingen-Geislingen, Christine BESCHERER, Ludwigsburg

# Arbeitskreis „HochschulMathematikDidaktik“ – Alternative Lehrmethoden

Die achte Arbeitskreissitzung fand am 10. März 2014 im Rahmen der 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 14. März 2014 in Koblenz statt. Auf unserer letzten Arbeitskreissitzung an der Universität Münster im Januar 2014 haben wir beschlossen, das Thema „Alternative Lehrmethoden – MOOCs, Inverted Classroom, Peer Instruction, Just-in-Time-Teaching und Co.“ weiterhin zu diskutieren.

In Koblenz wurden Ergebnisse der letzten Arbeitskreissitzung berichtet, eine neue Buchreihe mit Publikationsmöglichkeiten vorgestellt, auf die Neugestaltung der Homepage durch Marc Zimmermann und Cornelia Gamst (Link: http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Hochschulmathematikdidaktik) hingewiesen und die nächste Herbsttagung an der Universität Duisburg-Essen (Standort Essen) geplant.

Das Impulsreferat auf der Arbeitskreissitzung in Koblenz hielt Prof. Joachim Hilgert, Max Hoffmann und Anja Panse (Universität Paderborn) zum Thema:

## „Schwierigkeiten von Studienanfängern, verschiedene Lehrmethoden und Fragen an die Didaktik“

Ziel dieses Beitrags ist es, einen fruchtbaren Austausch zwischen Fachmathematikern und Fachdidaktikern zum Thema Hochschullehre anzustoßen. Nach einer kurzen begrifflichen Einordnung beschreiben wir mehrere Lehrformen in einer Vielfalt von Ausprägungen, die der älteste unter uns im Laufe der vergangenen 33 Jahre durchgeführt hat, immer im Bemühen, konstruktiv mit den Schwierigkeiten der Studienanfänger umzugehen. Vor- und Nachteile der verschiedenen Varianten wurden jeweils registriert, und weil sich in diesen Varianten Aspekte einer Reihe von heute viel diskutierten didaktischen Ansätzen wie zum Beispiel Peer Instruction, JiTT, Inverted Classroom etc. wiederfinden, lassen sich diese Erfahrungen für die Bewertung solcher Ansätze nutzen. Die Bewertung der Ansätze kann systematisch nur auf der Grundlage eines substantiellen Qualitätsmanagements erfolgen, das durch klare Zielsetzungen fundiert ist. Diese Grundlage müssen Fachmathematiker und Fachdidaktiker gemeinsam schaffen, um dann ihre jeweiligen Erfahrungen in einen Optimierungsprozess einbringen zu können.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1387–1390). Münster: WTM-Verlag

An der Hochschullehre im Fach Mathematik sind sowohl Fachmathematiker als auch Fachdidaktiker beteiligt. Es ist ihre Aufgabe, den zu vermittelnden Stoff und die in der Vermittlung verwendeten Lehrformen und –methoden auszuwählen. Die zentrale Kompetenz, die man von den Hochschullehrern in Bezug auf diese Entscheidungen erwarten muss, ist die Fähigkeit zu adressatengerechter didaktischer Reduktion, die im Einklang mit den inhaltlichen Zielsetzungen der Lehrveranstaltung steht. Die Entwicklung der Fähigkeit, angemessen didaktisch zu reduzieren, sollte ein zentrales Anliegen der Hochschuldidaktik sein. Es ist evident, dass sie ohne souveräne Beherrschung der Inhalte nicht erreichbar ist. Wir konzentrieren uns daher auf die nichtfachlichen Aspekte von fachmathematischen Veranstaltungen. Die überwiegende Zahl solcher Veranstaltungen wird in einer der Organisationsformen Vorlesung, Übung oder Seminar angeboten. Es gibt aber eine Vielzahl von Möglichkeiten diese Lehrformen auszugestalten, die jeweils Auswirkungen hinsichtlich Interaktion, Aktivierung, Planbarkeit und Motivation haben.

In **Vorlesungen** kann man das Medium wählen (Tafel, Folien, Tablet), die Art der unterstützenden Materialien (Skript, Buch, Literaturlisten, Zusammenfassungen, gar keine Zusatzmaterialien) und die des präsentierten Materials (gesamter Stoff, nur besonders motivierende Stoffelemente, kompletter Lesekurs), aber auch die Zusammenstellung der Hörerschaft (parallele Sektionen oder nicht). Durch die Variation in diesen unterschiedlichen Dimensionen ergibt sich eine Vielzahl von Möglichkeiten. Das im WS 2013/14 an der Universität Paderborn erprobte kompetenzorientierte Lehrkonzept „Tutorielle Vorlesung" ist eine solche Variante, in der der durch den Leseanteil gewonnene Raum für die Beantwortung von Fragen genutzt worden ist. Es beinhaltete Elemente von Inverted Classroom und JiTT sowie ein Feedback-Konzept (vgl. Hilgert et al. 2013a und 2013b für nähere Erläuterungen dazu). In **Übungen** lassen sich Unterrichtsgespräche führen, das Konzept Arbeit in Kleingruppen mit Präsenzaufgaben organisieren, Frontalinstruktion in Form des Vorrechnens von Übungsaufgaben in Zentralübungen anbieten oder spezielle Lehrmethoden wie das Gruppenpuzzle einsetzen. Auch in dieser Lehrform können die Ausgestaltungen gemischt werden. Die Anzahl der Variationsmöglichkeiten erhöht sich weiter durch die Form, in der man Musterlösungen einsetzt. Das **Seminar** ist eine besonders output-orientierte Organisationsform. Auch hier sind diverse Entscheidungen zu treffen: Form des outputs (Vortrag, Vortrag und Ausarbeitung, Vortrag und Präsentation), Natur der Themenzusammenstellung (Einzelthemen, Themenreihen, Buchabschnitte), Genre der Textvorlagen (Lehrbuch, wissenschaftlichen Arbeiten), zeitliche Rahmenbedingungen (Ausarbeitung vorab, Ausarbeitung nach dem Vortrag, striktes Zeitlimit für den Vortrag oder nicht), beziehungsweise Organisationsform (von Studierenden selbst organisiert – Peer Instruction, Blockseminar, Internetseminare).

Für viele der aufgezeigten Variationsmöglichkeiten liegen konkrete Erfahrungen vor, insbesondere in Bezug auf das Lernverhalten und den Lernerfolg der Studierenden. Das liegt nicht zuletzt daran, dass es bis heute nicht gelungen ist die Schwierigkeiten der Studienanfänger (wie sie z.B. in Hilgert et al. 2013a und 2013b beschrieben sind) zu eliminieren und stets andere Varianten ausprobiert werden. Die vorhandenen Erfahrungen können die Ausgangshypothesen für wissenschaftlich fundierte Untersuchungen des Zusammenhangs von Lehrmethode und Lernerfolg liefern, die Fachmathematiker unseres Wissens bisher nicht durchgeführt haben.

Ziehen wir ein erstes Fazit, so lässt sich feststellen, dass vielfältige Vermittlungsformen bereits erprobt sind und auf praktische Erfahrungen hinsichtlich Wirksamkeit und Schwierigkeiten zurückgegriffen werden kann. Unter Berücksichtigung dessen, was im Fachstudium geleistet werden muss, kann nun ein Austausch zwischen Fachmathematik und Fachdidaktik über Relevanz von Fragestellungen (Was sind die wirklichen Schwierigkeiten?), Praxistauglichkeit von Methoden (Wie ist die Umsetzbarkeit unter Berücksichtigung der Ressourcen?), Evaluation von Erfolg (An welchen Kriterien bemisst sich der Erfolg einer Methode?) angestrebt werden. Damit liegt auf der Hand, dass der Dialog auch wesentlich die Frage eines angemessenen Qualitätsmanagements beinhalten muss. Auch dazu gibt es Erfahrungen, insbesondere zu Prüfungsformen, Varianten von Lehrevaluationen, Feedback-Verfahren und Ressourcenplanung, die man bei der Bewertung von Lernerfolg und Methodeneinsatz heranziehen kann. Prüfungen können in Form von Klausur, Take-home-Tests, mündlichen Einzelprüfungen (öffentlich an der Tafel oder nicht öffentlich durch Prüfer und Beisitzer), mündlicher Gruppenprüfung, Seminarvortrag, Seminarausarbeitung oder Quiz stattfinden. Lehrevaluationen lassen sich durch freie Textäußerungen, Fragebögen oder veröffentlichte Essays umsetzen. Feedbackverfahren findet man beispielsweise als webbasierte live-Feedbacksysteme (z.B. PINGO, vgl. Hilgert 2013a), als Korrekturen oder Besprechungen. Alle diese Varianten messen unterschiedliche Kompetenzen in unterschiedlicher Schärfe. Ressourcenplanung, ein nicht zu vernachlässigender Punkt beim Qualitätsmanagement, ist in Bezug auf Personal, Softwareeinsatz und Raumplanung universitärer Alltag.

Vergleicht man den Erfahrungsschatz in der Lehre mit dem im Qualitätsmanagement, so muss man feststellen, dass das Qualitätsmanagement eigentlich nur in einem Bereich gut ausgebaut ist, nämlich bei der Leistungserhebung von Studierenden. Die Bewertung der Qualität der Lehre findet bisher vor allem in der Dimension Kundenzufriedenheit statt. Andere Gebiete werden gar nicht systematisch erfasst. Es ergeben sich folgende Desiderate:

Ziele müssen klar formuliert werden, insbesondere die angestrebten Kompetenzen, die Lernziele und Bewertungskriterien. Prioritäten müssen in der Hinsicht gesetzt werden, dass die Methoden an die Lernziele angepasst werden und keinesfalls umgekehrt. Der Studienerfolg muss unter Berücksichtigung von Vorkenntnissen, Studienverläufen und Abschlussquoten evidenzbasiert als Längsschnitt erfasst werden.

Alles in allem lässt sich festhalten, dass Hochschullehre eine Herausforderung mit zwei unterschiedlichen Aufgabenstellungen ist. Einerseits ist es Aufgabe der Dozenten eine angemessene didaktische Reduktion anzubieten. Anderseits ist es Aufgabe der Studierenden Bereitschaft zu aktivem, zielgerichtetem und konzentriertem Engagement zu zeigen. Nur wenn beide Aufgaben erledigt werden, kann Hochschullehre erfolgreich sein. Grundvoraussetzung für die gewünschte Zusammenarbeit von Fachmathematikern und Fachdidaktikern in der Hochschuldidaktik ist Konsens aller Beteiligten über die inhaltlichen Zielsetzungen mathematischer Veranstaltungen, verbunden mit angestrebten Kompetenzen und notwendigen/ geeigneten Inhalten, und die Wahl geeigneter Bewertungskriterien von Lehrkonzepten hinsichtlich der inhaltlichen Ergebnisse, der Zufriedenheit der Kunden und dem Ressourceneinsatz.

Daraus ergibt sich folgender Vorschlag für die Aufgabenverteilung der Beteiligten zur konkreten Arbeit an der Verbesserung von fachmathematischer Hochschullehre: Die Fachmathematiker informieren sich über das methodische Arsenal und reflektieren und dokumentieren ihre Erwartungen. Die Fachdidaktiker machen sich mit den zu vermittelnden Inhalten vertraut und bieten konkret nutzbare Materialien an. Auf dieser Basis können Lehrkonzepte und Lehrmethoden evaluiert und weiterentwickelt werden.

## Literatur


J. Hilgert, M. Hoffmann, A. Panse (2013a): Kann professorale Lehre tutoriell sein? Ein Modellversuch zur Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten, erscheint im Tagungsband zum „Hansekolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik, Lübeck 2013“, WTM-Verlag, Münster

J. Hilgert, M. Hoffmann, A. Panse (2013b): Handlungsbedarf in fachmathematischen Veranstaltungen? – Maßnahmen an der Universität Paderborn, erscheint in „Beiträge zum Mathematikunterricht 2014“, WTM Verlag, Münster.

Silke LADEL, Saarbrücken, Christof SCHREIBER, Gießen

# Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien'

Seit 2007 tagt regelmäßig die Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen im Mathematikunterricht in der Primarstufe' im Arbeitskreis Grundschule der GDM. Die Mitglieder der Arbeitsgruppe teilen das Interesse an der Entwicklung, der Konzeption, dem Einsatz und der Bewertung digitaler Medien für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Es werden regelmäßige Treffen im Rahmen der Jahrestagung der GDM, des Arbeitskreises Grundschule und darüber hinaus organisiert. Für die GDM in Koblenz konnten als Vortragende Silke Ladel & Ulrich Kortenkamp, Rebecca Klose, Phillippe Sasdi und Roland Rink gewonnen werden.

## Arbeitsgruppentreffen

Zum Treffen am Donnerstag wurden die folgenden Tagesordnungspunkte bearbeitet:

- TOP 1: Veröffentlichung
- TOP 2: Tabarz 2014
- TOP 3: Internetauftritt
- TOP 4: GDM 2015

Zu TOP 1: Gemeinsame Veröffentlichung aus der Arbeitsgruppe

Für die geplante Veröffentlichung wurden folgende Beiträge eingereicht:

Joost Klep: Schüler-Modelle. Vorstellungen bezüglich der Entwicklung von Lernenden. Arithmeticus als Beispiel

Günter Krauthausen: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule - Innovation auf dem Tablet serviert?

Silke Ladel & Ulrich Kortenkamp: Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten – Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory

Roland Rink: Mit Audiopodcasts Schwierigkeiten im Modellierungsprozess beim Sachrechnen begegnen - Untersuchungen an Kindern mit Leseschwierigkeiten im vierten Schuljahr

Markus Reiter: Die computerunterstützte Lernumgebung „Geolizi": ein Versuch zur Implementierung digitaler Medien im Geometrieunterricht der Grundschule

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1391–1392). Münster: WTM-Verlag

Christof Schreiber & Rebecca Klose: Audio-Podcasts zu mathematischen Themen - Begriffsbildung mit digitalen Medien

Nathalie Sinclair & Einat Heyd-Metzuyanim: Developing number sense with TouchCounts

Bernd Wollring: Prozessbezogene Kompetenzen - illustriert durch prototypische Aufgaben mit der Werkzeug-Software BlockCAD

Zu den Beiträgen gibt es bereits jeweils zwei Reviews und die Herausgeber bitten, die überarbeiteten Versionen wie besprochen bis zum 31.03.2014 einzusenden. Die Veröffentlichung soll im Mai in Druck gehen. Als Titel ist geplant: ‚Von Audiopodcast bis Zahlensinn.' Das Buch erscheint als Band 2 der Reihe ‚Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe' voraussichtlich im WTM-Verlag.

Zu TOP 2: Planung für Tabarz

Das Treffen des AK Grundschule findet in Tabarz vom 07.11.14 - 09.11.14 unter dem Motto ‚10 Jahre Bildungsstandards' statt. Die Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien' trifft sich dort regelmäßig in Arbeitsgruppensitzungen. In 2014 soll dies wieder als ‚Markt der Möglichkeiten' stattfinden. Einige Beiträge wurden schon direkt in der Sitzung auf der GDM genannt, insgesamt sind aber weitere Beiträge für einen solchen Markt wünschenswert.

Zum besseren Austausch innerhalb von ‚PriMaMedien' und zur Vorbereitung des Marktplatzes ist ein Treffen bereits am 06.11.14 geplant.

Zu TOP 3: Internetauftritt

Die Sprecher der Arbeitsgruppe werden den Auftritt in madipedia aktualisieren. Alle Mitglieder sind aufgerufen, auch Änderungen vorzunehmen. Dank Ulrich Kortenkamp sind wir nun unter den Arbeitskreisen zu finden.

Zu TOP 4: GDM 2015

Für die GDM 2015 in Basel ist erneut eine selbstmoderierte Sektion geplant. Die Sprecher und alle anderen Mitglieder sollten dazu Ausschau halten, welche weiteren Kolleginnen und Kollegen für einen Vortrag in der Sektion in Frage kommen. Insgesamt wird die Verortung in einer selbstmoderierten Sektion als Vorteil gesehen.

## Literatur

Ladel, S.; Schreiber, Chr. (Hrsg.) (2014). Von **A**udiopodcast bis **Z**ahlensinn. Band 2 der Reihe *Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe*. Münster: WTM-Verlag *(in press)*.