

Verfremdung durch historische Perspektiven - Beispiele

Der Verwendung von Geschichte der Mathematik im Mathematikunterricht sind zahlreiche Beiträge gewidmet. Dies betrifft sowohl theoriebildende Sichtweisen als auch empirische Studien zu konkreten Umsetzungen. Die Einbeziehung historischer Quellen kann zu tiefem fächerübergreifenden Verständnis mathematischer Zusammenhänge führen, Perspektivwechsel initiieren, Mathematik als Prozess erlebbar machen und auch einen Beitrag zu einem Selbstverständnis als Erben einer langen mathematischen Kultur leisten. Geschichte der Mathematik kann auch genutzt werden, um durch Verfremdung mathematische Denkgewohnheiten und Denkroutinen, beherrschte Rechenverfahren, auswendig gelerntes mathematisches Vokabular wieder in Frage zu stellen und neu zu interpretieren. Wir ließen uns für diesen Beitrag von einer Idee von Evelyne Barbin (2000) inspirieren, welche die Geschichtlichkeit des Offensichtlichen zum Anlass zur Reflektion über mathematische Kultur, Eigenheiten mathematischer Disziplinen und der Rolle individueller Interessen und Denkmuster nimmt. Geschichte der Mathematik dient in diesem Beitrag als Hintergrundwissen und Quelle der Inspiration des Lehrenden zur Entwicklung und Gestaltung von Mathematikdidaktik-Veranstaltungen für Lehramtsstudierende. Die Beschreibung der Beispiele und der an ihnen entwickelten Methode zur Erzeugung kognitiver Konflikte erfolgt in der Sprache mathematischer Bewusstheit. Die dafür notwendigen Grundlagen und Begriffe führen wir im ersten Teil exemplarisch ein. Im zweiten Teil geben wir einige Beispiele von Verfremdung unter Einbeziehung historischer Quellen, in welchen Studierende ihr Wissen und ihre Fertigkeiten in einer neuen Rolle erlebten und diese selbstständig hinterfragten und neu interpretierten. Dabei werden die Beispiele aus der Perspektive mathematischer Bewusstheit reflektiert, um eine Methode zur Unterrichtsgestaltung zu entwickeln, die von stoffdidaktischen Betrachtungen ausgeht.

1. Einordnung

Ähnlich wie im Beitrag (Kaenders, Kvasz & Weiss-Pidstrygach, 2013) nutzen wir die historische Perspektive, um eine Sprache zur Beschreibung von Verständnis- und Darstellungsproblemen mathematischer Inhalte bei Studierenden zu entwickeln, die man gemeinhin unter fehlende mathematische Denkweisen oder unzureichendes mathematisches Interesse einordnen könnte. Das Konzept mathematischer Bewusstheit dient uns dabei zur Beschreibung von Bezügen zwischen der individuellen mathematischen Kul-

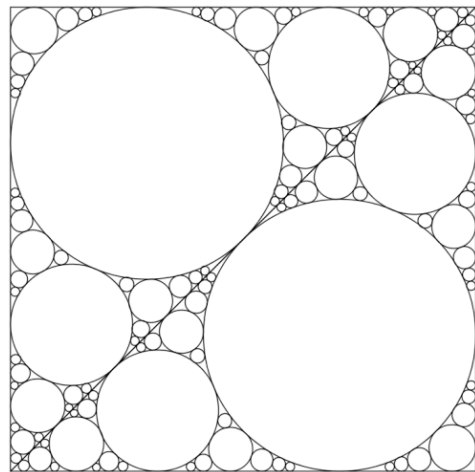
tur und Bildung Studierender einerseits und der in einem mathematischen Konzept enthaltenen mathematischen Kultur und historischen Begriffsentwicklung andererseits.

Im den folgenden Beispielen werden durch historische Bezüge Perspektivwechsel angeregt, die zu Veränderungen der Motivation, des Selbstverständnisses und zu größerer Neugier auf mathematische Vielfalt führen können. Soziale und manipulative Bewusstheit sind durch Nachahmung mathematischer Tätigkeiten gekennzeichnet. Dabei zu beobachtende Herangehensweisen an mathematische Probleme sind oft formale Übertragung und nicht reflektierte Anpassung vorhandener Fertigkeiten. Erfolgt die Vermittlung in einer Gruppe (wie z.B. in der Vorlesung) kann der Lehrende leicht die häufig mit sozialer und manipulativer Bewusstheit einhergehende unkritische Wiederholung, und Passivität als Desinteresse und fehlendes Problembewusstsein empfinden. Der Beitrag von Evelyne Barbin zur Geschichtlichkeit des Offensichtlichen erzählt eine spannende Geschichte zu unterschiedlichen Vorstellungen dessen, was für offensichtlich gehalten wird. Er zeigt viele Möglichkeiten, auf der Ebene sozialer und manipulativer Bewusstheit kognitive Konflikte zu schaffen. Den Studierenden sind aus dem Alltag des Mathematikstudiums Formulierungen wie *offensichtlich ist ...*, *wie leicht nachzuweisen ...*, *direktes Nachrechnen zeigt ...*, *leicht einzusehen ...* bekannt. Ein *in Frage stellen* dieses *Offensichtlichen* hinterfragt einerseits die mathematische Kultur des Lehrenden und andererseits die vom Lehrenden angenommene mathematische Bildung der Gruppe. Die Formulierung *offensichtlich* ist von Seiten der Lehrenden oft als Aufforderung an die Studierenden gemeint, die Sachverhalte selbst nachzuprüfen. Nicht alle erkennen, dass mit *elementar* nicht *mathematisch trivial* oder *einfach* gemeint ist, sondern für den Lehrenden bedeutet: im Rahmen instrumenteller und logischer Bewusstheit, die Beherrschung einiger Fertigkeiten vorausgesetzt, zu lösen. Der Artikel von Evelyne Barbin diskutiert verschiedene Sichtweisen auf das Offensichtliche in der Geometrie, beginnend mit Euklid und endend mit Hilbert. Dabei wird Offensichtlichkeit vom Standpunkt der Schlussfolgerichtigkeit, der Methode und der geometrisch-intuitiven Sichtweise in Frage gestellt wird. Vom mathematischen Standpunkt ist der Diskurs für Studierende ohne spezielle begleitende Fachvorlesung wahrscheinlich nur anhand der Beispiele Euklids, Proklus und Descartes nachzuvollziehen. Hier kann der Studierende eigene Vorlieben, seine Bildung und kognitive Veranlagung reflektieren und hinterfragen. Der hohe fachliche Anspruch birgt die Gefahr, dass die an Erfahrungen im Bereich sozialer und manipulativer Bewusstheit anknüpfende Problemstellung *Was meint offensichtlich?* nicht zu *Was heißt für mich offensichtlich?* wird. In der Sprache mathematischer Bewusstheit wird eine in

sozialer und manipulativer Bewusstheit gewohnte Sichtweise und Routine erst in Problemstellungen verfremdet, die kontextuelle, intuitive, argumentative, logische und sogar theoretische Bewusstheit betreffen. Für ein reflektiertes Wechselspiel zwischen historischen mathematischen Entwicklungen und der Entwicklung und Individualität der eigenen mathematischen Sichtweise scheinen uns Problemstellungen, die zwischen sozialer und manipulativer Bewusstheit einerseits und intuitiver, instrumenteller und experimenteller Bewusstheit andererseits liegen für mathematikdidaktische Veranstaltungen geeignet. Dafür geben wir nun einige Beispiele.

2. Verfremdung als Mittel zur Selbstwahrnehmung mathematischer Denk- und Herangehensweisen

Zwei Studentinnen entwickelten in Ihrer Bachelorarbeit zu Umsetzungen konstruktivistischer Ansätze in einer mathematischen Lernumgebung ein Sangaku¹. Die begleitende Anleitung bestand in einer Reihe aufeinander aufbauender Impulse zur Konstruktion und Berechnung der weiteren Kreise. Eine zusätzliche Strukturierung der Impulse bestand in den beiden Sichtweisen Tangente an gegebenen Kreis konstruieren oder berührenden Kreis zu gegebener Tangente konstruieren. Die mathematischen Tätigkeiten bei der Erarbeitung trugen vorrangig instrumentellen und experimentellen Charakter. Der Hinweis, dass es sich bei der im Sangaku verborgenen Problemstellung um spezielle Fälle der Berührungsprobleme des Apollonius handelt, führte zu einer Verfremdung der Sichtweise auf das von ihnen entwickelte Sangakuproblem. Bisher hatte es sich um eine spezielle Geometrieaufgabe zur Illustration konstruktivistischer Ansätze gehandelt und nun war es eine Aufgabe mit Namen, die (wenn auch in allgemeinerer Form) eine lange historische Entwicklung durch bekannte Mathematiker genommen hatte. Sie nahmen sich als Mathematikerinnen und Glied der Kette von Mathematikern wahr, die das Berührungsproblem kennen und darüber nachgedacht haben. Die Beschäftigung mit der Geschichte des Problems führte zu neuen Darstellungen der Lösungswege.



¹ Abbildung aus der Bachelorarbeit von S. Hansmann und C. Steines: *Sangaku – eine mögliche Umsetzung konstruktivistischer Herangehensweisen im Mathematikunterricht*.

Ein Beispiel zur Verfremdung, in welchem eine Herangehensweise, die stärker in kontextueller, experimenteller, argumentativer Bewusstheit angesiedelt ist, gibt die von Polya gestellte Aufgabe (Polya, 1954, S. 122): Ein Fußballer läuft auf einer Geraden auf ein Tor zu. Wann muss er schießen, um den größten Schusswinkel zu haben? Dieses in der Mathematikdidaktik als typische Anwendungsaufgabe behandelte Problem ist ebenfalls mit dem Berührungsproblem und mehreren Sätzen aus den Büchern Euklids I und II verknüpft. Der historische Bezug erlaubt die Verfremdung des Alltagsbezugs.

Ein weiteres Beispiel kognitive Konflikte und Neugier durch Verfremdung gewohnter Sichtweisen zu initiieren, ist die Ansiedlung mathematischer Sachverhalte in fremden Welten. Der historische Bezug in diesem Beispiel ist durch die Erzählung Flatland von Edwin Abbott (Abbott, 1884) gegeben. Der Leser ist in die eindimensionale und zweidimensionale Welt eingeladen und vor das Problem gestellt, aus dieser Perspektive geometrische Formen durch Beschauen oder Berühren zu erkennen. Dabei kann er von sich selbst als einer regelmäßigen geometrischen Form ausgehen. Hier gibt es vielfache Möglichkeiten eine Verfremdung der instrumentellen, durch kartesische Koordinaten geprägten Wahrnehmung und unser räumlichen Intuition anzuregen.

Nimmt man die hier exemplarisch vorgeführte Sichtweise ein, so erweisen sich viele Unterrichtsmaterialien mit historischen Bezügen als geeignet, um Verfremdungseffekte zu erzielen, die soziale und manipulative Bewusstheit einerseits mit intuitiver, instrumenteller, experimenteller, argumentativer Bewusstheit andererseits in Beziehung setzen und damit Selbstreflexion individueller mathematischer Herangehensweise unterstützen können.

Literatur

- Abbott, Edwin A. (1884). *Flatland: A romance of many dimensions*. Seeley, London.
- Barbin, E. (2000). The Historicity of the Notion of What is Obvious in Geometry. In Katz, V. (2000): *Using history to teach Mathematics*. (S.89-99), MAA Notes #51.
- Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning, Vol 1. *Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, S.122.
- Weiss-Pidstrygach, Y., Kvasz, L. & Kaenders, R. (2013). Geschichte der Mathematik als Inspiration zur Unterrichtsgestaltung. In M. Rathgeb, et al (Hrsg.), *Mathematik im Prozess*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.