Inhaltsverzeichnis Band 1: S. 1 - 579

Inhaltsverzeichnis Band 2: S. 580 - 1179

Teil 3: Posterbeiträge

Teil 4: Arbeitskreise der GDM

Teil 5: Sektionsbeschreibungen

Teil 1: Einführung und Hauptvorträge

Gilbert GREEFRATH, Friedhelm KÄPNICK, Martin STEIN, Münster

Vorwort zum Tagungsband „Beiträge zum Mathematikunterricht 2013"

Die 47. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik fand vom 04.03. bis zum 08.03.2013 an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster statt.

Das Team des Instituts für Didaktik der Mathematik und der Informatik konnte die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik nun zum zweiten Mal in Münster begrüßen. Es ist nunmehr 35 Jahre her, dass die „Bundestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik" im Jahr 1978 letztmals in Münster stattgefunden hat. Seit damals haben die „Mathematikdidaktik" in Münster wie die gesamte deutschsprachige Mathematikdidaktik-Community einen weiten Weg zurückgelegt. Dies können nicht nur die Themen von Dissertationen sowie die kontinuierlich gewachsenen Anforderungen an Standards wissenschaftlichen Arbeitens belegen – auch die große Anzahl der Vorträge dieser Tagung zeigt, wie stark die Community seit 1978 gewachsen ist: Die Zahl von damals 120 Vorträgen hat sich mittlerweile fast verdreifacht. Aber nicht nur die Zahl der Vorträge ist angestiegen, auch das Spektrum der Themen wurde erheblich ausgeweitet, wie dieser Tagungsband eindrucksvoll belegt. Wir konnten in diesem Jahr etwa 600 Vollzeit-Teilnehmende in Münster begrüßen, die insgesamt über 320 Vorträge gehalten haben. Besonders zu erwähnen sind Gäste aus dem Ausland, beispielsweise aus Tokio, Prag, Roskilde, London und Helsinki.

Die Universität Münster mit über 40 000 Studierenden, mehr als 550 Professorinnen und Professoren sowie über 120 Studienfächern in mehr als 250 Studiengängen ist eine der größten Universitäten Deutschlands und konnte für die Tagung hervorragende Bedingungen bieten. Auch die Stadt Münster bot durch die zentrale Lage des Tagungsortes eine attraktive Umgebung mit vielen Sehenswürdigkeiten wie Dom, Schloss, Friedenssaal und Prinzipalmarkt.

Höhepunkte des wissenschaftlichen Programms der Tagung waren die Hauptvorträge. Den Auftakt machte am Montag Frau Prof. Dr. Silke Ladel mit einem Vortrag zum frühen Lernen von Mathematik mit digitalen Medien. Sie hat gezeigt, wie digitale Medien explizit in mathematikdidaktische Forschungen einbezogen werden können. Prof. Dr. Martin Burger, der am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster lehrt, berichtete in seinem Hauptvortrag eindrucksvoll über bildgebende Verfahren in der biomedizinischen Grundlagenforschung und im klinischen Alltag sowie über erfolgreich erprobte Konzepte zur Nutzung dieser interdisziplinären Forschungsergebnisse im

Rahmen von Förderprojekten für Schülerinnen und Schüler in verschiedenen Altersstufen. Der dritte Hauptvortrag der Tagung über „Mathematische Interaktion aus Sicht der interpretativen Forschung“ von Prof. Dr. Heinz Steinbring beleuchtete mathematische Kommunikationen in Lehr-Lernsituationen als komplexes Gefüge mit vielen Bedingungsfaktoren. Prof. Dr. Torsten Fritzlar stellte ausführlich ausgewählte Aspekte aus aktuellen Studien zu mathematischen Begabungen, insbesondere im Grundschulalter, vor und gab einen interessanten sowie informativen Überblick über dieses Forschungs- und Arbeitsfeld. Den Abschluss der Tagung bildete der Hauptvortrag von Prof. Celia Hoyles zum Thema „From design experiments to innovation at scale: potential and challenges for research in mathematics education“. Sie gab einen aufschlussreichen Überblick über Studien zum Einsatz digitaler Werkzeuge und berichtete von eigenen Untersuchungen zur Rolle der Lehrkräfte bei der Umsetzung im Unterricht.

Auch auf der 47. Jahrestagung der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik in Münster gab es einen Posterwettbewerb. Der Dank geht an den Waxmann-Verlag, der den Posterpreis gestiftet hat sowie an die diesjährige Jury, namentlich Dr. Ralf Benölken, Prof. Dr. Silke Ladel und Prof. Dr. Bernd Wollring. Zusätzlich gab es – organisiert durch die Nachwuchsvertretung – ein Umfangreiches Programm für den wissenschaftlichen Nachwuchs, bestehend aus Nachwuchstag und -forum sowie Einzelberatung. Hierfür danken wir den Organisatorinnen und Organisatoren den Nachwuchstages sehr.

Wir bedanken uns bei allen, die zum Gelingen dieser Tagung beigetragen haben; insbesondere bei der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, die uns die Ausrichtung der Tagung übertragen hat, den Organisatoren der letztjährigen Tagungen in Freiburg und Weingarten für viele Wertvolle Hinweise, der Universität Münster für die Bereitstellung der Räume und weitere organisatorische Unterstützung, den Kolleginnen und Kollegen im Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, den Hauptvortragenden, Sektionsleitenden und Vortragenden sowie allen Teilnehmenden für Ihr großes Engagement und ihre interessanten Beiträge. Besonderer Dank gilt der Firma Sky*Premotion aus Köln für die Organisation der Tagung.

Im Namen des Instituts für Didaktik der Mathematik und der Informatik in Münster

Gilbert Greefrath, Friedhelm Käpnick und Martin Stein

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

Eröffnungsrede des 1. Vorsitzenden der GDM zur Jahrestagung in Münster am 04. März 2013

Liebe Kolleginnen und Kollegen von der Universität Münster,
liebe Kolleginnen und Kollegen von fern und nah,
meine sehr geehrten Damen und Herren,

nach 1978 findet die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik zum zweiten Mal hier in Münster statt. Münster hat in Deutschland eine besondere Tradition in der Didaktik der Mathematik, die insbesondere mit dem Namen **Heinrich Behnke** verbunden ist. Der international anerkannte Mathematiker Heinrich Behnke erhielt 1927 eine Professur für Funktionentheorie an der Universität Münster. Das zusammen mit Friedrich Sommer herausgegebene Standardwerk zur Funktionentheorie, der „Behnke/Sommer" war – vor vielen Jahren – einmal mein mehrjähriger Begleiter während meines Studiums.
1951 wurde das Seminar für Didaktik der Mathematik, das spätere Heinrich-Behnke-Seminar hier in Münster gegründet, heute würde man eher von einer Abteilung für Didaktik der Mathematik sprechen, der ersten ihrer Art an einer deutschen Universität. Zum 40-jährigen Bestehen dieses Münsteraner Seminars schrieb der damalige 1. Vorsitzende der GDM, Heinrich Bürger: „Die Institutionalisierung der Didaktik der Mathematik durch einen Mathematiker vom Range Heinrich Behnkes bedeutete eine Aufwertung und Anerkennung ihrer Wichtigkeit." Das war damals von unschätzbarem Wert. Viele in der Mathematikdidaktik bekannte Namen sind mit diesem Seminar verbunden, u. a. Heinz Griesel, Norbert Knoche, Herbert Kütting oder Hans-Georg Steiner. Wir sind hier in Münster also an einem traditionsreichen Ort der Geschichte der Mathematikdidaktik in Deutschland.
Der Dank der GDM für die Organisation und Vorbereitung dieser Tagung gilt allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern und studentischen Hilfskräften hier in Münster. Ganz besonders bedanke ich mich bei den – nennen wir sie – Hauptorganisatoren *Gilbert Greefrath*, *Friedhelm Käpnick* und *Martin Stein*, sowie bei *Frau Gerhold* und *Herrn Reuschel* von der Firma *Sky*Premotion*, die die Organisation dieser Tagung übernommen hat.

Die Eröffnung einer Jahrestagung bietet dem 1. Vorsitzenden ja stets auch die Chance, einmal das zu sagen, was ihn im vergangenen Jahr besonders bewegt hat. Heute werde ich nur auf zwei Ereignisse eingehen. Das erste Ereignis fand in Seoul, das zweite in London statt.

Zum 1. Ereignis

Wir werden im Jahre 2016 die ICME 13 in Hamburg haben. Deshalb haben wir die ICME 12 im letzten Jahr in Seoul natürlich mit besonderem Interesse verfolgt. Ich möchte hier keine Gesamtwürdigung dieser interessanten und gut organisierten Veranstaltung geben, sondern nur auf *eine* dortige Veranstaltung eingehen, die mich in besonderer Weise nachdenklich gestimmt hat.
Dies war eine Podiumsdiskussion am Freitag, 13. Juli 2012, zum Thema "Mathematics Education in East Asia" – übersetzen wir das mit „Mathematische Bildung im Fernen Osten“ – mit Vertretern aus Hong-Kong, Korea, Japan und China.
Als verbindendes zentrales Element der ost-asiatischen Bildungssysteme wurde dabei die Orientierung an den *Ideen von Konfuzius* herausgestellt. Darauf basiere zum einen das *hohe Ansehen von Bildung und Erziehung in der Gesellschaft* und zum zweiten die Höherbewertung einer *sozial-gemeinschaftlichen, uniformen Erziehung* gegenüber einer *individuellen Orientierung des Einzelnen*. Mit großem Stolz wurde - natürlich – die Spitzenposition der asiatischen Bildung in der PISA-Rangliste herausgestellt. Die Botschaft von diesem Podium war klar und eindeutig: Wir sind die PISA-Spitzenreiter, wir wissen wie es geht und wir sagen *euch* wie es richtig ist. Mit „*euch*“ waren vor allem die USA gemeint. Eingespielte Videoaufnahmen von Klassenräumen in Asien und den USA kontrastierten die *zielorientierte disziplinierte Atmosphäre* in Asien mit einem – nennen wir es – *lernergebnisoffenen Unterricht in den USA*, bei dem es die Schülerinnen und Schüler zudem notwendig hatten, ihre Gesichter bei den Filmaufnahmen hinter einer Verpixelung zu verbergen, was im überwiegend asiatischen Auditorium mit Heiterkeit zur Kenntnis genommen wurde.
Europa kam in dieser Podiumsdiskussion nicht vor. Mir, als im Auditorium sitzender Europäer, wurde vom Podium aus genau *das* Gefühl vermittelt, das David Cameron (britischer Premierminister und Noch-Europäer) ein halbes Jahr später mit folgenden Worten ausdrückte: „Europa ist auf dem absteigenden Ast. Es ist abgehängt bzgl. Wettbewerbsfähigkeit und Innovation.“ Also zusammengefasst: Das augenblickliche Europa hat keine Überlebenschance in der Welt.

Zum 2. Ereignis

Lassen Sie mich nun zum zweiten Ereignis wechseln, das scheinbar mit dieser Podiumsdiskussion nichts zu tun hat, aber natürlich nur scheinbar.

Wir wechseln nach London, 1. August 2012, Olympische Spiele. An diesem Tag wurden 8 asiatische Badmintonspielerinnen – wem Badminton nichts sagt, der kann auch Federball sagen – also wurden 8 Federballspielerinnen aus Süd-Korea, China und Indonesien von den Olympischen Spielen ausgeschlossen. Erstmals schaffte es mit dieser Nachricht der Badmintonsport in die deutsche Tagesschau!
Was war geschehen? Im letzten Gruppenspiel des Badmintonturniers traf am 31. Juli 2012 das chinesische Damen-Doppel Wang Xiaoli und Yu Yang auf das süd-koreanische Doppel Jung Kyung-Eun und Kim Ha-Na. 3000 Zuschauer warteten erwartungsvoll in der ausverkauften Halle.
Beide Damendoppel waren bereits für das Viertelfinale qualifiziert und die Chinesinnen erhofften sich durch eine *Niederlage* eine bessere Ausgangsposition im nächsten Spiel. Also schlugen sie ihren ersten Aufschlag ins Netz, das ist im Badminton die sicherste Methode einen Fehler zu begehen. Es gibt einen Aufschlagwechsel. Also Aufschlag Korea. Aufschlag ins Netz. 1:1. Aufschlagwechsel, Aufschlag China. Aufschlag ins Netz, 2:1. Aufschlagwechsel. Ungläubiges Herumschauen der 4 Spielerinnen. Aufschlag ins Netz. Aufschlagwechsel. So ging das eine Zeitlang. Unter den Zuschauern breitete sich Unmut aus. Pfiffe. Buhrufe. Aufschlag Korea. Aufschlag ins Netz. Der Schiedsrichter unterbricht das Spiel, ermahnt die Spielerinnen, spricht etwas von olympischer Idee. Die Spielerinnen hören wortlos zu und schauen verlegen. Aufschlag China. Aufschlag ins Netz. Gejohle und Proteste in der Halle. Buhrufe. Der Schiedsrichter disqualifierte die 4 Spielerinnen, nimmt dies aber nach Protesten der Trainer wieder zurück. Aufschlag Korea. Aufschlag ins Netz. Blicke der Spielerinnen zu den Trainern, die Trainer blicken zu den Offiziellen, die schauen gerade aus. Aufschlag China. Aufschlag ins Netz. So ging das weiter, bis 2 Sätze vorbei waren und die Unglücklicheren gewannen. Buhrufe in der Halle.
Eine Stunde später, spielt das zweite Damendoppel von Süd-Korea gegen das Damendoppel von Indonesien. Gleiche Situation wie vorher. Beide Doppel waren bereits für das Viertelfinale qualifiziert. Das Spiel beginnt. Aufschlag Korea, Aufschlag ins Netz, Aufschlagwechsel, Aufschlag ins Netz, Aufschlagwechsel. … Wie es weitergeht, wissen Sie. Alle 8 Spielerinnen wurden am nächsten Tag von den Olympischen Spielen ausgeschlossen.
Warum erzähle ich das? Hier waren 8 junge asiatische Frauen, mindestens 8 Trainer, mehrere Offizielle, die alle das asiatische Bildungssystem durchlaufen hatten, die wahrscheinlich – darauf wird heute weltweit im Spitzensport sehr geachtet – bei den Nationalen Tests zumindest nicht schlecht abgeschnitten haben.

Keine der 8 Spielerinnen und keiner der Trainer oder offiziellen Begleiter dieser asiatischen Mannschaften war aber an jenem 31. Juli in der Lage oder hatte den Mut dazu, in einer nicht vorhergesehenen Situation einen sicherlich von oben vorgegeben Befehl zu ignorieren und individuell angemessen auf eine neue Situation zu reagieren. Alle 8 Spielerinnen befanden sich in einer Situation, die – retrospektiv betrachtet – psychisch eigentlich nicht zu ertragen ist. Aber keine hat darauf reagiert.
Ist es nicht gerade das, was wir von *Bildung*, von einem *gebildeten Menschen* verlangen: eigenverantwortlich angemessene Entscheidungen zu treffen – auch oder gerade – in unerwartet auftretenden Situationen. Das erfordert Mut und – um es in den Worten unseres Bundespräsidenten auszudrücken – *Zivilcourage*, deren zentrale Bedeutung für unsere Gesellschaft und das Zusammenleben der Menschen Joachim Gauck kürzlich, am 30. Januar 2013 – einem für Deutschland höchst schmerzhaften Jahrestag – nochmals deutlich herausgestellt hat.
Hier in London, am 31. Juli 2012 – 3 Wochen nach der Podiumsdiskussion in Seoul – wäre sie gefordert gewesen, die Zivilcourage. Doch nichts ist auf dem Badmintonfeld in London in dieser Richtung passiert. Der Ausschluss der Spielerinnen war die notwendige Konsequenz. Für mich zeigt dieses Ereignis – oder besser das „Nicht-Ereignis“ – in London das Scheitern eines Bildungskonzepts, jedenfalls eines Konzepts, das das Wort „Bildung“ ernst nimmt. Natürlich verbietet es sich, von Einzelfällen auf die Gesamtheit zu schließen, und doch war für mich dieser 31. Juli 2012 ein Schlüsselerlebnis, das mich das Bildungssystem in Ostasien und damit auch unser Bildungssystem in einer veränderten Perspektive zeigt, das die Bedeutung von Kompetenzen – wieder einmal – im Hinblick auf ein *Bildungskonzept* hinterfragt. Das aber wäre ein eigener Vortrag.
Damit komme ich zum Schluss. Ich wünsche Ihnen allen, dass Sie auf dieser Tagung interessante Vorträge hören, an belebenden Arbeitsgruppen teilnehmen, neue Anregungen bei vielen Gesprächen bekommen, und wir am Ende der Woche mit neuen Perspektiven für die Didaktik der Mathematik, für die Bildung und den zukünftigen Mathematikunterricht nach Hause fahren.

Die Tagung ist damit offiziell eröffnet.

Hans-Georg Weigand
(1. Vorsitzender der GDM)

Im Saal des Schlosses von Münster während der Eröffnung.

Ein volles Foyer zum Get-together nach der Eröffnung im Schloss

Die freundlichen Hilfskräfte während der Registrierung im H-Gebäude.

Der von den Ausflügen bereits bekannte Münsteraner Shuttle-Bus, brachte die Gäste sicher wieder zurück ins Hotel.

Martin BURGER, Ralf ENGBERS, Jahn MÜLLER, Universität Münster

Biomedizinische Bildgebung und Inverse Probleme

1 Einleitung

Bildgebung ist heute ein unverzichtbares Werkzeug in der Medizin, sowohl im klinischen Alltag als auch in der vorklinischen Forschung. Durch aktuelle Trends, wie jenen hin zur personalisierten Medizin, nimmt die Bedeutung von modernen dreidimensionalen Techniken wie Computertomographie (CT), Magnetresonanztomographie (MR), Emissionstomographie (PET/SPECT) weiterhin stark zu. Aus Daten des Bundesamtes für Umwelt [1] lässt sich ein im wesentlichen linearer Anstieg der Untersuchungshäufigkeit feststellen, wobei von 1999 bis 2009 fast eine Verdopplung der bildgebenden Untersuchungen pro Person stattfand. So musste sich im Jahr 2009 im Durchschnitt jeder siebte in Deutschland einer CT- und jeder zwölfte einer MR-Untersuchung unterziehen.

Aus dieser Entwicklung entsteht ein Bedarf an weiterer Entwicklung und Optimierung der Verfahren. Diese sind ein perfektes Beispiel für interdisziplinäre Forschung. Neben der Medizin und Biologie spielen hier alle mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer eine wichtige Rolle. So ist etwa der Detektorbau eine typische Aufgabe der Physik und die Entwicklung von Kontrastmitteln oder radioaktiven Tracermolekülen eine der Chemie. Oft unterschätzt wird die Rolle der Mathematik in diesem Bereich, die sich tatsächlich als fundamental herausstellt. Da die Grundlage aller tomographischen Verfahren indirekte Messungen sind, erhält man Rohdaten, die nicht direkt interpretierbar sind, was in Abbildung 1 durch typische Daten einer CT-Messung illustriert ist.

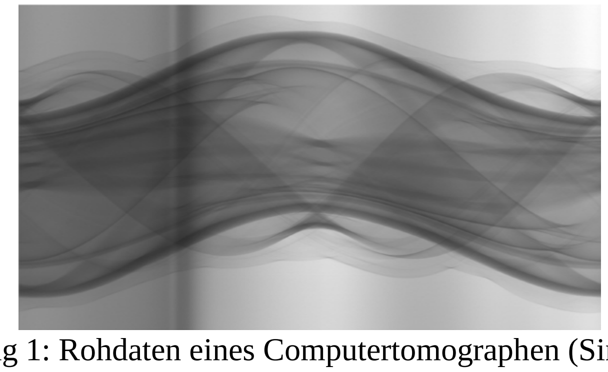


Abbildung 1: Rohdaten eines Computertomographen (Sinogramm)

Die eigentlichen Bilder müssen erst durch mathematische Methoden rekonstruiert werden, ein Umstand der auch im ursprünglichen englischen Namen „computed tomography“, also „berechnete Tomographie“ Niederschlag fand. Im Folgenden wollen wir die Rolle der Mathematik in diesem

Bereich und auch ihre Vermittlung an Nichtspezialisten etwas näher beleuchten. Grundlegendes Konzept dabei ist jenes eines sogenannten inversen Problems.

2 Inverse Probleme

Als inverse Probleme bezeichnet man die Berechnung der Ursache für eine beobachtete (manchmal für eine erwünschte) Wirkung, die über ein mathematisches Modell verbunden sind. Die Bezeichnung invers entsteht, da das zu lösende Problem meist die Umkehrung dessen ist, was man mathematisch modelliert. Im Fall der CT ist etwa das direkte Problem die Entstehung der Sinogramm-Daten aus einer gegebenen Dichte im menschlichen Körper (dem Bild), die Bildrekonstruktion ist invers dazu. Mathematisch modelliert wird dies abstrakt über eine Operatorgleichung. D.h. das Vorwärtsproblem wird als Abbildung K von der Unbekannten u in den Datenraum definiert, der im Prinzip (wenn oft auch aufwändig) berechnenbar ist. Das inverse Problem bei gegebenen Daten f kann dann als Lösung der Operatorgleichung

$$K(u) = f \tag{1}$$

modelliert werden. In der medizinischen Bildrekonstruktion ist u typischerweise eine Dichtefunktion, in der CT direkt die physikalische Dichte im menschlichen Körper, im MR eine Protonendichte, und in der Emissionstomographie die Dichteverteilung eines injizierten schwach radioaktiven Tracers.

Die Hauptschwierigkeit, die bei den meisten inversen Problemen auftritt, ist die sogenannte inkorrekt-Gestelltheit (ill-posedness in der englischen Literatur, siehe [2,3]). Dies bedeutet in typischen Fällen, dass auch sehr kleine Datenfehler (in f) im schlimmsten Fall zu beliebig großen Fehlern in der Lösung der Gleichung (1) führen können. Um dennoch vernünftige Rekonstruktionen berechnen zu können ist es wichtig a-priori Information über Lösungen einfließen zu lassen. Gerade in der (medizinischen) Bildrekonstruktion sind diese in vielfältiger Weise vorhanden. Einerseits stehen allgemeine strukturelle Eigenschaften von Bildern zur Verfügung, andererseits spezielles anatomisches und physiologisches Vorwissen. Ersteres kann etwa bedeuten, dass es in typischen Bildern relativ viele gleichmäßige Farbbereiche mit scharfen Kanten (d.h. Unstetigkeiten der Dichtefunktion u) gibt und man meist keine zufällig oszillierenden Grauwerte erwartet. Anatomisches Vorwissen kann etwa dazu verwendet werden die wesentlichen Werte der Dichte auf relevante Teilregionen des Körpers zu beschränken.

3 Das Mathematische Konzept eines Bildes

Wie oben schon erwähnt kann ein Bild als Dichtefunktion modelliert werden, in der Praxis digitaler Bilder lässt sich jedoch eine Vereinfachung durchführen, die auch für Schulkinder früh zugänglich ist. In digitalen Bildern verwendet man effektiv Dichtefunktion, die innerhalb kleiner Quadrate, den sogenannten Pixeln, konstanten Grauwert aufweisen. Damit kann jedes Quadrat durch eine Zahl repräsentiert werden, in der einfachen Darstellung mit 256 Grauwerten ist dies eine natürliche Zahl zwischen 0 und 255, wobei 0 für schwarz, 255 für weiß und Zwischenwerte für entsprechende Grauskalen stehen. Das Bild kann dann effektiv als eine Matrix aus natürlichen Zahlen dargestellt werden, was auch der üblichen Speichermethode am Computer entspricht. Dies wird illustriert durch ein CT-Bild, einen Ausschnitt daraus (siehe blaue Markierung) und die dem Ausschnitt entsprechende Matrix an Grauwerten.

Abbildung 2: CT-Bild (links), kleiner Ausschnitt daraus (mitte), und entsprechende Matrix aus Grauwerten (rechts).

Mathematische Operationen mit Bildern können damit, zumindest als Lehrkonzept, auf Rechnungen mit natürlichen Zahlen vereinfacht werden. Um schon Grundschulkindern einen ersten Zugang zu ermöglichen, kann dies auch auf sehr kleine Matrizen (2x2 oder 3x3) reduziert werden. Zusammen mit dem visuellen Eindruck der Grauwertdarstellung realistischer Bilder ergibt sich so ein einfacher Zugang zum Grundkonzept der numerischen Mathematik: Es ist nötig Algorithmen, also Folgen von Rechenoperationen, zu finden, die man an kleinen Beispielen selbst überprüfen kann und die dann auf großen Problemen automatisch vom Computer ausgeführt werden können.

4 Bildrekonstruktion aus Projektionsdaten

Das wegen seiner vielfältigen Anwendung meist diskutierte Problem der Bildrekonstruktion ist jenes aus Projektionsdaten, wie es in der klassischen Computertomographie auftritt. Gemessen wir hierbei die Schwächung der Röntgenstrahlen, die entlang des Wegs des Strahls immer proportional zur lokalen Dichte ist. Daraus kann man herleiten, dass die Daten im Wesentlichen aus verschiedenen Linienintegralen der Dichte durch den Körper bestehen (cf. [4]). Als mathematisches Modell für das inverse Probleme hat man nun die Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Linienintegralen. Das Vorwärtsproblem, also die Abbildung der Funktion auf alle Linienintegrale nennt man auch Radon-Transformation, die Johann Radon schon zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts untersuchte. Er konnte auch eine exakte Lösungsformel für das inverse Problem angeben (cf. [5]), die jedoch fünfzig Jahre vor der Entwicklung des ersten Tomo-graphen lag und daher sicher auch in ihrer Bedeutung unterschätzt wurde. Die Pioniere in der CT-Entwicklung, allen voran Allan Cormack und später Godfrey Houndsfield, mussten in den 1960er Jahren selbst Algorithmen zur Lösung des Problems entwickeln, erst 1972 wurde Cormack auf Radons Arbeiten aufmerksam. In vielen Modalitäten spielen aber auch heute noch approximative Algorithmen eine weitaus stärkere Rolle, auch da kom-pliziertere Vorwärtsmodelle als die Radon-Transformation verwendet werden. Deshalb ist es naheliegend, Grundprinzipien solcher Algorithmen in vereinfachter Form auch früh zur Lehre zu verwenden. Wie wir sehen werden sind diese hervorragende Motivation für verschiedene Grundauf-gaben, etwa die Lösung linearer Gleichungssysteme.

Abbildung 3: CT-Scan eines Überraschungseis in einem Kleintier-CT (European Institute for Molecular Imaging, Münster).

Für die Vermittlung dieser Inhalte an das Publikum von Kinderunis, die im Wesentlichen aus Grundschülern bestanden [7,8,9], wählten wir eine nichtmedizinische Motivation, sondern eine die Kindern sehr naheliegt: die Rekonstruktion des Inhalts eines Überraschungseis ohne es zu öffnen. Dazu wurde, wie in Abbildung 3 dokumentiert, ein Kleintier-Tomograph verwen-det, dessen Daten mathematisch aufbereitet wurden. Die Datenaufnahme besteht dann aus Röntgenbildern in verschiedenen Richtungen (die paralle-len Strahlen werden jeweils zusammengefaßt). Dies ist in Abbildung 4 illustriert. Die Röntgenbilder lassen schon eine erste Ahnung was in dem Ei sein könnte, eine genaue Bestimmung wird aber erst durch die Rekon-struktion des Bildes, in diesem Fall in 3D möglich.

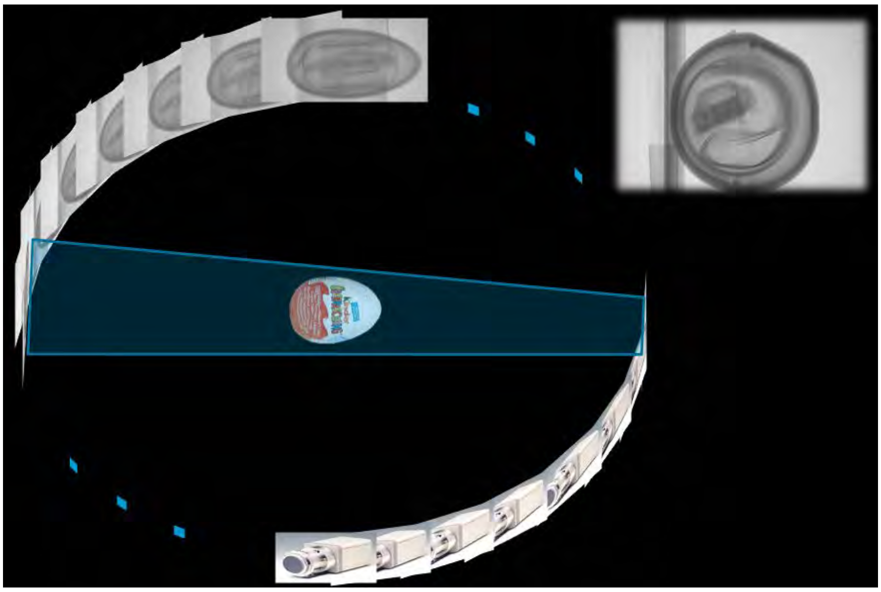


Abbildung 4: Illustration der CT-Aufnahme

Als einfaches Modell für die Radon-Transformation kann wieder eine diskrete Version verwendet werden. Die Linienintegrale können als Summen der Grauwertmatrix modelliert werden, entlang Zeilen, Spalten, oder auch Diagonalen. Bezeichnet u_{ij} die Dichte im Pixel der Zeile i und Spalte j, und f_k die Messung entlang der k-ten Linie, so erhält man ein Gleichungssystem der Form

$$\sum a_{ijk} u_{ij} = f_k$$

wobei die Einträge a_{ijk} gleich eins oder null sind, je nachdem ob die k-te Linie das Pixel mit Indizes i,j schneidet. Als intuitives numerisches Verfahren eignet sich eine Kaczmarz-artige Iteration, in der man die Gleichungen zyklisch abarbeitet. In mehreren Schleifen über die Messungen k berechnet man so iterativ

$$u_{mn}^{neu} = u_{mn}^{alt} + (f_k - \sum_{ij} a_{ijk} u_{ij}^{alt}) / \sum_{ij} a_{ijk}$$

für jene m und n für die a_{mnk} nicht null ist. Man beachte dabei, dass $\sum_{ij} a_{ijk}$ einfach die Anzahl der Pixel ist, die entlang der k-ten Linie vorkommen. Dies eröffnet auch Grundschülern die Möglichkeit eines intuitiven Ver-ständnisses eines iterativen Verfahrens: Man be-

rechnet zunächst die Differenz zwischen dem Sollwert (f_k) und dem Istwert ($\sum_{ij} a_{ijk}\, u_{ij}^{\mathrm{alt}}$) der Summe entlang einer Linie. Dann teilt man diese Differenz einfach auf die Pixelwerte entlang der Linie auf, d.h. zu jedem wird der gleiche Anteil addiert. Beispiele dafür lassen sich auch schon mit sehr kleinen Quadraten und einstelligen natürlichen Zahlen konstruieren, wie in Abbildung 5 dargestellt.

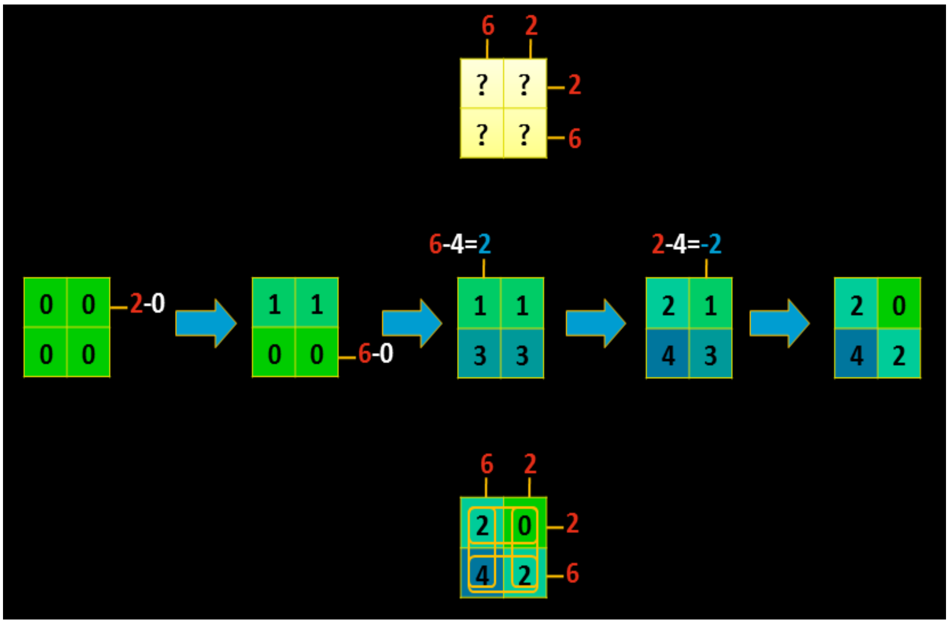


Abbildung 5: Beispiel einer iterativen Lösung auf Grundschulniveau.

Ein wichtiger Schritt hin zur Numerik ist die Erkenntnis, dass ein solches Verfahren auch auf beliebig großen Quadraten nach denselben Regeln durchgeführt werden kann, und von einem Computer automatisiert wird. Dies wird durch die Rekonstruktion des Inhalts eines Überraschungseis, wie in Abbildung 6 dargestellt, zum Abschluss deutlich.


Abbildung 6: Rekonstruktion des Inhalts eines Überraschungseis

Danksagung

Teile dieser Arbeit wurden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) unterstützt, im Projekt SFB 656 Molekulare Kardiovaskuläre Bildgebung.

Literatur

[1] Bundesamt für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit (2010): Parlamentsbericht zur Umweltradioaktivität und Strahlenbelastung.

[2] Rieder, A. (2003): Keine Probleme mit inversen Problemen, Wiesbaden: Teubner, Vieweg.

[3] Engl, H., Hanke, M., Neubauer, A. (1996): Regularization of Inverse Problems, Dordrecht: Kluwer.

[4] Natterer, F. (1986): The Mathematics of Computerized Tomography, Stuttgart: Teubner.

[5] Radon, J. (1917): Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math. Nat. kl. 69, 262-277.

[6] Cormack, A.M. (1994): My connection with the Radon transform, in: 75 Years of Radon Transform, Gindikin, S., Michor, P., eds., International Press Incorporated,32–35.

[7] Völker, K. (2011): KinderUni: Ü-Eier im Computertomographen, Westfälische Nachrichten, Münster, 18.11.2011.

[8] Speckmann, L. (2012): Kinderuni in der Matthias-Claudius-Schule: Forscher durchleuchten ein Ü-Ei, Westfälische Nachrichten, Münster, 14.2.2012.

[9] Radeck, C. (2012): Mit dem Computer ins Herz blicken, WAZ, Bönen, 10.11.2012.

Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale

Mathematische Begabungen (im jungen Schulalter)

Mathematische Begabung – was ist das? Ein klassischer Definitionsvorschlag stammt von Karl Kießwetter, der 1985 formulierte: *„Mathematische Hochbegabung ist ein Konglomerat von (abtestbaren) Eigenschaften und Fähigkeiten eines Individuums, aufgrund dessen die Voraussage gemacht werden kann, daß dieses Individuum später und mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit ganz besondere, innerhalb der Mathematik wertvolle Leistungen erbringen wird (wenn es im mathematischen Bereich tätig wird)"* (Kießwetter, 1985, S. 302). Natürlich lassen sich an eine solche Definition immer auch Fragen richten. Zwei zentrale, die in den vergangenen Jahrzehnten immer wieder gestellt wurden, formulierten Wilhelm Wieczerkowski und Kollegen. Erstens: *Ist mathematische Begabung ein Ausdruck spezifischer kognitiver Merkmale oder ist sie, zumindest zum wesentlichen Teil, Ergebnis einer hohen allgemeinen Intelligenz?* Und zweitens: *Ist mathematische Begabung ein monolithisches Konstrukt oder gibt es verschiedene Begabungsprofile?* (Wieczerkowski, Cropley, & Prado, 2000, S. 413) Wegen des beschränkten Umfangs dieses Beitrags ist es mir lediglich möglich, ausgewählte Antwortversuche auf die erste Frage zusammenzutragen.

Bereits Wieczerkowski wies auf die – gelegentlich allerdings außer Acht gelassene – Selbstverständlichkeit hin, dass Antworten und Ansätze, solche Antworten zu finden, vor allem auch davon abhängig sind, was unter Mathematik verstanden wird. Erfasst man mathematische Leistungen beispielsweise durch Aufgaben, die sich kaum von den in Intelligenztests verwendeten Items unterscheiden und bei denen es in erster Linie darauf ankommt, sie schnell und fehlerfrei zu lösen – wobei letzteres ausschließlich am Erwartungshorizont der Testentwickler gemessen wird (Kießwetter, 1992) –, so überrascht es nicht, wenn sich Dimensionen mathematischer Leistung kaum von denen der allgemeinen (Test-) Intelligenz unterscheiden (Zimmermann, 1992).

Zumindest stärkere fachliche Bezüge haben spezifische Schulleistungs- oder Studierfähigkeitstests. Ein häufig auch zur Identifikation dann jüngerer mathematisch oder auch sprachlich begabter Schülerinnen und Schüler genutzter ist der amerikanische SAT. Anhand dieses Tests wurden in einer schon etwas älteren Untersuchung von Benbow und Minor (1990) zunächst knapp 300 mathematisch begabte und etwas mehr als 150 sprachlich begabte 13-Jährige identifiziert – sie gehörten zu den besten 0,01% ihrer Altersgruppe –; anschließend wurden ihre Leistungen in verschiedenen Intelligenz- und Fähigkeitstests, unter anderem angelehnt an Thurstones Primär-

faktoren verglichen. Nur 16 Jungen und zwei Mädchen gehörten zu beiden Gruppen, bei den anderen zeigten sich signifikante Gruppenunterschiede in fast allen Fähigkeitsbereichen, wobei die Gruppenzugehörigkeit und nicht beispielsweise das Geschlecht den stärksten Einfluss auf die Testergebnisse hatte. Damit kann bereits auf der Grundlage des SAT das Konzept einer allgemeinen intellektuellen Hochbegabung, die mathematische Begabung umfassen könnte, nicht gehalten werden.
Allerdings lässt sich kritisch fragen, ob solche Tests wie der SAT Mathematik als problemlösender und theoriebildender Tätigkeit gerecht werden. Darüber hinaus besitzen ausschließlich produktorientierte, eindimensionale Punktbewertungen – mit denen auch der SAT arbeitet – wohl kaum Potenziale zur detaillierten Beschreibung von Begabungen (Kießwetter, 1992). Waldmann und Weinert sehen diese dagegen vor allem in Antworten auf die Frage, „durch welche *Denkprozesse* diese hohen Leistungen zustande kommen und in welchen *kognitiven Prozessen und Strukturen* sich Individuen mit hohen und geringen Leistungen voneinander unterscheiden" (Waldmann & Weinert, 1990, S. 22, Hervorhebungen T. F.).
Entsprechende kognitionspsychologische Arbeiten können auf fachspezifische oder auf eher basale, möglichst materialunabhängige Prozesse bzw. Prozesseigenschaften fokussieren. Für letztere Richtung steht beispielsweise Friedhart Klix, der anhand zahlreicher experimenteller Beispiele und Analysen phylogenetischer Entwicklungen belegt, dass u. a. die folgenden Prozesseigenschaften menschlichen Denkens allgemeine Aussagen hinsichtlich dessen Qualität bzw. der kognitiven Leistungsfähigkeit des Individuums ermöglichen: *multiple Klassifikation*, *Analogiebildung*, *multimodale Repräsentation*, *Komplexitätsreduktion*, *strukturelle Flexibilität* (Lösen von bisherigen Wissensstrukturen), *Informationsverhalten* (Verringerung von Unbestimmtheit durch Informationssuche und –nutzung) (zusammengefasst in Seidel, 2004).
An dieser Stelle kann ich exemplarisch lediglich auf die multimodale Repräsentation und deren neuronale Grundlagen eingehen, für die beispielsweise Michael O'Boyle (2008) zahlreiche Vergleichsstudien aus jüngerer Zeit zwischen unselektierten und (gemäß SAT oder SCAT) mathematisch begabten Kindern und Jugendlichen zusammenfasst. Deren Ergebnisse stützen sich gegenseitig und weisen bei mathematisch Begabten auf eine gesteigerte Entwicklung und Nutzung der rechten Gehirnhälfte – die insbesondere auch räumlich-visuelles Operieren ermöglicht – hin, auf eine verstärkte Kommunikation und Kooperation zwischen beiden Hemisphären sowie darauf, dass die Aktivierung kortikaler Netzwerke und Areale insgesamt stärker ist als bei mathematisch durchschnittlich leistungsstarken Kindern und Jugendlichen. In einer kürzlich in Spanien durchgeführten Ver-

gleichsstudie, bei der die mathematisch begabten Teilnehmer mit dem von Kießwetter entwickelten Hamburger Test für mathematische Begabung identifiziert wurden, zeigte sich noch etwas differenzierter, dass Gruppenunterschiede zwischen mathematisch begabten und durchschnittlich leistungsstarken Schülerinnen und Schülern bezüglich der neuronalen Aktivität dann besonders groß sind, wenn anspruchsvolle Aufgaben bearbeitet werden (Desco et al., 2011).
Vor etwa zehn Jahren wurde in Jena eine ähnliche Studie durchgeführt, in der sich mathematisch begabte und durchschnittlich leistungsstarke Oberstufenschüler mit mathematisch reichhaltigen Problemstellungen auseinandersetzten, die sowohl in der symbolischen, als auch in der bildhaft-anschaulichen Modalität bearbeitet werden konnten. Die erwartungsgemäßen Leistungsunterschiede zwischen beiden Schülergruppen waren durch traditionelle Maße der Experimentalpsychologie nicht erklärbar. Allerdings konnte durch EEG-Aufzeichnungen nachgewiesen werden, dass bei mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern bereits innerhalb der ersten Sekunde nach dem Instruktionsverstehen Hirnregionen sowohl der begrifflichen als auch der bildhaft-anschauliche Modalität aktiviert waren, wohingegen bei den mathematisch durchschnittlich leistungsstarken Schülern eine solche doppelte Aktivation nicht nachweisbar war (Krause, Seidel, & Heinrich, 2004).
Allerdings sind unterschiedliche Ausprägungen der Klix'schen Basiskomponenten allein wohl nicht ausreichend zur Beschreibung mathematischer Begabungen, was auch in einer kürzlich veröffentlichten Studie von Manja Foth deutlich wurde. Sie untersuchte Möglichkeiten, überdurchschnittliche mathematische Leistungsfähigkeit in der Oberstufe Berliner Spezialgymnasien vorherzusagen. Als wichtiger möglicher Prädiktor galt dabei die fluide Intelligenz nach Cattell, auch weil sie zahlreiche Korrespondenzen zu den Überlegungen von Klix aufweist. Allerdings erwies sich diese allein als nicht hinreichend für eine zuverlässige Vorhersage, vielmehr war die fachspezifische intrinsische Lernmotivation (ermittelt über das Interesse für Mathematik) neben der Intelligenz entscheidender Prädiktor mathematischer Leistungen im Hochleistungsbereich (Foth & van der Meer, 2013). Mir scheint es in diesem Zusammenhang naheliegend, dass das Interesse an Mathematik vor allem über die Akkumulation fachspezifischen Wissens und die zunehmende Spezifizierung von Fähigkeiten wirksam wird.
Vadim Krutetskii gehörte wohl zu den ersten Psychologen, die sich aus kognitionspsychologischer und zugleich stärker fachspezifischer Perspektive mit mathematischen Begabungen und ihren Grundlagen beschäftigten. Gemeinsam mit seiner Arbeitsgruppe unternahm er bereits in den 1950er und 1960er Jahren einen auch für heutige Forschungsarbeiten noch grund-

legenden Versuch der Beschreibung mathematischer Begabungen im Schulalter. Dazu wurden umfangreiche empirische Untersuchungen mit mehr als 200 Schülerinnen und Schülern der zweiten bis zehnten Klassenstufe durchgeführt, die aufgrund ihrer Noten, vor allem aber auch auf der Basis von Lehrerurteilen als mathematisch leistungsstark, durchschnittlich oder relativ leistungsschwach eingeschätzt wurden. Um vor allem auch die qualitativen Aspekte mathematischer Lösungsprozesse zu erfassen, wurden den Schülerinnen und Schülern bis zu 26 Aufgabenserien vorgelegt, die jeweils aus mehreren Subtests und diese wiederum aus einer Folge von Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad bestanden. Die Analysen der Bearbeitungsprozesse und –ergebnisse wurden durch mehrjährige Beobachtungen, Befragungen von Eltern und Lehrern, von Mathematikdidaktikern und Mathematikern ergänzt sowie durch biografische Forschungen weiter angereichert (Krutetskii, 1976).
Die in der Untersuchung herausgearbeiteten spezifischen Fähigkeiten und Merkmale, in denen sich mathematisch erfolgreiche von weniger erfolgreichen Schülerinnen und Schülern unterscheiden, lassen sich sehr knapp und orientiert am Modell der Informationsverarbeitung etwa auf folgende Weise zusammenfassen, wobei die beschriebenen Komponenten eng miteinander verknüpft sind und sich individuell unterschiedlich zu einer Struktur mathematischen Denkens verbinden können (S. 350 f.):

- *Gewinnen mathematischer Informationen:* Fähigkeit zur formalisierten Wahrnehmung mathematischen Materials, zum Erfassen der formalen Struktur eines Problems
- *Verarbeiten mathematischer Informationen:* Fähigkeit zum bereichsspezifischen logischen Denken; Fähigkeit zum Denken in mathematischen Symbolen; Fähigkeit zur schnellen und breiten Generalisierung mathematischer Objekte, Beziehungen und Operationen; Fähigkeit zur Verkürzung von Prozessen mathematischen Schlussfolgerns; Fähigkeit zum Denken in verkürzten Strukturen; Beweglichkeit des Denkens im mathematischen Bereich; Streben nach Klarheit, Einfachheit, Ökonomie und Rationalität von Lösungsprozessen; Umkehrbarkeit mentaler Prozesse beim mathematischen Schlussfolgern
- *Speichern mathematischer Informationen:* mathematisches Gedächtnis (verallgemeinertes Wissen über mathematische Beziehungen, Typen von Aufgaben und Problemen, Argumentations- und Beweisschemata, Problemlösemethoden, grundsätzliche Zugangsweisen)
- *allgemeine synthetische Komponente:* mathematische Gerichtetheit

Krutetskiis Charakterisierung mathematischer Begabungen gilt in dieser Allgemeinheit für Mittelstufenschüler. Spezifische Untersuchungen mit

Grundschulkindern zeigten, dass sowohl das Streben nach ökonomischem Denken als auch ein mathematisches Gedächtnis im Grundschulalter noch nicht zum Ausdruck kommen, darüber hinaus sind Flexibilität und Reversibilität des Denkens allenfalls in „Keimform“ zu beobachten. Auch die Verkürzung von Denk- und Verarbeitungsprozessen kommt erst gegen Ende der klassischen Grundschulzeit über elementare Formen hinaus, dagegen ist das zügige Erfassen der formalen Struktur einer mathematischen Situation für begabte Kinder bereits früher möglich; gegen Ende der Grundschulzeit können sie auch mit komplexeren Strukturen umgehen. Von allen Komponenten tritt im Grundschulalter nach Krutetskii „am klarsten die Fähigkeit zur Verallgemeinerung des Mathematikstoffes hervor, verständlicherweise in relativ einfacher Form als Fähigkeit, das Gemeinsame in verschiedenen Aufgaben und Beispielen zu erfassen und entsprechend auch das Unterschiedliche im Gemeinsamen zu sehen“ (Krutezki, 1968, S. 52).
Für Krutetskii sind die beschriebenen Fähigkeiten spezifische oder spezifizierte Fähigkeiten (Krutetskii, 1976, S. 360), auch für ihn existieren Fähigkeiten nicht an sich, sondern immer nur an bestimmten Inhalten, mit denen sie eine untrennbare Einheit bilden (Lompscher & Gullasch, 1977).
Für den Grundschulbereich wurde das Themenfeld „Mathematische Begabung“ in Deutschland wesentlich durch eine in den 1990er Jahren durchgeführte Studie von Friedhelm Käpnick erschlossen, die u. a. das Ziel hatte, spezifische Merkmale für Dritt- und Viertklässler mit einer „potenziellen mathematischen Begabung“ zu bestimmen. Das zunächst theoretisch begründete Merkmalsystem umfasste neben mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen erstmals explizit auch begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften. Zu ersteren entwickelte und erprobte Käpnick „Indikatoraufgaben“, der daraus schließlich konstruierte Test wurde in einer Vergleichsuntersuchung mit 70 als potenziell mathematisch begabt benannten und 44 weiteren Dritt- und Viertklässlern eingesetzt. Die Ergebnisse des Indikatoraufgabentests bestätigten die zuvor theoretisch gewonnenen mathematikspezifischen Begabungsmerkmale ganz überwiegend. Zur empirischen Absicherung möglicher begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften wurden 38 Lehrerinnen gebeten, 91 potenziell mathematisch begabte Dritt- und Viertklässler aus ihren Schulklassen anhand eines Fragebogens einzuschätzen (Käpnick, 1998).
Das auf diese Weise entwickelte und im Folgenden knapp zusammengefasste Merkmalsystem (vgl. Käpnick, 1998, S. 119) konnte darüber hinaus in Einzelfallstudien und zwischenzeitlich in weiteren Untersuchungen bestätigt werden, es wurde später von Friedhelm Käpnick und Mandy Fuchs zu einem „Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter“ (Käpnick, 2006) erweitert:

- *Mathematikspezifische Begabungsmerkmale:* mathematische Sensibilität; Originalität und Fantasie bei mathematischen Aktivitäten; Gedächtnisfähigkeit für mathematische Sachverhalte; Fähigkeit zum Strukturieren; Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen; Fähigkeit zur Reversibilität und zum Transfer
- *Begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften:* hohe geistige Aktivität; intellektuelle Neugier; Anstrengungsbereitschaft, Leistungsmotivation; Freude am Problemlösen; Konzentrationsfähigkeit; Beharrlichkeit; Selbstständigkeit; Kooperationsfähigkeit.

Inwieweit diese Merkmale und die von Krutetskii beschriebenen Fähigkeiten mathematikspezifisch und zugleich charakterisierend für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler sind, hängt selbstverständlich auch von der mathematischen Reichhaltigkeit der Anforderungssituationen ab, in denen sie gezeigt werden (können). In dieser Reichhaltigkeit unterscheiden sich psychologische und mathematikdidaktische Untersuchungen in der Regel ganz erheblich.

Besonders reichhaltige und offene Problemstellungen entwickelte Kießwetter für den „Hamburger Test für mathematische Begabung“, der sich an Schülerinnen und Schüler der sechsten Jahrgangsstufe richtet. Für deren erfolgreiche Bearbeitung ist dann nicht nur die Verfügbarkeit spezifischer Fähigkeiten, sondern auch von darauf aufbauenden, bereits komplexeren Denk- und Handlungsmustern bedeutsam. In diesem Sinne verstehe ich den folgenden, von Kießwetter formulierten Katalog, der allerdings ausdrücklich keine umfassende Beschreibung einer mathematischen Begabung sein soll, stattdessen gleichzeitig Orientierung geben möchte für die Förderung mathematisch begabter Mittel- und Oberstufenschüler (Kießwetter, 1985, S. 302): *Organisieren von Material; Sehen von Mustern und Gesetzen; Erkennen von Problemen, Finden von Anschlussproblemen; Wechseln der Repräsentationsebene (vorhandene Muster bzw. Gesetze in „neuen“ Bereichen erkennen und verwenden); Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten; Prozesse umkehren*. Für den Grundschulbereich formulierte Kießwetter später einen (unvollständigen) Katalog mathematischer Skizzen, in denen erfolgreich mathematisch agiert wird: *Zusammenhänge an Spezialfällen verifizieren, Begründen mit paradigmatischen Beispielen, Nutzen von Superzeichen* (Kießwetter, 2006).

Hinweise zum Zusammenhang zwischen mathematischen Begabungen und Intelligenz liefert auch das von Marianne Nolte geleitete Forschungs- und Förderprojekt an der Universität Hamburg, in dessen Rahmen seit mehr als zehn Jahren Förderveranstaltungen für mathematisch begabte Grundschulkinder angeboten werden. Da aus Kapazitätsgründen unter den teilnahmewilligen Drittklässlern eine Auswahl erfolgen muss, bearbeiten die Interessenten zunächst einen Intelligenz- sowie einen eigens entwickelten Mathematiktest, der sich an Instrumente und Ergebnisse von Käpnick und Kießwetter anlehnt. Nolte (2012) berichtet von einer statistischen Analyse der Testergebnisse aus neun Jahren bzw. von fast 1700 Kindern, die für die Ergebnisse von Intelligenz- und Mathematiktest eine Korrelation von -0,34 ergab, wobei dieser Zusammenhang deutlich schwächer wurde für Kinder mit besonders guten Ergebnissen im Mathematiktest – beispielsweise sank der Korrelationskoeffizient für die Rangplätze 1 bis 15 auf -0,14. Der nicht sehr starke statistische Zusammenhang und dessen weitere Reduktion sind aufgrund der (zunehmenden) Selektivität und der (abnehmenden) Stichprobengröße zwar teilweise erwartbar, darin wird aber meines Erachtens auch noch einmal deutlich, dass eine besondere mathematische Begabung, die sich in der erfolgreichen Auseinandersetzung mit mathematisch reichhaltigen Problemstellungen zeigt, nicht aus dem IQ abgeleitet werden kann bzw. nicht Bestandteil einer allgemeinen intellektuellen Begabung ist.

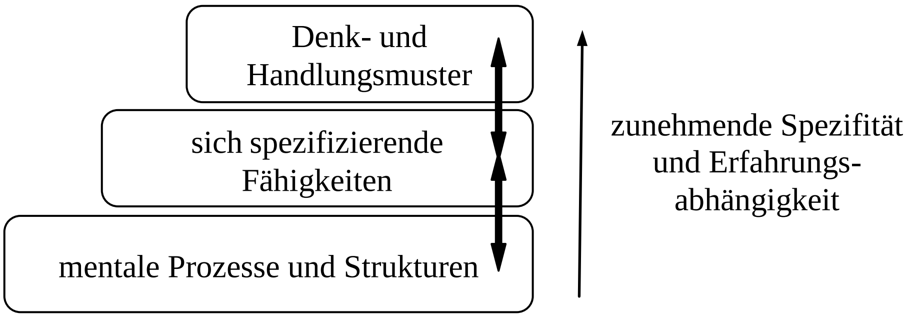


Abb. 1: Beschreibungsebenen zum Konstrukt „Mathematische Begabung“

Zusammenfassend lässt sich sagen: Geht man über einfache psychometrische Ansätze hinaus und sieht mathematische Begabungen als Begabungen zum mathematischen Tätigsein im engeren Sinne an, so sind diese sehr wohl auch Ausdruck *spezifischer* kognitiver Merkmale. Darüber hinaus scheint es mir wichtig zu berücksichtigen, welche Ebene der Beschreibung fokussiert wird: die Ebene der involvierten mentalen Prozesse und Strukturen, die Ebene der sich zunehmend spezifizierenden Fähigkeiten oder die der Denk- und Handlungsmuster – die selbstverständlich nicht unabhängig voneinander sind und bei denen Spezifität und Erfahrungsabhängigkeit von Ebene zu Ebene zunehmen.

Literatur

Benbow, C. P., & Minor, L. L. (1990). Cognitive Profiles of Verbally and Mathematically Precocious Students: Implications for Identification of the Gifted. *Gifted Child Quaterly, 34*(1), 21–26.

Desco, M., et al. (2011). Mathematically gifted adolescents use more extensive and more bilateral areas of the fronto-parietal network than controls during executive functioning and fluid reasoning tasks. *NeuroImage*, *57*, 281–292.

Foth, M., & Meer, E. van der (2013). Mathematische Leistungsfähigkeit: Prädiktoren überdurchschnittlicher Leistungen in der gymnasialen Oberstufe. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven* (S. 211–240). Münster: WTM.

Käpnick, F. (2006). Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschulkinder. In *BzMU 2006* (S. 59–60). Hildesheim: Franzbecker.

Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern – ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. *MNU, 38*(5), 300–306.

Kießwetter, K. (1992). „Mathematische Begabung“ – über die Komplexität der Phänomene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen. *MU*, *38*(1), 5–18.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder?* (S. 128–153). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Krause, W., Seidel, G., & Heinrich, F. (2004). Multimodalität am Beispiel mathematischer Anforderungen. In *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät. Band 64*. Berlin.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Krutezki, W. A. (1968). Altersbesonderheiten der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bei Schülern. *Mathematik in der Schule, 8*(1), 44–58.

Lompscher, J., & Gullasch, R. (1977). Die Entwicklung von Fähigkeiten. In APW der DDR (Hrsg.), *Psychologische Grundlagen der Persönlichkeitsentwicklung im pädagogischen Prozess* (S. 199–249). Berlin: Volk und Wissen.

Nolte, M. (2012). „High IQ and high mathematical talent!” Results from nine years talent search in the Prima-project Hamburg. In ICME 12 Pre-proceedings. Seoul.

O'Boyle, M. W. (2008). Mathematically Gifted Children: Developmental Brain Characteristics and Their Prognosis for Well-Being. *Roeper Review, 30*, 181–186.

Seidel, G. (2004). *Ordnung und Multimodalität im Denken mathematisch Hochbegabter*. Berlin: Wissenschaftlicher Verlag Berlin.

Waldmann, M., & Weinert, F. E. (1990). *Intelligenz und Denken. Perspektiven der Hochbegabungsforschung.* Göttingen: Hogrefe.

Wieczerkowski, W., Cropley, A. J., & Prado, T. M. (2000). Nurturing Talents/Gifts in Mathematics. In K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Hrsg.), *International Handbook of Giftedness and Talent* (2. Aufl., S. 413–425). Amsterdam: Elsevier.

Zimmermann, B. (1992). Profile mathematischer Begabung. Fallstudien aus dem Hamburger Projekt sowie aus der Geschichte der Mathematik. *MU, 38*(1), 19–41.

Celia HOY ES, London Knowledge Lab, Institute of Education,
University of London, U.K

From design experiments to innovation at scale: potential and challenges for research in mathematics education

In this talk, I will draw on research over several decades into the use of digital technologies to enhance the teaching and learning of mathematics in order to pull out what I see as some common messages. Many have shown, for example, that the teacher's role is crucial, so professional learning must be a central component of any innovation with digital technologies. But how exactly should this be organized and managed? As a step towards answering this question, I will present examples from my own ongoing research that has as its goal the scaling and sustainability of research based interventions.

Hinweis:
Bitte entnehmen Sie die vollständige Präsentation dem Online-Download.

Silke LADEL, Universität des Saarlands

„Garantierter Lernerfolg“ oder „Digitale Demenz“? Zum frühen Lernen von Mathematik mit digitalen Medien

1. Zur Tradition des Kulturpessimismus

Seit es digitale Medien gibt und die Schulbuchverlage und Computer-Hersteller diese für sich entdeckt haben gibt es Erfolgs-Versprechungen. 2005 ging Günter Krauthausen bereits darauf ein. Er erwähnt eine Software aus den 90er-Jahren, die „*Versetzungsgarantie*“ verspricht, eine 2003 erschienene „*Software mit Lerngarantie*“. Und auch heute noch versprechen Online-Programme *„bessere Noten in 15 Minuten“*. Genau die gegensätzliche Position wird u.a. durch Spitzer vertreten, der auf die Gefahren digitaler Medien aufmerksam macht. Spitzer kritisiert die digitalen Medien und schreibt, *„dass das Bewusstsein, Sachverhalte jederzeit im Netz finden zu können, die Speicherung im Gehirn verhindert: Wer mit der Einstellung „Ich kann das jederzeit googeln“ ins Netz geht, der wird, [...] solches Expertenwissen in weitaus geringerem Maß erlernen als jemand, der nicht mit dieser Einstellung [...] unterwegs ist.“* (Spitzer 2012, S. 212). Ebenso wie Spitzer heute behauptet, dass die ständige Verfügbarkeit des Internets und das Nachlesen darin die Speicherung im Gehirn verhindern würde, behauptete Platon in einem fiktiven Dialog zwischen Sokrates und dessen Schüler Phaidros, dass die ständige Verfügbarkeit von Büchern und das Nachlesen darin zu einem Verlust des Erinnerns führen würde und das Buch lediglich als externer Speicher bzw. externes Gedächtnis diene: *„Denn Vergessenheit wird dieses in den Seelen derer, die es kennenlernen, herbeiführen, durch Vernachlässigung des Erinnerns, sofern sie nun im Vertrauen auf die Schrift von außen her mittelst fremder Zeichen nicht von innen her aus sich selbst, das Erinnern schöpfen. Nicht also für das Erinnern, sondern für das Gedächtnis hast du ein Hilfsmittel erfunden.“* (Platon ca. 370 v. Chr.). Die Kritik Platons ist insofern verständlich, dass Schrift häufig nicht reflektiert, sondern einfach nur wiedergegeben wird. Man muss sich jedoch die Frage stellen, was durch die Schrift überhaupt erst alles ermöglicht wird. Schrift ist also nicht per se ein schlechtes Medium - ebenso wenig wie auch digitale Medien per se schlecht sind. Inhaltlich sind die beiden Zitate von Spitzer und Platon vergleichbar, die Kritik an Medien ist nichts Neues. Der Kulturpessimismus hat eine gewisse Tradition.

Garantierter Lernerfolg oder digitale Demenz? Ist das die richtige Frage? Können wir das überhaupt so pauschal beantworten oder müssen wir den Einsatz digitaler Medien nicht vielmehr differenziert betrachten?

2. Artefact-Centric Activity Theory

Der Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht der Grundschule ist ein sehr komplexes Thema. Eine Hilfe dabei die richtigen Fragen zu stellen bietet die Activity Theory (vgl. Leontjev 1978, Engeström 1987). Die Wurzeln der Activity Theory gehen zurück in die UdSSR der 1920er Jahre und eine Arbeitsgruppe von Psychologen um Vygotski und Leontjew. Darin sind die Subjekte - bei uns die Schüler - aktive Handlungsträger. Menschliche Tätigkeit zeichnet sich dadurch aus, dass sie bewusst durchgeführt wird, in einem bewussten Verhältnis gegenüber der Umwelt. Auslöser einer Tätigkeit ist demnach immer der bildungsbedürftige und darum selbsttätige Mensch. Die Handlungen oder Tätigkeiten finden nicht losgelöst von allem andern statt, sondern haben immer eine bestimmte Gegenständlichkeit, ein Objekt. Diese gegenständliche Tätigkeit beschreibt ein zentrales Prinzip der Activity Theory. Tätigkeiten sind objektorientiert und ergeben sich aus den Bedürfnissen der Subjekte. Diese Bedürfnisse werden von den Subjekten in Interaktion mit dem Objekt befriedigt. Die Tätigkeit ist also ein *„Prozeß, in dem die wechselseitigen Übergänge zwischen den Polen „Subjekt - Objekt“ verwirklicht werden“* (Leontjew 1987, S. 83).

Nun gibt es immer zwei Facetten des Objekts. Zum einen existiert es unabhängig von anderen Dingen, sich selbst untergeordnet und spiegelt die Tätigkeit des Schülers wider. Zum andern existiert es als ein Bild des Objekts, als ein Produkt seiner Eigenschaften, das als Tätigkeit des Schülers realisiert wird und anders nicht existieren kann. So existiert beispielsweise die Addition an sich, unabhängig vom Schüler, sie ist einfach da. Die Addition existiert aber auch im Bewusstsein des Schülers, der bestimmte Vorstellungen von der Addition hat. Diese beiden Facetten des Objekts stimmen nicht immer notwendigerweise überein. Sie sind in der sich entwickelnden Subjekt-Objekt-Interaktion über die Tätigkeit miteinander verbunden. Ob ein Schüler beispielsweise ein mathematisches Problem lösen kann oder nicht, hängt zum einen von der Aufgabe und ihrem Schwierigkeitsgrad ab zum andern aber auch von den Fähigkeiten und Fertigkeiten des Schülers. Während also die Fähigkeiten und Fertigkeiten einer Person Einfluss darauf haben, wie diese Person das mathematische Problem löst, beeinflusst die Tätigkeit des Lösens mathematischer Probleme die Fähigkeiten und Fertigkeiten dieser Person. Und so ist auch die Activity Theory als ein klares Gegengewicht zur Klassifikation von Aufgaben (wie z.B. bei PISA) zu sehen, in der Schwierigkeitsgrade ohne Einbeziehung der aktuellen Schülerkompetenz angegeben werden.

Die Konzepte der Internalisierung und Externalisierung beziehen sich auf die Prozesse der gegenseitigen Transformationen zwischen internen und externen Komponenten einer Tätigkeit. Bei diesen Tätigkeiten bedient sich das Subjekt bestimmter Werkzeuge (vgl. *„Instrumental Act"* von Vygotsky 1930). Anstelle der direkten Interaktion des Subjekts mit dem Objekt, interagiert es nun über das Werkzeug. Die Tätigkeiten führen zu demselben Ergebnis, aber über einen anderen Weg. Der Gebrauch eines Werkzeugs bringt Veränderungen in der Interaktion mit sich. Das Werkzeug birgt neue Möglichkeiten, manche der vorherigen Prozesse werden unnötig, da sie vom Werkzeug übernommen werden. Das verändert auch den Ablauf der Tätigkeit, z.B. die Intensität oder Dauer der Prozesse. Dieser instrumental act, der einen einfachen Prozess durch einen komplexen, vermittelnden Prozess ersetzt ist zentrales Element der Theorien, die auf der Activity Theory basieren. Eine Tätigkeit wird also im Wesentlichen durch das Subjekt, dem Objekt und dem Werkzeug bestimmt. So kann ein Kind zu Beginn häufig seine Finger zum Rechnen benutzen. Benötigt es diese nicht mehr, so sind die Finger redundant geworden. Die externen Komponenten werden intern - das ist der Prozess der Internalisierung. An dieser Stelle sei auch auf Galperin (1992) hingewiesen, der diesen Prozess der Internalisierung praktisch-gegenständlicher Tätigkeit in geistige Tätigkeit in dem Konzept der „Etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen" lern- und lehrstrategisch umsetzt. Auf der anderen Seite muss das Kind seine interne Komponente externalisieren. Dies tut es z.B. indem es seine Finger nutzt. Die Finger stellen in diesem Fall das Werkzeug dar, das als Mediator zwischen Subjekt und Objekt fungiert. Technologien wie der Computer sind dementsprechend auch nicht das Ziel, sondern lediglich das vermittelnde Artefakt! Die Schüler interagieren nicht dem Computer, sondern *über* bzw. mit Hilfe des Computers mit der Welt.

In den 1980er Jahren hat der finnische Bildungswissenschaftler Engeström eine Activity Theory vorgeschlagen, die auf Leontievs Gerüst aufbaute, und welche die Basis der Artefact-Centric Activity Theory (vgl. Ladel & Kortenkamp 2011, 2013) darstellt. Darin ist das vermittelnde Artefakt ins Zentrum gerückt (s. Abb. 1).

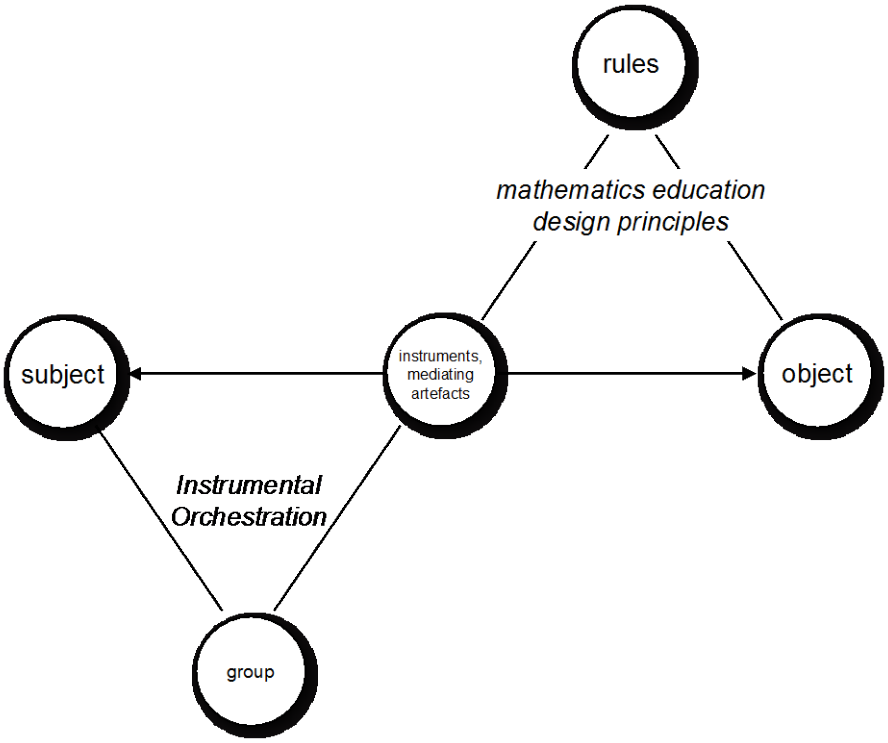


Abbildung 1: Artefact-Centric Activity Theory (ACAT)

Das vorherige Dreieck Subjekt - Objekt - Artefakt bildet die Hauptachse in ACAT. Das Subjekt interagiert über das Artefakt mit dem Objekt. Auf der rechten Seite liegt schwerpunktmäßig die Gestaltung des Artefakts. Die Gestaltung der Bildschirmoberfläche und die Handhabung ist für ein effektives Lehren und Lernen von entscheidender Bedeutung. Dabei sind bestimmte Regeln zu beachten, die sich u.a. aus dem Objekt, der Mathematik, an sich ergeben, aber auch aus unserem Wissen über mathematische Lehr- und Lernprozesse oder beispielsweise aus Gestaltungsprinzipien des multimedialen Lernens. Wenn wir also virtuelle Arbeitsmittel gestalten, sollten diese z.B. aufgrund unseres dezimalen Stellenwertsystems so gestaltet sein, dass die 10er-Bündelung hervorgehoben wird. Das ist ein Aspekt, der sich eher vom Objekt her ergibt. Unser Wissen über simultane und quasi-simultane Zahlerfassung kommt eher von Seiten des Subjekts und besagt uns außerdem die „*Kraft der Fünf*“ (vgl. Flexer 1986, Krauthausen 1995) zu beachten. So müssen wir das Wissen aus ganz vielen unterschiedlichen Bezugsdisziplinen bei der Gestaltung des digitalen Artefakte heranziehen. Die linke Seite von ACAT geht auf den Einsatz in der Schule ein. Der Einfluss der Gruppe, welche sich hier auf die jeweilige Klasse bezieht, muss beachtet werden. Dazu zählt auch die Lehrperson, die das Artefakt im Sinne der „Instrumental Orchestration“ (Drijvers et al. 2009) organisiert und in ihrem Unterricht einsetzt. Aktuell finden speziell im Bereich des Collaborative Learning verstärkt Forschungsarbeiten mit digitalen Medien statt, die untersuchen, welchen Einfluss diese Artefakte auf Gruppenprozesse haben.

Auch die *„Zone of proximal development“* (Vygotsky 1934) ist diesem linken unteren Dreieck zuzuordnen.
Die Activity Theory ist ein methodologisches Werkzeug zum besseren Verständnis des Bewusstseins und der menschlichen Psyche, welches die theoretische Lücke füllt, die bei der rein testbasierten Analyse auftritt. Sie hilft dabei, besser zu verstehen, wie Schüler mit interaktiven Technologien umgehen. Insofern stellt sie keine „Theorie“ im traditionellen Sinn dar, sondern sie hilft Wissenschaftlern und Praktikern sich in komplexen Situationen zurecht zu finden, Schlüsselpunkte zu identifizieren und die Suche nach relevanten Beweisen und passenden Lösungen in die richtige Richtung zu lenken.

3. Virtuelle Arbeitsmittel

3.1 Zur Konstruktion mathematischen Wissens

Bei der Klärung des Begriffs virtuelle Arbeitsmittel stößt man schnell auf den Begriff der virtual manipulatives, der von Moyer et al. definiert wurde als *„... an interactive, Web-based visual representation of dynamic object that presents opportunities for constructing mathematical knowlege“* (Moyer, Bolyard, & Spikell 2002, S. 373). Die Autoren unterscheiden zwei Arten von virtual manipulatives: statische visuelle Repräsentationen und dynamische. Moyer et al. bezeichnen diese dynamischen virtuellen Materialien als *„truly a ‚virtual manipulative‘“* (ebd., S. 184) und fordern, dass die Bezeichnung auf die Art von Materialien beschränkt sein sollte, die Interaktivität ermöglichen. Als weitere Punkte der Definition sei hervorgehoben, dass virtual manipulatives visuelle Darstellungen sind und, dass sie Gelegenheiten bieten mathematisches Wissen zu konstruieren. Es ist demnach von entscheidender Bedeutung, wie die virtuellen Materialien eingesetzt werden. Nämlich so, dass sie den Schülern Gelegenheiten bieten mathematisches Wissen zu konstruieren.
Laut Aebli (1983) konstruiert der Schüler mathematisches Wissen in mehreren Schritten über die Verinnerlichung von Handlungen. Eine mathematische Operation ist als abstraktes Handeln zu verstehen, das seinen Ursprung in konkreten Handlungen hat. Diese definiert Aebli als *„zielgerichtete, in ihrem inneren Aufbau verstandene Vollzüge“* (1983, S. 182). Es geht wie in der Activity Theory um eine zielgerichtete Tätigkeit. Wichtig dabei ist, dass die Schüler den inneren Aufbau der Vollzüge verstehen. *„Wenn eine Handlung effektiv ausgeführt wird, so hat der Handelnde die gegebenen Objekte sichtbar vor sich. Er kann sie sehen, eventuell hören, vielleicht tasten“* (ebd., S. 217). An dieser Stelle geht Aebli explizit auf die Art der Repräsentation der Handlungsobjekte ein und stellt fest, dass tasten nicht zwingend notwendig ist. Aber der Schüler muss die Handlungsobjek-

te sichtbar vor sich haben. Wobei *„Entscheidend ist nicht die Art der Vergegenwärtigung der Gegebenheiten, entscheidend ist das Bewußtsein der Beziehungen, die durch die Operation erzeugt oder verändert werden.“ (ebd., S. 220).*

Handlungen sind wesentlich mehr sind als reine Fertigkeiten: Es ist nicht entscheidend, ob die Handlungsobjekte realer oder virtueller Natur sind. Es kommt vielmehr auf das Bewusstsein der Beziehungen an, das über die Tätigkeit hergestellt wird. Diese Tätigkeit, die in der Subjekt-Objekt-Interaktivität besteht, schafft eine Bewusstseinsänderung.

Beispiel virtuelle Stellenwerttafel:

Gerster und Walter (1973, S. 24f.) unterscheiden beim Übergang zur Stellenwertnotierung elf Abstraktionsstufen. Die ersten sechs Stufen beziehen sich auf Prozesse des Bündelns, Stufe 7 bis 11 auf den Übergang zur Stellenwertnotierung. Auf diese wird im Folgenden näher eingegangen. Auf Stufe 7 sortieren die Kinder Bündelungsmaterial in eine Stellenwerttafel ein. Das Volumen des Materials bleibt beim Bündeln also zunächst erhalten. Das Kind zählt keine einzelnen Würfel, sondern Würfel, Stangen und Platten. Deshalb ist es auch noch völlig gleichgültig, wo man die einzelnen Bündel hinlegt. Es wird noch keine Stellenwertnotierung verwendet. Dies gilt auch noch dann, wenn auf Stufe 8 beim Materialtausch in Bündel nächsthöherer Ordnung unterschiedliche Farben verwendet werden. Auch dann wird noch keine Stellenwertnotierung verwendet, da die Zählmarken je nach Wert eine unterschiedliche Farbe haben. Die Lage der farbigen Plättchen ist völlig gleichgültig. Entscheidend ist der Übergang zu Stufe 9. Hier werden die Anzahlen der Bündel verschiedener Ordnung mit Hilfe lauter gleichartiger Zählmarken dargestellt. Erst dadurch erhält eine einzelne Marke, je nach seiner Stellung auf der Stellenwerttafel einen anderen Wert. Auf Stufe 10 werden die Anzahlen der Bündel einer bestimmten Sorte durch Ziffern notiert, die in der Stellenwerttafel eingetragen werden, auf Stufe 11 erfolgt die Notation schließlich mit Hilfe einer Ziffernfolge ohne Stellenwerttafel.

Ziel der virtuellen Stellenwerttafel ist das Nachvollziehen dessen, dass z.B. eine Zählmarke in der Zehnerspalte, den Wert von zehn Zählmarken in der Einerspalte besitzt. Das Kind kann hier die Bündelung mit gleichartigen Zählmarken virtuell-handelnd vollziehen. Der Wert der Zahl bleibt dabei erhalten, lediglich die Darstellung ändert sich. Das ist bei Handlungen mit realem Material anders. Hier ändert sich der Wert der Zahl beim Verschieben eines Plättchens. Das Verschieben eines Plättchens ist eine einzelne Tätigkeit, bei der man darauf achten muss, was diese Tätigkeit genau bedeutet.

3.2 Zur Passung der kognitiven und mathematischen Strukturen mit dem Artefakt

Beim Herstellen von Zusammenhängen ist es wichtig, dass die Arbeitsmittel passend zu den kognitiven und mathematischen Strukturen sind (vgl. Clements 1999). Die kognitiven Strukturen finden wir in der Hauptachse von ACAT beim Subjekt wieder. Die mathematischen Strukturen auf der Seite des Objekts. Das digitale Medium vermittelt am besten, wenn es zu diesen Strukturen passt. Diesbezüglich hat Segal den Begriff des *„Gestural Conceptual Mappings"* definiert als *„mapping of gestures (actions) to mental operations and representations with the learned concept"* (Segal 2011, S. 21). Dabei sollte jedoch beachtet werden, dass die Interaktion zwischen Subjekt und Objekt sich ständig entwickelt und die Entwicklung mathematischen Wissens etwas Prozesshaftes ist. Die kognitiven und mathematischen Strukturen sollten deshalb nicht nur zu bereits gelernten Konzepte der Mathematik passen, sondern auch beim Lernen selbst passend sein.

4. Multi-touch Technologie

Seit einigen Jahren hält die multi-touch Technologie Einzug in immer mehr Geräte. Die Möglichkeit, mehrere Finger auf einmal auf den Bildschirm zu legen oder einzeln hintereinander kann im Sinne eines Gestural Conceptual Mappings mit verschiedenen Zahlaspekten in Verbindung gebracht werden. Nimmt das Kind eine 1-zu-1-Zuordnung zwischen jedem einzelnen Objekt, hier Finger, und dem Zahlwort vor, so würde das einem single-touch entsprechen. Beim multi-touch hingegen können die Kinder mit mehreren Fingern auf einmal eine Anzahl an Objekten herstellen, was strukturell mit dem kardinalen Zahlaspekt oder Teil-Ganze-Aspekt übereinstimmt (vgl. Ladel 2011, 2012). Dabei stellen zunächst die Finger das Artefakt dar, welches das Kind zur Externalisierung seiner mentalen Zahlkonzepte nutzt. Diese strukturelle Verbindung verschiedener Zahlaspekte mit den Fingern wurde im Projekt Multiplex-R versucht in die Gestaltung der Bildschirmoberfläche eines multi-touch Tisches zu übertragen. Dabei stellte sich heraus, dass zunächst noch einiges an Grundlagenforschung nötig ist, bevor man eine einsatzbereite Lernumgebung zur Verfügung stellen kann. Die Komplexität der Gestaltung ist gut am Beispiel Schieben oder Ziehen zu sehen. Die Bildschirmoberfläche war zunächst derart gestaltet, dass virtuelle Objekte erzeugt werden, wenn man mit den Fingern den Rand berührt. Möchte man, dass die Objekte liegen bleiben, so müssen diese vom Rand aus in die Mitte geschoben werden. Im Videobeispiel zeigte Anna zu Beginn sechs Finger auf einmal, entschied sich dann aber dafür, die Finger einzeln hintereinander zu legen mit den Worten „der erste, der zweite". Als Anna den für sie „falschen" Finger nimmt will sie den Fehler korrigieren, aber der multi-touch Tisch reagiert nicht. Daraufhin passt sie ihr Zahlkonzept an. Anna weiß oder hat die Erfahrung gemacht, dass es nicht von Bedeutung ist, mit welchem Finger sie die Objekte legt. Sie kann hier also bereits abstrahieren. Dann wechselt sie zurück zum ordinalen Zahlkonzept. Da der multi-touch Tisch nicht korrekt reagiert nimmt Anna nun immer ihren Zeigefinger, um die Objekte zu legen, vermutlich weil der multi-touch Tisch mit diesem am besten reagiert und die Feinmotorik leichter ist. Dieses Beispiel zeigt, wie die Tätigkeit der Kinder durch die Auswahl, Gestaltung und Funktionalität des Artefakts beeinflusst wird und je nach dem verschiedene Zahlaspekte zum Einsatz kommen. Das Design wurde daraufhin vom Schieben zum Ziehen gewechselt. Die Objekte werden nun also in der Mitte des Tisches erzeugt und müssen nach außen gezogen werden, um dauerhaft liegen zu bleiben. Im Beispiel war die Aufgabe an zwei Kinder zusammen eine bestimmte Anzahlen an Objekten zu legen. Dabei konnte man verschiedene Arten der Zerlegung beobachten. Die zwei Kinder im Beispiel haben bei geraden Anzahlen halbiert, bei ungeraden Anzahlen fast-halbiert - und das Ganze ohne ein Wort miteinander zu wechseln. Bei kleineren Anzahlen legten beide Jungs die Objekte immer mit mehreren Fingern auf einmal und der linke Junge begann zu legen. Bei der acht wechselt das. Jetzt fing der rechte Junge an und er produzierte die Objekte nicht mehr wie zuvor auf einmal, sondern hintereinander. Es kann also von der Größe der Zahl abhängen, welchen Zahlaspekt ein Kind nutzt und ist abhängig von der jeweiligen Situation.

4. Schlussbemerkung

Der Mathematikunterricht in der Grundschule war und ist sehr medienreich. Die digitalen Medien treten keinesfalls in eine medienarme Landschaft. Es gibt eine Vielzahl von Werkzeugen, die zur Unterstützung mathematischer Lehr- und Lernprozesse genutzt werden. Die Artefact-centric Activity Theory ergab sich speziell aus den Bedürfnissen der Komplexität beim Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht gerecht zu werden. Dabei gilt das hier Dargelegte nicht nur für den Einsatz digitaler Medien sondern allgemein. Wichtig ist, dass wir die Technik nicht aus dem Blick verlieren und sie in unserer Arbeit erforschen und sinnvoll einsetzen. Um dabei nicht zu sehr auf die Technik fixiert zu sein und das Ganze nicht aus dem Blick zu verlieren, bietet uns ACAT eine gute Hilfe.

Literatur

Die Literaturliste kann bei der Autorin angefragt werden.

Heinz STEINBRING, Essen

Mathematische Interaktion aus Sicht der interpretativen Forschung – Fallstudien als Basis theoretischen Wissens

Prolog Schüler als ‚triviale Maschinen'?
„Ich habe erheblichen Widerstand bei Pädagogen geerntet, als ich ihnen erklärte, dass sie ihre Schüler wie triviale Maschinen erziehen wollen, wenn diese auf bestimmte Fragen richtige Antworten geben müssen. Wenn die Antwort falsch ist, ist sie falsch, wenn sie richtig ist, ist sie richtig … In diesem System ist nicht vorgesehen, dass der Schüler … die Frage infrage stellt oder kreative Auswege sucht, also die mathematischen Formeln auf ihre Ästhetik hin betrachtet, …" (Luhmann 2002a, S. 98/99).
„[Mein] Arbeitsinteresse [gilt] inhaltsspezifischen Analysen der Konstitution (mathematischer) Bedeutung zwischen Lehrer und Schülern … dies erfordert die Rekonstruktion der Bedingungen ihres Zustandekommens … in der sozialen Interaktion. Mathematiklernen oder -lehren … erscheint … nicht als die Vermittlung eines … unwandelbaren Stoffes, sondern als ein … soziales Aushandeln von Bedeutungen und als Konstruktion von gemeinsam ‚geltendem Wissen'…" (Bauersfeld 1982, S. 1/2).

1. Mathematische Interaktionen: Wie realisiert sich Verstehen in der Kommunikation?

„Die interpretative Forschung versucht die Unterrichtswirklichkeit und die mathematischen Themen in ihr aus der ‚Binnenperspektive der Handelnden' zu verstehen …" (Maier & Voigt 1991, S. 8). Wie laufen interaktive Prozesse in dieser Wirklichkeit ab? Wie realisiert sich in ihr unter den Beteiligten ‚Verstehen'? Ist es zweckmäßig, Verstehen in der Unterrichtsinteraktion wie das Verstehen bei trivialen Maschinen zu erklären: „In Reaktion auf einen präzisen Input den korrekten Output produzieren" ?
„ …weder die Individuen noch das Interaktionssystem des Unterrichts sind Trivialmaschinen, die, wenn man den richtigen Input eingibt, die gewünschten Resultate liefern" (Luhmann 2002b, S. 157). Bauersfeld betont, dass Unterricht eine vielfältige Kultur ist: „ … der wahrscheinlich größere Teil des im Unterricht Gelernten [wird] indirekt gelernt, d.h. beiläufig und vorbewusst mitgelernt …. In diesem Sinne wirkt Unterricht wie eine Kultur: Deren Mitglieder bilden durch Anpassung einen typischen ‚Habitus' (Bourdieu) aus, der ein konfliktarmes und zugleich angemessenes Handeln in dieser Kultur formiert und möglich macht" (Bauersfeld 2000, S. 124/125)."
Wesentliche Dimensionen der mathematischen Unterrichtskultur sind ‚Kommunikation / Interaktion' und ‚Mathematik'. Damit sind zwei Prob-

leme verbunden: ‚Kommunikation' funktioniert nicht simpel als eindeutiges Fachgespräch und ‚mathematisches Wissen' ist nicht konkret mit den Sinnen greifbar.

„Die Pädagogik wird es kaum zugeben können, dass psychische Prozesse und soziale Prozesse völlig getrennt operieren. Aber das Bewusstsein der Individuen kann mit eigenen Operationen andere Individuen nicht erreichen. … wenn Kommunikation zustande kommen soll, muss ein ganz anderes, ebenfalls geschlossenes, ebenfalls autopoietisches System in Tätigkeit treten, nämlich ein soziales System, das Kommunikationen durch Kommunikationen reproduziert und nichts weiter tut als das" (Luhmann 1996, S. 279).

„ … Diese beiden Systemarten sind jedoch in einem besonders engen Verhältnis miteinander verbunden und bilden wechselweise eine ‚Portion notwendiger Umwelt': Ohne Teilnahme von Bewusstseinssystemen gibt es keine Kommunikation, und ohne Teilnahme an Kommunikation gibt es keine Entwicklung des Bewusstseins" (Baraldi, Corsi & Esposito 1997, S. 86). Nach Luhmann werden von den Teilnehmern im kommunikativen System wechselweise durch Mitteilungen (oder Handlungen) ‚Bezeichnende' gegeben, die auf Informationen oder ‚Bezeichnete' verweisen. Der Mitteilende kann nur ein ‚Bezeichnendes' beitragen, aber das vom Mitteilenden intendierte ‚Bezeichnete' – das erst zu einem verstandenen ‚Zeichen' führen kann, bleibt offen und relativ vage, und es kann nur vom Mitteilungsempfänger hergestellt werden durch Artikulation eines neuen ‚Bezeichnenden'. Der Empfänger kann das mögliche ‚Bezeichnete' nicht einfach strikt dem Sprecher zuordnen, sondern er hat es selbst herzustellen in der sich entwickelnden sozialen Kommunikation.

In seinem Buch ‚Die Ursprünge der menschlichen Kommunikation' (2009) identifiziert Tomasello notwendige Bedingungen für das Zustandekommen von Verstehen in der menschlichen Kommunikation. Die menschliche Sprache „ … gründet auf einer nicht-sprachlichen Infrastruktur des intentionalen Verstehens und auf einem gemeinsamen begrifflichen Hintergrund … Wenn wir menschliche Kommunikation verstehen wollen, können wir … nicht mit der Sprache beginnen. Als Ausgangspunkt müssen uns vielmehr nicht-konventionalisierte, unkodierte Kommunikation und andere Formen der geistigen Abstimmung dienen …. Hervorragende Kandidaten für diese Rolle sind die natürlichen Gesten des Menschen wie das Zeigen und das Gebärdenspiel" (Tomasello 2009, S. 69/70).

Wesentliche Grundelemente für die Realisierung von Verstehen in der Kommunikation sind somit ein ‚gemeinsamer begrifflicher Hintergrund / eine gemeinsame Handlungspraxis' und ‚Zeige- sowie Symbolgesten'.

Die Realisierung von Verstehen in der Kommunikation ist somit weder direkt möglich noch von einer auf andere Personen übertragbar; jeder Teilnehmer muss sein eigenes Verstehen herstellen (z.B. Luhmann). Und: kommunikatives Verstehen setzt einen gemeinsamen begrifflichen Hintergrund und eine gemeinsame Handlungspraxis voraus (z.B. Tomasello).
In der Konsequenz ist zu beachten, dass für die Herstellung von wechselweisem Verstehen in Interaktionsprozessen ‚nicht-trivialer Maschinen' jeder Beteiligte die auftretenden Mitteilungen in seinen (individuellen) rationalen Konnex (‚Netzwerk') gemeinsamer begrifflicher Auffassungen und einer übergreifenden Handlungspraxis sinnvoll einzuordnen versucht.
Beispiel (Fromm & Spiegel 1996, S. 109): ‚Annika rechnet 60:4' (Kl. 3)

7	A:	Ich hab' erst 8 durch 4 gerechnet, das waren 12,
8		und dann hab' ich die Reste davon, das war bei jedem 2,
9		und dann hab' - und das waren dann wieder 12,
11	I:	Also, ich muss jetzt gleich mal Dich unterbrechen.
12		Du hast nämlich gesagt, 8 durch 4 ist 12.
14	A:	Äh, ich meine 8 durch 60.
15	I:	8 durch 60 - geht das?

Aus Sicht ‚trivialer Maschinen' produziert Annika keinen korrekten Output: 8 : 4 = 12 ist falsch und 8 : 60 ist (hier) eine falsche Rechnung. Aus Sicht ‚nicht-trivialer Maschinen' ermöglicht die interpretative Analyse der weiteren Äußerungen Annikas eine Rekonstruktion ihres Verstehens in ihrem rationalen Konnex begrifflicher Auffassungen und Handlungen, dieser bleibt der Leiterin im Interview unzugänglich.
Annika könnte so überlegt haben: „10 passt 6 mal in 60 [60 = 6·10]", „8 steckt in 10 (mit Rest 2) [10 = 8+2]" und 8 : 4 = 12 lässt sich deuten als „4 steckt 2 mal in 8 also 12 mal in 60". Zudem schätzt Annika mit Hilfe von 60 = 6 · 10 ab, wie oft 8 in 60 passt.
Das ‚doppelte Verstehensproblem' der interpretativen Forschung:
• Das wechselseitige Verstehen der Teilnehmerinnen in mathematischen Interaktionen ist nicht direkt möglich, sondern erfordert die Einordnung auftretender kommunikativer Mitteilungen in einen aktiv herzustellenden rationalen Konnex von begrifflichen Vorstellungen und einer gemeinsamen Handlungspraxis.
• Die interpretative mathematische Forschung kann Verstehensvorgänge in realen mathematischen Interaktionen nicht durch bloßes Beobachten direkt aufklären, sondern muss (dokumentierte)mathematische Interaktionen mit Hilfe von Forschungsmethoden in einen theoretisch fundierten, rationalen Konnex von wissenschaftlichen Begriffen und Modellen einordnen und so objektiv nachvollziehbare Deutungen rekonstruieren.

2. Mathematische Interaktionen: Latent wirkende Sinnzusammenhänge und Muster in der Unterrichtskommunikation

Die Forschungsgruppe Bauersfeld verstand die ‚Interpretative Unterrichtsforschung' als Korrektiv zu einem ‚Mathematikunterricht als Vermittlung eines unwandelbaren Stoffes'.

„ … die ‚Alltagswende' … mit ihrer Kritik an der ‚Feiertagsdidaktik' … beinhaltete die Forderung, den Merkmalen des alltäglichen Unterrichts eine größere Bedeutung als zuvor zuzuweisen. Man sah in ethnographischen Unterrichtsbeobachtungen und in interpretativen Studien ein Korrektiv für Unterrichtskonzeptionen, die am didaktischen Schreibtisch entstehen … man war von den Wirkungen der Reformen … desillusioniert und wollte die überraschende Stabilität des Unterrichtsalltags, seine Eigenbewegungen und seine Traditionen besser verstehen" (Voigt 1996, S. 384).

Die interaktionistische Forschung nimmt zwei (zuvor wenig berücksichtigte) Perspektiven wesentlich in den Blick:

• Eine individual-psychologische Perspektive, welche die Autonomie des Lerners und seine kognitive Entwicklung betont.

• Eine kollektivistische Perspektive, welche Mathematik lernen als die Sozialisation des Kindes in eine gegebene Unterrichtskultur versteht (siehe Voigt 1994, S.78).

Erinnert sei hier an zwei fundamentale Konzepte im Rahmen der ‚individual-psychologischen Perspektive': ‚Subjektiver Erfahrungsbereich' (Bauersfeld 1983) und ‚Rahmung' (z.B Krummheuer 1984). In einem subjektiven Erfahrungsbereich ist Wissen fest an interaktiv bedeutsame Handlungen mit Dingen in einem individuellen Erfahrungskontext gebunden. „Die Lernenden (die ›Subjekte‹) machen in einem bestimmten Bereich Erfahrungen, z.B. indem sie Handlungen ausführen. In der sozialen Interaktion mit anderen … bekommen diese Handlungen für die Lernenden einen Sinn, sie erkennen, welche Bedeutung diese Handlungen haben. … diese Bedeutungen [sind] eng mit dem Veranschaulichungsmittel, dem Material und den Einstiegsbeispielen verbunden" (Hasemann 2003, S.50).

Ein Subjekt nimmt in einer sozialen Situation eine ‚Rahmung' als einen Sinngebungshorizont unmittelbar ein; es handelt sich um die individuelle Sichtweise einer Person, unter der sie eine Situation spontan deutet. Rahmungen werden selten bewusst eingenommen, sie werden meist aufgrund von bereits durchlebten und als ähnlich empfundenen Situationen durch die Interaktion aktiviert (z.B. Krummheuer 1984).

Es handelt sich hier um zwei Beispiele für theoretische Konzepte der interpretativen Forschung, in denen ‚Verstehen in der mathematischen Interaktion' letztlich als Konstruktion und Einordnung in einen (individuellen)

rationalen Konnex gesehen wird und nicht als ein ‚korrekter Output zu einem präzisen Input‘.
Im Rahmen der ‚kollektivistische Perspektive‘ gewinnen ‚Muster in der mathematischen Unterrichtsinteraktion‘ eine besondere Aufmerksamkeit. Die unterrichtliche Interaktion ist zu komplex, um sie insgesamt als Wechselwirkung von Variablen erschöpfend zu modellieren. Aber: „… das vermeintliche Chaos des Unterrichts … [kann sich]als relativ wohlgeordnetes Geschehen entpuppen. Hier wird Ordnung im Unterricht nicht verstanden als ein kontrolliertes Netz intervenierender Variablen, … sondern als eine Hervorbringung der Handelnden im Unterrichtsprozess. Die verdeckten Regularitäten, die Interaktionsmuster und Routinen erlauben den Beteiligten, sich geordnet zu verhalten…“ (Voigt 1984, S. 46).
Das ‚Trichtermuster‘ in Form der „Handlungsverengung durch Antworterwartung” (Bauersfeld 1978) zeigt beispielhaft, wie sich kommunikative Charakteristika im kleinschrittig fragend-entwickelnden Mathematikunterricht wechselweise herausbilden (siehe Bauersfeld 1978).
Ohne Muster und Routinen könnten alltägliche, soziale Situationen nicht bewältigt werden, sie sind unverzichtbar! Für ein bedeutungsvolles Schüler-Verstehen von Mathematik wirkt ein extremes (Trichter-) Muster jedoch häufig kontraproduktiv. „Der Lehrer … stellt eine Frage, obwohl er die Antwort schon weiß. Das ist im sozialen Alltag unüblich und, wenn es herauskommt, peinlich. In der Schule ist dies ein Standardverfahren der Kontrolle der Trivialisierung“ (Luhmann 2002b, S. 78).
Es stellt große Anforderungen, sich in der Interaktion einem Muster wie dem Trichtermuster so ohne weiteres zu entziehen. „Was geschieht …, wenn nichttriviale Systeme … der Trivialisierung ausgesetzt sind? Sie stellen sich durch Selbstsozialisation darauf ein. … sie lernen damit umzugehen. Sie bauen eine Reflexionsschleife ein, die ihnen Bedingungen verdeutlicht, unter denen es empfehlenswert ist, sich wie ein triviales System zu verhalten“ (Luhmann 2002b, S. 57).
‚Das Schülerverstehen von Mathematik‘ wird durch Interaktionsmuster (eventuell) auf das Hersagen der richtigen Antwort verengt und trivialisiert. Das Verstehen (von Kommunikationsmechanismen) durch die interpretativen Forscher vollzieht sich durch Konstruktion und Einordnung ihrer Beobachtungen in einen wissenschaftlichen, rationalen Konnex.

3. Mathematische Interaktionen: Epistemologische Umbrüche in der mathematischen Wissensentwicklung

Jahnke und Otte (1981, S. 77) konstatieren, dass Mathematik ‚theoretisches Wissen‘ ist und daraus Konsequenzen für die Mathematikdidaktik als Wissenschaft folgen: „… das didaktische Problem im tieferen Sinne, d.h. dass

man es ‚wissenschaftlich bearbeiten' muss, wird durch die Tatsache konstituiert, dass Begriffe ‚Beziehungen' widerspiegeln und keine ‚Dinge'".
Eine fundamentale Anforderung für das Mathematiklernen der Schüler und Schülerinnen besteht darin, semiotische Repräsentationen, Veranschaulichungen und Zeichen als Träger mathematischer ‚Beziehungen und Strukturen' zu verstehen. Zugleich steht die interpretative mathematische Forschung vor der Aufgabe das Verstehen von ‚unsichtbarem' mathematischen Wissen in der Interaktion theoriebasiert und konsistent zu rekonstruieren.
Mathematisches Wissen ist letztlich ‚unsichtbares' Wissen: „ ... es gibt einen fundamentalen Unterschied zwischen mathematischem Wissen und Wissen in anderen Wissenschaften … Wir haben keinen sinnlich wahrnehmbaren oder instrumentellen Zugang zu den mathematischen Untersuchungsobjekten … Der einzige Weg zu ihnen einen Zugang zu gewinnen ist, Zeichen, Worte oder Symbole, Ausdrücke oder Zeichnungen zu gebrauchen … Aber zugleich dürfen die mathematischen Objekte nicht mit den benutzten semiotischen Repräsentationen verwechselt werden. Diese widerstreitende Anforderung macht einen besonderen Aspekt mathematischen Wissens aus" (Duval 2000, S. 61).
Z.B. benötigt der arithmetische Begriff der Zahl 3 zur Codierung (z.B. 3) ein semiotisches Zeichen, das auf die ‚mathematische Drei' verweist, sie aber genau sowenig tatsächlich ist wie ihre Verkörperungen im Material.
Der Wechsel und die Spannung zwischen einer dinglich-konkreten und einer symbolisch-relationalen Deutung des mathematischen Wissen führt zu einem epistemologischen Grundproblem des Mathematiklernens: Der gemeinsame begriffliche Hintergrund und die gemeinsame Handlungspraxis – die eine Basis für Verstehen sind – unterliegen unerwarteten Umbrüchen und fundamentalen Änderungen in der mathematischen Wissensentwicklung! Was zu einem Zeitpunkt eine ‚selbstverständliche' Verstehensgrundlage war, kann später durch einen Wechsel zu neuen wesentlichen Strukturen und Beziehungen im Wissen nichtig werden und das Verstehen unmöglich machen.
Beispiele aus der elementaren Mathematik zu epistemologischen Umbrüchen sind etwa die ‚Null'. Für Schüler bedeutet die Null zunächst soviel wie Nichts. Später wechselt der Verstehenshintergrund: Die Null erhält eine symbolisch-relationale Bedeutung im Dezimalsystem: „0 ist ein Zeichen für die Abwesenheit eines Zeichens" (Rotman 1987). Die ‚negativen Zahlen' mit ihren Schwierigkeiten in der Geschichte und im Unterricht stellen ein weiteres Beispiel dar. Gibt es negative Zahlen? Wenn ja, auf welche Art und Weise gibt es sie? Als quasi-konkrete Schulden, oder als neue Beziehungen auf der Zahlengeraden z.B.? „… [man] blieb … einem ‚konkreten Standpunkt' verhaftet, d.h. man versuchte, den Zahlen und ihren Re-

chenoperationen irgendwie einen ‚konkreten Sinn‘ zu verleihen” (Hefendehl-Hebeker 1989, S.7).
Das interaktive Lernen von Mathematik kann als diskursives Wechselspiel von Vergegenständlichung und Strukturbildung gesehen werden. Diese Entwicklung kann bei Materialien, wie Plättchen, im Sinne von Dingen und realen Eigenschaften beginnen. Sie führt dann zu Beziehungen und Strukturen zwischen Dingen, z.B. Mustern von Plättchen. Teilstrukturen werden schließlich zu theoretischen Objekten, zwischen denen dann neue Beziehungen und Strukturen entstehen können. „… der theoretische Begriff … begnügt sich nicht damit, die Welt der Gegenstände zu überschauen …“ (Cassirer 1990, S. 333). Auch wenn Beziehungen den Kern mathematischen Wissens ausmachen, so sind konkrete, gegenständliche Repräsentationen reiner Beziehungen unvermeidbar. Cassirer spricht von einer „… halb-mythischen Hypostase reiner Funktions- und Beziehungsbegriffe…“ (Cassirer 1987, S. 76).

4. Mathematische Interaktionen: Die Rekonstruktion von Fällen mathematischer Interaktion als didaktische Theoriebildung

Interaktionsmuster und Routinen spielen sich im alltäglichen Mathematikunterricht ein, um Verstehen in der Unterrichtskommunikation zu ermöglichen. Epistemologische Umbrüche im ‚unsichtbaren‘ mathematischen Wissen können die Auflösung des gemeinsamen Begriffshintergrundes bewirken, worauf ein neuer, tragfähiger Verstehenshintergrund durch mathematische Verallgemeinerung und Strukturbildung entwickelt werden muss.
„… [die] Analyse … der Konstitution (mathematischer) Bedeutung zwischen Lehrer und Schülern … erfordert die Rekonstruktion der Bedingungen ihres Zustandekommens …“ (Bauersfeld 1982, S. 1/2). Diese Rekonstruktion erfolgt in der Ausarbeitung eines wissenschaftlichen Konnexes bzw. eines ‚theoretischen Konstrukts‘ in der interpretativen Forschung.
Zum didaktischen Forschungsthema ‚Mathematische Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern‘ hat Schülke (2013) in einer Studie ein solches theoretisches, mathematisches Konstrukt ausgearbeitet, welches die Bedingungen – unter interaktiver wir epistemologischer Perspektive – charakterisiert, unter denen in der Grundschule mathematische Reflexionsprozesse erfolgen können. Es handelt sich um Partnerinterviews mit je zwei Kindern einer jahrgangsgemischten Schuleingangsstufe, die wechselweise mathematische Deutungen zu Fragen aus produktiven Lernumgebungen reflektieren.
Insbesondere haben die Form der Kommunikation und die Epistemologie des infrage stehenden mathematischen Wissens zentrale Bedeutung für das theoretische Konstrukt. Die Kommunikation erfolgt im Rahmen von Part-

nerinterviews mit zwei Kindern in Form eines Wechsel-Gesprächs über Deutungen des je anderen Kindes. Die mathematische Reflexion wird als Konstruktion von neuen Beziehungen konzeptualisiert.
Weitere Beispiele für wissenschaftliche Studien, in denen theoretische Konstrukte der interpretativen Forschung ausgearbeitet wurden, sind zu finden in Fetzer (2007), Rezat (2009), Schacht (2011) und Söbbeke (2005).
Fallstudien der mathematikdidaktischen interpretativen Forschung sind nicht einfach detaillierte deskriptive Beschreibungen realer Interaktionsverläufe, sondern dienen durch Ausarbeitung theoretischer Konstrukte in grundlegender Weise der mathematikdidaktischen Theorieentwicklung.
In Anlehnung an das Zitat von Jahnke & Otte könnte man analog sagen: „… das Problem der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung im tieferen Sinne, d.h. dass man es wissenschaftlich bearbeiten muss, wird durch die Tatsache konstituiert, dass mathematische Interaktionen keine direkt durchschaubaren realen Geschehnisse sind, sondern von spezifischen Bedingungen des kommunikativen Verstehens und von auftretenden epistemologischen Brüchen im mathematischen Wissen beeinflusst werden“.

Literatur

Die vollständige Literaturliste kann beim Autor angefordert werden.

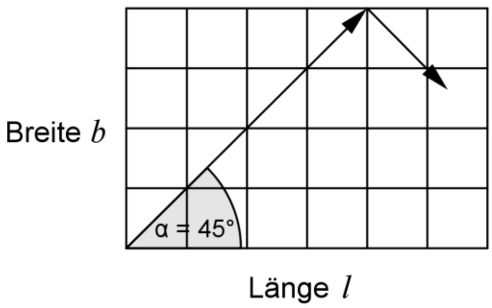
Teil 2: Einzelvorträge

Christoph ABLEITINGER, Wien

Eine selbstdifferenzierende Problemlöseaufgabe zum Thema Billard

1. Modellannahmen

Auch wenn es der Titel suggerieren mag, es handelt sich bei diesem Beitrag nicht um eine realitätsnahe Anwendungsaufgabe. Vielmehr steht eine innermathematische Problemlöseaufgabe im Zentrum der Betrachtungen (siehe auch Jacobs 1994). Der vorliegende Beitrag kann nicht zuletzt wegen des eingeschränkten Platzangebotes nur einen kleinen Ausschnitt aus dem Gesamtpotenzial der Aufgabe präsentieren, selbst didaktische und unterrichtspraktische Bemerkungen können nur ansatzweise angeführt werden. Eine umfassende Behandlung des Unterrichtsvorschlags ist allerdings in Ableitinger (2011) nachzulesen. Wir gehen von den untenstehenden Modellannahmen aus, die im Folgenden uneingeschränkt gelten sollen (wobei das Bild ohnehin schon fast alles sagt):



- Es geht um eine einzige, punktförmige Billardkugel.
- Der Tisch habe vier Ecktaschen, aber keine Mitteltaschen.
- Der Tisch ist rechteckig, Länge und Breite sind jeweils natürliche Zahlen.
- Der Billardstoß beginnt links unten im Winkel von 45°.
- Das Reflexionsgesetz gilt: Einfallswinkel = Ausfallswinkel.
- Die Kugel rollt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit.

2. Die zentrale Frage

Die Problemlöseaufgabe ist in wenigen Worten formuliert: „In welche der Ecktaschen fällt die Billardkugel bei einem Tisch der Länge l und der Breite b?“ Die Frage lässt sich natürlich auch konkreter stellen: „In welche Tasche fällt die Kugel bei einem Tisch der Länge 2803 und der Breite 2001?“

(So könnte die Frage zum Beispiel einem Schüler mit dem Geburtsdatum 28.03.2001 gestellt werden.)

Auf dem Weg zur Beantwortung dieser Frage stößt man unweigerlich auf viele andere spannende Entdeckungen. Will man diese möglichen Entdeckungen in den Fokus des Unterrichtsgeschehens stellen, so bietet sich auch ein offener Arbeitsauftrag an, der selbstdifferenzierenden Charakter hat: „Zeichne die folgenden Tische auf kariertes Papier und verfolge den Weg der Billardkugel! Was fällt dir auf? Formuliere entsprechende Vermutungen!“

Länge	*Breite*
9	3
5	5
8	6
7	5
8	4
10	2
9	6
10	4
etc.	etc.

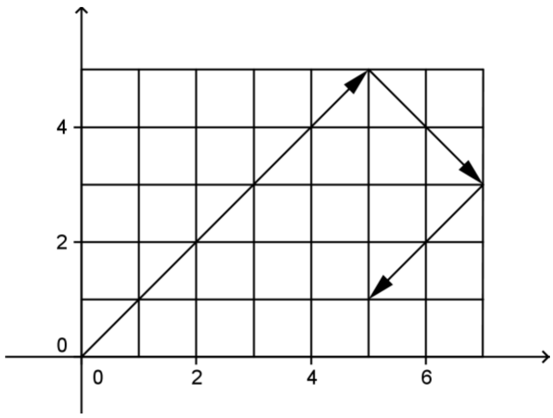
Viele der üblicherweise durch die Schüler/innen generierten Vermutungen lassen sich auf dem Niveau der Sekundarstufe I begründen. So z. B. folgende Aussagen, die auch zur Beantwortung der zentralen Frage von entscheidender Bedeutung sind (Begründungen finden Sie in Ableitinger 2011):

- Die Kugel fällt immer in eine der Taschen.
- Es gibt keinen Tisch, bei dem die Kugel in die linke untere Tasche fällt.
- „Ähnliche“ Tische (also solche mit gleichem Seitenverhältnis $l : b$) zeigen auch „ähnliche“ Kugelverläufe (also solche, die durch Zoomen auseinander hervorgehen).

3. Die entscheidende Lösungsidee - ein Koordinatensystem

Der Antwort auf „In welche Tasche fällt die Kugel bei einem Tisch der Länge l und der Breite b?“ lässt sich auf die Spur kommen, wenn man ein

Koordinatensystem so „unter“ den Tisch legt, dass der linke untere Eckpunkt des Tisches im Koordinatenursprung liegt:



Dabei kann nämlich die zielführende Beobachtung gemacht werden, dass die Kugel nur solche ganzzahligen Punkte des Koordinatensystems durchläuft, deren Koordinaten dieselbe Parität aufweisen (d.h. beide gerade bzw. beide ungerade). In obiger Grafik sind dies: (0|0), (1|1), (2|2), (3|3), (4|4), (5|5), (6|4), (7|3), (6|2), (5|1) usw. Eine Begründung könnte so lauten: In jedem Schritt ändert sich die horizontale und die vertikale Position der Kugel jeweils um 1. Nachdem die Kugel in (0|0) startet, müssen alle durchlaufenen Punkte Koordinaten mit derselben Parität haben.

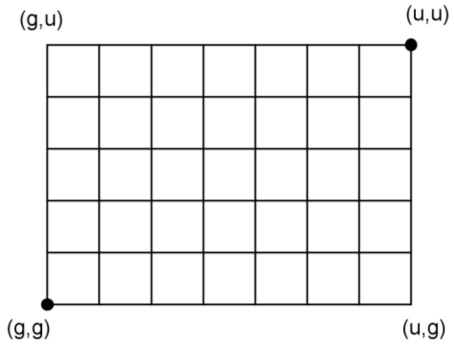
Je nach Länge und Breite des Tisches kommen also nur gewisse Ecktaschen überhaupt als Endstation für die Kugel in Frage.

4. Eine Kategorisierung der Tische und die Beantwortung der Frage

Die Tische können nun danach eingeteilt werden, ob sie gerade bzw. ungerade Länge und Breite haben:

Kategorie	*Länge*	*Breite*
I	ungerade	ungerade
II	ungerade	gerade
III	gerade	ungerade
IV	gerade	gerade

Exemplarisch untersuchen wir Kategorie I nicht zuletzt, um die Frage beantworten zu können, in welche Tasche die Kugel beim oben erwähnten „Geburtstagstisch“ mit der Länge 2803 und der Breite 2001 fällt. Die Situation sieht für einen Tisch der Kategorie I folgendermaßen aus:



In die rechte untere bzw. in die linke obere Tasche kann die Kugel gar nicht fallen die entsprechenden Punkte im Koordinatensystem haben Koordinaten mit unterschiedlicher Parität. Es kommen also nur noch die linke untere Tasche (in die die Kugel allerdings nie fällt) und die rechte obere Tasche in Frage. Und schon ist die Frage geklärt, in welcher Tasche die Kugel beim Geburtstagstisch landet! Die Kategorien II und III lassen sich ähnlich schnell abhandeln. Bei einem Tisch der Kategorie IV lohnt sich die Betrachtung des kleinsten, zum gegebenen Tisch ähnlichen Tisch (der dann wieder in einer der Kategorien I bis III liegen muss).

5. Bemerkungen zum Einsatz im Unterricht

Auch wenn im Rahmen dieses Kurzbeitrages nur einige Teilaspekte eines möglichen Unterrichtsprojektes skizziert werden konnten, so wurde schon das Potenzial sichtbar, das die Problemaufgabe im Unterricht entfalten kann. Inhaltlich passt die Bearbeitung gut in die elementare Zahlentheorie, die durch die Vernetzung mit ebener Koordinatengeometrie unterstützt wird. Auf der Handlungsebene wird vor allem der Einsatz heuristischer Problemlösestrategien gefordert, um einerseits Vermutungen generieren und diese andererseits auch begründen bzw. beweisen zu können. Was die Komplexität der Aufgabe betrifft, soll noch einmal betont werden, dass der Arbeitsauftrag prinzipiell so offen formuliert werden kann, dass die Aufgabenstellung selbstdifferenzierend wirkt. Jeder Lernende kann auf einem für ihn passenden Niveau arbeiten, Vermutungen selbst aufstellen und die ihn interessierenden genauer unter die Lupe nehmen.

Literatur

Ableitinger, Ch. (2011): Problemlösen am Billardtisch. In: Mathe vernetzt - Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Schriftenreihe des Arbeitskreises "Vernetzungen im Mathematikunterricht" der GDM, Band 1, S. 70-81.

Jacobs, H. R. (1994): Mathematics. A human endeavor. Third edition. New York: W. H. Freeman and Company.

Kay ACHMETLI, Kassel, Stanislaw SCHUKAJLOW, Paderborn, André KRUG, Paderborn

Bearbeitungsprozesse von Schülern zu Aufgaben mit multiplen mathematischen Lösungswegen

Theoretischer Hintergrund

Die Entwicklung multipler Lösungen gilt als Qualitätskriterium für einen kognitiv aktivierenden Unterricht, welches u.a. auch in den Bildungsstandards hervorgehoben wird. Die Bedeutung dieses Unterrichtelementes für Lernprozess und Leistungen kann durch konstruktivistisch orientierte Lerntheorien und Konzeptionen fundiert werden (Collins, Brown, & Newman, 1989). Eine Betrachtung des Lerninhalts aus verschiedenen Perspektiven ermöglicht es, die gewonnenen Repräsentationen miteinander zu verknüpfen (Spiro, Bruce, & Brewer, 1980). Dabei stellt die Flexibilität bei der Auswahl passender Lösungen und Repräsentationen einen Teil des Fachwissens und somit ein wichtiges Lernziel dar (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Darüber hinaus gibt es weitere theoriegeleitete Vermutungen (siehe Zusammenfassung bei Schukajlow & Blum, 2011), welche für die Behandlung von multiplen Lösungen sprechen.

Die wenigen bisherigen experimentellen Studien konnten Vorteile von Lernumgebungen aufzeigen, welche mehrere Lösungsmethoden zu einer innermathematischen Aufgabe behandeln und gegenüberstellen, im Vergleich zu Lernsettings, in denen die jeweilige Lösungsmethode nach einander und an verschiedenen Aufgaben behandelt wurden (Rittle-Johnson & Star, 2007). Als zentrales Ergebnis stellte sich das Vorwissen als wichtiger Prädiktor für positive Effekte bei der Behandlung von multiplen Lösungen heraus (Star & Rittle-Johnson, 2009). Damit übereinstimmend und weiterführend lassen sich die ersten Ergebnisse des DFG-Forschungsprojekts MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientiertem Mathematikunterricht) lesen. Es zeigten sich positive Wirkungen der Behandlung von multiplen Lösungen zu einer gegebenen Aufgabe auf Selbstregulation, Interesse und Präferenzen für die Bearbeitung von Aufgaben mit mehreren Lösungen im Vergleich zu einer Unterrichtsform, in der nur eine Lösung vermittelt wurde (Schukajlow & Krug, 2012, 2013).

In der aktuellen Projektphase werden solche Lösungen untersucht, die durch die Anwendung verschiedener mathematischer Verfahren beim Modellieren entwickelt werden können. Als Inhaltsbereich wurden „lineare Funktionen“ ausgewählt. Nach Krämer, Schukajlow und Blum (2012) lassen sich verschiedene Lösungswege beim Modellieren zu diesem Inhaltsbereich unterscheiden: Algebraisch/funktional, graphisch, exemplarisch, numerisch und inhaltlich. Im Projekt werden zwei dieser Lösungswege untersucht: erstens, der numerische Lösungsweg durch das Erstellen einer Zuordnungstabelle und dem Ablesen des exakten Schnittpunkts sowie von Bereichen, für eine korrekte Entscheidung. Zweitens, der inhaltliche Lösungsweg mittels Differenzenbildung, welcher durch die Nutzung realitätsbezogener Begriffe und Beziehungen entwickelt werden kann, ohne explizit auf Formalisierung zurückzugreifen. Bei der Anwendung des inhaltlichen Lösungsweges soll im Lösungsprozess ein mehrfacher Wechsel zwischen der Realität und der Mathematik erfolgen, welcher einen tieferen Einblick in Modellierungsprozesse ermöglichen kann. Während der inhaltliche Lösungsweg der Differenzenbildung besonders erfolgsversprechend erscheint und zudem wenig erforscht ist, stellt die Tabelle für die Schüler einen bereits bekannten Lösungsweg dar (Krämer et al., 2012).

Forschungsfragen und Methode der Studie

Da man nicht davon ausgehen kann, dass Lernende es gewohnt sind, mehrere Lösungswege im Unterricht zu besprechen bzw. selbst zu erstellen (Baumert & Lehmann, 1997), erschien eine Instruktion für die Untersuchung der Bearbeitung von Aufgaben mit multiplen Lösungen notwendig. Durch die Instruktion konnten die Lösungswege standardisiert vermittelt werden und es wurde die Möglichkeit geschaffen, den innovativen inhaltlichen Lösungsweg der Differenzenbildung zu untersuchen. Hierfür wurde ein Instruktionsvideo erstellt, dessen Inhalte aus Lerntheorien hergeleitet und mehrfach pilotiert wurden.

Für die Untersuchung ist folgende Forschungsfrage zentral:

- Wie bearbeiten und adaptieren Schüler Modellierungsaufgaben mit der Möglichkeit, multiple mathematische Lösungswege zu erstellen, nach einer standardisierten Instruktion?

An der Untersuchung haben insgesamt 12 Realschüler der Jahrgangsstufe 8 teilgenommen. Es wurden sechs – in sich leistungshomogene – Schülerpaare verschiedener Leistungsniveaus gebildet, die vier Modellierungsaufgaben mit zwei verschiedenen Lösungswegen bearbeiten sollten. Es handelt sich um Aufgaben, bei denen zwei Angebote miteinander verglichen werden und die Entscheidung gefällt werden soll, wann sich welches Angebot lohnt. Bei zwei dieser Aufgaben ist der exakte Schnittpunkt ganzzahlig und bei zwei weiteren nicht ganzzahlig.

Die Untersuchung bestand aus einer Instruktions-, Bearbeitungs- und Interviewphase. Das Interview wurde mit Hilfe der Methode „stimulated recall“ durchgeführt (Kagan, Krathwohl, & Miller, 1963).

Ergebnisse und Diskussion

Das erste Ergebnis der Studie besteht darin, dass alle Schülerpaare die angebotenen Aufgaben mit jeweils zwei verschiedenen Lösungswegen bearbeiten konnten, wie es bei der Entwicklung der Instruktion intendiert wurde. Dies deutet auf eine gute Qualität der Instruktion hin. Die Analyse der Schülerlösungsprozesse zeigt, dass Lernende bei der Lösungsproduktion zunächst ähnlich wie im Instruktionsvideo vorgegangen sind. Im Verlauf des Bearbeitungsprozesses lösen sich die Schüler vom präsentierten Vorgehen ab und vertauschen die Reihenfolge der Lösungswege.

Mit Hilfe der inhaltlichen Lösung der Differenzenbildung konnten alle Schüler das mathematisch exakte Resultat bestimmen. Bei dieser Lösung fällt zudem auf, dass mehrfach falsche Maßeinheiten dem ermittelten mathematischen Resultat zugeordnet wurden. Dies lässt vermuten, dass die Schüler beim Erstellen des inhaltlichen Lösungsweges seltener als vermutet zwischen Realität und der Mathematik wechseln. Des Weiteren wurde im Interview deutlich, dass es den Schüler schwer fällt, ihr mathematisches Resultat zu interpretieren, wenn sie als Grundlage nur den inhaltlichen Lösungsweg benutzen dürfen.

Fast allen Schülern gelingt es, bei den Aufgaben mit ganzzahligem Schnittpunkt, eine adäquate Zuordnungstabelle aufzustellen, das exakte Resultat zu bestimmen sowie auf Grundlage mehrerer Zwischenergebnisse und korrekter Interpretation einen richtigen Antwortsatz zu formulieren.

Bei Aufgaben mit nicht ganzzahligem Schnittpunkt fällt es Schülern schwer, den Schnittpunkt zu berechnen, da sie dazu tendieren, mit der Tabelle ein exaktes Resultat erzielen zu wollen. Gelingt dies ihnen innerhalb einer begrenzten Zeitspanne nicht, unterbrechen die Lernenden die Bearbeitung des numerischen Lösungsweges und gehen dazu über, mit dem inhaltlichen Lösungsweg den exakten Schnittpunkt zu bestimmen. Anschließend setzen sie diesen in die Tabelle ein und formulieren einen Antwortsatz. Durch den fehlenden Wechsel zwischen der Realität und der Mathematik wird der inhaltliche Lösungsweg lediglich als Schema verwendet, das der Optimierung des numerischen Lösungswegs dient.

Die Schüler adaptieren den numerischen Lösungsweg teilweise so, dass sie einen Bezug zur Realität bei der Annäherung an den exakten Schnittpunkts herstellen. Dabei gehen Überlegungen der Differenzenbildung ein, um den Prozess der Annäherung zu beschleunigen. Auch nach der Ermittlung exakten mathematischen Resultats wird die Tabelle von den Schülern genutzt, um weitere Werte zu berechnen und die Formulierung des Antwortsatzes zu erleichtern.

Die Ergebnisse lassen vermuten, dass Schüler einzelne Vorteile der Lösungswege benutzen, um einen neuen Lösungsweg zu erstellen. Für den weiteren Verlauf des Projekts erscheint es notwendig, Lernenden Verbindungen und Optimierungsmöglichkeiten der beiden Lösungswege aufzuzeigen.

Literaturverzeichnis

Baumert, J., & Lehmann, R. (1997). TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), Knowing, learning and instruction: essays in honor of Robert Glaser (S. 453–492). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 41(5), 535–540.

Kagan, N., Krathwohl, D. R., & Miller, R. (1963). Stimulated recall in therapy using video tape: A case study. Journal of Counseling Psychology, 10(3), 237–243.

Krämer, J., Schukajlow, S., & Blum, W. (2012). Bearbeitungsmuster von Schülern bei der Lösung von Modellierungsaufgaben zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen. Mathematica Didactica, 35, 50–72.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?: An experimental study on learning to solve equations. Journal of Educational Psychology, 99(3), 561–574.

Schukajlow, S., & Blum, W. (2011). Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser, & P. Bender (Eds.), Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung - Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der empirischen Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens (S. 249–267). Münster: LIT Verlag.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2012). Effects of treating multiple solutions on students' self-regulation, self-efficacy and value. In Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (S. 59–66). Taipei, Taiwan: PME.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013). Uncertanty orientation, preferences for solving tasks with multiple solutions and modelling. In

Spiro, R., Bruce, B., & Brewer, W. (Eds.). (1980). Theoretical issues in reading comprehension. NJ: Hillsdale.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. Journal of Experimental Child Psychology, 102(4), 408–426.

Kathrin AKINWUNMI, Dortmund

Mathematische Muster verallgemeinern in der Grundschule

1. Über mathematische Muster kommunizieren

Die Ansicht, dass das Entdecken, Beschreiben und Begründen (sowie auch das Entwickeln, Weiterentwickeln und Nutzen) mathematischer Muster und Strukturen ein fester Bestandteil eines jeden Mathematikunterrichts sein sollte, hat sich in der Mathematikdidaktik bereits fest etabliert und in zunehmendem Maße auch Einzug in die Praxis des Mathematikunterrichts gehalten. Auf der Grundlage eines Verständnisses der Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern (Devlin 2003) ist die aktive Auseinandersetzung mit Mustern ein zentrales Element des Unterrichts für alle Stufen und Gebiete vom Kindergarten bis zur Hochschule geworden (Wittmann & Müller 2008).

Wenn Lernende im Unterricht über ihre entdeckten oder auch selbst entwickelten Muster sprechen möchten, so stehen sie vor der Anforderung, über etwas sehr mathematikspezifisches zu kommunizieren – über Regelmäßigkeiten, Strukturen und Beziehungen, die einen allgemeinen Charakter besitzen, der über die gegebenen oder sichtbaren Objekte hinausgeht (Steinbring 2005). Für diese anspruchsvolle Aufgabe stehen Mathematikerinnen und Mathematikern algebraische Ausdrücke wie Variablen, Terme oder Gleichungen zur Verfügung, mit deren Hilfe sie die Sachverhalte auf allgemeiner Ebene erforschen und auch darstellen können (Malle 1993). Da Grundschulkinder jedoch noch keine Kenntnisse von Variablen besitzen, um mathematische Muster zu beschreiben, stehen sie vor der schwierigen Anforderung, mit den ihnen verfügbaren Mitteln das Allgemeine im Besonderen beschreiben zu müssen (Steinbring 2005). Diese Tätigkeit des Verallgemeinerns mathematischer Muster durchzieht als grundlegende Tätigkeit den gesamten Mathematikunterricht, in dessen Zentrum die Beschäftigung mit Mustern und Strukturen steht.

Im Folgenden werden Ergebnisse eines Dissertationsprojekts (Akinwunmi 2012) dargestellt, welches Verallgemeinerungsprozesse im Rahmen von 30 klinischen Interviews untersuchte. In diesen wurden Lernenden der vierten Jahrgangsstufe Aufgaben zur Entdeckung und Beschreibung mathematischer Muster vorgelegt. Mit Hilfe Steinbrings Theorie zur Konstruktion mathematischen Wissens (Steinbring 2005) wurden die Verallgemeinerungen der Lernenden aus epistemologischer Perspektive in den Blick genommen. Der vorliegende Beitrag fokussiert im Folgenden auf die Darstellung der sprachlichen Mittel, welche die Lernenden beim Verallgemeinern mathematischer Muster nutzen und welche in den Beschreibungen die Rolle von Variablen und Termen einnehmen.

2. Verallgemeinerungsweisen

In der Analyse der Untersuchungsdaten zeigt sich, dass Kinder bei der Verallgemeinerung wiederkehrende Beschreibungsmuster verwenden. So werden im Folgenden fünf Kategorien für Verallgemeinerungsweisen vorgestellt, welche sich in den klinischen Interviews als von den Lernenden selbstständig verwendete Beschreibungsmuster finden lassen. Sie zeigen auf, welche sprachlichen Mittel die Kinder nutzen, um mathematische Muster und Strukturen über die sichtbaren Objekte hinweg zu beschreiben.

Angabe eines repräsentativen Beispiels
Lernende geben ein Beispiel an und kennzeichnen dieses explizit als solches.

Ich kann die Anzahl der Plättchen herausfinden, weil ich z.B. bei 100 100+101 rechne.

Die Kennzeichnung eines Beispiels als solches zeigt auf, dass es noch andere Fälle bzw. Objekte gibt, die durch das gegebene Beispiel nicht dargestellt werden, aber existieren. Es wird vom Gegenüber, dem Empfänger der Aussage, gefordert, dass er das konkrete Beispiel der Aussage erkennen und auf andere Fälle als die des gegebenen Beispiels beziehen kann.

Aufzählung mehrerer Beispiele
Lernende zählen mehrere Beispiele auf und verweisen gegebenenfalls auf einen Fortlauf.

Ich rechne: $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, . . .

Durch die Angabe von generischen Beispielen ist es möglich, nicht nur die Existenz weiterer Fälle, sondern ebenfalls eine Beziehung der angegebenen Beispiele untereinander anzudeuten. So wird beispielweise vom Gegenüber erwartet, dass dieser den Abstand der auftretenden Fälle rekonstruiert und in der Lage ist, die Folge der generischen Beispiele fortzusetzen. Die Fortsetzbarkeit der Beispielfolge wird von den Kindern teilweise beschrieben, teilweise auch nicht erwähnt.

Quasi-Variablen
Lernende verwenden konkrete Zahlen und verbinden diese mit sprachlich verallgemeinernden Elementen.

„Ich rechne immer dreimal drei."

Es kann beobachtet werden, dass Kinder konkrete Zahlen mit sprachlich verallgemeinernden Mitteln verwenden, um allgemeine Sachverhalte zu beschreiben. Die konkreten Zahlen stehen ohne Angabe eines Beispiels dabei aber nicht nur für die gewählten Zahlen, sondern sind als Platzhalter zu verstehen.

Bedingungssätze
Lernende verwenden Bedingungssätze.

„Wenn da drei steht,
dann rechne ich dreimal drei.“

Bedingungssätze ermöglichen es, sich zunächst auf einen konkreten Fall zu beziehen und dabei direkt andere mögliche Fälle im Blick zu behalten. Es wird zwar nur ein Fall unter der angegebenen Bedingung beschrieben, jedoch wird vom Gegenüber gefordert, dass er zwischen den konkreten Elementen, welche die Bedingung betreffen, und allgemeinen Elementen unterscheidet, welche über die gegebene Bedingung hinweg allgemein gelten sollen.

Variablen
Lernende verwenden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter.

Die zahl die dar steht
must du + 1 Rechnen und
dann noch mal + die eigene zahl.

Eine weitere Verallgemeinerungsmöglichkeit stellt die spontane Verwendung von Zeichen mit Variablencharakter dar, bei der die Lernenden auf Wörter (wie hier die Beschreibung für den Term (n+1)+n) oder Symbolen wie „?·?“ aus verschiedenen Kontexten zurückgreifen.

Die hier vorgestellten Kategorien stellen in der Untersuchung vorgefundene *Möglichkeiten* der Kinder *für Verallgemeinerungen* dar. Diese dürfen dabei nur auf einzelne Phasen eines Beschreibungsprozesses bezogen verstanden werden, nicht als Kompetenzen der Kinder. Sie werden je nach Komplexität des zu beschreibenden Gegenstandes, des in der Situation herangezogenen Referenzkontextes und der den Kindern spontan zur Verfügung stehenden sprachlichen Mittel ausgewählt und können von ein und demselben Kind nacheinander oder auch während eines Beschreibungsprozesses in wechselnder Form verwendet werden.

3. Fazit

Im Mathematikunterricht dienen Verallgemeinerungen verschiedenen Zielen. Vor diesem Hintergrund werden die hier dargestellten Verallgemeinerungsweisen abschließend betrachtet.

Ziel 1: Mit Verallgemeinerungen werden allgemeingültige Aussagen formuliert, das heißt eine Beschreibung gilt für alle Objekte des Musters bzw. von gleicher Struktur. Hinsichtlich dieses Kriteriums weisen die ersten vier Verallgemeinerungsweisen Grenzen auf. Sie treffen meist nur Aussagen für ein konkretes Beispiel oder unter einer speziellen Bedingung und verweisen nur darauf, dass es noch andere Fälle gibt, auf welche die getroffene

Aussage bezogen und verändert werden muss. Unter den vorgefundenen Verallgemeinerungsweisen kann nur die Verwendung von Wörtern und Zeichen mit Variablencharakter dem oben genannten Anspruch genügen, allgemeingültige Aussagen zu treffen. Der Grund hierfür liegt in der besonderen Funktion der Variablen als Unbestimmten oder Veränderlichen, mit Hilfe eines Zeichens auf mehrere Objekte, gleichzeitig oder in einer zeitlichen Abfolge, zu verweisen.

Ziel 2: Die Beschreibung verdeutlicht den allgemeinen Charakter des Musters, dient also dem ‚Allgemein-verstanden-Werden' in der Interaktion. Wenn Lernende ihre Erkenntnisse zu Mustern und Strukturen mitteilen möchten, dann müssen sie eine Möglichkeit finden, das Muster so zu beschreiben, dass ihren Kommunikationspartnern deutlich wird, dass sie sich nicht nur auf ein konkretes Objekt beziehen, sondern auf die den Objekten aufgeprägte Struktur verweisen. Aus diesem Blickwinkel stellen alle fünf Verallgemeinerungsweisen Möglichkeiten dar, um über Muster und Strukturen zu kommunizieren und deren allgemeinen Charakter zu verdeutlichen. Bei allen Verallgemeinerungsweisen wird der Kommunikationspartner aufgefordert, die Beschreibung über ein oder mehrere konkrete Beispiele hinaus zu verstehen.

Während dem Ziel der allgemeingültigen Beschreibung nur die Verwendung von Wörtern oder Zeichen mit Variablencharakter genügen kann, sind alle Verallgemeinerungsweisen dazu geeignet, den allgemeinen Charakter der Muster zu verdeutlichen und so ein ‚Allgemein-verstanden-Werden' in der Interaktion zu ermöglichen. Bei Verallgemeinerungen steht die Verständigung in der Interaktion im Mittelpunkt des Interesses der Lernenden. Mit den dargestellten Verallgemeinerungsweisen gelingt es ihnen, mit ihren sprachlichen Mitteln das Allgemeine im Besonderen zu beschreiben.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012): Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Devlin, K. (2003): Das Mathe-Gen. Wie sich das mathematische Denken entwickelt und warum Sie Zahlen ruhig vergessen können. München: dtv.

Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G.N. (2008): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.* Berlin: Cornelsen Scriptor, 40-63.

Natascha ALBERSMANN, Wuppertal

Eltern-Kind-Interaktion im Rahmen einer mathematischen Entdeckungsreise – Einblicke in das Projekt „Familien Erleben Mathematik“

Innerhalb dieses Beitrags wird das Projekt „Familien Erleben Mathematik“ vorgestellt, das sich zur Aufgabe gemacht hat, Eltern von Schülern des frühen Sekundarbereichs aktiver in die mathematische Bildung ihrer Kinder einzubeziehen. Dies geschieht im Rahmen von drei Workshops, an denen Eltern gemeinsam mit ihren Kindern mathematische Problemstellungen erkunden und entdecken. Da sich das Projekt zur Zeit in der Pilotierungsphase befindet, werden an dieser Stelle anhand erster Ergebnisse besondere Chancen und Schwierigkeiten eines solchen Projekt speziell in Bezug auf die Eltern-Kind-Interaktion dargestellt und diskutiert.

1. Rolle der Eltern in der mathematischen Bildung ihrer Kinder

Trotz einer Empfehlung der Kultusministerkonferenz (2009) Eltern zu ermutigen und zu befähigen, ihre Kinder in ihrer mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung zu unterstützen, werden Eltern in Deutschland in Bezug auf Mathematik und insbesondere im Sekundarbereich bisher nur wenig aktiviert oder integriert.

Eltern übernehmen allerdings eine wichtige Rolle in der Bildungsentwicklung ihrer Kinder und so auch im mathematischen Bildungsprozess. Ihre Einflussnahme beläuft sich dabei sowohl auf die Entwicklung von Wissen und Fertigkeiten, als auch auf das Gefühl von Selbstwirksamkeit auf Seiten ihrer Kinder (Hoover-Dempsey & Sandler, 1995). Der Einfluss hängt jedoch von verschiedenen Faktoren ab, wie zum Beispiel die Art und Weise der Hilfestellungen die Eltern ihren Kindern bieten. Eltern, die ihre Kinder in einer Lernsituation beispielsweise fragen, welche Ideen sie haben oder wie sie an ein Problem herangehen würden, anstatt direkte Handlungsanweisungen zu geben oder die vermeintlich eine richtige Antwort zu erfragen, werden komplexere kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie ein tieferes Verständnis von Mathematik bei ihren Kindern fördern (Hoover-Dempsey & Sandler, 1995). Das Ausmaß elterlicher Mitwirkung wird ebenso bedingt von den Einstellungen und Erfahrungen, die Eltern zur Schule und im Speziellen zur Mathematik besitzen oder ihrem Kompetenzgefühl, nicht nur allein in Bezug auf Mathematik, sondern vielmehr in Bezug auf ihre Fähigkeiten ihr Kind bei mathematischen Problemen zu unterstützen (Eccles & Harold, 1996). Angesichts der Diversität elterlichen Einflusses lässt sich festhalten, dass die Beteiligung von Eltern in der mathematischen Bildung ihrer Kinder zwar keinen Bildungserfolg garantiert, die Abwesenheit oder auch nicht Beachtung aber vielfältige Möglichkeiten zerstört.

2. Das Projekt „Familien Erleben Mathematik“

Eine Leitidee des Projektes bildet das forschend-entdeckende Lernen. Eltern begeben sich gemeinsam mit ihren Kindern auf eine mathematische Entdeckungsreise und schlüpfen in die Rolle von Forschern, bereit das nächste Problem gemeinsam als Team zu er. Dabei wird Eltern und Kindern eine authentische Begegnung mit Mathematik ermöglicht werden.

Das Thema des ersten Workshops wird durch die folgende Problemstellung eingeleitet: Harry übt seinen Job als Zeitungszusteller leidenschaftlich gerne aus. Allerdings ärgert ihn eine Sache. Er braucht für seine wöchentliche Tour durch den Zustellbezirk (rechts) einfach viel zu lange.

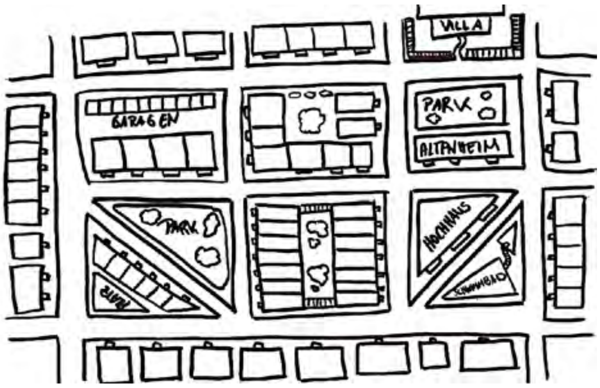


Abb. Arbeitsmaterial des Workshops

Da die Routensuche vom einfachen Ausprobieren, über eine systematischere Suche, hin zur Formulierung einer mathematischen Vermutung führen kann, ist dieses Thema besonders geeignet für ein selbstständiges Entdecken und Erforschen. Sowohl auf inhaltlicher Ebene als auch durch die möglichen Herangehensweisen werden authentische Begegnungen mit Mathematik ermöglicht (Lutz-Westphal, 2006).

Auf methodischer Seite dient das Konzept „Ich-Du-Wir“ aus dem Bereich des kooperativen Lernens (Sharan, 1994) zur Unterstützung der Kommunikation und damit Kooperation zwischen Eltern und Kindern.

3. Methodisches Vorgehen

Das Projekt startete im Schuljahr 2012/13 mit Eltern und Kindern der fünften Klassen eines Kölner Gymnasiums. Alle Eltern und Fünftklässler konnten sich auf freiwilliger Basis zur Teilnahme anmelden. Am ersten Workshop beteiligten sich letztendlich 22 Familien, darunter 17 Mütter und 10 Väter, zwischen 36 und 52 Jahren, sowie 22 Kinder. Die beteiligten Familien entstammen eher hohen sozio-ökonomischen Bedingungen.

Zur Evaluation der Workshops werden nach jedem Workshop von Eltern und Kindern Reisetagebücher ausgefüllt, in welchen sie angeleitet durch reflexive Fragen dazu angeregt werden, über die gemachten Erfahrungen und Erlebnisse während des Workshops nachzudenken und diese auszuformulieren (Gallin & Ruf, 1999).

Die Reisetagebücher wurden qualitativ ausgewertet. Dabei wurden die Elternäußerungen unabhängig voneinander analysiert, signifikante Aspekte wurden identifiziert und durch anschließenden Vergleich und Diskussion wurden Kategorien erstellt. Der Fokus dieses Beitrags liegt auf der Kategorie des Erlebnisses der Eltern-Kind-Interaktion auf Seiten der Eltern.

4. Ergebnisse und Diskussion

Im Folgenden werden die einzelnen Elternteile mit V für Vater, M für Mutter, K für Kind und einer Nummer für die Familie benannt.

Äußerungen von Eltern zur Eltern-Kind-Interaktion ließen sich an verschiedenen Stellen der Reisetagebücher finden. In 16 Fällen der 27 Fälle können die Aussagen als positiv gewertet werden, drei Eltern äußerten den Wunsch nach einer stärkeren Kooperation mit ihrem Kind, eine Elternaussage konnte nicht eindeutig charakterisiert werden und in sieben Fällen wurde gar nicht auf die Zusammenarbeit mit den Kindern eingegangen.

Nicht nur Eltern, sondern in vereinzelten Fällen betonten auch Kinder ein positives Empfinden der Zusammenarbeit mit ihren Eltern.

> „Ich fand das gut das man sozusagen eine Chance hat mit einem Elternteil oder mit den Eltern was zu lernen.“ (K17)

Beispielhaft werden nun folgend einige Elternkommentare aufgeführt, welche über das positive Erlebnis hinaus besondere Aspekte der Eltern-Kind-Interaktion hervorheben.

Die Möglichkeit gemeinsam mathematische Erfahrungen zu sammeln wird durch die Workshops insbesondere in einem Umfeld frei von Leistungsdruck, Schulstress und damit verbundenen Spannungen ermöglicht.

> „Mal weg von den Mathe-Hausaufgaben Problemen zu „freiwilligem“ Lernen und annähern an Mathematik. […] Es war kein „Schuldruck wie wahrscheinlich sonst vorhaben.“ (V11)

Unter diesen Voraussetzungen eröffnet sich die besondere Chance für Eltern und Kinder, durch die Arbeit im Workshop ein positives Kompetenzgefühl in Bezug auf Mathematik zu gewinnen.

> „Mein Kind hat super mitgemacht und war fitter als ich. Sie hatte Erfolg und das tat ihr gut. Bei sonstigen Mathethemen eskaliert es ansonsten leider häufig beim gemeinsamen Lernen.“ (M20)

Ein weiterer Aspekt, der durch die Reisetagebücher deutlich wird, ist, dass einige Eltern innerhalb des Workshops nicht die typische Rolle des „Wissensvermittlers“ oder des „Regisseurs der Lernhandlungen“ übernehmen, sondern vielmehr zum Lernpartner auf Augenhöhe werden.

> „Phasenweise war die Zusammenarbeit gut, wenn wir der Lösung näher gekommen sind und jeder den anderen als gleichwertigen „Ideengeber“/ „Partner“ respektiert hat.“ (M20)

Eine Voraussetzung dafür ist, dass das mathematische Problem und die Thematik des Workshops unbekannt sowohl für die Eltern, als auch für die Kinder sind und somit jeder ähnliche Voraussetzungen zur Erkundung des Problems mitbringt.

Wie zu Beginn erwähnt, äußerten einige Eltern auch den Wunsch nach stärkerer Kooperation mit ihrem Kind. Das Workshopkonzept konnte somit zwar nicht in jedem Fall die Kooperation zwischen Eltern und Kindern fördern. Derartige Wünsche betonen aber zugleich die Tatsache, dass es grundsätzlich einen Bedarf an solchen gemeinsamen Erfahrungen gibt.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse haben vielfältige Chancen, aber auch noch einige Schwierigkeiten eines solchen Projektes auf Ebene der Eltern-Kind-Interaktion aufgezeigt. Da sich das Projekt zur Zeit noch in der Pilotierungsphase befindet, sind die weiteren Ziele, die noch anstehenden Workshops zu entwickeln, im Verlauf der Durchführung zu evaluieren und anzupassen. Insbesondere wird es dabei darum gehen, durch methodische Umstrukturierungen Eltern-Kind-Interaktionen weiter zu unterstützen und zu fördern.

6. Literatur

Eccles, J. & Harold, R. (1996). Family involvement in children’s and adolescents’ schooling. In: A. Booth & J. F. Dunn (Eds.), Family-school links: How do they affect education outcomes? Mahwah, NJ: Erlbaum. 35-44

Gallin, P., Ruf, U. (1999): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 2: Spuren legen, Spuren lesen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik. Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH

Hoover-Dempsey, K., & Sandler, H.M. (1995): Parental involvement in children’s education:Why does it make a difference? In: Teachers College Record, *95*, 310–331.

Kultusministerkonferenz (2009): Empfehlung zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung, Beschluss. 07.05.2009.

Lutz-Westphal, B. (2006): Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht. TU Berlin

Sharan, S. (Ed.) (1994). Handbook of Cooperative Learning Methods. Westport, CT: Greenwood Press.

Judith AMES, Landau

Musterfolgeaktivitäten für GrundschülerInnen und Studierende

Mathematisches Tun hängt eng mit dem Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen zusammen. So schreibt beispielsweise Timo Leuders: „Die Geometrie beschäftigt sich mit den Strukturen der Form und des Maßes. Die Logik thematisiert die Strukturen des Schließens. Und als Arithmetik bezeichnen wir das Teilgebiet der Mathematik, das die Strukturen in den natürlichen Zahlen erforscht.“ (Leuders, 2010, S. 7)

Anlass der Untersuchung und Fragestellungen

Die Auffassung von Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen findet sich auch in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich in der Formulierung der Leitidee „Muster und Strukturen“ wieder. Schülerinnen und Schüler sollen unter anderem „Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z.B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen [können]“ (KMK 2005, S. 10). Deutlich wird, dass hier inhaltlich sowohl die Arithmetik als auch die Geometrie angesprochen werden. Der Mathematikunterricht der Grundschule wird in den Bildungsstandards nicht mehr klassisch in die Bereiche Arithmetik, Geometrie und Sachrechnen unterteilt. In der Ausbildung von Studierenden für das Lehramt Primarstufe werden Lehrveranstaltungen jedoch nach wie vor häufig genau so unterteilt. Übergreifende Muster und Strukturen werden von Studierenden dabei nicht immer bewusst wahrgenommen.

Mustererkennungs- und Strukturierungsfähigkeiten von Grundschulkindern sind mittlerweile stärker in den Fokus mathematikdidaktischer Forschung gerückt. Miriam Lüken untersuchte und bestätigte beispielsweise den Einfluss von Kompetenzen bezüglich Mustern und Strukturen auf das Rechnenlernen und zeigt, dass ein kompetenter Umgang mit Mustern und Strukturen eine wichtige Basiskompetenz ist. (vgl. Lüken, 2012)

Untersuchungen zu (elementaren) Mustererkennungs- und Strukturierungsfähigkeiten von Studierenden sind noch rar. Inwiefern sind zum Beispiel Studierende in der Lage, die oben genannte Forderung in den Bildungsstandards zu erfüllen?

Im Folgenden möchte ich einen schriftlichen Test vorstellen, der mit Studierenden für das Lehramt Primarstufe durchgeführt wurde. Damit soll untersucht werden, wie Studierende die Struktur einer vorgegebenen Musterfolge beschreiben und wie sie diese fortsetzen.

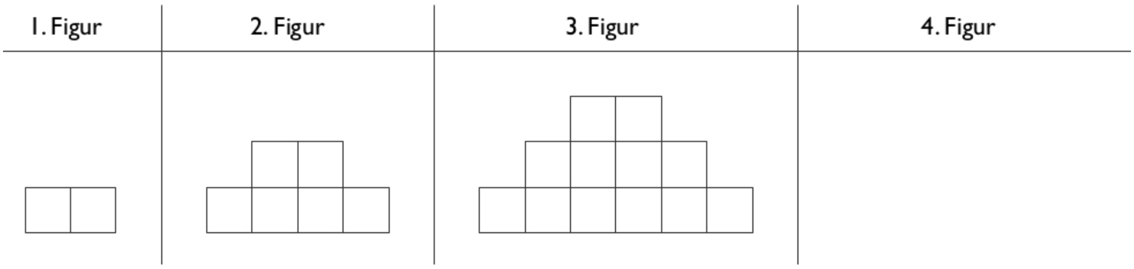
Die Auswertung des Tests ist von folgenden Fragen geleitet:

- Welche Muster und Strukturen werden wahrgenommen und beschrieben?
- Wie lassen sich Strukturierungen erkennen?
- Welche Aufgabenstellungen bewirken einen Wechsel der Strukturierung?
- Welche Rolle spielt mathematisch-formale Sprache?

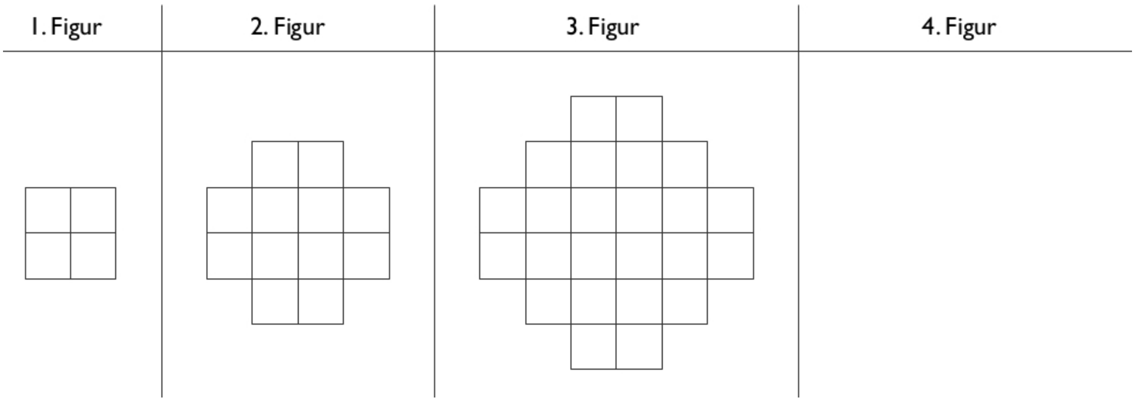
Methodisches Vorgehen und Testbeschreibung

Der Test wurde mit 308 Studierenden in zwei verschiedenen Lehrveranstaltungen durchgeführt. Die Studierenden wurden aufgefordert, drei vorgegebene Figuren (figurierte Zahlen) zeichnerisch fortzusetzen und ihre Art der Strukturierung in Textform und arithmetisch durch Terme zu beschreiben, die die Anzahl der Kästchen pro Figuren erkennen lassen. Eingesetzt wurden zwei verschiedene Musterfolgen.

Musterfolge a:



Musterfolge b:



An der Untersuchung nahmen sowohl Studierende im Bachelorstudiengang als auch Studierende im Masterstudiengang für das Lehramt Primarstufe teil. Sie wurde anonym durchgeführt. Es wurde lediglich das Geschlecht der teilnehmenden Studierenden und die Selbsteinschätzung ihrer Mathematikkenntnisse erfasst und erfragt, ob sie Mathematik als Haupt- oder Pflichtfach studieren.

Testauswertung und erste Schlussfolgerungen

Auch wenn drei vorgegebene Figuren mathematisch noch keine Folge definieren, so wurde die im Test angedeutete Musterfolge von den Studierenden allergrößtenteils trotzdem in der intendierten Form aufgefasst und entsprechend fortgesetzt.

Die von den Studierenden in Textform beschriebenen Möglichkeiten, wie man aus der dritten Figur die vierte Figur erhalten kann, lassen sich bei beiden Musterfolgen im Wesentlichen in einige wenige Kategorien einteilen. Die Vielfalt der notierten arithmetischen Terme bis zur vierten Figur, die aus Sicht der Studierenden die Anzahlbestimmung der Kästchen pro Figur beschreiben, ist dagegen sehr viel größer. Aus mathematischer Sicht sind beide Beschreibungen zudem nicht immer strukturgleich, lassen daher an dieser Stelle keine Rückschlüsse auf die Art und Weise der Strukturierung durch die Studierenden zu. Fügt eine Person in Musterfolge a an die dritte Figur beispielsweise unten eine weitere Zeile hinzu, um die vierte Figur zu erhalten, so findet sich in der arithmetischen Beschreibung deswegen nicht notwendigerweise ein Term „+8 (Kästchen)“, der die Anzahl der hinzugekommenen Kästchen repräsentieren würde.

Stellten die Studierenden Terme mittels Variablen dar, begünstigte dies nur in seltenen Fällen eine korrekte verallgemeinernde Aussage über die Anzahl der Kästchen pro Figur.

Die visuelle Darstellung wurde in den allermeisten Fällen nur genutzt, um die Anzahl der Kästchen der ersten vier Figuren zu bestimmen. Weitere Fragestellungen zur Fortsetzung der Folge wurden dann meist auf rein arithmetischer Ebene bearbeitet und die ursprüngliche Veranschaulichung der Musterfolge wurde außer Acht gelassen und nicht mehr als Hilfestellung genutzt.

Studierenden, die die Anzahl der Kästchen in der vierten Figur korrekt angeben konnten, gelang es nicht immer, auch die Anzahl der Kästchen in der zehnten Figur korrekt zu ermitteln. Eine entsprechende Gesetzmäßigkeit wurde durch die Angabe der Anzahl der Kästchen in der vierten Figur also noch nicht hinreichend erkannt.

Hochschuldidaktische Konsequenzen

Aufforderungen an Lernende zum Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen müssen vielfältig sein und dazu auffordern, auch vermeintlich einfache Sachverhalte aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten sowie Sachverhalte zu verallgemeinern.

Die Darstellung mathematischer Sachverhalte mittels Variablen sollte in Lehrveranstaltungen immer wieder im Hinblick auf die genutzte oder die mit ihnen beschriebene Struktur reflektiert werden.

Die große Anzahl an verschiedenen Termen zur Anzahlbestimmung der Kästchen pro Figur zeigt sehr deutlich, was wir aus Untersuchungen mit Grundschulkindern bereits wissen: Veranschaulichungsmaterial (hierzu lassen sich auch die oben dargestellten Figuren zählen) führt im Kopf der Lernenden nicht immer (nur) zu den Strukturen, die wir als Lehrende erwarten (vgl. z.B. Lorenz, 2011).

Ausblick

Im weiteren Verlauf der Auswertung sollen folgende Fragen beantwortet werden:

- Inwiefern unterscheiden sich Studierende mit Hauptfach Mathematik von Studierenden, die Mathematik nicht als Hauptfach studieren, hinsichtlich ihrer Strukturierungsfähigkeiten?
- Welche Aufforderungen an die Lernenden bei der Beschäftigung mit der Musterfolge bewirken einen Strukturierungswechsel innerhalb ihrer Bearbeitung? Welche Bearbeitungswege lassen sich leicht oder ohne Strukturierungswechsel verallgemeinern? Sind Zusammenhänge zwischen der Selbsteinschätzung der Mathematikkenntnisse und zielführenden Strukturierungswechseln im Verlauf der Bearbeitung erkennbar?
- Lassen sich die Stellen, an denen Fehler entstehen, so clustern, dass sie Hinweise für die weitere Ausbildung liefern?

Literatur

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). München: Luchterhand.

Leuders, T. (2010): Erlebnis Arithmetik zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten. Heidelberg: Spektrum.

Lorenz, J. H. (2011): Die Macht der Materialien (?) Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentation. In: A. S. Steinweg (Hrsg.): Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011 (Band 1). Bamberg: University of Bamberg Press, 39-54

Lüken, M. M. (2012): Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Münster: Waxmann

Daniela AßMUS, Halle an der Saale, Frank FÖRSTER, Braunschweig

ViStAD – Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern

Einleitung und Theorierahmen

In unserer Video-Studie zum Analogen Denken (ViStAD) führen wir seit November 2011 Videoaufnahmen mit strukturiertem Leitfadeninterview (lautes Denken) zu Analogieerkennung (AE) und Analogienutzung (AN) durch (z. Zt. 72 Videos mit SuS der Klassen 3 und 4 aus dem Begabtenprojekt der Mathematischen Lernwerkstatt Braunschweig). Die Probanden bearbeiten hierzu in Einzelarbeit (Laborsituation) eine Aufgabensequenz mit einer Quellaufgabe (QA) und zu dieser analogen Zielaufgabe (ZA). Obwohl die ZA auch unabhängig von der QA lösbar ist, ermöglicht ein Erkennen der Analogie (bzw. der analogieinduzierenden Relation) die Übertragung von Strukturen und Vorgehensweisen auf die ZA, insb. kann somit das Ergebnis ohne erneutes Rechnen transferiert werden (AN).

In diesem Artikel beschränken wir uns auf die Fragen:

- Wie wirken sich die in der Quellaufgabe gewählten Vorgehensweisen auf die Analogieerkennung aus?
- Welchen Einfluss hat die Gestaltung der Quellaufgabe auf die Analogieerkennung?

Für weitere im Vortrag angesprochene Aspekte und eine ausführlichere Darstellung des Theorierahmens und der bisherigen Ergebnisse der Studie verweisen wir auf Aßmus (2013) und Aßmus/Förster (2013).

Dreiecksaufgabe und Rechtecksaufgabe

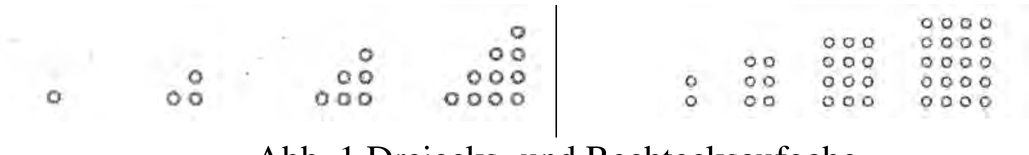


Abb. 1 Dreiecks- und Rechtecksaufgabe

Die QA fragte jeweils nach der Anzahl der Plättchen in der Figur, die 20 Plättchen in der unteren Reihe hat. Als ZA sollte die Summe der ersten 20 natürlichen bzw. der ersten 20 geraden Zahlen bestimmt werden.

Während die Analogie zwischen QA und ZA in der Dreiecksaufgabe von der Mehrheit der Kinder (12 von 15) eigenständig erkannt und von 9 Kindern auch zur Lösung der ZA genutzt wurde, war in der Rechtecksaufgabe bei keinem Kind eine eigenständige AE zu beobachten. Obwohl auf Grund der größeren Komplexität der Rechtecksaufgabe mit einem geringerem

Maße an eigenständiger AE zu rechnen war, überraschte doch, dass die Mehrheit der Kinder (5 von 9) auch nach der Aufgabenbearbeitung und auf wiederholte Nachfrage die Analogie nicht oder nicht vollständig erkannte.

Die Hauptursache für diese Unterschiede sehen wir darin, dass in der Dreiecksaufgabe die analogieinduzierende Relation der Aufgabe (Summe aufeinander folgender Zahlen) mit den für die Kinder naheliegenden Relationen übereinstimmt, während diese bei der Rechtecksaufgabe meist voneinander abweichen. So wird das Rechteck in der Regel nicht als Summe aufeinander folgender gerader Zahlen, sondern als Produkt benachbarter Zahlen strukturiert, wodurch die für die Analogie wesentlichen Ähnlichkeiten der beiden Aufgaben in den Hintergrund treten.

Variation der Rechtecksaufgabe

Zur Angleichung naheliegender und analogieinduzierender Relationen wurde die QA der Rechtecksaufgabe so umstrukturiert, dass die Summe der geraden Zahlen im Aufbau der einzelnen Figuren deutlich sichtbar wurde (s. Abb. 2).

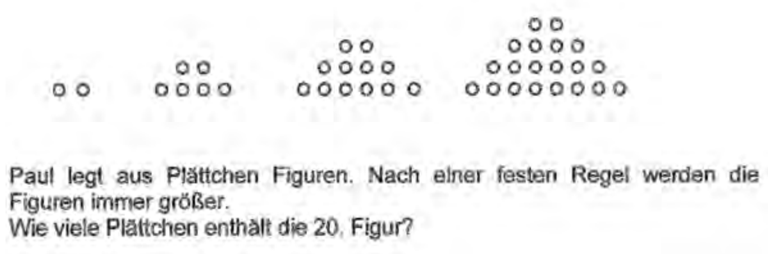
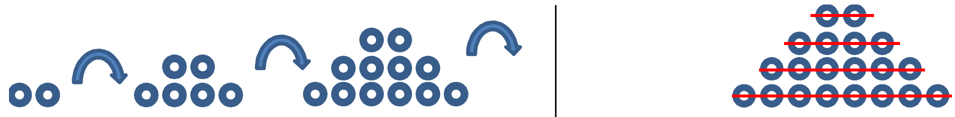


Abb. 2 Variation der Rechtecksaufgabe

Mit dem Einsatz der QA in dieser Form war die Hoffnung verbunden, dass die AE nicht bereits vor Bearbeitung der ZA aufgrund von hierzu ungünstigen, jedoch durch die QA naheliegenden Relationen verhindert wird.

Die Auswertungen der Interviews zeigten, dass alle Probanden (2 Drittklässler, 9 Viertklässler) bei der Bearbeitung der QA in irgendeiner Form auf die Addition gerader Zahlen zurückgriffen. Damit verbunden war jedoch gegenüber der Rechtecksaufgabe eine nur geringe Zunahme eigenständiger AEen. So äußerten sich nur zwei Kinder (ein Dritt- und ein Viertklässler) ohne weitere Nachfragen zur Analogie der Aufgaben. Die AE fand bei diesen beiden Kindern vor bzw. bei Bearbeitung der ZA statt und führte zu einem Transfer des Quellaufgabenergebnisses auf die ZA. Beide Kinder zeigten somit nicht nur eine AE sondern auch eine AN. Alle anderen Probanden bearbeiteten zunächst beide Aufgaben, ohne dass eine AE geäußert oder anderweitig im Handeln sichtbar wurde. Erst über gezielte Nachfragen zu Ähnlichkeiten zwischen den Aufgaben wurden für die Analogie relevante Entsprechungen verbalisiert.

Da in allen Bearbeitungen der QA die Verwendung der analogieinduzierenden Relation sichtbar wurde, muss die geringe Anzahl an eigenständigen AEen auf andere Gründe zurückzuführen sein. Zur Ursachenanalyse wurden zunächst die in Abb. 3 dargestellten Sichtweisen auf die Quellaufgabe unterschieden.



$2 + 4 = 6$, $6 + 6 = 12$, $12 + 8 = 20$ …	20. Figur: $2 + 4 + … + 38 + 40$
Dynamische Sichtweise	Statische Sichtweise

Abb. 3 Sichtweisen zur Strukturierung der Quellaufgabe

Während in der dynamischen Sichtweise die Summanden der Summe der geraden Zahlen als Zuwächse von Figur zu Figur dargestellt werden (eine Ausnahme bildet die 2 zu Beginn) und so rekursiv die Anzahlen der einzelnen Figuren schrittweise durch Addition der jeweils folgenden geraden Zahl berechnet werden, wird in der statischen Sichtweise die 20. Figur direkt betrachtet und es kann durch Erkennen des strukturellen Aufbaus der Figur unmittelbar auf die vollständige Summe geschlossen werden. Notiert werden bei der dynamischen Sichtweise in der Regel die errechneten Plättchenanzahlen pro Figur (teilweise auch mit den zugehörigen Rechnungen), in der statischen Sichtweise vorwiegend die 20 Summanden, die dann im Kopf, halbschriftlich oder schriftlich addiert werden. Aus den analysierten Interviews lässt sich als weitere Sichtweise eine Mischform generieren: Ähnlich der dynamischen Sichtweise werden die Anzahlen der hinzukommenden Plättchen betrachtet, diese werden jedoch nicht zur Berechnung der Plättchenanzahlen der nachfolgenden Figur eingesetzt, sondern für sich genommen addiert, sodass auch in dieser Vorgehensweise ähnlich der statischen die Summe der 20 ersten geraden Zahlen als Ganzes verwendet wird (s. Abb. 4).

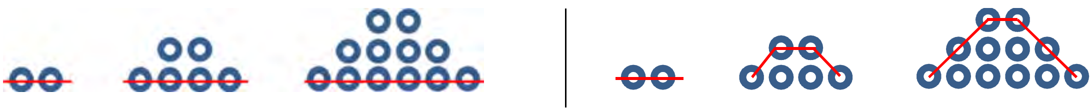


Abb. 4 Mischform: hinzukommende Plättchen werden unten/oben ergänzt

Sowohl aus theoretischer als auch aus empirischer Sicht ermöglicht die statische Sichtweise oder die Mischform eher eine AE als die dynamische Sichtweise. So verwendeten beide Kinder, die eine AN zeigten, eine statische Sichtweise. Weitere Beispiele verdeutlichen aber, dass die statische Sichtweise keine hinreichende Bedingung für eine AE darstellt. Weiterhin interpretieren wir die auf Nachfrage erfolgten AEen bei dynamischer Sichtweise so, dass die statische Sichtweise vermutlich nicht notwendig für eine AE ist, aber die selbständige AE und AN deutlich unterstützt.

Darüber hinaus haben wir weitere Einflussfaktoren auf die AE und AN festgestellt, die (hier nicht weiter kommentiert) in Abb. 5 dargestellt sind.

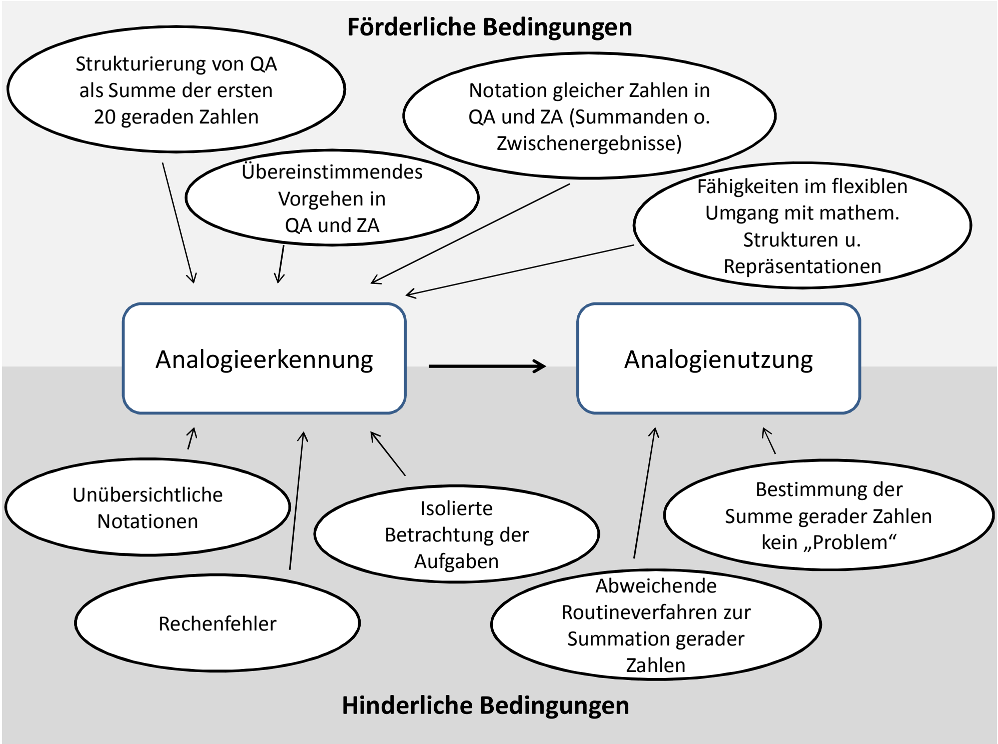


Abb. 5 Einflussfaktoren auf die AE bei der Variation der Rechtecksaufgabe

Fazit und Ausblick

Ähnlich wie bei der Dreieckaufgabe zeigten sich auch bei der Variation der Rechtecksaufgabe Abhängigkeiten der AE von den gewählten Vorgehensweisen bzw. Strukturierungen der QA. Die AE ist zudem dahingehend abhängig von der Aufgabenstellung, dass die analogieinduzierenden Relationen mit den für die Probanden naheliegenden Relationen übereinstimmen sollten. Es zeigte sich aber auch, dass die AE deutlich von weiteren Faktoren beeinflusst wird, bei denen noch unklar ist, wie weit diese aufgabenspezifisch oder aufgabenübergreifend zu sehen sind. Deswegen sind weitere Untersuchungen mit Variationen der QA zur Rechtecksaufgabe und der Einsatz weiterer Problemsequenzen sowie von „Störaufgaben“ geplant.

Literatur

Aßmus, D. (2013): Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern – Begriffsklärung und Überblick zu empirischen Studien. In: mathematica didactica, 36, 28-44

Aßmus, D.; Förster, F. (2013): ViStAD – Erste Ergebnisse einer Videostudie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In: mathematica didactica, 36, 45-65

Bärbel BARZEL, Ralf ERENS, Hans-Georg WEIGAND, Andreas BAUER, Freiburg/ Würzburg

EDUMATICS – eine theoriegeleitete Fortbildungsplattform zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht

Der Einsatz digitaler Werkzeuge (Tabellenkalkulation, Geometriesoftware und Computeralgebra) beim Lernen und Lehren von Mathematik wird in Curricula vieler Länder als wichtiges Medium gefordert. Und das hat gute Gründe: Diese Medien bieten viele Möglichkeiten, die für das Lehren und Lernen von Mathematik hilfreich sein können (Zbiek et.al. 2007, Barzel 2011). Um dieses Potenzial entfalten zu können, müssen Lehrkräfte auf den Einsatz neuer Medien vorbereitet werden, damit die Integration sinnvoll im Unterricht gelingt. Dieser Aufgabe hat sich das von der EU finanzierte Projekt **EdUmatics** (**E**uropean **d**evelopment for the **u**se of **ma**thematics **t**echnology **i**n **c**lassroom**s**) gewidmet. Es wurde theoriegeleitet und literaturbasiert eine Internet-Plattform für Lehrkräfte und Fortbildende der Sekundarstufen entwickelt mit umfassenden Unterrichtsmaterialien, Hintergrundinformationen zur Gestaltung des Unterrichts, relevanten Theorien und Erkenntnissen aus der Forschung sowie speziellen Hinweisen und Zusatzmaterialien (z.B.Videos) für Fortbildungen. Unter der Fragestellung nach einem sinnvollen Weg zur Integration digitaler Medien haben sich Partner aus zehn Ländern (jeweils mit einer Universität und einer Schule vertreten) zusammen gefunden, um gemeinsam eine Konzeption von Unterricht und Fortbildung zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Unterricht zu entwickeln. Sämtliches Material ist in alle beteiligten Landessprachen übersetzt.

Theoretischer Hintergrund

Technologieeinsatz kann ein schülerzentriertes, selbstständiges Arbeiten im Unterricht unterstützen (Barzel 2007, Heid et.al. 2008, Neill 2009), wenn Schülerinnen und Schüler angeregt werden, eigenständig am Rechner mathematische Objekte und Zusammenhänge zu erkunden und Problemstellungen zu bearbeiten. Rechnereinsatz bedeutet keineswegs den Verzicht auf Phasen phänomenologischen Erlebens mit realen Handlungen, die in verschiedenen Phasen des Lernprozesses integriert werden sollten (Arzarello & Robutti 2003). Diese können vor allem im Kontext von Modellierungsaufgaben entfaltet werden, wenn Lernende bewusst an den Phasen des Modellierungskreislaufs (Kaiser et al 2006) beteiligt werden. Hier dient der Rechner als hilfreiches, digitales Medium in verschiedenen Phasen des Kreislaufs, was beispielsweise beim unterrichtlichen Erarbeiten von Funktionen exemplarisch gezeigt werden kann (Artigue & Lagrange 2009). Dabei spielt die Verfügbarkeit verschiedener Repräsentationen eine wichtige Rolle, da damit eine adäquate Darstellung, d.h. hilfreich zum gewünschten Weg und im Zusammenhang mit möglichen und angemessenen Operationen, gewählt werden kann. Dieses Zusammenspiel von Darstellungen mit

Zugangsweisen und Lösungswegen wird als ein wichtiger Aspekt bei der Verfügbarkeit digitaler Medien angesehen (Hoyles & Lagrange 2010). In den letzten Jahren wurde die Bedeutung von Darstellungen in dem Werk "Standards for School Mathematics" (beginnend mit den NCTM Standards im Jahr 1989) betont und nahezu überall auf der Welt ausformuliert. Mit verschiedenen Darstellungen zu arbeiten ist eine wichtige Kompetenz und es gibt mittlerweile gut entwickelte Theorien über die Nutzung digitaler Darstellungen (Duval 1993), die Bedeutung symbolischer, visueller und numerischer Darstellungen simultan auf dynamische Art und Weise zu verbinden (Arzarello & Robutti 2010) und zu erforschen (Borba & Confrey 1996, Sacristán and Noss 2008), und das Lernen durch multiple Darstellungen zu fördern (Ainsworth et.al. 1998).

Auf der Grundlage der hier nur exemplarisch angedeuteten Forschungsergebnisse entstanden folgende Grundsätze für die Konstruktion der Materialien im Rahmen des EdUmatics-Projekts:

- Schülerinnen und Schüler sollten aktiv im Prozess beteiligt werden, insbesondere durch anregende Problemlöse- und Modellierungsaufgaben, wenn passend verknüpft mit realen Handlungen, Integration dynamischer Visualisierungen und dem Erheben realer Daten.
- Das Angebot sollte differenzierend sein, insbesondere hinsichtlich des Erwerbs technischer Werkzeugkompetenzen.
- Damit Lernende wie Lehrende verschiedene Repräsentationen kennen lernen und nutzen können, sollten nach Möglichkeit stets numerische, symbolische und graphische Zugänge und Lösungswege integriert werden. Um dies zu ermöglichen werden im Projekt nur solche digitale Medien betrachtet, die verschiedene Repräsentationen und Werkzeuge interaktiv verfügbar haben (z.B. TI-Nspire, Geogebra).
- Das Kennenlernen der Medien erfolgt exemplarisch an einem zentralen Themenbereich beider Sekundarstufen – der Funktionenlehre.
- Bei allen Schritten werden fachdidaktische Hintergrundinformationen und Theorieaspekte aufgenommen.

Das gesamte Material entstand in einem Prozess intensiver Kooperation. Nach einer gemeinsamen Festlegung auf fünf Module entstand jedes Modul in enger Zusammenarbeit zwischen den Kollegien zweier Länder-Standorte. Eine erste Pilotierung der dabei entstandenen Produkte erfolgte jeweils an den weiteren Standorten, bevor es zur Finalisierung des Materials und systematischen Evaluation in allen Ländern kam. Der Prozess und das Produkt wurden zudem einer externen Evaluation durch John Monaghan (University of Leeds) unterzogen.

Struktur des entwickelten Materials – Fünf Module

Es gibt ein Einstiegsmodul („getting started“), indem an einfach zu erfassenden Aufgaben (z.B. isoperimetrisches Problem) in die Bedienung der einzelnen digitalen Werkzeuge (Tabellenkalkulation, Geometriesoftware, Computeralgebra) eingeführt wird. Hier werden bereits verschiedene Repräsentationen und Zugänge berücksichtigt, um den Wert des Einsatzes der Technologie für das Lernen und Lehren aufzuzeigen. Hilfestellungen zum Umgang mit der jeweiligen Technologie werden sowohl als elektronische Hilfen als auch in Papierversion angeboten und zudem als paralleldifferenziertes Angebot in einer Kurz- und Langhilfe, um auf die verschiedenen Bedürfnisse differenziert zu reagieren.

Die weiteren vier Module können in beliebiger Reihenfolge durchlaufen werden und sind zudem in sich abgeschlossen, so dass sie auch einzeln erarbeitet werden können:

- **Von statischen zu dynamischen Darstellungen:** In diesem Modul geht es um den Einbezug realer Handlungen und dynamischer Darstellungen im Mathematikunterricht und um Konzepte, wie Darstellungen im Unterricht integriert werden können, um das Verstehen der Mathematik zu unterstützen.
- **Wechselspiel zwischen Darstellungen :** In diesem Modul lernt man, wie die durch neue Technologien möglich gewordene dynamische Verbindung zwischen mathematischen Darstellungen als nützliches Werkzeug im Unterricht eingesetzt werden kann. Dabei wird das bereits erworbene Wissen zu den verschiedenen digitalen Werkzeugen gefestigt und ausgebaut.
- **Unterrichtshilfen zum Einsatz von Technologie im Unterricht:** In diesem Modul werden Lehrpersonen aufgefordert, die eigenen Unterrichtspraktiken beim Technologieeinsatz zu reflektieren und weiter zu entwickeln. Durch das Studium solcher Praxisbeispiele an Hand von Videos aus anderem Unterricht werden Zugangsweisen, Ideen und Konzepte reflektiert und damit Anregungen für die eigene Unterrichtspraxis beim Einsatz von Technologie gegeben.
- **Arbeiten mit Funktionen und Modellierungen:** In diesem Modul lernt man, wie die digitalen Werkzeuge zur Einführung in das Thema Funktionen an Hand von Modellierungen in verschiedenen Kontexten genutzt werden können. Man erfährt, wie Technologien zum Erkunden von Funktionseigenschaften durch das dynamische Wechselspiel zwischen verschiedenen Darstellungen verwendet werden können.

Die Materialien, die auf der Webseite frei verfügbar sind (**www.edumatics.eu**) beinhalten neben den konkreten Aufgabenstellungen für Schülerinnen und Schülern vor allem Lösungshinweise und -dateien der verschiedenen genutzten Werkzeuge, Videos, Animationen und Internetlinks sowie einige Hintergrundinformationen und Literaturhinweise.

Neben diesen konkreten Materialien für den Unterricht gibt es vor allem zusätzliche Hinweise und Vorschläge für Multiplikatoren, in welcher Form diese Materialien im Rahmen von Lehrerfortbildungen eingesetzt werden können.

Die Materialien werden derzeit in verschiedenen Fortbildungen mit Erfolg eingesetzt. Sie bieten eine Fülle von Anregungen sowohl für Präsenzphasen von Fortbildungen als auch für Phasen der individuellen Weiterarbeit und Reflexion.

Literatur

Ainsworth, S. E. Bibby, P.A., Wood, D. J. (1998). Analyzing the costs and benefits of multi-representational learning environment. In: M. W. van Someren, P. Reimann, H.P.a. Boshuizen & T. de Jog (Eds.),. Learning with Multiple Representations, 120-134

Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematics Learning, n°7,245-274.

Artigue M., Lagrange J.B. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. In, M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp. 465-472, vol. 3. Thessalonique : Aristotle University of Thessaloniki.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2003). Approaching algebra through motion experiences. In: Perceptuo-motor Activity and Imagination in Mathematics Learning, Research Forum 1, Proceedings of PME 27.. Honolulu, vol. 1, p. 111-115.

Arzarello, F., Robutti, O (2010). Multimodality in multi-representational environments. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 42/7, 715-731.

Barzel, B. (2007): "New technology? New ways of teaching - No time left for that!". In: International Journal for Technology in Mathematics Education 14 (2), S. 77-86.

Borba, M., Confrey, J. (1996). A students's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. EStM 31(3), 319-337

Duval, R. (1993). Registres de representations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.) .

Greer, B. (2009). Representational flexibility and mathematical expertise. ZDM Mathematics Education 2009, 41, 697-702.

Heid, M. Kathleen; Blume, Glendon W. (2008c). Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. In: M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Re67 search Syntheses. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 419-431.

Hoyles, C. & Lagrange J.-B. (2006). 17th ICMI Study - Technology Revisited. Study conference, Hanoi University of Technology, December 3-8 2006. Conference Booklet. PDF

Kaiser, G., Blomhøj, M., Sriraman, B. (Eds.) (2006). Mathematical modelling and applications: empirical and theoretical perspectives. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, vol. 38/2.

Neill, Alex (2009): Key Findings From the CAS Pilot Programme. In: The New Zealand Mathematics Magazine 46 (1), S. 14-27.

Sacristán, A. I., Noss, R. (2008). Computational construction as a means to coordinate representations of infinity. Int. Journal of computers for Mathematical Learning, 13(1), 47-70

Zbiek, R.; Heid, K.; Blume, G.; Dick, Th. (2007): Research on Technology in Mathematics Education - A Perspective of Constructs. In: F. Lester (ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age.

Sabine BAUM, Würzburg

Simulieren im Mathematiklabor – ein Beitrag zur Förderung des funktionalen Denkens

Das Mathematiklabor an der Universität Würzburg ist ein Schülerlabor, in dem Schülerinnen und Schüler in vorstrukturierten Lernumgebungen durch vielfältige Experimente selbständig zu mathematischen Erkenntnissen über interessante Phänomene aus Natur und Technik gelangen können. In diesem Beitrag wird das Mathematiklabor als eine Lernumgebung zur Förderung des funktionalen Denkens sowie die Arbeitsweise Simulieren vorgestellt. Weiter wird ein Beschreibungsmodell erläutert, das die Phasen des Mathematisierens mit den Aspekten des funktionalen Denkens verknüpft. Dieses Modell liefert die Grundlage für ein empirisches Untersuchungsvorhaben, in dem durch die Identifizierung verschiedener Schülerstrategien beim Simulieren Hypothesen über den Einfluss des Simulierens im Mathematiklabor auf das funktionale Denken generiert werden sollen.

1. Das Mathematiklabor – eine Lernumgebung zum funktionalen Denken

Zielgruppe des Mathematiklabors sind Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe, die in Kleingruppen ca. drei Stunden an einer Station zu einem interessanten Phänomen aus Natur, Kultur oder Technik arbeiten. Wesentliche Charakteristika des Labors sind die Phänomenorientierung, das explizite Ziel der mathematischen Durchdringung dieser Phänomene und das experimentelle Arbeiten (siehe zum Beispiel Baum 2012).

Die ersten beiden Wesensmerkmale des Mathematiklabors spiegeln zwei Ebenen wieder, durch die auch das funktionale Denken nach Vollrath (1989) charakterisiert ist.

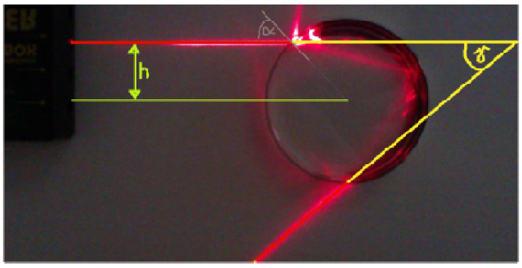


Abbildung 1: Umlenken eines Laserstrahls in einer wassergefüllten, halbverspiegelten Petrischale als Tropfenmodell. Die Einfallshöhe h ist definiert als der Abstand zwischen einfallendem Laserstrahl und einer Parallelen durch den Tropfenmittelpunkt, der Umlenkwinkel γ gibt den Winkel an, um den der Laserstrahl nach Brechung , Reflexion und erneuter Brechung insgesamt umgelenkt wird.

Phänomenebene

„Funktionales Denken ist […] bestimmt durch das Denken in Zusammenhängen, das sich in der Auseinandersetzung mit bestimmten Phänomenen entfaltet.“ [Vollrath 1989, S.39] Im Mathematiklabor setzen sich die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel mit dem Naturphänomen Regenbogen auseinander. Hierbei erkennen sie, dass es einen Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel sowie der Wellenlänge von Lichtstrahlen und dem Brechungswinkel gibt, wodurch sie sich die Phänomene Umlenkung und Dispersion des Lichts im Regentropfen erklären können.

Mathematische Modellebene

„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.“ [Vollrath 1989, S.3] Im Mathematiklabor beschreiben die Schülerinnen und Schüler die am Phänomen entdeckten Zusammenhänge mithilfe funktionaler Darstellungen und arbeiten mit diesen Funktionen.

Im Mathematiklabor wird auf und zwischen diesen beiden Ebenen des funktionalen Denkens gearbeitet. Die charakteristische Arbeitsweise ist dabei das Simulieren.

2. Simulieren im Mathematiklabor

Unter Simulieren versteht man das Experimentieren mit Modellen [Greefrath/Weigand 2012]. Mit Experimentieren soll eine Arbeitsweise bezeichnet werden, bei der allgemein Beispiele hergestellt und untersucht werden, um daraus Hypothesen zu generieren und/oder zu überprüfen. Im Mathematiklabor wird mit unterschiedlichen Arten von Modellen experimentiert: Realmodelle, mathematische Modelle und Computermodelle. In der Laborstation „Regenbogenmathematik“ fungieren als Realmodelle unter anderem Laserstrahlen und wassergefüllte Petrischalen (vgl. Abb.1). Beim Experimentieren mit den Realmodellen werden relevante Einflussgrößen identifiziert, die dann im mathematischen Modell als unabhängige und abhängige Variablen (und Parameter) abgebildet werden. Beim Umlenken des Laserstrahls im Tropfenmodell ist der Umlenkwinkel γ abhängig von der Einfallshöhe h (Erläuterung in Abb.1). Ein entsprechendes mathematisches Modell zeigt diesen Zusammenhang in verschiedenen Darstellungsarten, in der wörtlichen Beschreibung, tabellarisch, graphisch (vgl. Abb.2) oder algebraisch. Bei den Computermodellen handelt es sich um GeoGebra-Applets (Beispiele unter www.mathematik-labor.org; vgl. auch Abb.3), in denen hauptsächlich über Schieberegler Manipulationen möglich sind. Der Mehrwert dieser Computermodelle besteht in der Verknüpfung zwischen der Repräsentation des Realmodells und der symbolischen mathematischen Repräsentation, in der einfachen Herstellung von Beispielen und in der Möglichkeit von systematischen Variationen über den Schieberegler. Das Experimentieren mit den Computermodellen soll durch das Arbeiten auf und zwischen der Phänomen- und der mathematischen Modellebene das funktionale Denken unterstützen.

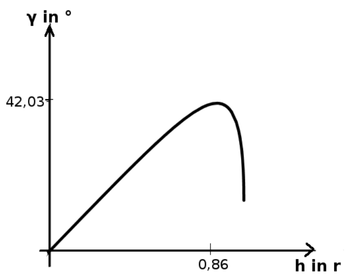


Abbildung 2: graphische Darstellung als mathematisches Modell für den Zusammenhang zwischen Einfallshöhe und Umlenkwinkel

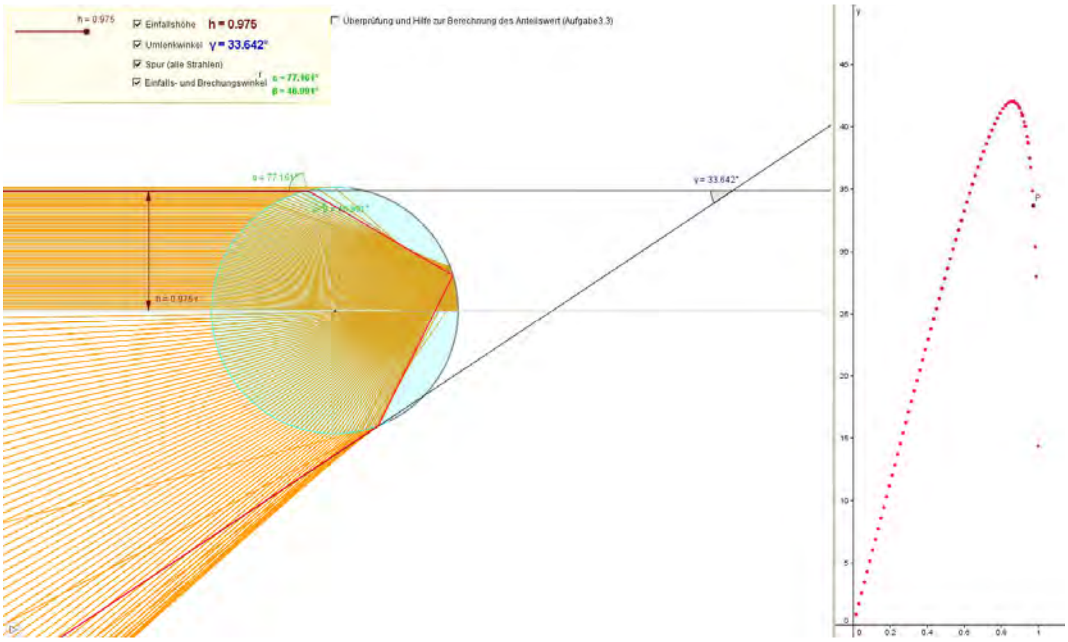


Abbildung 3: GeoGebra-Applet als Computermodell, das den Zusammenhang zwischen Einfallshöhe und Umlenkwinkel gegenständlich und mathematisch veranschaulicht (www.mathematik-labor.org).

3. Mathematisieren im Mathematiklabor und die Aspekte des funktionalen Denkens – ein Beschreibungsmodell

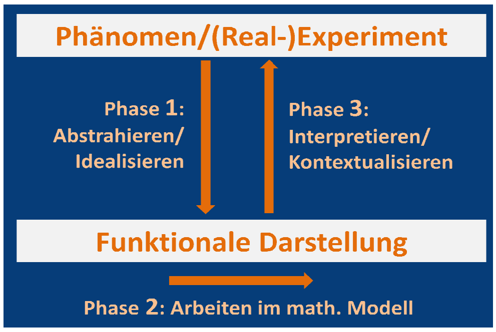


Abbildung 4: Mathematisieren im Mathematiklabor

Das Mathematisieren mit Funktionen im Mathematiklabor soll durch 3 Phasen charakterisiert werden. In Phase 1 werden die im Experiment beobachteten Zusammenhänge funktional dargestellt und dadurch abstrahiert. Mit diesem mathematischen Modell wird in Phase 2 gearbeitet. Das Interpretieren der funktionalen Darstellungen und der mathematischen Ergebnisse in Hinblick auf das Realphänomen beschreibt Phase 3.

Vollrath (1989) unterscheidet 3 Aspekte des funktionalen Denkens: Den Zuordnungsaspekt (einer Größe wird genau eine abhängige Größe zugeordnet), den Änderungsaspekt (die Auswirkungen von Änderungen einer Größe auf die abhängige Größe werden untersucht) und den Objektaspekt (Arbeit mit der Funktion als neues/eigenständiges Objekt). Unterstellt man, dass mit der Verortung des funktionalen Denkens auf Phänomen- und mathematischer Modellebene implizit die 3 Phasen des Mathematisierens angesprochen sind, lassen sich die Aspekte des funktionalen Denkens für jede Phase des Mathematisierens konkretisieren und es ergibt sich eine 3x3-Matrix als Beschreibungsmodell:

	Phase 1 Phänomen ↓ Funktion	Phase 2 → Arbeit auf der math. Ebene der Funktionen	Phase 3 Phänomen ↑ Funktion
Zuordnungs-aspekt	Herstellen/Betrachten bestimmter (Phänomen-) Zustände, die dann z.B. in einer Messwerttabelle festgehalten werden.	Arbeiten mit Wertepaaren in den funktionalen Dar-stellungen, z.B. Markie-ren bestimmter Werte-paare aus der Tabelle auf einem Funktionsgraphen.	Z.B. wird ein Wertepaar aus der funktionalen Darstellung im Hinblick auf die Bedeutung im Experiment ausgewertet.
Änderungs-aspekt	Ein am Phänomen beobachtetes Wachstums- oder Änderungsverhalten wird funktional beschrieben.	Es wird z.B. das Monotonie- oder Änder-ungsverhalten eines Funktionsgraphen beschrieben.	Mithilfe des Monotonie- und Steigungsverhaltens einer Funktion wird das Phänomen erklärt.
Objekt-aspekt	Ein Phänomenzusammen-hang lässt sich durch eine bestimmte Funktionen-klasse beschreiben.	Ein qualitativ skizzierter Graph wird mithilfe einer bestimmten Funktionenklasse quantifiziert.	Es werden andere Naturphänomene gefun-den, die sich ebenfalls durch die Funktionen-klasse beschreiben lassen.

Mithilfe dieses Beschreibungsmodells können die Arbeitsaufträge, die Schüleräußerungen und die Schülerlösungen aus dem Mathematiklabor klassifiziert werden.

4. Empirisches Untersuchungsvorhaben

Ziel der empirischen Untersuchung ist es Hypothesen über den Einfluss des Simulierens im Mathematiklabor auf das funktionale Denken zu generieren, indem Schülerstrategien beim Simulieren identifiziert werden. In der Untersuchung liegt der Fokus auf dem Experimentieren mit Computermodellen. Die Strategien sollen hauptsächlich durch Videoaufzeichnungen sichtbar gemacht werden. Sie können mehr oder weniger statisch bzw. dynamisch ausgeprägt sein, die Schülerinnen und Schüler können systematisch oder intuitiv mit den Computermodellen experimentieren und es ist zu untersuchen, ob die Lernenden die Verknüpfung von Phänomen- und mathematischer Modellebene nutzen oder bei ihren Argumentationen auf einer der Ebenen bleiben. Anschließend sollen Zusammenhänge zwischen den Strategien beim Simulieren und den nach dem Beschreibungsmodell klassifizierten Schülerlösungen auf für das funktionale Denken relevante Muster untersucht werden.

Literatur

Baum, S. (2012):Mathematik im Scheibenwischer. Wie Simulieren das Mathematisieren unterstützt. In: mathematik lehren, Heft 174, 15-19

Greefrath, G., Weigand, H.-G. (2012): Simulieren: Mit Modellen experimentieren. In: mathematik lehren, Heft 174, 2-6

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: Journal der Mathematikdidaktik, 3-37

Sabine BAUMANN, Integrierte Gesamtschule Lehrte

Tablet-PCs im Unterricht: Erste Erkenntnisse einer Fallstudie

Tafel, Kreide und neue Medien im Einklang: Immer mehr nationale und internationale Schulen setzen bereits erfolgreich Tablet-PCs als medienpädagogisches Werkzeug im Unterricht ein. Auch an der IGS Lehrte in der Region Hannover lernen seit dem Sommer 2012 Siebtklässler erfolgreich mit Tablet-PCs. Diesen Entwicklungstrend gilt es einmal genauer unter die Lupe zu nehmen.

Zielsetzung

Schüler bringen bereits von sich aus umfassende Medienkenntnisse für den Unterricht mit, weil Smartphones sowie Computer inzwischen zum Alltag der oft technisch versierten Schüler gehören (siehe JIM-Studie 2012). Damit lassen sich Schüler als sogenannte ‚Digital Natives‘ bezeichnen, die sich kaum vorstellen können, wie die Welt ohne Technik aussähe. Diese Tatsache lässt nicht zu, dass die Bildungslandschaft die Augen vor den neuen Medien verschließt. Ferner sollte es ein Ziel sein diese nicht als Modeerscheinung zu bewerten, sondern den neuen Technologien den Einzug in den Unterricht zu gewähren. Die neuen Medien sollen helfen eine neu gestaltete Lehr- und Lernkultur zu schaffen, die durch Selbstständigkeit, Eigenverantwortung und hohe Medienkompetenz geprägt ist.

Rahmenbedingungen

Seit September 2012 lernen und arbeiten an der Integrierten Gesamtschule Lehrte in der Region Hannover 25 Siebtklässler für vier Jahre mit iPads im Unterricht. Die besondere Situation der elternfinanzierten 1:1-Lösung fördert Verantwortung in Bezug auf den Umgang mit dem Gerät und die Einsatzbereitschaft, da jeder Schüler sein eigenes Gerät besitzt. Zur Finanzierung gehört neben der Bereitstellung des Geräts auch ein Premium-Versicherungsschutz mit einer geringen Selbstbeteiligung, 1st- und 2nd-Level-Support sowie die Bereitstellung eines Leihgeräts im Schadensfall. Im Vergleich zu ‚Tablet-Koffern‘, die in Schulen stundenweise ausgeliehen werden können, ermöglicht diese Variante einen kontinuierlichen Umgang mit den Geräten, auch im außerschulischen Bereich.

Vor- und Nachteile

Vor der Entscheidung zur Einrichtung einer Tablet-Klasse ist es wichtig, sich mit den Vor- und Nachteilen auseinander zu setzen. Diese müssen im Hinblick auf die Rahmenbedingungen der Schule, der Klasse und des Kollegiums abgewogen werden bevor ein Entschluss gefasst werden kann.

Als Nachteil wird oft erwähnt, dass es sich bei einem iPad um ein geschlossenes System handelt. Aus pädagogischer und administrativer Sicht kann dieser Aspekt allerdings auch als Vorteil betrachtet werden. Des Weiteren verfügt ein iPad lediglich über eine virtuelle Tastatur, die beim Schreiben einen Großteil des relativ kleinen Displays in Anspruch nimmt. Beim Schreiben längerer Texte können jedoch externe Tastaturen über Bluetooth mit dem iPad verbunden werden. USB-Anschlüsse und CD- bzw. DVD-Laufwerke werden beim iPad vergebens gesucht. Allerdings ist dies kein bedeutender Mangel, denn iPads eignen sich sehr gut zu einem Cloud-basierten Datenaustausch (auch über WebDAV), und AirPrint-Drucker ermöglichen das kabellose Drucken von Dokumenten.

Den oben erwähnten Mankos stehen jedoch auch viele Vorteile gegenüber. Bei Tablets handelt es sich um kleine und leichte Geräte, die eine große Mobilität und damit freie Lernortwahl ermöglichen. Die Geräte sind durch die Instand-On-Technologie schnell einsatzbereit und überstehen mit ihrer guten Akkulaufzeit einen Ganztagsschultag. Die einfache und selbsterklärende Technik führt dazu, dass nicht das Gerät im Vordergrund steht, sondern der Schwerpunkt auf die Unterrichtsinhalte gelegt werden kann. Eine große Auswahl an Lern-Apps und digitalen Büchern ermöglicht gemeinsam mit dem Internet eine Unterrichtsgestaltung, die aktuell, schüleraktivierend und abwechslungsreich ist. Die Multi-Touch-Oberfläche unterstützt die intuitive Bedienung und ermöglicht einen haptischen Umgang und damit auch das Ausfüllen von Arbeitsblättern mit einem Eingabestift. iPads sind gegenüber Notebooks weniger anfällig, da es bei Notebooks eine größere Anzahl sensibler und mechanischer Teile gibt. Ein weiterer gewinnbringender Aspekt ist der Einsatz von AppleTV, denn mit Hilfe von AppleTV, WLAN und Beamer kann die iPad-Oberfläche visualisiert werden. Dieser Streamingprozess ermöglicht es gemeinsam und dynamisch Unterrichtsergebnisse zu verändern oder zu ergänzen.

Einsatz im Unterricht

Das Tablet wird im Unterricht in vielfältiger Art und Weise eingesetzt. So ist das Tablet für die Schüler Buch, Notizblock, Wörterbuch, Mappe, Formelsammlung, Taschenrechner und Lexikon zugleich. Im Folgenden werden einige eingesetzte Apps kurz vorgestellt, weitere werden auf dem Projekt-Blog (www.ipadklasslehrte.wordpress.com) vorgestellt.

In fast allen Unterrichtsfächern wird die App ‚Notability' zur digitalen Mappenführung eingesetzt. In den dort geführten Mappen können die Schüler ihre Unterrichtsmitschriften, Übungsaufgaben sowie Hausaufgaben sammeln. Mitschriften können über die Tastatur oder mit einem Stift eingegeben werden. Arbeitsblätter können als PDF eingefügt und annotiert werden. Ebenfalls ist es möglich Skizzen zu erstellen, Fotos einzufügen oder Audioaufnahmen zu erstellen und einzufügen.

Mit Hilfe der App ‚Educreations' können Videotutorials von den Schülern oder Lehrkräften erstellt werden. In den Videotutorials können neue oder bekannte Unterrichtsinhalte anschaulich mit Bild und Ton erklärt werden.

Die App ‚WebDAV Nav' dient als Schnittstelle zum Schulserver. Diese App ermöglicht das Herunterladen bereitgestellter Arbeitsmaterialien und auch den Austausch von Arbeitsmaterialien unter den Schülern.

Im Mathematikunterricht lassen sich insbesondere die Apps ‚Geoboard' (digitales Geobrett), ‚Geometry Pad' (dynamische Geometrieprogramm), ‚Calculator X' (wissenschaftlicher Taschenrechner) und ‚TI-Nspire CAS' (Computeralgebrasystem) einsetzen.

Zwischenergebnis

In vielen Lehrplänen sind Teamfähigkeit und kooperative Kompetenzen als Ziele aufgeführt. Beiden Zielen wird durch das Tablet-Projekt Rechnung getragen, denn die gegenseitige Unterstützungsbereitschaft der Schüler ist stark gestiegen. So haben viele Schüler ‚Lieblings-Apps', die sie gut nutzen und daher auch die Mitschülern bei der jeweiligen App-Nutzung unterstützen können. Dieser Aspekt wirkt sich in besonderem Maße auf die Zusammenarbeit in der Gruppe aus, da wichtige Grundlagen zur Gruppenarbeit gefordert und gefördert werden. So entsteht bspw. eine positive Abhängigkeit und es findet eine unterstützende Interaktion statt. Das kooperative Lernen erlangt durch den Tablet-Einsatz ebenfalls einen neuen Aspekt, denn gerade das kollaborative Arbeiten (bspw. durch die App ‚BaiBoard HD') wird gefördert. Im Bereich der Differenzierung ermöglicht der Einsatz von Tablets den Lernenden einen größeren Einfluss an der Gestaltung des Unterrichtsprozesses. Außerdem lassen sich Inhalte den individuellen Fähigkeiten entsprechend gestalten. Des Weiteren steigt die Medienkompetenz der Schüler sukzessiv, da bspw. der Ausfall des Internets nicht nur auf Empörung stößt, sondern vor Ort gemeinsam eine Fehlersuche stattfinden kann und dabei auch der Aufbau des Schulnetzwerks und die Funktion der einzelnen Geräte automatisch zum Unterrichtsgegenstand wird.

Für den Mathematikunterricht kann gesagt werden, dass das iPad das eigenständige Erproben und forschende Entdecken durch die Schüler in hohem Maß unterstützt. Es ist möglich, dass jeder seinem Lern- und Leistungsniveau entsprechend arbeitet. Das Arbeiten an unterschiedlichen Aufgabenstellungen wird ebenfalls stark erleichtert, da die Visualisierung der iPad-Oberfläche mit Hilfe des Beamers es ermöglicht, dass die gesamte Klasse die Aufgabenbearbeitung oder eine erste Ideenskizze eines einzelnen Schülers sehen kann. Die Erstellung eigener Videotutorials zu mathematischen Themen ist ein weiterer bereichernder Aspekt, denn auf die Videos können die Schüler zurückgreifen, wenn sie etwas vergessen haben. Das Erstellen der Tutorials unterstützt ebenfalls den Lernprozess, denn das Erklären fordert eine tiefere Auseinandersetzung mit den Inhalten als eine Reproduktion oder passive Aneignung der Unterrichtsinhalte.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Grundmotivation der Schüler durch den Einsatz von Tablets stark gestiegen ist. Für die Zukunft ist es wichtig, dass weiterhin ein Augenmerk auf die Individualisierung und Schüleraktivierung gelegt wird. Ferner ist es von Bedeutung, dass phasenweise eine Lösung vom fachlichen Kerncurriculum erfolgt, denn die Einführung neuer Apps oder auch das Suchen nach neuen, hilfreichen Apps durch die Schüler selber benötigt Zeit, die nicht den rein fachlichen Aspekten zu Gute kommt, sondern prozessbezogenen und medienbezogenen Kompetenzen.

Fazit und Ausblick

In einem schülerorientierten und multimedialunterstützten Unterricht ist es unabdingbar, dass ein gewisses Maß an Medienkompetenz vorausgesetzt werden kann bzw. erlernt wird, denn die zahlreichen Medienangebote müssen sinnvoll ausgewählt und genutzt werden. Das Wissen, welches im Internet in vielfältiger Weise verfügbar ist muss strukturiert, analysiert und präsentiert werden. Diese Aspekte soll das Projekt unterstützen und weiter ausbauen. Eine Teiletappe wurde nach 6 Monaten iPad-Einsatz im Unterricht bereits zurückgelegt. Selbstverständlich gilt es, den Einsatz der Tablets regelmäßig zu evaluieren und immer wieder dem Stand der Technik und dem Wissens- und Leistungsstand der Schüler anzupassen. Ein Ziel, welches in Ansätzen bereits erreicht ist, ist dass die Schüler das Internet und die Tablets produktiv und kompetent nutzen und daher gerüstet sind für eine Zukunft in einer digital geprägten Welt des 21. Jahrhunderts. Eine weitere Grundlage zum Gelingen des Projekts hat sich als wichtig herausgestellt: Nur wenn die Lehrer die nötigen technischen und didaktischen Kenntnisse dafür mitbringen, kann das Projekt ‚Tablet-Klasse' gelingen.

Abschließend bleibt noch anzumerken, dass nicht die Art des Endgeräts der zentrale Aspekt ist, vielmehr ist der ausschlaggebende Faktor, dass es funktioniert, die Schüler motiviert und sie zum Lernen anregt.

Weitere Informationen rund um das Projekt sind zu finden unter:
www.ipadklasselehrte.wordpress.com

Literatur

Medienpädagogische Forschungsverbund Südwest (2012): JIM-Studie 2012. Abgerufen unter: http://www.mpfs.de/fileadmin/JIM-pdf12/JIM2012_Endversion.pdf (17.03.13)

Isabell BAUSCH, Regina BRUDER, Darmstadt

TELPS – Ein Instrument zur Erforschung und Förderung von mathematikdidaktischem Wissen

Einleitung

Mathematikdidaktisches Wissen ist Forschungsgegenstand einiger nationaler und internationaler Forschungsprojekte wie COACTIV oder TEDS-M. TELPS (Teacher Education Lesson Plan Survey) ordnet sich ebenfalls in diesen Forschungsrahmen ein. Das Ziel von TELPS besteht darin mathematikdidaktisches Wissen, welches zur Planung und Gestaltung von Mathematikunterricht nötig ist, im Rahmen der universitären Lehrerausbildung zu untersuchen. Da zwischen Testergebnissen und dem tatsächlichen Handeln im Unterricht oft eine Diskrepanz besteht (Fischler, 2001), wurde die Repertory-Grid-Methode und die damit verbundene Theorie persönlicher Konstrukte (Kelly,1955) als Hintergrund für die Entwicklung von TELPS gewählt. Da die Repertory-Grid-Methode nicht nur eine nomothetische, sondern auch eine ideografische Datenauswertung ermöglicht, kann die Datengrundlage von TELPS dazu genutzt werden ein individuelles Feedback für die Teilnehmer zu generieren. Dieses Feedback dokumentiert den aktuellen mathematikdidaktischen Wissensstand des TELPS-Teilnehmers und kann innerhalb der beiden Phasen der Lehrerausbildung als Reflexionsanlass über den eigenen Lernprozess eingesetzt werden. Somit kann TELPS auch dazu beitragen die Entwicklung von mathematikdidaktischem Wissen zu fördern.

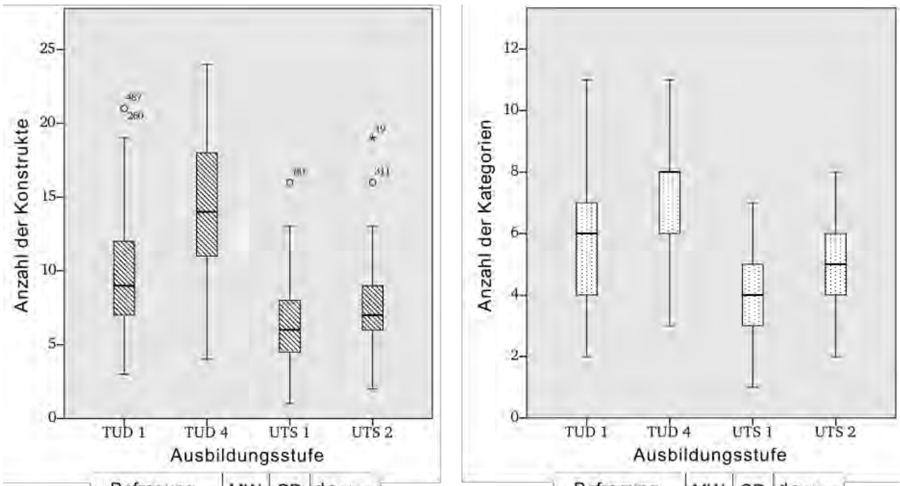
TELPS und seine Teilnehmer

TELPS ist eine adaptierte Repertory-Grid-Befragung, in deren Zentrum das Vergleichen von zwei Unterrichtsentwürfen steht (Bausch, Bruder & Prescott, 2011). Die Befragung ist als Panel designt und wird an der TU Darmstadt und an der University of Technology Sydney (UTS) innerhalb der Mathemtiklehrerausbildung (Sekundarstufe II) in ausgewählten Mathematikdidaktik-Lehrveranstaltungen durchgeführt. Die Ausbildung zum Mathematiklehrer für die Sekundarstufe II ist an beiden Universitäten strukturell unterschiedlich. Während die Lehramtsstudierenden an der TU Darmstadt ein neunsemestriges Studium in zwei Unterrichtsfächern und den Grundwissenschaften Pädagogik und Psychologie absolvieren, beginnen die Studierenden an der UTS das zwei semestrige Lehramtsstudium (Bachelor of Education) erst nach einer entsprechenden mathematikhaltigen Qualifikation (Bachelor). Die meisten Studierenden der UTS besitzen eine Qualifikation in einer Ingenieurswissenschaft und haben zuvor in diesem Beruf gearbeitet. Auf Grund dieser strukturellen Unterschiede in der Mathematiklehrerausbildung stellt sich die Frage, ob es auch Unterschiede bei den Studierenden in der Analyse von Unterrichtsentwürfen gibt.

Ergebnisse von TELPS an den beteiligten Universitäten

Zwischen 2009 und 2012 wurde TELPS insgesamt 526 mal an der UTS und der TU Darmstadt (TUD) in verschiedenen didaktischen Lehrveranstaltungen durchgeführt. Während an der UTS auf Grund der kurzen Studiendauer nur zwei Messzeitpunkte erhoben werden konnten, wurde TELPS an der TU Darmstadt zu vier Messzeitpunkten durchgeführt. Um die Ergebnisse der beiden Universitäten vergleichbar zu machen, werden im Folgenden die Daten der Studienanfänger den Daten der Studierenden jeweils kurz vor Ende ihres Studiums gegenüber gestellt.

Um etwaige Unterschiede zwischen den Analysen der Unterrichtsentwürfe zu untersuchen, wurde zunächst die Anzahl der gefundenen Unterschiede und Gemeinsamkeiten - die sogenannten Konstrukte - analysiert. Die Absolventen beider Universitäten nennen signifikant mehr Konstrukte um die Unterrichtsentwürfe miteinander zu vergleichen, als die Anfänger. Der Effekt an der TU Darmstadt ist jedoch größer (vgl. Abb.1).



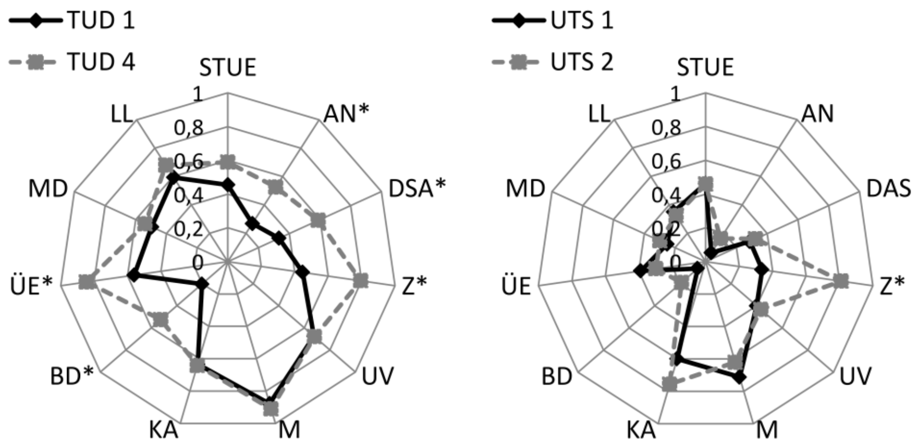
Befragung	MW	SD	d_{Cohen}
TUD 1 (N=123)	9,5	3,6	1,07 *
TUD 4 (N=78)	13,8	4,4	
UTS 1 (N=80)	6,2	2,7	0,47 *
UTS 2 (N=37)	7,7	3,6	

Befragung	MW	SD	d_{Cohen}
TUD 1 (N=123)	5,8	1,9	0,91 *
TUD 4 (N=78)	7,4	1,6	
UTS 1 (N=80)	4,2	1,6	0,12
UTS 2 (N=37)	4,8	1,6	

Abbildung 1: Anzahl Konstrukte und Anzahl Kategorien

Mit Hilfe eines Kategoriensystems (vgl. Bausch, Bruder & Prescott, 2011) wurden die genannten Konstrukte hinsichtlich ihres Inhalts kategorisiert, um so die inhaltliche Breite der studentischen Analysen der Unterrichtsentwürfe einzuschätzen. Während die Absolventen der TU Darmstadt signifikant mehr Kategorien verwenden als die Anfänger, unterscheiden sich die Studierenden der UTS nicht signifikant voneinander (Abb. 1).

Um die Analysen der Unterrichtsentwürfe detaillierter zu untersuchen, ist zeigt Abbildung 2, wie viel Prozent der Studierenden mindestens ein Konstrukt aus der jeweiligen Kategorie nennen. Es fällt auf, dass beide Anfängergruppen die Unterrichtsentwürfe häufig unter den Aspekten der Motivation und der kognitiven Aktivierung analysieren. In Darmstadt haben die Absolventen im Vergleich zu den Anfängern einen differenzierteren Blick auf Mathematikunterricht, da die Kategorien Ausgangsniveau, Didaktische Sachanalyse, Ziele, Üben und Binnendifferenzierung signifikant häufiger verwendet werden. In Sydney wird im zweiten Semester nur die Kategorie Ziele signifikant häufiger zur Analyse der Unterrichtsentwürfe verwendet.



STUE: Struktur des Unterrichtsentwurfs; **AN**: Ausgangsniveau und Rahmenbedingungen; **DSA**: Didaktische Sachanalyse; **Z**: Ziele; UV: Unterrichtsverlauf; **M**: Motivation; **KA**: Kognitive Aktivierung; **B**: Binnendifferenzierung; **ÜE**: Üben und Ergebnissicherung; **MD**: Medien; **LL**: Lehr- und Lernformen

Abbildung 2: Prozentuale Häufigkeit der Kategorien

Diskussion der Ergebnisse

Der Vergleich der Ergebnisse der beiden Universitäten zeigt, dass es Unterschiede in den Analysen der Unterrichtsentwürfe gibt und damit auch im mathematikdidaktischen Wissen der Studierenden. Während die Studierenden in Darmstadt mindestens neun Semester Zeit haben ihr mathematikdidaktisches Wissen zu entwickeln, lernen die Studierenden der UTS den gleichen Umfang an didaktischem Wissen (30CP) innerhalb von zwei Semestern. Dieser Unterschied scheint sich auf die Ergebnisse der verwendeten Kategorien auszuwirken, denn die Studierenden der UTS nennen nach zwei Semestern eine Kategorie häufiger, während in Darmstadt 5 Kategorien häufiger zur Analyse der Unterrichtsentwürfe verwendet werden. Dies deutet daraufhin, dass sich eine längere Ausbildungszeit positiv auf die Entwicklung von mathematikdidaktischem Wissen auswirkt. Ferner zeigt sich, dass die reine Unterrichtserfahrung im Gegensatz zur Ausbildungsdauer weniger mit der Anzahl der Kategorien korreliert ($r_{Unterricht} = 0{,}173$; $r_{Ausbildungsdauer} = 0{,}317$). Dieses Ergebnis ist ein

Indiz dafür, dass Unterrichten alleine ohne Reflexion oder Mentoring nur in geringem Zusammenhang mit der Entwicklung von fachdidaktischem Wissen steht (vgl. hierzu Bausch, Bruder & Prescott, 2011). Diese Ergebnisse sind jedoch zunächst nur Hypothesen, die es anhand von längsschnittlichen Daten näher zu untersuchen gilt.

Nutzen von TELPS

Mithilfe von TELPS kann mathematikdidaktisches Wissen im Rahmen von Unterrichtsplanung evaluiert werden, da TELPS in der Lage ist Unterschiede innerhalb von mathematikdidaktischem Wissen zu erfassen. TELPS eignet sich jedoch auch zu Förderzwecken. Durch ein gezieltes individuelles Feedback können Reflexions- und Lernprozesse bei den TELPS-Teilnehmern angestoßen werden. Um ein solches Feedback effizient zu gestalten, wurde TELPS als online Fragebogen mit automatisiertem Feedback programmiert. Dieses Feedback fasst alle Teilnahmen zusammen und gibt eine automatische individuelle Rückmeldung auf verschiedenen Bezugsnormen (Rheinberg, 2002). So kann ein TELPS-Teilnehmer seinen Lernprozess reflektieren und gleichzeitig seine Ergebnisse in Bezug zu den Ergebnissen der anderen Teilnehmer einschätzen. Um dieses sofortige Feedback zu ermöglichen, werden basierend auf einer quantitativen Datenanalyse verschiedene Grafiken und Textbausteine automatisch zu einem Feedback zusammengestellt. Dieses Feedback kann Teil eines Portfolios zur Dokumentation des eigenen Lernprozesses sein und Anregungen zum Weiterlernen bieten (vgl. Chamoso, Cáceres & Azcárate, 2012). Ein Prototyp des online Fragebogens und des Feedbacks, sowie weitere Projektinformationen sind auf www.telps.de zu finden.

Literatur

Bausch, I., Bruder, R., & Prescott, A. (2011). Personal Constructs of Planning Mathematics Lessons. In Ubuz, B., Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, S.113–120). Ankara, Türkei: PME

Chamoso, J.M., Cáceres M.J. & Azcárate, P. (2012). Reflection on the teaching-learning process in the initial training of teachers. Characterization of the issues on which pre-service mathematics teachers reflect, Teaching and Teacher Education, 28(2), 154-164

Fischler, H. (2001). Verfahren zur Erfassung von Lehrer-Vorstellungen zum Lehren und Lernen in den Naturwissenschaften. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften (7). S.105-120

Kelly, G. A. (1955). The psychology of personal constructs. New York: Norton.

Rheinberg, Falko (2002): Motivationsförderung im Unterrichtsalltag. Probleme, Untersuchungen, Ergebnisse. In: Pädagogik (9), S. 8–13

Silvia BECHER, Rolf BIEHLER, Reinhard HOCHMUTH, Juliane PÜSCHL, Stephan SCHREIBER, Paderborn/ Lüneburg

Von Zahlenmustern zur vollständigen Induktion – Analysen zur Argumentationsqualität von Studierenden im ersten Semester

Das vom BMBF geförderte Projekt LIMA[1] (Lehrinnovationen in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation, www.lima-pb-ks.de) ist ein kürzlich zu Ende gegangenes Kooperationsprojekt von Fachmathematikern, Fachdidaktikern und Psychologen der Universitäten Kassel, Paderborn und Lüneburg. Zugleich ist es ein assoziiertes Projekt des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik. Ziel des Projektes war es, Übergangsschwierigkeiten an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule im Studiengang Lehramt Mathematik für Haupt- und Realschule zu verringern. Dazu wurden eine Reihe von Lehrinnovationen innerhalb der zentralen Fachveranstaltung des ersten Semesters („Grundzüge der Mathematik I“) entwickelt, implementiert und teilweise auch evaluiert. Zu den Lehrinnovationen gehörte die Einführung einer Präsenzphase in den Übungen, überarbeitete Übungsaufgaben, die Einführung eines „Mathe-Treffs“ und eine intensive, semesterbegleitende Betreuung der Tutoren inklusive einer Tutorenschulung. Zur Evaluation der Lehrinnovationen wurde ein quasiexperimentelles Design gewählt. Dabei bildeten die Studienanfänger des WS 09/10 die Kontrollgruppe und die Studienanfänger des WS 10/11 die Experimentalgruppe. In beiden Kohorten wurden identische Klausuren geschrieben. Die „übliche“ Klausurbepunktung wurde als ein ökologisch valides Leistungsmaß angesehen. Unsere Erwartung, dass die Lehrinnovationen zu signifikant besseren Klausurergebnissen führen, bestätigte sich allerdings nicht. Da die Lehrinnovationen jedoch möglicherweise Dimensionen (u.a. Argumentations- und Darstellungsqualität) beeinflusst haben, die sich nicht oder nicht hinreichend in der Klausurbewertung abbildeten, wurden die Klausurbearbeitungen unter diesem Gesichtspunkt erneut analysiert.

1. Design der Studie

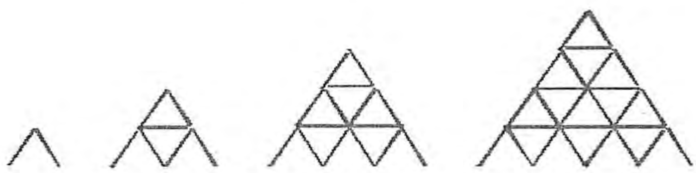
Insgesamt wurden drei der sechs Klausuraufgaben erneut analysiert, ein Kategoriensystem erstellt und dessen Objektivität durch zwei Rater überprüft. Dieser Beitrag wird nur auf Ergebnisse zu einer Aufgabe eingehen. Für die Auswahl dieser Aufgabe sprach, dass hier neben der formalen Kor-

[1] Förderkennzeichen: 01PH08028B, 01PH08028A

rektheit der Lösung auch weitere Facetten wie beispielsweise die Darstellung- oder Argumentationsqualität bei anschaulichen (geometrischen) Beweisen analysiert und Vergleiche zwischen den Beweisformen (anschaulich und formal) gezogen werden können (Leuders, 2010).

Die Aufgabe bestand aus drei Teilaufgaben. Auf die Teilaufgabe a) wird im Folgenden nicht näher eingegangen. Sie lässt aufgrund der Kürze keine tiefere Analyse zu. In Teilaufgabe b) wird von den Studierenden ein Darstellungswechsel von einer algebraischen Formel zu einem geometrischen Muster und somit eine anschaulich (geometrische) Begründung gefordert. Im dritten Teil der Aufgabe soll eine explizite Folge zur Berechnung der Kartenanzahl mit Hilfe der in Aufgabenteil b) zuvor begründeten rekursiven Folge und dem bekannten Beweisschema der vollständigen Induktion bewiesen werden.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Als Kartenhauszahlen K_1, K_2, K_3, K_4 ... bezeichnet man die Anzahlen von Karten in den folgenden verschieden hohen Kartenhäusern.



(a) Wie viele Karten brauchen Sie für ein Kartenhaus mit 8 Stockwerken?

(b) Begründen Sie anschaulich (geometrisch) für $n \in \mathbb{N}$ die Rekursion

$$K_{n+1} = K_n + 3n + 2, \quad K_1 = 2.$$

(c) Begründen Sie unter Verwendung von (b) mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$K_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

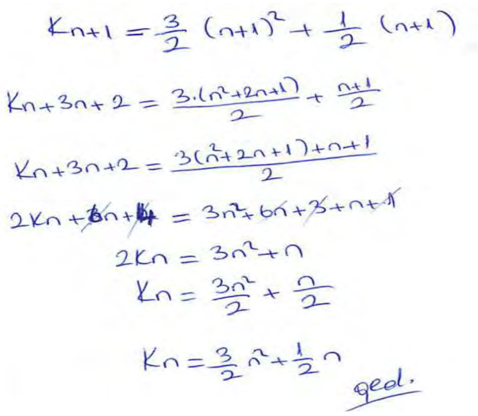
2. Kategoriensystem

Für die Analyse des anschaulich (geometrischen) Beweises haben wir die folgenden Kategorien verwendet:

i) „Auffinden der geometrischen Entsprechung der drei Summanden“, ii) „Argumentationsqualität“, iii) „die Begründung des Terms 3n“, iv) „Sprachliche Qualität der schriftlichen Darstellung“

Im Folgenden gehen wir genauer auf die Kategorie ii) „Argumentationsqualität“ d.h. die Güte der Argumentationen ein. In dieser Kategorie werden Bearbeitungen, bei denen kein vollständiges Muster gefunden wurde, das heißt, man nicht alle drei Summanden wiederfinden kann, in Stufe 1 eingeordnet. Stufe 2 erhält alle Lösungen, bei denen ein Muster gefunden wurde, dieses aber nur anhand eines Beispiels aufgezeigt und nicht verallgemeinert wird. In Stufe 3 wurden Bearbeitungen eingeordnet, bei denen eine Verallgemeinerung stattfindet, beispielsweise durch eine allgemeine Beschriftung der Skizze, die Erläuterungen dazu jedoch unzureichend sind. Bearbeitungen bei denen eine Verallgemeinerung stattfindet und auch die Argumentation vollständig und gut ist, werden in Stufe 4 eingeordnet.

Für das Kategoriensystem von Aufgabenteil c) wurden die wesentlichen Teile eines Induktionsbeweises genauer betrachtet: i) „Gesamtbehauptung“, ii) „Induktionsanfang“, iii) „Induktionsvoraussetzung“, iv) „Induktionsschritt“.
Die Kategorie iv) „Induktionsschritt“ ist in vier Stufen aufgeteilt. Dabei ist die unterste Stufe, dass der Induktionsschritt nicht oder falsch aufgeschrieben wurde. In Stufe 2 werden Bearbeitungen eingeordnet, welche große Mängel in der Darstellung aufweisen. Wenn es sich um kleine Mängel handelt, so werden die Bearbeitungen eine Stufe besser eingestuft, in Stufe 4 werden Bearbeitungen eingestuft, welche den Induktionsschritt gut darstellen. Bei dieser Einordnung wurde die „0=0“- Problematik mit erfasst (Schichl & Roland, 2012, S. 49), d.h. das Problem, dass von der zu zeigenden Identität ausgegangen und durch Äquivalenzumformungen die wahre Aussage 0=0 hergeleitet wird.



$$K_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)$$
$$K_n + 3n + 2 = \frac{3\cdot(n^2+2n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}$$
$$K_n + 3n + 2 = \frac{3(n^2+2n+1)+n+1}{2}$$
$$2K_n + \cancel{6n} + \cancel{4} = 3n^2 + \cancel{6n} + \cancel{3} + n + \cancel{1}$$
$$2K_n = 3n^2 + n$$
$$K_n = \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}$$
$$K_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$
qed.

Beispiel einer Aufgabenbe-arbeitung, welche in der Kate-gorie „Induktionsschritt“ in Stufe 2 eingeordnet wurde, da hier von der zu zeigenden Gleichheit ausgegangen wird, Äquivalenzumformungen ge-macht werden, aber die Äquivalenzzeichen fehlen.

3. Ergebnisse

In den Kategorien des geometrisch anschaulichen Beweises konnten keine signifikanten Unterschiede zwischen den Kohorten festgestellt werden. Bei der sprachlichen Darstellung sieht man jedoch eine deutliche Tendenz, dass die Experimentalgruppe ihre Ergebnisse eher in ganzen Sätzen formuliert. Man erkennt, dass es den Studierenden schwer fällt, ein Muster zu finden und dass sie Probleme mit der Verallgemeinerungsbegründung haben (in der Experimental- sowie in der Kontrollgruppe sind 17% in der obersten Stufe eingeordnet worden).

Bei dem Induktionsbeweis zeigt sich, dass die Experimentalgruppe in der Kategorie „Gesamtbehauptung“ mit p=0,084 signifikant besser abschneidet. Ähnlich gilt dies für die Kategorie „Induktionsanfang“ (p=0,11) und den „Induktionsschritt“ (p=0,1). Bei der Induktionsbehauptung ergab sich ein hochsignifikanter Unterschied (p=0,0): Die Experimentalgruppe hat die Induktionsbehauptung zu 71% gut aufgeschrieben, bei der Kontrollgruppe kamen nur 2% in die beste Kategorie.

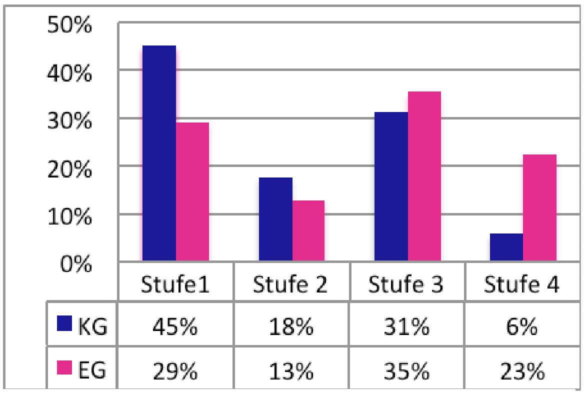


Abbildung 1 Kategorie "Induktionsschritt" – Ergebnis

4. Fazit

Insgesamt stellen das Erkennen, Beschreiben und Erläutern eines Musters und schließlich das Aufstellen und Begründen eines darauf bezogenen algebraischen Ausdrucks für die Studierenden eine große Hürde dar. Bei der Bearbeitung dieser Teilaufgabe zeigten sich zwischen den beiden Kohorten im Hinblick auf unsere Analysekategorien keine Unterschiede. Dies spricht dafür, dass die Lehrinnovation bei der Bewältigung der hier auftretenden Hürde keinen Effekt zeigt. Möglicherweise sind hier spezifischere Maßnahmen notwendig. Bei der vollständigen Induktionsaufgabe zeigen sich Unterschiede. Möglicherweise fällt diese Aufgabe den Studierenden leichter, da es sich um eine vorstrukturierte Beweisführung handelt. Eine weitere Erklärung für diesen Unterschied könnte sein, dass dadurch, dass auf den Beweistyp der vollständigen Induktion in der Tutorenschulung (eine Lehrinnovation des Projekts) eingegangen (Biehler et. al, 2011) wurde, dies auch in den Übungen besser vermittelt wurde. Insgesamt kann man daher vielleicht sagen, dass man bei einer Aufgabe, bei der ein festes Beweisschema zu Grunde liegt, schneller Veränderungen feststellen kann, als bei Aufgaben, die mehr Kreativität erfordern. Um Veränderungen auch im Bereich der Mustererkennung feststellen zu können, wird man vermutlich spezifischer auf deren Anforderungen eingehen müssen.

Literatur

Biehler, R. Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S. & Hänze, M. (2011). *Fachbezogene Qualifizierung von MathematiktutorInnen – Konzeption und erste Erfahrungen im LIMA-Projekt.* In: Hochschuldidaktik – Mathematik und Informatik. Symposiumsband zum Symposium „Verbesserung der Hochschullehre in Mathematik und Informatik“.

Leuders, T. (2010). *Erlebnis Arithmetik zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schichl H. & Steinbauer R. (2012). *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Berlin, Heidelberg.

Ramona BEHRENS, Würzburg

Forschendes Lernen – unterstützt durch Taschencomputer

Forschendes Lernen ist ein aktiver Prozess, bei dem die Lernenden größtenteils selbstständig Lerninhalte erarbeiten. Dies geschieht durch die eigenständige Formulierung von Frage- und Problemstellungen mit dem Ziel diese selbstständig zu beantworten. Ein weiteres Merkmal des forschenden Lernens ist neben der Formulierung von Fragestellungen auch die reflektierte Vorgehensweise. Das Vorgehen wird vor dem Ausführen geplant und die selbstgewählten Strategien, der Lösungsweg sowie das Ergebnis werden beurteilt (vgl. auch Messner, 2009, S. 22f, Bönsch 1995, S. 198f).

Bezogen auf die Schule werden unter forschendem Lernen Arbeitsweisen der Schüler verstanden, die der Erforschung von subjektiv Neuem und damit der Aneignung von Wissen dienen. Diese Arbeitsformen sind analog zum systematischen Vorgehen und Strategien des wissenschaftlichen Arbeitens (vgl. Messner, 2009, S. 22f, Bönsch 1995, S. 198f).

Die folgende Abbildung (Abb. 1) zeigt ein theoretisches Modell für die Vorgehensweise beim forschenden Lernen (vgl. u.a. auch Behrens 2012, Bruce & Bishop 2008, S. 710, Bönsch S. 199).

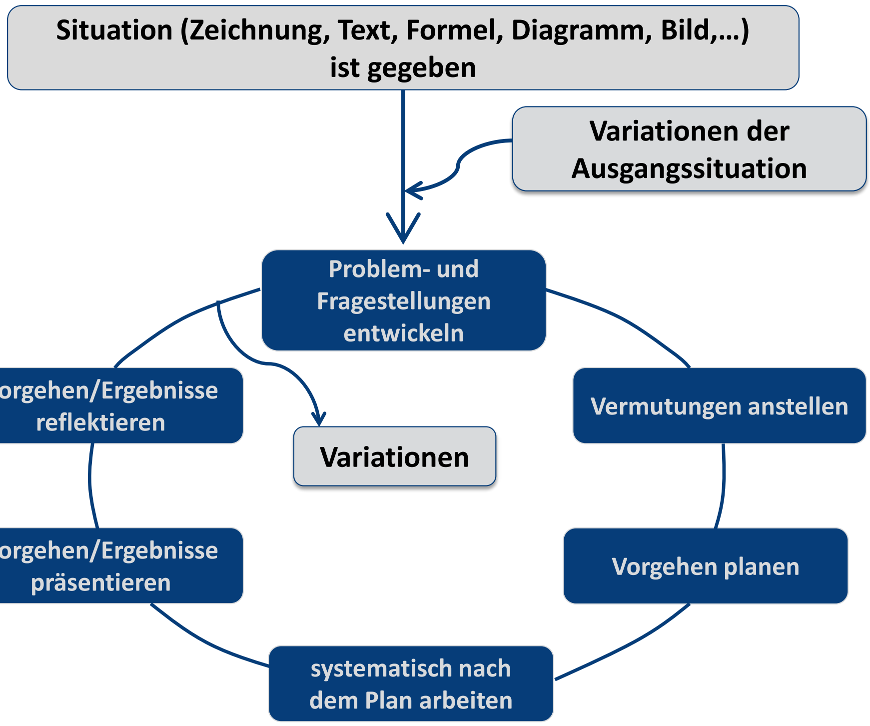


Abb.1: Forschungskreislauf

Das Ziel beim forschenden Lernen ist die Erforschung einer Gesamtsituation mit möglichen Veränderungen. Ausgehend von einer Situation, die beispielsweise in Form eines Textes, Bildes oder einer Formel gegebenen ist, werden Frage- und Problemstellungen formuliert. Durch Variation der Ausgangssituation können sich weitere Fragestellungen ergeben.

Das Entwickeln eigener Fragestellungen stellt die erste Phase des Forschungskreislaufs dar. Nach dem Aufstellen von Vermutungen folgt die Planung und Ausführung des Vorgehens. Anschließend werden die Herangehensweisen und erhaltenen Ergebnisse präsentiert und reflektiert. Die Reflexion sowie die Variation der Ausgangssituation können zu neuen Fragestellungen führen. Im Forschungskreislauf sind die wesentlichen Elemente des forschenden Lernens dargestellt. Die einzelnen Phasen können natürlich auch fließend ineinander übergehen und nicht jede Phase muss in jedem Forschungsprozess durchlaufen werden (vgl. auch Bruce & Bishop 2008, S.711).

Im Rahmen eines Forschungsprojekts wird vor allem der Aspekt des Entwickelns von Frage- und Problemstellungen beim forschenden Lernen betrachtet. Diesbezüglich wird der Frage nachgegangen, inwieweit der Einsatz von Taschencomputern beim selbstständigen Entwickeln von Problem- und Fragestellungen, zu einer gegebenen Situation, unterstützend helfen kann.

In der Literatur ist das Entwickeln von Frage- und Problemstellungen auch unter dem Begriff „Problem Posing" zu finden (vgl. u.a. Brown & Walter 1983). Das Problem Posing ist eng mit dem Problemlösen verknüpft (vgl. ebd., S. 107ff). Insgesamt kann das Formulieren von Fragestellungen helfen ein tieferes Verständnis eines Themenbereichs zu erlangen. Das Entwickeln von Frage- und Problemstellungen kann vor, während und nach dem Lösen eines Problems eine Rolle spielen. Erstens können Variationen eines Problems oder die Betrachtung von Sonderfällen helfen das Ausgangsproblem zu lösen. Zweitens erzeugt die Lösung eines Problems fast immer neue Fragestellungen. Dies ist auch im Forschungskreislauf in Abbildung 1 angedeutet. Die Reflexion des Vorgehens und der Lösung kann neue Fragestellungen aufwerfen, z. B. wegen Unzufriedenheit mit der gewählten Vorgehensweise oder bei Verwunderung über das Ergebnis (vgl. auch Brown & Walter 1983, S. 117). Drittens kann das Formulieren von Fragestellungen dazu beitragen, Verständnis über den Themenbereich hinaus zu erlangen, indem erforscht wird, was passiert, wenn wesentliche Elemente eines Problems variiert werden (vgl. ebd. S. 2).

Im Folgenden werden einige Strategien aufgeführt, die bei der Formulierung von Frage- und Problemstellungen hilfreich sein können.

Zunächst einmal können Fragestellungen entwickelt werden, indem die gegebene Situation betrachtet wird und zu den Eigenschaften der Situation Fragen gestellt werden.

Eine weitere Strategie für das Formulieren von Frage- und Problemstellungen ist die „what-if-not"-Strategie. Dabei werden zu Eigenschaften einer gegebenen Situation alternative Eigenschaften gesucht. Es werden Variationen der Ausgangssituation gesucht, indem die Frage gestellt wird: Was wäre, wenn die Situation anstatt dieser Eigenschaft eine andere besäße? Zu den veränderten Eigenschaften werden dann Fragen formuliert (vgl. Brown & Walter 1983, S. 43ff). Beispielsweise ist eine Gerade gegeben, dann könnte die gegebene Situation so verändert werden, dass anstatt der Geraden eine Parabel betrachtet wird.

Weitere Strategien, die zum Variieren der Ausgangssituation und damit beim Formulieren von Fragestellungen nützlich sein können, sind neben dem Austausch von Objekten auch das Verändern von Werten und Positionen, die Veränderung der Darstellungsform der Ausgangssituation sowie die dynamische Betrachtung von Problemstellungen (vgl. auch Behrens 2012).

Der Einsatz eines Taschencomputers (grafikfähiger Taschenrechner, in den ein Computer-Algebra-System integriert ist) bietet Möglichkeiten, die bei der Formulierung von Fragestellungen und vor allem bei der Variation der Ausgangssituation hilfreich sein könnten.

Durch die Verwendung eines Taschencomputers können schnell verschiedene Fälle durch Verändern von Werten angeschaut werden. Mithilfe eines Taschencomputers können beispielsweise Auswirkungen von mehreren Parametern auf den Verlauf eines Graphen betrachtet werden. Zudem könnte ein Taschencomputer auch die Dynamisierung von einem oder auch von mehreren Objekten erleichtern. Durch die Vernetzung der Arbeitsbereiche eines Taschencomputers haben Veränderungen in einer Darstellung auch Änderungen in den anderen Darstellungsformen zu Folge. Auch bei der Beantwortung der selbstgestellten Fragestellungen, kann der Taschencomputer von Nutzen sein (vgl. auch Laakmann, 2008, S. 44, Behrens 2012).

Das Ziel des Forschungsprojektes ist es, zu untersuchen, welche Strategien Schüler von sich aus zur Formulierung von Fragestellungen und auch zur Variation einer Ausgangsituation verwenden und welche Bedeutung der Taschencomputer dabei hat. Eine weitere Frage, die dabei von Interesse ist, bezieht sich darauf, welche Schwierigkeiten Schüler beim Entwickeln von Fragestellungen und beim Variieren von gegebenen Situationen haben.

Zur Beantwortung dieser Fragen sind eine Unterrichtsbeobachtung sowie die Auswertung von Schülerdokumenten vorgesehen. In Interviews wird erfragt, wie die Schüler vorgegangen sind und inwiefern der Taschencomputer bei der Formulierung von Fragestellungen eine Rolle gespielt hat.

Zur Erfassung der Vorkenntnisse der Schüler bezüglich der Formulierung eigener Fragestellungen, zum Einsatz des Taschencomputers sowie den bereits behandelten Themen im Unterricht, sollen die Lehrpersonen sowie die Schüler befragt werden.

Literatur

Behrens, R. (2012): Forschendes Lernen im Mathematikunterricht – unterstützt durch den Einsatz von Taschencomputern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 109 - 112.

Bönsch, M. (1995): Variable Lernwege - Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden, Paderborn, München, Wien, Zürich, Verlag Ferdinand Schöningh.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983): The Art of Problem Posing. Philadelphia, The Franklin Institute Press.

Bruce, B. C. & Bishop, A. P. (2008): New Literacies and Community Inquiry. In: The Handbook of research on new literacies, Coiro, J., Knobel, M., Lankshear, C., Leu, D. J., Tailor & Francis Group, LLC, 699-742.

Laakmann, H. (2008): Multirepräsentationsprogramme im Mathematikunterricht. In: Mathematikunterricht 54 (6), 44–49.

Messner, R. (Hrsg.) (2009): Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. Edition Körber-Stiftung.

Ralf BENÖLKEN, Münster

Gruppenwettbewerbe: Eine geeignete Organisationsform für die Förderung mathematisch begabter Kinder?

1. Grundlegende Aspekte zur Einordnung von Wettbewerben

Die im Hinblick auf konstruktive Lernprozesse grundsätzliche Produktivität der Gestaltung von Wettbewerben als Gruppenaktivitäten ergibt sich aus denk- und motivationspsychologischen Ansätzen (z.B. Wygotski 1978; Slavin 1993). Mit Wagner/Neber (2007) sind Wettbewerbe als Lernumgebungen mit geringer Strukturiertheit zu sehen, die sich durch Aufgaben mit einem erhöhten Schwierigkeitsgrad, die kompetitive Struktur sowie ein hohes Maß an extrinsischer Motivation auszeichnen. Besondere Potenziale von Wettbewerben liegen z.B. in der Förderung bereichsspezifischer Fähigkeiten und Interessen (z.B. Urban 2004; Klimova 2012) sowie der individuellen Persönlichkeitsentwicklung (z.B. Wagner/Neber 2007) – etwa im Hinblick auf Fähigkeiten im selbstständigen Arbeiten oder im Hinblick auf die funktionale Ausprägung motivationaler Komponenten –, in der gebotenen Möglichkeit zum Austausch mit „Gleichgesinnten“ (z.B. Oswald et al. 2005) sowie in einem hohen diagnostischen Potenzial, insbesondere hinsichtlich der Identifikation von „Underachievern“ (z.B. Hertel 2000). Mögliche Problembereiche sind für Wettbewerbe als Fördermaßnahme für begabte Kinder einerseits darin zu sehen, dass es sich um verhältnismäßig spät einsetzende und kurzfristige Maßnahmen handelt (z.B. Urban 2004), die oft durch den sozialen Hintergrund der Teilnehmenden beeinflusst werden (z.B. Dittmer 2007), sowie andererseits in einer einseitigen Produktorientierung, die keine Analyse von Problemlösestrategien o.Ä. umfasst (z.B. Käpnick 1998). Bestehende Wettbewerbe lassen sich in Anlehnung an Jansing (2009) in zwei Prototypen einteilen (Tab. 1).

Typ A	*Typ B*
Klausurenwettbewerb	Projektorientierter Wettbewerb
Aufgabentyp „Entdecken und Herausfinden“	Aufgabentyp „Erfinden und Konstruieren“
Einzelarbeit	Gruppen-/Teamarbeit
Konkurrenzorientierte Bewertung	Kriteriumsorientierte Bewertung

Tab. 1: Grundtypen von Wettbewerben (in Anlehnung an Jansing 2009)

Im mathematischen Bereich finden sich weit überwiegend Wettbewerbe des Typs A, z.B. der „Bundeswettbewerb Mathematik“ oder die „Mathematik-Olympiaden“. Grundsätzlich beinhalten Organisationsformen, die sich an Typ B anlehnen, m.E. ein großes Potenzial für eine längerfristige Förderung – insbesondere für ältere Kinder und Jugendliche im Sekundarstufenalter –, da mathematisches „Arbeiten und Forschen“ über einen gewissen Zeitraum hinweg authentisch abgebildet werden, indem mathematische Fragestellungen zu erkunden sind (wie beispielsweise im Wettbewerb „Jugend forscht“). Die im Folgenden grob skizzierten Beispiele orientieren sich demgegenüber ebenfalls am Typ B, sind jedoch zum Einsatz in kürzeren, abgeschlossenen Einheiten gedacht und sowohl mit Grundschulkindern als auch mit älteren Kindern durchführbar.

2. Beispiele für Gruppenwettbewerbe

Gruppenwettbewerbe können verschieden gestaltet werden und Teilwettbewerbe enthalten, in denen Kinder alleine knobeln. Innerhalb des Förderprojekts „Mathe für kleine Asse“ an der Universität Münster (dazu Käpnick 2008) wurden die folgenden Ideen, die z.T. an Fernsehshows oder Gesellschaftsspiele angelehnt sind, als eigenständige Organisationsformen für 90minütige Fördersitzungen erprobt (vgl. Benölken 2013):

- Mathematisches „Jeopardy“: Die Kinder wählen aus verschiedenen Kategorien Problemstellungen und lösen diese anschließend alleine oder in Kleingruppen um die Wette, wobei für jede Aufgabe je nach Schwierigkeitsgrad Punkte zu vergeben sind.
- Spiele wie „MathTabu“ oder „Mathivity“, für die Spielkarten zunächst selbst gestaltet und anschließend ausgetauscht, beschrieben, gemalt oder pantomimisch dargestellt werden sollen. Es können jeweils zwei oder mehr größere Gruppen gegeneinander antreten, wobei die Gruppe mit der höchsten Anzahl richtig erratener Inhalte gewinnt.
- Varianten eines Wettbewerbs in Anlehnung an die Fernsehsendung „Schlag den Raab“, in dem unterschiedliche Problemaufgaben als Spiele aufeinander folgen, wobei für jedes folgende ein Punkt mehr als für das vorhergehende zu vergeben ist. Je nach Gestaltung der einzelnen Spiele treten zwei Gruppen entweder im Ganzen gegeneinander an oder entsenden einen (oder mehr) Vertreter, die sich mit ihrer Gruppe austauschen können.
- Ein Stationenlauf, z.B. zu geometrischen, arithmetischen und stochastischen Inhalten, innerhalb dessen von Kleingruppen an jeder Station Punkte zu sammeln sind (z.B. Jansing 2009).

Über den Einsatz in Förderprojekten hinaus sind diese Wettbewerbe im regulären Unterricht z.B. in Sicherungsphasen oder zur substanziellen Auflockerung einsetzbar.

3. Einschätzungen von Kindern zu Gruppenwettbewerben

In einer explorativen Fragebogenstudie wurden im Rahmen des Projekts „Mathe für kleine Asse“ 63 Kinder (32 Jungen, 31 Mädchen) der dritten und vierten Jahrgangsstufe zu Wettbewerbspräferenzen befragt (Abb. 1).

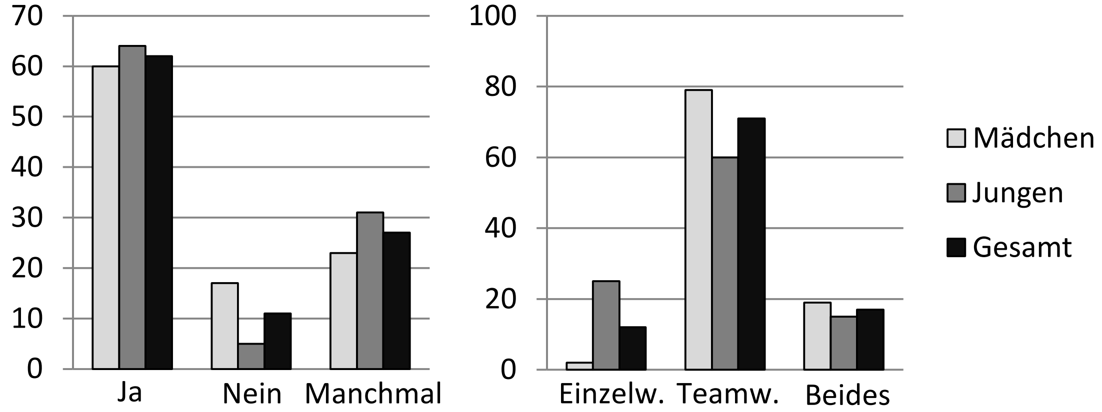


Abb. 1: Prozentuale Anteile der Antworten zu „Nimmst du gerne an Wettbewerben teil?“ (links) bzw. „Magst du in Mathematik lieber Einzelwettbewerbe oder gefällt dir ein Teamwettbewerb besser?“ (rechts)

Insgesamt gaben die Kinder zu einem hohen Anteil an, gerne an Wettbewerben teilzunehmen. Auffällig ist, dass fast ein Fünftel der befragten Mädchen gegenüber nur etwa 5% der befragten Jungen nicht gerne an Wettbewerben teilnimmt. Demgegenüber zeigte mehr als ein Fünftel der Jungen Präferenzen für Einzelwettbewerbe, die sich bei den Mädchen praktisch nicht finden – diese gaben kontrastierend hierzu zu knapp vier Fünfteln gegenüber etwa 60% der Jungen eher Vorlieben für Teamwettbewerbe an. Insofern ergibt sich die These, dass Gruppenwettbewerbe auch und gerade für die Diagnostik und Förderung mathematischer Begabungen bei Mädchen ein geeignetes Instrument darstellen, gleichzeitig dabei aber Präferenzen vieler Jungen Rechnung tragen (z.B. für kompetitive Situationen; Benölken 2011).

4. Erfahrungen und Potenziale

Insgesamt sind die Erfahrungen mit den vorgestellten Formen von Gruppenwettbewerben bisher sehr positiv. Diesbezüglich sind einerseits Aspekte herauszustellen wie Aufgabenbearbeitungen auf einem sehr hohen Niveau, da sich Kinder gegenseitig unterstützen, wenn sie in eine „Sackgasse“ bei der Lösungsfindung geraten. Hieraus ergibt sich zugleich eine besondere Nachhaltigkeit – beispielsweise erinnern sich viele Kinder offenbar (noch) besser an Aufgaben. Positiv erscheinen die gegenseitige Regulation der Kinder, z.B. um vor dem Hintergrund des extrinsischen Motivationspotenzials ein möglichst gutes Gruppenergebnis zu erreichen, sowie die Reduktion von Leistungs- und Konkurrenzdruck auf Einzelne. Insofern stellen Gruppenwettbewerbe eine geeignete Organisationsform dar, um sowohl besondere Bedürfnisse von Jungen als auch von Mädchen aufzunehmen, woraus sich gleichzeitig Hinweise auf das spezifische diagnostische Potenzial ergeben. Negative Effekte wie Gruppendruck oder Zurückhaltung einzelner Gruppenmitglieder waren selten zu beobachten.

Literatur

Benölken, R. (2013): Geschlechtsspezifische Besonderheiten in der Entwicklung mathematischer Begabungen. Forschungsergebnisse und praktische Konsequenzen. In: mathematica didactica, 36, S. 66–96.

Benölken, R. (2011): Mathematisch begabte Mädchen. Untersuchungen zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter. Münster: WTM.

Dittmer, L. (2007): Breiten- oder Spitzenförderung. In P. Fauser & R. Messner (Hrsg.): Fordern und Fördern: Was Schülerwettbewerbe leisten. Hamburg: Edition Körber-Stiftung, S. 85–99.

Hertel, E. (2000): Für jede(n) die passende Herausforderung. Schülerwettbewerbe als Instrument gezielter und individueller Förderung. In H. Wagner (Hrsg.): Begabung und Leistung in der Schule. Modelle der Begabtenförderung in Theorie und Praxis (2. Auflage). Bad Honnef: K. H. Bock, S. 171–183.

Jansing, S. (2009): Entwicklung eines Teamwettbewerbs für kleine Matheasse in der 3. und 4. Klasse. Schriftliche Hausarbeit zur Erlangung des Mastergrades: Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Käpnick, F. (2008): „Mathe für kleine Asse“ – Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.): Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft. Berlin: Lit Verlag, S. 135–148.

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt am Main u.a.: Peter Lang.

Klimova, E. (2012): MatBoj-Wettbewerb als ein neuer fachspezifischer Wettbewerb in Mathematik zur Förderung begabter Schüler. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM, S. 449–452.

Oswald, F., Hanisch, G. & Hager, G. (2005): Wettbewerbe und „Olympiaden“. Impulse zur (Selbst)-Identifikation von Begabungen. Münster u.a.: Lit Verlag.

Slavin, R. E. (1993): Kooperatives Lernen und Leistung: Eine empirisch fundierte Theorie. In G. Huber (Hrsg.): Neue Perspektiven der Kooperation. Ausgewählte Beiträge der Internationalen Konferenz 1992 über kooperatives Lernen. Hohengehren: Schneider, S. 151–170.

Urban, K. K. (2004): Hochbegabungen: Aufgaben und Chancen für Erziehung, Schule und Gesellschaft. Münster: Lit Verlag.

Wagner, H., Neber, H. (2007): Schülerwettbewerbe fördern Begabungen. In P. Fauser & R. Messner (Hrsg.): Fordern und Fördern: Was Schülerwettbewerbe leisten. Hamburg: Edition Körber-Stiftung, S. 73–84.

Wygotski, L. S. (1978): Mind in Society. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Matthias BERNHARD, Kristina REISS, München

Stochastik im Grundschulalter: Strategien bei der Analyse von Vierfeldertafeln[1]

Die Fähigkeit, den Zusammenhang zweier Variablen zu evaluieren, wird nicht nur für den korrekten Umgang mit wissenschaftlicher Evidenz benötigt, sondern spielt auch beim Erkennen kausaler Zusammenhänge im alltäglichen Leben eine wichtige Rolle. Vierfeldertafeln bieten hierbei die Möglichkeit, empirisch erhobene Daten von zwei dichotomen Variablen gebündelt und strukturiert darzustellen. Inwieweit schon Grundschulkinder basale Fähigkeiten bei der Vierfeldertafelanalyse empirischer Daten besitzen und welche Strategien sie dabei verwenden, ist Thema eines Forschungsvorhabens, das hier vorgestellt werden soll.

1. Theoretischer Hintergrund

Einerseits sind bereits Vorschulkinder unter bestimmten Bedingungen in der Lage, bivariate Zusammenhänge korrekt zu evaluieren (Koerber, Sodian, Thoermer & Nett, 2005), andererseits zeigen sich noch im Erwachsenenalter Schwierigkeiten (Shaklee & Tucker, 1980).

Zahlreiche Studien haben Strategien bei der Evaluation bivariater Zusammenhänge untersucht (siehe Hattori & Oaksford, 2007, für eine Übersicht über die Strategien). Dabei wurde in der mathematikdidaktischen Forschung der Aspekt der empirischen Evidenz bei der Vierfeldertafelanalyse bisher eher nicht betrachtet. In der Literatur finden sich vor allem Untersuchungen zur Strategiewahl bei Wahrscheinlichkeitsvergleichen in Laplace-Kontexten (z.B. Urnenvergleiche) und bei proportionalen Vergleichen ohne einen Einfluss von Unsicherheit (z.B. Vergleich von Mischverhältnissen).

In beiden Bereichen zeigen sich typische Fehlvorstellungen. Unter anderem werden oftmals additive statt multiplikative Vergleiche durchgeführt oder nicht alle relevanten Informationen in die Analyse einbezogen (Tourniaire & Pulos, 1985). Bei einer Studie von Lindmeier, Reiss, Ufer, Barchfeld und Sodian (2011) zur Vierfeldertafelanalyse im empirischen Kontext nannte etwa die Hälfte der Grundschulkinder maximal zwei Felder in ihrer Begründung. Shaklee und Mims (1981) haben Testpersonen bei der Vierfeldertafelanalyse eine von vier hierarchisch geordneten Strategien zugeordnet. Hierbei wurden im Grundschulalter ausnahmslos nicht-multiplikative Strategien identifiziert.

[1] Die Studie wurde im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms *„Wissenschaft und Öffentlichkeit“* im Projekt *„Die Entwicklung der Fähigkeit zum Umgang mit fragiler und konfligierender wissenschaftlicher Evidenz im Grundschulalter“* durchgeführt.

Allerdings scheinen auch diese Strategien häufig zum richtigen Ergebnis zu führen. So konnte McKenzie (1994) zeigen, dass es teilweise hohe Korrelationen zwischen der Verwendung nicht-multiplikativer Strategien und dem Phi-Koeffizienten gibt.

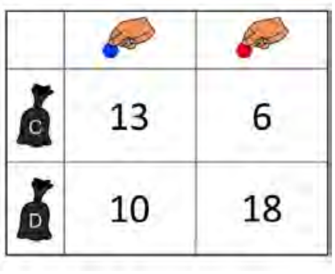
2. Forschungsfragen

- Können Kinder im Grundschulalter bivariate Zusammenhänge aus empirischen Daten, die in Form von Vierfeldertafeln präsentiert werden, korrekt evaluieren?
- Wie viele Felder integrieren die Grundschulkinder bei ihrer Strategie? Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der in der Begründung angegeben Felder und der Lösungsrate?
- Verwenden die Kinder bei einer geeigneten Tafelstruktur schon im Grundschulalter multiplikative Strategien?

Mit der Studie war außerdem die Frage verbunden, welche Faktoren sich schwierigkeitsbeeinflussend auf die Evaluation von Vierfeldertafeln auswirken. Daher waren die Kinder auf sechs verschiedene Testdesigns aufgeteilt. Es wurden die Art der Zahlenrepräsentation (bildlich oder numerisch), die Art der Präsentation der Daten (gleichzeitig oder sequentiell) und der Kontext leicht variiert. Im Folgenden wird eines der verwendeten Testdesigns exemplarisch dargestellt.

3. Methode und Design

In der Studie wurden insgesamt N=132 Schülerinnen und Schüler (63 Mädchen, 69 Jungen) der vierten Jahrgangsstufe interviewt. Dabei wurden den Kindern zwei Beutel vorgelegt, die blaue und rote Chips enthielten. Zunächst wurden sie exemplarisch mit dem möglichen Inhalt der Beutel und mit der Funktionsweise von Vierfeldertafeln vertraut gemacht.



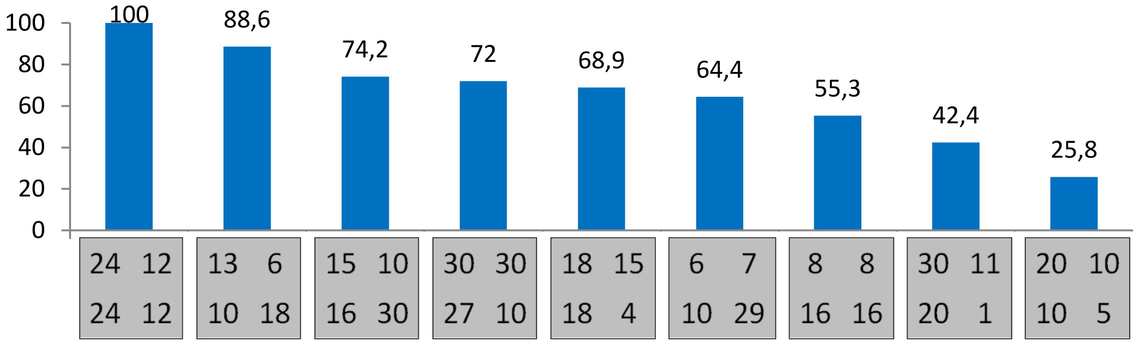
In der Folge wurden den Kindern über einen Bildschirm insgesamt neun Vierfeldertafeln gezeigt. Diese sollten das Ergebnis von Ziehungen aus unterschiedlichen Beuteln mit Zurücklegen darstellen. Die anschließende Frage lautete: Ein Schüler möchte einen blauen Chip ziehen. Sollte er dann hier besser aus Beutel C ziehen oder sollte er besser aus Beutel D ziehen oder macht es keinen Unterschied? Die Tafeln waren so konstruiert, dass die aus der Literatur bekannten Strategien möglichst nur bei einem Teil der Tafeln zur richtigen Lösung führen würden.

Um einen Hinweis darauf zu bekommen, welche Strategie die Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabe tatsächlich verwendet haben, wurden sie anschließend nach einer Begründung gefragt. Ob sich die angegebene Begründung und die verwendete Strategie als konsistent erweisen, soll durch zukünftige Analysen näher untersucht werden (Eyetrackereinsatz und ein Vergleich zwischen korrekter Lösung und der angegebenen Begründung).

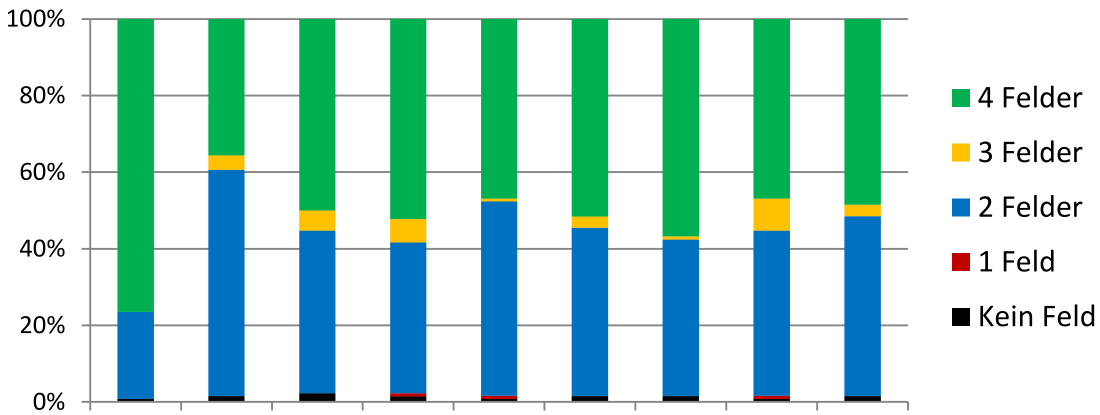
4. Ausgewählte Ergebnisse

Insgesamt ergibt sich bei den neun Tafeln eine mittlere Lösungsrate von 65,74% (M=5,91, SD=2,58). Dabei weisen die einzelnen Tafeln unterschiedliche Schwierigkeitsgrade auf. Die Bandbreite der Lösungsraten reicht von 100% bis zu 25,8%, was unter der Ratewahrscheinlichkeit liegt.

Im folgenden Diagramm sind die einzelnen Items und die zugehörigen Lösungsraten dargestellt. Hier sind die Items nach Lösungsrate sortiert, in der Studie wurden sie in unterschiedlichen Reihenfolgen präsentiert.



Meist haben die Schülerinnen und Schüler zwei Felder (43,3%) oder vier Felder (51,7%) bei ihrer Begründung angegeben. Das bestätigt die Ergebnisse von Lindmeier et al. (2011). Hierbei ergibt sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Anzahl der in der Begründung genannten Zellen und der Lösungsrate ($r = .734$, $p < .01$). Das folgende Diagramm zeigt die Verteilung bei allen neun Items (*Reihenfolge wie oben*).



Multiplikative Strategien wurden insgesamt nur bei 2,6% der Begründungen angegeben. Die numerische Struktur des letzten Items war so konstruiert, dass eine multiplikative Strategie einerseits recht leicht möglich (einfache Vielfache), andererseits für die korrekte Lösung erforderlich war. Unter den Begründungen für dieses Item finden sich mit 17,4% mit Abstand die meisten multiplikativen Strategien. Bei allen anderen Items liegt der Prozentsatz unter 3%.

5. Zusammenfassung und Diskussion

Die Lösungsraten deuten an, dass Kinder im Grundschulalter durchaus frühe Fähigkeiten bei der Vierfeldertafelanalyse in empirischen Kontexten besitzen.

Im Gegensatz zu der Studie von Shaklee und Mims (1981) zeigt sich, dass Kinder teilweise schon im Grundschulalter multiplikative Strategien anwenden, wenn die Tafelstruktur einfache Vielfache beinhaltet. Das spricht dafür, dass ein Teil der Kinder bereits im Grundschulalter multiplikative Strategien verwenden, diese aber ohne einen Begriff von rationalen Zahlen bei einem Großteil der Tafeln noch nicht korrekt anwenden können.

Weitere Analysen sollen die von den Kindern verwendeten Strategien weiter differenzieren. Außerdem soll untersucht werden, inwiefern die Strategien adaptiv angewendet werden und inwiefern dabei die numerische Struktur der Tafel eine Rolle spielt.

Literatur

Hattori, M. & Oaksford, M. (2007): Adaptive non-interventional heuristics for covariation detection in causal induction: Model comparison and rational analysis. In: *Cognitive Science, 31*, 765-814.

Koerber, S., Sodian, B., Thoermer, C. & Nett, U. (2005): Scientific reasoning in young children: Preschoolers' ability to evaluate covariation evidence. In: *Swiss Journal of Psychology, 64*, 141-152.

Lindmeier, A., Reiss, K., Ufer, S., Barchfeld, P. & Sodian, B. (2011): Umgang mit wissenschaftlicher Evidenz in den Jahrgangsstufen 2, 4 und 6: Stochastische Basiskonzepte und Kontingenztafelanalyse. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*, 547-550.

McKenzie, C. (1994): The accuracy of intuitive judgment strategies: Covariation assessment and bayesian inference. In: *Cognitive Psychology, 26*, 209-239.

Shaklee, H. & Mims, M. (1981): Development of rule use in judgments of covariation between events. In: *Child Development, 52*, 317-325.

Shaklee, H. & Tucker, D. (1980): A rule analysis of judgments of covariation between events. In: *Memory & Cognition, 8*, 459-467.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985): Proportional reasoning: A review of the literature. In: *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Nina BERLINGER, Friedhelm KÄPNICK, Münster

Besondere Visualisierungskompetenzen kleiner Matheasse

Im Ringen um immer tiefere Einsichten in Problemlöseprozesse mathematisch begabter Kinder zeigte sich, dass es zwischen zwei ursprünglich relativ unabhängigen Untersuchungsthemen doch enge Verflechtungen gibt, die wir im Folgenden überblicksartig und exemplarisch vorstellen.

1. Räumliches Vorstellungsvermögen und mathematische Begabungen

Das Ziel eines ersten Forschungsvorhabens ist die Klärung der Bedeutung des räumlichen Vorstellungsvermögens für die Entwicklung einer mathematischen Begabung bei Dritt- und Viertklässlern. Die generell große Relevanz räumlichen Vorstellungsvermögens für mathematisches Tätigsein ist unbestritten. In Käpnicks Untersuchungen (1998) konnte die Annahme aber nicht bestätigt werden, dass das räumliche Vorstellungsvermögen ein mathematikspezifisches Begabungsmerkmal ist. Auffällig war, dass sich die mathematisch begabten Kinder bzgl. der Ausprägung des räumlichen Vorstellungsvermögens stark voneinander unterschieden. Dies könnte u. a. im Sinne Krutetzkis (1968) interpretiert werden, der das räumliche Vorstellungsvermögen als günstige, jedoch nicht als unbedingt erforderliche Komponente für eine mathematische Begabung einschätzt und hinsichtlich einer Typisierung verschiedener Ausprägungen mathematischer Begabungen zwischen einem analytischen, einem geometrischen und einem harmonischer Typ differenziert. Dabei nutzen vor allem Kinder des geometrischen Typs aber auch des harmonischen Typs auf beachtlichem Niveau räumlich-visuelle Strategien beim mathematischen Problemlösen.

Darüber hinaus konnten verschiedene Studien im Kontext mathematischer Allgemeinbildung (u. a. Grüßing 2012, Lehmann & Jüling 2002) einen Zusammenhang zwischen der Ausprägung des räumlichen Vorstellungsvermögens und allgemeinen mathematischen Kompetenzen nachweisen. Dieser Zusammenhang ist beim Lösen komplexer Problemaufgaben tendenziell größer als beim Bearbeiten von Routineaufgaben. Als Erklärungen hierfür werden u. a. besondere Fähigkeiten im Wechseln der Repräsentationsebene und im Einnehmen von verschiedenen Perspektiven, die Verfügbarkeit einer effektivitätssteigernden räumlich-visuellen Strategie zusätzlich zu einer abstrakt-logischen Strategie und Kompetenzen im Wechseln zwischen bildhaft-anschaulicher und begrifflich-abstrakter Ebene in Form von Doppelrepräsentationen genannt (z. B. Lehmann & Jüling 2002).

2. Intuitionen und mathematische Begabungen

Als wichtiges Fazit einer zweiten Untersuchung lässt sich auf der Basis von langjährigen Studien zu und der praktischen Tätigkeit mit mathematisch begabten Kindern herausstellen, dass Intuitionen ein allgemein wichtiger und prägender Aspekt mathematisch-produktiven Tuns dieser Kinder sind. Ausgehend von vielen Fallbeispielen gilt für derartige Intuitionen, dass sie

- nicht nur auf dem jeweiligen mathematischen Vorwissen, sondern auch auf allgemeinen kognitiven Kompetenzen der Kinder beruhen,
- durch ein ganzheitlich-komplexes, sinnlich-emotionales Erfassen eines mathematischen Sachverhaltes geprägt sind,
- nicht vordergründig an verbale Sprache gebunden sind, sondern aus im Unbewussten subjektiv konstruierten komplexen „Bild- und Symbolwelten" bestehen,
- in allen Problemphasen auftreten und den jeweiligen Stil und die Lösungsqualität mitbestimmen, etwa als
  - sinnlich-emotionales, ganzheitliches Erfassen einer Problemsituation,
  - als plötzliche, meist vage Eingebung einer Lösungsidee,
  - als bruchstückhafte oder diffuse Darstellung bzw. Erklärung einer Lösung,
  - intuitives „Theoriekonstrukt" (Definition eines Begriffs, Begründung eines wesentlichen mathematischen Zusammenhangs) (vgl. Käpnick 2010, Käpnick 2012).

Ein Vergleich mit Selbstreflexionen professioneller Mathematiker zeigt, dass es diesbezüglich offenbar keine prinzipiellen Unterschiede zwischen der Entdeckertätigkeit von Kindern und der von Wissenschaftlern gibt. Auffällig ist insbesondere, dass Intuitionen bei kleinen wie bei großen Matheassen in verschiedenen Problemlösephasen auftreten und dass sich Problemlöseabläufe in beiden Gruppierungen ähneln.

3. Ein Fallbeispiel für visuelle Bilder beim Lösen mathematischer Probleme

Das folgende Fallbeispiel kann verdeutlichen, wie sowohl besondere Kompetenzen im räumlichen Vorstellen als auch ein Aspekt von Intuitionen beim Lösen einer Problemaufgabe „zusammenspielen". Die Beispielaufgabe bestand darin, alle Möglichkeiten für die Anzahl von Schnittpunkten bei 1, 2, 3, 4 und 5 Geraden (in einer Ebene) zu erkunden. Der 10jährige Sven zeichnete nicht, wie die meisten anderen mathematisch begabten Kinder, spontan oder systematisch verschiedene Lagebeziehungen von Geraden auf, sondern löste die Aufgabe „nur im Kopf" und schrieb nach wenigen

Minuten die nebenstehende Lösung auf. Auf der Basis eines vertrauten Analysegesprächs lässt sich diese so interpretieren: Sven begann durchaus systematisch alle verschiedenen Lagemöglichkeiten im Kopf „durchzuspielen“, schrieb sie auf und entdeckte dabei spontan eine doppelte Dreiecksanordnung als „visuelles Lösungsbild“, die sich zum einen durch die Anzahl der minimalen und maximalen Schnittpunktanzahlen bei steigender Geradenzahl und zum anderen durch die unmöglichen Schnittpunktanzahlen für 4, 5, … Geraden ergab. Hiervon war er so fasziniert, dass die unvollständige Angabe seiner Einzellösungen nebensächlich wurde. Er wollte vielmehr seine Lösungsmuster für noch höhere Geradenzahlen prüfen und gab sich selbst als Anschlussproblem die Zusatzaufgabe „2“ für 6 Geraden. Das für ihn typische Erzeugen intuitiver visueller Lösungsbilder reflektiert der Junge verallgemeinernd: „*Ich habe beim Knobeln so viele Dinge im Kopf, dass ich das, was ich sagen möchte, nicht [mit Worten] rausselektieren kann.*“

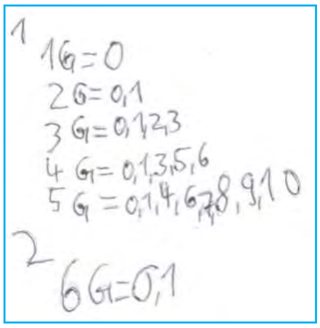


Abb. 1: Svens Lösung zur Schnittpunkt-Aufgabe

4. Theoretische Reflexionen zu „visuellen Bildern“ beim Bearbeiten mathematischer Probleme

Wie im Fallbeispiel zu erkennen, zeigen unsere Analysen verallgemeinernd, dass solche visuellen Vorstellungen intuitiv entstehen und den Kindern zumindest z. T. noch unbewusst sind. Sie werden als Bilder oder Zeichengebilde und (meist) nonverbal (gedanklich) repräsentiert, sie sind oft noch unpräzise, aber zugleich sehr komplex, d. h., die Bilder beinhalten wesentliche Grundstrukturen oder Kernideen. Da die visuellen Bilder individuell geprägt sind, identifizieren sich die Problembearbeiter außerdem sehr schnell mit den Vorstellungsbildern, indem sie diese gefühlsmäßig für sehr wichtig und richtig erachten. Die besonderen Stärken visueller Vorstellungen ergeben sich u. E. gerade daraus, dass sie bild- oder zeichenhaft, nonverbal und unpräzise sind. Dies ermöglicht den Kindern unter Beibehalt wesentlicher Zusammenhänge bzw. Kernideen ein sehr schnelles Vergleichen und Auswählen von Wichtigem aus dem jeweiligen inhaltlichen Kontext, eine große Komplexitätsreduktion und damit eine beträchtliche Entlastung des Arbeitsgedächtnisses sowie einen sehr flexiblen und spielerisch-kreativen Umgang mit den visuellen Vorstellungen.

Beim Erzeugen visueller Bilder im Kontext des Lösens mathematischer Probleme verbinden kleine Matheasse somit u. E. besondere Kompetenzen im räumlichem Vorstellen und im Nutzen von Intuitionen. Fischer charakterisiert den Zusammenhang so: „*Um zu Vermutungen, zu Beweisideen, zu* *tragfähigen Begriffsbildungen, zu Ideen für eine Mathematisierung bei außermathematischen Sachverhalten zu kommen, (muss) man eine sinnliche, in der Regel eine visuelle Vorstellung von der Angelegenheit haben*" (Fischer 1984, S. 151). Verschiedene Studien (u. a. Kozehvnikov, Hegarty & Mayer 2002, van Garderen 2006) zeigen demgemäß, dass visuelle Bilder gerade beim mathematischen Problemlösen, nicht unbedingt bei Routineaufgaben, hilfreich sein können, wobei zwischen primär bildhaften und primär schematischen Repräsentationen unterschieden wird. Diese Zusammenhänge könnten darüber hinaus von genereller Bedeutung für kindliches Lernen von Mathematik sein, da sich prinzipielle Übereinstimmungen zum „Modell der Repräsentationsumorganisation" (Karmiloff-Smith 1996) und zu Analysen von Lorenz zu rechenschwachen Kindern (1992, 2003) zeigen.

Bzgl. des Erkennens und Analysierens solcher Lösungsprozesse ist natürlich zu beachten, dass Kinder nur z. T. über ihre visuellen Vorstellungen reflektieren und sie nur vage beschreiben können. Durch Beobachtung können sie i. Allgem. ebenfalls nicht erfasst werden. Aber ein gemeinsames Analysegespräch bietet Chancen, visuelle Vorstellungen von Kindern zu erkennen bzw. vage zu erfassen und dann zu werten. Eine wichtige Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass der Interviewer mathematisch kompetent und sensibel für intuitive und individuell geprägte Problemlöseprozesse ist.

5. Selbstreflexionen professioneller Mathematiker

Da Kinder über ihre Visualisierungen kaum sprachlich reflektieren können, bieten sich „Selbstanalysen" professioneller Mathematiker als Belege für das angesprochene Phänomen an, wie z. B. die folgende, u. E. repräsentative Selbstreflexion des bekannten Münsteraner Mathematikers Deninger:

„*Also jeder macht sich halt ein Bild von den Dingen, mit denen er operiert. Niemand operiert ganz, indem er formal irgendwelche Dinge umformt und ohne ein übergeordnetes Bild. Wenn man nicht ein übergeordnetes Bild hat, in irgendeinem Sinne, kann man diese tausende Umformungen, die man machen muss, ja nicht zielgerichtet machen. Man muss schon eine Vorstellung haben. Diese Vorstellung ist irgendwie bildhaft, ja das ist irgendwie, man sieht es. Aber es ist nicht zu vergleichen mit irgendetwas anderem in dieser Welt. ...Man sucht, probiert, macht, tut, entwickelt ein Gefühl für den Gegenstand und in irgendeiner Weise entsteht dann ein Bild von dem Gegenstand. Aber das Wort Bild ist ... in einem sehr viel weiteren Sinne, als das Übliche, was man darunter versteht, gemeint.*"

Literatur

Die verwendeten Literaturquellen können bei den Autoren erfragt werden.

Carola BERNACK, Timo LEUDERS, Lars HOLZÄPFEL,
Pädagogische Hochschule Freiburg

Vertiefte Analysen zum Umbau des Überzeugungssystems während eines Problemlöseseminars

Professionelle Werte und Überzeugungen, subjektive Theorien, normative Präferenzen und Ziele sind wesentliche Facetten von Lehrerkompetenzen. Lehrerkräfte zeigen oft ein eher statisch geprägtes Bild von der Mathematik, was mit einer Orientierung am rezeptiven Kalküllernen einhergeht (Pehkonen & Törner 2004, Staub & Stern 2002). Reflexives Problemlösen in Lehreraus- und -fortbildung (oft gestützt durch Forschungshefte) wird als ein Ansatz berichtet, um Überzeugungen zur Mathematik und zum Lehrern und Lernen von Mathematik zu verändern (Berger 2005, DeBellis & Rosenstein 2004). An diese Erfahrungen anschließend wurde eine Seminarkonzeption entwickelt, die im Projekt „Forschende MathematiklehrerInnen" (ForMat) beforscht wurde. Die Studierenden (Grund- und Hauptschullehramt) dokumentieren dabei während neun Wochen des Semesters schriftlich ihre Problemlöseprozesse in Forschungsheften, während sie vier offene Problemstellungen bearbeiteten. Zudem werden diese Arbeitsphasen aus der Metaperspektive schriftlich reflektiert. Die Veränderungen der Beliefs wurden zum einen durch ein quantitatives Design (Holzäpfel, Bernack, Leuders & Renkl 2012; Holzäpfel, Leuders & Bernack in diesem Band) und zum anderen qualitativ untersucht, um den Veränderungsprozess und seine Ursachen zu verstehen. Fokus dieses Beitrags ist die Forschungsfrage: Wie beeinflusst reflexives Problemlösen mit Forschungsheften bei Lehramtsstudierenden Beliefs zur Mathematik und zum Mathematikunterricht? Erste Ergebnisse zu dieser qualitativen Studie werden hier berichtet.

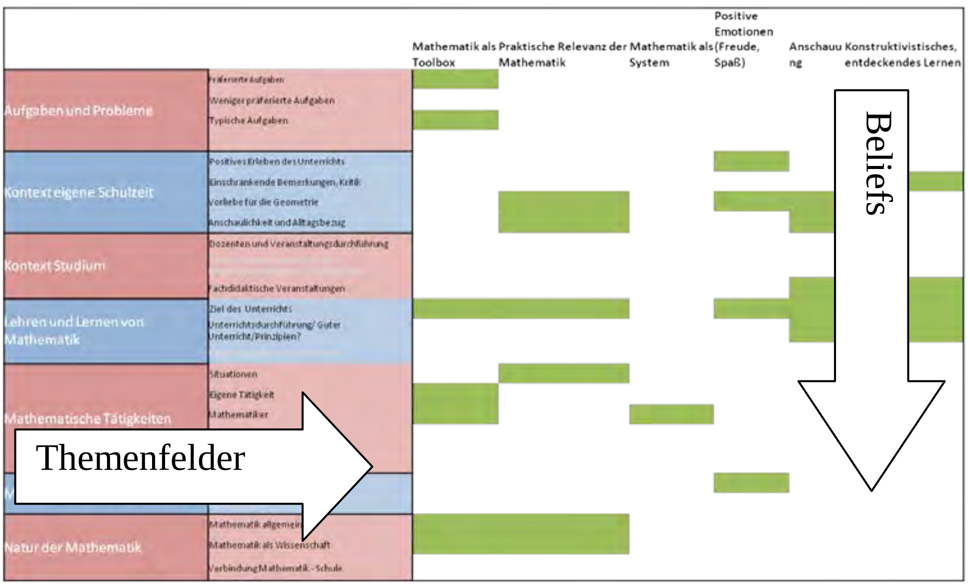
Veränderung von Beliefs: Theorie und Stand der Forschung

Eine den Diskussionsstand integrierende Definition von Beliefs gibt Philipp (2007). Er nimmt an, dass Beliefs von dem Individuum als wahr angenommen werden und daher kein sicheres Wissen oder Konsens darstellen. Beliefs sind als Filter zu sehen, mit denen Handlungen bewertet und durchgeführt werden. Zudem stehen Beliefs nicht isoliert, sondern sind nach Green (1971) in einem Überzeugungssystem organisiert und sind darin nach peripheren und zentralen Beliefs zu unterscheiden: bei peripheren Beliefs gelingt eine Veränderung leichter. Bei zukünftigen Lehrern werden Beliefs hauptsächlich in der Schulzeit und im Anschluss im Studium geformt. Die oben genannten Studien legen nahe, dass die Beschäftigung mit offenen Problemen und unbekannten mathematischen Inhalten, d.h. ein intensives eigenständiges Mathematiktreiben, verbunden mit Reflexion eine

Beliefänderung bewirken. Allerdings wird diese Veränderung oft in der Retrospektive und selten systematisch erfasst. Die wenigen quantitativen Studien können die Wirksamkeit nachweisen (Holzäpfel et al. in diesem Band), das Verständnis der Prozesse und Ursachen muss die qualitative Studie leisten. Schon Ambrose (2004) stellt fest, dass zukünftige Lehrer ihre alten Beliefs beibehalten, während sich neue ausbilden und Stahl (2011) gibt zu bedenken, dass sich Argumentationsstrukturen, die zum selben Urteil führen, sich stark unterscheiden können.

Interviewstudie

Folgende Unterfragen leiten die Untersuchung: Wie verändert sich das jeweilige Belief-System in seiner Struktur? Welche Beliefs verändern sich, welche bleiben stabil? Welche Veränderungstypen lassen sich identifizieren? Um dies zu beantworten, wurde in einem Prä-Post-Design mit acht Studierenden des Seminars vor Beginn und nach Abschluss der neun Wochen Problemlösen ein problemzentriertes Interview durchgeführt. Beide Male wurde derselbe Leitfaden mit Fragen zur Mathematik, zu Aufgabentypen, Erfahrungen etc. eingesetzt. Die Auswertung erfolgte nach der qualitativen Inhaltsanalyse basierend auf Schleifen aus Strukturieren (Kodieren) und Zusammenfassen nach Themenfeldern und Belief-Kategorien. Zuerst erfolgt das Kodieren von Interviewpassagen nach Themenfelder wie z.B. „Aufgaben und Probleme“ und „Kontext eigene Schulzeit“. Diese Passagen werden pro Themenfeld, Person und Interviewzeitpunkt zusammengefasst. Diese Zusammenfassungen werden nach auftretenden Beliefs nach deduktiv und induktiv gebildeten Kategorien kodiert. Daraus ergibt sich die in der Abbildung (s.u.) ersichtliche Matrix. Des Weiteren werden in Einzelfallanalysen weitere Auffälligkeiten herausgearbeitet. Auf dieser Grundlage sind Vergleiche zwischen erstem und zweitem Interview möglich.



Ergebnisse

Im Folgenden wird exemplarisch der Fall Maria (22 Jahre, 6. Semester) vorgestellt. In beiden Interviews zeigt sich die Einstellung „Praktische Relevanz der Mathematik" über mehrere Themenfelder hinweg und auch zu „Positiven Emotionen" gegenüber der Mathematik äußert sie sich stabil. Auch die Einstellung „Konstruktivistisches, entdeckendes Lernen" erscheint in denselben Themenfeldern in beiden Interviews. Bei genauerer Betrachtung der Äußerungen zeigt sich, dass sich Maria im zweiten Interview detaillierter und reflektierter äußert als im ersten. In diesem nannte sie oft Schlagworte. Diese Veränderung stellt sie selbst fest: *„Also vom Prinzip her war mir klar, dass man Schüler selber was bearbeiten lassen kann. Aber mir war immer nie klar, wie das funktionieren soll. Weil ich selber nicht verstanden habe, wenn einem was unklar ist, wie kann man denn überhaupt dann an die Sache ran gehen. Und das ist mir jetzt einfach bewusst geworden."* Die Tabelle (s.u.) gibt eine Übersicht, in welchen Themenfeldern und in welchem Interview die Beliefs „Mathematik als Toolbox" und „Explorierende Tätigkeiten / Individualität" geäußert werden. Der Toolboxaspekt erscheint stabil über beide Interviews, während das Ausprobieren und Entdecken erst im Interview nach dem Seminar geäußert wird. Über die Interviewteilnehmer hinweg lässt sich eine Veränderung des Überzeugungssystems in Richtung Mathematik als Prozess und hin zu konstruktivistischem Lehren und Lernen feststellen.

Beliefs / **Themenfelder**	Mathematik als Toolbox		Explorierende Tätigkeiten / Individualität	
	Interview 1	Interv. 2	Interview 1	Interv. 2
Aufgaben und Probleme	x	x		x
Lehren und Lernen von M.	x	x		x
Mathematische Tätigkeiten	x	x		x
Natur der Mathematik	x	x		x

Die Tabelle zeigt zudem an, dass die alte Einstellung und die neu entstehende in denselben Themenfeldern geäußert werden, z.B.: *„Also, da bin ich irgendwie zwiegespalten, auf der anderen Seite denken ich, dass so Aufgaben prototypisch sind, weil sie genau vorgeben wie es gemacht werden muss. Auf der anderen Seite glaube ich, gibt es einen großen Anteil von Mathematik, die versucht individuelle Lösungswege anzuerkennen und die auch zu fördern. Also ich kann jetzt nicht genau sagen, wie das Verhältnis zueinander steht. Ich glaub die eigenen Schulzeit prägt einem schon ziemlich in der Vorstellung was ist Mathematik und vielleicht ist das bei mir jetzt noch mehr so drin, so eine konkrete Vorgabe mit Formeln."* Entsprechend der Feststellung von Ambrose (2004) bleiben hier alte, zentrale Beliefs bestehen, auch wenn neue, periphere Beliefs hinzukommen. Zudem zeigt sich bei Maria eine bewusst erlebte Ambiguität zwischen diesen beiden Beliefs.

Zusammenfassend lassen sich die folgende Veränderungen feststellen: Die Seminarteilnehmer äußern ihre Beliefs im zweiten Interview reflektierter und detaillierter als im ersten Interview, bei oberflächlich gleicher Einstellung liegen andere Argumentationsstrukturen zu Grunde (vgl. Stahl, 2011). Die Beliefs der Teilnehmer ändern sich generell hin zu dem Prozess-Aspekt der Mathematik und hin zu einer konstruktivistischen Sicht auf das Lehren und Lernen. Bei dieser Veränderung werden jedoch die alten, zentralen Beliefs nicht unbedingt verworfen, sobald neue entstehen. Dies kann zu (un)bewussten Ambiguitäten im Überzeugungsystem und zu inneren Konflikten führen.

Literatur

Ambrose, R. (2004). Initiating change in prospective elementary school teachers' orientations to mathematics teaching by building on beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(2), 91–119.

Berger, P. (2005). Änderung professioneller Einstellungen durch 'Forschendes Studieren'. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 77–80). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

DeBellis, V. A., & Rosenstein Joseph G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 36*(2), 46–55.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching. McGraw-Hill series in education Foundations in education.* New York: McGraw-Hill.

Holzäpfel, L., Bernack, C., Leuders, T., & Renkl, A. (2012). Schreiben, forschen und reflektieren in der Mathematiklehrerausbildung: Veränderung mathematikbezogener Überzeugungen. In M. Kobarg et al. (Eds.), *Lehrerprofessionalisierung wissenschaftlich begleiten. Strategien und Methoden* (S.. 15–34). Münster: Waxmann.

Pehkonen, E. K., & Törner, G. (2004). Methodological Considerations on Investigating Teachers' Beliefs of Mathematics and its Teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education, 9*(1), 21–49.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 257–314). Charlotte, NC: Information Age Publ.

Stahl, E. (2011). The Generative Nature of Epistemological Judgments. In J. Elen, E. Stahl, R. Bromme, & G. Clarebout (Eds.), *Links between beliefs and cognitive flexibility. Lessons learned* (S.. 37–60). New York: Springer.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The Nature of Teachers' Pedagogical Content Beliefs Matters for Students' Achievment Gains: Quasi_Experimental Evidence From Elementary Mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 344–355.

Michael BESSER, Kassel/ Lüneburg, Natalie TROPPER, Lüneburg, Dominik LEISS, Lüneburg

Lehrern Lehren lehren – Entwicklung und Evaluation von Lehrerfortbildungen zu formativem Assessment

Diagnostizieren und Fördern von Schülerleistungen stellt eine zentrale Tätigkeit von Lehrkräften im alltäglichen Mathematikunterricht dar. Im Rahmen des DFG-Forschungsprojekts Co²CA[1] werden Fortbildungen zum Diagnostizieren und Fördern als Teil formativen Assessments am Beispiel des mathematischen Modellierens angeboten und wissenschaftlich evaluiert. Neben (1) einem kurzen Überblick über das Forschungsprojekt Co²CA sollen (2) das Design der evaluierten Lehrerfortbildungen sowie (3) erste Eindrücke und Ergebnisse dieser Fortbildungen vorgestellt werden.

1. Das Forschungsprojekt Co²CA

Vielfältige theoretische Überlegungen sowie pädagogisch-psychologische Untersuchungen zeigen, dass Leistungsmessung und -beurteilung (in der Schule) keineswegs allein am Ende einer Lerneinheit in Form zusammenfassender Ergebnisse (summativ) erfolgen sollte. Um Lernprozesse bestmöglich fördern zu können, sollte darüber hinaus in regelmäßigen Abständen den Unterricht begleitend und mit dem Ziel einer bewussten Unterstützung von Lehr-Lern-Prozessen (formativ) Leistung diagnostiziert und beurteilt werden. Als zentrales Element solch formativer Leistungsmessung und -beurteilung ist dabei eine Unterstützung von Lehr-Lern-Prozessen durch individuelles, aufgaben- und prozessbezogenes Feedback anzusehen (Black & William, 2009; Deci, Koestner & Ryan, 1999; Hattie & Timperley, 2007; Kluger & DeNisi, 1996). Ausgehend von diesen Überlegungen untersucht das Forschungsprojekt Co²CA, wie formative Leistungsmessung und -beurteilung in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht gestaltet sein sollten, um das Lehren und Lernen von Mathematik bestmöglich unterstützen zu können. In diesem Kontext sind in einem ersten Schritt Wirkung und Wahrnehmung unterschiedlicher Feedbackarten in Laborsitzungen mit Schülerinnen und Schülern neunter Realschulklassen erprobt sowie hierauf aufbauend in einem späteren Schritt in realen Unterrichtssituationen Möglichkeiten und Grenzen der Umsetzung zentraler Ideen for-

[1] Conditions and Consequences of Classroom Assessment: Forschungsprojekt im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ (SPP 1293); Projektleitung E. Klieme (Frankfurt), K. Rakoczy (Frankfurt), W. Blum (Kassel), D. Leiss (Lüneburg).

mativer Leistungsbeurteilung und -rückmeldung untersucht worden. Vor allem basierend auf dem Ergebnis der Unterrichtsstudie, dass eine Umsetzung formativer Leistungsbeurteilung und -rückmeldung im kompetenzorientierten Unterricht stark von der professionellen Handlungskompetenz der Lehrkräfte abzuhängen scheint, fokussieren aktuelle Arbeiten innerhalb des Forschungsprojekts Co^{2}CA auf einer gezielten Fortbildung von Lehrkräften zum Diagnostizieren und Fördern von Schülerleistungen in einem formativ angelegten Mathematikunterricht sowie einer wissenschaftlichen Evaluation der Wirksamkeit dieser Fortbildungen.

2. Teilstudie des Forschungsprojekts Co^{2}CA: Lehrerfortbildungen zu formativem Assessment am Beispiel des mathematischen Modellierens

Ausgehend von der Idee, dass das Professionswissen von Lehrkräften als entscheidender Faktor für ein Gelingen von Unterricht angesehen werden kann (Baumert et al., 2010), wird im Rahmen der Durchführung und wissenschaftlichen Evaluation von Lehrerfortbildungen zum formativen Assessment am Beispiel des mathematischen Modellierens den folgenden zentralen Fragestellungen nachgegangen:

1) (Inwieweit) Ist es möglich, im Rahmen von Lehrerfortbildungen das fachdidaktische Wissen (PCK) sowie das allgemein pädagogische Wissen (PK) von Lehrkräften zu formativem Assessment im kompetenzorientierten Mathematikunterricht gezielt zu fördern?
2) (Inwieweit) Gelingt es, Testinstrumente zu entwickeln, die PCK und PK der Lehrkräfte zu formativem Assessment am Ende der Fortbildungen reliabel und valide erfassen?
3) (Inwieweit) Wirken sich Lehrerfortbildungen zum formativen Assessment auf den Mathematikunterricht der teilnehmenden Lehrpersonen aus?

Im Kontext einer Auseinandersetzung mit diesen Fragen werden Fortbildungen zu zentralen Ideen formativen Assessments am Beispiel des mathematischen Modellierens unter wissenschaftlicher Begleitung durchgeführt (Untersuchungsbedingung A; UB A; siehe Abbildung 1). Die Wirksamkeit dieser Fortbildungen wird – bzgl. des Aufbaus der oben genannten Facetten professioneller Handlungskompetenz sowie bzgl. wahrgenommener Unterrichtsqualität durch Schülerinnen und Schüler in ausgewählten Klassen der teilnehmenden Lehrkräfte – mit Fortbildungen zu generellen Aspekten eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts verglichen (Untersuchungsbedingung B; UB B). Das fachdidaktische Wissen zum Diagnostizieren und Rückmelden von Schülerleistungen (am Beispiel des mathematischen Modellierens) sowie allgemein pädagogisches Wissen zu formativem Assessment werden in diesem Zusammenhang in beiden Bedingungen am Ende des jeweiligen Fortbildungslehrgangs mittels eigens entwickelter Professionswissenstests erhoben. Das Vorwissen der Lehrkräfte wird unter Rückgriff auf den fachdidaktischen Professionswissenstest des Forschungsprojekts COACTIV sowie ergänzende Fachwissens- bzw. allgemein-pädagogische Wissensaufgaben kontrolliert. Hierüber hinaus werden die Fortbildungen durch mehrfache Lehrer- wie Schülerbefragungen begleitet.

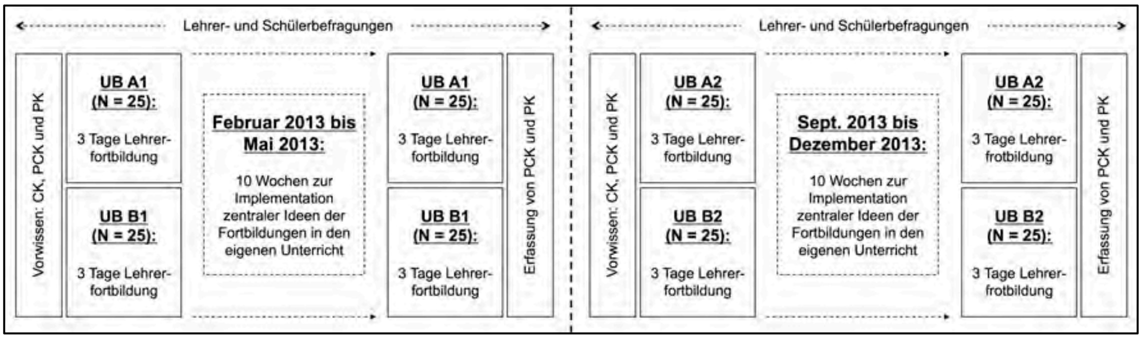


Abbildung 1: Design der Co^{2}CA-Fortbildungsstudie

3. Erste Ergebnisse

Sowohl die Fortbildungselemente als auch die einzusetzenden Testinstrumente wurden im Rahmen einer mehrtägigen Fortbildungsveranstaltung mit 16 teilnehmenden Lehrpersonen pilotiert. Die konkreten Erfahrungen der Pilotierung zeigen, dass Lehrkräfte in einer derartigen Veranstaltung durchaus befähigt werden können, verschiedene Elemente formativer Diagnostik und Rückmeldung erfolgreich in modellierungsbezogenen Kontexten umzusetzen. Die Resultate des in diesem Rahmen durchgeführten Posttests zeigten allerdings, dass nach der Fortbildung noch Defizite in bestimmten Bereichen des modellierungsbezogenen fachdidaktischen Wissens sowie des pädagogischen Wissens zum formativen Assessment bestanden. So konnten beispielsweise nur wenige Lehrpersonen die Schritte des in der Fortbildung vermittelten Modellierungskreislaufs – als Grundlage lernprozessbezogener Diagnostik in diesem Bereich – adäquat umschreiben. Weiterhin gelang es nur einer Lehrperson, in einer schriftlichen Rückmeldung zu gegebener Schülerlösung sowohl Stärken und Schwächen der Lösung als auch Hilfen zur Überwindung der Schwächen – als drei zentrale Komponenten lernförderlicher Rückmeldung (vgl. Hattie & Timperley, 2007) – zu benennen. Basierend auf den festgestellten Defiziten wurden die Fortbildungsinhalte an den entsprechenden Stellen überarbeitet bzw. ausgeschärft.

Zum jetzigen Zeitpunkt liegen zudem bereits erste Ergebnisse des Vortests der Fortbildungsstudie vor. Diese zeigen insgesamt, dass bezüglich aller drei getesteten Vorwissenskomponenten (modellierungsbezogenes Fachwissen, fachdidaktisches Wissen, pädagogisches Fachwissen zum formativen Assessment) größere Probleme bestehen und dass somit die angedachten bzw. bereits durchgeführten Fortbildungsveranstaltungen offensichtlich notwendig sind. Am Beispiel einer authentischen Modellierungsaufgabe zur Testung des Fachwissens in diesem Bereich äußerte sich die bestehende Problematik etwa folgendermaßen: Zwar konnte die Aufgabe in ca. 90% der Fälle gelöst werden, jedoch basierten die Lösungen fast immer auf dem einfachsten für eine mathematische Lösung notwendigen Modell und vernachlässigten dabei jegliche Aspekte, die für eine adäquate Beantwortung der zugrunde liegenden realen Problemstellung bedacht werden müssten.

4. Ausblick

Inwiefern zentrale Komponenten formativen Assessments am Beispiel des mathematischen Modellierens tatsächlich mithilfe der entwickelten Fortbildungselemente an die teilnehmenden Lehrkräfte vermittelt werden können, werden die Resultate der im Mai und Dezember 2013 stattfindenden Posttests zeigen. Zur Evaluation der Fortbildungen im Sinne einer Überprüfung, ob die vermittelten Inhalte auch im alltäglichen Mathematikunterricht implementiert werden, werden aber vor allem die zu verschiedenen Zeitpunkten stattfindenden Schülerbefragungen auszuwerten sein, in denen neben Einstellungen zum Mathematikunterricht vor allem das Unterrichtserleben der Lernenden zu verschiedenen Faktoren des Diagnose- und Rückmeldeverhaltens der teilnehmenden Lehrpersonen erhoben wird.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010): Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. In: American Educational Research Journal, 47(1), 133-180.

Black, P., & Wiliam, D. (2009): Developing the theory of formative assessment. In: Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31.

Deci, E. L., Koestner, R., & Ryan, R. M. (1999): A meta-analytic review of experiments examining the effects of extrinsic rewards on intrinsic motivation. In: Psychological Bulletin, 125(6), 627-668.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007): The power of feedback. In: Review of Educational Research, 77(1), 81-112.

Kluger, A. N., & DeNisi, A. (1996): The effects of feedback interventions on performance: A historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. In: Psychological Bulletin, 119(2), 254-284.

Bianca BEUTLER, Braunschweig

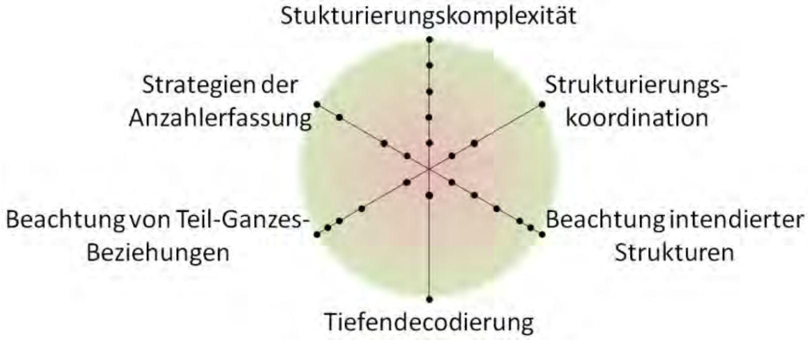
Konkrete Würfelbauwerke vs. Schrägbilder von Würfelbauwerken – Schwierigkeiten beim Anzahlerfassen und Strukturieren

Wenn Vorschulkinder Anzahlen von Würfeln in konkreten Würfelbauwerken oder in Schrägbildern von Würfelbauwerken korrekt ermitteln wollen, müssen sie nicht nur über arithmetische Fähigkeiten verfügen, sondern auch die dreidimensionale Beschaffenheit eines Würfels und die Struktur der Würfelkonfiguration erfassen. Eine differenzierte Analyse kindlicher Strategien gibt Aufschluss über Zusammenhänge zwischen einzelnen Fähigkeitsbereichen und zeigt spezielle Schwierigkeiten im Umgang mit konkreten Bauwerken vs. Schrägbildern.

1. Die Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung

In Würfelbauwerken und anderen drei- oder auch zweidimensionalen Konfigurationen stehen deren Elemente und Elementgruppen in numerisch und geometrisch beschreibbaren Beziehungen zueinander. Diese ergeben die Struktur der Konfiguration und können vom Betrachter je nach seiner Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung unterschiedlich ausgedeutet und genutzt werden (vgl. z.B. Lüken 2012, Mulligan & Mitchelmore 2009, van Nes 2009). Die individuell hineingedeuteten Strukturen können dabei auch von den intendierten Strukturen abweichen (vgl. Söbbeke 2005).

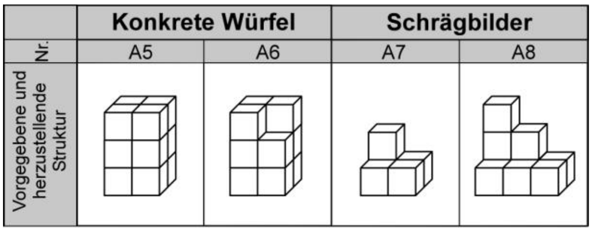
Für eine differenzierte Beschreibung individueller Strukturierungsleistungen wurde auf Basis theoretischer und empirischer Erkenntnisse ein 6-dimensionales Netzdiagramm erstellt. Hiermit können Strategien hinsichtlich räumlicher Strukturierung und arithmetischer Zahlbegriffsentwicklung kategorisiert und Zusammenhänge in Strategietypen erfasst werden.



Im Diagramm sind die für die Strukturierung von Würfelkonfigurationen wichtigen Dimensionen der Strukturierungskomplexität (1. Beachtung nur einer Schicht, 2. Orientierung an Flächen, 3. Erfassen von Einzelelementen, 4. lokale Gliederung in Substrukturen, 5. globale Gliederung in Substrukturen), der Strukturierungskoordination (1. Erfassung mit Auslassungen, 2. mit Überschneidungen, 3. vollständige, einmalige Erfassung) und der Tiefendecodierung (1. ohne Tiefendecodierung, 2. mit Tiefendecodierung) abgebildet (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2001). Eine weitere Dimension berücksichtigt, inwiefern die hineingedeuteten den intendierten Strukturen entsprechen (1. Umgang mit aus der Struktur herausgelösten Elementen, 2. willkürliches Vorgehen, 3. teilweise strukturgeleitet, 4. Beachtung von Spielwürfelbildern, 5. reihen-/spaltenweise, 6. schichtenweise). Die beiden arithmetischen Dimensionen zeigen Strategien der Anzahlbestimmung (1. keine, 2. Zählen in Einerschritten, 3. elaborierte Zählstrategien, 4. Rechnen) und die Beachtung von Teil-Ganzes-Beziehungen (1. keine, 2. unvollständig/vollständig ordinal, 3. unvollständig kardinal, 4. vollständig kardinal, 5. Anwenden von Zahlentripeln) (vgl. Beutler 2012). Die Kategorien sind den Achsen von innen nach außen zugeordnet. Die Skalenwerte der Kategorien wurden hinsichtlich inhaltlicher Bewertungen angepasst.

2. Konzeption der Studie

In 2011/2012 wurden 22 Vorschüler zu Beginn und am Ende ihres letzten Halbjahres vor Schuleintritt mittels TEDI-MATH und halbstandardisierter Einzelinterviews (ca. 75min/Kind) getestet. Das eigens entwickelte Aufgabenkompendium berücksichtigt diverse Anforderungen der räumlichen Strukturierung unter Verwendung von konkreten Würfelbauwerken sowie zweidimensionalen Darstellungen von Würfelbauwerken, Punkfeldern und Quadratgittern (vgl. Beutler 2011, 2012). Eine Aufgabensequenz fokussiert u.a. die Bestimmung von Würfelanzahlen konkreter oder in Schrägbildern dargestellter Bauwerke. Die Kinder bestimmen jeweils die Anzahl, bauen das Bauwerk nach und bestimmen erneut die Anzahl. Zum Nachbau der Schrägbilder werden die Kinder nur im Nachtest angehalten.

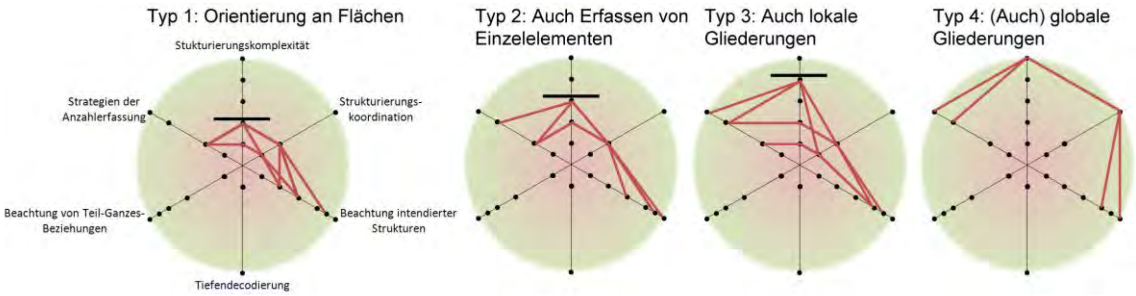


Eine qualitative Auswertung der videografierten und transkribierten Interviews gibt Aufschluss über Strukturierungsfähigkeiten und Zusammenhänge zur Zahlbegriffsentwicklung der Kinder und dient gleichzeitig der Evaluation eines zwischen den Testzeitpunkten platzierten mathematischen Frühförderprogramms. Die Analyse stützt sich auf Lösungskorrektheiten, die Strategieermittlung mit Hilfe der oben beschriebenen Netzdiagramme und jeweils aufgabenspezifische Merkmale.

3. Konkrete Würfelbauwerke vs. Schrägbilder von Würfelbauwerken

Bisherige Studien ergaben, dass Kinder konkrete Situationen leichter perzeptiv erfassen als ikonische Darstellungen und sie Schrägbilder von Würfelbauwerken erst mit Vorwissen über konkrete Würfelbauwerke und Konventionen der Schrägbilddarstellungen verstehen (vgl. Cohen 1979, Blanck & Eichler 1999). Zudem seien Vorschulkinder den Umgang mit konkretem Material mehr gewohnt und nutzen in Aufgaben mit Schrägbilddarstellungen primitivere Strategien der Anzahlerfassung (vgl. Ben-Haim et al. 1985, Söylemezoğlu & Olkun 2003). Jedoch gelingt in der eigenen Studie eine erste Bestimmung der Würfelanzahlen der Schrägbilder ca. doppelt so vielen Kindern wie bei konkreten Bauwerken. Auch bilden die Kinder, die bei konkreten Bauwerken Anzahlen korrekt ermitteln, eine echte Teilmenge zu den Kindern, die in Schrägbildern Anzahlen korrekt ermitteln. Ursachen zeigen sich in der qualitativen Analyse der kindlichen Strukturierungen:

Alle Strukturierungsprofile der Kinder mit inkorrekten Lösungen lassen sich hinsichtlich der Dimension der Strukturierungskomplexität sortieren. Z.B. für A5 im Vortest ergeben sich hierdurch vier Typen. Die Abbildung zeigt alle übereinandergelegten zugehörigen Profile, ohne Auswertung der Teil-Ganzes-Beziehungen; die Tiefendecodierung spielt in A5 keine Rolle.



Diese Typen der Strukturierung zur Anzahlbestimmung konkreter Würfel offenbaren, dass bei höherer Strukturierungskomplexität die Beachtung intendierter Strukturen tendenziell höher ist und zunehmend höhere Strategien der Anzahlerfassung genutzt werden. Fehlerhafte Anzahlbestimmungen resultieren insbesondere aus dem Zählen von Flächen anstelle von Würfeln (Typ 1). Wenn Kinder auch dreidimensionale Würfel erfassen, führt eine mangelhafte Koordination der Abzählhandlungen zum Auslassen oder mehrfachen Erfassen einzelner Würfel (Typ 2-3). Diese Kinder verlieren die Orientierung durch ihr Drehen des Bauwerks und sie zählen mit inkorrekten Eins-zu-eins-Zuordnungen wegen gleichzeitigen Tippens mit zwei Fingern auf gegenüberliegende Seiten oder wegen Nichteinhaltens von Zählpausen beim Umgreifen von einer auf die andere Seite. Ungünstige Reihenfolgen erschweren zusätzlich die Koordination. Bei korrekter globaler Gliederung führt ein Rechenfehler zur falschen Anzahl (Typ 4).

Fehlerhafte Anzahlbestimmungen bei den Schrägbildern werden durch eine fehlende Tiefendecodierung, d.h. ein Nichterfassen verborgener Würfel, und gelegentlich durch Koordinationsprobleme wegen ungünstiger Reihenfolgen oder zu schnellem Zählen verursacht (Typ 2-3). Niemals erfolgt eine Orientierung an Flächen. Entgegen älterer Studien kann also jedes getestete Kind Schrägbilder als Darstellung dreidimensionaler Bauwerke deuten.

Die Schwierigkeiten bei konkreten Bauwerken mögen einerseits an deren Kompaktheit liegen, die eine Orientierung an Flächen begünstigt. Andererseits birgt die Möglichkeit alle Seiten zu betrachten und anzufassen auch Risiken. Neben Übungen zur globalen Gliederung sollten daher auch zielführende und hinderliche Materialhandlungen bewusst gemacht werden.

Literatur

Ben-Haim, D., Lappan, G. & Houang, R. T. (1985): Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students` performance. In: Educational Studies in Mathematics 16/4, 389-409.

Beutler, B. (2012): „Das ist das gleiche, nur anders.“ – Vorschulkinder erkennen geometrische und arithmetische Beziehungen beim Umstrukturieren von Flächen und Bauwerken. In: Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM, 125-128.

Beutler, B. (2011): Vorschulkinder integrieren Mengen- und Zahlenwissen beim Vergleichen und Verändern von Punktmustern. In: Haug, R. & Holzäpfel, L. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM Verlag, 107-110.

Blanck, S. & Eichler, K.-P. (1999): Die Verbindung von Arithmetik und Geometrie – Chance für einen kindorientierten Unterricht. In: Grundschulunterricht, 46/6.

Cohen, H. G. (1979): What research says: Developing ability to organize space. In: Science and Children, 17/3, 33-35.

Lüken, M. (2012): Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern. Münster: Waxmann.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2001): Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen – Empirische Untersuchungen mit Augenbewegungsanalysen. Frankfurt: Lang.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009): Awareness of pattern and structure in early mathematical development. In: Mathematics Education Research Journal, 21, 33-49.

Söylemezoğlu, T. & Olkun, S. (2003): Establishing conceptual bases for the measurement of volume. In: International Online Journal of Science and Mathematics Education. Siehe: http://trove.nla.gov.au/work/27523576. Zuletzt eingesehen: 15.03.2013.

Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Van Nes, F. (2009): Young children’s spatial structuring ability and emerging number sense. Utrecht: All Print.

Rolf BIEHLER, Daniel FRISCHEMEIER, Susanne PODWORNY, Paderborn

TinkerPlots 2.0 – von realen Handlungen über Computersimulationen zum stochastischen Denken

Im folgenden Artikel werden unterschiedliche Einsatzmöglichkeiten der Datenanalyse- und Simulationssoftware TinkerPlots spiralförmig von der Primarstufe bis zum Ende der Sekundarstufe I exemplarisch vorgestellt.

1. Die Software TinkerPlots

Die Software TinkerPlots (Konold & Miller, 2011) ist eine in den USA entwickelte Software zur explorativen Datenanalyse und stochastischen Simulation und für den Einsatz in den Klassen 4-8 vorgesehen. Das besondere an der Software im Bereich der Datenanalyse ist das Verwalten der Daten anhand von Datenkarten und das Erstellen entsprechender Graphiken mithilfe von drei Grundoperationen „Stapeln", „Trennen" und „Ordnen". Im Gegensatz zu anderer Software gibt es keine vorgefertigten Graphiken, die mittels eines einzigen Klicks erzeugt werden können. Jegliche Graphik muss mit den Grundoperationen und mit weiteren Werkzeugen erstellt werden. Eine ausführliche Beschreibung zum Datenanalysepotential der Software findet sich in Biehler (2007a), Biehler (2007b) und Biehler et al. (2013). Die stochastische Simulationskomponente der Software kommt mit einer graphischen Zufallsmaschine daher, die zufällige Vorgänge, wie das Ziehen von Kugeln aus einer Urne oder das Drehen eines Kreisels, veranschaulicht. Seit Ende des Jahres 2012 liegt nun auch eine deutsche Version der Software vor, die von uns erstellt wurde und bereits in diversen universitären Veranstaltungen an der Universität Paderborn zum Einsatz gekommen ist. Zunächst blicken wir auf Einsatzmöglichkeiten in der Primarstufe.

2. Anfänge in der Primarstufe

Die Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" (Hasemann & Mirwald, 2012) sieht für den Mathematikunterricht der Primarstufe vor, dass Schülerinnen und Schüler lernen „…wie man die so erfassten Daten für andere Personen übersichtlich in Tabellen und Diagrammen darstellt" sowie „…dass es hilfreich oder sogar notwendig sein kann, die Daten noch weiter zu bearbeiten und ihren Informationswert zu erhöhen". Schon früh - beispielsweise in der 4. Klasse einer Grundschule - kann der Einsatz adäquater Software sinnvoll sein: Zum einen um die Datenerhebung (Daten sammeln und erheben), zum anderen um den Prozess der Datenanalyse (Arbeiten mit größeren Datenmengen und das „Drehen und Wenden" der Daten nach selbstgewählten Fragen) zu unterstützen. Generell bieten sich zwei Zugänge für die Datenanalyse in der Primarstufe an, an denen man weiteren Softwareeinsatz anschließen kann. Mithilfe von „Lebendiger Statistik“ (vgl. Curcio, 2001) können sich die Schülerinnen und Schüler als Merkmalsträger selbst erfahren und somit erste Sortierungs- und Ordnungsprozesse in der Welt der Daten erleben. Weitergehend können sie durch Ordnen auch ein erstes Gefühl für die Mitte einer Verteilung (Median) erwerben. Auf einer weiteren Ebene kann sich dann das Arbeiten mit Datenkarten anschließen. Hier können die Schülerinnen und Schüler Merkmale (Fantasiename, Geschlecht, Körpergröße) mit Ausprägungen auf jeweils einen Zettel schreiben und wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist, sortieren und ordnen. Dieses ermöglicht eine Vorstufe der multivariaten Datenanalyse bereits in der Primarstufe. Die Software TinkerPlots, die ihre Datensätze in Form von Datenkartenstapel verwaltet und Auswertungen mithilfe der - auch für die Auswertung der Datenkarten passenden - Operationen „Stapeln“, „Trennen“ und „Ordnen“ ermöglicht, kann hier an die realen Handlungen (Sortiervorgänge im Rahmen der „lebendigen Statistik“ und Arbeiten mit Datenkarten) anknüpfen und gehaltvollere Auswertungen (mit mehr Daten und mehr Merkmalen) erleichtern. Wir empfehlen für den Einsatz der Software in der Primarstufe Vor-und Simultanarbeit zu leisten, d.h. vor dem Einsatz der Software und simultan beim Einsatz der Software mit Datenkarten zu arbeiten.

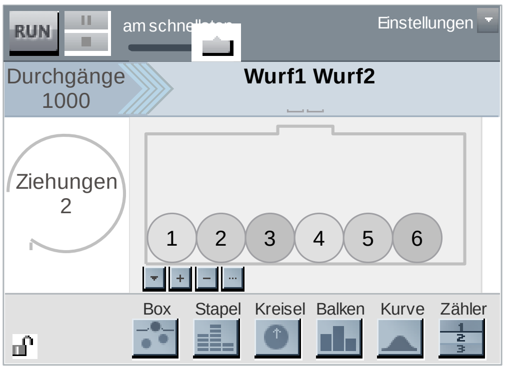
3. Einsatz von TinkerPlots in der Sekundarstufe

Neben dem Erstellen von „eigenen“ Graphiken und konventionellen Graphiken (wie Säulendiagramm, Kreisdiagramm, Histogramm, Boxplot) stehen in der Leitidee „Daten“ in der Sekundarstufe I vor allem Vergleiche zweier Verteilungen eines quantitativen Merkmals im Vordergrund (ausgeführt z. B. in Biehler, 2007b).

Der Einsatz von TinkerPlots zur Simulation, welche erst mit der Version 2.0 möglich ist, wird im Folgenden am Beispiel der Aufgabe „Doppelwurf“ gezeigt.

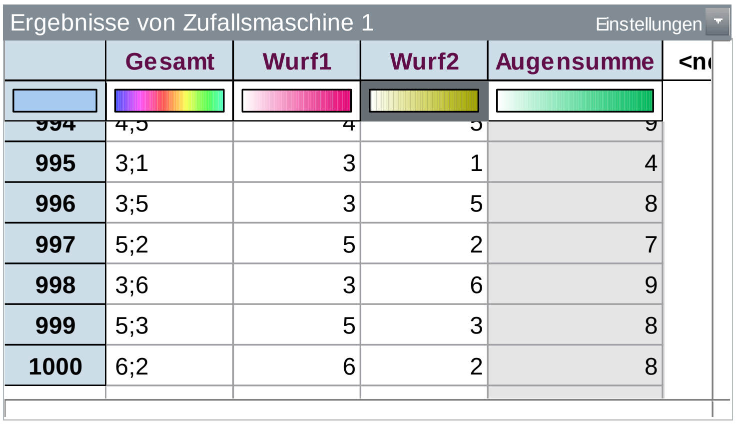
„Jemand bietet Dir ein Würfelspiel an. Dazu sollen zwei Würfel gleichzeitig geworfen und die Augensumme gezählt werden. Du darfst Dir vorher aussuchen, ob Du mit den Augensummen 5, 6, 7, 8 (Ereignis A) oder mit allen übrigen Augensummen (Ereignis B) gewinnen möchtest. Begründe, ob Du eine der beiden Gewinnmöglichkeiten bevorzugen würdest.“ (Müller, 2005)

Der doppelte Würfelwurf wird in der Zufallsmaschine wie in der Abbildung zu sehen, modelliert:



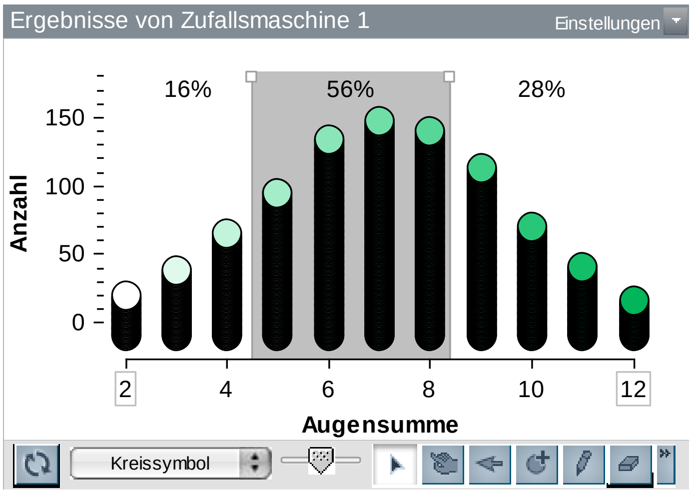
In eine Box werden 6 Kugeln gelegt, von 1 bis 6 beschriftet und aus dieser Box wird zweimal mit Zurücklegen gezogen (Anzahl Ziehungen). Dieses zweistufige Zufallsexperiment wird 1000 Mal wiederholt (Anzahl Durchgänge), um eine möglichst gute Schätzung der Wahrscheinlichkeiten zu erhalten.

Die Zufallsgröße „Augensumme" wird über eine vordefinierte Formel in der Tabelle berechnet.


Ergebnisse von Zufallsmaschine 1 — Einstellungen

	Gesamt	Wurf1	Wurf2	Augensumme	<n
994	4;5	4	5	9	
995	3;1	3	1	4	
996	3;5	3	5	8	
997	5;2	5	2	7	
998	3;6	3	6	9	
999	5;3	5	3	8	
1000	6;2	6	2	8	

Dargestellt ist in der ersten Spalte „Gesamt" die Kombination beider Zie-Ziehungen, anschließend gibt es für jede Ziehung ein eigenes Merkmal („Wurf1" und „Wurf2"). In der letzten Spalte „Augensumme" wird die Summe der Elemente in „Gesamt" gebildet. Diese Spalte kann durch einfaches Auswählen in einem Menü erzeugt werden. Hier ist die Augensumme die interessierende Größe, gebildet als die Summe der zwei Würfelwürfe. Die Verteilung des Merkmals „Augensumme" wird im letzten Schritt in einem Graph ausgewertet.



Dargestellt ist die Verteilung der Augensumme von zwei Würfelwürfen bei 1000 Durchgängen. Mit Hilfe des Werkzeugs „Einteiler" ist das Ereignis A (Augensumme 5, 6, 7 und 8) gekennzeichnet und die Prozentzahl dafür eingeblendet.

Bei 1000 doppelten Würfelwürfen tritt das Ereignis A „Die Augensumme 5, 6, 7 oder 8 kommt vor" in ca. 56 % der Fälle auf.

Das Ereignis A hat also eine höhere Wahrscheinlichkeit (>50 %) als das Ereignis B und sollte deshalb bevorzugt werden.

Ähnlich wie beim Arbeiten mit Datenkarten sollte auch bei Simulationen eine „händische“ Durchführung der Experimente vorangestellt werden, um Schülerinnen und Schülern eine Erfahrung auf verschiedenen Ebenen anzubieten. Später lassen sich weitere Aufgaben simulieren, die nicht der sogenannten „Würfelbudenmathematik“ entstammen (siehe z. B. Garfield et al., 2012).

4. Fazit & Ausblick

Eine Erprobung verschiedener Unterrichtsmaterialien rund um den Einsatz der Software TinkerPlots in deutschen Grund- und Sekundarschulen ist für die nächsten Monate vorgesehen.

Literatur

Biehler, R (2007a). Arbeitsumgebungen zur Entwicklung von Datenkompetenz ab Klasse 1 - Das Potential der Software TinkerPlots. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim: Franzbecker.

Biehler, R. (2007b). TINKERPLOTS: Eine Software zur Förderung der Datenkompetenz in Primar- und früher Sekundarstufe. Stochastik in der Schule, 27 (3). S. 34-42.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. & Makar, K. (2013). Technology for Enhancing Statistical Reasoning at the School Level. In: K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Hrsg). Third International Handbook of Mathematics Education (S. 643-689). New York: Springer 2013.

Curcio, F.R. (2001). Developing Data-Graph Comprehension in Grades K-8. 2. Auflage, Reston, VA: NCTM.

Garfield, J., delMas, R., & Zieffler, A. (2012). Developing statistical modelers and thinkers in an introductory, tertiary-level statistics course. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 44 (7), 883-898.

Hasemann, K. & Mirwald, E. (2012). Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. In: G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer, O. Köller (Hrsg.) Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (S. 141-161) Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Müller, J.H. (2005). Die Wahrscheinlichkeit von Augensummen – Stochastische Vorstellungen und stochastische Modellbildung. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 3 (47). S. 17 – 22.

TinkerPlots 2.0. Konold, C; Miller, C. (2011). Emeryville, CA: Key Curriculum Press, deutsche Adaption (unveröffentlicht) Biehler, R.; Frischemeier, D.; Podworny, S. (http://lama.uni-paderborn.de/personen/rolf-biehler/projekte/tinkerplots.html)

Rolf BIEHLER, Ana KUZLE, Janina OESTERHAUS, Thomas WASSONG, Paderborn

Stochastikfortbildner fortbilden: ein projektorientiertes Konzept zur Multiplikatorenqualifikation

Im Schuljahr 2012/13 führten wir im Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) eine Qualifikation für Mathematikmoderatorinnen und -moderatoren aus Nordrhein-Westfalen für die Sekundarstufe I durch. Im ersten Halbjahr wurde im Modul 1 „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht aus inhaltsbezogener Perspektive – am Beispiel der Stochastik“ das Thema Datenanalyse behandelt. In diesem Artikel werden die Projektstränge „Eigene Datenerhebung/-analyse”, „Aufgabenentwicklung zu interessanten Datensätzen” sowie „Konzeption und Durchführung einer Fortbildung” vorgestellt und in das Gesamtkonzept des Moduls eingebettet.

Ausgangslage

Das 2010 gegründete Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik hat als „zentrales Anliegen, Mathematik-Lehrerinnen und Lehrer während ihrer gesamten Laufbahn zu begleiten“ (http://www.dzlm.de). Ein Baustein dieses Anliegens ist die Weiterbildung von Multiplikatoren. Im Schuljahr 2012/13 führte das DZLM in NRW eine solche Qualifizierung für Multiplikatoren durch. Hierbei handelte es sich um ein Pilotprojekt. Zielgruppe waren die Mathematikmoderatorinnen und -moderatoren für die Sekundarstufe I in NRW. Hierbei handelt es sich um Lehrkräfte, die in so genannten Kompetenzteams auf Kreisebene organisiert und für die Durchführung regionaler Lehrerfortbildungen zuständig sind. Dabei werden sowohl schulübergreifende als auch schulinterne Fortbildungen auf Anfrage realisiert.

Die Qualifizierung erstreckte sich über das gesamte Schuljahr und bestand aus den zwei Modulen „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht aus inhaltsbezogener Perspektive – am Beispiel der Stochastik“ (Modul 1) und „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht aus prozessbezogener Perspektive“ (Modul 2). Ein zentrales Gestaltungselement war die integrative und additive Umsetzung der für Moderatorinnen und Moderatoren spezifischen Themen Fortbildungsdidaktik und –methodik sowie Weiterbildungsmanagement.

Die Qualifizierung wurde vom Ministerium für Schule und Weiterbildung (MSW) des Landes NRW unterstützt, sodass den teilnehmenden Lehrkräften für die Qualifizierung i.d.R. 3 Entlastungsstunden pro Woche für das Schuljahr 2012/13 angerechnet werden konnten. Es nahmen insgesamt 14 Moderatorinnen und Moderatoren aus allen Regierungsbezirken in NRW teil. Die erfolgreiche Teilnahme wurde durch ein gemeinsames Zertifikat des DZLM und des MSW bescheinigt. Für das Zertifikat wurde u.a. die Bearbeitung der unten genannten 3 Projekte erwartet. Die Stundenbelastung für die gesamte Maßnahme betrug 250 Stunden.

Das Modul „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht aus inhaltsbezogener Perspektive – am Beispiel der Stochastik"

Das Modul 1 war in einem Blended-Learning-Format organisiert: Etwa alle 2 Wochen fand an der Ruhr-Universität Bochum ein siebenstündiger intensiver Präsenztermin mit Inputs, Workshops und Übungsphasen statt. In den übrigen Wochen erfolgte eine zweistündige Online-Präsenzsitzung, die an zwei verschiedenen Terminen pro Woche angeboten wurde, um allen die Möglichkeit zur Teilnahme zu ermöglichen. Die Online-Präsenztermine wurden mit Hilfe der Software Adobe Connect realisiert. Neben fachlichem und fachdidaktischem Input mit teilweise interaktiven Anteilen wurden auch Gruppendiskussionen über die Online-Plattform geführt. Für die Phasen zwischen den Präsenzterminen erhielten die Teilnehmenden Arbeitsaufträgen zu den einzelnen Projekten. Zur Unterstützung der Kommunikation in den Distanzphasen wurde eine moodle-Installation aufgesetzt. Die Entscheidung für Blended-Learning begründete sich in der Zeitersparnis für alle Beteiligten durch die wegfallende Anreise zu den Präsenzterminen.

Neben dem Update des Professionswissens standen drei Projekte im Zentrum der Qualifizierung, die die drei Perspektiven Fach, Fachdidaktik und Fortbildungsdidaktik abdeckten. Diese vier Hauptbestandteile der Qualifizierung werden nun vorgestellt.

Update des professionellen Wissens für Lehrkräfte

Die Einführung der Bildungsstandards und der damit verbundenen stärkeren Gewichtung der Leitidee Daten und Zufall führt zu einem fachlichen und fachdidaktischen Nachholbedarf sowohl bei Lehrenden als auch bei Lernenden (Biehler & Hartung 2006). Um diesem entgegen zu kommen, lag der Fokus des Modul 1 auf einem Update des professionellen Wissens für Lehrkräfte im Bereich Stochastik. Aufgrund der zeitlichen Begrenzung des Moduls auf ein Schulhalbjahr wurde der Schwerpunkt auf das Thema Datenanalyse in der Sekundarstufe I gelegt. Basierend auf einer Analyse der Kernlernpläne in NRW (http://www.kernlehrplaene.nrw.de/) wurden 5 Oberthemen identifiziert: (1) Daten: Woher und Wofür?, (2) Daten repräsentieren, zusammenfassen und interpretieren, (3) Trends und Zusammenhänge in Daten, (4) Kritischer Umgang mit Statistik und Daten in Medien und (5) Statistische Projekte und Präsentationen mit digitalen Medien. Ein zentrales Element im Rahmen des fachlichen Updates war die Verwendung digitaler Werkzeuge (Excel und Fathom). Die Einführung dieser Werkzeuge erfolgte zu Beginn des Moduls über den Einstieg in die Datenanalyse mit digitalen Werkzeugen auf der Basis des Materials von Biehler, Hofmann, Maxara & Prömmel (2011). Die Auswahl der Themen basierte auf einem Modell von Professionswissen (Wassong & Biehler 2010), deren Umsetzung in Wassong (2013) am Beispiel des Themas „Daten repräsentieren, zusammenfassen und interpretieren“ erläutert wird. Die fünf zentralen Wissenskategorien des Modells sind (1) Allgemeines und schulorientiertes Fachwissen in Mathematik, (2) Curriculares Wissen in fachlicher und fachdidaktischer Hinsicht, (3) Lern- und Lehrorientiertes fachdidaktisches Wissen, (4) Medienorientiertes allgemeines und fachdidaktisches Wissen und (5) Fortbildungsdidaktisches und –methodisches Wissen.

Projekt 1: Statistisches Projekt: Eigene Datenerhebung und Analyse

Das erste Projekt zielte auf die fachlichen Kompetenzen der Teilnehmenden. Gemeinsam wurde ein Online-Fragebogen (in Google Docs) mit insgesamt 40 Fragen für Schülerinnen und Schüler der Klassen 7 und 8 entwickelt. Dieser Fragebogen wurde von den Schüler/innen der Moderatorinnen und Moderatoren ausgefüllt, sodass ein Datensatz mit über 600 Fällen entstand. Der Abschluss des Projektes bildete die Analyse eines Teil-Datensatzes nach eigenen Auswertungsfragen sowie die Interpretation der Ergebnisse. Sowohl Analyse als auch Interpretation wurden schriftlich verfasst. Bei der Analyse der Daten wurde das im Rahmen des fachlichen Updates gelernte und vertiefte Wissen angewendet. Somit fungierte das Projekt als „fachliches Gesellenstück“ der Teilnehmenden.

Projekt 2: Entwicklung eigener Aufgaben

Das zweite Projekt fokussierte die fachdidaktische Auseinandersetzung mit der Datenanalyse und bestand aus zwei Schritten: Im ersten Schritt wurde eine Schulbuchanalyse zur Verwendung von Datensätzen in den Schulbüchern der Moderatorinnen und Moderatoren durchgeführt. Die Ergebnisse zeigten, dass fast ausschließlich fiktive Datensätze mit wenigen Fällen verwendet werden. Zudem werden die Datensätze selten für mehr als eine Aufgabe verwendet. Aufbauend auf dieser Analyse bestand der zweite Schritt in der Entwicklung eines Aufgabensets, in denen durchgängig ein realer, umfangreicher Datensatz verwendet werden sollte. Dieses Aufgabenset wurde von den Teilnehmenden umfassend dokumentiert.

Projekt 3: Planung und Durchführung einer eigenen Fortbildung

Das dritte Projekt thematisierte den Fortbildungsaspekt. In Gruppen von zwei bis vier Teilnehmenden wurden Fortbildungen zum Thema Datenanalyse in der Sekundarstufe I geplant, durchgeführt und reflektiert. Planung und Durchführung wurden von den Dozenten der Qualifizierung begleitet und dokumentiert. Eine genaue Beschreibung dieses Projekts findet sich in Kuzle, Biehler, Oesterhaus & Wassong (2013).

Fazit und Ausblick

Am letzten Präsenztag wurde ein Feedback mit Hilfe einer Kartenabfrage von den Teilnehmenden eingeholt. Es zeigte sich insgesamt eine hohe Zufriedenheit mit der Qualifizierung im Modul 1. Insbesondere wurde das Engagement der Dozenten, das umfangreiche Materialangebot und die Gestaltung der Präsenztermine gelobt. Auch wurden die Online-Präsenztermine, die von vielen Teilnehmenden zu Beginn als skeptisch angesehen waren worden, wurden als eine Bereicherung und praktikable Alternative zu Präsenzterminen angesehen. Die Teilnehmenden resümierten, dass die integrative Verzahnung der drei Perspektiven Fach, Fachdidaktik und Fortbildungsdidaktik häufig eine große Herausforderung dargestellt habe. Hier sollte über eine klarere Trennung der drei Perspektiven nachgedacht werden. Zudem wurde die allgemeine zeitliche Belastung durch die Qualifizierung bemängelt. Im März und April 2013 wird eine Interviewstudie mit allen Teilnehmenden durchgeführt, die eine vertiefende Evaluation des Moduls 1 zur Folge haben soll. Ein Schwerpunkt wird dabei auf die Moderatorentätigkeit gelegt werden. Für das Schuljahr 2013/14 ist eine Wiederholung der Qualifizierung geplant, wofür das Konzept auf Basis der Evaluationsergebnisse überarbeitet werden wird.

Literatur

Biehler, R. & Hartung, R. (2006). Die Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I (S. 51–80). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C. & Prömmel, A. (2011). Daten und Zufall mit Fathom - Unterrichtsideen für die SI und SII mit Software-Einführung. Braunschweig: Schroedel.

Kuzle, A., Biehler, R., Oesterhaus, J. & Wassong, T. (2013). Praxisorientierte Fortbildungsdidaktik am Beispiel der Planung und Durchführung einer Stochastikfortbildung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. WTM: Münster.

Wassong, T. (2013). Was sollten Mathematik-Fortbildner über das Thema statistische Verteilungen in der Sek. I wissen? – Anwendung eines Modells zum Professionswissen im Rahmen einer DZLM-Multiplikatorenqualifizierung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. WTM: Münster.

Wassong, T. & Biehler, R. (2010). A model for teacher knowledge as a basis for online courses for professional development of statistics education. In Reading, C. (Hrsg.). Proceedings of ICoTS 8, Ljubljana, Juli 2010. Voorburg: IASE (CD-ROM).

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

Wenn situationale Bedingungen die Entwicklung des Dezimalbruchkonzepts stören

Fehler im Gebrauch von Dezimalbrüchen können durch unpassende synthetische Modelle (Vasniadou 2007), durch epistemologische Hürden (Prediger, 2009) oder durch intuitive Regeln, die Aufgabenstellungen nahe legen (Stavy & Tirosh, 1999), entstehen. Merenluoto und Lehtinen (2004) plädieren dafür, die Prozesse bei der Änderung von Konzepten genauer zu untersuchen und kommen zu einem Modell, das Wirkungen von Situationen, die eine Konzeptänderung erzeugen sollten, auf Kognition und Motivation beschreibt. Danach wird Konzeptänderung durch einen kognitiven Konflikt initiiert und kann dann erfolgreich sein, wenn Ambiguität in der Situation akzeptiert wird, Vertrauen in die Lösbarkeit des Konfliktes vorhanden ist und dem veränderten Konzeptanteil Sensitivität entgegengebracht wird. Störungen in diesem Prozess können Merenluoto und Lehtinen zufolge vielfältig ausfallen. Hohe Unsicherheit zum Beispiel führe häufig zu Vermeidungshandeln. Zu stark ausgeprägte Sicherheit lasse kaum Sensitivität gegenüber den neuen Konzeptanteilen zu und könne zu oberflächlichem Handeln in Verbindung mit Fehlern führen (ebenda 2004).

Was zeigen Interventionsstudien? Zur Behebung von Fehlvorstellungen bei Dezimalbrüchen haben Isotani et al. (2011) in einer web-basierten Interventionsstudie Interventionsformen mit Fehlerbeispielen, mit worked-examples und mit unterstützendem Problemlösen verglichen. Erwartet wurde, dass Fehlerbeispiele besonders erfolgreich sind. Das war aber nicht der Fall. Die Erfolgsraten unterschieden sich bei den drei Interventionsformen durchschnittlich nicht, wohl aber bei den einzelnen Fehlvorstellungen.

Diese Befunde deuten an, dass Fehlhandlungen beim Erwerb von Dezimalbrüchen auch von den Merkmalen des Lernarrangements beeinflusst sein können. Wie aber kann man solche situational einschränkenden Bedingungen beim Lernen des Dezimalbruchkonzepts erfassen?

Das Konzept der *Situationsverhaftung* erlaubt die Kennzeichnung genau dieser situationsbedingten Lernbeschränkungen beim Erwerb von Dezimalbrüchen. Theoretischer Rahmen ist die Verbindung von zwei Theorien. Mithilfe des epistemischen Handlungsmodells aus der Theorie kontextueller Abstraktion (Dreyfus et al. 2001) können epistemische Prozesse von Lernenden rekonstruiert werden. Dieses Handlungsmodell (RBC-Modell) besteht aus den drei ineinander geschachtelten epistemischen Handlungen R, B und C. Recognizing (R) beschreibt eine Handlung des Wiedererkennens vorausgegangener Konstrukte (bzw. Wissensbestandteile). Diese

Konstrukte werden, orientiert an der Aufgabensituation, durch die Handlung des Building-with (B) zusammengebaut und reichern dadurch das aktualisierte Wissen an. Dies ist die Grundlage für Constructing-Handlungen (C), die zur Bildung neuer, für die Lösung der Aufgabe als relevant angesehener Konstrukte führen. Das RBC-Modell hat Schäfer (2010) mit Oerters (1982) Handlungstheorie verbunden, wonach Handlungen, auch die eben benannten epistemischen Handlungen, stets auf Objekte bezogen sind und im Handeln Objektbezüge in drei Schichten hergestellt werden. In der *singulären* Schicht ist das Objekt untrennbar an Handlungen gebunden. Wenn die Handlung beendet ist, ist auch das Objekt verschwunden. Das kann z. B. beim Positionieren eines Dezimalbruchs am Zahlenstrahl entstehen, wenn Dezimalbrüche nur als gegebene Markierungen erkannt werden. Bleibt das Objekt an typische Handlungen gebunden, ist aber über die Einzelhandlungen hinaus präsent, sprechen wir von einem *kontextuellen* Objektbezug. Das liegt z. B. vor, wenn bestimmte Dezimalbrüche am Zahlenstrahl dargestellt, aber z. B. nicht miteinander verglichen werden können. Ist die Bindung des Objekts an die Art des Gebrauchs aufgehoben, entsteht das *formale* Objekt. Das ist eine reine Struktur, die kontextunabhängig präsent, aber rekontextualisierbar ist. Ein formales Objekt liegt vor, wenn für Lernende Dezimalbrüche unabhängig von Handlungskontexten bedeutsam sind und sie mit Dezimalbrüchen in allen Situationen angemessen umgehen können. Nun kann es vorkommen, dass Nullen bei Dezimalbrüchen stets als „nichts" interpretiert und deshalb Zwischennullen weggelassen werden. In diesem Fall liegt eine *Situationsverhaftung* vor, weil der kontextuelle Objektbezug am Alltagsverständnis „Null ist nichts" gebunden ist und deshalb das Handeln mit Dezimalbrüchen nicht korrekt auf manche Situationen ausgedehnt werden kann. So entstehen Fehlhandlungen bei Recognizing- und Building-with-Handlungen. Derartige *Situationsverhaftungen* treten in allen Lernprozessen auf. Sie werden dann zu einem Problem, wenn sie das Weiterlernen wie im vorliegenden Beispiel stark behindern und so eine notwendige Konzeptänderung nicht zulassen.

Eine Fallstudie zur Rekonstruktion von Situationsverhaftungen

Zwei Schülerinnen einer sechsten Klasse, die laut Information der Schule mit Dezimalbrüchen vertraut war, wurden mittels eines Tests für eine vierstündige Förderung im Umgang mit Dezimalbrüchen ausgewählt. Die Entscheidung fiel auf Ayla und Pia, weil diese Schülerinnen keine Förderkinder waren, aber dennoch so viele Fehler beim Vergleichen, Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Dezimalbrüchen machten, dass erfolgreiches Weiterlernen stark beeinträchtigt erschien. Vier Masterstudierende, die in der Diagnose und Förderung im Kontext von Dezimalbrüchen erfahren waren, führten die Förderung durch. Sie thematisierten Positionieren und Vergleichen von Dezimalbrüchen, behandelten das Stellenwertverständnis von Dezimalbrüchen mit der Stellenwerttafel (SWT), wiederholten Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Dezimalbrüchen. Sie konfrontierten die Schülerinnen mit Fehlvorstellungen, organisierten Spielsituationen und halfen dabei, sich gegenseitig und sich selbst zu kontrollieren. Alle vier Stunden wurden videographiert und transkribiert. Dygas (2012) nutzte die ersten drei Stunden, um empirisch basiert idealtypische Situationsverhaftungen zu rekonstruieren. Das Transkript der vierten Stunde wurde von anderen Personen analysiert, um herauszufinden, wie die rekonstruierten Situationsverhaftungen zusammen genommen den Erwerb eines Konzeptverständnisses von Dezimalbrüchen beeinträchtigten.

Illustration einiger Ergebnisse an Daten

Es wurden folgende Situationsverhaftungen rekonstruiert (vgl. Dygas 2012): *Verhaftung im Alltagsverständnis* (Beispiel: „Null ist Nichts“ führte zur Fehlinterpretation von Zwischennullen bei Dezimalbrüchen); *Verhaftung in den natürlichen Zahlen* (Beispiel: 2,5·2,6 wird zu 4,11); *Ziffernverhaftung* (Beispiel: Stellen vor dem Komma werden zum Teil ziffernweise vorgelesen); *Anzahlverhaftung* (Beispiel: In der SWT liegt ein Plättchen im Einerfeld und eines im Zehnerfeld. Dies wird als 2 gedeutet.); *Skalierungsverhaftung* (Beispiel: Dezimalbrüche werden nur dort positioniert, wo der Zahlenstrahl Markierungen hat); *Verhaftung im Visuell-Haptischen* (Beispiel: Plättchen mit unterschiedlichen Farben wurden so umgedreht, dass einheitliche Farben auftraten, bevor damit gearbeitet wurde.); *singuläre Musterwahrnehmung* (Beispiel: Es wurden oberflächlich-assoziative Muster gesehen und durch Analogiebildung übertragen; die Frage, wie Hunderter aus Zehnern zu bilden sind, wurde korrekt mit 10 mal 10 beantwortet. Die folgende Frage, wie Tausender aus Hundertern entstehen, wurde mit 100 mal 100 beantwortet.); *Verhaftung in Inkompetenzerfahrungen* (Beispiel: Die eigene korrekte Lösung wird als falsch bezeichnet und die Korrektheit der fremden falschen Lösung wird gerechtfertigt; starke Unsicherheit.)

Situationsverhaftungen kann man sich metaphorisch als Filter vorstellen, die nur bestimmte Handlungen zulassen. Überlagern sich mehrere Situationsverhaftungen, dann ist auch das Spektrum möglicher Handlungen reduziert. Beispielsweise enthielten die Steine eines Dominospiels jeweils eine Aufgabe und eine Lösung. Dabei mussten Aufgaben und Lösungen passend zugeordnet werden. Ein Dominostein zeigte die Aufgabe 8-2,03. Aylas Lösung war 6,03. Auf Nachfrage, wie sie gerechnet habe, antwortete sie „8 minus 2 und null-drei hinten dran“. Nun würde man denken, dass Ayla die

Zeichenkette ,03 einfach anfügte, weil sie mit ,03 nichts anzufangen wusste. Allerdings gab es zuvor die Aufgabe 5+2,07, die Ayla korrekt mit 7,07 löste. Ihr verkürztes Verfahren war für diese Aufgabe durchaus angemessen und wurde durch Analogiebildung musterhaft auf die neue Aufgabe übertragen. Es lag also eine singuläre Musterwahrnehmung zu einem typischen Aufgabenmuster vor. Diese Übertragung allein hätte noch nicht zu einem Fehler führen müssen. Zusammen mit der Verhaftung in den natürlichen Zahlen (8-2) und der Ziffernverhaftung (die Ziffern 0 und 3 wurden einfach angehängt) war Handeln jedoch nur noch eingeschränkt möglich. Das Minuszeichen als Unterscheidungsmerkmal der beiden Aufgabenformen wurde ignoriert und das verkürzte Verfahren in diesem Fall unpassend übertragen. Das verschachtelte Auftreten von Situationsverhaftungen kann also erklären, weshalb Lernschwierigkeiten zuweilen so schwer zu beheben sind und die Erfolgsrate von Interventionen wie die von Isotani et al. (2011) prinzipiellen Einschränkungen unterliegt.

Literatur

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2001): Abstraction in Context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly, 1(3/4)*, 307-368.

Dygas, R. (2012). *Typische Situationsverhaftungen in einer Fördersituation zu Dezimalbrüchen.* Masterarbeit. Bremen: University of Bremen.

Isotani, S., Adams, D., Richard E. Mayer, R. E., Durkin, K., Rittle-Johnson, B. & Bruce M. McLaren, B. M. (2011): Can Erroneous Examples Help Middle-School Students Learn Decimals? In C. Delgado Kloos et al. (Hrsg.): *EC-TEL 2011, volume 6964 of LNCS*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 181-195.

Merenluoto, K., Lehtinen, E. (2004): Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction, 14*, 519–534.

Oerter, R. (1982): Interaktion als Individuum-Umwelt-Bezug. In E. D. Lantermann (Hrsg.): *Wechselwirkung. Psychologische Analysen der Mensch-Umwelt-Beziehung*. Göttingen: Verlag für Psychologie, 101-127.

Prediger, S. (2009): The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18*, 3-17.

Schäfer, I. (2010): Recognition in the context of spirolaterals – towards a refinement of the epistemic actions of the RBC-model. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Hrsg.), Mathematics in different settings, *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 4* (pp. 161-168). Belo Horizonte (Brazil): PME.

Stavy, R., Tirosh, D. (1999): Intuitive rules: a way to explain and predict students' reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 38**,** 51–66.

Vosniadou, S. (2007): Conceptual Change and Education. *Human Development*, 50, 47–54.

Jan BLOCK, Braunschweig

Quadratische Gleichungen – Erkennen und verstehen?

1. Flexibles algebraisches Handeln

$$x^2 - 5x = 0$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + 9 = 2$$
$$5x^2 + 20x + 15 = 0$$
$$(x-8)^2 = 0$$

Abbildung 1

Bei den fünf quadratischen Gleichungen in Abbildung 1 sehen Experten Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Sie wählen ausgehend von spezifischen Aufgabenmerkmalen eine adäquate Bearbeitungsmethode zum Lösen der jeweiligen Gleichung, indem sie wahrgenommene Merkmale in ein Netz von Beziehungen einordnen und ihnen somit Bedeutungen zuweisen. Diese Fähigkeit kann in Analogie zum Begriff des flexiblen Rechnens (vgl. Rathgeb-Schnierer 2006, Selter 1999) als flexibles algebraisches Handeln bezeichnet werden. Auch Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I sollen mit quadratischen Gleichungen flexibel handeln können und nicht nur ein Standardverfahren (z. B. Anwendung der p-q-Formel) beherrschen.

Wenn Schülerinnen und Schüler mehrere Lösungsverfahren kennen und flexibel einsetzen, kann die Effizienz beim Lösen quadratischer Gleichungen erhöht werden, da sich die Anzahl der Rechenschritte und der Schwierigkeitsgrad der Rechnungen ggf. verringern. Die Wahrscheinlichkeit für Fehler wird dadurch reduziert. Flexibilität des Handelns innerhalb eines mathematischen Gebietes korrespondiert mit Verständnis und wirkt positiv auf nachfolgende Lernprozesse (Heinze, Star, Verschaffel 2009). Förderlich für eine gute Erinnerung aber auch für die Rekonstruktion eines Verfahrens im Falle des Vergessens ist ein Verständnis im Sinne eines „relational understanding“, bei dem im Gegensatz zu einem „instrumental understanding“ auch begründet werden kann, warum eine Handlung in welcher Art und Weise ausgeführt wird (Skemp 1976). Flexibles algebraisches Handeln erfordert eine Reflexion des eigenen Tuns, die als Voraussetzung für die Anwendung von Wissen in neuen, unbekannten Situationen angesehen werden kann (Sjuts 2001). Die Fähigkeit zum Transfer von Kenntnissen auf unbekannte Situationen kann gefördert werden. Wenn Schülerinnen und Schüler der Durchführung von Standardverfahren blind vertrauen, schwindet oft ihr Bedürfnis und ihre Fähigkeit zur Reflexion und kritischen Prüfung von Ergebnissen. Dies ist insbesondere dann relevant, wenn das Standardverfahren anfälliger für Fehler ist als ein alternatives Lösungsverfahren (Engel 2011). Flexibles algebraisches Handeln kann außerdem zur Förderung algorithmischen Denkens beitragen, da der Prozess des Lösens einer quadratischen Gleichung mit der Auswahl eines geeigneten Verfahrens insgesamt als Algorithmus betrachtet werden kann. Für den Bereich der Arithmetik belegen Studien, dass gerade auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler davon profitieren, wenn sie nicht nur ein Standardverfahren kennen (vgl. Selter 1999). Es kann vermutet werden, dass diese Befunde für die Algebra in analoger Weise gelten.

2. Aufbau der Studie

In der Studie wird zwei zentralen Forschungsfragen nachgegangen, die im Hinblick auf die Voraussetzungen für die Fähigkeit zum flexiblen algebraischen Handeln relevant sind: Welche Merkmale nehmen Schülerinnen und Schüler beim Erfassen von quadratischen Gleichungen wahr? Welche Bedeutungen haben diese Merkmale für sie?

Kern der Untersuchung ist ein Laborexperiment mit 11 Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 9, das durch ein Unterrichtsexperiment ergänzt wird, bei dem die Aufgabenformate der Studie im Unterricht eingesetzt werden. Im Laborexperiment erfinden die Schülerinnen und Schüler bei der ersten von drei Aufgaben zu einer gegebenen quadratischen Gleichung durch Variation neue Gleichungen. Diese Aufgabenstellung kann als eine generierende Metaaufgabe bezeichnet werden. Als zweite Aufgabe müssen fünf quadratische Gleichungen unterschiedlicher Gestalt (s. Abbildung 1) gelöst werden. Hierbei handelt es sich um eine algebraische Basisaufgabe, für die die Schülerinnen und Schüler mindestens ein Bearbeitungsverfahren kennen sollten. Bei der dritten Aufgabe sortieren die Schülerinnen und Schüler 20 quadratische Gleichungen, die sich hinsichtlich der anzuwendenden Lösungsverfahren und der Gestalt der auftretenden Terme unterscheiden. Die Sortierkriterien müssen von den Schülerinnen und Schülern selbstständig entwickelt, erläutert und begründet werden. Diese analytische Metaaufgabe geht über das Lösen einer quadratischen Gleichung hinaus und ist daher geeignet, Hinweise auf solche kognitiven Prozesse der Wahrnehmung und der Bedeutungszuweisungen zu liefern, auf die die Forschungsfragen ausgerichtet sind (vgl. Block 2012).

3. Erste Ergebnisse

Die Analyse der von Schülerinnen und Schülern genannten Merkmale und der zugehörigen Begründungen beim Sortieren der 20 Gleichungen ergibt, dass zwei Kategorien von Merkmalen von besonderer Bedeutung sind. Dies sind einerseits Merkmale, die sich auf die Struktur und Komponenten der Terme als Bestandteile der Gleichung beziehen und andererseits Merkmale, die sich auf die Gleichungen als Ganzes beziehen. Bezüglich der Terme wurden gehäuft folgende Merkmale benannt: Anzahl der Komponenten des Terms, Anwendbarkeit binomischer Formeln (auch bei Termen wie (x-3)(x+5)=0), Vorhandensein von Klammern, Koeffizienten vor x oder x^2, Vorhandensein von x^2, Auftreten eines Exponenten, Größe der auftretenden Zahlen. Bezogen auf die Gleichungen als Ganzes wurden folgende Merkmale vielfach genannt: Anzahl der Komponenten der Gleichung, Anzahl der Rechenschritte zur Auflösung der Gleichung, Art der Komponenten auf einer Seite der Gleichung (Null, Zahl, x^2).

In der Auswertung der Daten werden insbesondere die von den Teilnehmern zwischen den beiden Kategorien hergestellten Bezüge analysiert. Diese sind von besonderer Bedeutung für den flexiblen Umgang mit quadratischen Gleichungen, wie an den folgenden zwei Beispielen deutlich wird: I. (x-3)(x+5)=0, II. (x-3)(x+5)=7. Die Struktur der Terme auf den linken Seiten dieser Gleichungen ist identisch. Bei der ersten Gleichung erschwert ein Ausmultiplizieren des Produkts das Lösen der Gleichung. Im Gegensatz dazu ist selbiges bei der zweiten Gleichung aber nötig, um zu einer Lösung zu gelangen. Dies zu erkennen ist nur möglich, wenn den Schülerinnen und Schülern bewusst ist, dass die „Größe" der Zahlen (Null oder nicht Null) auf den rechten Seiten der Gleichungen bei den vorliegenden Strukturen der Terme Einfluss auf die Auswahl eines Lösungsverfahrens hat. Die Werte der Zahlen auf den linken Seiten der Gleichungen sind bezüglich eines geeigneten Lösungsverfahrens in diesem Fall hingegen irrelevant.

Exemplarisch soll hier vertiefend auf das bei der Sortieraufgabe häufig genannte Merkmal „Klammern vorhanden" eingegangen werden. Diesem Merkmal wurden Bedeutungen unterschiedlicher Art zugeschrieben, die im Folgenden beschrieben und diskutiert werden.

Eine Bedeutungszuschreibung betrifft die Vorrangigkeit von Termen mit Klammern gegenüber solchen ohne Klammern. Die Schülerinnen und Schüler formulierten, dass Terme mit Klammern Priorität haben und zuerst ausgerechnet bzw. ausmultipliziert werden müssen. Ein solches Konzept, das als spontane Reaktion das Ausmultiplizieren von Klammern (z. B. bei den genannten Gleichungen I. und II.) hervorruft, führt nicht nur zu weniger effizienten Lösungswegen, sondern steht der Idee der Faktorisierung eines Terms als Lösungsverfahren für Gleichungen entgegen. Als Ursache für ein solch dominierendes Konzept kann u. a. eine Einseitigkeit des Umgangs mit Termen mit Klammern vermutet werden. Hieraus resultiert die Frage, wie im Unterricht und in Schulbüchern mit solchen Termen umgegangen wird: Dominiert im Unterricht das Ausmultiplizieren oder wird auch gleichwertig das Faktorisieren thematisiert? In welchen Kontexten werden diese Termumformungen erarbeitet und geübt?

Den Schwierigkeitsgrad einer Gleichung begründeten die Schülerinnen und Schüler vielfach mit den auftretenden Termen. Die Schülerinnen und Schüler beschrieben Terme mit Klammern als kompliziert und schwierig. Klammern wurden hier nur im Hinblick auf die Struktur des Terms und die resultierenden Rechenschritte bei einer Termumformung gesehen, nicht aber im Hinblick auf die Struktur des Terms im Kontext des Lösens von Gleichungen. Klammern können gerade auf eine faktorisierte Darstellung hindeuten, die das Lösen der Gleichung ggf. vereinfacht.

Als eine weitere Bedeutung nannten die Schülerinnen und Schüler, dass die Variable schwieriger zu isolieren sei, wenn sie in einer Klammer auftritt. Diese Erklärung bezieht sich nicht nur auf den Term selbst, sondern auch auf den Kontext des Lösens einer Gleichung. Sie weist auf ein Konzept zum Lösen von Gleichungen hin, bei dem die Variable auf einer Seite zu isolieren ist und auf der anderen Seite der Gleichung eine Zahl übrig bleibt. Ein solches Lösungsschema steht z. B. dem Lösen einer quadratischen Gleichung mit quadratischer Ergänzung oder der Anwendung einer binomischen Formel zum Faktorisieren des Terms entgegen, da hierbei zunächst ein Term mit Klammern erzeugt wird. Die Argumentation der Schülerinnen und Schüler deutet auf eine Übergeneralisierung der Regeln zum Gleichungslösen hin, die an linearen Gleichungen gelernt wurden. Hieraus ergeben sich Fragen hinsichtlich der unterrichtlichen Behandlung verschiedener Typen von Gleichungen z. B. mithilfe von Kontrastierungen und Vergleichen.

Literatur

Block, J. (2012): „Aber das rechnet man doch mit der p-q-Formel!“ – Wie erfassen Schülerinnen und Schüler Merkmale quadratischer Gleichungen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM. 137-140.

Engel, H.-J. (2011): Denn sie wissen nicht, was sie tun. In: T. Fritzlar u. a. (Hg.): Konstruktionsprozesse im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker. 89-92.

Heinze, A.; Star, J. R.; Verschaffel, L. (2009): Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. In: ZDM Mathematics Education 41 (5), 535-540.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006): Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Hildesheim: Franzbecker.

Selter, C. (1999): Flexibles Rechnen statt Normierung auf Normalverfahren. In: Die Grundschulzeitschrift 13 (125), 6-11.

Sjuts, J. (2001): Metakognition beim Mathematiklernen: Das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. In: MU – Der Mathematikunterricht 47 (1), 61-68.

Skemp, R. R. (1976): Relational Understanding and Instrumental Understanding. In: Mathematics Teaching 77, 20-26.

Katrin BOCHNIK, Stefan UFER, München

Der Einfluss einer nicht-deutschen Familiensprache auf verschiedene Facetten mathematischer Kompetenz in der Grundschule

Im Vergleich zu Lernenden ohne Migrationshintergrund fallen die Mathematikleistungen und die Verteilung auf die Kompetenzstufen für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund deutlich ungünstiger aus (Tarelli, Schwippert & Stubbe, 2012). Neben dem Migrationshintergrund, dem Sozioökonomischen Status und dem Bildungsniveau der Eltern wird auch der familiäre Sprachgebrauch als Erklärungsvariable betrachtet. Dabei zeigte sich in Bezug auf die Familiensprache bei TIMSS 2011 ein signifikanter Effekt: Kinder, die zu Hause nie deutsch sprechen, weisen im Durchschnitt eine um 15 Punkte niedrigere mathematische Kompetenz auf als diejenigen, die zu Hause immer deutsch sprechen (ebd.). Basierend auf diesen Erkenntnissen liegt der Fokus der vorliegenden Untersuchung auf dem Vergleich von Lernenden mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache und der Erklärung möglicher Unterschiede.

Sprachlich bedingte Leistungsunterschiede in Mathematik

Die Längsschnittstudie SOKKE konnte bereits zu Beginn der Grundschulzeit mathematische Leistungsunterschiede zwischen Lernenden mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache nachweisen. Dabei können Unterschiede im Bereich arithmetischer Basisfertigkeiten durch kognitive Grundfähigkeiten erklärt werden, während im Bereich des konzeptuellen Verständnisses Kenntnisse in der Unterrichtssprache Deutsch die größte Einflussvariable darstellen (Heinze, Herwartz-Emden & Reiss, 2007).

Im Bereich der Bilingualitätsforschung konnte eine Untersuchung zu Textaufgaben hingegen zeigen, dass monolinguale Lernende zwar signifikant höhere Leistungen im Lösen gewöhnlicher Textaufgaben erzielen als Bilinguale, für Textaufgaben mit Distraktoren (im Sinne von überflüssigen Informationen) lässt sich allerdings kein signifikanter Unterschied nachweisen. Es liegt die Vermutung nahe, dass bessere Sprachkenntnisse zu besseren Leistungen in den Aufgaben ohne Distraktoren führen, während bilingual aufwachsende Kinder ihre geringeren Sprachkenntnisse in den Aufgaben mit Distraktoren durch bessere Aufmerksamkeitskontrollprozesse ausgleichen können (Kempert, Saalbach & Hardy, 2011).

Die damit angedeuteten Probleme, aber auch Ressourcen von Lernenden nicht-deutscher Familiensprache legen eine differenzierte Betrachtung der mathematischen Kompetenz nahe. Im Folgenden werden, in Anlehnung an die Kompetenzdiagnostik, Facetten mathematischer Kompetenz betrachtet.

Sprachliche Einflüsse in der Test- und der Unterrichtssituation

Sprachliche Testanpassungen in US-amerikanischen Studien in Form von zweisprachig präsentierten Aufgaben und einem sprachlich vereinfachten Test hatten keinen signifikant positiven Effekt auf die Mathematikleistung von Lernenden nicht-englischer Familiensprache (Abedi, Courtney, Leon, Kao & Azzam, 2006). Die Ursache sprachlich bedingter Leistungsunterschiede bleibt also weitgehend unklar: Sind vor allem sprachliche Probleme im Testverständnis oder vielmehr die unterschiedliche Nutzung vorangegangener Lerngelegenheiten im Unterricht Ursache für die Unterschiede zwischen Lernenden mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache?

Es stellt sich also einerseits die Frage, wie mathematische Kompetenz möglichst sprachfair erhoben werden kann. Für schwache Leser hat sich dabei das Vorlesen mathematischer Aufgaben als wirkungsvoll herausgestellt (Helwig, Rozek-Tedesco, Tindal, Heath & Almond, 1999), welches möglicherweise auch für Lernende nicht-deutscher Familiensprache eine geeignete Testmodifikation darstellt. Andererseits könnte die Möglichkeit der Nutzung sprachbasierter Lerngelegenheiten im Mathematikunterricht als Indikator für Unterrichtsprozesse ein relevanter Mediator für die Effekte der Familiensprache auf den mathematischen Kompetenzerwerb sein. Im Speziellen lag hier bereits bei SOKKE die Vermutung nahe, dass Sprachkenntnisse auch für material- und handlungsbasierte Lernprozesse eine entscheidende Rolle spielen (Heinze, Herwartz-Emden, Braun & Reiss, 2011). Zur Überprüfung dieser Vermutung sollten Aufgaben zur Nutzung mathematischer Arbeitsmittel erhoben werden.

Fragestellungen

Ziel des vorliegenden Projekts ist es, in einer Querschnittstudie Ressourcen und Probleme von Lernen nicht-deutscher Familiensprache im Bereich der Mathematik herauszustellen, um Ansatzpunkte für ein Förderprogramm aufzuzeigen. Eine Pilotierungsstudie sollte folgende Fragen klären:

- Stellt der Test zur Messung verschiedener Facetten mathematischer Kompetenz (Eigenentwicklung) ein reliables Testinstrument dar?
- Welche Facetten mathematischer Kompetenz weisen signifikante Leistungsunterschiede zwischen Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache auf?

- Verringert das Vorlesen von Testaufgaben Unterschiede zwischen Kindern mit nicht-deutscher und deutscher Familiensprache?

Studiendesign

Um Informationen zu Ressourcen und Problemen von Lernenden nicht-deutscher Familiensprache im Vergleich zu ihren Mitschülern deutscher Familiensprache zu gewinnen, werden vier ausgewählte Facetten mathematischer Kompetenz erhoben. Die Items orientieren sich an bestehenden standardisierten Tests sowie den bundesweiten Vergleichsarbeiten (VERA 3) und wurden in einer möglichst einfachen sprachlichen Struktur formuliert, ohne dabei jedoch den mathematischen Anforderungsgehalt zu reduzieren. Die vier Subskalen des Tests, die jeweils eine Facette der mathematischen Kompetenz repräsentieren, beziehen sich auf *Arithmetische Basisfertigkeiten*, *Konzeptuelles Verständnis*, *Textaufgaben* und *Nutzung mathematischer Arbeitsmittel*. Die Aufgaben liegen in zwei Testversionen vor (vorgelesene vs. nicht-vorgelesene Aufgabentexte) und werden den Kindern computerbasiert präsentiert. Im Folgenden werden erste Ergebnisse der Pilotierungsstudie mit N = 95 Drittklässlern aus drei Münchner Grundschulen berichtet.

Ergebnisse der Pilotierungsstudie

Während für die Skalen *Textaufgaben* ($\alpha = .75$), sowie *Arithmetische Basisfertigkeiten* ($\alpha = .64$) und *Konzeptuelles Verständnis* ($\alpha = .68$) eine ausreichend hohe Reliabilität zu berichten ist, liegt die Reliabilität für die Skala *Nutzung mathematischer Arbeitsmittel* ($\alpha = .42$) nicht im akzeptablen Bereich. Hier werden mehrere Arbeitsmittel in einer Skala abgefragt, zusätzlich handelt es sich um weniger bekannte Aufgabenformate. Mit Ausnahme dieser Skala stellt der Test zur Erhebung der mathematischen Kompetenz demnach ein reliables Testinstrument dar.

Zur Analyse der Unterschiede zwischen Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache bezüglich der vier Facetten mathematischer Kompetenz wurden zweifaktorielle, univariate Varianzanalysen mit den zwei Faktoren *Familiensprache* (deutsch, nicht-deutsch) und *Vorlesen von Aufgabenstellungen* (vorgelesen, nicht-vorgelesen) durchgeführt.

Der Faktor *Familiensprache* ergibt bei allen vier Facetten mathematischer Kompetenz signifikante, aber unterschiedlich starke Effekte in Richtung eines Vorteils von Lernenden mit deutscher Familiensprache. Während der Effekt bei der Skala *Arithmetische Basisfertigkeiten* am schwächsten ist, findet sich der stärkste Effekt bei der Skala *Konzeptionelles Verständnis*. Die Ergebnisse verdeutlichen die Notwenigkeit einer differenzierten Betrachtung der mathematischen Kompetenz, wie sie bereits bei SOKKE angedeutet wurde (Heinze, Herwartz-Emden & Reiss, 2007).

Der Faktor *Vorlesen von Aufgabenstellungen* ergibt für die Skala *Arithmetische Basisfertigkeiten* einen signifikanten Effekt in Richtung eines Nachteils für Kinder, denen Aufgabentexte vorgelesen wurden. Für alle weiteren Skalen lässt sich deskriptiv die gleiche Tendenz feststellen, ohne dass sich signifikante Effekte zeigten. Die Testanpassung im Sinne eines Vorlesens von Aufgabentexten bringt damit weder für Kinder deutscher noch für Kinder nicht-deutscher Familiensprache einen ähnlichen Effekt wie für schwache Leser (Helwig et al., 1999).

Die Ergebnisse der Pilotierungsstudie weisen erneut Unterschiede zwischen Lernenden mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache im Bereich der Mathematik auf. Offen bleibt, inwieweit Unterschiede in der Nutzung von Lerngelegenheiten dabei als erklärende Variable eine Rolle spielen.

Literatur

Abedi, J., Courtney, M., Leon, S., Kao, J., & Azzam, T. (2006). English Language Learners and Math Achievement: A Study of Opportunity to Learn and Language Accommodation. Los Angeles.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L., & Reiss, K. (2007). Mathematikkenntnisse und sprachliche Kompetenz bei Kindern mit Migrationshintergrund zu Beginn der Grundschulzeit. Zeitschrift für Pädagogik, 53, 562–581.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L., Braun, C., & Reiss, K. (2011). Die Rolle von Kenntnissen der Unterrichtssprache beim Mathematiklernen: Ergebnisse einer quantitativen Längsschnittstudie in der Grundschule. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.), Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit. Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland (pp. 11–33). Münster, New York, NY, München, Berlin: Waxmann.

Helwig, R., Rozek-Tedesco, M. A., Tindal, G., Heath, B., & Almond, P. J. (1999). Reading as an access to mathematics problem solving on multiple-choice tests for sixth-grade students. Journal of Educational Research, 93(2), 113–125.

Kempert, S., Saalbach, H., & Hardy, I. (2011). Cognitive benefits and costs of bilingualism in elementary school students: The case of mathematical word problems. Journal of Educational Psychology, 103(3), 547–561.

Tarelli, I., Schwippert, K., & Stubbe, T. C. (2012). Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund. In W. Bos, H. Wendt, O. Köller, & C. Selter (Hrsg.), TIMSS 2011: Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich (pp. 247–267). Münster: Waxmann.

Rita BORROMEO FERRI, Maike HAGENA, Kassel

M@thWithApps – stärkere kognitive Aktivierung mittels neuer Medien in der Lehramtsfachausbildung Mathematik !?

Einleitung

Im Zuge der Verbesserung der Lehre an deutschen Hochschulen und Universitäten, sind in den letzten Jahren bereits vielfältige Innovationen hinsichtlich der Gestaltung von Vorlesungen und Seminaren in den unterschiedlichen Fachdisziplinen deutlich geworden. Mit der Gründung des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) liegt der Fokus verstärkt im Bereich der Lehre der Mathematik, mit dem Ziel, Lehrinnovationen zu entwickeln. Generell besteht bei größeren Vorlesungen das Problem, eine kognitive Mitarbeit von allen Studierenden zu fördern, vor allem bei Mathematikvorlesungen. In den letzten Jahren konnten bereits vielversprechende Gestaltungsmöglichkeiten im Bereich der Fachmathematikausbildung eingesetzt werden. Bewusst eingesetzte Kleingruppenarbeiten und Reflexionsphasen, „Inverted Classroom“ (Spannagel, 2013) oder die aktuell beliebten Votingsystemen („Clicker“) sind vielversprechende Ansätze für eine verstärkten Austausch zwischen Dozenten und Studierenden. Die wissenschaftlichen Untersuchungen bzgl. des Einsatzes solcher Maßnahmen in der Mathematikausbildung befinden sich dennoch erst am Anfang. Im Folgenden wird eine Pilotstudie mit ersten Ergebnissen beschrieben. Das Projekt M@thWithApps startete im WS 2012/2013 in der Fachvorlesung „Anwendungen“ mit 120 Studierenden des Grundschullehramts an der Universität Kassel. Die Studierenden wurden mit Tablet-PC’s ausgestattet, die über den gesamten Vorlesungzeitraum und Übungen eingesetzt wurden.

In unserem Projekt setzten wir die WebApp ARSnova[1] ein, die sich auch als „social software“ versteht.[1] Mit dem Zusatz „nova“ grenzt sich diese App bewusst von den alten, teuren und meist nur für Multiple-Choice-Fragen geeigneten Hardware-Clicker ab. Dozenten können mittels der Plattform zwar auch Votingfragen stellen, jedoch auf offene Fragen an das Publikum senden und Antworttexte von den Studierenden erhalten. Des Weiteren erhalten die Studierenden die Möglichkeiten – frei von jeglicher Angst – innerhalb der Lernplattform anonym Fragen zur Vorlesung zu stellen. Ebenso können sie dem Dozenten ein kontinuierliches Feedback geben (Echtzeitfeedback), das zu einer langfristigen Verbesserung der Lehre beitragen kann[2]. Je nach Thema der Vorlesung, in dem Fall handelte es sich

[1] ARS (Audio Response System); freigeschaltet erstmals im SoSe 2012
[2] Entwickler von ARSnova ist Klaus Quibeldey-Cirkel (TH Mittelhessen, Lehrstuhl für Informatik)

u.a. Kombinatorik und Stochastik, konnten den Studierenden Links, z.B. zu Simulationen zum Gesetz der großen Zahlen, geschickt werden, die ausprobiert und diskutiert wurden. Die generelle Internetnutzung konnte ebenfalls ergänzend für die Vorlesung genutzt werden. Das Vorlesungsskript wurde auf Overheadfolien entwickelt, was insbesondere für die Dozentin bei gleichzeitiger Nutzung des Tablets besseres multi-tasking ermöglichte.

Theoretischer Hintergrund

„Response Systems“ im Klassenraum bzw. in Universitäten wurden schon lange in den USA eingesetzt und haben mittlerweile in Deutschland in verschiedenen universitären Lehrveranstaltungen Einzug genommen. Das zentrale Ziel der Lehrenden, die sich für diese Lehrform in Großvorlesungen entschieden haben, ist insbesondere die studentische Aktivierung und somit das Schaffen einer aktiven Lernumgebung (Bruff, 2009) in Verbindung mit regem Austausch im Sinne der „peer instruction“ (Mazur, 1997). Einige Studien zeigten, dass durch „Clicker-Vorlesungen“ eher ein Lerneffekt bei den Studierenden erreicht wurde, als durch „reguläre“ Vorlesungen (siehe u.a. Hake, 1997, Deslauris et al., 2011), wobei die Ergebnisse oft schwanken. Hoppenbrock und Biehler (2012) setzten Clicker mit peer instruction in ausgewählten Analysisvorlesungen ein und konnten bei „Clicker-Vorlesungen“ eine höhere Aufmerksamkeit bei den Studierenden messen.

Forschungsfragen und Design der Studie

Wie bereits angedeutet, bietet ARSnova durch die Webanbindung weitreichendere Möglichkeiten, als die normalen Clicker-Systeme. Die eingesetzten Tablets für die Vorlesung hätten auch durch i-Phones oder Smartphones ersetzt werden können, da die App auch darüber läuft. ARSnova wird in vielen universitären Disziplinen eingesetzt, jedoch wurde bisher noch keine fachmathematische Vorlesung (im Lehramtsbereich) wissenschaftlich begleitet. Die Vorlesung "Mathematische Anwendung" ist in vier Themenbereiche eingeteilt: 1. Kombinatorik/Stochastik; 2. Mathematisches Modellieren; 3. Größen; 4. Proportionalität und Antiproportionalität/lineare Funktionen. ARSnova wurde sowohl in der Vorlesung als auch in den Übungen eingesetzt, wobei in den Übungen speziell auf die Fragen und Verständnisschwierigkeiten eingegangen werden konnte, die von den Studierenden während der Vorlesung mit Hilfe der App an den Dozenten herangetragen wurden und keine Zeit für die Beantwortung fanden. Im Sinne der „peer instruction“ oder etwa Think Pair Share, wurden den Studierenden unterschiedliche Arten von Fragen zum jeweiligen Stoffgebiet gestellt. Vorwiegend verwendeten wird drei Fragetypen (siehe u.a. Collins, 2007): Fragen zum Faktenwissen, zum konzeptionellen Verständnis und zur Wissensanwendung. Die Rückmeldungen der Studierenden wurden diskutiert bzw. aufgegriffen, so dass sich daran weitere Inhalte der Vorlesung anschlossen. Was nicht im Fokus der Untersuchung stand, war die Messung des Lernzuwachses in Mathematik. Es gab einen Pre- und Posttest, zu Beginn und am Ende des Semesters, der Fragen zu beliefs, zum Arbeitsverhalten bzgl. der Vorlesung und zur Einstellung von neuen Medien im Alltag und hinsichtlich des Einsatzes der Tablets und ARSnova beinhaltete. Das zentrale Ziel (für die Lehrperson) der Pilotphase bestand darin, die Einsatzmöglichkeiten der Tablets, vor allem ARSnova zu testen, um das didaktische Konzept für die weiteren Durchgänge zu modifizieren und zu optimieren und eine generelle Einstellung der Studierenden zu erhalten. Unsere zentralen Forschungsfragen in der Pilotstudie waren demnach:

- Kann durch den Einsatz der App(s) das Interesse an der Mathematik gesteigert werden?
- Empfinden die Studierenden die Vorlesung als abwechslungsreicher durch die App?
- Wird durch die App während der Vorlesung kognitive Aktivierung angeregt?

Einen wesentlichen Einflussfaktor auf die Ergebnisse hat die Lehrperson, die einerseits für die Entwicklung der Fragen verantwortlich und andererseits für deren sinnvolle Einbettung ist.

Ergebnisse

An dieser Stelle werden wir auf zentrale Ergebnisse der Studie eingehen. Die Skalen der Fragebögen hatten eine gute bis zufriedenstellende Reliabiltät (Cronbachs α zwischen .62 und .87). Mittels t-Tests konnten Unterschiede zwischen Vor- und Nachtest gemessen werden. Sowohl die Skala „Abwechselungsreichere Gestaltung der Mathematikvorlesungen“ ($T(70)=2.95$, $p<.05$, Effektstärke: d 0.37) als auch die Skala „Interesse für Mathematik“ ($T(70)=8.46$, $p<.05$, Effektstärke: d 0.96) zeigten positive Effekte bei den Studierenden. Bei der Frage „Durch die Nutzung der Frageplattform ARS Nova war ich in die Vorlesung eingebunden“ teilten sich die Studierenden in zwei gleich starke Gruppen bzgl. der Zustimmung, ebenso wie bei diesem Item: „Ich finde es gut, die Möglichkeit zu haben, über das Tablet Fragen zu stellen.“

Diskussion: Chancen und Risiken

Der Einsatz von ARSnova hat nach dem ersten Durchgang bereits viele der bereits in der Literatur genannten Vor- und Nachteile aufgezeigt. Trotz dessen können wir auf der Basis der Daten und dem Verhalten in der Vorlesung resümieren, dass eine kognitive Aktivierung stattgefunden hat, denn in einer regulären Mathematikvorlesung würde sich auf die gestellten Fragen keine 30 Studierenden nach 2-4 Minuten gleichzeitig melden. Die anonyme Abstimmung sehen wir, neben der mündlichen Meldung Einzelner, als Eisbrecher, sich aktiv zu beteiligen und sich mehr mit dem Stoff auseinanderzusetzen. Damit diese Art der Lehre nicht zu einer Quizshow herabgesetzt wird, ist ein Lehrstil notwendig, der an die Aufnahmefähigkeit der Zuhörer angepasst ist. Lehrende und Studierende profitieren insbesondere, wenn in der auf eine Abstimmung folgenden Diskussion Gründe für das jeweilige Antwortverhalten benannt werden (siehe auch Cutrim, 2008).

Literatur

Bruff, D. (2009): Teaching with Classroom Response Systems. San Francisco: Wiley Imprint.

Deslauris L., Schelew, E., Wieman, C. (2011): Improved Learning in a Large-Enrollment Physics Class, In: Sciencemag, Vol. 332, S. 862-864

Collins (2007): Livening up the classroom: Using audience response systems to promote active learning. Medical Reference Services Quarterly, 26(1), 81-88.

Cutrim, E. S. (2008): Using a voting system in conjunction with interactive whiteboard technology to enhance learning in the English language classroom. Computers in Education 50 (1), 338-356.

Hake, R. (1997): Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses, In: American Journal of Physics Teachers. Vol. 66. S64-74

Hoppenbrock, A.; Biehler, R. (2012): Fachdidaktischer Einsatz eines elektronischen Votingsystems zur Aktivierung von Mathematikstudierenden in Erstsemestervorlesungen. In Beiträge zum Mathematikunterricht, 389-392.

Mazur, E. (1997): Peer Instruction: A User’s Manual. Prentice Hall.

Spannagel, C. (2013): Die Mathematikvorlesung aus der Konserve. In Sprenger et al. (Hrsg.), Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Wiesbaden: Springer, 253-261.

Thomas BORYS, Karlsruhe; Astrid BRINKMANN, Münster

Strukturiertes und vernetzendes Lehren und Lernen mit Maps

1. Einleitung

Graphische Darstellungen von Vernetzungen wie Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Map-Formen eignen sich in besonderer Weise zum strukturierten Lehren und Lernen im Mathematikunterricht (Brinkmann 2007, 2011; Borys & Brinkmann 2013), insbesondere

- zum Aufbau von Wissensnetzen durch Visualisierung geordneter Strukturen,
- beim Lernen, z. B. zur zusammenfassenden Wiederholung von Lerninhalten zu einem Thema im Zuge einer Prüfungsvorbereitung,
- als Visualisierung kognitiver Strukturen von Individuen,
- um Lernfortschritte zu erzielen und festzuhalten.

Lässt man Schüler/innen auf klassische Weise Maps zu einem Thema erstellen, können individuell sehr unterschiedliche Darstellungen entstehen. In Unterrichtsprozessen kann es der Lehrperson darauf ankommen, dass die Schüler/innen ganz bestimmte Inhalte mit ihren Vernetzungen betrachten, z. B. wenn

- am Anfang einer Unterrichtsreihe ganz bestimmtes Vorwissen der Schüler/innen erhoben werden soll,
- eine Zusammenfassung am Ende einer Unterrichtsreihe bestimmte, als wesentlich erachtete Inhalte mit ihren Vernetzungen enthalten soll,
- die Lehrperson bestimmte (curriculare) Inhalte als gemeinsame Wissensbasis aller Schüler/innen einer Lerngruppe anstrebt,
- Vergleichbarkeit von zu speziellen Inhalten abgefragtem Wissen möglich sein soll.

Für solch eine inhaltliche Eingrenzung stellen wir verschiedene methodische Vorgehensweisen vor. Des Weiteren eignen sich einige der hier vorgestellten Verfahren auch dazu, dass die Schüler/innen in das Arbeiten mit Maps im Mathematikunterricht eingeführt werden.

2. Maps zur Bestimmung des Vorwissens

Durch den spiralförmigen Aufbau des Mathematikcurriculums bauen viele Inhalte aufeinander auf, so dass es sehr sinnvoll ist, das vorhandene Wissen zu Beginn einer Unterrichtseinheit zu ermitteln. Vor allem zu Beginn der Sekundarstufe, wenn die Schüler/innen meistens aus verschiedenen Grundschulen kommen und unterschiedliche Wissensstände mitbringen, ist dies geboten. Beispielsweise könnte man mit den Schüler/innen zusammen eine Mind Map zum Thema „Rechnen mit natürlichen Zahlen“ erstellen. Dazu stellt man das Thema in das Zentrum der Mind Map; alle Schüler/innen dürfen ihr Wissen dann der Lehrperson zurufen (vgl. Lipp 1994).

3. Maps als ein Strukturierungselement für den Unterricht

In einer langen Unterrichtsreihe werden meist viele verschiedene mathematische Inhalte behandelt; sehr oft verlieren sich die Schüler/innen dabei in Details und der Überblick geht verloren. Eine Abhilfe hierzu ist beispielsweise der systematische Einsatz von Mind Maps. Ein mögliches Vorgehen dabei ist, dass zu Beginn einer Unterrichtseinheit das Thema im Zentrum einer unbeschriebenen Folie notiert wird. Nach Abschluss von Unterthemen ergänzen die Schüler/innen anfangs gemeinsam mit der Lehrperson sukzessive die Äste in der Mind Map. Im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit können die Schüler/innen das selbstständig tun und das vorgegebene Konzept fortführen. Zum Schluss haben alle inhaltlich die gleiche Mind Map und damit eine sehr gute und prägnante Zusammenfassung der Unterrichtseinheit, die die Vorbereitung auf die nächste Klausur wahrscheinlich vereinfachen wird.

4. Maps mit vorgegebener Strukturierung erstellen

Der Lehrperson kann es darauf ankommen, dass die von ihren Schüler/innen zu erstellenden Maps ganz bestimmte Unterthemen beinhalten; diese werden dann vorgegeben (z. B. beim Thema „Dreiecke“ die Unterthemen: besondere Dreiecke und ihre Eigenschaften, Kongruenzsätze, besondere Linien im Dreieck, Formeln). Gibt man zusätzlich zu dieser inhaltlichen Strukturierung die Struktur der Darstellung vor, hat dies den Vorteil, später eine bessere Orientierung in der Map zu ermöglichen, z. B. im Rahmen von Unterrichtsgesprächen.

5. Maps zu vorgegebenen Begriffen erstellen

Am Ende einer Unterrichtseinheit ist es sehr oft geboten, das Gelernte sinnvoll zusammenzufassen, was durch die Lehrperson oder Schüler/innen erfolgen kann. Macht das die Lehrperson alleine, wird den Schüler/innen die Möglichkeit genommen, diese Kompetenz zu erlernen. Fassen die Schüler/innen das Gelernte zusammen, dann fehlt ihnen meistens eine Technik hierzu. Außerdem werden meistens zentrale Gedanken vergessen. Eine Möglichkeit bietet hier das Erstellen von Maps anhand vorgegebener Begriffe. Damit ist beispielweise gemeint, dass die Lehrperson für sich eine Map des Gelernten erstellt und sie anschließend in einzelne Teile zerschneidet. Diese kleinen Teile, die meist nur eine Gleichung oder einen

Begriff beinhalten, werden den Schüler/innen gegeben. Sie müssen dann die Teile zu einer Map zusammenpuzzeln.

6. Maps erstellen, die vorgegebene Fragen beantworten

Bei dieser Vorgehensweise erhalten die Schüler/innen eine Liste von Fragen zum Map-Thema mit dem Auftrag, ihre Map so zu erstellen, dass sie Antworten auf die Fragen liefert. Die im Abschnitt 4 vorgestellte Methode der vorgegebenen Strukturierung einer Map lässt sich mit der Vorgabe einer Fragenliste kombinieren.

7. Maps mit Hilfe vorgegebener Fragen ergänzen

Hier sollen die Schüler/innen zunächst selber ganz frei eine Map zu einem vorgegebenen Thema erstellen. Danach bekommen sie von der Lehrperson eine Liste mit Fragen und der Aufgabe, ihre Map dahingehend zu prüfen bzw. zu ergänzen, ob bzw. damit sie Antworten auf diese Fragen liefert. Diese Vorgehensweise bietet gegenüber der in Abschnitt 6 vorgestellten den Vorteil, dass sie mehr Individualität bei der Erstellung der Map zulässt und damit auch mehr Informationen über individuelles Wissen der Schüler/innen geliefert werden, jedoch erfolgt hier ggf. keine so enge Konzentration der Darstellungen auf genau die Sachverhalte, die mittels der Fragen präsentiert werden sollen.

8. „Master“-Maps „lesen“

Die Lehrperson legt am Ende einer Unterrichtseinheit eine „Master“-Map vor, in der die Inhalte der Unterrichtseinheit in übersichtlicher Weise gut strukturiert dargestellt sind; die Schüler/innen werden aufgefordert zu beschreiben, was in der Map dargestellt ist. Dabei können Fragen helfen und unterstützen (vgl. Brinkmann 2011, S. 25).

9. Lücken-Maps ergänzen

Den Schüler/innen wird hierbei zu einem Thema eine unvollständige Map vorgelegt mit dem Arbeitsauftrag, fehlende Konzepte in leer eingezeichnete Felder und evtl. fehlende Verbindungen einzutragen. Als Hilfe und zusätzliche Differenzierung bietet sich eine Liste mit Begriffen an, die passend sind. Bei dieser Methode sind individuelle Bearbeitungs- bzw. Gestaltungsunterschiede noch weniger möglich als bei den vorher vorgestellten Verfahren. Mitunter kann es allerdings vorkommen, dass es verschiedene Möglichkeiten für einen sinnvollen Eintrag in ein leer vorgegebenes Feld gibt. Die Lehrperson sollte daher stets offen für unerwartete Lösungen sein und deren Sinnhaftigkeit in jedem Einzelfall hinterfragen.

Bei der Bearbeitung von Lückenmaps sind die Lernenden angehalten, sich intensiv und aktiv mit den Inhalten des betrachteten Wissensbereichs in ihrer Beziehungshaltigkeit auseinanderzusetzen. Gelerntes kann dabei aufgefrischt und gefestigt werden, aber auch neu strukturiert, wenn die in der Map dargestellte Struktur von der entsprechenden individuellen Wissensstruktur eines Schülers bzw. einer Schülerin abweicht. Allerdings könnte sich die Problematik ergeben, dass eine vorgelegte Lückenmap für manche Schüler/innen so wenig zu dem individuellen Wissensnetzwerk passt, dass sie schwer verständlich ist. Begleitende Diskussionen beim Ausfüllen der Map können hier hilfreich sein.

10. Schlussbemerkungen

Die von uns in diesem Artikel vorgeschlagenen Vorgehensweisen beim Einsatz von Maps im Mathematikunterricht zielen auf ein strukturiertes Lehren und Lernen derjenigen Inhalte zu einem Thema, die die Lehrperson als besonders relevant für das Schüler/innenwissen erachtet. Um individuelles Wissen Lernender zu einem Thema zu erheben, sind diese Methoden weniger geeignet – hierfür sollten Schüler/innen mit möglichst wenigen Vorgaben ihre Map erstellen. Vor allem verfolgen wir mit diesem Artikel das Ziel, methodische Möglichkeiten aufzuzeigen, wie Lernende an die Mappingtechnik herangeführt werden können und diese Memotechnik schließlich sinnvoll, gewinnbringend und selbstständig einsetzen können.

Im ersten Materialband der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ findet man mehrere Kopiervorlagen von Maps zu gängigen Unterrichtsthemen.

Literatur

Borys, T., Brinkmann, A. (2013): Strukturiertes Lehren und Lernen mit Maps – Methodische Vorgehensweisen zur inhaltlichen Eingrenzung. In: A. Brinkmann (Reihenhrsg.). Brandl, M., Brinkmann, A., Bürker, M. (Bandhrsg.). *Mathe vernetzt. Band 3.* Aulis Verlag, S. 23–32. ISBN 978-3-7614-2892-4.

Brinkmann, A. (2011): Visualisieren und Lernen von vernetztem mathematischen Wissen mittels Mind Maps und Concept Maps. In: A. Brinkmann (Reihenhrsg.). Brinkmann, A., Maaß, J., Siller, H.-S. (Bandhrsg.). *Mathe vernetzt. Band 1.* Aulis Verlag, S. 22–35. ISBN 987-3-7614-2836-8.

Brinkmann, A. (2007): *Vernetzungen im Mathematikunterricht – Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels graphischer Darstellungen.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker. ISBN 978-3-88120-465-1.

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.), Brinkmann, A., Brandl, M., Maaß, J. (Bandhrsg., 2013): *Materialband: Mathe vernetzt – Kopiervorlagen und Materialien zu Band 1–3.* Aulis Verlag. ISBN 978-3-7614-2895-5.

Lipp, U. (1994): Mind–Mapping in der Schule. In: Gudjunson, H. et al. *Pädagogik.* 10/94, S. 22–26.

http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Claudia BÖTTINGER, Essen

Historische Aspekte bei der Förderung mathematisch interessierter Grundschulkinder

Seit 2003 gibt es an der Universität Duisburg-Essen unter dem Namen „Mathe für schlaue Füchse“ ein Programm zur Förderung mathematisch interessierter Dritt- und Viertklässer. Es handelt sich eine „gemischte“ Gruppe nicht weiter durch Tests ausgewählter Kinder (Bauersfeld 2007) Das Programm wurde Anfang des Jahres im Rahmen des RegioELF-Wettbewerbs ausgezeichnet als *„Lehrveranstaltung, bei der die Studierende in unmittelbar gemeinwohlorientierten Projekten mit konkreten zivilgesellschaftlichen Partnern (z. B. NPOs) fachliche Forschungsprozesse oder –methoden erproben, erlernen oder anwenden.“*

1. Gründe für den Einsatz historischer Themen

Gründe für den Einsatz historischer Themen bei der Förderung mathematisch interessierter Kinder lassen sich in drei Gebieten finden.

Mathematikdidaktik: Aus der Perspektive der Mathematik und ihrer Didaktik geht es nach Jahnke (1998) u. a. darum, Einsichten in die Entwicklung mathematischer Begriffe zu erlangen, ein vertieftes Verständnis der Rolle der Mathematik in der Welt zu gewinnen und auch die subjektive Seite der Mathematik zu erkunden. In Jahnke, Richter (2008) wird dies fortgeführt: Mathematik soll nicht als Teil einer Hochkultur thematisiert werden, sondern als Bestandteil der historischen Alltagskultur. Daneben gibt es weitere Zugänge, z. B. zusammengefasst bei Schorcht (2012)

Geschichtsdidaktik: In der Geschichtsdidaktik hat sich die Entwicklung eines reflektierten Geschichtsbewusstseins als Schlüsselbegriff entwickelt (von Reeken, 2099). Nach Létouneau (2001) (zitiert nach van Reeken 2009) handelt es sich *„um die Kompetenz des menschlichen Individuums, seinen Platz in einer sich entwickelnden und fortschreitenden Umwelt relativ zu einem Vorher, einem Hier und Jetzt zu definieren.“* Damit wird es als Teil der Identitäts- und Persönlichkeitsentwicklung von Menschen angesehen. Van Reeken unterscheidet 8 grundschulrelevante Dimensionen des Geschichtsbewusstseins, von denen speziell für die Mathematik drei besonders herauszustellen sind.

Interessenförderung: Der Grundschulunterricht legt häufig die erste Begegnung mit einem Lernbereich, die für das weiter Engagement in diesem Feld ausschlaggeben sein kann. In der Didaktik des Sachunterrichts wird der motivationale Aspekt als ebenso wichtig angesehen wie die Fachpropädeutik. Zu uns kommen Kinder, die sich für Mathematik interessieren, sodass es lohnt, aufzuzeigen, welche Facetten dieses Gebiet noch bietet.

Erkenntnis der Historizität der eigenen Lebenswelt: Historizitätsbewusstsein ist das Bewusstsein von Geschichtlichkeit. Dies sollen Kinder an einem vertrauten und damit scheinbar natürlichen Gegenstand erleben. Selbstverständlich gehören dazu auch mathematische Inhalte.

Genese von Gegenwartsphänomenen durch den Blick in ihre Geschichte kennen lernen: Hier geht es wirklich um die „Genese“, die vereinfachende Reduktion früher – heute oder „Wie gut geht es uns heute doch mit den vielen nicht nur technischen Errungenschaften“ soll unter allen Umständen vermieden werden. Gerade in der Mathematik ist es praktisch unbekannt, dass sich Begriffe oder Rechenverfahren entwickelt haben.

Begabungsförderung: In den verschiedenen Merkmalskatalogen zur Diagnose von (Hoch-)begabung findet sich immer, dass die betreffenden Kinder durch ein breites Wissensspektrum, durch kongnitive Neugier und allgemein durch „Wissensdurst“ auffallen (z. B. Heller, Reimann, Senfter 2005). Die Erfahrung hat gezeigt, dass dies auch auf die weitaus größere Gruppe der interessierten und leistungsstarken Kinder übertragbar ist. Mathematische Themen mit historischem Bezug sprechen sowohl diesen „Wissensdurst“ als auch die Freude am Problemlösen an. Während sich bei den besonders befähigten Kindern die Motivation im Laufe des erfolgreichen Bearbeitungsprozesses einstellt, muss bei gemischten Gruppen besonderer Wert auf die Anfangsmotivation gelegt werden (Bauersfeld, Kießwetter, 2006). Historische Themen sind motivierend (Pape 2008), sodass die Verbindung aus Mathematik und Geschichte lohnend erscheint.

2. Anforderungen an Förderthemen mit historischem Hintergrund

Bei der Konzeption dieser speziellen Förderthemen sind verschiedene Aspekte zu beachten. Beim mathematischen Gehalt herrscht Konsenz, dass ein flexibel verwendbares Aufgabenmaterial erforderlich ist, das alle Kinder zum Einstieg motiviert, zugleich aber zu Vertiefungen anregt (Bauersfeld 2007). Die Behandlung historischer Themen ist ein spezieller Typ des Sachrechnens. Daher sollten sie im Sinne Winters (1994) einen Beitrag zur Umwelterschließung leisten.

Aus der Geschichtsdidaktik wird der Einsatz einer Zeitleiste zur Förderung der Zeitbegriffsbildung und einer Karte zur geografischen Einordnung des Themas gefordert. Ganz zentral ist der Einsatz von Textquellen, Bildern, gegenständlichen Quellen und/oder Replikaten. Bei der Nutzung dieser Medien ist zu beachten, dass der zur Diskussion stehende Inhalt (die historischen Beziehungen) selbst unanschaulich und abstrakt ist und angewiesen ist auf Referenzobjekte, um über diese Beziehungen zu sprechen (von Reeken 2009). Insbesondere bedeutet dies, dass über diese Medien **aktiv** gesprochen werden muss. Damit haben sie dieselbe Funktion wie Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht.

Betrachtet man die obigen Anforderungen näher, so gelangt man umgehend zu Zielkonflikten. Mathematisch produktive Aufgaben, die einen Beitrag zur Umwelterschließung leisten und gleichzeitig das Geschichtsbewusstsein fördern, sind sicherlich kaum zu entwickeln und es sind Kompromisse erforderlich. Als gut umsetzbar hat es sich erwiesen, eine geographische und zeitliche Einordnung des zur Diskussion stehenden Themas vorzunehmen und den historischen Hintergrund sehr ernst zu nehmen. Das mathematische Problem wird dabei so authentisch wie möglich in den Sachkontext eingebettet, dabei werden ggf. Replikate genutzt, mit denen intensiv gearbeitet wird. Erweiterungen der mathematischen Aufgabe werden mit bedacht.

3. Beispiele

Inzwischen sind für spezielle Bereiche Konzepte entwickelt worden. Bei der Besprechung historischer Rechenverfahren kann es nicht um Vormachen – Nachmachen gehen. Daher werden mathematische Verfahren unvollständig vorgestellt. Die Kinder müssen sich überlegen, wie die Verfahren vollständig funktionieren könnten – wohlwissend, dass dies historisch nicht richtig ist. Die Verfahren werden jedoch historisch so redlich wie möglich in ihren Kontext eingebettet.

Als Beispiel soll das Rechnen im Staubbett dienen. Eines der frühesten Werke über das indische Zahlensystem, dessen arabischer Text noch existiert, wurde von Kushyar bin Labban verfasst, der südlich des Kaspischen Meeres geboren wurde, ungefähr 150 Jahre nachdem al Khwarizmi sein Werk über die Arithmetik geschrieben hat (Berggren, 2011). Dort werden Zahlen ziffernweise addiert, aber im Gegensatz unseren heutigen schriftlichen Rechenverfahren beginnend mit der größten Stelle der Zahl. Der erste Summand entwickelt sich bei der Aufgabe 576+385 folgendermaßen:

```
576     876     956     961
385     385     385     385
```

Man muss wissen, dass die Summanden nicht immer wieder neu aufgeschrieben wurden, sondern im Sandbett notiert wurden und die Zahlen einfach ausgewischt wurden. Arbeitsaufträge für die Kinder waren zunächst mehrere Aufgaben nach dem Verfahren zu rechnen - auch im Staubbett (Backblech mit Vogelsand), und sich zu überlegen, warum das Verfahren funktioniert, was keine große Herausforderung darstellt. Als nächstes sollten sie überlegen, wie ein entsprechendes Subtraktionsverfahren funktionieren könnte und besonders leistungsstarke Kinder sollten sich ein entsprechendes Verfahren für die Multiplikation überlegen. Ganz wichtig ist die Frage nach Besonderheiten dieses Verfahrens für die Menschen früher. Es wurde herausgearbeitet, dass es für die Verwendung im Sand besser geeignet ist als für die Verwendung auf Papier.

Neben den Rechenverfahren stellen Sachaufgaben mit historischem Inhalt einen zentralen Bereich dar. Diese werden so gewählt, dass sich durch die Bearbeitung der historische Hintergrund besser erschließt. Ein Beispiel ist die Berechnung des Seewegs nach Indien durch Columbus. Es geht um den Inhalt „Warum wollte Columbus Indien auf dem Westweg erreichen?“ und um Mathematik „Wie könnte Columbus gerechnet haben?“. Dazu wurden den Kindern ausgewählte Informationen zur Verfügung gestellt. Leistungsstarke Kinder hatten zusätzlich die Aufgabe, nachzurechnen, wie seriöse Wissenschaftler zur damaligen Zeit gerechnet haben könnten. Zusammentragend wurde besprochen, dass den Berechnungen Columbus falsche Annahmen zugrunde lagen und er nur durch Zufall Amerika entdeckt hat.

4. Fazit

Es ist möglich, Themen mit historischem Hintergrund bei der Förderung mathematisch interessierter Kinder zu besprechen, wenn man bereit ist, Zugeständnisse an die Authentizität zu machen. Man gewinnt dafür historisch und mathematisch reichhaltige Themen, die Kinder sehr ansprechen.

Literatur

Bauersfeld, H. (2007). Für kleine Mathe-Profis, Aulis Verlag Deubner, Köln

Bauersfeld, H., Kießwetter, K. (2006). Wie fördert man mathematisch begabte Grundschulkinder? Mildenberger Verlag, Offenburg

Berggren, J. L. (2011). Mathematik im mittelalterlichen Islam, Springer, Heidelberg

Heller, K. A., Reimann, R., Senfter, A. (2005). Hochbegabung im Grundschulalter – Erkennen und Fördern, Reihe: Begabungsforschung – Schriftenreihe des ICBF, Münster/Nijmegen, Bd. 2, Lit-Verlag, Berlin, Münster, Wien, Zürich, London

Jahnke, N. (1998). Historische Erfahrungen mit Mathematik, Mathematik lehren, 4 - 8

Jahnke, N., Richter (2008). Geschichte der Mathematik. Vielfalt der Lebenswelten - Mut zu divergentem Denken. Mathematik lehren 151, Dez. 2008, 4-11

Pape, M. (2008). www.widerstreit-sachunterricht.de/Ausgabe Nr. 11/Oktober 2008

Schorcht, S. (2012). Vom historisch-genetischen Prinzip lernen – Potential von Aufgaben mit historischem Hintergrund, Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, WTM-Verlag, Münster, 777-780

Von Reeken, (2009) Historisches Lernen im Sachunterricht, Schneider, Hohengehren

Winter, H. (1994). Sachrechnen in der Grundschule, Cornelsen Scriptor

Martin BRACKE, Kaiserslautern

Zeitprognose beim Ausdauerlaufen – woran erkennt man ein authentisches Modellierungsprojekt

In diesem Beitrag geht es weder um die formale Definition eines authentischen Modellierungsprojekts, noch ist es beabsichtigt weniger gelungene Beispiele für Modellierungsprojekte vorzustellen und zu kritisieren. Gemeinsam ist solchen Fragestellungen oft, dass der Autor für einen gegebenen mathematischen Sachverhalt (z.B. *Exponentialfunktion*) eine Aufgabe konstruiert, die sich mit den entsprechenden Werkzeugen bearbeiten lässt. Die Fragestellung wird dabei so gestaltet, dass sie möglichst realistisch und für Schüler interessant ist, um die Motivation zur Bearbeitung zu erhöhen.

Dieses Vorhaben gelingt meist nur zum Teil: Der Vorteil der Vorgehensweise ist, dass die vorgegebenen mathematischen Werkzeuge benutzt und daher die Unterrichtsplanung vereinfacht wird. Die Fokussierung auf wenige definierte mathematische Techniken hat jedoch eine sehr stark spezifizierte Fragestellung und oft die vollständige Angabe von (konstruierten) Daten zur Folge. Durch alternative Schülerlösungen, Recherche anderer Daten und kritischem Hinterfragen der Fragestellung können aber Probleme auftreten: Es kann zu einem Authentizitätsverlust und damit zu einer gesenkten Motivation kommen. Damit ist dieser Aufgabentyp zwar für den Mathematikunterricht geeignet, der künstliche Realitätsbezug wirkt jedoch kontraproduktiv und es scheint ehrlicher, ihn einfach wegzulassen.

Im Folgenden wird beispielhaft gezeigt, welche vielfältigen Möglichkeiten eine reale, offen gestellte Fragestellung für die Bearbeitung durch Schüler und auch Studierende bietet. Dabei werden nicht wie oft üblich durch die Auswahl der Daten oder die Art der Frage Lösungswege vorgezeichnet, vielmehr werden die Schüler tatsächlich zu Modellierern und erarbeiten mit den ihnen zur Verfügung stehenden Kenntnissen eigene Lösungen!

1. Problemstellung: Zeitprognose beim Ausdauerlaufen

Anhand eines konkreten Beispiels wird nachfolgend das Potential der Frage nach einer guten Zeitprognose für Ausdauerläufe vorgestellt. Es geht um den TSG Halbmarathon (21097,5m; (+215m/-219m) Höhenunterschied), welcher jährlich in Kaiserslautern veranstaltet wird und für den GPS-Daten im Internet zur Verfügung stehen (TSG, 2013). Wichtig ist hierbei, dass es sich um eine profilierte Strecke handelt!

In diesem Zusammenhang können viele verschiedene Fragen mit Zugang auf unterschiedlichem mathematischen Niveau, gestellt werden, z.B.

- Welche Endzeit kann ein Hobbyläufer erwarten, der seine aktuelle Leistungsfähigkeit für andere Distanzen (z.B. 5km, 10km) kennt?
- Wie sollte ein Läufer sich das Rennen einteilen?
- Ist die Zeit abhängig von der Laufrichtung, d.h. in welcher Richtung sollte der Kurs für ein schnelles Rennen durchlaufen werden?

Die vorgestellte Problemstellung wurde bei unterschiedlichen Gelegenheiten (Modellierungstagen und -wochen, Wettbewerb, Seminar) mit verschiedenem zeitlichen Aufwand von Schülern und Studierenden erfolgreich und kreativ bearbeitet. Im nächsten Abschnitt werden überblicksartig verschiedene Herangehensweisen und Überlegungen vorgestellt. Damit soll die Vielfalt und unterschiedliche Komplexität der mathematischen Werkzeuge, mit denen das Problem bearbeitet werden kann, aufgezeigt werden.

2. Gedanken zur Mathematischen Modellierung

Jüngere Schüler ab Klassenstufe 5 werden oft zu der Vereinfachung kommen, das Höhenprofil der Strecke sowie eine Ermüdung des Läufers außer Acht zu lassen. Werden dann Beispiele aus dem Schülerumfeld der Art „Onkel Max lief vor zwei Wochen einen 10km Volkslauf in 40:45 Minuten“ gesammelt, kommt beim Hochrechnen der Zeit damit das Umrechnens von Einheiten ins Spiel: Reden wir hier von 40,45 Minuten oder sind es 40,75 Minuten? Was sind eigentlich 75,95 Minuten? Kurz: Wie rechnet man systematisch und korrekt um? Anschließend ist mathematisch das Arbeiten mit dem Dreisatz gefragt, wobei auch ohne vorherige systematische Einführung die Schüler auf die richtige Rechnung kommen. Dabei kann der Betreuer durch Bezug auf den Problemkontext den Schülern helfen, ohne gezielt das Vorgehen vorzugeben. So ist die Frage nach der Plausibilität der Rechnung sehr hilfreich. Durch Recherche nach Zeiten eines Läufers für verschiedene Streckenlängen können die Schüler systematische Fehler selbst entdecken. Im Anschluss können die Vereinfachungen des Modells diskutiert werden, indem man etwa die berechneten Zeiten mit gelaufenen Zeiten in Bezug setzt (hier kann mit Höhenprofil und/oder Ermüdung argumentiert werden). Durch eigene Recherchen werden Schüler auf bereits bekannte Formeln zur Zeitprognose stoßen. Ein oft benutztes Modell (siehe (Riegel, 1977)) stellt einen exponentiellen Zusammenhang zwischen verschiedenen Distanzen und den aktuellen Weltrekorden fest:

$$Zeit_2 = Zeit_1 \times \left(\frac{Strecke_2}{Strecke_1}\right)^{1,07}$$

Nach Interpretation und grafischer Darstellung der Formel sollte die Frage auftauchen, ob bzw. warum ein Hobbyläufer hiermit für sich selbst stimmige Zeitprognosen ermitteln kann, obwohl er sich außerhalb des Bereichs von Weltrekorden bewegt. Dazu kann man reale Laufergebnisse in Bezug zu obiger Formel setzen und die Differenz zum Ideal analysieren und interpretieren. Muss vielleicht der Exponent abgeändert werden? Wie könnte so eine Änderung aussehen, hängt sie von der Leistungsfähigkeit ab?

Es gibt wenige Vorschläge, die das Profil einer Laufstrecke einbeziehen. Einer davon ist die Idee aus (Greif, 2006): Hier wird die Laufstrecke virtuell für jeden positiven Höhenmeter verlängert (+ 6m) bzw. für jeden negativen verkürzt (-2m). Für die so ermittelte virtuelle Streckenlänge wird dann mittels Dreisatzes eine Zeitprognose berechnet. Der Faktor *Ermüdung* wird zunächst nicht einbezogen. Wieder kann man das zugrunde liegende Modell an sich hinterfragen: Ist das Konzept der virtuellen Streckenlänge sinnvoll? Schüler kommen schnell darauf, dass nicht allein die Höhendifferenz sondern auch die Steigung eine wichtige Rolle spielt. Hier helfen oft eigene Experimente mit Pulsmesser und Testläufen an verschiedenen Steigungen. Dies ist zwar zeitaufwändig, trainiert aber auf der anderen Seite das Erfassen sowie die Darstellung, Auswertung und Interpretation von Daten. Ist die Formel von Riegel/Steffny bereits bekannt, kann über eine Verbindung mit der virtuellen Streckenlänge nach Greif nachgedacht werden.

3. Erweiterungsmöglichkeiten für Oberstufe und Studium

Schüler der Oberstufe oder Studierende können auf die Idee kommen, dass beim Ausdauerlaufen für eine geringe Endzeit eine möglichst konstante Leistung erbracht werden sollte. Damit stellt sich die Frage, wie bei konstanter Leistung die Laufgeschwindigkeit von der Steigung abhängt. Antworten kann man z.B. in (Minetti et al., 2002) oder durch entsprechende eigene Experimente finden. In (Daniels, 2005; Daniels et al, 1978) findet man ein Modell, welches die Dauer eines Laufs zu der vom Läufer abrufbaren konstanten Leistung in Bezug setzt. Zusammen mit der zuvor beschriebenen steigungsabhängigen Geschwindigkeit (bei konstanter Leistung) kann damit für einen profilierten Lauf eine sehr realistische Zeitprognose erstellt werden. Mathematisch werden hier (numerische) Integration und numerische Nullstellenbestimmung benötigt. In guter Näherung kann man aber auch von stückweise linearen Streckenprofilen ausgehen und so mit Hilfe von endlichen Summen einen Zugang eröffnen, der auch Schülern offen steht. Im Anschluss soll die folgende Tabelle (Format hh:mm:ss) einen Eindruck davon geben, welche Zeitprognosen die verschiedenen Ansätze für den TSG Halbmarathon erlauben:

10km	„Dreisatz“	Riegel/Steffny	Greif & Riegel (	Daniels/Minetti	Realer Lauf
36:00	1:15:57	1:20:01	1:23:29	1:21:44	**1:21:01**

Unabhängig von der Komplexität der Modelle sollte die Zeit aufgebracht werden, die ermittelten Prognosen mit den Schülern zu besprechen und Annahmen und Grenzen der Modelle zu beleuchten. So wird man Faktoren wie Bodenbeschaffenheit (Asphalt, Waldboden, Sand, Matsch), Wetter (Temperatur, Wind, Luftfeuchtigkeit) oder Tagesform meist nicht berücksichtigen können – was nicht heißt, dass die Prognosen nicht hilfreich sind, aber zumindest eine achtsame Anwendung und Interpretation nahelegt.

Wenn man die Ergebnisse mit Läufern diskutiert und auf ihre Anwendung überprüft, treten weitere Fragen auf: Welche Auswirkung hat es, wenn die vorhergesagte Zeit zu hoch/zu niedrig ist? Sind Abweichungen in beide möglichen Richtungen gleichwertig? Soll sich der Läufer nach einer Durchschnittsgeschwindigkeit richten oder kann man ihm sogar einen Geschwindigkeitsverlauf vorgeben? Basieren die Streckeninformationen auf GPS-Daten? Die Korrektur von GPS-Daten ist komplex und kann leicht ein selbstständiges Projekt werden!

4. Fazit

Es wurde ein offenes Modellierungsprojekt vorgestellt, das ohne eine zu restriktive Zeitvorgabe auf sehr unterschiedlichen mathematischen Niveaus diskutiert und bearbeitet werden kann. Die Erfahrung zeigt, dass das Projekt die Modellierer zu eigenen Experimenten, weiteren Recherchen und Fragestellungen einlädt und sehr reichhaltige mathematische Erfahrungen ermöglicht. Dabei soll die dem Leser vielleicht fehlende Konkretisierung von Lösungen und erforderlichen Grundkenntnissen dazu anregen, selbst in die Modellierung dieses Projekts einzutauchen, um anschließend aus einem ganz anderen Blickwinkel in die Arbeit mit Schülern zu gehen!

Literatur

Daniels, J. (2005): Daniels' Running Formula (2nd edition). Champaign (IL): Human Kinetics.

Daniels, J., Fitts, R. & Sheehan, G. (1978): Conditioning for Distance Running – the Scientific Aspects. New York: Wiley & Sons, Inc.

Greif, P. (2006): http://www.greif.de/hoehenmeter-laufzeit-rechner.html. Zuletzt aufgerufen am 25.03.2013.

Minetti, A., Moia, C., Roi, G. S., Susta, D. & Feretti, G. (2002): Energy cost of walking and running at extreme uphill and downhill slopes. J. Appl. Physiology 93: pp. 1039-1046.

Riegel, P.S. (1977): Time predicting. Runner's World Magazine 12(8).

TSG (2013): http://www.gpsies.com/map.do?fileId=mcykjsjeefuhqtuu. Zuletzt aufgerufen am 25.03.2013.

Matthias BRANDL, Passau

Das isoperimetrische Problem für Dreiecke

Während sich das isoperimetrische Problem für Rechtecke in der Regel in Schulbüchern der Sekundarstufe finden lässt, taucht dessen Pendant für Dreiecke nicht auf. Im Hinblick auf die Winter'sche Grunderfahrung, Mathematik „als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen" (Winter, 1996), findet sich zum Teil in Haag (2003) ein elementarer Weg, der algebraische und geometrische Aspekte auf schöne Weise verknüpft und so auf einem wenig ausgetretenen Pfad „unterwegs" zu vielen (elementar)mathematischen Einsichten verhilft. Zudem wird beispielhaft die Kraft elementarer Methoden im Rahmen von Optimierungsproblemen in mehr als einer Variablen aufgezeigt.

1. Das isoperimetrische Problem

In allgemeiner Form lautet das isoperimetrische Problem wie folgt: *Finde eine geschlossene Kurve, die den größten Inhalt bei gegebenem Umfang einschließt.*

In seiner Spezialisierung auf *Rechtecke* findet sich das isoperimetrische Problem – wenn auch nicht unter diesem Namen (eher: „die Suche nach dem Superrechteck" o. ä.) – in aktuellen Schulbüchern wieder. Mehrere schöne elementare Wege zur Lösung dieser Extremwertaufgabe finden sich z. B. in Danckwerts & Vogel (2001a, 2001b). Dort findet sich u. a. auch der hier praktizierte Weg über die Mittelungleichung.

1. Die Mittelungleichung

In Hinblick auf das isoperimetrische Problem für *Dreiecke* wird die Mittelungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel in drei Variablen benötigt:

Sind x_1, x_2 und x_3 drei positiv-reelle Zahlen, $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ ihr arithmetisches und $\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ ihr geometrisches Mittel, so gilt $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leq \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $x_1 = x_2 = x_3$.

Elementare algebraische Beweise (ohne das Prinzip der vollständigen Induktion), die sich für die Schule eignen, findet man z. B. in Schupp (1997, S. 5) oder Roth-Sonnen et al. (2004, S. 83), einen schönen geometrischen Beweis ebenfalls in Letztgenanntem bzw. ausführlicher in Cofman (1995, S. 196/197).

Für Zwecke der Optimierung wird folgender Zusammenhang verwendet, der direkt aus der Mittelungleichung folgt (Erreichen der oberen Schranke):

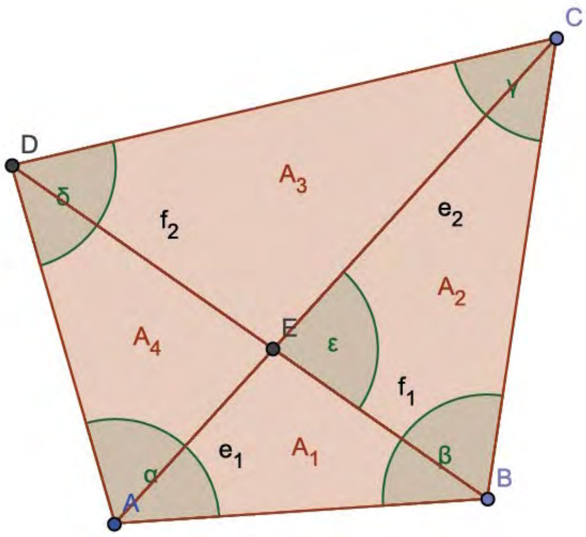
Ein Produkt dreier positiver Zahlen, deren Summe konstant ist, ist maximal genau dann, wenn diese Zahlen gleich sind.

2. Ein interessanter Weg zum Satz von Heron

Zur Lösung des isoperimetrischen Problems für Dreiecke eignet sich die übliche Flächeninhaltsformel *A=½gh* eher weniger. Als vorteilhaft stellt sich hier die in den Curricula vernachlässigte Formel von Heron dar: $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s=\frac{a+b+c}{2}$. Diese kann zwar elementar z. B. mit Hilfe des Satzes von Pythagoras hergeleitet werden; das Vorgehen, das in Haag (2003, S. 53 - 55) aufgezeigt wird, bietet sich allerdings als (elementar)mathematisch bzw. (elementar)geometrisch reichhaltige Alternative an, die eine Fülle an zusätzlichen Einsichten bereithält.

Ausgangspunkt ist eine Extremwertaufgabe: *Welches Viereck hat bei vorgegeben Seitenlängen den größten Flächeninhalt?*

Zur Beantwortung dieser Frage wird das Viereck durch dessen Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt:



Die Gesamtfläche des Vierecks ergibt sich dann als Summe der Teilflächen:

$$A=A_1+A_2+A_3+A_4=\frac{1}{2}e_1 f_1\sin(180°-\varepsilon)+\frac{1}{2}e_2 f_1\sin\varepsilon+\frac{1}{2}e_2 f_2\sin(180°-\varepsilon)+\frac{1}{2}e_1 f_2\sin\varepsilon$$

$$=\frac{1}{2}f_1(e_1+e_2)\sin\varepsilon+\frac{1}{2}f_2(e_1+e_2)\sin\varepsilon=\frac{1}{2}ef\sin\varepsilon$$

Wendet man zudem den Kosinussatz auf jedes Teildreieck an, so erhält man nach analogen Umformungen: $a^2-b^2+c^2-d^2=2ef\cos\varepsilon$.

Hier fallen bereits erste Sätze ab:

Genau dann, wenn in einem Viereck $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$ gilt, hat das Viereck orthogonale Diagonalen. (Satz 2.4.1 in Haag 2003)

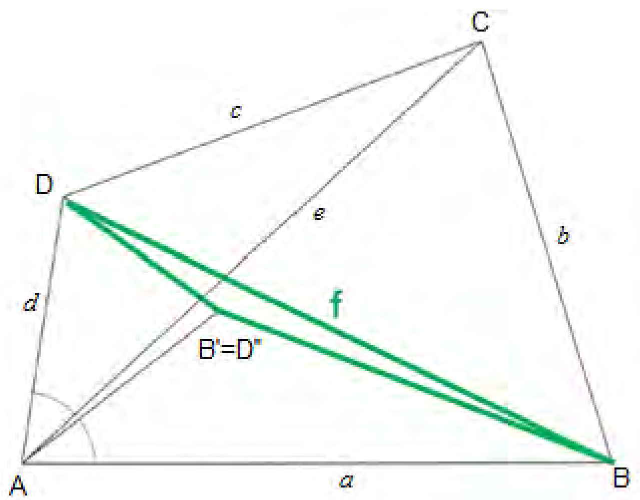
Verformt man ein Viereck mit orthogonalen Diagonalen gelenkig, so bleibt der rechte Winkel der Diagonalen erhalten. (Satz 2.4.2 in Haag 2003)

Eine interessante Folgerung davon ist: „Bei Vierecken mit Diagonalen, welche nicht senkrecht aufeinander stehen, kann dies durch eine gelenkige Verformung niemals erreicht werden.“ (Haag 2003, S. 54) Dieser Sachverhalt (bzw. derjenige aus dem vorausgehenden Satz) kann z. B. durch den Einsatz dynamischer Geometriesoftware wie GEONExT oder GeoGebra anhand von Vierecken mit entsprechend gewählten Seitenlängen sehr schön veranschaulicht werden.

Quadriert man nun die Formeln $A = \frac{1}{2} ef \sin\varepsilon$ und $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2ef \cos\varepsilon$, bildet dann die Summe und wendet den Satz des Pythagoras für trigonometrische Funktionen an, so erhält man $(e \cdot f)^2 = 4 \cdot A^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right)^2$.

Bei vorgegebenen Seitenlängen ist der zweite Summand auf der rechten Seite als konstant anzusehen, so dass die Fläche eines Vierecks mit konstantem Umfang genau dann maximal wird, wenn das Produkt der beiden Diagonalenlängen *e* und *f* maximal ist.

Mittels zweier geschickt gewählter Drehstreckungen des Dreiecks ABC (siehe Skizze unten) um A, so dass C‘ = D ist, und des Dreiecks ACD um A, so dass C‘‘ = B ist, erhält man aufgrund der Ähnlichkeit der jeweiligen Dreiecke die Entsprechungen $\overline{DB'} = b' = b \cdot \frac{d}{e}$ und $\overline{B'B} = c' = c \cdot \frac{a}{e}$; außerdem gilt $\sphericalangle AB'D = \beta$ und $\sphericalangle AB'B = \delta$. Die folgende Abbildung ist Haag (2003) entnommen (Fig. 2.34) und illustriert noch einmal die Situation:



Es gilt somit im Dreieck BDB‘ (bzw. BDD‘‘, da B‘=D‘‘) für den „langen Umweg“ über B‘, dass $\overline{DB'}+\overline{B'B}=\frac{b\cdot d}{e}+\frac{a\cdot c}{e}$. Die Anwendung der Dreiecksungleichung führt dann zu $f=\overline{DB}\leq\overline{DB'}+\overline{B'B}=\frac{b\cdot d}{e}+\frac{a\cdot c}{e}$ bzw. vereinfacht zu $e\cdot f\leq a\cdot c+b\cdot d$. Aus der Geometrie erkennt man nun, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn B‘ auf [BD] liegt, d.h. $\sphericalangle AB'D+\sphericalangle AB'B=\beta+\delta=180°$, also wenn ABCD ein Sehnenviereck ist. Dies stellt die Aussage des **Satz**es **von Ptolemäus** inklusive Umkehrung dar. Die Einführung der neuen Variable $s=\frac{U}{2}=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ im Ausdruck $(e\cdot f)^2=4\cdot A^2+\frac{1}{4}\cdot\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)^2$ mit $e\cdot f=a\cdot c+b\cdot d$ führt nach algebraischen Umformungen (evtl. mit Hilfe eines CAS) auf den **Satz von Brahmagupta**: *Ein Sehnenviereck besitzt den Flächeninhalt* $A=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$. Der **Satz von Heron** ergibt sich nun für den Spezialfall (eines zum Dreieck entarteten Sehnenvierecks) $d = 0$.

3. Anwendung der Mittelungleichung

Analog zum Vorgehen in Dörrie (1972) ist die Fläche eines Dreiecks mit konstantem Umfang gemäß des Satzes von Heron nun genau dann maximal, wenn das Produkt $(s-a)(s-b)(s-c)$ maximal ist. Da die Summe dieser Faktoren genau den Umfang ergibt und damit konstant ist, folgt mit der Mittelungleichung, dass sich die maximale Fläche genau dann einstellt, wenn $s-a=s-b=s-c$ gilt, also für *gleichseitige* Dreiecke.

Literatur

Cofman, J. (1995). Numbers and Shapes Revisited. New York: Oxford University Press.

Danckwerts, R., Vogel, D. (2001a). Extremwertaufgaben im Unterricht – Wege der Öffnung. In: MU, 4, 9 - 15.

Danckwerts, R., Vogel, D. (2001b). Extremwertprobleme ohne Analysis – die Kraft elementarer Methoden. In: MU, 4, 32 - 38.

Dörrie, H. (1972). Ein neues elementares Verfahren zur Lösung von Extremwertaufgaben. In: MU, 5, 23 - 51.

Haag, W. (2003). Wege zu geometrischen Sätzen. Stuttgart: Klett.

Roth-Sonnen, N., Stein, G., Stengel, A. (2004). Knobel-Aufgaben für die 9. und 10. Klasse. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Schupp, H. (1997). Optimieren ist fundamental. In: ml, 81, 4 - 10.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37 - 46.

Birgit BRANDT, Götz KRUMMHEUER, Frankfurt

Die Interaktionale Nische mathematischer Denkentwicklung im Zusammenhang mit Sprachentwicklungsauffälligkeiten

Forschungskontext

Eingebunden in das interdisziplinäre Forschungszentrum IDeA[1] erforscht das Projekt erStMal die frühe mathematische Denkentwicklung in Form einer Längsschnittstudie vom Kindergartenalter bis hinein in die Grundschule (Brandt, Vogel & Krummheuer, 2011). Ziel des Projektes ist die Rekonstruktion von Entwicklungslinien des mathematischen Denkens in verschiedenen mathematischen Bereichen unter Berücksichtigung sozialkonstitutiver Momente als integraler Bestandteil individueller Denkentwicklung. Dazu werden sowohl Spiel-und Erkundungssituationen als Erhebungsinstrument eingesetzt als auch von Erzieherinnen nach eigenen Ideen gestaltete Spielsituationen erhoben sowie einige Kinder zusätzlich in familialen Situationen beobachtet (erStMaL-FaSt; Acar, 2011).

In Zusammenarbeit mit dem Projekt Mila[2] werden Kinder mit spezifischer Sprachentwicklungsstörung (SSES) in den Blick genommen. Gemäß ICD-10[3] gelten Störungen im Sprachlernprozess ohne allgemeine Minderung kognitiver Fähigkeiten oder anderer primärer Beeinträchtigung als SSES; erfasst werden diese Kinder im Projekt erStMal/Mila über einen Test zur allgemeinen kognitiven Grundfähigkeit (HAWIVA III; Ricken et al., 2007) sowie einem altersspezifischen Sprachtest (SETK 3-5; Grimm 2002).

Theoretische Grundlage

Im Rahmen des Projektes erStMaL soll eine mathematikdidaktische Theorie zur frühen mathematischen Denkentwicklung entwickelt werden, die auf eigenen Arbeiten zur Interaktionstheorie mathematischen Lernens aufbaut (Krummheuer & Brandt 2001). In Hinblick auf die Studie erStMal benötigt diese Ausgangstheorie eine Erweiterung, um insbesondere die longitudinalen Aspekte angemessen wiedergeben zu können. Dazu haben wir das Modell der „Interaktionalen Nische der mathematischen Denkentwicklung (NMD) eingeführt (Krummheuer 2011), bei dem inhaltliche, kooperative und pädagogische Aspekte der Interaktion auf allokativer und situationaler Ebene betrachtet werden.

---

[1] Das IdeA-Zentrum wird finanziert durch das Land Hessen über die LOEWE-Initiative. Siehe http://www.idea-frankfurt.eu/wissen

[2] Siehe http://www.idea-frankfurt.eu/wissen/projekte/projekt-mila

[3] Siehe http://www.dimdi.de/static/de/klassi/icd-10-gm/index.htm

	Inhalt	*Kooperation*	*Pädagogik*
allokativ	*Leitideen der Spiel- und Erkundungssituationen*	*Gruppenzusammensetzung / Familie*	*Pädagogische Programme u.Ä.*
situational	*Ausgehandelte Inhaltsbereiche und Deutungen*	*Individuelle produktive und rezeptive Partizipation*	*Alltagspädagogische Vorstellungen*

Fallbeispiel

Britta-Marie erreicht im HAWIVA III (Handlungsteil) Werte im unteren Durchschnitt, im SETK 3-5 deutlich unterdurchschnittliche Werte in allen Bereichen (TW<33). Auffällig in den von uns erhobenen Daten sind zudem Schwierigkeiten in der Artikulation (nicht mehr alterstypische Ersatzlaute insbesondere im Bereich der Konsonanten). Britta-Marie wird in der Studie erStMal und erStMal-FaSt seit 2009 (Alter 3.6) regelmäßig in Partner- und Gruppensituationen sowie in Familiensituationen in den mathematischen Bereichen Zahl und Operation, Strukturen und Muster sowie Geometrie und Messen (Familie) beobachtet. Hier konzentrieren wir uns auf Zählprozesse von Britta-Marie in unterschiedlichen Situationen (Alter 4.6 - 5.7).

Alter	*Situation*	*Bereich*	*Beteiligte (neben Britta-Maria)*
4.6	*Holztiere 1 (1)*	*Zahlen und Operationen*	*Othilia (L1), Orli (L2, SSES), Samuel (L2) (alle 4.6) Begleitperson (w)*
4.6	*Bauen (2)*	*(räumliche) Geometrie*	*Vater, Mutter, Bruder (L1, SESS, 6.1)*
5.0	*Musterkarten (3)*	*Muster und Strukturen*	*Othilia (L1, 4.6); Begleitperson (m)*
5.7	*Holztiere II (4) und (5)*[4]	*Zahlen und Operationen*	*Othilia (L1), Orli (L2, SSES), Samuel (L2) (alle 5.7); Begleitperson (w)*

(1) Samuel zählt 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,21,22,23,24,25,28 und tippt die vor ihm stehenden Holztiere nacheinander an; ab vier zählt Britta-Marie rhythmisch passend pier tünf tex wieben akt neu tehn els (eftehn)[5] und überstreicht dabei mit der rechten Hand bogenförmig die vor ihr stehende Holztierreihe.

[4] Situation (5) ohne Samuel und Orli.

[5] Auch in anderen Situationen überspringt Britta-Marie den Anfang der Zahlwortfolge.

(2) Britta-Marie soll aus gleichförmigen Quadern ein auf einer Spielkarte abgebildetes Gebäude nachbauen. Der Vater fordert sie auf, zunächst die Anzahl der benötigten Steine abzuzählen. Britta-Marie zählt eins ei neun pier tex dieben akt und streicht dabei rhythmisch passend mit dem Finger auf der Abbildung entlang. Der Vater greift zur Karte … nee nur sieben (…) 1,2,3,4,5,6,7 und tippt bei jedem Zahlwort mit dem Zeigefinger auf die Karte.

(3) Britta-Marie legt mit den Musterkarten eine Vorlage nach und wird von der BE gefragt, wie viele Karten sie verwendet hat. Ohne erkennbaren Bezug zu ihren Karten sagt sie die Zahlwortreihe auf eins swei ei pier tüns. Othilia beginnt zu zählen 1,2,3,4,5,6,7,8 und zeigt dabei auf die vor Britta-Marie liegenden Karten. Britta-Marie fängt laut an zu kreischen.

(4) Die BE zeigt Britta-Marie eine Karte mit 4 Punkten und fragt, wie viele es sind. Ohne erkennbaren Zählprozess antwortet Britta-Marie fünf. Fragend wiederholt die BE fünf und Samuel + Othilia rufen gleichzeitig nö vier. Die BE bittet Britta-Marie, die Punkte zu zählen, diese lehnt diese Aufforderung deutlich ab: is mag nich zähln. Anschließend erklärt Samuel hier sind zwei und hier sind zwei also sind es vier.

(5) Die BE hält Britta-Marie eine Karte mit 10 Punkten entgegen. In einer sehr hohen, piepsigen Stimme zählt Britta-Marie zügig 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 und tippt dabei rhythmisch passend die Punkte auf der Karte an.

Erst Analyseergebnisse

Auf der allokativen Ebene sind die Situationen unterschiedlichen mathematischen Bereichen zuzuordnen, dennoch fordern die Erwachsenen in allen Situationen wiederholt zu Zählprozessen auf. Dieser Fokus lässt sich unter pädagogischen Gesichtspunkten dahingehend deuten, dass Zählen bis zu einer gewissen Geläufigkeit als eine wichtige Basisqualifikation für einen erfolgreichen Schulstart gesehen wird und somit gleichsam diagnostisch und kompensatorisch Britta-Marie sowohl produktive als auch rezeptive Partizipationsmöglichkeiten an derartigen Prozessen geboten werden. Hingegen lässt sich beobachten, dass die Kinder in Situationen, die allokativ dem Bereich Zahlen und Operationen zuzuordnen sind, auf Konzepte aus anderen Bereichen zurückgreifen. So nutz Britta-Marie wiederholt Muster- und Strukturerkennung als Lösungsmöglichkeit für quantitative Vergleiche.

In den familialen Spielsituationen werden nicht korrekt durchgeführte Zählprozesse von den Eltern als falsch markiert, im Anschluss der Zählprozess korrekt vorgeführt und damit auch die Beantwortung der zuvor an Britta-Marie gerichteten Frage nach einer zu bestimmenden Quantität übernommen. Dieses *vormachende Vorbild* scheint auf der Ebene sozial-emotionaler Aspekte der Partizipation situational „gesichtswahrend“ zu wirken. In den Spiel- und Erkundungssituationen konnten wir keine derartige Übernahme der Verantwortung durch die Begleitperson beobachten. Die von Britta-Marie nicht korrekt ausgeführten Zählprozesse werden interaktional als „zu klären“ an die gleichaltrigen Peers weiter gegeben und somit diesen ermöglicht, ihre Zählfähigkeiten einzubringen. Das *vormachende Vorbild* in diesen Situationen wird somit von Gleichaltrige erfüllt, womit die Differenzerfahrung zu den Peers in Bezug auf die Zählfähigkeit für Britta-Marie betont wird. Wir beobachten in diesen Peersituationen Abwehrreaktionen (kreischen), Vermeidungsstrategien (is mag nich zähln) und Distanzierungen (Piepsstimme).

In Hinblick auf die Diskussion zur Inklusion sind hier aus unserer Sicht aufgrund dieser ersten Einsichten folgende Punkte dringend zu diskutieren:

- die hohe sozial-emotionale Belastung in den von uns beobachteten Peer-Situationen,
- die situative Abhängigkeit der Performanz der Zählleistung,
- sowie die Auswirkungen der sprachlichen Auffälligkeiten, insbesondere der Artikulation und des phonologischen Gedächtnisses, auf den Erwerb der Zahlenfolge aus Basisbaustein für den Aufbau eines Zahlbegriffes.

Literatur

Acar Bayraktar, E. & Krummheuer, G. (2011): Die Thematisierung von Lagebeziehungen und Perspektiven in zwei familialen Spielsituationen. Erste Einsichten in die Struktur „interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung“ im familialen Kontext. In Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (2011) (S. 135-174)

Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (Hrsg.) (2011): Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Indi-vidual Development and Adaptive Education". Grundlagen und erste Ergebnisse der Projekte erStMaL und MaKreKi. Münster: Waxmann.

Grimm, H. (2002): Störungen der Sprachentwicklung. Göttingen u. a.: Hogrefe.

Ricken, G., Fritz, A., Schuck, K. D., Preuß, U. (Hrsg.) (2007). HAWIVA® -III, Hannover-Wechsler-Intelligenztest für das Vorschulalter-III. Göttingen: Huber.

Krummheuer, G. (2011): Die empirisch begründete Herleitung des Begriffs der „Interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD). In Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (2011) (S. 25-90).

Krummheuer, G. und B. Brandt (2001): Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim u.a.: Beltz Verlag.

Eileen BRAUN, Münster

Lösung realitätsnaher Aufgaben –

eine Voruntersuchung zum Lösungsverhalten von ViertklässlerInnen bei der Bearbeitung einer realitätsnahen Fermi-Aufgabe

Einleitung

Aufgaben werden als „Kernstück" des Mathematikunterrichts verstanden. Sie bieten „auf ganz natürliche Art" Anlass zur mathematischen Betätigung (Barzel et al., 2011, S. 48). Je nach Aufgabenformat regen sie zu eigenständigen, kreativen Lösungen an. Fermi-Aufgaben erfordern auf Grund fehlender Daten in der Aufgabenstellung das Festlegen relevanter Ausgangsgrößen.

In der bisher durchgeführten Voruntersuchung bearbeiteten 367 ViertklässlerInnen eine von sieben Fermi-Aufgaben aus dem Bereich Tierkunde, welche aus einem Pool von 30 in Partnerinterviews erprobten Aufgaben stammt. Als Bearbeitungshilfe erhielten die SchülerInnen ein informationsreiches Sachbuch über das in ihrer Aufgabe thematisierte Tier. Die Texte des Sachbuches enthalten mehr Daten als zur Lösung der Aufgabe benötigt werden. Erfolg versprechend ist eine gezielte Recherche der relevanten Daten. Durch Hinzufügen des Sachbuches wird aus der Fermi-Aufgabe eine überbestimmte Aufgabe, da die relevanten Ausgangsdaten im Sachbuch zur Bearbeitung vorliegen. Untersucht wurde, ob und inwiefern ViertklässlerInnen relevante von den für die Aufgabe irrelevante Daten unterscheiden können. Eine Forschungsfrage, die von besonderem Interesse war, lautet: Wie gehen ViertklässlerInnen mit ihnen fehlenden Daten bei einer Fermi-Aufgabe um und welche Rolle spielt dabei das Sachbuch?

Voruntersuchung

Zoos und die dort lebenden Tiere stellen einen Erfahrungsraum dar, der viele SchülerInnen interessiert und ihnen oft vertraut ist. Die folgende Fermi-Aufgabe zum Pinguin hat ihre Berechtigung auch außerhalb des Mathematikunterrichts:

> Wie groß kann der Temperaturunterschied zwischen den Temperaturen im Nest eines Pinguins und den winterlichen Temperaturen am Südpol sein?

Die Aufgabenstellung enthält keine Daten. Das Beschaffen von Daten aus der Realität ist eine Kompetenz, welche in den Beschlüssen der Kultusministerkonferenz unter den drei prozessbezogenen Teilkompetenzen des Modellierens als erste genannt wird (vgl. KMK, 2005). Neben der vorgestellten anspruchsvollen Pinguin-Aufgabe sollen im Schwierigkeitsgrad abfallend eine Fermi-Aufgabe zum Fressverhalten eines Löwen und eine Schätzaufgabe zum Erdmännchen in die Hauptuntersuchung einfließen.

Das Lösen von Aufgaben mit Realitätsbezug wird mittels Modellierungskreisläufen veranschaulicht. Nur selten wird dem Beschaffen von Daten ein eigener Schritt beigemessen, wie dies Fischer & Malle (1985) in ihrem Modellbildungsprozess tun. In der Regel ist die Datenbeschaffung im Aufstellen eines Modells inbegriffen (vgl. Maaß, 2009). Die rationale und sich auf vier Komplexitätsmerkmale stützende Aufgabenanalyse von Cohors-Fresenborg et al. (2004) ermöglicht ein Vorhersagen von Schwierigkeiten, welche beim Lösen von Aufgaben in Textform dargestellt auftreten können. Die sprachlogische Komplexität als eines von vier Merkmalen soll im Folgenden exemplarisch an der vorgestellten Pinguin-Aufgabe thematisiert werden. Sie hat zwar die niedrigste Korrelation zur empirisch bestätigten Aufgabenschwierigkeit, gleichwohl wird sie als Filter verstanden, welcher eine mathematische Bearbeitung erst ermöglichen oder auch gänzlich verhindern kann (vgl. Cohors-Fresenborg et al., 2004). Kriterien sind die Syntax der Aufgabenstellung und die Anordnung der Daten. Da die Aufgabe den ViertklässlerInnen überbestimmt vorlag, wird zu ihrer Einstufung neben der Aufgabenstellung auch das Sachbuch berücksichtigt. Dadurch kann neben der Syntax auch die Anordnung der im Sachbuch vorliegenden relevanten Ausgangsgrößen berücksichtigt werden. Die überbestimmte Aufgabe ist vom sprachlogischen Aspekt als komplex anzusehen, da die aus Haupt- und Nebensätzen zusammenhängenden Texte des Sachbuches relevante und irrelevante Daten enthalten. Dieser Aufbau gilt auch für die anderen Aufgaben der Untersuchung. Hinsichtlich der anderen drei Merkmale lassen sich weitere Schwierigkeiten benennen, auf die an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll.

Ergebnisse der Voruntersuchung

Matilda (10 Jahre) hat neben der Aufgabenstellung die relevanten Daten (30°, -60° und -80° Celsius) übersichtlich notiert sowie ein Thermometer gezeichnet (vgl. Abbildung 1). Beim Berechnen der Temperaturdifferenz zwischen dem Nest und der Außentemperatur unterschied sie zwei Fälle (-60° / -80° Celsius).

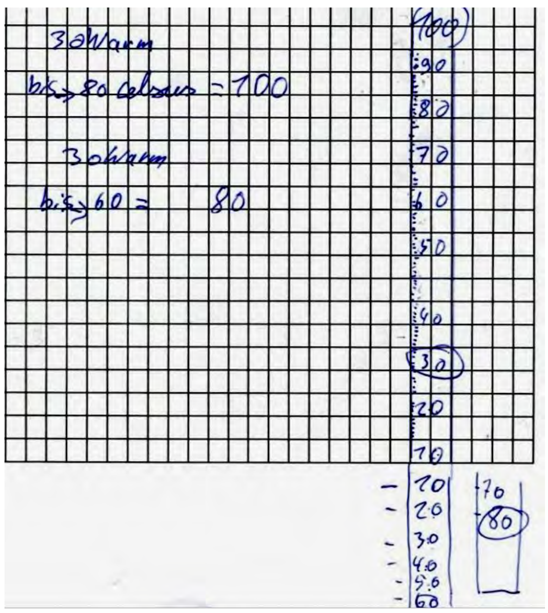


Abbildung 1: Matildas Lösung

Ihre Lösung demonstriert, zu welchen Leistungen GrundschülerInnen fähig sind. Selter (1994, S. 283) erklärt, dass sie „komplexe und neuartig erscheinende Aufgaben“ lösen können und mittels eigener, informeller Strategien zu sogenannten „Eigenkonstruktionen“ gelangen. Unkommentiert bleiben in Matildas Lösung bedauerlicherweise die beiden jeweils um 10° Celsius falsch berechneten Temperaturdifferenzen.

Abbildung 2 veranschaulicht die von den 62 Schülerlösungen zur Aufgabe zum Pinguin erhobenen Daten. 27 (5 + 4 + 18) Schülerlösungen enthalten nicht alle für eine erfolgreiche Bearbeitung benötigten Daten. Grundsätzlich fiel es den ViertklässlerInnen leichter, die Außentemperatur als die Nesttemperatur zu bestimmen. Keine SchülerInnen gab nur die Nesttemperatur an. Hingegen enthalten vier Lösungen eine Außentemperatur und 18 Lösungen sogar die durchschnittliche und maximale Außentemperatur.

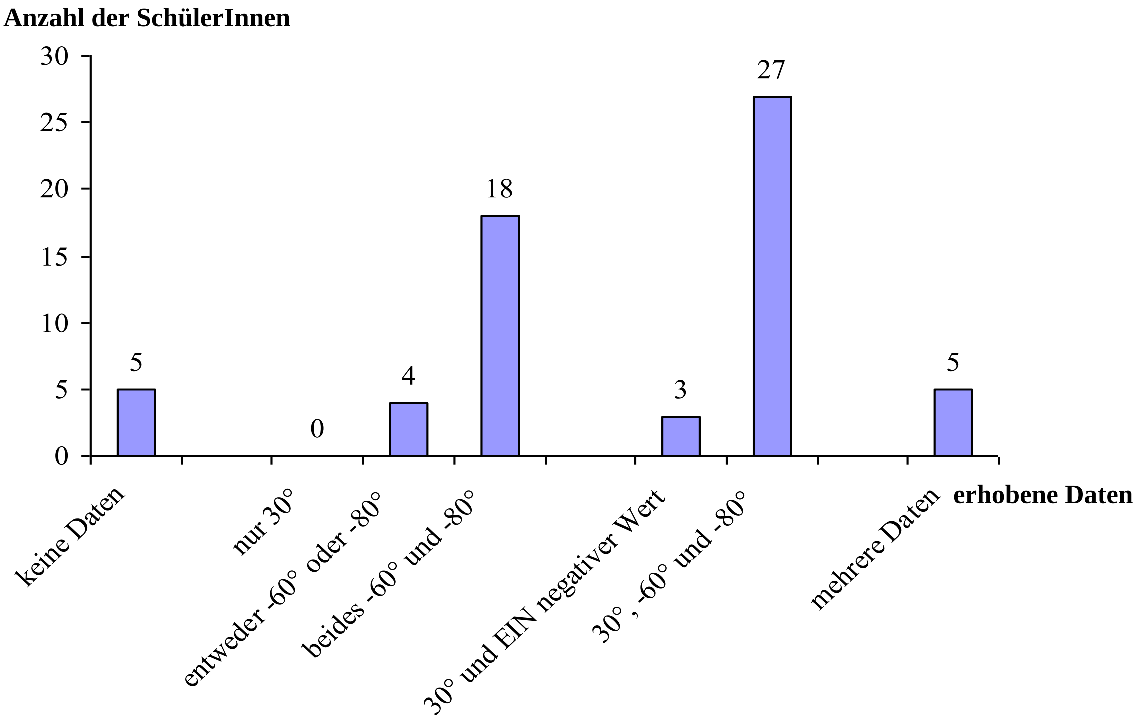


Abbildung 2: Recherche relevanter Daten

27 ViertklässlerInnen erhoben die Daten 30°, -60° und -80° Celsius. Unter diesen gibt es Lösungen, die ferner irrelevante Textpassagen aus dem Sachbuch enthalten. Sie weisen keine mathematischen Operationen auf. Diese ungelösten Leistungen enthalten keine Differenz.

Fünf unter den 62 Lösungen enthalten eindeutig diagnostizierbar neben den für die Aufgabe relevanten auch irrelevante Daten. Hierunter sind beispielsweise Angaben zur Größe eines Pinguins zu nennen.

Fazit

Bei der Pinguin-Aufgabe handelt es sich zunächst um eine Fermi-Aufgabe, die unter Hinzufügung eines informationsreichen Sachbuches über das in der Aufgabe thematisierte Zootier zu einer überbestimmten Aufgabe wird. Im Unterricht kann das Sachbuch den Lernenden als Bearbeitungshilfe angeboten werden. Erstrebenswert ist, dass SchülerInnen zur Informationsbeschaffung Quellen wie etwa Tierlexika oder das Internet heranziehen. Diese und die anderen Aufgaben der Untersuchung bieten sich zur Einbettung in einem fächerübergreifenden Unterricht an.

Die rationale Aufgabenanalyse nach Cohors-Fresenborg et al. (2004) ermöglicht eine Prognose der Aufgabenkomplexität im Hinblick auf vier Merkmale. In der hier vorgenommenen Voruntersuchung bestätigt sich zwar einerseits die vorhergesagte sprachlogische Schwierigkeit, da viele ViertklässlerInnen die relevanten nicht von den irrelevanten Daten unterscheiden konnten. Andererseits produzierten einige trotz der prognostizierten Schwierigkeiten gelungene Lösungen (vgl. Matildas Lösung). Neun von 62 Lösungen sind mustergültig. Grundsätzlich kann gesagt werden, dass die ViertklässerInnen das Sachbuch zum Lösen der Aufgabe nutzten. Weitere Untersuchungen werden daran anknüpfend die derzeit entwickelten Hilfestellungen überprüfen. Sie sollen SchülerInnen beim selbstregulierten Lösen realitätsnaher Fermi-Aufgaben zu Zootieren unterstützen.

Literatur

Barzel, B., Holzäpfel, L., Leuders, T. & Streit, Ch. (2011): *Mathematikunterricht: Planen, durchführen, reflektieren*. Berlin: Cornelsen Scriptor Praxis.

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J. & Sommer, N. (2004): Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, M. (Hrsg.): *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen in Rahmen von PISA 2000*. (1. Auflage) VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH: Wiesbaden, 109 - 144.

Fischer, R. & Malle, G. (1985): *Mensch und Mathematik. eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Maaß, K. (2009): *Mathematikunterricht weiterentwickeln*. Berlin: Cornelsen.

Selter, Ch. (1994): *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr.* Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005) (kurz: KMK): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004* (1. Auflage). Neuwied: Luchterhand.

Katinka BRÄUNLING, Andreas EICHLER, Freiburg

Vorstellungen von Lehrkräften zum Arithmetikunterricht im Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe I

Die Planung und Durchführung von Unterricht wird in hohem Maße von den Vorstellungen und Überzeugungen der Lehrkräfte bestimmt (Stein et al, 2007). Dabei hängen diese Vorstellungen und Überzeugungen von den einzelnen mathematischen Teildisziplinen ab und stehen nicht notwendig für die Mathematik insgesamt (Eichler & Erens, 2012). Im Forschungsprojekt STELLA I (**S**ubjektive **The**orien von **L**ehrerinnen und Lehrern zum **L**ehren und Lernen von **A**rithmetik) werden daher die Subjektiven Theorien von Lehrkräften spezifisch für den Bereich der Arithmetik der Primar- und Sekundarstufe I untersucht. Fokussiert wird dabei im Querschnitt auf die Subjektiven Theorien von Grundschul- und Realschullehrkräften sowie im Längsschnitt auf die Entwicklung der Subjektiven Theorien vom Ende des Studiums bis zum Einstieg in die professionelle Lehrpraxis.

Theoretischer Rahmen

Lehrkräfte spielen die entscheidende Rolle im Transformationsprozess von staatlichen Lehrplänen bis zum Lernergebnis der Schüler und Schülerinnen. Das in Abbildung 1 dargestellte Curriculums-Modell von Stein et al. (2007) beschreibt diesen Prozess.

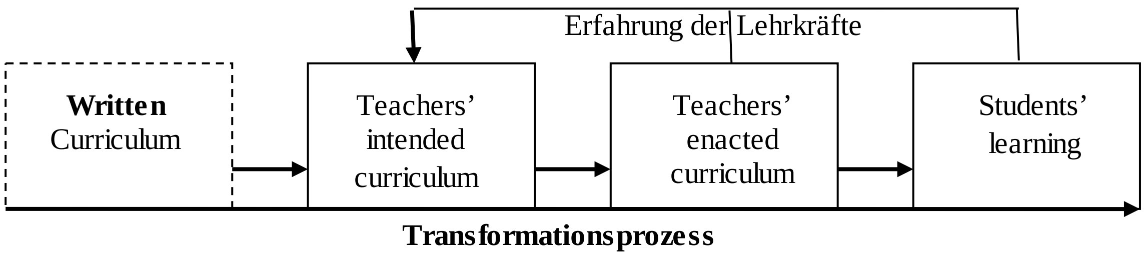


Abbildung 1: Transformationsprozess eines Curriculums

Zentral sind dabei die Transformationen des staatlichen Curriculums durch die individuelle Unterrichtsplanung (teacher's intended curriculum), sowie die Umsetzung der Planung im Unterricht als Ergebnis der Interaktion von Lehrkraft, Schülern und Stoff (teacher's enacted curriculum). Um die innere Struktur der intended curricula wie auch der enacted curricula strukturieren und begrifflich präzise darstellen zu können, werden sie hier auf der Basis des sozialpsychologischen Konstrukts der Subjektiven Theorien (Groeben et al., 1988) beschrieben. Als zentral für die Beschreibung der Subjektiven Theorien werden insbesondere die Unterrichtsinhalte, die damit verbundenen Ziele sowie eine allgemeine Lehrorientierung innerhalb der Pole Instruktivismus und Konstruktivismus angesehen.

Methodisches Vorgehen

Zu drei Erhebungszeitpunkten (Beginn des Referendariats, Ende des Referendariats und Ende des ersten Berufsjahres) werden je fünf Personen aus der Grund- und aus der Realschule mit Hilfe von halbstrukturierten Leitfadeninterviews befragt. Parallel dazu erfolgen fünf Interviews mit Grundschullehrkräften und fünf Interviews mit Realschullehrkräften, die mindestens fünf Jahre Unterrichtserfahrung haben. Die Interviews umfassen Themenblöcke wie Inhalte, Ziele, Methoden, Materialien sowie vorgefertigte Prompts, in denen Aufgaben, Schüler- oder Lehreräußerungen bewertet werden sollen.

Zur Analyse der Interviews werden deduktive Kodes verwendet sowie induktive Kodes entwickelt (Mayring, 2003). Deduktive Kodes umfassen die folgenden vier Typen von Zielsetzungen für den Mathematikunterricht: Schemaaspekt, Formalismusaspekt, Prozessaspekt und Anwendungsaspekt (Grigutsch et al., 1998). Darüber hinaus werden instruktivistische, co-konstruktivistische und konstruktivistische Lehrorientierungen untersucht (Strohmer et al., 2012).

Ergebnisse

Die hier dargestellten Ergebnisse beziehen sich in erster Linie auf die Klassifikation von Strukturen Subjektiver Theorien (Eichler, 2011) und auf Unterschiede innerhalb dieser Strukturen (Eichler & Girnat, 2011). Unterschiedliche Lehrertypen und Zusammenhänge zwischen qualitativen und quantitativen Ergebnissen stehen dabei im Mittelpunkt. Ausgewählt wurden eine Referendarin aus der Primarstufe (Frau A) und ein Referendar aus der Sekundarstufe 1 (Herr H), die gerade ihre zweite Ausbildungsphase begonnen hatten.

Auf der Basis der Interviewtranskripte lassen sich die Lehrkräfte zunächst interpretativ typisieren. So lässt sich etwa für Frau A ein durch das gesamte Interview konsistentes Bild einer Prozessorientierung (Grigutsch et al., 1998) rekonstruieren, während Herr H sehr viel stärker Schema-orientiert argumentiert. Die beiden folgenden Zitate illustrieren punktuell die Vorstellungen beider Lehrkräfte zu ihren intended curricula:

> Frau A: „…das ist ja wohl wichtig, dass sie die Lösungswege selbstständig finden können, individuell bearbeiten können (…) dass die Problemlösen können, dass sie offenen Aufgaben bearbeiten können, dass sie so eigene Strategien finden…“

> Herr H: „…dabei helfen soll einfach einen Automatismus bei den Schülern hervorzurufen, dass es eben dann einfach, dass sie was sehen und es im Grunde gleich schriftlich lösen können…“

Für beide Lehrkräfte lassen sich ihre jeweiligen Orientierungen, d.h. die zentralen Ziele innerhalb ihrer Subjektiven Theorien, mit Unterkategorien beschreiben (Frau A: z.B. Individualität; Herr H: z.B. Automatisierung).

Während so qualitativ die Subjektiven Theorien der Lehrpersonen bis hinunter auf eine konkrete Aufgabenebene rekonstruiert werden können, lassen sich die Lehrkräfte ebenso quantifizierend über die Summen der (gewichteten) Kodierungen analysieren. Abb. 2 zeigt links exemplarisch für Frau A die Summe der (gewichteten) Kodierungen zu den vier mathematischen Zielsetzungen Anwendung (A), Formalismus (F), Prozessorientierung (P) und Schema (SCH). Ergänzend zu der Quantifizierung der Kodierungen des Interviews zeigt auch rechts die Analyse des adaptierten Fragebogeninstruments nach Grigutsch et al. (1998; Maximal-/Minimalwert für eine der vier Orientierungen ist +/-8), dass dort ebenfalls die zenralen beliefs von Frau A der Prozessorientierung und der hier nicht diskutieren Anwendungsorientierung zuzuordnen sind.

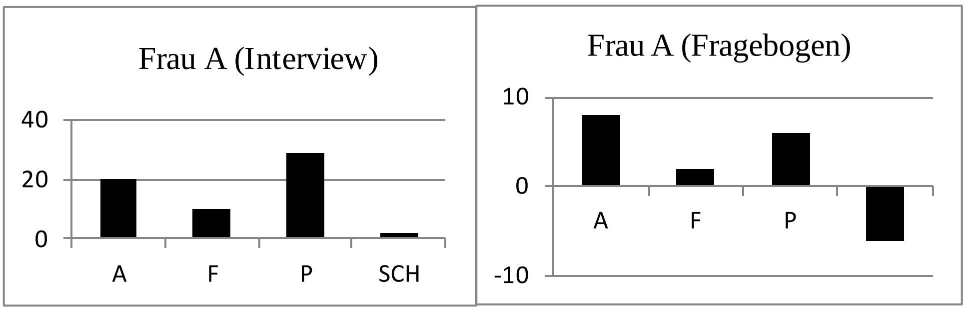


Abbildung 2:Summe der Kodierungen und Fragebogenauswertung

Die drei miteinander verknüpften Analysezugänge (qualitative Interviewauswertung, Quantifizierung der Kodierungen, Fragebogenauswertung) ermöglichen insbesondere auch den vertieften Vergleich der Subjektiven Theorien von Lehrkräften, der hier in Abb. 3 nur anhand der jeweils standardisierten Daten der Kodierungen und des Fragebogens dargestellt ist.

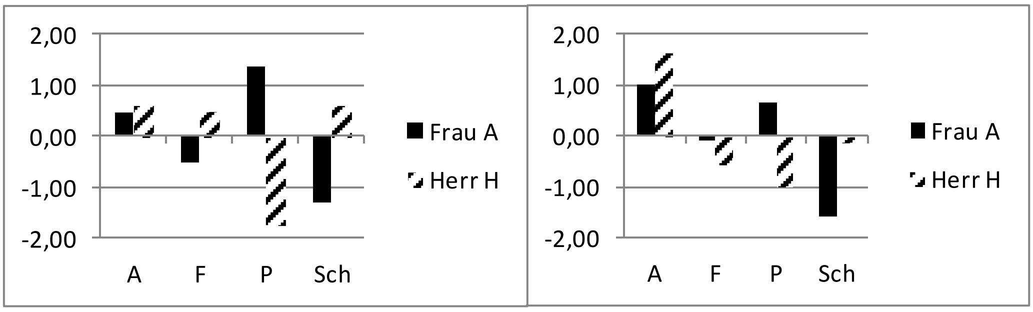


Abbildung 4: Standardisierter Vergleich der beiden Lehrpersonen

Ausblick

Die qualitative Auswertung des Datenmaterials ermöglicht es durch eine intensive Textanalyse tief in den Inhalt einzutauchen und detaillierte Informationen über die einzelnen Lehrkräfte zu bekommen. Gleichzeitig bieten die kodierend-quantifizierende Auswertung der Interviewepisoden und die quantitative Auswertung der Fragebögen eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse und schaffen eine Verbindung zu anderen quantitativen Untersuchungen mit größeren Stichproben.

Literatur

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. C. Batanero, G., Burrill, C., Reading, C. (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education: A joint ICMI/IASE Study*. ICMI and IASE, New ICMI Study Series (S. 175-186). Dordrecht: Springer.

Eichler, A. & Erens, R. (2012). Teachers‘ curricular beliefs referring to calculus. Erscheint in Proceedings of ICME12.

Eichler, A. & Girnat, B. (2011). Secondary Teachers' Beliefs on Modelling in Geometry and Stochastics. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, ICTMA14* (S. 75-84). Dordrecht: Springer.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). *Einstellungen gegenüber Mathematik von Mathematiklehrern*. Journal für Mathematikdidaktik, 19(1), S.3-45

Groeben, N., Wahl, D., Scheele, B. & Schlee, J. (1988). *Forschungsprogramm Subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen: Franke.

Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim: Beltz.

Stein, M.K., Remillard, J., & Smith, M.S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Strohmer, J., Mischo, C., Hendler, J. & Wahl, S. (2012). AVE - Ausbildung und Verlauf von Erzieherinnen-Merkmalen. Ein Forschungsprojekt zur Professionalisierung von Fachkräften in der Frühpädagogik. In S. Kägi & U. Stenger (Hrsg.), *Forschung in Feldern der Frühpädagogik* (S. 225-235). Hohengehren: Schneider Verlag.

Hans-Joachim BRENNER, Erfurt

Die Greensche Methode in der Lehrerfortbildung

1. Ziele und Ausgangspunkte

Das Ziel meiner Bestrebungen besteht darin, ausgehend von meinen Beobachtungen des Analysisunterrichts in Thüringen, Vorschläge für Fortbildungsveranstaltungen zu entwickeln, die einen Beitrag zur Weiterentwicklung der Professionalität der Thüringer Lehrerinnen und Lehrer leisten können.

2. Grundsätzliches und wissenschaftliche Befunde

Fortbildungen für erfahrene Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer müssen (wie im Unterricht auch) der Wechselwirkung und der gegenseitigen Abhängigkeit von Persönlichkeitsentwicklung und dem Lernen von Mathematik Rechnung tragen. Um dem gerecht werden zu können, sollten:

- die Ernsthaftigkeit des Bemühens des Fortbildners/der Fortbildnerin spürbar werden (für die Lernmotivation ist der Lehrer/die Lehrerin das wichtigste Medium [Spitzer, S. 194]),
- das mathematisch Neue, die mathematische Idee in den Mittelpunkt gestellt werden,
- die Beziehungshaltigkeit und die Bedeutung des gewählten mathematischen Inhalts möglichst hoch sein, um vernetzt bzw. vernetzend denken zu können [Hischer, S. 46 - 81]),
- das Bekannte und das schulisch Bedeutsame im Neuen entdeckt werden können (Anschlussfähigkeit).

Der regelmäßige Besuch (mindestens ein Mal im Monat einschließlich einem entsprechenden Selbststudium) von Fortbildungsveranstaltungen sollte ein unerlässlicher Bestandteil des lebenslangen Lernens auf mathematisch-didaktischem Gebiet sein.

Durch COACTIV wurde bestätigt, dass zwischen dem fachlichen und dem fachdidaktischen Wissen eine enge Verbindung besteht. Krauss und Blum [Blum, S. 43-44] berichteten auf der Fachleitertagung der MNU 2009: „Die Wissensentwicklung scheint nach der Ausbildung im Wesentlichen abgeschlossen zu sein … Die Berufspraxis liefert keinen entscheidenden Beitrag mehr zur Entwicklung der beiden Wissensbereiche: Fachdidaktisches Wissen und Fachwissen (wie es in COACTIV konzeptualisiert wurde) werden primär bereits während der Ausbildung erworben. Die bedenkenswerte Tatsache, dass gymnasiale Lehrkräfte auch über signifikant mehr fachdidaktisches Wissen verfügen …, kann als ein Hinweis für die Bedeutung, die das Fachwissen bei der Entwicklung von fachdidaktischem Wissen spielt, gesehen werden. … Von entscheidender Bedeutung ist das Ergebnis, dass das fachdidaktische Wissen einer Lehrkraft nachweislich zum Lernzuwachs der Schüler beiträgt …“

Dass fachdidaktisches Wissen (auch) bei der intensiven Beschäftigung mit mathematischen Problemen im erheblichen Maße erworben wird, muss seitens der Didaktik und der Verantwortlichen für Fortbildungen die entsprechende Berücksichtigung erfahren. Die Erkenntnis durch COACTIV, dass die Berufspraxis keinen entscheidenden Beitrag zur Wissensentwicklung im Fach und in der Didaktik leistet, zeigt zum einen, welche großen Anstrengungen seitens der Fortbildungsverantwortlichen nötig sind, diesen Missstand zu beheben. Und zum anderen wird die Beschränktheit der Möglichkeiten der Deutung eines schriftlichen Wissenstest mit vorgegebener Bedenkzeit deutlich.

Zu beachten ist weiterhin der Umstand, dass auf Grund verschiedener Ursachen die Bereitschaft der Kolleginnen und Kollegen sehr gering ist, die Anstrengungen fachlicher Fortbildungen auf sich zu nehmen. So gab es nicht eine Anforderung von „Mathematik anders machen“ aus Thüringen. Einstellige Teilnehmerzahlen (einschließlich null) an Fortbildungsveranstaltungen in Erfurt sind die Regel.

3. Beobachtungen des Analysisunterrichts in Thüringen

Meine Beobachtungen zeigen, dass der Kerngedanke des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung wegen des unverzüglichen Anstrebens von Rechenverfahren nicht mehr zur Sprache kommt. In der Regel (sehr oft auch ohne Beweis) wird im Zusammenhang mit Flächeninhaltsberechnungen unter dem Hauptsatz die Beziehung (1) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ verstanden. Wenn man also eine Stammfunktion F kennt, dann kann dem Integral (Flächeninhalt) ein Wert zugeordnet werden. Der Hauptsatz wird auf eine Wertzuweisung reduziert. Er stellt aber den Zusammenhang zwischen zwei Größen (in der Einführungsphase von zwei physikalischen Größen) her. Wenn (2) $v = \frac{ds}{dx}$, dann $s = \int vdt$ und umgekehrt, wobei die präzisen Bedingungen noch erarbeitet werden müssen, um $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ herleiten zu können. Der Zusammenhang (2) ermöglicht die Verankerung in Alltagserfahrungen und somit die Erarbeitung von Grundvorstellungen und Verständnis. Die *grundlegenden Methoden* der Differenzialrechnung - die Vorstellung von der lokalen Änderungsrate, z.B. der Momentangeschwindigkeit - und der Integralrechnung - die Vorstellung vom Grenzwert einer Summe bei fortwährender Verfeinerung der Zerlegung bzw. der Rekonstruktion einer Größe aus den Änderungsraten - sind Hauptgegenstand des Lernprozesses und entsprechend vielfältig zu üben. Da sich die Schülerinnen und Schüler die Folgerung (1) nicht durch angestrengtes Lernen aneignen können, sind die Defizite bei der Problemlösefähigkeit, die auch bei den Lehrerinnen und Lehrern zu beobachten sind, nur folgerichtig. Ein Ziel von Fortbildung sollte daher sein, Differenzerfahrungen zur gängigen Praxis zu ermöglichen, um sich des bestehenden Mankos bewusst werden zu können. Ein geeigneter mathematischer Gegenstand ist die Greensche Methode (z.B. angewandt auf das Fallen $F_R \sim v$, Einschaltvorgänge). Hier kann man „dem Prinzip der minimalen Allgemeinheit“ folgen, „gemäß welchem jede Idee zunächst in der einfachsten Situation klar verstanden werden muss, bevor die entwickelte Methode auf kompliziertere Fälle übertragen werden kann.“ [Arnold, Vorwort]

4. Die Greensche Methode

Mit Hilfe der Greenschen Methode kann man partikuläre Lösungen von inhomogenen Differenzialgleichungen bestimmen. Solche DGL treten im Physikunterricht auf (Schwingungen, Fallbewegung, Ein- und Ausschaltvorgänge) und sollten im Analysisunterricht genutzt werden, um das Bestimmen von qualitativen Eigenschaften von Funktionen, ihren Ableitungen und Integralen zu erlernen.

Ein *Beispiel* für einen Mischungsprozess soll unter diesem Aspekt untersucht werden. [Heuser, S. 76]

Ein Tank enthalte 1000 L Wasser, in dem 50 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ *sollen ständig pro Minute 10 L Lösung ausfließen, aber auch 10 L Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg zufließen (Zufluss = Abfluss). Ein Superrührgerät mische das Ganze sofort und vollständig durcheinander. Wie groß ist der Salzgehalt* $u(t)$ *im Tank zur Zeit* $t \geq 0$*?*

Die Änderungen des Salzgehaltes Δu in kg in einer Zeiteinheit Δt ergeben sich aus der Differenz der Salzgehalte des Zuflusses $2 \cdot \Delta t$ und des Abflusses in der gewählten Zeiteinheit $\approx \frac{1}{100} \cdot u(t) \cdot \Delta t$. Da sich der Salzgehalt des Abflusses ständig verändert, wird ein Mittelwert $u(\bar{t})$ in der folgenden Darstellung benutzt. $\Delta u = 2 \cdot \Delta t - \frac{1}{100} \cdot u(\bar{t}) \cdot \Delta t$

Division durch Δt und Grenzwertbildung liefert (1) $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{100} \cdot u(t) + 2$ mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Anfangsbedingung $u(0) = 50$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet $u_h(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$ und eine partikuläre ist $u_p(t) = 200$ (punktweises Rekonstruieren des Graphen und Erraten mit anschließender Probe bzw. bekannte Verfahren anwenden). Wegen der Additivität der Lösungen findet man zur allgemeinen Lösung von (1): $u(t) = 200 + K \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$ (Beweis: ...). Passt man die Konstante der Anfangsbedingung an, erhält man $u(t) = 200 - 150 \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$.

Dieses Ergebnis lässt sich auch wie folgt deuten. Enthält der Behälter zu Beginn kein Salz und wird dann wie angegeben Flüssigkeit zu- und abgeführt, so gilt $u_1(t) = 200 - 200 \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$. Parallel zum betrachteten Behälter stellt man sich einen weiteren baugleichen vor, in dem anfangs 50 kg Salz gelöst sind und bei dem 10 L reines Wasser pro min zufließen und die gleiche Menge Lösung abfließt. Für diesen gilt dann $u_2(t) = 50 \cdot e^{-\frac{1}{100} \cdot t}$. Der Salzgehalt zum Zeitpunkt *t* ist dann die Summe der beiden Salzgehalte eins und zwei. Die physikalische Größe *u* ist somit *additiv* (und der Differenzialoperator ist *linear*). Dies macht man sich bei der *Greenschen Methode* zunutze.

Es wird die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ gestellt; die Bedingungen bezüglich des Zu- und Abflusses sollen wie oben sein. Um den Salzgehalt $u(t)$ bestimmen zu können, denkt man sich die Zeitspanne von 0 bis *t* in (äquidistante) Abschnitte zerlegt: $0 < t_1' < t_2' < \cdots < t_n' < t$. Für jeden Zeitabschnitt $\Delta t'$ stellt man sich einen salzfreien mit Wasser gefüllten Behälter mit Abfluss (wie oben) und Superrührgerät vor, in den nur in dieser Zeiteinheit die Salzlösung zugeführt wird, in der anderen Zeit (also vorher und nachher) nur reines Wasser. Die eingeführte Salzmenge beträgt $2 \cdot \Delta t'$ und zum Zeitpunkt *t* sind davon noch $e^{-\frac{1}{100} \cdot (t - t_i')} \cdot 2 \cdot \Delta t'$ vorhanden. Alle Salzgehalte zum Zeitpunkt *t* in den vorgestellten Behältern werden addiert. Geht man zum Grenzwert $\Delta t \to 0$ über, so ergibt sich $u(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{100} \cdot (t - t')} \cdot 2 \cdot dt' = u_1(t)$ wie oben. Man kann sich natürlich auch nur einen Behälter vorstellen, der mit *n* Zuflüssen gemäß den obigen Überlegungen gefüllt wird und entsprechend viele Abflüsse hat.

Literatur

Blum, W., Krauss, S. (2009): Vortrag auf der Fachtagung der MNU

Hischer, H. (2010): Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker

Spitzer, M. (2002): Lernen, Gehirnforschung und die Schule des Lebens. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag

Arnold, V.I. (2004): Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Heuser, H. (2009): Gewöhnliche Differentialgleichungen. Wiesbaden: Vieweg Verlag

Bernhard BROCKMANN, Augsburg

Der Nachlass einer Institution – Materialien aus der ehemaligen Zentralstelle für Computer im Unterricht

Über drei Jahrzehnte hinweg wurden an der Zentralstelle für Computer im Unterricht Programme, Unterrichtsformen und Integrationsmodelle für den Einsatz im Unterricht entwickelt und erprobt. Die Zentralstelle gibt es nicht mehr. Doch zahlreiche verfügbare Dokumente lassen Arbeitsschwerpunkte und Entwicklungslinien von den Anfängen her sichtbar werden.

1. Programmierter Unterricht

Ersten Versuchen mit Buchprogrammen im Unterricht (Keil, K.-A.: Einführung in die Raumgeometrie) folgte 1965 der Auftrag an das Gymnasium bei St. Anna, Augsburg, zur systematischen Erkundung der Möglichkeiten von Programmiertem Unterricht. 1968 wurde dort die Zentralstelle für Programmierten Unterricht an bayerischen Gymnasien als Koordinierungsstelle für die Entwicklung von Buchprogrammen und ihre Erprobung auf breiter Basis errichtet. Das Verzeichnis Lernmittelfreie Lernprogramme für Gymnasien weist 1988 für den Mathematikunterricht von der 5. Klasse bis zur Kollegstufe 32 Titel aus, veröffentlicht v. a. im Bayerischen Schulbuchverlag München. Die "Wiederholung der Algebra 1" (Keil, K.-A., Keil, I.) erreichte eine Auflage von mehr als 100 000 Exemplaren. Versuchsschule für den Bereich Mathematik war das Ohm-Gymnasium Erlangen (Hofmann, W., Rudert, R.).

2. CUU-Projekt (1971 - 1976)

Im Rahmen des Projekts "Computerunterstützter Unterricht Augsburg" wurden Grundfragen des Computereinsatzes angegangen. Hervorzuheben sind insbesondere Untersuchungen zur Aktivierung der Schüler, zu Entdeckendem Lernen, zum Lernerfolg in Übungsprogrammen sowie Vergleiche verschiedener Integrationsmodelle und Einsatzformen. Eine Zusammenfassung des ausführlichen Projektberichts gibt B. Brockmann in "Computereinsatz im Mathematikunterricht – Ein Rückblick auf die Anfänge" (2008 Budapest 349-352).

3. Beiträge zum Mathematikunterricht (1976 – 2008)

Spätestens mit der Führung durch die Zentralstelle und der Vorstellung des CUU-Projekts anlässlich der Jahrestagung 1976 Augsburg kommt es zu einem regen Austausch von Ideen und Erfahrungen mit der GDM, wie

Veröffentlichungen von Mitarbeitern der Zentralstelle in den jährlichen Beiträgen zum Mathematikunterricht belegen.

B. Brockmann berichtet über ein Unterrichtsbeispiel, bei dem ein einzelner Tischcomputer (P6060) als Werkzeug für Entdecken und Überprüfen von Zusammenhängen eingesetzt wird. (1978 Münster 40-42. "Der Computer als Hilfsmittel bei der Hypothesenbildung – Ein Unterrichtsmodell zur Einführung der Logarithmusfunktion im Grundkurs der Kollegstufe")

U. Karl erfragt, basierend auf dem Programmangebot 1978 der Zentralstelle mit Dokumentationen und konkreten Unterrichtsvorschlägen für die bayerischen Schulen, den Nutzen des Computers für verschiedene Teilgebiete der Schulmathematik. ("Der Einsatz des Computers im Mathematikunterricht als Problem der mathematikdidaktischen Ausrichtung von Gymnasiallehrern". 1979 Freiburg 186-189)

Der Beitrag "Übergeordnete Lernziele des Mathematikunterrichts – Kann der Einsatz des Computers dazu einen Beitrag leisten?" von B. Brockmann (1980 Dortmund 57-60) führt die Diskussion über den Stellenwert des Computers im Fachunterricht aus der Sicht der Mathematik und hebt die den Zielen des Mathematikunterrichts dienenden Funktionen des Computereinsatzes heraus.

Mit der Erkundung der Bedingungen für das Auftreten endlicher, reinperiodischer oder gemischtperiodischer Dezimalbrüche stellt B. Brockmann ein weiteres Unterrichtsbeispiel zu Entdeckendem Lernen vor. ("Periodenlänge von Dezimalbrüchen – Eine Unterrichtseinheit mit Unterstützung durch den Computer". 1981 Darmstadt 22)

U. Karl geht in seinem Beitrag "Wie Kinder programmieren?" (1983 Koblenz 159-162) der Frage nach, ob Kinder durch Programmieraufgaben Denken lernen. Er stellt zwei Begegnungsebenen mit dem Computer heraus, Computerunterstützten Unterricht (CUU) und Interaktives Programmieren (etwa mit der Programmiersprache LOGO). Beide Anwendungsformen des Computers fanden in den 70er und 80er Jahren Anhänger unter Didaktikern, die in der z. T. kontrovers geführten Auseinandersetzung "Programmsteuerung versus Lernersteuerung" fruchtbare Anstöße zu Entwicklungen in beiden Bereichen gaben.

Mit "Primzahlen" schuf Hans Joachim Müller ein ansprechendes leistungsfähiges Werkzeug, das den Mathematikunterricht der 5. und 6. Klasse unterstützen kann, um bei Themen wie Unregelmäßige Abnahme der Häufigkeit der Primzahlen, Unendlichkeit, minimale bzw. maximale Abstände zwischen Primzahlen, Primzahlvierlinge oder –sechslinge Vermutungen und Hypothesen aufzustellen, Gesetzmäßigkeiten zu finden und kleinere Beweise anzuregen (1983 Koblenz 230-234). Die damals an Schulen verfügbaren Rechner wie CBM 4032 (Prozessor 6502) machten für Untersuchungen in höheren Zahlenbereichen die Entwicklung schneller und effektiver Algorithmen zur Primzahlsuche erforderlich.

Die Rückmeldungen von 36 Schulen mit 52 Klassen und 1360 Schülern aus der "Felderprobung eines Programmpakets – Teilbarkeit und Primzahlen" (1987 Wuppertal) fasst B. Brockmann so zusammen: Entscheidend für die Verwendung des Computers im Mathematikunterricht sind methodisch-didaktisch motivierte Begründungen. Geschätzt sind Programme, welche die Demonstration von Methoden und Verfahren gestatten, Programme, die individuelles Üben ermöglichen, vor allem aber Programme, die zur Erforschung mathematischer Zusammenhänge anregen. Sowohl bei der Wahl der Unterrichtsform wie bei den didaktischen Begründungen zeigt sich weitgehende Übereinstimmung mit den Vorstellungen der Autoren (H. J. Müller). Der Transfer von Unterrichtsmodellen und Einsatzvorschlägen vom Programmautor zum Anwender scheint zu gelingen.

Zwei Jahrzehnte nach dem CUU-Projekt greift B. Brockmann die Erfahrungen aus den 6. Klassen, dass Kinder in der Lage sind, den Weg ihres Lernens selbst zu finden und auch über mehrere Wochen zu gestalten, wieder auf ("Brüche selbst entdecken – Tagebücher einer 6. Klasse". 1998 München 144-147). Die Lerntagebücher zeigen, welche Rolle einzelne Momente der Unterrichtssituation spielten, z. B. die Module eines Computerprogramms, die Gespräche mit den Klassenkameraden oder die Beratung durch den Lehrer. Sie sind ein Beleg dafür, dass auch unter den Randbedingungen von Stundentafel, Lehrplan und Leistungsnachweisen ein sich öffnender Mathematikunterricht die Erziehung zu Selbständigkeit und Eigenverantwortlichkeit unterstützen kann.

Immer wieder war das Angebot der Zentralstelle an Programmen und Handreichungen mit Vorschlägen für den Unterricht Thema von Vorträgen (1996 Regensburg, 2004 Augsburg und bei diversen Arbeitstagungen des Arbeitskreises Mathematik und Informatik), bei Informationsständen (1998 München) oder Ausstellungen ("Programme und Materialien für den Mathematikunterricht – Fundamentale Ideen zum Computereinsatz und ihre Wurzeln". 2004 Augsburg).

Die Beiträge "Computereinsatz im Wandel – Versuch eines Längsschnitts" (2003 Dortmund 149-152) und "Computereinsatz im Mathematikunterricht – Ein Rückblick auf die Anfänge" (2008 Budapest 349-352) sind erste Ansätze einer zusammenfassenden Würdigung der Arbeit der Zentralstelle.

4. Bewertung von Unterrichtssoftware – Kooperation mit SODIS

Unter Berücksichtigung früherer Ansätze zur Softwarebewertung wurde im Rahmen des Modellversuchs "Softwaredokumentation" (1988-1991) am Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest, mit dem Aufbau eines Informationssystems über schulgeeignete Software begonnen. Es entstand das für den Bund und alle Länder zugängliche "Software Dokumentations- und Informationssystem SODIS". Ausgehend von Basisdaten zu den Softwareangeboten wurden Begutachtungen vorgenommen und in fachspezifischen Übersichten zusammengefasst. So stellt die Nachweisliste "Interaktive Medien für das Fach Mathematik (DOS/Windows; März 1995)" über 330 Programmpakete in Kurzbeschreibungen vor und gibt für 12 beispielhafte Softwareprodukte ausführliche Bewertungen. Darunter sind v. a. Computer-Algebra-Systeme, Interaktive Geometrie-Programme, Werkzeuge für Modellbildung und Simulation.

Verbesserte Zugriffsmöglichkeiten bei der Suche, nutzerfreundliche Auswertungsroutinen sowie die Weiterentwicklungen der Klassifikation Neuer Medien für das Lernen und der Prüfkriterien (SODIS-Expertentagung Mai 1999) machten die Datenbank SODIS zu einem hilfreichen Beratungsinstrument. Die Erfassung von Software für den Schulbereich, die Bewertung von Produkten unter schulischen Aspekten und die Erprobung im Unterricht wurden auch über das Jahr 2000 hinaus fortgeführt. Unter SODIS.de fanden sich im März 2013 für das Fach Mathematik über 1000 Einträge Neue Medien im Unterricht.

Literatur

Keil, K.-A. (2006): Die Zentralstelle und das Computerprojekt am Anna-Gymnasium. In: Das Gymnasium bei St. Anna in Augsburg. 475 Jahre von 1531 bis 2006. Augsburg: Wißner. 218-252, Literatur 286-289, 299.

Keil, K.-A. (Hrsg. 1976): Das Projekt Computerunterstützter Unterricht Augsburg.

Keil, K.-A. (Hrsg. 1977): Modellversuch Einsatz von Computerterminals in der Schule. Hierzu Karl, U. (1979): Wissenschaftliche Begleitung zum Modellversuch.

BUS. Zeitschrift für Computernutzung an Schulen. Hrsg. Zentralstelle für Computer im Unterricht, Augsburg. Redaktion Karl, U. Hefte 1 (1979) bis 44 (2001), v. a. Heft 37 (Thema: Computer und Mathematik, 1999), BUS-CD 1999, 2000, 2001, 2003/Archiv. Inhaltsverzeichnisse späterer Hefte und Materialien auch bei lernmuseum.de (Karl, U.).

Arbeitskreis Mathematik und Informatik: Beiträge von B. Brockmann, D. Kirmse u. a.

Programme aus dem Angebot der ehemaligen Zentralstelle für Computer im Unterricht weiterhin über den Bayerischen Schulserver schule.bayern.de (Rubrik Unterricht Lernprogramme Archiv) abrufbar, darunter 47 Programmpakete für Mathematik.

Auskunft über Inhalte und Lagerorte weiterer Archiv-Materialien: B. Brockmann, Burgfriedenstr. 10, 86159 Augsburg, Tel. 0821-573752. bernhard.brockmann@web.de.

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

Zwei-Tore-Regel und Zwei-Spalten-Beweis

Ein Ziel des hannoverschen HeuRekAP Projektes ist es, die Beweis-[1] und Argumentationskompetenz der Schüler[2] zu verbessern. Dazu musste im Vorfeld einerseits geklärt werden, wie ein Unterricht gestaltet werden soll, in dem die Schüler gut und gerne argumentieren und korrekte Beweise führen und andererseits, welche Form solche Beweise haben sollten (vgl. Herbst 2002, S. 283 f.).

Eine Schlüsselrolle bei der Unterrichtsgestaltung spielen dabei gezielt gestellte Fragen des Lehrers an die Schüler, welche diese dann im Laufe des Unterrichtes immer weiter verinnerlichen und sich schließlich selbst stellen. Der vielleicht berühmteste entsprechende Fragenkatalog stammt von Pólya (1949). Dort finden sich unter anderem die Fragen: „Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?“ sowie „Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?“ Bei Schoenfelds (1992, S. 356) Untersuchungen fungiert der Lehrer auch als „Roving Consultant“, der unter anderem beständig die Fragen stellt: „Why are you doing it?“ und „How does it help you?“ (ibid.).

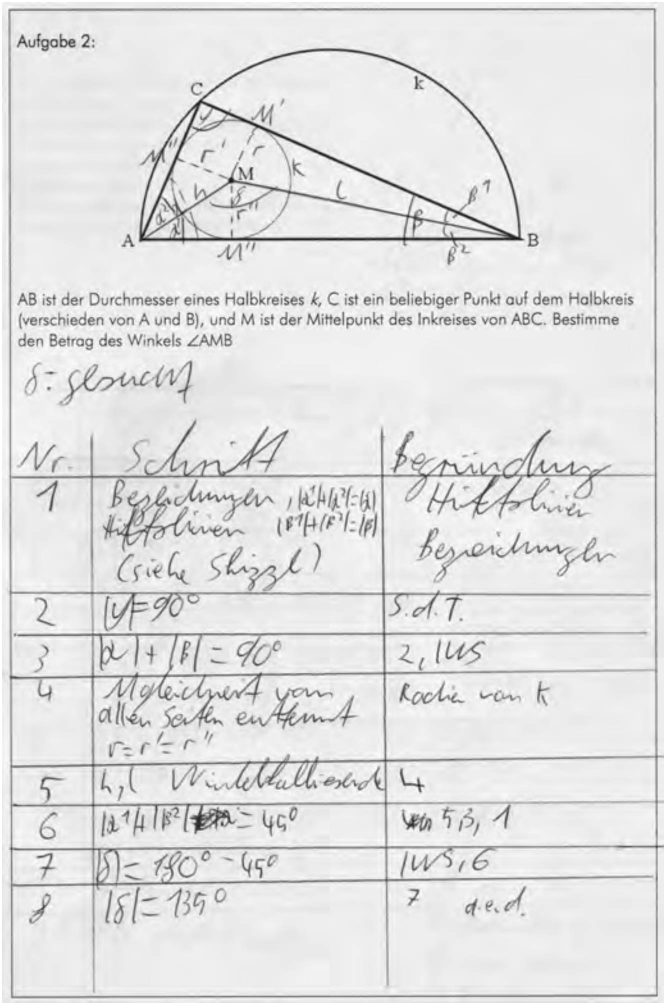


Abbildung 1: Zwei-Spalten-Beweis eines Neuntklässlers zur TIMSS/III K10 Aufgabe

Bezüglich der Frage nach

[1] Gemeint ist hier der gesamte Beweisprozess sensu Boero (1999, vgl. Brockmann-Behnsen 2012).

[2] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit und Platzökonomie wird der generische Plural benutzt.

einer geeigneten Form, in der Beweise in der Schule notiert werden können, nennt Herbst (2002, S. 285) als Argument für die Verwendung des Zwei-Spalten-Schemas: „[...] it is conceivable that the two-column proving custom – this reduction of mathematical reasoning to its logical, formal dimensions – had developed as a viable way for instruction to meet the demand that every student should be able to do proofs“.

Zwei-Spalten-Beweis

Seit den 1890er Schulreformen soll das Beweisen in U.S-amerikanischen Schulen insbesondere im Geometrieunterricht gelehrt werden, daher hat auch der nicht unumstrittene Zwei-Spalten-Beweis dort eine lange Tradition. Aber auch in den deutschen Bildungsstandards ist das Argumentieren und Beweisen als handlungsorientierte Kompetenz festgeschrieben und im Schulbuch „Mathematik Neue Wege 8“ (Lergenmüller & Schmidt 2007, S.72) wird der Zwei-Spalten-Beweis mit einem Vorgehen in drei Schritten vorgeschlagen: 1. „Klare Trennung von Voraussetzung und Behauptung“ (bzw. Gegebenem und Gesuchtem, Anmerkung des Autors), 2. „Skizzieren einer Beweisfigur“ und 3. schrittweise Herleitung der Behauptung „aus den Voraussetzungen und bereits bekannten Zusammenhängen“. Diese Herleitung wird übersichtlich in zwei nummerierten Spalten notiert. Den Schülern des HeuRekAP Projektes wurde das Zwei-Spalten-Schema vorgestellt und als mögliche Form der Beweisnotation an die Hand gegeben. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für die Anwendung dieses Schemas durch einen am Projekt teilnehmenden Neuntklässler bei der Bearbeitung der TIMSS/III K10 Aufgabe[3].

Zwei-Tore-Regel

Eine Besonderheit des HeuRekAP Projektes ist die Einführung der Zwei-Tore-Regel, die im Verlauf der Bearbeitung einer jeden mathematischen (Problem-)Aufgabe bei jedem einzelnen Schritt (Berechnungen, Term- und Äquivalenzumformungen, logische Schlussfolgerungen) beachtet werden muss. Den Schülern wurde verdeutlicht, dass der geplante Schritt mathematisch

Abbildung 2: Visualisierung der Zwei-Tore-Regel

[3] Bei der TIMSS/III Studie wurde die Aufgabe im Single Choice Format mit vier möglichen Antworten gestellt, bei der hier beschriebenen Untersuchung fehlen die vorgegebenen Antworten.

erst dann legitim durchgeführt werden darf, wenn die Erlaubnis erteilt wurde, **beide** Tore zu passieren. Den Schülern wurde ein Textdokument ausgehändigt, auf dem das genaue Wesen dieser beiden Tore und der dazu gehörigen Wächter erläutert wurde. An beide Tore ist jeweils eine Frage geknüpft, die positiv beantwortet werden muss. Auch hier besteht die Hoffnung darin, dass sich die Schüler im Verlauf des Unterrichtes an die Fragen gewöhnen und sich diese nach einer gewissen Zeit unaufgefordert selbst stellen.

Der Wächter des ersten Tores fragt nach einer **Begründung** für den geplanten Schritt, seine Frage findet sich in ähnlicher Form schon im oben erwähnten Katalog von Pólya, sie lautet hier:

„Warum darfst du das?“

Mögliche Antworten des Schülers an diesen ersten Wächter könnten korrekt angewendete Rechenregeln oder logische Schlussfolgerungen sein. Beim Schlussfolgern wiederum sind als Argumente a) bereits bewiesene Sätze, Axiome etc., b) zuvor begründete Schritte und c) die Voraussetzungen der Aufgabe zulässig.

Der Wächter am zweiten Tor fragt nach dem **Nutzen** des geplanten Schrittes. Seine Frage erinnert an die oben zitierten Fragen von Schoenfeld, hier heißt sie:

„Was bringt es dir?“

Neben offensichtlichen Vorteilen, die der Schüler diesem Wächter nennen könnte, wie beispielsweise, dass ein Term bzw. eine Gleichung durch den Schritt vereinfacht wird, dass man der Lösung durch den Schritt näher kommt, ein neues Teilziel (vgl. König 1992, S. 25) erreicht oder dass der Schritt für die Durchführung des Lösungsplanes erforderlich ist, sind auch die alleinige Hoffnung auf weitere Erkenntnisse für den Lösungsplan oder der Wunsch, diesen (vom ersten Wächter erlaubten) Schritt auszuprobieren, um zu sehen, was passiert, als Argument erlaubt.

Nicht selten kommt es zu Situationen, in denen man einen Schritt durchführen möchte, um ein vorteilhaftes Teilziel zu erreichen, allerdings kennt man kein geeignetes mathematisches Argument zu dessen Erreichung. Man könnte in der Metapher der zwei Tore dem zweiten Wächter eine gute Antwort geben, dem ersten aber nicht, der Schritt bleibt vorerst illegitim.

Zusammenhang zwischen Zwei-Spalten-Beweis und Zwei-Tore-Regel

Bei der Beweisführung an Hand eines Zwei-Spalten-Schemas müssen die Schüler Zeile für Zeile mathematische Schritte aneinander reihen und so einen Weg von den Voraussetzungen zur Behauptung respektive – im Falle einer Bestimmungsaufgabe – vom Gegebenen zum Gesuchten finden. Die Struktur des Schemas erfordert es, jeden Schritt in eine nummerierte Zeile zu schreiben. In die benachbarte Spalte derselben Zeile wird eine Begründung für die mathematische Legitimität dieses Schrittes eingetragen. Daher ist der erste Wächter der Zwei-Tore-Regel in der Horizontalen einer jeden Zeile des Zwei-Spalten-Beweises zu verorten. Der zweite Wächter ist im Zwei-Spalten-Schema nicht so offensichtlich zu erkennen wie der erste. Weil er aber nach dem Nutzen eines jeden Schrittes fragt, hat er aus größerer Perspektive das Vorankommen des Problembearbeiters auf seinem Lösungsweg im Sinn. Da der Lösungsweg von den Startgrößen (das Gegebene respektive die Voraussetzungen, vgl. König 1992, S. 25) zur Zielgröße (das Gesuchte respektive die Behauptung) führt, ist der zweite Wächter in der Vertikalen des Schemas anzusiedeln.

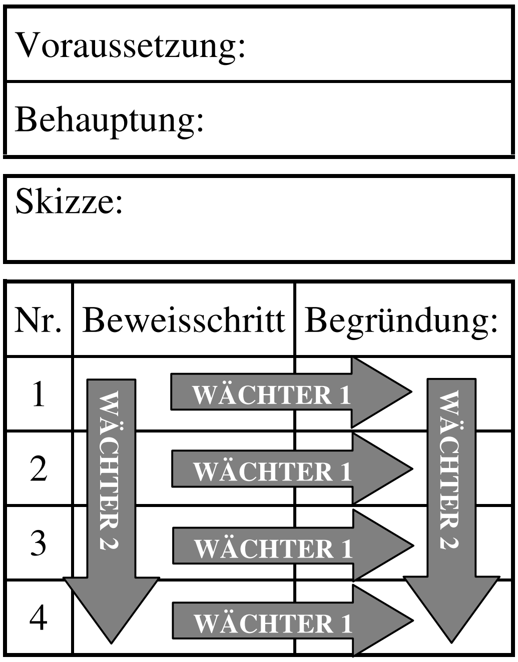


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen Zwei-Spalten-Beweis und Zwei-Tore-Regel

Literatur

Boero, P. (1999): Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematical education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Juli / August 1999*

Brockmann-Behnsen, D. (2012): HeuRekAP - Erste Ergebnisse der Langzeitstudie zum Problemlösen und Beweisen am Gymnasium, in: Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, Bd 1, Münster, WTM-Verlag, S. 149 - 152

Herbst, P. (2002): Establishing a Custom of Proving in American School Geometry: Evolution of the Two-Column Proof in the Early Twentieth Century, in: *Educational Studies in Mathematics* **49:** 283–312, 2002, *Kluwer Academic Publishers.*

König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen, in: Der Mathematikunterricht Jg. **38**, 3/1992

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg., 2007): *Mathematik Neue Wege 8. Arbeitsbuch für Gymnasien. Niedersachsen*, Braunschweig, Bildungshaus Schulbuchverlag

Pólya, G. (1949): *Schule des Denkens*, Francke, Tübingen

Schoenfeld, A. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, Metacognition, and Sense-making in Mathematics, in: Grouws, D. (Hrsg.): *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, S. 334 – 370, MacMillan, New York

Lisa Kathrin BRÜCKEL, Osnabrück

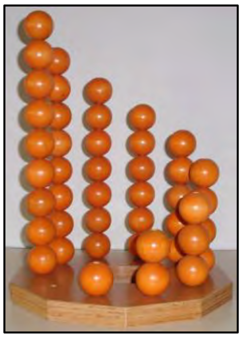
Förderung des arithmetischen Denkens von schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern

Mathematische Fähig- und Fertigkeiten werden kumulativ erworben, wobei Kinder mit guten mathematischen Basisfertigkeiten ihre Fähigkeiten und ihr Wissen schneller erweitern als Kinder, die ihre Schullaufbahn auf einem niedrigeren mathematischen Leistungsniveau beginnen (vgl. Aunola et al. 2004). Aus diesem Grund benötigen insbesondere Kinder mit Lernschwierigkeiten besondere Unterstützungsangebote für einen guten Start in den Schulunterricht.

Basierend auf den langjährigen Erfahrungen von *Mathe-Magie*, dem Osnabrücker Treffpunkt „Mathematische Frühförderung“ (Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Inge Schwank), zum Einsatz Mathematischer Spielwelten wurde eine Studie mit zwölf schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern durchgeführt. Die teilnehmenden Kinder waren zum Zeitpunkt der Studie 6 bzw. 7 Jahre alt und besuchten aufgrund von Lern- und Entwicklungsschwierigkeiten für ein Jahr eine spezielle Förderklasse an einer Grundschule in Niedersachsen („Schulkindergarten“). Diese Kinder wurden ein halbes Jahr lang in mathematischen Gruppen- und Einzelspielstunden individuell gefördert.

Die Studie stellte den Umgang mit dem *Zahlraum* und das darauf aufbauende Verständnis für *Rechenoperationen* in den Mittelpunkt. Ziel der Studie war festzustellen, auf welche Schwierigkeiten die Kinder bei der Auseinandersetzung mit arithmetischen Inhalten trafen, aber auch zu welchen logisch schlussfolgernden Argumentationen und Erkenntnisfortschritten die Kinder trotz ihrer Lernschwierigkeiten in der Lage waren.

Anhand von verschiedenen mathematikdidaktischen Materialien, vor allem mittels der Spielwelt „Rechenwendeltreppe“, sollten sich die Kinder zunächst mit dem Zahlraum von *null bis neun* auseinandersetzen. Die „Rechenwendeltreppe“ wurde am Osnabrücker Treffpunkt entwickelt (vgl. Schwank 2003, 2013) und anschließend im Rahmen verschiedener Abschlussarbeiten an der Universität Osnabrück mit Kindergarten- und Grundschulkindern erprobt. Das Material besteht aus einer Holzbodenplatte mit kreisförmig angebrachten Metallstangen, auf die Kugeln gesteckt werden können. Die Kugeln werden – ausgehend von dem Platz ohne Stange bzw. mit null Kugeln – so verteilt, dass bis hin zur Stange mit neun Kugeln von Stange zu Stange jeweils genau eine Kugel dazukommt (siehe obige Abb.).



Auf die mit Kugeln gefüllten Stangen können verschiedene Spielfiguren (Akteure) gesetzt werden, die sich je nach Blickrichtung durch Versetzen auf Nachbarstangen die Treppe aufwärts oder abwärts bewegen. Im Folgenden wird die Rechenwendeltreppe in schematischer, „aufgefalteter“ Ansicht dargestellt.

Bei der Betrachtung des gegebenen Zahlraums können zwei unterschiedliche Sichtweisen eingenommen werden, die im folgenden Spielereignis auftreten. Zwei Mädchen bauen die Rechenwendeltreppe komplett auf und wenden sich zum Schluss der höchsten Stange mit neun Kugeln zu. Die Spiel-Leiterin lenkt die Aufmerksamkeit auf die Kugelanzahl auf dieser Stange.

SL: So, wie viele Kugeln haben wir jetzt gesteckt, auf die Stange? Wie viele Kugeln sind auf der höchsten Stange? Sagt mir das mal. [...]

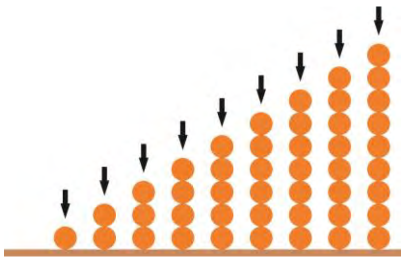
Regina: Neun!

Lena: Acht.

Regina: Neun! [...]

SL: Zählt mal vor.

Regina: [*tippt dabei nacheinander die jeweilige Stange oben an*] Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.



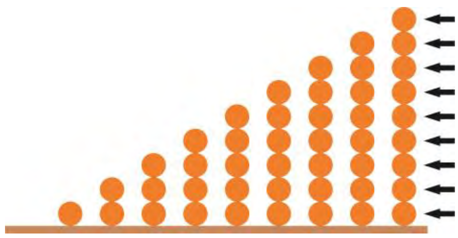
Lena: Nee. [*fängt ebenfalls wie Regina an, die Stangen anzutippen*] Eins, zwei, drei, ... [*stoppt bei der Stange mit vier Kugeln*] Du hast so gezählt, deswegen sind es neun. [*bewegt ihre Hand über die Stange mit einer Kugel bis zur Stange mit neun Kugeln*]

Du musst aber so ... [*berührt die Kugeln auf der Stange mit neun Kugeln – beginnend mit der untersten*] Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun-zehn.

SL: Wie viel, Lena?

Lena: Neun-zehn.

Regina: Gar nicht. Eins ... [*fasst die untere Kugel auf der Stange mit neun Kugeln an*]



Lena: Doch, Regina! Du hast ja so gezählt! [*bewegt ihre Hand über die Stange mit einer Kugel bis zur Stange mit neun Kugeln*]

SL: Zähl noch mal, Lena. Lena!

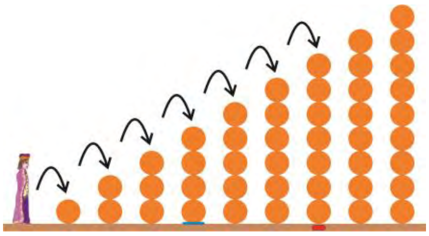
Lena: [*berührt erneut die Kugeln auf der Stange mit neun Kugeln – beginnend mit der untersten*] Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.

SL: Mhm [*zustimmend*].

Es lässt sich in diesem Spielereignis erkennen, dass entweder der Entstehungsprozess der Kugelanzahl über die Stangen (erste Abb. im Transkript) oder die Gesamtanzahl der Kugeln auf der gerade aktuellen Stange (zweite Abb. im Transkript) betrachtet werden kann. Bei der ersten Sichtweise wird die Kugelanzahl durch die Nachfolgerabbildung $f(x) = x + 1$ bestimmt (*Ordinalzahlaspekt*), bei der zweiten Sichtweise (*Kardinalzahlaspekt*) interessiert die Mächtigkeit einer endlichen Menge von Elementen (vgl. Ebbinghaus 2003, S. 65). Beim ordinalen Aspekt kann leichter eine Vorstellung von den Zahlen über ihre Beziehungen zu anderen Zahlen aufgebaut werden; beim kardinalen besteht hingegen die Gefahr des reinen Aufsagens der Zahlwortreihe, ohne eine Vorstellung von den Zahlen zu erwerben.

In der Studie zeigte sich, dass die teilnehmenden Kinder zunächst eher isoliert Anzahlen betrachteten und verstärkt ergebnisorientiert vorgingen, indem der Prozess der Anzahlbestimmung ausgeblendet wurde. Dieses Vorgehen war recht fehleranfällig, wobei den Kindern Fehler häufig nicht selbstständig auffielen. Im Verlauf der Studie änderte sich ihr Verhalten jedoch. Die Kinder orientierten sich vermehrt an Vorgängern bzw. Nachfolgern von Zahlen und begründeten und hinterfragten Erkenntnisse. Durch die auf Zahlnachbarschaften bezogenen Begründungen der Kinder konnten Fehler reduziert und von den Kindern schneller korrigiert werden.

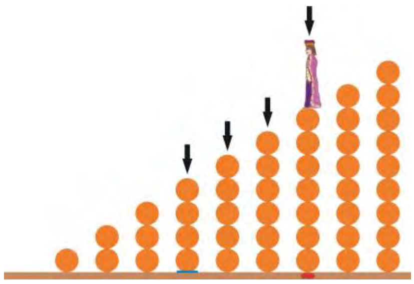
Aufbauend auf einem *Zahlraumverständnis* wurden mit den Kindern anschließend *additive* und *subtraktive Rechenoperationen* besprochen. Hierfür wurden die oben erwähnten Akteure eingesetzt, die sich entsprechend der Rechenoperation auf der Rechenwendeltreppe bewegen konnten. Im folgenden Spielereignis sollen durch Handlungen mit dem Akteur „König“, der am Startplatz mit null Kugeln beginnt, die Rechenoperationen $0 + x = 7$ und $7 - y = 4$ durchgeführt werden. Die Stangen mit sieben und vier Kugeln sind hierfür durch einen roten Glasstein („Edelstein“) bzw. eine blaue Moosgummischeibe („Ziel“) markiert.



SL: Sonja, fängst du mal an ... und lauf mal mit dem König bis zum Edelstein und zähl mal die Schritte.

Sonja: [*versetzt den König jeweils um eine Stange und sagt dazu das passende Zahlwort auf*] Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben. Sieben.

SL: Super. Genau dort macht er eine Pause und schaut sich den Edelstein an. Genau. Und jetzt darf Robert mit dem König wieder nach unten gehen bis zum Ziel. Und zähl mal die Schritte.



Robert: Sieben. [*versetzt den König immer um eine Stange und sagt dazu jeweils ein Zahlwort auf*] Sechs, fünf, vier.

SL: Klasse. Robert, und jetzt hast du ja immer gesagt, auf wie vielen Kugeln der König steht, ne? Du hast gesagt [*stellt den König jeweils auf die entsprechende Stange*]: Hier sind sieben, hier sind sechs, hier sind fünf, hier sind vier ... immer gesagt, auf wie vielen Kugeln der steht.

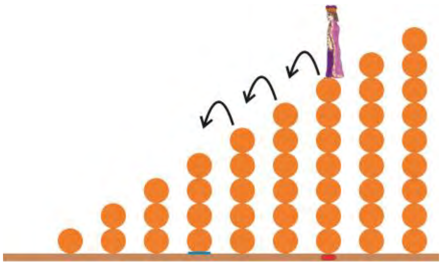
Wir haben hier [*stellt den König auf die Stange mit sieben Kugeln*] angefangen und wenn er jetzt die Schritte gehen soll ...

Robert: Dann muss der eins ...

SL: Eins. Zählst du mal weiter, Robert? Also wir fangen hier an. [*stellt den König auf die Stange mit sieben Kugeln*]

Robert: [*versetzt den König jeweils um eine Stange*] Eins, zwei, drei.

SL: Ganz klasse, Robert. Super.



In diesem Spielereignis zeigt sich, dass der Junge zunächst auf Objekte fokussiert ist und die Gesamtanzahl an Kugeln auf den jeweiligen Stangen angibt. Er geht zwar Schritte mit dem Akteur, lässt sich aber erst auf Nachfrage der Spiel-Leiterin auf die Bewegungseinheiten, d.h. auf eine *Schrittperspektive* ein. Das Einnehmen solch einer handlungsbezogenen Perspektive gelang den teilnehmenden Kindern zunehmend im Verlauf der Studie. Während sie zu Beginn ihr Augenmerk noch stark auf Objekte bzw. Mengen richteten, Schritte mit Objekten verwechselten und Schwierigkeiten mit dem Setzen des Akteurs beim Rechenoperationsbeginn und -ende hatten, wurde mit der Zeit ihr Agieren im Zahlraum zunehmend sicherer. Sie ließen sich vermehrt auf Bewegungseinheiten ein und waren nach einer Erweiterung des Zahlraums hin zu *null bis neunzehn* in der Lage, auch Rechenoperationen mit Zehnerübergang durchzuführen.

Literatur

Aunola, K. et al. (2004): Developmental Dynamics of Math Performance From Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), S. 699-713.

Brückel, L. K. (2011): Spuren arithmetischen Denkens bei Vorschulkindern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, S. 163-166, Münster: WTM.

Brückel, L. K. (in Arbeit): Arithmetisches Denken von schulpflichtigen, aber nicht schulfähigen Kindern – Eine qualitativ empirische Studie zum Zahlraum- und Rechenoperationsverständnis. Universität Osnabrück.

Ebbinghaus, H.-D. (2003): Einführung in die Mengenlehre. Heidelberg: Spektrum.

Schwank, I. (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In I. Schwank: ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 35(3), 70-78.

Schwank, I. (2013, in Druck): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster, J. H. Lorenz (Hrsg.): Rechenstörungen bei Kindern – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 2., überarb. und erw. Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Georg BRUCKMAIER, Regensburg, Stefan KRAUSS, Regensburg, Dominik LEISS, Lüneburg, Werner BLUM, Kassel, Michael NEUBRAND, Oldenburg, Martin BRUNNER, Berlin

COACTIV-Video: Eine unterrichtsnahe Erfassung fachdidaktischen Wissens mittels Videovignetten

Einführung

Es ist ein aktuelles Forschungsdesiderat der Mathematikdidaktik, fachdidaktisches Wissen „unterrichtsnäher" als in den bestehenden Konzeptionen (u.a. in COACTIV und TEDS) zu erheben. Im vorliegenden Beitrag wird ein computergestütztes Instrument („COACTIV-Video") vorgestellt, bei dem Lehrkräfte im Anschluss an kurze videographierte Unterrichtsszenen eine „didaktisch sinnvolle" Weiterführung des Unterrichts angeben sollten.

Die bisherige Konzeptualisierung fachdidaktischen Wissens

In COACTIV (Kunter et al., 2011) wurde fachdidaktisches Wissen mit einem Test über die folgenden drei Subfacetten erhoben (Krauss et al., 2008):

(1) Fachdidaktisches Wissen über Schüler: Erkennen, Analyse und Vorhersage von typischen Fehlern und Schwierigkeiten
(2) Fachdidaktisches Wissen über Inhalte: Erkennen des multiplen Lösungspotentials von Aufgaben
(3) Fachdidaktisches Wissen über Methoden des „Zugänglichmachens": Erklären und Repräsentieren mathematischer Sachverhalte

Ausdifferenzierung des fachdidaktischen Wissens

Im vorliegenden Beitrag soll eine weitere fachdidaktische Kompetenzfacette dargestellt und diskutiert werden: *Kompetenz zum sinnvollen Fortführen von Unterricht*. Diese Kompetenz, die im Folgenden als „Situative Unterrichtskompetenz" bezeichnet wird, soll mit Hilfe von Videovignetten erhoben werden (vgl. auch Kaiser et al., 2013; Lindmeier et al., 2013).

Methode: Instrumente und Stichprobe

Instrumente und Durchführung:
Situative Unterrichtskompetenz wurde im Unterschied zu den drei bestehenden Facetten fachdidaktischen Wissens nicht mit Papier-und-Bleistift-Tests, sondern mit einem vollständig computergestützten Instrument erfasst. Die Lehrkräfte sollten dazu im Anschluss an kurze inszenierte Unterrichtsvideos angeben (ohne Zeitbeschränkung), wie sie den Unterricht weitergestalten würden („Fortführen des Unterrichts"). Insgesamt wurden drei

Videos zu den Themen „Dreisatz", „Bruchungleichungen" und „Elementare Statistik" eingesetzt.

Stichprobe:
Von den an COACTIV 2003 teilnehmenden Lehrkräften bearbeiteten 284 Personen diesen Teil des Computerfragebogens. Im Einzelnen ergab sich folgende Aufschlüsselung nach unterrichteter Schulform[1]: $N_{GY} = 95$, $N_{RS} = 73$, $N_{HS} = 60$, $N_{MitS/SekS/RegS} = 31$, $N_{GesS} = 25$.

Erfasste Dimensionen

Aus den von den Lehrkräften angegebenen Unterrichtsfortführungen wurden pro Video fünf Dimensionen erhoben und jeweils dreistufig (Codes 0-1-2) kodiert. Die Dimensionen lauten im Einzelnen:

Dimension 1: Schülerorientierung
Wer wird in den Mittelpunkt der Handlung gestellt – Lehrer (Code 0) oder Schüler (Code 2)?

Dimension 2: Methodische Orientierung
Wie genau wird das weitere methodische Vorgehen beschrieben (detaillierte Beschreibung: Code 2)?

Dimension 3: Verständnisorientierung
Welche Kompetenz wird schwerpunktmäßig thematisiert – Kalkül (Code 0) oder Verständnis (Code 2)?

Dimension 4: Fachliche Präzision
Wie genau wird das weitere inhaltliche Vorgehen beschrieben (detaillierte Beschreibung: Code 2)?

Dimension 5: Ergreifen der didaktischen Chance
Handelt es sich um eine adäquate Intervention, die die spezifische didaktische Chance der gegebenen Situation nutzt (Nutzen der Chance: Code 2)?

Alle fünf Dimensionen sind „unabhängig" voneinander in dem Sinne, dass jedes „Antwortmuster" möglich ist, z.B. (2, 0, 1, 2, 0), (1, 1, 2, 0, 2), etc. Aus den einzelnen fünf Dimensionen wurden für die Situative Unterrichtskompetenz (SU), die fachübergreifende „Methodische Kompetenz" (M) und die „Fachspezifische Kompetenz" (F) Summenwerte in der folgenden Form gebildet (siehe auch Abb. 1):

SU = Dim. 1 + Dim. 2 + Dim. 3 + Dim. 4 + Dim. 5 (Wertebereich: 0-30)

[1] GY = Gymnasium, RS = Realschule, HS = Hauptschule, MS = Mittelschule, SekS = Sekundarschule, RegS = Regelschule, GesS= Gesamtschule. Im Folgenden werden nur Hauptschul-, Realschul- und Gymnasiallehrkräfte unterschieden.

M	= Dim. 1 + Dim. 2		(Wertebereich: 0-12)
F	=	Dim. 3 + Dim. 4 + Dim. 5	(Wertebereich: 0-18)

Hypothesen

H1: Struktur situativer Unterrichtskompetenz

Situative Unterrichtskompetenz (SU) ist zweidimensional (mit einer fachspezifischen (F) und einer methodischen (M) Facette).

H2: Zusammenhänge mit Drittvariablen

a) SU korreliert hoch mit fachdidaktischem Wissen (FDW) sowie (etwas weniger hoch) mit Fachwissen (FW).
b) SU korreliert positiv mit konstruktivistischen Überzeugungen und negativ mit transmissiven Überzeugungen.

H3: Schulformunterschiede

SU steigt von Hauptschul- über Realschul- zu Gymnasial-Lehrkräften.

Ergebnisse

Zur Reliabilität der Konstrukte

Während die einzelnen fünf Dimensionen Reliabilitäten um .55 aufweisen, wurde das Gesamtkonstrukt mit $\alpha_{SU} = .70$ ($\alpha_M = .59$; $\alpha_F = .62$) erfasst. In Anbetracht der geringen Itemanzahl, der inhaltlichen Breite der Videos und der sich leicht unterscheidenden Instruktionen bei den drei Videos sind die Werte als gut einzuschätzen.

Zu H1: Struktur situativer Unterrichtskompetenz

Für das postulierte zweidimensionale Modell (vgl. Abb. 1) ergeben sich folgende Modelfit-Indizes: χ^2 (4, N=284) = 6,58, p = 0,09, CFI = 0,99, RMSEA = 0,07, SRMR = 0,02.

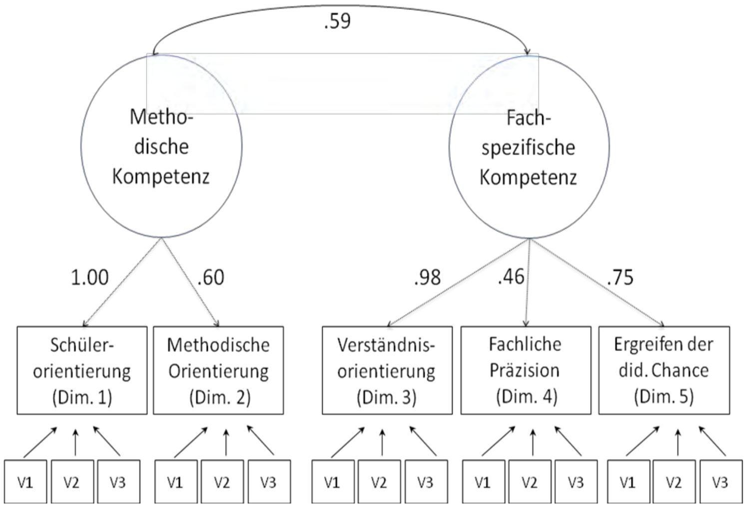


Abb. 1: Strukturmodell der situativen Unterrichtskompetenz

Aufgrund der guten Passung dieses Modells kann demnach die Hypothese einer zweidimensionalen Struktur situativer Unterrichtskompetenz beibehalten werden.

Zu H2: Zusammenhänge mit Drittvariablen
Nachfolgende Tabelle zeigt die jeweils erwartungskonformen, sehr signifikanten Zusammenhänge:

Korrelation r	Fachdidaktisches Wissen (FDW)	Fachwissen (FW)	Konstruktivistische Überzeugungen	Transmissive Überzeugungen
SU	.33	.28	.26	-.32

Zu H3: Schulformunterschiede
Es ergeben sich zwischen den drei Gruppen der Hauptschul-, Realschul- und Gymnasiallehrkräfte hypothesenkonforme Schulformunterschiede. Über alle fünf Dimensionen hinweg (und demnach auch bei M, F und SU) steigen die erreichten Mittelwerte von den Hauptschul- über die Realschul- zu den Gymnasiallehrkräften an. Die Unterschiede sind dabei bei der methodischen Kompetenz M geringer als bei der fachspezifischen Kompetenz F; dennoch handelt es sich durchwegs um mittlere bis große Effekte.

Ausblick

Insbesondere die Ergebnisse zu den Hypothesen 2 und 3 sind bereits als erste Validierung der Messinstrumente und der Ratingprozedur zu sehen. In Zukunft wird noch zu prüfen sein, ob situative Unterrichtskompetenz – wie es bei der bestehenden Konzeptualisierung fachdidaktischem Wissens der Fall war – auch auf die wahrgenommene Unterrichtsqualität sowie den Lernzuwachs der SchülerInnen einen signifikanten Einfluss hat (prädiktive Validität).

Literatur

Kaiser, G., Busse, A. & König, J. (im vorliegenden Band). TEDS-FU: Handlungsnahe Erfassung von Lehrerprofessionswissen durch Videovignetten. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM-Verlag.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29* (3/4), 223-258.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Lindmeier, A. M., Heinze, A. & Reiss, K. (2013). Eine Machbarkeitsstudie zur Operationalisierung aktionsbezogener Kompetenz von Mathematiklehrkräften mit videobasierten Maßen. *Journal für Mathematik-Didaktik*. doi:10.1007/s13138-012-0046-6

Esther BRUNNER, CH-Kreuzlingen

Argumentieren und Beweisen – eine spezifische Form der sozialen Interaktion

1 Theoretischer Hintergrund

Argumentieren und Beweisen wird in Bildungsstandards (vgl. Blum, 2006; EDK, 2011; NCTM, 2000) als zentrale mathematische Kompetenz konzipiert. Diese wichtige Kompetenz vollzieht sich im Diskurs und damit in der Interaktion mit anderen. Ein Beweis oder eine Argumentation wird von der Community auf Stichhaltigkeit hin geprüft, verworfen oder akzeptiert (vgl. Heintz, 2000). Beweisen und Argumentieren ist damit eine spezifische fachliche Art der sozialen Interaktion.

Als anspruchsvolle Tätigkeit verlangt Beweisen im schulischen Kontext vielfältige Unterstützung. Diese kann einerseits auf inhaltlicher Ebene und andererseits auf der Ebene des Dialogs und der Partizipation geboten werden. Eine Unterstützung auf inhaltlicher Ebene kann durch die Art des gewählten Beweises erfolgen, wobei Beweise bezüglich der Repräsentation des Denkens (vgl. Aebli, 1981) unterschieden werden können. Wittmann und Müller (1988) beispielsweise führen den experimentellen Beweis, den inhaltlich-anschaulichen Beweis und den formal-deduktiven Beweis auf. Ersterer bleibt auf das verwendete Beispiel bezogen und versucht, durch systematisches Probieren einen Zusammenhang zu erschliessen und zu prüfen, ob dieser auch für weitere Beispiele gilt. Allerdings fehlt damit die Gewissheit, dass etwas *immer* gilt. Der inhaltlich-anschauliche Beweis versucht, vorhandene Zusammenhänge aufzudecken, sichtbar zu machen oder sie im Sinne eines Konstruktionsbeweises zu *zeigen*. Formal-deduktive Beweise hingegen bedienen sich einer streng logischen Vorgehensweise und verwenden für die Formulierung von Zusammenhängen die algebraische Sprache. Damit weisen die drei Beweistypen nicht nur eine unterschiedliche Ausprägung der Abstraktion auf, sondern bieten auch unterschiedliches Potenzial für einen reichhaltigen mathematischen Diskurs. Während bei Vorgehensweisen, die an Beispiele gebunden bleiben und damit vergleichsweise wenig abstrakt sind, eine hohe Partizipation aller Lernenden möglich sein müsste, dürfte dies beim formal-deduktiven Vorgehen aufgrund seines höheren Abstraktionsgrades nur erschwert der Fall sein. Dieser Beitrag geht deshalb der Frage nach, welche unterschiedlichen Beweistypen beim gleichen innermathematischen Beweisproblem in 32 Klassen der Sekundarstufe I vorkommen und wie deren Bearbeitung im Diskurs realisiert wird.

2 Methode

Die vorliegende Studie bezieht sich auf den Datensatz des Projekts „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“ (Klieme, Pauli & Reusser, 2009), das auch als „Pythagoras-Studie“ bekannt ist. In 32 deutschen und Schweizer Klassen der Sekundarstufe I (8./9. Schuljahr) wurde u.a. eine standardisierte innermathematische Beweis- und Begründungsaufgabe durchgeführt. Bei der für die Studie videografierten Bearbeitung dieser Aufgabe waren die Lehrpersonen frei.

Ziel der zu präsentierenden Videostudie war es, einen möglichst umfassenden Blick auf alltägliches Beweisen zu werfen. Auf der Basis einer ausführlichen Aufgabenanalyse wurde zunächst ein fachdidaktisches Analyseinstrument entwickelt, mit dem die Bearbeitung der Begründungsaufgabe hinsichtlich der inhaltlichen Lösungsschritte wie auch bezüglich deren Umsetzung im Gespräch erfasst werden konnte (Details dazu in Brunner, 2012, 2013). Als eines dieser inhaltlichen Merkmale wurde auch der Beweistyp erfasst.

Die Analyse der inhaltlichen Lösungsschritte wurde verbunden mit der Art und Weise, wie sie im Unterrichtsgespräch realisiert werden. Dazu wurden unterschiedliche Kommunikationsmuster beschrieben (Details dazu in Brunner, 2012, 2013), die sich u.a. bezüglich der Steuerung der Lehrperson und der Länge der Redebeiträge der Lernenden unterscheiden. So beschreibt Kommunikationsmuster 1 im Wesentlichen ein Modelling durch die Lehrperson, bei dem keine aktive Partizipation der Lernenden vorgesehen ist. Kommunikationsmuster 2 hingegen beschreibt ein I-R-E-Muster (Mehan, 1979) mit hoher Steuerung der Lehrperson und Kurzantworten der Lernenden. In Kommunikationsmuster 3 geht die Steuerung der Lehrperson demgegenüber zugunsten höherer Partizipation und längerer Redebeiträge der Lernenden zurück.

Der vorliegende Beitrag befasst sich ausschliesslich mit den Beweistypen und deren Realisierung im Unterrichtsgespräch.

3 Ergebnisse

Alle drei unterschiedlichen Beweistypen traten bei der Bearbeitung der gleichen innermathematischen Beweis- und Begründungsaufgabe auf, allerdings in unterschiedlicher Häufigkeit: In 21 Klassen (65.5 %) wurde ein formal-deduktiver Beweis erarbeitet. Vier Klassen (12.5 %) arbeiteten experimentell und in zwölf Klassen (37.5 %) konnte ein inhaltlich-anschauliches Vorgehen beobachtet werden. Neun Klassen bearbeiteten die Aufgabe mit zwei unterschiedlichen Beweistypen, während vier Klassen keinen Beweistyp umsetzten, obwohl sie ebenfalls an der gleichen Aufgabenstellung arbeiteten.

Die einzelnen Beweistypen wurden im Dialog unterschiedlich umgesetzt. So wurde der experimentelle Beweis in drei der vier Fälle in einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch erarbeitet, in einem der vier Fälle wies das Unterrichtsgespräch eine höhere Partizipation der Lernenden auf, als dies üblicherweise im I-R-E-Muster (Mehan, 1979) mit kurzen Antworten der Lernenden der Fall ist.

Der operative Beweis wurde hingegen in 58.3 % der Klassen, die einen solchen erarbeiteten, mit deutlich mehr Partizipation der Lernenden realisiert als in Rahmen eines fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächs im I-R-E-Muster. Dieses konnte in 41.7 % der Klassen, die operativ arbeiteten, beobachtet werden.

Die grösste Varianz bezüglich Gestaltung des Unterrichtsgesprächs zeigte sich beim formal-deduktiven Beweis. Grossmehrheitlich (81 %) erfolgte die Bearbeitung im I-R-E-Muster mit wenig Partizipation der Lernenden. Aber es liessen sich auch Klassen (14.2 %) finden, in denen sie deutlich höher lag und über das übliche Beantworten von Fragen hinausging, indem beispielsweise Ideen von den Lernenden aktiv eingebracht und ausführlich elaboriert wurden. Daneben wurde in 4.8 % der Klassen, die formal-deduktiv arbeiteten, ein Modelling durch die Lehrperson beobachtet, bei dem keine aktive Partizipation der Lernenden vorgesehen war.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Partizipation der Lernenden beim operativen Vorgehen am ausgeprägtesten war, während sowohl beim experimentellen wie beim formal-deduktiven Vorgehen das I-R-E-Muster dominierte.

4 Diskussion

Welche Beweistypen treten bei der Bearbeitung der gleichen innermathematischen Beweis- und Begründungsaufgabe in der Sekundarstufe I also auf und in welcher Weise wird das Unterrichtsgespräch dazu gestaltet?

Die Resultate zeigen, dass das Beweisen der gleichen Aufgabenstellung in verschiedenen Klassen unterschiedlich verläuft. Obwohl von einer Dominanz des formal-deduktiven Beweises ausgegangen werden kann, wurde in zahlreichen Klassen ein operatives Vorgehen durchgeführt. Experimentelle Zugänge hingegen waren vergleichsweise selten. Dieser Umstand kann in Übereinstimmung mit der Literatur (vgl. Krauthausen, 2001) als funktional betrachtet werden, weil experimentelle Zugänge insbesondere für jüngere Lernende sehr bedeutsam sind, sich die vorliegende Studie aber auf das 8./9. Schuljahr bezieht.

Erwartungskonform ist die Umsetzung der unterschiedlichen Beweistypen im Dialog. Dass die Partizipation der Lernenden am Gespräch beim formal-deduktiven Beweis tiefer ausfällt als beim operativen, ist mit dessen Formalisierung mittels algebraischer Sprache zu erklären, die einerseits den Zugang zum Gespräch für Lernende limitiert und andererseits von den Lehrpersonen eine stärkere Unterstützung verlangt.

Die Ergebnisse machen deutlich, dass es bedeutsam ist, Partizipation nicht unabhängig vom Inhalt zu erfassen, sondern sie in enger Abhängigkeit vom kognitiven Anspruch und vom Grad der Abstraktion der inhaltlichen Bearbeitung zu sehen.

Literatur

Aebli, H. (1981): Denken. Das Ordnen des Tuns (Band 2). Stuttgart: Klett-Cotta.

Blum, W. (2006): Einführung. Bildungsstandards. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen (S. 14 - 32). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Brunner, E. (2012): Innermathematisches Beweisen und Argumentieren auf der Sekundarstufe I. Unveröffentlichte Dissertation. Zürich: Universität Zürich, Institut für Erziehungswissenschaft.

Brunner, E. (2013): Innermathematisches Beweisen und Argumentieren auf der Sekundarstufe I. Münster: Waxmann.

EDK Generalsekretariat. (2011): Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards. Frei gegeben von der EDK Plenarversammlung am 16. Juni 2011. Bern: EDK.

Heintz, B. (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Wien: Springer.

Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2009): The Pythagoras Study. In T. Janik & T. Seidel (Hrsg.): The power of video studies in investigating teaching and learning in the classroom (S. 137 - 160). Münster: Waxmann.

Krauthausen, G. (2001): Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat. Zum Image einer fundamentalen Tätigkeit. In W. Wieser & B. Wollring (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt (S. 99 - 113). Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Mehan, H. (1979): Learning Lessons. Social Organization in the Classroom. Cambridge: Harvard University Press.

NCTM [National Council of Teachers in Mathematics]. (Hrsg.). (2000): Principles and standards for school mathematics. Reston: NCTM.

Wittmann, E.C. & Müller, N. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.): Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter (S. 237 - 258). Berlin: Cornelsen.

Nils BUCHHOLTZ, Gabriele KAISER, Hamburg; Sigrid BLÖMEKE, Berlin

Die Entwicklung von Beliefs von Lehramtsstudierenden in der Studieneingangsphase – Ergebnisse aus TEDS-Telekom

Die an die „Teacher Education and Development Study – Learning to Teach Mathematics“ (TEDS-M; Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010) angeschlossene und von der Deutschen Telekom Stiftung geförderte Studie TEDS-Telekom zielt auf die Evaluation der ebenfalls von der Stiftung finanzierten Projekte „Mathematik Neu Denken“ (Beutelspacher et al., 2011) und „Mathematik Besser Verstehen“ (Ableitinger & Herrmann, 2011) zur Neuorientierung der Gymnasiallehrer-Ausbildung im Fach Mathematik an den Universitäten Siegen und Gießen bzw. Duisburg-Essen. Im Mittelpunkt dieser innovativen Projekte steht unter anderem auch die Betonung konstruktivistisch orientierter Lehr- und Lernformen in den mathematischen Vorlesungen und Übungen der Studieneingangsphase.

Beide Projekte wurden in der TEDS-Telekom-Studie aus einem externen Blickwinkel in Hinblick auf die erzielten Effekte im Bereich der Wissensentwicklung der Studierenden sowie der Entwicklung der zugehörigen Überzeugungen (Beliefs) mit Hilfe von 90-minütigen kompetenzbasierten Leistungstests und einem Fragebogen zu Einstellungen untersucht (siehe für Details z.B. Buchholtz et al. 2011). Die Studie untersuchte die Anfängerkohorten an den drei Projekt-Universitäten Gießen, Siegen und Duisburg-Essen sowie an zwei weiteren vergleichbaren Universitäten (Bielefeld und Paderborn) längsschnittlich zu Beginn des 1. Semesters, am Ende des 2. Semesters und am Ende des 4. Semesters. Die Panel-Stichprobe, zu der Leistungsdaten zu allen drei Messzeitpunkten vorlagen, besteht aus 167 Studierenden. Die messzeitpunktspezifischen Daten der Studierenden wurden zu vier vergleichbaren Gruppen aggregiert (Tab. 1). Quantitative Ergebnisse der Entwicklung des professionellen Wissens über alle drei Messzeitpunkte liegen in Kürze vor (Buchholtz & Kaiser, in Vorb.).

Innerhalb dieses Beitrags wollen wir der Frage nachgehen, ob sich der Einfluss der Projekte zur Förderung der Lehramtsausbildung auf der Ebene der Beliefs der Studierenden nachweisen lässt, und wie sich die Beliefs über die ersten vier Semester des Studiums entwickeln. Wir nehmen dabei an, dass sich die berufsbezogenen Überzeugungen durch die modifizierten Ausbildungsmaßnahmen der innovativen Projekte stärker in die konstruktivistische Richtung bei gleichzeitig niedriger Transmissionsorientierung entwickeln.

Tabelle 1: Stichprobe

Vergleichsgruppen	**MZP 1**	**MZP 2**	**MZP 3**	**Panel**
Mathematik Neu Denken (MND)	118	78	66	59*
Mathematik Besser Verstehen (MBV)	122	52	36	29
Lehramt	90	53	40	39
Nicht-Lehramt	78	52	41	40
Gesamt	408	235	183	167

*darunter auch 13 fortgeschrittene Studierende der Universität Siegen

Im Fragebogen zu den Einstellungen der Studierenden wurde u.a. eine gekürzte Skala zu epistemologischen Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik (vgl. Staub und Stern, 2002) eingesetzt, die sich bereits in TEDS-M 2008 als hinreichend reliabel herausgestellt hatte. Dabei wurden zwei grundlegende Perspektiven voneinander unterschieden: Transmissionsorientierung und Konstruktivismus. Im Rahmen der transmissionsorientierten Perspektive wird angenommen, dass Wissen durch die Präsentation von Lerninhalten im Sinne eines gerichteten Vermittlungsprozesses von der Lehrperson an die Schülerinnen und Schüler weitergegeben wird. (Beispiel: „Schüler(innen) lernen Mathematik am besten, indem sie den Erklärungen der Lehrperson aufmerksam folgen.") Dagegen ist die konstruktivistische Perspektive durch ein stärker schülerorientiertes Lehr-Lernverständnis gekennzeichnet. Der Lernprozess wird hier als selbstgesteuerter aktiver Konstruktionsprozess der Schülerinnen und Schüler angesehen, der durch die Bereitstellung einer geeigneten Lernumgebung von der Lehrperson unterstützt wird. (Beispiel: „Lehrpersonen sollten Schüler(innen) ermutigen, eigene Lösungen für mathematische Aufgaben zu finden, auch wenn diese nicht effizient sind.") Alle Einschätzungen der einzelnen Items erfolgten auf einer sechsstufigen Likert-Skala mit den Polen „stimme überhaupt nicht zu" und „stimme völlig zu".

Da es sich bei der TEDS-Telekom Studie um eine Längsschnittstudie handelt, musste sichergestellt werden, dass die Reliabilität der beiden Skalen zu allen Messzeitpunkten einen akzeptablen Wert aufwies. Für die Konstruktivismusskala zeigten sich akzeptable Werte ($.63 < \alpha < .68$); überraschenderweise konnte die Reliabilität für die Transmissionsorientierung jedoch bislang noch nicht in zufriedenstellendem Maß erreicht werden ($.48 < \alpha < .59$), so dass hier ggf. homogenere Skalen gebildet werden müssen. Für die Analysen wurden die Mittelwerte der Gruppen auf den jeweiligen Skalen und zu den jeweiligen Messzeitpunkten betrachtet (Tab. 3):

Tabelle 3: Ergebnisse (Mittelwerte und Standardabweichungen)

Vergleichsgruppen	MZP 1	MZP 2	MZP 3
Konstruktivismus			
Mathematik Neu Denken	5,05 (0,49)	4,84 (0,62)	5,27 (0,41)
Mathematik Besser Verstehen	4,76 (0,44)	4,84 (0,50)	5,04 (0,45)
Lehramt	4,93 (0,47)	5,03 (0,49)	5,14 (0,39)
Nicht-Lehramt	4,94 (0,63)	5,15 (0,60)	5,09 (0,48)
Gesamt	4,94 (0,52)	4,95 (0,58)	5,16 (0,44)
Transmissionsorientierung			
Mathematik Neu Denken	2,59 (0,61)	2,56 (0,56)	2,41 (0,55)
Mathematik Besser Verstehen	2,90 (0,59)	2,76 (0,57)	2,63 (0,61)
Lehramt	2,75 (0,66)	2,61 (0,45)	2,61 (0,54)
Nicht-Lehramt	2,53 (0,66)	2,47 (0,56)	2,42 (0,63)
Gesamt	2,67 (0,63)	2,59 (0,54)	2,50 (0,58)

Zunächst fällt die starke Zustimmung zu den konstruktivistischen Überzeugungen in allen Gruppen auf, während die Überzeugungen zur Transmissionsorientierung in allen Gruppen gleichermaßen gering ausgeprägt sind. Um die Veränderungen dieser Einstellungen genauer zu analysieren, wurden die Skalenwerte mit Hilfe einer zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung untersucht. Dabei stellten die jeweiligen Skalenwerte der beiden Einstellungsskalen die abhängigen Variablen dar, der dreistufige Innersubjekts-Faktor Messzeitpunkt und der vierstufige Zwischensubjekts-Faktor Gruppe die unabhängigen Variablen. Interaktionseffekte zwischen Gruppen- und Messzeitpunkt-Faktor deuten dabei auf eine unterschiedliche Entwicklung der Einstellungen zwischen den Gruppen hin.

Für den Bereich Konstruktivismus ergab sich ein signifikanter schwacher Effekt des Messzeitpunktes ($F = 13{,}729$; $df = 2$; $p < .001$; part. $\eta^2 = .08$), allerdings kein signifikanter Effekt der Gruppenzugehörigkeit ($F = 1{,}276$; $df = 3$; $p = .285$; part. $\eta^2 = .02$). Der Interaktionseffekt zwischen Gruppe und Messzeitpunkt wird zwar signifikant, allerdings ist der Effekt nicht sehr stark ($F = 4{,}631$; $df = 6$; $p < .001$; part. $\eta^2 = .08$). Inhaltlich bedeutet dies, dass keine signifikanten messzeitpunktspezifischen Unterschiede zwischen den Gruppen vorliegen und alle Gruppen mittelfristig die ohnehin stark ausgeprägte konstruktivistische Überzeugung überraschenderweise noch steigern, wobei geringfügig andere Entwicklungsverläufe in den Gruppen vorliegen, die jedoch nicht gravierend sind. Für den Bereich der

Transmissionsorientierung ergab sich ebenfalls ein signifikanter schwacher Effekt des Messzeitpunktes ($F = 7{,}251$; $df = 2$; $p < .001$; part. $\eta^2 = .04$), und erneut kein signifikanter Effekt der Gruppenzugehörigkeit ($F = 2{,}517$; $df = 3$; $p = .06$; part. $\eta^2 = .05$). Der Interaktionseffekt zwischen Gruppe und Messzeitpunkt wird ebenfalls nicht signifikant ($F = 0{,}523$; $df = 6$; $p = .790$; part. $\eta^2 = .01$). Auch hier entwickeln sich die Gruppen ähnlich und lassen sich messzeitpunktspezifisch nicht voneinander unterscheiden. Erstaunlich ist, dass die ohnehin schon niedrige Zustimmung zu der Transmissionsorientierung in allen Gruppen weiter im gleichen Maße abnimmt.

Es konnten im Bereich der Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematik keine bedeutenden Effekte im Vergleich zwischen den Gruppen identifiziert werden, so dass ein spezifischer Einfluss der innovativen Projekte nicht nachgewiesen werden konnte. Da sich die Entwicklung der Beliefs in allen Gruppen aber überraschend ähnlich gestaltet, versprechen weitere längsschnittliche Analysen der Gesamtstichprobe mit Hilfe von latenten Wachstumskurvenmodellen (Bollen & Curran, 2006) interessante Einblicke in die Entwicklung von Einstellungen in der Studieneingangsphase.

Literatur

Ableitinger, C. & Herrmann, A. (2011): Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Ein Arbeits- und Übungsbuch. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spieß, S. & Wickel, G. (2011): Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerausbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann R. (Hrsg.) (2010): TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Bollen, K. & Curran, P. (2006): Latent Curve Models: A Structural Equation Perspective. New Jersey: Wiley.

Buchholtz, N., Blömeke, S., Kaiser, G., König, J., Lehmann, R., Schwarz, B. & Suhl, U. (2011): Entwicklung von Professionswissen im Lehramtsstudium: eine Längsschnittstudie an fünf deutschen Universitäten. In K. Eilerts, A. Hilligus, G. Kaiser & P. Bender (Hrsg.), Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung (S. 201-214). Münster: Lit Verlag.

Buchholtz, N. & Kaiser, G. (in Vorb.): Improving mathematics teacher education in Germany: Empirical results from a longitudinal evaluation of innovative programs. In: International Journal for Science and Mathematics Education.

Staub, F.C. & Stern, E. (2002): The Nature of Teachers‘ Pedagogical Content Belief Matters for Students’ Achievement Gains: Quasi-Experimental Evidence From Elementary Mathematics. In: Journal of Educational Psychology, 94(2), 344-355.

Bernd BÜCHLER, Paderborn

Verständnis- und Darstellungsschwierigkeiten von Studierenden beim Arbeiten mit Funktionenfolgen in einer mathematischen Anfängervorlesung

Zu Beginn eines mathematisch orientierten Studiums werden Studierende mit diversen mathematischen Begriffen und Konzepten konfrontiert, die sie aus der Schule noch nicht – oder jedenfalls nicht auf dieser Abstraktionsstufe – kennengelernt haben. Dies kann zu Verständnis- und Darstellungsschwierigkeiten führen, was sich insbesondere dann zeigt, wenn die Studierenden z.B. im Rahmen von Übungs- oder Klausuraufgaben mit diesen Begriffen arbeiten und diese im Rahmen von eigenen Beweisen anwenden sollen. Da die im Verlaufe der Vorlesung neu einzuführenden Begriffe oftmals aufeinander aufbauen, sind kombinierte Schwierigkeiten der Studierenden insbesondere mit fortgeschrittenen mathematischen Begriffen zu erwarten. Zu diesen fortgeschrittenen mathematischen Begriffen gehört die Konvergenz von Funktionenfolgen, da diese einerseits das Verständnis der Konvergenz von Zahlenfolgen voraussetzt, andererseits aber auch den Funktionenbegriff beinhaltet – und durch die Unterscheidung zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz zu Verwechslungen führen kann. Da der Umgang der Studierenden mit der Funktionenfolgenkonvergenz in mathematischen Anfängervorlesungen meines Wissens bisher noch nicht im Zentrum hochschuldidaktischer Untersuchungen stand, habe ich hierzu eine Studie durchgeführt, auf die ich nun kurz eingehen möchte.

1. Hintergrund

Die Studie basiert auf der hochschuldidaktischen Begleitung einer Analysis-1-Veranstaltung, die im Wintersemester 2011/12 für Studienanfänger(innen) der Studiengänge Bachelor (Techno-)Mathematik und Gymnasiales Lehramt gehalten wurde. Diese Veranstaltung bestand aus der Vorlesung, den Übungen (es wurden regelmäßig Übungszettel herausgegeben, die von den Studierenden zuhause zu bearbeiten, dann abzugeben waren, und korrigiert und bewertet zurückgegeben wurden – besprochen wurden die Lösungen in einer Zentralübung), den Präsenzübungen (hier waren vor Ort Präsenzaufgaben zu bearbeiten) und der Klausur (am Ende der Veranstaltung). Zur Vorbereitung der Studie führte der Autor eine stoffdidaktische Analyse durch, in der die verschiedenen Konvergenzbegriffe bei Funktionenfolgen, ihre Positionierung und ihr Zweck im Rahmen verschiedener Analysis-Bücher bzw. -Skripte untersucht wurden. Die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz wurde im Rahmen der hochschuldidaktisch begleiteten Vorlesung unter Verwendung von Quantoren definiert, wobei auf den charakteristischen Unterschied in der Abhängigkeit der natürlichen Zahl N ($N = N(\varepsilon, x)$ bei punktweiser Konvergenz und $N = N(\varepsilon)$ bei gleichmäßiger Konvergenz) hingewiesen wurde. Als äquivalentes Kriterium zur Definition der gleichmäßigen Konvergenz wurde ein Satz angegeben (und bewiesen), der die Supremumsnorm verwendet, welche in der Vorlesung hierzu eingeführt wurde.

2. Einordnung in das Forschungsprojekt des Autors

Aus der Literatur sind insbesondere die folgenden Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff bei Zahlenfolgen (zusammengestellt von Laura Ostsieker im Rahmen ihrer noch abzuschließenden Dissertation über Studierendenschwierigkeiten im Umgang mit Zahlenfolgenkonvergenz) bekannt: Verschiedene Darstellungen von Folgen (Tall & Vinner, 1981), viele Quantoren, Ungleichung und Betrag, umgekehrte Beziehung von $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{N}$ (Davis & Vinner, 1986; Roh, 2005) und die Diskrepanz zwischen Alltagssprache und mathematischer Sprache (Tall & Vinner, 1981). Darüber hinaus sind Beispiele für weitere aus der Literatur bekannte Schwierigkeiten mit mathematischen Begriffen, die im Rahmen von Funktionenfolgen eine Rolle spielen könnten: Funktionen bzw. Abbildungen als mathematische Objekte und der Stetigkeitsbegriff bei Funktionen. Hieraus ergaben sich im Zusammenhang mit Funktionenfolgenkonvergenz a-priori (als Hypothesen) zu erwartende Studierendenschwierigkeiten mit: der Zahlenfolgenkonvergenz, dem Funktionsbegriff bzw. Abbildungsbegriff, den unterschiedlichen Konvergenzbegriffen bei Funktionenfolgen, der Verwendung von Quantoren, der Abgrenzung der Definition der gleichmäßigen Konvergenz vom Stetigkeitsbegriff und dem Zusammenspiel der vorher angegeben Einzelpunkte. Somit stellten sich dem Autor die folgenden Forschungsfragen. Welche Verständnis- und Darstellungsschwierigkeiten haben Studienanfänger(innen) der Studiengänge Bachelor (Techno-)Mathematik und Gymnasiales Lehramt im Umgang mit Funktionenfolgen – insbesondere mit den zugehörigen Konvergenzbegriffen? Welche besonderen Schwierigkeiten treten bei Funktionenfolgenkonvergenz auf, die über die Schwierigkeiten mit Zahlenfolgen hinausgehen? Wie lassen sich beobachtete Fehler kategorisieren? Wie lässt sich didaktisch möglichen Schwierigkeiten bzw. Fehlvorstellungen vorbeugen? Im Hinblick auf die genannten Forschungsfragen und Hypothesen führte ich also im Wintersemester 2011/12 eine explorative (Vor-)Studie durch. Die Ziele dieser (Vor-)Studie sind: einen Überblick über die auftretenden Studierendenschwierigkeiten im Umgang mit Konvergenz von Funktionenfolgen zu erhalten, die obigen Vorabhypothesen zu überprüfen (soweit wie möglich), Fortschritte im Hinblick auf die Forschungsfragen zu generieren. Zum Design der Studie (bzw. den verwendeten Methoden und Maßnahmen) ist kurz das Folgende zu sagen. Es wurden vom Autor zwei Übungsaufgaben zum Thema Konvergenz von Funktionenfolgen in den Übungsbetrieb eingespeist, die von den Studierenden zuhause zu bearbeiten waren. Darüber hinaus führte der Autor Interviews mit sechs ausgehend von den eingescannten Lösungen ausgewählten Paaren bzw. Einzelpersonen zu ihren abgegebenen Lösungswegen und zum Thema allgemein durch. Die Interviews waren für 60 Minuten konzipiert, dauerten aber (z.T.) deutlich länger. Die Gespräche wurden aufgenommen, zwei Interviews darüber hinaus auch per Video gefilmt. Zunächst sollten die Studierenden die ihnen beim Interview vorliegenden Lösungswege erläutern – es wurden vom Autor Nachfragen gestellt, falls bestimmte Schritte dabei noch nicht klar wurden. Anschließend wurden den Studierenden noch vorbereitete weitere Fragen zum allgemeinen (auch anschaulichen) Verständnis der Thematik gestellt. Zusätzlich zu den Interviews erfolgte noch die Auswertung einer Klausuraufgabe (wurde vom Dozenten gestellt) zum Thema zur Identifikation möglicher Fehlerkategorien. Im Vortrag hat sich der Autor auf die Vorstellung der Auswertung einer Klausuraufgabe zum Thema im Hinblick auf mögliche Fehlerkategorien beschränkt.

3. Analyse einer Klausuraufgabe zum Thema

Es wurde eine einfache vom Dozenten der Veranstaltung gestellte Klausuraufgabe zur Konvergenz von Funktionenfolgen ausgewertet, in der die durch $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\cos x)/n$ gegebene Funktionenfolge auf gleichmäßige und punktweise Konvergenz zu überprüfen war. Der Autor erstellte zu dieser Aufgabe verschiedene mögliche Lösungswege (z.B. unter Verwendung der Definition der gleichmäßigen Konvergenz mit Quantoren und – alternativ dazu – unter Verwendung der Supremumsnorm), um sich einen Überblick über mögliche zu erwartende Schritte und interessante Punkte in den Lösungswegen zu verschaffen.

4. Fehlerkategoriensystem

Die Grundlage zur Entwicklung eines Fehlerkategoriensystems bildeten 97 eingescannte Klausurlösungen. Von diesen wurden 13 besonders exemplarische Klausuren im Hinblick auf die Bearbeitung der obigen Klausuraufgabe zur Konvergenz von Funktionenfolgen ausgewählt. Darauf basierend wurde ein Fehlerkategoriensystem entwickelt. Das Fehlerkategoriensystem wurde dann noch an weiteren vorliegenden Klausurlösungen überprüft und ergänzt. Bei der Erstellung des Fehlerkategoriensystems wurden allgemeine Fehlerkategorien (adaptiert auf der Grundlage eines Systems von Laura Ostsieker zur Zahlenfolgenkonvergenz) – also: Fehlende Begründung im Verhältnis zu vermittelten Bezugsnormen, Mängel beim Umformen symbolischer Ausdrücke, Unvollständige formale Aussagen, Logische Probleme, Umformen der Behauptung mit mangelnder Kommentierung, n-N-Problem und Fehlerhafte Folgennotation – von speziell im Umgang mit Funktionenfolgen auftretenden Fehlerkategorien unterschieden. Diese sind (mit ihren Instanzen): Mangelnde Unterscheidung zwischen gleichmäßiger und punktweiser Konvergenz (N-ε-x-Problem, Verwendung der Supremumsnorm zum Nachweis der pktw. Konvergenz, Spezifische Probleme mit der Verwendung von Quantoren), Problem bei der formalen Darstellung von Funktionen als Objekte (Mangelnde formale Unterscheidung zwischen Funktion und Funktionswert, Probleme bei der Verwendung des Zuordnungspfeils, Verwendung des Betrags für Funktionen), Probleme bei der Verwendung der Supremumsnorm (Fehlende Bezugsmenge oder Verwechslung des Symbols X für die Bezugsmenge mit der Variablen x, Mangelnde Konkretisierung der Bezugsmenge) und Falsche Wahl der Grenzfunktion. Im Vortrag wurden diese kurz an Beispielen aus den eingescannten Studierendenlösungen erläutert. Danach folgte noch eine exemplarische Anwendung der codierten Fehlerkategorien auf eine (vollständige) Studierendenlösung.

4. Ausblick

Es ist geplant, die obigen Fehlerkategorien aus der (Vor-)Studie ausführlicher in naher Zukunft – mit Definitionen und erläuternden Beispielen – in einer Veröffentlichung darzustellen, zusammen mit exemplarischen Anwendungen auf vollständige Studierendenlösungen. Diese sollen ergänzt werden durch Ergebnisse bzw. Erkenntnisse aus den oben angesprochenen Interviews und ausgewerteten Studierendenlösungen der beiden Übungsaufgaben, die das Studierendenverständnis der gleichmäßigen und punktweisen Konvergenz – nicht nur fehlerorientiert – vermutlich noch besser beleuchten. Hierbei sollen nicht nur formale Aspekte, wie z.B. die formal richtige Verwendung von Quantoren, im Mittelpunkt stehen, sondern das allgemeine Verständnis der entsprechenden mathematischen Begriffe.

Literatur

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986): The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. In: The Journal of Mathematical Behavior, 5, 281 - 303.

Roh, K. H. (2005): College Students‘ Intuitive Understanding of the Concept of Limit and their Level of Reverse Thinking. Doktorarbeit, The Ohio State University, Columbus, OH.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Particular Reference to Limits and Continuity. In: Educational Studies in Mathematics, 12, 151 - 169.

Bernhard BURGETH, Florian KERN, Saarbrücken

Mathematik besser einsehen mit Bildverarbeitung

Der Mensch als visuelles Wesen kommuniziert mit seiner Umwelt über Zeichen und im modernen Medienzeitalter in hohem Maße über Bilder. Schüler haben oft schon wie selbstverständlich Zugriff auf Computer und Digitalkamera integriert im Handy. Damit sind ihnen die Möglichkeiten gegeben, Bilder zu machen, zu speichern und, vor allem, zu verändern. Diese Manipulation von Bildern geschieht mit mathematischen Methoden, und deswegen ist es naheliegend die Wirkungsweise elementarer Mathematikkonzepte an Bildern zu veranschaulichen, mit Bildern einsehbar zu machen.

Darum soll es in diesem Beitrag gehen. Wir werden uns auf folgende Fragen beschränken: Was sind Bilder, wie können sie mathematisch beschrieben werden? Wie werden sie im Computer repräsentiert (Stichworte: Diskretisierung und Quantisierung)? Mit welchen einfachen mathematischen Methoden kann man Bilder untersuchen, analysieren und auf einfache Weise gezielt verändern?

Die Verarbeitung aller Bilder und die Erstellung sämtlicher Graphiken in diesem Beitrag ist mit Hilfe des Computeralgebrasystems Maple 15 geschehen, das mit seinem ImageTools Package eine einfache Möglichkeit bietet, verschiedene Bildfile-Formate, wie z. B. das .jpg-Format und das .tif-Format, als Files ein- und auszulesen und ins ascii-Format umzuwandeln. Es ist Zufall, dass die Wahl der Autoren auf Maple fiel.

1. Bilder als Funktionen

Wir betrachten ein so genanntes Grauwertbild, das als Funktion von zwei Veränderlichen betrachtet werden kann, d.h. als Abbildung f des Definitionsbereichs $\Omega = [0, a] \times [0, b]$in den Zielbereich $\mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

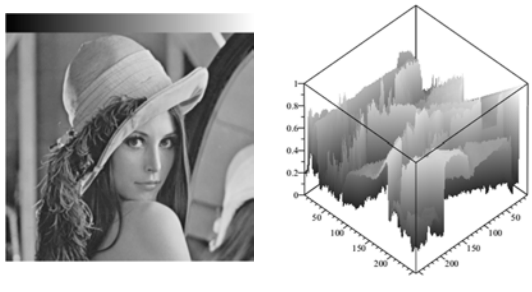


Abbildung 1: Lena, als Grauwertbild & 3D-Graph

Ihre Definitionsmenge, der rechteckige Bereich Ω heißt Bildbereich. Der Wertebereich dieser Funktion ist die Menge aller Grauwerte des Bildes. Dabei werden niedrige Grauwerte dunkel, hohe Grauwerte hell dargestellt (vgl. Abb.1).

2. Bilder als Matrizen

Man kann keine Funktion angeben, deren Graph das Bild von Lena darstellt. Das Bild wird nur in Form einer recht umfangreichen Wertetabelle im Computer abgespeichert. Das Erstellen dieser Wertetabelle nennt man Abtasten und meint die Diskretisierung des Bildbereiches. Die Bilddaten sind dann nur auf den Punkten *(i,j)* eines Rechteckgitters in Ω gegeben und wir haben auf diese Weise ein **digitales Bild** erzeugt,

$$\{f_{i,j} = f(i,j) \big| i = 1..N, j = 1..M\},$$

das auch als Matrix angesehen werden kann:

$$(f_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0{,}38 & 0{,}48 & 0{,}51 & 0{,}73 & 0{,}43 & 0{,}55 & 0{,}91 & 0{,}20 \\ 0{,}38 & 0{,}75 & 0{,}44 & 0{,}72 & 0{,}81 & 0{,}67 & 0{,}19 & 0{,}63 \\ 0{,}39 & 0{,}82 & 0{,}57 & 0{,}46 & 0{,}73 & 0{,}69 & 0{,}65 & 0{,}59 \\ 0{,}44 & 0{,}58 & 0{,}30 & 0{,}41 & 0{,}74 & 0{,}25 & 0{,}62 & 0{,}50 \\ 0{,}45 & 0{,}60 & 0{,}63 & 0{,}61 & 0{,}81 & 0{,}14 & 0{,}57 & 0{,}81 \\ 0{,}48 & 0{,}34 & 0{,}25 & 0{,}36 & 0{,}25 & 0{,}61 & 0{,}45 & 0{,}19 \\ 0{,}58 & 0{,}18 & 0{,}40 & 0{,}55 & 0{,}68 & 0{,}56 & 0{,}86 & 0{,}36 \\ 0{,}37 & 0{,}29 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}61 & 0{,}46 & 0{,}29 & 0{,}42 \end{pmatrix}$$

Die Gitterpunkte (man spricht auch von Gitterzellen) *(i,j)* heißen **Pixel**. Wie in der Bildverarbeitung üblich ist der Abstand der Gitterpunkte auf 1 normiert. Dies erlaubt eine vereinfachte Speicherung der Bilder auf dem Computer. Wenn man einen Ausschnitt eines digitalen Bildes stark vergrößert, tritt die Pixelstruktur deutlich hervor (vgl. Abb.2).

Abbildung 2

Tastet man die Funktion auf einem gröberen Gitter ab, so erhält man eine kleinere Matrix, die als ein „verpixeltes“ Bild interpretiert wird, bei dem viele Details verloren gehen (vgl. Abb.3).

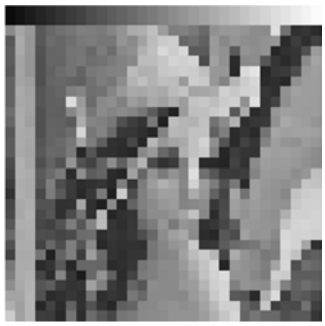


Abbildung 3

Mit **Quantisierung** meint man in der Bildverarbeitung die Diskretisierung des Wertebereichs Ω. Das führt im Extremfall zu binären Bildern, also Schwarz-Weiß-Bildern: $f(\Omega) = \{0,1\}$. 256 Graustufen sind Standard, oft findet man heute sogar einen quasikontinuierlichen Wertebereich bei Bildern: $f(\Omega) = [0,1]$.

An einem Bild mit z.B. 256 Graustufen $f: \Omega \longrightarrow \{c_0, .., c_{255}\} \subset [0,1]$ kann man gut den für Schüler oft schwierigen Begriff der **Niveaumenge** $\{(i,j) \subset \Omega | f(i,j) = c_k\} = f^{-1}(c_k)$ zum Grauwert c_k gut veranschaulichen.

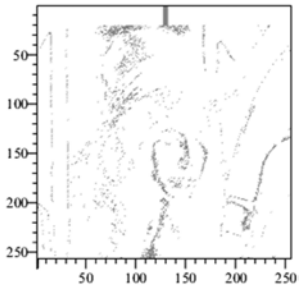


Abbildung 4:Niveaumenge

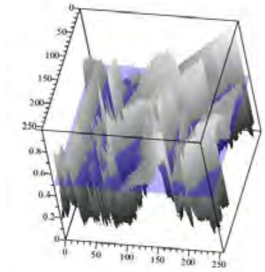


Abbildung 5: Niveaubild

Die Betrachtung der **Häufigkeitsverteilung der Grauwerte** bietet einen anwendungsnahen Einstieg ins Thema **Histogramme**. Die Zuordnung $H: c \longmapsto |f^{-1}(c)| = Anzahl(f^{-1}(c))$ liefert das Histogramm H zur Verteilung der Grauwerte und erlaubt Aussagen, wie oft ein Grauwert in einem diskreten Bild $f: \Omega \longrightarrow [0,1]$ vorkommt. Die räumliche Anordnung der Pixel in Ω ist ohne Bedeutung für das Histogramm. Die Chance, an einem Objekt, dem Bild, diese beiden Aspekte von „Verteilung" gegenüber stellen zu können, macht den Reiz dieser Betrachtungsweise aus.

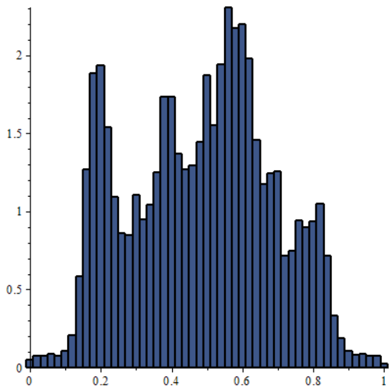


Abbildung 6: Lena, Histogramm

3. (Einfaches) Verarbeiten von Bildern

Eine einfache Art der Bildverarbeitung besteht in der Anwendung reellwertiger Funktionen $T: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ auf Bilder, um sie auf diese Art zu transformieren. Dies geschieht durch Verknüpfung von T mit der Funktion f, deren dreidimensionaler Graph G_f das Bild darstellt. Ist das Bild repräsentiert durch $f: \Omega \longrightarrow [0,1]$, so liefert die Verknüpfung $T \circ f$ von Transformation T und Bild f das **transformierte Bild**: $T \circ f: \Omega \longrightarrow [0,1]$.

Das erste Beispiel zeigt: Der Begriff des „Negativs" ist nicht ganz korrekt.

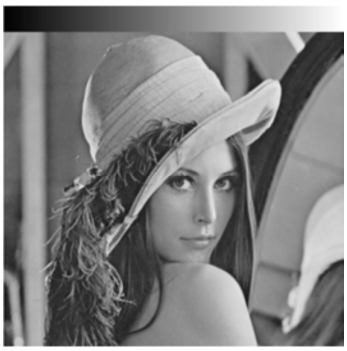


Abbildung 7: Lena

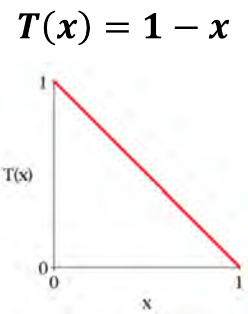


Abbildung 8: Transformation T

Abbildung 9: Lena, „negativ"

An den folgenden Beispielen wird „sichtbar“, wie sich Monotonie- und Stetigkeitseigenschaften von T im Ergebnisbild (v.a. am Balken an der Oberkante des Bildes) widerspiegeln:

$T(x) = x^2$ $\quad$ $T(x) = 1 - \sin(\pi x)$ $\quad$ $T(x) = \mathbf{1}_{[0{,}5;0{,}6]}(x)$

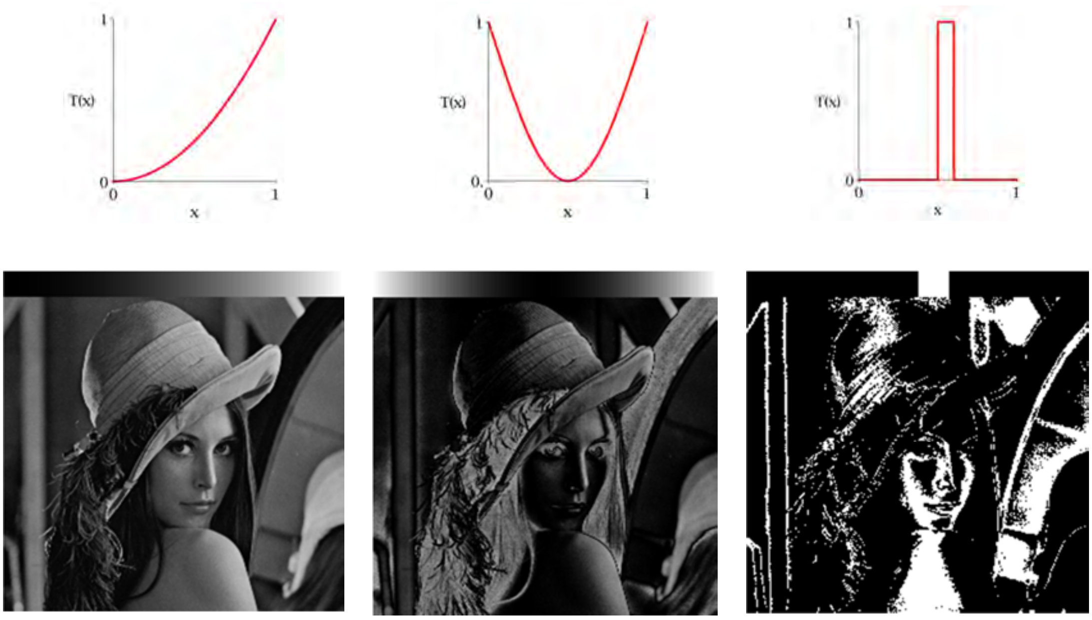


Abbildung 10: Beispiele von Transformationen

Man darf hoffen, dass die/der interessierte Schüler/in vielleicht von sich heraus versucht, mit verschiedenen, selbst gestalteten oder entwickelten, Transformationen T ansprechende Effekte zu erzielen.

Vielleicht gelingt es uns mit diesem Aufsatz wenigstens anzudeuten, welches Potenzial die mathematische Bildverarbeitung bietet, zahlreiche Zusammenhänge, Konzepte und Methoden der (Schul-)Mathematik vernetzt darzustellen und visuell erfahrbar zu machen.

Im nachfolgenden Literaturverzeichnis empfehlen wir zwei Bücher, die allgemein von Bildverarbeitung handeln und einen gut lesbaren Einstieg bieten.

Literatur

R.C. Gonzales und R.E. Woods (2008): Digital Image Processing.

M.Sonka C.Hlavac und R.Boyle (1999): Image Proc., Analysis and Machine Vision.

www.maplesoft.com: (zuletzt aufgerufen am 14.02.2013): MAPLE 15.

Norbert Christmann, Kaiserslautern

Mathematik und Musik: Arvo PÄRTS Komposition „Spiegel im Spiegel“

Der estnische Komponist A. PÄRT entwickelte mit seinem „Tintinnabuli (Glöckchen) - Stil" eine Kompositionsform, bei der mit stark reduzierten Grundelementen (Tonleiter, Dreiklang) nach mathematisch beschreibbaren Regeln die Werke entstehen. In diesem Beitrag wird diese Methode u. a. an der Komposition „Spiegel im Spiegel“ erläutert und deren Einbeziehung in den Mathematikunterricht (einschließlich Medienunterstützung) diskutiert.

1. Zur Person A. PÄRT

Der 1935 in Paide, Estland geborene Komponist A. PÄRT experimentierte nach dem Musikstudium in seiner Heimat mit der Zwölftontechnik und dem musikalischen Serialismus. Seine Werke wurden wegen der Modernität und der religiösen Inhalte von den sowjetischen Kulturfunktionären mit Unwillen betrachtet und teilweise offiziell missbilligt. Ab 1962 bis etwa 1968 versuchte er mit der Collage-Technik avantgardistische Elemente mit solchen früherer Epochen (u. a. mit Werken von J. S. BACH) zu verbinden. Die Methode war auf Dauer für ihn unbefriedigend, deshalb legte er von 1968 – 1976 eine schöpferische Pause ein (lediglich ein Werk entstand in dieser Zeit), bevor er mit der hier zu besprechenden neuen Methode an die Öffentlichkeit trat. Seit 1981 lebt der Komponist in Berlin, detaillierte Informationen über Leben und Werk findet man auf der Homepage des *International Arvo Pärt Centre* http://www.arvopart.ee/.

2. Merkmale des Tintinnabuli-Stils

Beim Tintinnabuli-Stil (*Tintinnabuli*: lat. *Glöckchen*) treten als tonale Grundelemente *Tonleitern* und *Dreiklänge* auf, die unterschiedlichen Stimmen (M(elodie)-Stimme: Tonleiterausschnitte; T(intinnabuli)-Stimmen: Töne des Dreiklangs) zugeordnet werden. In meist getragenem Tempo wird jedem einzelnen Ton Gewicht und Bedeutung verliehen. Die Kompositionen werden jeweils nach einem strengen Algorithmus erzeugt, dadurch wird die Methode auch für die Mathematik und somit vielleicht auch für den Mathematikunterricht interessant.

Beispiel: In „*Variationen zur Gesundung von Arinuschka*“ (1977) nutzt der Komponist in den Teilen 1 bis 3 die natürliche a-moll-Tonleiter als Skala. Von dieser wird eine Oktave (a’ bis a’’) aufwärts und abwärts durchlaufen, die Dauern sind jeweils halbe Noten. Den Skalentönen werden jeweils zwei Viertelnoten aus dem a-moll-Dreiklang vorgeschaltet, und zwar beim Aufwärtsgehen der nächste höhere und nächste tiefere, beim Abwärtsgehen wird diese Reihenfolge getauscht. Diesen Teil des Themas kann man auch als T-Stimme auffassen, das wird deutlich in der Variation 4, bei der diese Teile getrennt nach linker und rechter Hand notiert sind. Zusätzlich wurde dabei noch die Moll-Skala durch die Dur-Skala ersetzt. Die beschriebene Themenfindung lässt sich sehr übersichtlich in einem Koordinatensystem (bzw. im Pianorolleditor, vgl. z. B. CHRISTMANN (2011)) darstellen. Die Skalentöne erhalten die Werte 0, 1, …., 7, die Akkordtöne bekommen damit die Nummern 0, 2, 4, 7, hinzu kommen noch -2 und 9 als Akkordtonhöhen außerhalb des genutzten Skalenbereichs der M-Stimme. Alternativ könnte man z. B. auch die MIDI-Nummern der Tonhöhen zur numerischen Beschreibung nutzen. Im Bild 1 sind die zu den Akkordtönen gehörenden Parallelen zur x-Achse mit den Tonhöhen gekennzeichnet; zu einem Skalenton liefern die benachbarten Parallelen die Tonhöhen der T-Stimme. Im Bild 1 wurden in beide Stimmen Verbindungsstrecken eingetragen, dadurch sieht man die unterschiedlichen Symmetrieachsen der Stimmen.

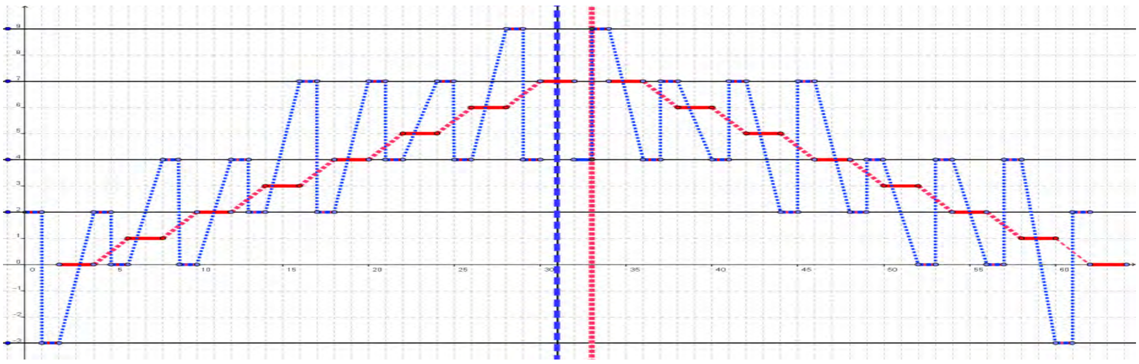


Bild 1: Darstellung der Themenfindung von …*Arinuschka*

Die Findung und Darstellung der Regeln für die Variationen 2 bis 6 kann im Unterricht als Übungsaufgabe gestellt werden. Dabei wird wohl zunächst die sprachliche Formulierung erfolgen, die mathematische Formalisierung kann unterschiedlich intensiv gestaltet werden.

3. Die Komposition Spiegel im Spiegel (1978)

Die nachfolgende Beschreibung dieses Werkes orientiert sich an der von D. STEINCKE (2007), S. 202 – 207. Die im 6/4-Takt notierte Komposition besteht aus einer die F-Dur-Skala aufbauenden M-Stimme (wird von einem Soloinstrument gespielt, es gibt dazu u. a. Ausgaben für Violine, Cello, Klarinette), einer T-Stimme in Form gebrochener Akkorde (basierend auf dem F-Dur-Quartsextakkord cfa) und einzelnen Einwürfen von Akkordtönen in unterschiedlicher Oktavlage.

Die M-Stimme beginnt nach einer dreitaktigen Einleitung in der T-Stimme mit dem Ton g (Block A1, ein Takt, alle Skalentöne erhalten einen Takt als

Dauer). Diesem folgen drei Takte mit dem Terzton a des F-Durakkordes als Trennpassage TP zum nachfolgenden b im Takt 7 (Block B1). Dieser Ton entsteht durch (skalengerechte) Spiegelung von g an a. Danach folgt wieder TP. Im anschließenden Block A2 wird dem g ein f vorgeschaltet. Nach TP werden diese beiden Töne an a gespiegelt, es entsteht der Block B2 mit c und b als Tönen. Nach TP wird im anschließenden Block A3 dem Krebs g, f von A2 ein e nachgeschoben, Spiegelung an a liefert nach TP den Block B3 mit den Tonhöhen b, c, d. Dieses Prinzip wird fortgesetzt, bis mit A8 (bzw. B8) die mit g (b) beginnende volle Oktave der F-Dur-Skala erfasst ist. Bild 2 zeigt links Entstehung von B6 aus A6, rechts die gesamte M-Stimme im Koordinatensystem, dabei wurde a die Koordinate 0 zugeordnet. Spiegelungen sind dabei mit Verschiebungen zu kombinieren, um das zeitliche Fortschreiten des Werkes zu erreichen.

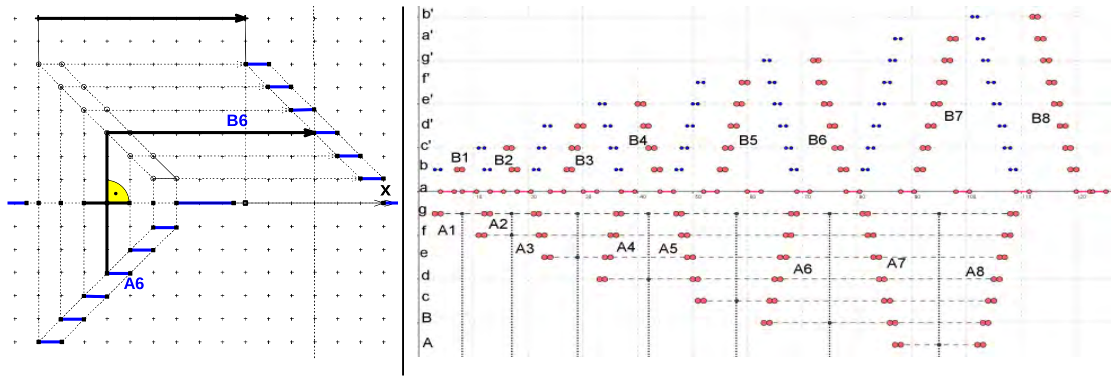


Bild 2: Entstehung der M-Stimme von *Spiegel im Spiegel*

Takte		Melodie 1		Melodie 2			Takte
4 - 7	A1	g	a	b	a	B1	8 - 11
12 - 16	A2	f g	a	c b	a	B2	17 - 21
22 - 27	A3	g f e	a	b c d	a	B3	28 - 33
34 - 40	A4	d e f g	a	e d c b	a	B4	41 - 47
48 - 55	A5	g f e d c	a	b c d e f	a	B5	56 - 63
64 - 72	A6	b c d e f g	a	g f e d c b	a	B6	73 - 81
82 - 91	A7	g f e d c b a	a	b c d e f g a	a	B7	92 - 101
102-112	A8	g a b c d e f g	a	b a g f e d c b	a	B8	113 - 123

Bild 3: Tonhöhen der M-Stimme von *Spiegel im Spiegel*

Den Gesamtverlauf der Tonhöhenklassen der M-Stimme zeigt Bild 3. Im Unterricht kann man zunächst mit einem qualitativen Diagramm arbeiten, dieses dann gemäß Bild 1 quantitativ zum Tonhöhen-Zeit-Diagramm verfeinern. Die senkrechten Spiegelachsen zeigen, dass beim Übergang von

An zu A(n+1) der um einen Ton ergänzte Krebs von An entsteht. Das Weglassen nichtbenutzter Töne ermöglicht einen Skalentausch durch Umdeutung der Zuordnung der Tonhöhen.

Jedem Skalenton wird für die gebrochenen Akkorde der T-Simme ein dreistimmiger Akkord zugeordnet. Dessen oberster Ton ist der um eine Oktave nach oben versetzte Skalenton, der unterste liegt eine Sexte darunter. Der mittlere Akkordton ist der nächste unterhalb des obersten Tons gelegene Ton des F-Dur-Akkordes. Zusätzlich werden in der Klavierbegleitung – Erkundung der genauen Regeln als Übungsaufgabe – nachschlagende Akkordtöne abwechselnd oben und unten hinzugefügt, und zwar als punktierte Halbe in zweiten Takthälften, weiter wird der mittlere Takt von TP durch eine Doppeloktave (tiefes f oder hohes c) ergänzt.

Die Korrektheit und Vollständigkeit der gefundenen Regeln kann einfach durch Erstellen einer Komposition nach diesen und anschließendem Vergleich mit dem Original überprüft werden. Modifikationen der Vorgaben (Skalentausch, Startwerte, Akkordzuordnung) ermöglichen das Finden neuer Werke, dabei ist es sinnvoll (insbesondere zum Hören), auch Musiksoftware einzusetzen.

Schlussbemerkung

Der Komponist J. B. SMITH stellt fest: „Es gibt auf der ganzen Welt kein Phänomen, bei dem Mathematik keine Rolle spielt, also ist auch die Musik nicht ohne Mathematik zu denken." Beim Tintinnabulli-Stil liefert die Mathematik technische Hilfen zum Erstellen (und Analysieren) der Werke. Aber selbst die hier ausgewählten, recht „einfach“ gestrickten Kompositionen entfalten beim Hörer komplexe Gefühle und Vorstellungen, die sicher nicht mit der benutzten Kompositionstechnik erklärt werden können. Die Grenzen der Bedeutung der Mathematik bei der künstlerischen Wirkung der Werke sollten also nicht vergessen werden.

Literatur

Christmann, N. (2011): Musikalische Koordinaten. In: Der Mathematikunterricht 1, S. 5 - 11

Pärt, A. (1977): Variationen zur Gesundung von Arinuschka für Klavier.

Pärt, A. (1978): Spiegel im Spiegel für Soloinstrument und Klavier. Beide Werke erschienen in Wien: Universal Edition

Restagno, R., Brauneiss, L., Kareda, S., Pärt, A. (2010): Arvo Pärt im Gespräch: Wien: Universal Edition

Steincke, D. (2007): Bildgestaltendes Verstehen von Musik: Entwurf eines Modells einer nonverbal-verbalen Zugangsweise zur Musik als Beitrag zur didaktischen Interpretation (Diss.). Würzburg: Königshausen & Neumann

Eva CLESS, Berlin

Wie erleben Kinder Geld? Datenerhebung und Forschungsansatz einer phänomenografischen Studie

Konsens in der Mathematik- und Sachunterrichtsdidaktik ist, dass Geld in den Lebenswelten von Kindern vorkommt. In diesem Beitrag wird ein Forschungsvorhaben vorgestellt, welches Erlebensweisen des Phänomens Geld von Zweit-, Dritt- und Viertklässlern erhebt, um anschließend auf der Grundlage empirischer Befunde Vorschläge für fächerübergreifende Thematisierungsmöglichkeiten zu entwickeln.

1. Theoretischer Hintergrund

Geld wird hier als Phänomen verstanden. Für die Analyse sind neben der wirtschaftswissenschaftlichen Perspektive ebenso soziologische und historische Zugänge relevant. Geld ist alles, was Geldfunktionen ausübt und damit ein Tausch- und Zahlungsmittel, Geld ist ein Wertaufbewahrungsmittel und Geld ist eine Recheneinheit. Der Wert des Geldes kommt über die Möglichkeit, etwas damit kaufen zu können (Kaufkraft) und den Vergleich unterschiedlicher Geldeinheiten (Währungen und Wechselkurs) zustande (vgl.Wildmann 2010). Dass Geld in der Lebenswelt von Kindern vorkommt, wird in Studien aus der Mathematik- und Sachunterrichtsdidaktik als Begründung herangezogen. Beispielhaft sei hier für die Sachunterrichtsdidaktik auf eine Untersuchung zur ökonomischen Bildung in der Grundschule verwiesen: „Die 6-bis12-jährigen Kinder in Deutschland konsumieren bereits in jungen Jahren eigenständig oder nehmen am Konsum teil. Sie bestimmen direkt oder indirekt über die volkswirtschaftlich sehr relevante Summe von mehreren Milliarden Euro pro Jahr.“ (Wulfmeyer / Hauenschild 2008) Bezogen auf die Mathematikdidaktik heißt es in einer Untersuchung zu Preisvorstellungen von Kindern: „Ein wichtiger Bereich ihres Lebens ist die `Geldwelt´ mit ihren vielfältigen Situationen, in denen sie es mit Geldbeträgen, Warenmengen und Preisen zu tun haben.“ (Möller 1997) Die Sachunterrichts- und Mathematikdidaktik scheinen sich einig zu sein: Kinder haben mit Geld zu tun.

2. Forschungsstand

Aus der Entwicklungspsychologie liegen Untersuchungen zur Entwicklung ökonomischer Begriffe, darunter unter anderen auch des Begriffs ‚Geld‘, vor (Claar 1990). Innerhalb der Mathematikdidaktik finden sich Studien zu Preisvorstellungen (Möller 1997, Franke / Kurz 2003), den Einkaufserfahrungen von Kindern (Franke / Kurz 2003) und dem Wissen von Kindern über die Größe Geld (Grassmann u.a. 2005, 2006, 2008). In der Sachunterrichtsdidaktik wurden im Rahmen Ökonomischer Bildung ökonomische Kompetenzen von Kindern untersucht (Wulfmeyer / Hauenschild 2008). Ergebnisse aus den Studien sind u.a., dass lebensweltliche Erfahrungen und Interessen von Kindern anschlussfähig an ökonomische Bildung sein können und dass innerhalb mathematikdidaktisch orientierter Arbeiten ökonomische Argumentationsstrukturen von Kindern deutlich werden. Obwohl beide Didaktiken die Erfahrungen von Kindern nutzen, um ihre Untersuchungen zu begründen, gibt es keine interdisziplinäre Forschung zwischen beiden Didaktiken. Eben diese Lücke soll mit dem laufenden Projekt geschlossen werden.

3. Fragestellung und Ziele

Folgende Fragestellungen sind leitend für das Vorhaben. Wie erleben Kinder das Phänomen Geld? Welche Konsequenzen lassen sich aus den Ergebnissen, d.h. den Erlebensweisen von GrundschülerInnen von Geld, für eine fächerübergreifende Thematisierung von Geld ableiten? Ziel ist die Beschreibung von Leitlinien für eine mathematik- und sachunterrichtsdidaktisch relevante Thematisierung von Geld im Unterricht der Grundschule.

4. Untersuchungsdesign

Es handelt sich um eine interdisziplinär angelegte, qualitativ empirische Forschung, deren Daten mittels halbstandardisierten Interviews erhoben werden. Da Erlebensweisen erhoben werden sollen, ist der forschungsmethodische Ansatz die Phänomenografie (Marton / Booth 1997, Murmann 2002). In der Datenanalyse werden die Daten zunächst offen kodiert und zu phänomenografischen Kategoriensätzen zusammengefasst. Diese werden genutzt, um auf dem Hintergrund fächerübergreifender Thematisierungsmöglichkeiten, didaktische Strukturierungen zu entwickeln.

5. Forschungsmethodischer Ansatz: Phänomenografie

Forschungsgegenstand der Phänomenografie (Marton / Booth 1997) ist die Variation im Erleben von Phänomenen. Phänomenografie ist in der Lernforschung angelegt und damit originär didaktische Forschung. Erkenntnistheoretische Grundlage ist die Phänomenologie nach Husserl. Erleben hat einen referentiellen und einen strukturellen Aspekt, welcher sich abermals in einen Außenhorizont und einen Innenhorizont aufteilen lässt. Daraus ergeben sich für phänomenografische Analysen folgende Fragen: Was wird erlebt? (referentieller Aspekt des Erlebens), Wie wird etwas erlebt? (struktureller Aspekt des Erlebens). Der strukturelle Aspekt des Erlebens wird in Innenhorizont und Außenhorizont ausdifferenziert – der Fokus der Aufmerksamkeit wird so unterschieden. Die didaktische Herausforderung ist dann, den Lernenden etwas fachlich zur Deutung des Gegenstandes relevantes bedeutsam werden zu lassen, was ihnen bis dahin nicht bedeutsam erschien (vgl. Murmann 2002).

6. Datenerhebung

Die untersuchte Gruppe besteht aus 7-9-jährigen GrundschülerInnen aus drei Berliner Bezirken mit unterschiedlichen Einkommensstrukturen. Insgesamt stehen 48 Interviews zur Analyse zur Verfügung. Es handelt sich um halbstandardisierte Interviews, die sowohl erzählgenerierende als auch geschlossene Fragen enthalten. Die interdisziplinäre Anlage wird bei der Datenerhebung dahingehend berücksichtigt, dass sich bei der Konzeption des Interviewleitfadens an den Bereichen (vgl. Gläser 2004) und Zielen ökonomischer Bildung (vgl. Wulfmeyer 2005) orientiert wird, die die Besonderheiten der Größe Geld (vgl. Franke / Ruwisch 2010) betreffen. Daraus ergibt sich ein vierteiliger Interviewaufbau:1. Teil: Erlebensgegenstand sind Frageimpulse zu unterschiedlichen Bereichen des Phänomens Geld; 2. Teil: Drei unterschiedliche Währungseinheiten mit gleichen Maßzahlen werden erlebbar gemacht; 3. Teil: Stimmigkeit von Preisen, die Waren zugeordnet sind, kann erlebt werden; 4. Teil: Erlebensgegenstand ist das nichtproportionale Verhältnis zwischen Preis einer Ware und Gewicht bzw. Anzahl einer Ware.

Zu einem phänomenografischen Interview wird es durch die Berücksichtigung unterschiedlicher Erlebensgegenstände und Fragen wie bspw.: Was meinst du mit...? Wie meinst du das? Was hast du dir überlegt? Wie bist du vorgegangen?

7. Datenanalyse

In der Datenanalyse werden die Daten zunächst offen kodiert. Diese Codes werden hinsichtlich der Erlebensweisen des Phänomens Geld zu Kategoriensätzen zusammengefasst und bezogen auf fachliche Klärungen hierarchisiert. Das bedeutet zum einen werden sie hinsichtlich Geld als Größe und Größenvorstellungen von Geld und zum anderen hinsichtlich des Geldwerts, der Geldfunktionen und des Geldverkehrs ausgewertet. Mit den entstandenen Kategoriensätzen können Verbindungen zwischen referentiellen und strukturellenAspekten des Erlebens gezeigt werden, die zeigen, wie beide Aspekte zusammenhängen. Verbindungen innerhalb des Kategoriensatzes können einen Hinweis darauf geben, wie sich Erlebensweisen verändern können. Verbindungen zwischen unterschiedlichen Kategoriensätzen können analysiert werden.

8. Ausblick

Zunächst einmal werden Erlebensweisen, die anschlussfähig an Geld als Größe und Größenvorstellungen sowie an ökonomisches Lernen sind, deutlich. Es gibt demnach Erlebensgegenstände, die Geld sowohl als ökonomischen Gegenstand als auch als Größe erlebbar machen. Zwei weitere Ergebnisse könnten im Eintrittsfalle fächerübergreifende Thematisierungen begründen: Zum einen, wenn aus der separaten Hierarchisierung nach der jeweiligen fachlichen Klärung ein identischer Kategoriensatz entsteht und zum anderen, wenn strukturelle Erlebensweisen eines hinsichtlich Geld als Größe hierarchisierten Kategoriensatzes, referentielle Erlebensweisen von Kategoriensätzen sind, die hinsichtlich ökonomischen Lernens hierarchisiert wurden.

Literatur

Claar, A. (1990): Die Entwicklung ökonomischer Begriffe im Jugendalter. Heidelberg: Springer.

Franke, M. / Kurz,A. (2003): Beim Einkaufen kenne ich mich aus - wirklich? In: Journal für Mathematik-Didaktik, 3, S. 190-210.

Franke, M. / Ruwisch, S. (2010): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Bielefeld: Spektrum.

Friebertshäuser, B. / Langer, A. (2003): Interviewformen und Interviewpraxis. In:B. Friebertshäuser u.a.(Hrsg.): Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft. Weinheim: Juventa, S.437-455.

Gläser, E. (2004): Modernisierte Arbeitsgesellschaft-didaktisch-methodische Überlegungen zum ökonomischen Lernen. In: D. Richter (Hrsg.): Gesellschaftliches und politisches Lernen im Sachunterricht. Bad Heilbrunn / Obb.: Klinkhardt, S. 173-188.

Grassmann, M. / Klunter, M. / Köhler, E. / Mirwald, E. / Raudies, M. / Thiel, O. (2008): Kinder wissen viel- Auch über die Größe Geld? Teil 3. Potsdam: Universitätsverlag Potsdam.

Marton, F. / Booth, S. (1997): Learning and awareness. Mahwah, N.J: LEA.

Möller, R. (1997): Zur Entwicklung von Preisvorstellungen bei Kindern. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 4, S.285-315.

Murmann, L. (2002): Physiklernen zu Licht, Schatten und Sehen – Eine phänomenografische Untersuchung in der Primarstufe. Berlin: Logos.

Peter-Koop, A. / Nührenbörger, M. (2007): Größen und Messen. In: G. Walther u.a. (Hrsg.): Bildungsstandards in der Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen, S.89-117.

Wildmann, L. (2010): Makroökonomie, Geld und Währung. München: Oldenbourg.

Wulfmeyer, M. (2005): Ökonomie mit Kindern – Ein Konzept zum handlungsorientierten Lernen in der Grundschule. In: Widerstreit Sachunterricht, 4, S.1-8.

Wulfmeyer, M. / Hauenschild, K. (2008): Ökonomische Bildung in der Grundschule – Wie Kinder handlungsorientiert Wirtschaft machen! Hannover: Pelikan.

Elmar COHORS-FRESENBORG, Osnabrück

Das Hüpfen auf der Zahlenlinie als Evidenzbasis für vertragsgemäßes Rechnen

Es wird über eine Weiterentwicklung eines Hüpfspiels berichtet, das an verschiedenen Stellen in der Mathematikdidaktik genannt wird, um Lernenden das Rechnen mit Ganzen Zahlen zu veranschaulichen. Wir dagegen haben dieses zu einer Mikrowelt für Lernende in Klasse 6 weiterentwickelt, deren Struktur die mathematische Theorie repräsentiert: Die Bewegungen sowie die Veränderung von Bewegungs- und Blickrichtung repräsentieren die Anwendung verschiedener Funktionen (unterschiedlicher Stellenzahl) in der additiven Abelschen Gruppe der Ganzen Zahlen.

Spätestens bei der Einführung des Begriffs der Ganzen Zahlen und dem Umgang mit ihnen stellt sich im Mathematikunterricht das Problem, mit den Lernenden den ontologischen Status mathematischer Objekte und den Beziehungen zwischen und den Umgang mit ihnen zu verhandeln sowie der Frage nachzugehen, was man sich unter der Wahrheitsfindung einer mathematischen Aussage vorstellen kann. Ein direkter Zugang zur axiomatischen Sichtweise der Mathematik - wie er in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts versucht wurde - hat sich nicht bewährt. Denn danach wurde versäumt, den Lernenden ein geeignetes Metaphernsystem zur Verfügung zu stellen, in dem sie sich diesen Zugang prinzipiell zurechtlegen könnten.

Bei dem von uns konzipierten Vorgehen (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2012) wird deshalb ein Schwerpunkt darauf gelegt, den Lernenden eine Metaphernwelt des regelgerechten Verhaltens in einer Mikrowelt bewusst zu machen: Die Bedeutung der Worte zur Bezeichnung der jeweiligen Gegenstände, der mit ihnen auszuführenden Tätigkeiten und der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen wird durch das Regelsystem der Mikrowelt festgelegt.

Ausgangspunkt unserer Einführung ist die Analyse des "vernünftigen" Verhaltens einer Bank beim Umgang mit Soll und Haben sowie mit Einzahlungen und Auszahlungen. Das bei Lernenden in Klasse 6 darüber vorhandene intuitive Wissen bildet die Evidenzbasis, auf Grund deren sie beurteilen sollen, ob sich gemachte Vorschläge für ein rigide zu handhabendes Vertragswerk mit einer "Mathebank" zum Umgang mit Soll und Haben bewähren. Dabei wird auch eine Vereinfachung des Vertragswerkes dadurch erreicht, dass Auszahlen als eine geeignete Kombination von Einzahlen und Gegenzahlbildung angesehen wird. Dieses wird der Prototyp von Definitionen. Dann wird ein solches Vertragswerk (für Abelsche Gruppen) als verabredet angesehen, und es werden Konsequenzen aus ihm gezogen, was nichts anderes ist als das Beweisen von Rechenregeln (Sätzen in der Theorie). Durch Abschneiden des Bankkontextes von diesem formal präzise notierten Vertragswerk entsteht das Vertragswerk zum Umgang mit Zahlen. Die ursprüngliche Evidenzbasis für die Sinnhaftigkeit des Vorgehens erhält den Status eines Modells (i. S. der mathematischen Logik) für dieses Vertragswerk.

Als zweites Modell wird das von uns weiter entwickelte Hüpfspiel eingesetzt. Dazu muss diese Modellwelt neben einem ausgezeichneten Gegenstand auch eine Interpretation der zweistelligen Rechenfunktion(svariable) sowie der einstelligen Inversenfunktion(svariable) bereitstellen: Die Objekte werden durch Positionen auf der Zahlenlinie repräsentiert; die zweistellige Rechenfunktion durch Hüpfen einer Spielfigur auf dieser; die einstellige Inversenfunktion durch die Festlegung der Hüpfrichtung. Darüber hinaus ist ein Nachweis zu führen, dass die durch eine Definition eingeführte zweite Rechenfunktion bei deren konsequenter Anwendung auch der intuitiv vorhandenen Vorstellung von der Umkehrung der ersten Rechenfunktion entspricht. Außerdem müssen die Bezeichnungen im Hüpfspiel so gewählt werden, dass alle in der mathematischen Termdarstellung denkbaren Kombinationen der Funktionen ohne "Nachbessern" oder nur fast perfektes Anwenden der Verabredungen funktionieren. Insbesondere sollte eine leicht vermittelbare Isomorphie zwischen der Mikrowelt und der zu erarbeitenden mathematischen Theorie herrschen, die sich auch in der Korrespondenz der zur Beschreibung notwendigen Bezeichnungssysteme niederschlägt.

Die bisher uns aus der Mathematikdidaktik bekannten Hüpfspiele genügen diesen Anforderunen nicht:

Im Schulbuch *mathe live* (Kliemann et al., 2009, S. 9) ist die Bezeichnung der Positionen auf der Hüpflinie nicht geeignet, denn beim Zusammenschalten von Vorzeichen und Rechenzeichen in algebraischen Ausdrücken hilft dieses Hüpfspiel den Lernenden gerade nicht weiter; die Inversenbildung wird nicht thematisiert; ausgeführt werden nur die beiden zweistelligen Rechenfunktionen; die Einbettung des "Vorzeichens +" in die Hüpfwelt funktioniert nicht so, wie aus mathematischer Sicht benötigt.

Im Schulbuch *Neue Wege Mathematik* (Lergenmüller & Schmidt, 2001, S. 131) sind die Bezeichnungen für die Positionen auf der Hüpflinie mit den gestellten mathematischen Anforderungen kompatibel (dagegen taucht im rechten Tafelbild plötzlich ein posites Vorzeichen auf!); auch gibt es für die ein- und zweistelligen Funktionen passende Interpretationen (als Anweisungen im Spiel), aber beim Hintereinanderschalten von zwei gleichen Rechenfunktionen ist nicht problematisiert, wie diese zweite ausgeführt werden soll: gar nicht (weil man schon passend steht) oder Drehung um 360°. Deshalb haben wir die Ausführung einer Hüpfbewegung immer mit der Drehung der Spielfigur in eine neutrale Position abgeschlossen.

Bei den von Barzel et al. (2007) gemachten Vorschlägen gibt es als neue Idee die Einführung von Würfeln, mit denen in einem Wettbewerb auszuführende Rechnungen erwürfelt werden, aber die Ausführung im Detail enthält aus mathematischer Sicht gravierende Mängel: Auch hier wird beim Hintereinanderschalten von zwei gleichen Rechenfunktionen nicht problematisiert, wie diese zweite ausgeführt werden soll; die Notation von Spielzügen entspricht in der Syntax nicht der der mathematischen Formelsprache; der Inversenbildung entspricht kein Spielzug; die Ausgestaltung des Würfelns eines Rechenzeichens unterstützt überhaupt nicht, dass diese Funktionen zweistellig sind.

Für die von uns konzipierte Mikrowelt *Hüpfen auf der Zahlenlinie* übernehmen wir von Barzel et al. (2007) die Idee eines Wettkampfes mit Erwürfeln von Rechentermen. Aber wir setzen drei Würfel ein, um in der Mikrowelt das Einsetzen der Funktionsterme zu repräsentieren: den Rechenzeichenwürfel mit zwei Leerstellen, den Bewegungsrichtungswürfel mit einer Leerstelle und den Zahlenwürfel. Wir führen im Folgenden den Umgang mit der von uns konzipierten Mikrowelt vor:

Wir nehmen an, dass die Spielfigur auf *(–3)* in einer neutralen Position steht. Nun wird mit den drei Würfeln eine auszuführende Würfelkonstellation erzeugt. Nehmen wir an, dass der Rechenzeichenwürfel so rollt, dass ein Minuszeichen oben liegt. Dann wird in seine linke Leerstelle - entsprechend der Position der Spielfigur - die Holzscheibe mit der Aufschrift *(–3)* gelegt. Nehmen wir an, dass nach dem anschließenden Würfeln mit dem Bewegungsrichtungswürfel dieser so liegt, dass dass die Aufschrift *(–   )* oben liegt; nehmen wir an, dass nach dem Würfeln mit dem Zahlenwürfel die Aufschrift *2* oben liegt. Dann wird zunächst der Zahlenwürfel passend in die Leerstelle des Bewegungswürfels gelegt und dann beide zusammen in die rechte Leerstelle des Rechenzeichenwürfels.

Jetzt wird diese Konstellation *((–3) – (–2))* in eine Abfolge von Bewegungen umgesetzt:

Drehe das Gesicht der Spielfigur, die auf der Position *(–3)* steht, aus der neutralen Position so, dass sie nach links schaut; bewege die Spielfigur rückwärts zu ihrer Blickrichtung, und zwar um 2 Positionen; die Spielfigur steht dann auf der Position *(–1)*; drehe das Gesicht der Spielfigur wieder in die neutrale Position.

Nach einiger Spielerfahrung kann man den Lernenden folgende Frage stellen: Gibt es zu der ausgeführten Würfelkonstellation eine andere, die bei gleicher Ausgangsposition dasselbe Ergebnis liefert?

Die Lernenden entdecken, dass der Bewegungsablauf "Spielfigur nach links schauen lassen und dann rückwärts gehen" wirkungsgleich ersetzt werden kann durch "Spielfigur nach rechts schauen lassen und dann vorwärts gehen". Sie entdecken, dass man für diese Einsicht weder die Information über die Startposition noch die des Zahlenwürfels benötigt.

Auf die Frage, wie man diese Einsicht mit Würfeln legen könnte, schlagen sie vor, die linke Leerstelle im Rechenzeichenwürfel und die Leerstelle im Bewegungsrichtungswürfel jeweils leer zu lassen und beide Würfelkonstellationen nebeneinander zu legen. Das folgende Foto symbolisiert deutlich die Darstellung unter Verwendung von Variablen.

Man kann mit den Lernenden diese Einsicht in zwei Richtungen ausdeuten: Auf der Ebene der *Wirkung von Bewegungen* haben wir einen Satz erarbeitet; auf der Ebene des *Vertragsgemäßen Rechnens* haben wir eingesehen, dass wir im Vertragswerk nicht die Wirkungsweise von *zwei* Rechenfunktionen verankern müssen, sondern dass wir durch eine Definition die zweite durch geeignetes Einsetzen der Inversenfunktion in die Rechenfunktion erzeugen können.

Literatur

Barzel, B., Eschweiler, M. & Malle, G. (2007): Mathe-Welt, Lernwerkstatt Negative Zahlen, mathematik lehren, Heft 142. Seelze: Friedrich.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2012): Vertragsgemäßes Rechnen, 2. überarbeitete Auflage. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kliemann, S. et al. (2009): mathe live: Mathematik für Sekundarstufe I, Klasse 6. Stuttgart: Klett.

Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hrsg.) (2001): Mathematik – Neue Wege 7, Arbeitsbuch für Gymnasien. Braunschweig: Westermann.

Jenny Christine CRAMER, Bremen

Sprachliche Hürden im deduktiven Schließen für Lernende mit Migrationshintergrund

In den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss der KMK (2003) wird gefordert, dass alle Schülerinnen und Schüler „mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise)“ können sollen. Deduktive Schlussweisen sind wesentlicher Bestandteil mathematischer Argumentationen, und das Erkennen von Beziehungen zwischen Aussagen ist charakteristisch für mathematisches Denken (Jahnke 2007). Im deduktiven Schließen werden Zusammenhänge deutlich und bestehendes Wissen wird mit neuen Erkenntnissen verknüpft. Diese Erfahrbarkeit mathematischer Strukturen birgt ein großes Lernpotential.

Knipping (2012) hat darauf hingewiesen, dass bislang nur unzureichend geprüft wurde, ob die stärkere Betonung des Argumentierens und Begründens in den Bildungsstandards allen Lernenden gleichermaßen zugute kommt. Studien zum Modellieren (Leufer und Sertl 2010) und Problemlösen (Lubienski 2000) haben gezeigt, dass in den untersuchten Bereichen insbesondere Kinder aus schwächeren sozialen Milieus Schwierigkeiten haben. In den Untersuchungen zeigten sich unter anderem Probleme beim Abstrahieren von einer konkreten Situation auf allgemeinere Zusammenhänge. Im Rahmen der PISA-Studien wurde die Bildungsbenachteiligung von Jugendlichen mit Migrationshintergrund in Deutschland herausgestellt (Prenzel et al. 2003). Gogolin (2009) weist in diesem Zusammenhang auf die geringere Vertrautheit dieser Jugendlichen mit dem im Schulkontext erforderlichen Sprachregister der Bildungssprache hin.

Deduktives Schließen ist eine Form mathematischen Argumentierens. Es verlangt, sich im mathematischen Wissen zu bewegen, Verbindungen zwischen Aussagen zu erkennen und Verknüpfungen zu schaffen. Dafür ist es nötig, sich vom Kontext der Situation zu lösen und größere Zusammenhänge zu betrachten. Darüber hinaus ist es erforderlich, von Beispielen ausgehend zu abstrahieren und Verallgemeinerungen zu erkennen. Beim Lösen offener Probleme baut das Auffinden von Argumenten auf einer Verallgemeinerung auf Grundlage einzelner Beispiele auf (Pedemonte 2008). Die Bestandteile der Argumentation, Datum, Schlussregel und Konklusion (vgl. Toulmin 1958), müssen präzise benannt werden, um deduktive Schlüsse intersubjektiv nachvollziehbar zu machen.

Im internationalen Diskurs hat Cummins die Begriffe „Cognitive Academic Language Proficiency“ (CALP) und „Basic Interpersonal Communicative Skills“ (BICS) für die verschiedenen Sprachregister, die im Zweitspracherwerb bedeutsam sind, etabliert (Cummins 2008). Diese Unterscheidung entspricht der Unterscheidung von Bildungssprache und Alltagssprache in Deutschland. Duarte (2011) hat die Anforderungen der beiden Sprachregister tabellarisch gegenübergestellt (ebd. S. 71, übersetzt und gekürzt):

CALP /Bildungssprache	**BICS/ Alltagssprache**
Orientiert an Schriftsprache	Orientiert an mündlicher Sprache
Abstrakt, symbolisch	Konkret, tatsachenverhaftet
Gelöst vom Kontext	Kontextgebunden
Verallgemeinernd	Spezifisch
Teilweise technisch, spezifisch	Unwissenschaftlich, allgemein
Sprachlich dicht	Sprachlich zerstreut
Präzise	Unpräzise
Unpersönlich (Pronomen)	Persönlich (Handelnde werden explizit genannt)
Hohes Maß an Zusammenhang	Teilweise unstrukturiert
Hohe Bedeutungsdichte	Niedrige Bedeutungsdichte

Die vorgenannten Charakteristika des deduktiven Schließens und mathematischen Argumentierens befinden sich alle in der linken Tabellenspalte. Die sprachlichen Hürden des deduktiven Schließens sind offensichtlich. Insbesondere die Notwendigkeit von Verallgemeinerungen hebt das mathematische Argumentieren von anderen Prozessen im Mathematikunterricht ab. Es ist zu erwarten, dass Fähigkeiten und Probleme von Schülerinnen und Schülern im Verallgemeinern starke Auswirkungen auf ihre Fähigkeiten im deduktiven Schließen haben.

Beschreibung meiner Forschungsarbeit

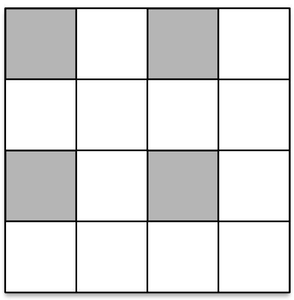
In einer qualitativen Studie untersuche ich als Lehrerin und Forscherin die sprachlichen Hürden im deduktiven Schließen für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund. Die Untersuchung findet im Rahmen eines Projekts der Mercator-Stiftung aus Essen statt, die Lernenden nichtdeutscher Erstsprache kostenlosen Förderunterricht ermöglicht. Ich betreue einmal wöchentlich zwei Kleingruppen; in der Datenanalyse beziehe ich mich auf eine Gruppe von 5 Schülerinnen aus Jahrgangsstufe 9 verschiedener Schulformen. Der Unterricht besteht aus 45 Minuten gemeinsamer Arbeit und 45 Minuten für individuelle Fragen. In der gemeinsamen Arbeit stelle ich Aufgaben, die Aspekte des deduktiven Schließens aufgreifen und zugleich für die aktuell in der Schule behandelten Themen relevant sind. Ich zeichne alle Stunden auf Video auf und führe zur Vor- und Nachbereitung des Unterrichts Gespräche mit einem Experten. Der Erhebungszeitraum umfasst das gesamte Schuljahr 2012/2013. Zu verschiedenen Zeitpunkten führe ich außerdem Interviews mit den Lernenden. Eine umfassende Analyse der Daten findet nach Ende der Datenerhebung statt.

Ich strebe in meiner Forschung insbesondere eine präzise Diagnose der Schwierigkeiten an, die meine Schülerinnen und Schüler im Argumentieren und deduktiven Schließen zeigen. Aus den gewonnenen Erkenntnissen möchte ich Ansatzpunkte für eine integrierte Förderung von Argumentieren und Bildungssprache gewinnen.

Erste Erkenntnisse aus der Gruppe der Neuntklässlerinnen

Verallgemeinerungen haben sich als besondere Hürden für das deduktive Schließen herausgestellt. Abbildung 1 zeigt eine Aufgabe, an der Schwierigkeiten beim Verallgemeinern besonders deutlich wurden. Das Ziel der Aufgabe lag darin, dass die Schülerinnen anhand mehrerer untersuchter Beispiele Gemeinsamkeiten herausstellen und aus diesen auf eine allgemeine Formel zur Berechnung schließen sollten.

Die Aufgabe ist in einer persönlichen und kontextgebundenen Sprache gestellt. Die Satzstruktur ist wenig komplex. Im Bereich der Sprachrezeption sind nur geringe Kenntnisse der Bildungssprache notwendig.



In ein Quadrat aus grauen Kästchen sollst du weiße Kästchen legen. Die grauen Kästchen dürfen sich danach nicht mehr berühren.

(Gegebenes Beispiel: 16 Quadrate)

Wie viele weiße Kästchen brauchst du, wenn das graue Quadrat aus 36, 100, 1024
Kästchen besteht?

Abbildung 1. Muster fortsetzen.

Die Schülerinnen versuchten in ihrer Bearbeitung der Aufgabe, durch Abzählen und Zeichnen zu einer Lösung zu gelangen. Um die für das 32x32-Quadrat möglich zu machen, klebten sie mehrere Blätter zusammen. Die bereits erarbeiteten Lösungen für die kleinen Quadrate wurden beim Suchen nach der Lösung für das große Quadrat nicht berücksichtigt. Es fand keine Verallgemeinerung statt.

In mehreren Aufgaben haben sich Verallgemeinern und Abstrahieren als besonders schwierige Tätigkeiten herausgestellt. Diese sind essentiell für das deduktive Schließen und stehen in enger Verbindung zum bildungssprachlichen Register.

Ausblick und geplantes weiteres Vorgehen

In der zweiten Hälfte der Datenerhebung werde ich das Verallgemeinern als notwendige Tätigkeit im deduktiven Schließen noch stärker in den Blick nehmen. Des Weiteren möchte ich verstärkt bildungssprachliche Elemente in den Unterricht integrieren, um das Potenzial einer synchronen Förderung sprachlicher und deduktiver Fähigkeiten zu erkunden. Das weitere Vorgehen und die Entwicklung neuer Aufgaben werden zudem gestützt durch eine Zwischenauswertung der Daten im März 2013.

Literatur

Cummins, J. (2008): BICS and CALP: Empirical and theoretical status of the distinction. In: B. Street & N.H. Hornberger (Hrsg.): Encyclopedia of Language and Education, 2nd Edition, Volume 2: Literacy. New York: Springer Science + Business Media LLC, 71-83.

Duarte, J. (2011): Bilingual language proficiency: A comparative study. Münster: Waxmann.

Gogolin, I. (2009): Zweisprachigkeit und die Entwicklung bildungssprachlicher Fähigkeiten. In: Gogolin, I. and Neumann, U. (eds). Streitfall Zweisprachigkeit – The Bilingualism Controversy. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, 263-281.

Jahnke, H.N. (2007): Proofs and hypotheses. Zentralblatt der Mathematik 39(1), 79-86.

Knipping, C. (2012): The social dimension of argumentation and proof in mathematics classrooms. Online: http://www.icme12.org/upload/submission/1935_F.pdf. Letzter Zugriff 30.05.2012.

Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Online: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse /2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf Letzter Zugriff 20.02.2013.

Leufer, N., Sertl, N. (2010): Kontextwechsel in realitätsbezogenen Mathematikaufgaben. In: Brake, A. & Bremer, H. (Hrsg.): Alltagswelt Schule. Die soziale Herstellung schulischer Wirklichkeiten. Weinheim/München: Juventa, 111-133.

Lubienski, S. T. (2000): Problem solving as a means toward mathematics for all: An Exploratory Look Through a Class Lens. In: Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 454-482.

Pedemonte, B. (2008): Argumentation and algebraic proof. In: ZDM Mathematics Education 40, 385-400.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rolff, H.-G., Rost, J. und Schiefele, U. (2004): Ergebnisse des zweiten Internationalen Vergleichs – Zusammenfassung. Online: http://pisa.ipn.uni-kiel.de/PISA2003_E_Zusammenfassung.pdf Letzter Zugriff 23.02.2013

Toulmin, S. (1958): The uses of argument. Cambridge: Cambridge University Press.

Jan-Hendrik DE WILJES, Tanja HAMANN, Hildesheim

Die Hildesheimer Mathe-Hütte – Ein Angebot zur Einführung in mathematisches Arbeiten im ersten Studienjahr

Ausgangssituation

Lehrkräfte sollen die Schülerschaft für ihr Fach begeistern können. Von den Absolventinnen und Absolventen des Faches Mathematik für das Grund-, Haupt- und Realschullehramt an der Universität Hildesheim erwarten wir daher, dass sie in der Lage sind, ihr Fach mit Überzeugung und in seiner gesamten Breite zu vermitteln. Notwendig sind hierfür natürlich solide mathematische Basiskenntnisse, das Wissen über die Methoden (speziell im Hinblick auf die später im Unterricht zu vermittelnden prozessbezogenen Kompetenzen (vgl. Niedersächsisches Kultusministerium, 2006a u. 2006b)) und ein positives, vielfältiges Bild des Faches sowie – auf der Basis der genannten Aspekte – Sicherheit in der Fachwahl. Unsere Beobachtungen zeigen jedoch, dass es vielen Studierenden zu Beginn ihres Studiums an allen diesen Dingen mangelt; verschiedene Untersuchungen belegen dies zusätzlich (vgl. Kreuzkam, 2011; Fischer & Biehler, 2011).

Das Projekt HiStEMa

Um dem zu begegnen, wurde in Hildesheim das Projekt HiStEMa (vgl. Hamann, Kreuzkam, Schmidt-Thieme & Sander, 2013) entwickelt, ein mehrstufiges Begleitprogramm während des ersten Studienjahres, in dem in einzelnen Modulen schulisches Basiswissen aufgefrischt, Methoden mathematischen Arbeitens vermittelt, darauf aufbauend ein vielfältiges Bild von Mathematik entwickelt und schließlich die Fachwahl überprüft werden soll. Die in der Mitte des zweiten Semesters stattfindende Hildesheimer Mathe-Hütte ist eines dieser Module.

Die Mathe-Hütte

In einer freiwilligen dreitägigen Exkursion arbeiten sich die Studierenden in Kleingruppen, in freier Zeiteinteilung auf der Basis von Fachliteratur in ein ihnen bis dahin unbekanntes mathematisches Thema ein (z. B. planare Graphen, Parkettierungen, Euklids Elemente). Am dritten Tag präsentieren die Teilnehmerinnen und Teilnehmer ihren Mitstudierenden ihre Ergebnisse im Rahmen einer Poster-Session.

Wichtige Ziele, die damit angestrebt werden und sich direkt aus den oben genannten Problemen ergeben, sind insbesondere das Kennenlernen und Vertiefen mathematischer Methoden und die Modifikation des Bildes von Mathematik. Die Studierenden sollen Probleme lösen, indem sie Literatur nutzen, heuristische Strategien anwenden (Beispiele machen, Darstellungen verändern, Analogien nutzen) und innerhalb der Gruppe kommunizieren. Sie sollen dadurch Mathematik als eine Wissenschaft offener Problemstellungen (nicht als „Wissenschaft der Aufgaben“) erfahren, als ein Fach, in dem geforscht statt nur gerechnet wird, und das nicht langweilig ist, sondern dessen intellektuelle Herausforderungen Spaß machen. Ein ergänzendes Rahmenprogramm soll zusätzlich das Gruppengefühl und die Identifikation mit der Fachgruppe stärken. Die Mathe-Hütte liefert damit einen wichtigen Beitrag zur Fachwahlüberprüfung. Ausgewählte Resultate aus einer Studie (vgl. im Folgenden Rasche, 2012), die den Einfluss der Mathe-Hütte auf diese Punkte untersucht hat, werden im Folgenden vorgestellt.

Evaluation Mathe-Hütte 2012

Die Evaluation, die im Mai 2012 durchgeführt wurde, erfolgte über zwei Fragebögen, von denen der erste von 94 Studierenden in den Zweitsemestervorlesungen zwei Wochen vor der Mathe-Hütte und der zweite direkt im Anschluss an die Exkursion von den Mitfahrerinnen und Mitfahrern (N=45) ausgefüllt wurde. 34 Studierende bearbeiteten beide Bögen.

Dank bisheriger Erfahrungen im Studium waren den Studierenden des zweiten Semesters bereits vor der Mathe-Hütte Unterschiede in den Arbeitsweisen in Schule und Universität bewusst, besonders was die Selbstständigkeit des Arbeitens betrifft. Dagegen stehen durch die schulische Sozialisation geprägte Beliefs, die das Fach Mathematik mit dem Bearbeiten „anwendungsbezogener Übungsaufgaben“ (28%) und „geringem Abstraktionsniveau“ (66%) identifizieren, und die offenbar so tief verwurzelt sind, dass lediglich eine einzige Person (N=94) das freiere universitäre Arbeiten bevorzugt. Die Mathe-Hütte liefert hier offenbar eine Verbesserung der Einstellung zu den wissenschaftlichen Methoden, wie bei der Freitextfrage nach ihrem Nutzen deutlich wird. Gruppenarbeit, der Einsatz von Strategien zum effektiven Lernen, die Übung im Erklären und Präsentieren, all dies wurde als Gewinn empfunden. Besonders positiv zu bewerten sind Freitextkommentare wie etwa: *„Mit Zeit, Literatur und Methodik kann man ohne weitere Hilfe Probleme lösen“*.

Trotz des Kennenlernens mathematischer Methoden und Inhalte in den Veranstaltungen des ersten und zweiten Semesters hatten viele Studierende ein noch sehr schulisch geprägtes Bild von Mathematik, denn bei der Frage nach einer Definition von Mathematik wurden in erster Linie Begriffe wie „Zahlen“ (46%) und „Rechnen“ (34%) genannt und nur von einem geringen Anteil der Studierenden die Charakteristika „logische Kombination“ (23%) und „Beweisen“ (17%) (N=94). Auch an diesem eher eingeschränkten Bild von Mathematik konnte der Besuch der Mathe-Hütte etwas ändern, wie die drei Teilnehmenden (N=45) zeigen, deren *„Spaß am Fach (wieder) geweckt“* wurde. Auch die Kommentare *„Ich habe gemerkt, dass Mathematik nicht immer nur mit Rechnen zu tun hat.“* und es sei positiv gewesen, *„[z]u lernen, dass Mathematik nicht immer Sinn und Zweck haben muss“*, untermauern die These, dass die Mathe-Hütte zumindest bei einem Teil der Studierenden das alte, verfestigte Bild des Faches aufbrechen kann.

Das zuvor angesprochene Problem der einseitigen Bevorzugung schulischen Arbeitens konnte aber auch die Mathe-Hütte nicht lösen, denn obwohl nach der Exkursion nur noch 68% statt 88% (N=34) der Meinung waren, universitäre Mathematik sei zu abstrakt für die Schule, hielten 70% der Teilnehmenden (N=45) vertiefte Mathematikkenntnisse für Lehramtsstudierende weiterhin für unnötig.

Die Gründe für die Wahl von Mathematik als Studienfach sind vielfältig, wobei hauptsächlich „Spaß am Fach“ (41%) und „Mathe ist spannend bzw. interessant“ (28%) genannt wurden, aber leider auch „weil ein zweites Fach gewählt werden musste“ (20%) (N=94). Ob die Fachwahl richtig war, konnte die Mathe-Hütte für viele Studierende sicherlich nicht endgültig klären, aber Ergebnisse zu der Frage, „ob man sich sicher sei, den Abschluss zu schaffen“, lassen vermuten, dass ein Überdenken der Entscheidung stattgefunden hat, denn auf einer Skala von 1 bis 5 (absolut sicher/unsicher) haben sich 35% (vor der Mathe-Hütte waren es 32%) für eine 2 und 18% (vor der Mathe-Hütte waren es 6%) für eine 5 entschieden (N=34).

Sowohl die Durchschnittsnote 2,4 als auch die Tatsache, dass 93% der Teilnehmenden die Exkursion anderen Studierenden empfehlen würden, sprechen für einen Erfolg der Mathe-Hütte und für die Integration solcher Programme in die Lehramtsausbildung im Allgemeinen. Ein über die bisher genannten Ziele hinausgehender, weiterer positiver Faktor liegt in einer Herabsetzung der Hemmschwelle von Studierenden gegenüber den Dozentinnen und Dozenten. Die Mathe-Hütte erlaubt den Teilnehmenden eine offenere Ansprache der Lehrenden als dies im universitären Alltag üblich ist. Auf der anderen Seite haben die Lehrenden Gelegenheit, die Studierenden kennenzulernen, was in der Regel bei Vorlesungen mit mehr als 150 Studierenden nur selten möglich ist. Damit wird ein guter Grundstein für das am Ende des zweiten Studiensemesters – als Baustein von HiStEMa vorgesehene – offene mathematische Gespräch zur Fachwahlüberprüfung gelegt.

Fazit

Die Evaluation hat gezeigt, dass die mit der Mathe-Hütte angestrebten Ziele teilweise erreicht werden können, da zum einen mathematische Methoden kennengelernt und auch wertgeschätzt werden und zum anderen ein Trend zu erkennen ist, dass Studierende mehr Sicherheit über ihre Entscheidung der Wahl des Faches Mathematik gewinnen. Allerdings kann auch die Mathe-Hütte das Bild von Mathematik nicht dahingehend ändern, dass die Mehrzahl der angehenden Lehrerinnen und Lehrer die in der Universität gelernten Inhalte und Methoden als für guten Unterricht wichtige und notwendige Kenntnisse würdigen. Die Mathe-Hütte leistet mithin nicht alles, was wir uns wünschen, aber doch einiges, insofern handelt es sich um ein Angebot, das den Aufwand lohnt. Klar ist indes auch, dass eine einzelne Intervention nicht ausreicht, um unsere Ziele zu erreichen, sondern dass eine Exkursion wie die Mathe-Hütte nur einen Baustein in einem größeren Konzept (wie bei uns HiStEMa) darstellen kann.

Dass die Exkursion dennoch gerade für Lehramtsstudierende geeignet ist, insbesondere um gewünschte und benötigte Kompetenzen zu erwerben, sei zum Abschluss durch den folgenden, erfreulichen Kommentar einer Teilnehmerin belegt: *„In der Präsentation musste man ständig reflektieren, ob die Zuhörer auch folgen können und wo mehr Hintergrundwissen gegeben werden muss. Diese Reflexionen waren besonders für das spätere Unterrichten nützlich."*

Literatur

Fischer, P. R. & Biehler, R. (2011): Über die Heterogenität unserer Studienanfänger: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung von Teilnehmern mathematischer Vorkurse. In: R. Haug & L. Holzapfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.2. bis 25.2.2011 in Freiburg (255-258). Münster: WTM.

Hamann, T., Kreuzkam, S., Schmidt-Thieme, B. & Sander, J. (2013): „Was ist Mathematik?" Einführung in mathematisches Arbeiten und Studienwahlüberprüfung für Lehramtsstudierende. In: Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (Hrsg.) (2013): Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven. Noch nicht erschienen.

Kreuzkam, S. (2011). Mathematische Grundkenntnisse von Studierenden. Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Hildesheim, Hildesheim.

Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2006a): Kerncurriculum für die Grundschule Schuljahrgänge 1-4: Mathematik Niedersachsen. Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium.

Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2006b): Kerncurriculum für die Realschule Schuljahrgänge 5-10: Mathematik Niedersachsen. Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium.

Rasche, A. (2012). Die Hildesheimer Mathe-Hütte als Angebot zur Überwindung der Diskrepanz zwischen Schule und Studium. Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Hildesheim, Hildesheim.

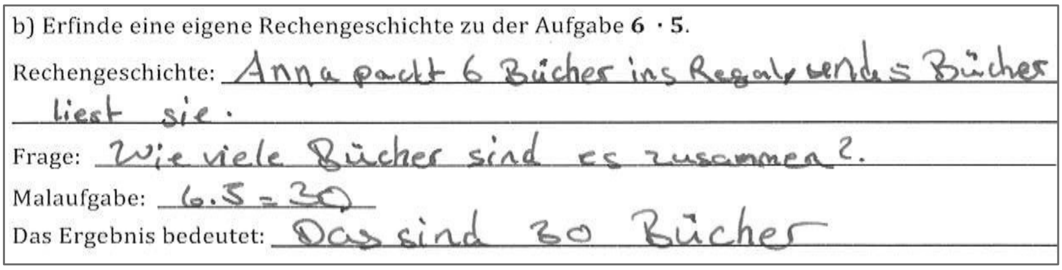
Theresa DEUTSCHER, Susanne PREDIGER, Christoph SELTER, Dortmund

Mathe sicher können – Sicherung mathematischer Basiskompetenzen in der unteren Sekundarstufe I

Die gezielte Förderung leistungsschwacher Schülerinnen und Schüler wurde insbesondere als Reaktion auf die Ergebnisse internationaler Schulleistungsvergleiche wie PISA oder TIMSS zu einem Schwerpunktfeld schulischer Aktivitäten erklärt (vgl. KMK 2010). Wie aber können entsprechende fachbezogene Konzepte und Maßnahmen aussehen? Eine Antwort gibt das durch die Deutsche Telekom Stiftung initiierte und finanzierte Verbundprojekt ‚Mathe sicher können', das an den Hochschulen in Dortmund, Freiburg, Berlin und Münster Unterrichtsstrukturen, -konzepte und -materialien für Lernende mit Schwierigkeiten in Mathematik erarbeitet. In diesem Beitrag wird das Dortmunder Teilprojekt vorgestellt, in dem Diagnose- und Fördermaterialien entwickelt werden.

1. Ausgangspunkte

Das Projekt nimmt Lernende in den Blick, denen elementare Verstehensgrundlagen (siehe das Schülerdokument aus dem 5. Schuljahr) und somit die Voraussetzungen für ein stabiles Weiterlernen fehlen (vgl. Prediger et al. 2013).


b) Erfinde eine eigene Rechengeschichte zu der Aufgabe **6 · 5**.

Rechengeschichte: Anna packt 6 Bücher ins Regal, und 5 Bücher liest sie.

Frage: Wie viele Bücher sind es zusammen?.

Malaufgabe: 6·5=30

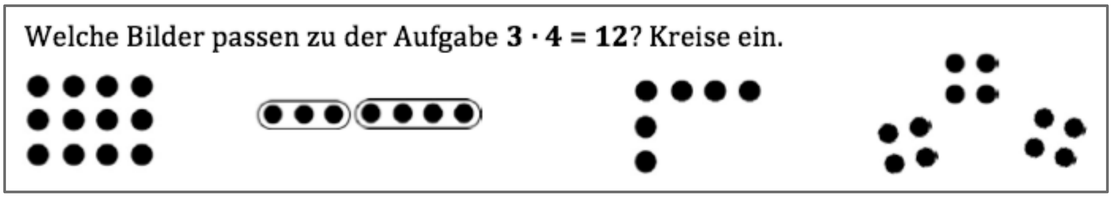
Das Ergebnis bedeutet: Das sind 30 Bücher

So stellen fehlende Kenntnisse im mathematischen Basisstoff der Grundschule zentrale Prädiktoren für Schwierigkeiten mit Mathematik in der Sekundarstufe 1 dar (Moser Opitz 2007; Humbach 2008). Dass diese Verstehensgrundlagen und notwendigen Automatisierungen durch zeitlich befristete Förderprogramme aufgearbeitet werden können, wurde empirisch nachgewiesen (Freesemann 2013). Das Projekt richtet sich dementsprechend auf den kumulativen Lernprozess der Kinder und Jugendlichen und konzentriert sich auf die Inhalte der Jahrgangsstufen 3 bis 7.

2. Didaktische Leitideen

Für den Erwerb mathematischer Basiskompetenzen sind drei didaktische Leitideen zur Initiierung fruchtbarer Lehr-/Lernprozesse von zentraler Bedeutung.

Diagnosegeleitetheit: Die Kenntnisse und Vorstellungen der Lernenden werden mittels Standortbestimmungen erhoben, um diese daran anschließend gezielt zu fördern (vgl. Prediger & Selter 2008). Die Diagnose- und Förderaufgaben werden auf der Basis des bestehenden theoretischen und empirischen Forschungsstands über die notwendigen Verstehensgrundlagen und die typischen Schwierigkeiten entwickelt.



Verstehensorientierung: Nachhaltiges und sinnstiftendes Lernen orientiert sich am Aufbau von Verständnis. Die Materialien des Projekts konzentrieren sich nicht nur auf motivierende außermathematische Kontexte, sondern insbesondere auch auf strukturelle, innermathematische Vorstellungen und Darstellungen (vgl. Fritz & Schmidt 2009).

Kommunikationsförderung: Sprachproduktionen und -rezeption der Lernenden – nicht nur für mehrsprachige Schülerinnen und Schüler – werden gezielt aktiviert und gefördert, so dass Sprache zum Medium mathematischen Denkens und Handelns wird (vgl. Nührenbörger & Steinbring 2008).

3. Design der Entwicklungsforschung

Die Entwicklung der Diagnose- und Fördermaterialien erfolgt im methodologischen Rahmen der lernprozessfokussierenden fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Gravemeijer & Cobb 2006). Die konsequente Verzahnung von Forschung und Entwicklung schafft die Grundlage dafür, dass auf der einen Seite fachdidaktisch fundierte, in der Praxis konkret einsetzbare Produkte entstehen und dass auf der anderen Seite grundlegende empirische Einsichten in die initiierten Lehr-/Lernprozesse und ihre typischen Verläufe, Hürden, Bedingungen und Wirkungsweisen erworben werden (Beispiel bei Schink 2013). In iterativen Zyklen des Designs von Diagnose- und Fördermaterialien, der Erhebung und Auswertung von Design-Experimenten sowie Entwicklung von lokalen Theorien werden die verschiedenen Arbeitsbereiche des Projekts konsequent aufeinander bezogen.

4. Entwicklungsprodukte

Die entwickelten Materialien werden in zwei Diagnose- und Förderboxen gegliedert. Jedem Baustein sind zudem Kompetenzformulierungen in der ‚Ich-kann'-Form zugeordnet, welche die kleinsten Struktureinheiten des Materials bilden.

Diagnose- und Förderbox 1 ‚Natürliche Zahlen':

Schwerpunkt	Baustein
Zahlverständnis	Stellenwerte verstehen Zahlen ordnen und vergleichen
Operationsverständnis	Addition und Subtraktion verstehen Multiplikation und Division verstehen
Zahlenrechnen	Addieren und subtrahieren Multiplizieren und dividieren
Ziffernrechnen	Schriftlich addieren und subtrahieren Schriftlich multiplizieren

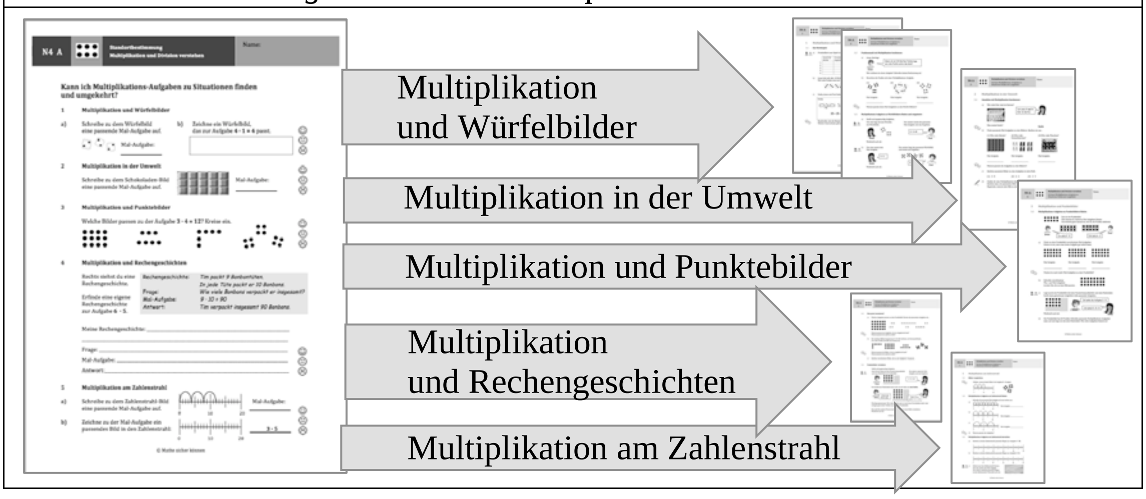
Diagnose- und Förderbox 2 ‚Brüche, Prozente und Dezimalzahlen':

Schwerpunkt	Baustein
Bruchverständnis	Brüche und Prozente verstehen Gleichwertigkeit verstehen Brüche und Prozente ordnen
Mit Brüchen rechnen	Brüche addieren
Dezimalzahlverständnis	Stellenwerte und Dezimalzahlen verstehen Dezimalzahlen ordnen und vergleichen
Mit Dezimalzahlen rechnen	Addieren und subtrahieren Multiplizieren und dividieren
Dezimalzahlen und Brüche	Zwischen Dezimalzahlen und Brüchen übersetzen

Für jede Kompetenz wird Material entwickelt, das direkt im Unterricht für die Diagnose (mit der gesamten Klasse) und die Förderung (Kleingruppen oder gesamte Klasse) einsetzbar ist. Jede Kompetenz besteht aus einer einseitigen schriftlichen Standortbestimmung. Jeder Diagnoseaufgabe ist eine passende Fördereinheit zugeordnet.

Ich kann Multiplikations-Aufgaben zu Situationen finden und umgekehrt.

Standortbestimmung *Basiskompetenz* *Fördereinheit*



Didaktische Hintergründe für Lehrkräfte mit Auswertungshinweisen für die Standortbestimmung und Umsetzungshinweisen für die Fördermaterialien werden insbesondere für fachfremd unterrichtende Lehrkräfte bereitgestellt.

5. Professionalisierung von Lehrkräften und Unterrichtsentwicklung

Die Implementation der Diagnose- und Fördermaterialien in mehreren Bundesländern wird in der zweiten Projektphase (2014 bis 2017) unterstützt durch Maßnahmen zur Professionalisierung der Lehrkräfte und Begleitung der kooperativen Unterrichtsentwicklung in den Projektschulen.

Aktuelle Informationen zum Projekt: www.mathe-sicher-koennen.de

Dank. Im Dortmunder Teilprojekt arbeiten neben den Autoren auch Kathrin Akinwunmi, Corinna Mosandl, Andrea Schink, Lara Sprenger, Stephan Hußmann und Marcus Nührenbörger, denen wir herzlich für die konstruktive Zusammenarbeit danken.

Literatur

Freesemann, O. (2013): Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie zur Förderung von Schülerinnen und Schülern mit schwachen Mathematikleistungen an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen mit dem Förderschwerpunkt Lernen. Dissertation, TU Dortmund.

Fritz, A. & Schmidt, S. (2009): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim: Beltz.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006): Design research from the learning design perspective. In J. Van Den Akker, K. Gravemeijer, S. Mckenney & N. Nieveen (Hrsg.): Educational Design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products. London: Routledge, 17-51.

Humbach, M. (2008): Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Berlin: Dr. Köster.

KMK (2010): Förderstrategie für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.03.2010.

Moser Opitz, E. (2007): Rechenschwäche / Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.

Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2008): Students` mathematical interactions and teachers` reflections on their own interventions. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Hrsg.): Proceedings of the Vth Congress of the European Society for Research in Math Education (CERME 5, 2007). Larnaca: University of Cyprus, 1250-1269.

Prediger, S., Freesemann, O., Moser-Opitz, E. & Hußmann, S. (2013): Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristige Reparatur – Förderung bei mathematischen Lernschwierigkeiten in Klasse 5. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 55 (51).

Prediger, S. & Selter, Ch. (2008): Diagnose als Grundlage für individuelle Förderung im Unterricht. In: Schule NRW, 60 (3), 113-116.

Schink, A. (2013): Strukturelle Zusammenhänge bei Brüchen herstellen – Diagnose und Förderung für Lernende mit Schwierigkeiten. Im gleichen Band.

Hans M. DIETZ, Paderborn

Mathematik für Nichtmathematiker – diagrammatische Aspekte

1. Einführung

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der Möglichkeit, Studierenden eine methodische Hilfestellung bei der „Übersetzung“ von Formeln in Grafiken und umgekehrt zu geben. Ein besonders hoher Bedarf an solchen Hilfestellungen besteht in der Regel dort, wo Studierende auf einen für sie überraschend hohen Mathematikanteil im Studium treffen. Das gilt z.B. bei Wirtschaftswissenschaftlern, für die der Autor seit einigen Jahren mathematische Grundkurse liest. Die Beschäftigung mit deren typischen Studienschwierigkeiten führte zur Entwicklung eines Lehrkonzeptes, welches studien- und arbeitsmethodische Instruktionen gezielt in die reguläre Lehre integriert, vgl. Dietz (2013). Von zentraler Bedeutung dafür ist eine Prozedur zum verstehenden Lesen mathematikhaltiger Texte, die beim „Buchstabieren“ beginnt und bis hin zu einem validen mentalen Konzept des jeweiligen mathematischen Objektes führt. Als materielles Abbild zentraler Elemente dieses Konzeptes wurde das Instrument der „Konzeptbasis“ entwickelt, welches sich in der Praxis bereits als äußerst hilfreich erwiesen hat; mehr darüber siehe Dietz (2012). Aufgabe der Studierenden beim Anlegen einer solchen Konzeptbasis ist es u.a., ausgehend von textlichen Repräsentationen mathematischer Objekte oder Sachverhalte visuelle Darstellungen dafür zu entwickeln. Auch der umgekehrte Weg ist für die Fähigkeit zum mathematischen Arbeiten von grundsätzlicher Bedeutung.

2. Übersetzung von Text in Graphik und vice versa: Probleme

Sowohl Formeln als auch Graphiken sind wesentliche Bestandteile des *concept image* im Sinne von Tall & Vinner (1981). Wir verstehen sie als Elemente zweier unterschiedlicher Sprachen zur Beschreibung derselben Objekte bzw. Sachverhalte. Damit stellt sich die Frage nach der wechselseitigen Übersetzbarkeit. Zugleich sind sie bei entsprechendem Gebrauch als *Diagramme* im Sinne von Peirce zu verstehen, vgl. z.B. Dörfler (2010). Auch deren wechselseitige Transformationen können jeweils als Übersetzungsprozess gedeutet werden, der Parallelitäten zu einem sprachlichen Lese- bzw. Übersetzungsprozess aufweist, wegen der erheblich höheren Komplexität und Kontextgebundenheit der Bildinformationen jedoch wesentlich schwieriger zu formalisieren und zu prozeduralisieren ist.

Die semantisch korrekte Übersetzung eines in einer natürlichen oder künstlichen Sprache formulierten Ausgangstextes in einen in einer anderen Sprache formulierten *Text* ist bekanntlich nicht allein mit Hilfe eines Wörterbuchs bzw. *Lexikons* zu bewerkstelligen; sie gelingt vielmehr erst mit Hilfe der *Syntax* beider Sprachen und unter sorgfältiger Berücksichtigung des *Kontextes* sowie *semantischer Regeln*. Will man nun ein textlich definiertes mathematisches Konzept möglichst gut durch eine *Graphik* visualisieren – im Idealfall so gut, dass sich der Text aus der Graphik rekonstruieren lässt –, wirft das die Frage auf, welche Konstituenten des Textes in welche der Graphik zu übersetzen sind. Anders gefragt: Welche Objekt- bzw. Beziehungsentitäten einer Graphik entsprechen den lexikalischen Einheiten eines Textes, seiner Syntax, seines Kontextes und seiner Semantik? Nach welchen Regeln sind Erstere in Letztere zu überführen?

So komplex diese Fragestellung ist, wird sie im Kontext der Mathematikdidaktik noch um eine zusätzliche Facette angereichert: Sowohl die Entitäten als auch deren Transformationen sollen auf eine möglichst einfache Weise beschrieben werden, die dem Wunsch vieler Studierender nach handlungsleitenden Prozeduren entgegenkommt.

3. Ein Übersetzungsbeispiel

Die letzte Bemerkung rechtfertigt es, sich der Lösung des Problems von einem Beispiel ausgehend zu nähern. Dazu betrachten wir das Konzept einer streng monoton wachsenden Funktion, wie es durch folgenden dreizeiligen mathematischen Text gegeben ist:

Definition: *Eine Funktion $f\colon D \rightarrow R$ mit $D \subseteq R$ heißt* streng monoton wachsend, *wenn gilt*

$$\forall\ x,y \in D:\ \ x < y\ \rightarrow\ f(x) < f(y)\,. \qquad (*)$$

Als Ausgangspunkt einer Visualisierung empfiehlt es sich, zunächst den Text als solchen genauer zu analysieren; insbesondere ist Klarheit über den Kontext, in dem diese Definition steht, erforderlich. Wir setzen voraus, dass alle Begriffe und Konzepte, auf die sich die ersten beiden Zeilen dieser Definition beziehen, für den Leser gut bekannt und verstanden (!) sind – z.B. aus dem bisher in einer Vorlesung schon Behandelten. Dann assoziiert der Leser mit diesen Begriffen und Konzepten bereits visuelle Grundbausteine wie z.B. ein Koordinatensystem und – repräsentativ – einen Definitionsbereich *D*, auf die wir uns weiterhin beziehen.

Das eigentlich Neue wird durch die Definitionsklausel (*) gegeben. Sie ist als Kette aus 14 „Atomen“ zu interpretieren, wenn *„f(x)“*, *„f(y)“* und alle anderen Zeichen jeweils einzeln als ein Atom gedeutet werden. Offensichtlich gibt es unterschiedliche Kategorien von Atomen:

(1) solche, denen *„piktorielle Entitäten“* in einer Graphik entsprechen: dies sind *„x“, „y“, „f(x)“, „f(y)“* als an die Koordinatenachsen schreibbare Zeichen (im Sinne von Referenzen auf Punkte der Achsen) sowie *„D“*, welches meist als Intervall [*a*, *b*] der Abszissenachse dargestellt wird;

(2) solche, die visualisierbare *Relationen* dieser Objekte definieren: dies sind die Zeichen *„∈“ und „ <“ (zweifach);*

(3) solche, die kein visuelles Abbild benötigen *(Komma, Doppelpunkt);*

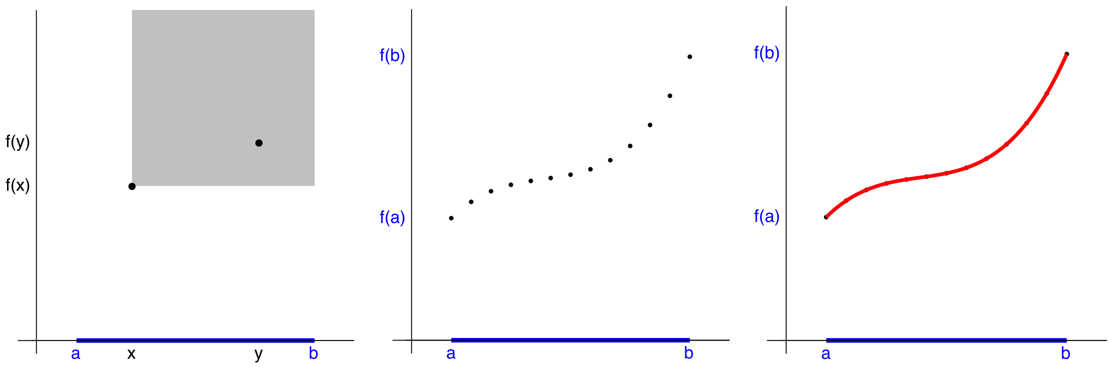
(4) solche, die bei der Visualisierung berücksichtigt werden müssen, jedoch *„nicht unmittelbar innerhalb (nur) einer Skizze visualisierbar“* sind; dies sind der Quantor „∀“ *sowie der Implikationspfeil „→“.*

Weil Letzterer eine logische Beziehung zwischen den Relationsaussagen „x < y“ und „f(x) < f(y)“ beschreibt, wird er zumindest implizit ebenfalls der Kategorie (2) zurechenbar. Hinsichtlich dieser vier Kategorien sind nun zwei Thesen formulierbar:

These 1: *Die unter (1) genannten Entitäten können unter Beachtung der Relationen aus (2) innerhalb* einer *Grafik entlang einer Prozedur visualisiert werden, die für Studierende gut nachvollziehbar ist.*

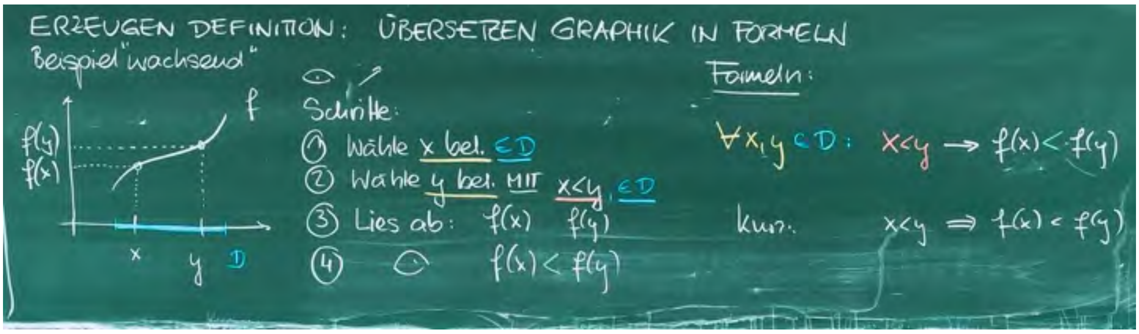
These 2: *Struktur- und logikbestimmende Entitäten der Kategorie (4) dagegen werden ggf. erst durch* Familien *von Grafiken repräsentierbar.*

Wenn hier auch nicht auf weitere Einzelheiten des Vortrages eingegangen werden kann, sei doch auf das typische Ergebnis der Prozedur zu These 1 verwiesen – siehe die nachfolgende Abbildung ganz links:



Hiervon ausgehend ist nun noch der Quantor „∀“ sichtbar zu machen. Dieser verweist darauf, dass die Punkte *x* und *y* *beliebig* aus *D* wählbar waren. Damit muss die qualitative Situation der Graphik links erhalten bleiben, wenn *x* und *y* lagerichtig variiert bzw. insbesondere weitere Punkte eingefügt werden. Dies führt über eine zumindest gedankliche Sequenz von Graphiken wie in der Mitte zum „graphischen Limes“ als Ziel (rechts).

Auch die umgekehrte Vorgehensweise – Übersetzung von Graphik in Text – wurde im Vortrag thematisiert. Hier ein Beispiel aus der Praxis:



4. Fazit

Für eine didaktisch-prozedurbasierte Übersetzung von Text in Graphik lassen sich Paradigmen angeben, beruhend auf Übersetzungsanweisungen für piktorielle Entitäten, Relationen sowie unsichtbare Zeichen. Dafür kann die Erzeugung von Diagrammfamilien statt nur einzelner Diagramme erforderlich sein. Die Übersetzung von Graphik in Text ist ebenfalls paradigmatisch prozeduralisierbar, erfordert jedoch mitunter zunächst Diagrammtransformationen auf der Konzeptebene. Vieles spricht dafür, dass durch spielerisches Experimentieren und Beobachten an verschiedenen diagrammatischen Stadien dieser Übersetzungen weitergehende mathematische Erkenntnisse unterstützt werden.

Literatur

Arcavi, A. (2003): The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 52, 215-241.

Dietz, H.M. (2013): CAT – ein Modell für lehrintegrierte methodische Unterstützung von Studienanfängern. Vortrag auf der khdm-Arbeitstagung 2013 in Paderborn, 23.02.2013. (Veröffentlichung im Tagungsband geplant.)

Dietz, H.M. (2012): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Das ECOMath-Handbuch. Heidelberg u.a.: Springer Gabler.

Dörfler, W. (2010): Mathematische Objekte als Indizes in Diagrammen. Funktionen in der Analysis. In: Kadunz, G. (Hrsg.): Sprache und Zeichen. Berlin: Franzbecker

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. In: Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.

Christian DOHRMANN, Halle, Ana KUZLE, Paderborn

Past-Present-Future: Winkel anschaulich unterrichten!

Motivation

Der Winkelbegriff und das Messen von Winkeln sind von zentraler Bedeutung für die ebene Geometrie und Raumgeometrie. Im Alltag begegnet man vielfältigen Winkelsituationen, wie z.B. beim Autofahren oder in Orientierungssituationen. Darüber hinaus ist die Winkelmessung in vielen Berufszweigen von größter Bedeutung, wie z.B. bei Architekten, (Bau-) Ingenieuren, Schreinern oder Piloten (Berry III & Wiggins, 2001). Der Winkelbegriff ist aufgrund vielfältiger Aspekte und Definitionen ein komplexer Gegenstand des Geometrieunterrichts.

Im Mathematikunterricht sind Sätze über Gleichheit, Summen und Differenzen von Winkeln in der gesamten Geometrie relevant. SchülerInnen zeigen Schwierigkeiten bei der operativen und konzeptuellen Winkelbegriffsentwicklung (z.B. Krainer, 1989; Mitchelmore & White, 2000). Im Beitrag werden Schulbuchanalysen mit typischen Fehlermustern und Fehlkonzepten kontrastiert und Schlussfolgerungen für eine anschauliche Begriffsbildung diskutiert.

Winkel - ein aspektreicher Begriff

Definitionen dienen in der Geometrie als Grundlage, geometrische Begriffe eindeutig voneinander abzugrenzen. Das Bedürfnis eindeutiger Begriffsdefinitionen ist seit der philosophischen Auseinandersetzung mit der Mathematik als Strukturgebilde der Welt erwachsen und bis heute ein zentraler Bestandteil der Schulmathematik. In Schulbüchern finden sich überwiegend Definitionen wieder, die den Winkel als sich schneidendes Geraden- bzw. Halbgeradenpaar aufgreifen. Nur selten wird der Winkel als Punktmenge, festgelegt durch zwei Halbgeraden, definiert.

Darüber hinaus fällt das inhomogene Aufgreifen der vielfältigen Winkelaspekte auf. Während einige Schulbücher ausschließlich den rein statischen Winkelaspekt (Winkel als Figur bzw. Beziehungssystem) betonen, wird der dynamische Aspekt (Winkel als Drehung) seltener integriert. Woher kommen diese unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen in Schulbüchern?

Die Notwendigkeit von Begriffsdefinitionen für die Entwicklung der theoretischen Fundierung der Geometrie wird historisch an zwei Zugängen skizziert, zum einen abbildungsgeometrisch in der Tradition der Vertreter Felix Klein und Gustave Choquet, zum anderen kongruenzgeometrisch nach Euklid und David Hilbert.

Klein entwickelt in seinen *„Grundlagen der Geometrie"* ein Axiomensystem, welches gänzlich ohne die Verwendung des Winkelbegriffs auskommt. Er führt den Winkel als Maß einer Drehbewegung ein, ohne ihn definitorisch festzulegen. Choquet begründet die affine Struktur der Ebene in seinem Werk „*Neue Elementargeometrie*" ebenfalls ohne auf den Winkelbegriff zurückzugreifen. Winkel werden in seinen theoretischen Betrachtungen als Drehungen interpretiert. Sie gewährleisten so „die wesentliche Eigenschaft, Teilmengen der Ebene mit Hilfe bestimmter Operationen an anderer Stelle wieder zu fixieren" (Krainer, 1989). Dem Winkel und der Drehung liegt hier die gemeinsame Idee der „formalen Beziehung zwischen zwei Richtungen" (Krainer, 1989) zugrunde. Beim kongruenzgeometrischen Zugang nach Euklid und Hilbert treten Winkel als formale Notwendigkeit auf, um Beziehungen (Kongruenz) zwischen geometrischen Objekten innerhalb eines Axiomensystems zu beschreiben.

In beiden Zugängen zur Geometrie werden unterschiedliche Winkelaspekte betont: Winkel als Drehung (Choquet), Winkel als Maß einer Drehbewegung (Klein), Winkel als Neigung (Euklid) oder Winkel als Theorieelement zur Beschreibung von Beziehungen (Hilbert). Neben den Winkelaspekten, die bei Krainer auch als Winkelvorstellungen ausgearbeitet werden, existieren unterschiedliche Ansätze von Winkeldefinitionen. Einerseits als sich schneidendes Paar von Geraden/Strahlen/Halbgeraden (Figur), andererseits als Punktemenge beim Überstreichen der Ebene (Drehung).

Ergänzt man dies um die Winkelvorstellungen nach Krainer, dann zeichnet sich ein Bild eines multidimensionalen Begriffes ab, der je nach Bedürfnis und geometrischem Kontext vielfältige Zugänge und Definitionen liefert. Aus didaktischer Sicht drängt sich die Frage auf, wie ein solch facettenreicher Gegenstand im Unterricht aufgegriffen werden kann, um die vielseitigen Aspekte anschaulich zu vermitteln.

Krainer untersuchte Ende der 1980-er Jahre typische Schülerfehler beim Operieren und Argumentieren mit Winkeln und entwickelte ein Konzept basierend auf der Idee eines aspektreichen und anschaulichen Unterrichts. Um die Aspektvielfalt zum Winkel aufzuzeigen und einsichtig zu gestalten, müssen vielfältige anschauliche Zugänge angeboten werden. Diese Forderung erscheint bei aktueller Analyse von Schulbüchern und Schülerleistungen zum Winkelbegriff und -verständnis auch nach über 30 Jahren gerechtfertigt und diskussionswürdig.

Unsere Untersuchung zu Winkelvorstellungen bei Fünft- und Zehntklässlern bestätigen die Beobachtungen von Krainer (1989): Vergleiche von Winkeln erfolgen über Vergleiche der Schenkellängen; Winkel werden vorrangig als „rechte Winkel" wahrgenommen; Rotation bzw. Drehung wird nicht als Winkelaspekt wahrgenommen bzw. interpretiert; Winkel werden vorrangig als Figur, bestehend aus zwei aneinanderstoßenden Kanten bzw. Strecken gedeutet. Es liegt die Vermutung nahe, dass sich frühzeitig „erworbene“ Fehlvorstellungen während einer Schullaufbahn robust halten. Mitchelmore & White (2000) bestätigen diesen Effekt in einer Untersuchung zum Winkelverständnis von Erwachsenen.

Ausbildung des Winkelbegriffs in der Grund- und Sekundarschule

Das Thema Winkel ist kein zentrales Thema der Geometrie der Grundschule. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2004) findet keine direkte Erwähnung statt. In Lehrplänen werden Kompetenzerwartungen nach Klasse 4 im Bereich „Raum und Form“ zum Schwerpunkt „Ebene Figuren“ formuliert: SchülerInnen können den rechten Winkel benennen und zur Beschreibung ebener Figuren verwenden. In Schulbüchern wird ausschließlich der rechte Winkel thematisiert – meist eingeführt über den Faltwinkel. Rechte Winkel sollen mit Hilfe des Faltwinkels in der Umwelt erkannt und mit dem Geodreieck gezeichnet werden. Die systematische Einführung erfolgt je nach Bundesland in Klasse 5/6. Die SchülerInnen verwenden den Winkel zur Beschreibung ebener und räumlicher Figuren, zum Schätzen und Zeichnen. Sie lernen verschiedene Winkelsätze kennen und nutzen Winkel beim direkten und indirekten Messen. Visuelle Beispiele an der Tafel oder im Schulbuch werden auf Darstellungen reduziert, welche sich an den verwendeten Begriffsdefinitionen – und Konventionen – orientieren, losgelöst vom „wirklichen Leben“.

Im Unterricht lernen die SchülerInnen entweder den statischen und dynamischen, oder nur den statischen Aspekt des Winkels kennen. Der dynamische Winkelaspekt betont die Tatsache, dass ein Winkel durch eine Drehbewegung entsteht. Beim statischen Aspekt liegt die Betonung auf dem Winkelfeld, jenem Gebiet der Ebene, das durch die beiden Schenkel begrenzt wird. Jedem Winkel ist sein Winkelfeld als Punktmenge zugeordnet. Beide Aspekte werden beim Zeichnen und Messen von Winkeln aufgegriffen.

Im Unterricht kommen verschiedene Winkelgeräte zum Einsatz, am häufigsten das Geodreieck und (Halb-, Voll-) Kreiswinkelmesser. Beobachtungen und Schulbuchanalysen zeigen, dass das Erlernen des Umgangs mit den Werkzeugen einer Sinnentwicklung für Winkelgrößen häufig vorangestellt wird. Durch Routineaufgaben werden Prozeduren eingeübt, ohne ein tieferes Verständnis zum Geodreieck als Messwerkzeug aufzubauen, wodurch im Grunde genommen das konzeptuelle Verständnis der Winkeloperationen behindert wird (Van de Walle, 2001).

SchülerInnen verinnerlichen den statischen Aspekt, wobei Winkelmessungen häufig auf einem Bild eines Winkelmessers in Standardposition basieren, unabhängig von der Richtung. Darüber hinaus verwechseln SchülerInnen durch eher prozedurale Aufgaben Winkelkonzepte mit sichtbaren Aspekten der Repräsentation (Länge der Schenkel oder Fläche zwischen den Schenkeln). Durch das Nutzen des Geodreiecks und mangelnde Verständnis des Winkelbegriffs entwickeln SchülerInnen ein fragmentiertes Verständnis des Winkelbegriffs (z. B. Mitchelmore & White, 2000; Munier, Devichi, & Merle, 2008; Van de Walle, 2001). Um die richtige Skala auf dem Winkelmesser aussuchen zu können, müssen SchülerInnen tragfähige Vorstellungen zu Winkelgrößen entwickeln und in der Lage sein, Winkel in einer treffsicheren Größenordnung zu schätzen. Das Geodreieck betont darüber hinaus den statischen Aspekt des Winkels, wobei das Werkzeug für den dynamischen Aspekt ungeeignet ist.

Ausblick

Basierend auf den Schulbuchanalysen, dem typischen Gebrauch der Werkzeuge und der daraus erzielten Wirkung plädieren wir für ein schüleraktivierendes, verständnisorientiertes und anwendungsorientiertes Konzept zum Lehren und Lernen des Winkelbegriffs. Dabei sollen die SchülerInnen durch geeignete Tätigkeiten an Umweltsituationen die Grundideen und Aspekte des Winkelbegriffs entdecken, um das Verständnis für den Begriff und den zugehörigen Operationen zu entwickeln. SchülerInnen müssen die Aspektvielfalt verinnerlichen, um bspw. entscheiden zu können, welches Messwerkzeug in bestimmten Situationen geeignet ist. Allgemein muss die Fähigkeit entwickelt werden, in Alltagssituationen mit Winkeln umzugehen.

Literatur

Berry III, R. Q., & Wiggins, J. (2001). Measurement in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *7*(3), 154–156.

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Jahrgangstufe 4 (Primarstufe)*. Bonn: KMK.

Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie: Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes*. Frankfurt a.M: Peter Lang.

Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 209–238.

Munier, V., Devichi, C., & Merle, H. (2008). A physical situation as a way to teach angle. *Teaching Children Mathematics*, *14*(7), 402–407.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (4th ed.). White Plains, NY: Addison Wesley.

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Kirsten WINKEL, Ludwigsburg

Umgang mit vielfältigen Repräsentationen beim Bruchrechnen - Kompetenzen von Lernenden und professionelles Wissen von Mathematiklehrkräften

Repräsentationen spielen eine Schlüsselrolle für mathematisches Verständnis, denn mathematische Objekte selbst sind nicht direkt zugänglich, so dass man sich nur unter Verwendung von Repräsentationen mit ihnen befassen kann (Duval, 2006). In der Regel reicht auch eine einzige Repräsentation für ein mathematisches Objekt nicht aus, weil sie nicht alle Eigenschaften direkt sichtbar machen kann, sondern nur gewisse Aspekte betont. Die Integration mehrerer Repräsentationen eines Objekts ist also nötig, um eine angemessene Begriffsvorstellung zu entwickeln (z.B. Ainsworth, 2006; Tall, 1988). Folglich ist die Fähigkeit, ein mathematisches Objekt hinter seinen verschiedenen Repräsentationen erkennen und flexibel mit ihnen umgehen zu können, ein Schlüssel für erfolgreiches mathematisches Denken und Problemlösen (z.B. Lesh, Post & Behr, 1987; Ainsworth, 2006). Diese Erkenntnis wird nicht zuletzt auch in die KMK-Bildungsstandards zum Ausdruck gebracht: *Mathematische Darstellungen verwenden* stellt eine von sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen dar und es wird dabei explizit das Erkennen von Beziehungen zwischen Darstellungsformen und das Wechseln zwischen ihnen betont (KMK, 2004). Insbesondere in Bezug auf den Inhaltsbereich der Bruchrechnung besteht weitgehend Konsens im Hinblick auf die große Bedeutung des Nutzens vielfältiger Repräsentationen und der Reflexion ihrer Zusammenhänge (z.B. Ball, 1993). Es ist daher anzunehmen, dass das Bewusstsein der Bedeutung des Nutzens vielfältiger Repräsentationen einen maßgeblichen Einfluss hat auf die Fähigkeit von Lehrkräften, begrifflich reichhaltige und kognitiv aktivierende Lerngelegenheiten zu schaffen. Vielfältige Repräsentationen sind jedoch nicht per se lernfördernd, sondern können im Gegenteil das Lernen sogar behindern: Die Integration verschiedener Repräsentationen und das Wechseln zwischen ihnen sind für Lernende sehr anspruchsvoll und stellen nicht selten eine Verständnishürde dar (Ainsworth, 2006; Duval, 2006). Der flexible Umgang mit Repräsentationen muss im Unterricht also bewusst trainiert und reflektiert werden (Sjuts, 2002).

Das Forschungsinteresse des Projekts La viDa-M bezieht sich daher auf Kompetenzen von Lernenden im Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Bereich „Brüche“, auf mögliche Einflussgrößen auf diese Kompetenzen und auf Möglichkeiten zur Förderung derselben. Im Fokus der ersten Projektphase stehen insbesondere der Entwurf und die empirische Rekonstruktion eines Kompetenzmodells für Lernende und die Untersuchung möglicher Zusammenhänge dieser Kompetenz mit Sichtweisen der Lehrkräfte der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Mathematikunterricht.

In den hier berichteten ersten Auswertungen standen die folgenden Forschungsfragen im Mittelpunkt:

- Können Kompetenzen des Umgangs mit Darstellungen im Inhaltsbereich „Brüche" hierarchisch anhand einer Rasch-Modellierung beschrieben werden?
- Gibt es Zusammenhänge zwischen inhaltsbereichsspezifischen Sichtweisen der Lehrkräfte zum Gestalten des Unterrichts zu Brüchen und den Klassenmittelwerten der Kompetenzscores der Lernenden?

Untersuchungsdesign und Stichprobe

Die Stichprobe der Studie umfasst 29 sechste Klassen an Gymnasien in Baden-Württemberg (N = 675 Schülerinnen und Schüler) zusammen mit ihren Mathematiklehrkräften. Für die Untersuchung von professionellem Wissen und Sichtweisen der Lehrkräfte zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Mathematikunterricht konnte auf ein bereits erprobtes Befragungs- bzw. Testinstrument zurückgegriffen werden (vgl. Dreher, Kuntze & Lerman, 2012). Zur inhaltsbereichsspezifischen Kompetenzmessung wurde auf Grundlage eines theoretisch konzipierten Kompetenzmodells ein Test für Lernende zum flexiblen Umgang mit Repräsentationen im Bereich „Brüche" entwickelt. Die Schüler(innen) bearbeiteten diesen papierbasierten Test im Rahmen einer Schulstunde unter Aufsicht eines Mitglieds des Projektteams in Einzelarbeit. Die Paper-and-Pencil-Befragung der Lehrkräfte wurde in der Regel ebenfalls im Rahmen des Schulbesuchs durchgeführt. Der Lehrer(innen)-Fragebogen besteht aus mehreren Teilen, die unterschiedliche Komponenten professionellen Wissens zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Mathematikunterricht in den Blick nehmen. Das heißt, es wird einerseits auf spezifisches fachdidaktisches Wissen und auch auf entsprechendes Fachwissen abgezielt, anderseits beinhaltet der Fragebogen aber auch Abschnitte, die eher auf Sichtweisen und Überzeugungen der Lehrkräfte fokussieren. Für die inhaltsspezifischen Teile wurde dabei entsprechend des Schülertests der Inhaltsbereich „Brüche" gewählt. An dieser Stelle wird ein besonderes Augenmerk auf Sichtweisen der Lehrkräfte zum Nutzen vielfältiger Repräsentationen in diesem Inhaltsbereich gelegt, weshalb ein einschlägiger Fragebogenteil im Folgenden etwas genauer vorgestellt wird (vgl. Dreher, Kuntze & Lerman, 2012). Dieser Fragebogenteil im Multiple-Choice-Format basiert auf acht Skalen, die sich im Wesentlichen im Umfeld der beiden Fragen bewegen, inwiefern man beim Gestalten des Bruchrechenunterrichts möglichst vielfältige Repräsentationen einsetzen sollte oder eher nicht und inwiefern man bildliche Repräsentationen für Brüche konsequent bis zum Ende der Unterrichteinheit oder eher nur für die Einführung verwenden sollte.

Beispielitems für zwei der acht Skalen, nämlich die Skalen „*vielfältige Darstellungen für das Fördern von Verständnis*“ und „*Kontinuierliches Nutzen bildlicher Darstellungen*“ sind:

- “Für das Verständnis von Bruchzahlen ist es notwendig, im Unterricht viele verschiedene Darstellungen zu verwenden”(*vielfältige Darstellungen für das Fördern von Verständnis*)
- „Damit Bruchrechenregeln nachhaltig gelernt werden, muss man aufpassen, dass man das Nutzen bildlicher Darstellungen im Laufe der Unterrichtseinheit nicht abbricht.“ (*Kontinuierliches Nutzen bildlicher Darstellungen*)

Der Kompetenztest für Lernende zum Umgang mit vielfältigen Repräsentationen und Darstellungswechseln im Inhaltsbereich „Brüche“ besteht aus 12 Items (4 geschlossene, 8 offene Aufgaben), wobei eines der Multiple-Choice-Items ausgeschlossen werden musste, da bei diesem Item auch eine Fehlvorstellung zur korrekten Beantwortung des Items führen konnte. Die Antworten der Schüler und Schülerinnen wurden für jedes Item mit 1 (richtig), bzw. 0 (falsch) kodiert.

Erste Ergebnisse im Überblick

Im Hinblick auf unser Forschungsinteresse bezüglich der Untersuchung von Kompetenzen von Lernenden im Umgang mit vielfältigen Darstellungen im Inhaltsbereich „Brüche“ haben erste Auswertungen gezeigt, dass das entwickelte Testinstrument raschskalierbar ist.

Auswertungen, die neben den gemessenen Schüler(innen)kompetenzen auch die erfassten Sichtweisen der entsprechenden Mathematiklehrkräfte in den Blick nehmen, geben bereits erste Hinweise auf bestehende Zusammenhänge: Der mit Hilfe des Kompetenztest ermittelten Durchschnittsscore einer Klasse korreliert mit mehreren der oben beschriebenen Skalen zu Sichtweisen der Lehrkräfte zum Nutzen vielfältiger Repräsentationen im Inhaltsbereich „Brüche“. So weist beispielsweise die Skala *Kontinuierli-*

ches Nutzen bildlicher Darstellungen eine signifikante Korrelation mit dem Klassendurchschnitt auf.

Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der Rasch-Analyse zeigen, dass die Kompetenz, vielfältige Repräsentationen im Inhaltsbereich „Brüche" zu nutzen, eine hierarchische Struktur im Sinne des zugrundeliegenden theoretischen Modells aufweist. Die ersten Ergebnisse liefern darüber hinaus überraschend deutliche Hinweise auf Zusammenhänge von Kompetenzen von Lernenden im Umgang mit vielfältigen Repräsentationen im Bereich „Brüche" mit Sichtweisen ihrer Mathematiklehrkräfte. Möglicherweise sind die vorgestellten und erhobenen Sichtweisen von Mathematiklehrkräften bezüglich der Unterrichtsgestaltung durch die Lehrkräfte sehr handlungsrelevant. Die erhobenen Daten bieten die Möglichkeit, inhaltsbereichsspezifischen Wahrnehmungen der Schülerinnen und Schüler zum Unterricht in die Untersuchungen einzubeziehen und zur Erklärung der Befunde heranzuziehen. Derartige Zusammenhänge können in der weiteren Projektarbeit auch durch eine mehrebenenanalytische Herangehensweise genauer untersucht werden.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16, 183–198.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, (Hrsg.), *Rational numbers: An integration of research* (S. 157-196). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Dreher, A., Kuntze, S., & Lerman, S. (2012). Pre-service teachers' views on using multiple representations in mathematics classrooms – an inter-cultural study. In Tso,T. Y. (Ed.). Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2 (pp. 211-218). Taipei, Taiwan: PME.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. [retrieved on 10.01.2013 from http://www.kmk.org/].

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sjuts, J. (2002). Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. Eine Fallstudie zur Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Journal für Mathematikdidaktik 2/2002, S. 106-128.

Tall, D. (1988). Concept Image and Concept Definition. In J. de Lange & M. Doorman (Eds). Senior Secondary Mathematics Education. (pp. 37-41) OW&OC Utrecht.

Ulrike DREHER, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Freiburg;

Jos BERTEMES, Luxemburg

Wie kommen Lehrerfortbildungen bei Lernenden an? – Problemlösestrategien vermitteln

Neue Bildungsstandards, die im letzten Jahrzehnt im deutschsprachigen Raum entstanden sind, betonen neben inhaltbezogenen auch die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen (Leuders et al 2005). Da dieser Bereich im deutschsprachigen Mathematikunterricht bislang wenig ausgeprägt ist, bedarf es spezifischer Fortbildungskonzepte, die sich auch einer empirischen Überprüfung ihrer Wirkungen stellen müssen.

In diesem Beitrag berichten wir über ein mehrmoduliges Fortbildungsprogramm mit Luxemburger Lehrkräften zur Vermittlung von Problemlösestrategien, das in einem quasiexperimentellen Studiendesign evaluiert wurde.

Theoretischer Rahmen für die Evaluation

Bei der Konzeption des Fortbildungsprogramms wurden verschiedene, empirisch bereits als wirksam bestätigte Konzeptelemente berücksichtigt (Lipowsky 2010/2012): Dauer der Fortbildung, Vertiefung von fachdidaktischem und diagnostischem Lehrerwissen, Fokus auf Schülerlernprozesse, die Vermittlung der Wirkungen des veränderten Handelns, Verschränkung von Input-, Erprobungs- und Reflexionsphasen, Orientierung an Merkmalen lernwirksamen Unterrichts, Feedback und Austausch.

Die Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen kann dazu auf mehreren Ebenen erfasst werden. Lipowsky bietet ein vierstufiges Rahmenmodell, in das die Evaluationsmaßnahmen eingeordnet werden können: (1) Reaktionen und Selbstauskünfte der Lehrkräfte, (2) Veränderung der Lehrerkognitionen, (3) Veränderung des unterrichtspraktischen Handelns und die Ebene (4) Beeinflussung des Schulerfolgs der Schülerinnen und Schüler.

Von besonderem Interesse ist die Frage: Können Effekte auf der Schülerebene überhaupt erzielt werden? Metaanalysen zeigen, dass gerade dann Effekte auftreten, wenn nicht am Lehrerverhalten, sondern am Lehrerwissen (inhaltsbezogen, curricular oder epistemologisch) gearbeitet wird (Kennedy 1998). „This pattern of outcomes suggests that the content of inservice programs does indeed make a difference, and that programs that focus on subject matter knowledge and on student learning of particular subject matter are likely to have larger positive effects on student learning than are programs that focus mainly on teaching behaviors" (ebd., S. 11). Des Weiteren sind es gerade die konzeptuellen Kompetenzen, die sich messbar bei den Schülerinnen und Schülern ändern, wenn durch eine Lehrerfortbildung an den Konzepten der Lehrkräfte gearbeitet wird (Cobb 1991).

Design der Fortbildungsmaßnahme und der begleitenden Studie

Die vorliegende Studie ist in zwei Phasen gegliedert: Im ersten Projektjahr lag der Fokus auf der Schülerebene. Im Voraus wurde dazu ein Testinstrument entwickelt, um die Veränderung der Problemstrategieanwendung messen zu können. Des Weiteren konnte das entwickelte Fortbildungskonzept erprobt und optimiert werden. Dazu wurde während der Präsenzveranstaltungen ein „conceptual change“-Prozess bei den Lehrkräften angestrebt, um durch gezielte Dissonanzen eine Weiterentwicklung der bestehenden Konzepte bezüglich des Problemlösens zu bewirken (vgl. Möller et al 2006). Bereitgestellte Materialien greifen gezielt den Denkprozess und mögliche Lösungsanläufe der Schülerinnen und Schüler auf, um die unterrichtliche Umsetzung für die Lehrkraft bestmöglich zu unterstützen.

An eine Lehrerfortbildung, die sich der prozessbezogenen Kompetenz des Problemlösens annimmt, sind besondere Anforderungen gestellt, die bei Bruder und Collet (2011) beschrieben wurden. Bei der Entwicklung des Fortbildungsmoduls wurde sich an deren Konzepten insofern orientiert, dass der Reflexion der Strategieanwendung im Unterricht Raum gegeben wird und ein langfristiger Kompetenzaufbau im mathematischen Problemlösen angestrebt wird.

Wissenschaftliche Fragen und Forschungsmethoden

Die folgenden Fragestellungen sollen durch das Projekt beantwortet werden:

- Wie wirkt Mathematiklehrerfortbildung auf der Schülerebene bezüglich der Strategieanwendung beim Problemlösen?
- Wie wirkt Lehrerfortbildung auf Mathematiklehrkräfte im Bereich Problemlösen bezüglich des Lehrverhaltens und der Überzeugungen?
- Wie wirken diese beiden Ebenen zusammen?

In der ersten Durchführungsreihe bestand die Treatmentgruppe aus 36 Lehrkräften mit 660 Schülerinnen und Schülern und einer Wartekontrollgruppe aus 18 Lehrkräften mit 335 Schülerinnen und Schülern. Die Datenauswertung zeigte, dass die Experimentalgruppe einen signifikant höheren Kompetenzzuwachs verzeichnet hat als die Kontrollgruppe ($p = 0.031$). Die faktorenanalytische Untersuchung der 16 Testitems ergab eine eindimensionale Testskala mit 15 Items (Cronbach’s $\alpha = 0.725$).

Einblick in die Ergebnisse des ersten Projektjahres

Zur Auswertung der Testdaten diente ein ausführliches Kodiermanual, das die verschiedenen Strategieanwendungen auf Aufgabenebene wiedergibt. Bei der Entwicklung wurde mit drei Ratern gearbeitet. Nach Überarbeitung wurde eine Beurteilerübereinstimmung von Cohen's $\kappa = 0.804$ erreicht. Neben der angewendeten Strategie wurde auch der Lösungsgrad über ein dreischrittiges partial-credit-System geratet.

Auf der Ebene der Strategieanwendung wurde eine Nominalskala verwendet, deren erste Auswertungen folgende Ergebnisse lieferten. Es konnte gezeigt werden, dass sich ca. 49 % der Experimentalklassen im Bereich des „Darstellungswechsels" signifikant verbessert haben, welcher einem Schwerpunkt der Fortbildung entspricht. Damit zeigt sich eine inhaltliche Durchschlägigkeit bis in die Schülerebene. Diese wird noch weiter untersucht und analysiert werden.

Die Mehrebenenanalyse, die der Datenstruktur besser gerecht wird, zeigt dass ein erheblicher Varianzanteil von 35,5 % durch die Zugehörigkeit der Schüler in die jeweilige Lerngruppe aufgeklärt werden kann. Der Einschluss des Prädiktors „Aufgabenbearbeitung im Schuljahr" auf Ebene 2 ist signifikant. Es können damit 68,6 % der Varianz auf Ebene 2 durch diesen Prädiktor aufgeklärt werden, während eine Restvarianz von 23,2 % auf Ebene 2 bestehen bleibt. Diese gilt es durch die Erhebung weiterer Prädiktoren auf Ebene 2 genauer zu untersuchen.

Komponente	*HLM-Modell*	u_0	*r*	*ICC*	*p*
1. Basismodell	$Y = \beta_0 + r$ $\beta_0 = \gamma_{00} + u_0$	0.3851	0.6997	0,355	<0.001
2.Gruppenzugehörigkeit (EG/KG)	$Y = \beta_0 + r$ $\beta_0 = \gamma_{00} + \gamma_{01}(\text{GRUPPE}) + u_0$	0.1071	0.5110	-	0.055
3.Aufgabenanzahl	$Y = \beta_0 + r$ $\beta_0 = \gamma_{00} + \gamma_{01}(\text{AUFG\_A}) + u_0$	0.12094	0.51090	0,232	0.007

Y= abhängige Variable (Leistungsscore Nachtest)

Ebene 1: Individualebene

Ebene 2: Klassenebene

Somit spielt nicht die Teilnahme der Lehrkräfte an den Fortbildungsmodulen die entscheidende Rolle, sondern die Einsatzhäufigkeit einer Problemlöseaufgabe im Unterricht und die Reflexion der jeweiligen Strategieanwendung bei der Bearbeitung. Das bedeutet, dass – konform mit dem Erkenntnisstand zu wirksamen Fortbildungen – die Sicherstellung der Implementation in der Praxis von entscheidender Bedeutung ist.

Ausblick

Im zweiten Projektjahr wird das Fortbildungsmodul erneut durchgeführt und das Testinstrument für Schüler eingesetzt. Hinzugenommen wird die Ebene der Überzeugungen der Lehrkräfte sowie der Schülerinnen und Schüler. Wir gehen davon aus, dass gerade bei prozessbezogenen Kompetenzen wie dem Problemlösen, nicht nur Wissen und Können, sondern auch Einstellungen eine wesentliche Rolle für die Qualität der Lernprozesse und den Kompetenzzuwachs spielen. Mit dieser Ergänzung soll zur Aufklärung der Wirkungskette von Lehrerfortbildungen auf die beteiligten Akteure beigetragen werden.

Literatur

Bruder, R./Collet, C. (2011): Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Cobb, P./ Wood, T./ Yackel, E./ Nicholls, J./ Wheatley, G./ Trigatti, B./ Perlwitz, M. (1991): Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. In: Journal For Research in Mathematics Education, 1, 3-29.

Kennedy, M. (1998): Form and substance in inservice teacher education. In: Research Monograph, 13.

Leuders, T./ Barzel, B. & Hußmann, S. (2005): Outcome standards and core curricula: a new orientation for mathematics teachers in Germany. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 37(4), 275–286.

Lipowsky, F. (2010): Lernen im Beruf. Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen. In: F. Müller et al. (Hrsg): Lehrerinnen und Lehrer lernen. Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung. Münster: Waxmann, 51-70.

Lipowsky, F./ Rzejak, D. (2012): Lehrerinnen und Lehrer als Lerner - Wann gelingt der Rollen-tausch? Merkmale und Wirkungen wirksamer Lehrerfortbildungen. In: Reform der Lehrerbildung, 3 (5), 1-17.

Möller, K./Hardy, I./ Jonen, A./Kleickmann, T./Blumberg, E. (2006): Naturwissenschaften in der Primarstufe. Zur Förderung konzeptuelles Verständnisses durch Unterricht und zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen. In: M. Prenzel et al. (Hrsg.): Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms. Münster: Waxmann, S. 161-193.

Christina DRÜKE-NOE, Kassel, Svenja Mareike KÜHN, Duisburg-Essen

Zentrale Abschlussprüfungen im Fach Mathematik zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses – Prüfungsstrukturen und Aufgabenanalysen

Im Beitrag wird aufgezeigt, inwieweit die Aufgaben der zentralen Prüfungen zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses (kurz: MSA) erkennbar die Bildungsstandards berücksichtigen auf deren Implementation in den Bundesländern schließen lassen.

1. Einführung

Die Auswahl und Gestaltung der Aufgaben der schriftlichen MSA-Prüfungen geschieht vor dem Hintergrund vielfältiger Rahmenbedingungen und Vorgaben. So hat sich im allgemeinbildenden Schulsystem die einst klare Zuordnung von Schulabschlüssen zu Schulformen gelöst. Des Weiteren wirken bundesweit gültige Vorgaben, denn alle Bundesländer haben sich verpflichtet, die Bildungsstandards „zu implementieren und anzuwenden (…) und in zentralen oder in dezentralen Prüfungen festzustellen, in welchem Umfang die Standards erreicht wurden“ (KMK, 2004, S. 4). Demnach sollen die Bildungsstandards u.a. die Vergleichbarkeit der in innerhalb der Bundesländer in verschiedenen Schularten zentral erworbenen Abschlüsse sichern (Kühn, 2013). Schließlich bestimmen bundeslandspezifische Vorgaben u.a. inhaltliche Grundlagen der MSA-Prüfungen. Schon eine Analyse der Prüfungsverfahren deutet jedoch auf eine Heterogenität zwischen den Bundesländern hin. Die Unterschiede betreffen Rahmenbedingungen der Prüfungen, wie z.B. ihre Dauer (90-240 min; meist 120-150 min), ihre Gliederung (mit/ohne Wahlaufgaben) sowie die Anzahl der Aufgaben ($M=35{,}97$; $SD=10{,}81$), aber auch die Prüfungsinhalte, die sich auf die gesamte Sekundarstufe I oder nur auf die Klassen 7 bis 10, nur auf die Klassen 9 und 10 oder nur auf die Klasse 10 beziehen (vgl. ebd.).

2. Ziele, Fragen und Design des Forschungsprojekts

In einem von der DFG geförderten Kooperationsprojekt der beiden Autorinnen werden die MSA-Prüfungsaufgaben hinsichtlich ihrer Qualität und Vergleichbarkeit untersucht. Zwei zentrale Fragestellungen sind:

- Welche Qualitätsmerkmale charakterisieren die schriftlichen Aufgaben im Rahmen der Prüfungsverfahren zum Erwerb des MSA im Fach Mathematik in den 15 zentral prüfenden Bundesländern?

- Inwiefern werden die Anforderungen der Bildungsstandards im Rahmen der länderspezifischen Prüfungsverfahren umgesetzt und damit steuerungswirksam?

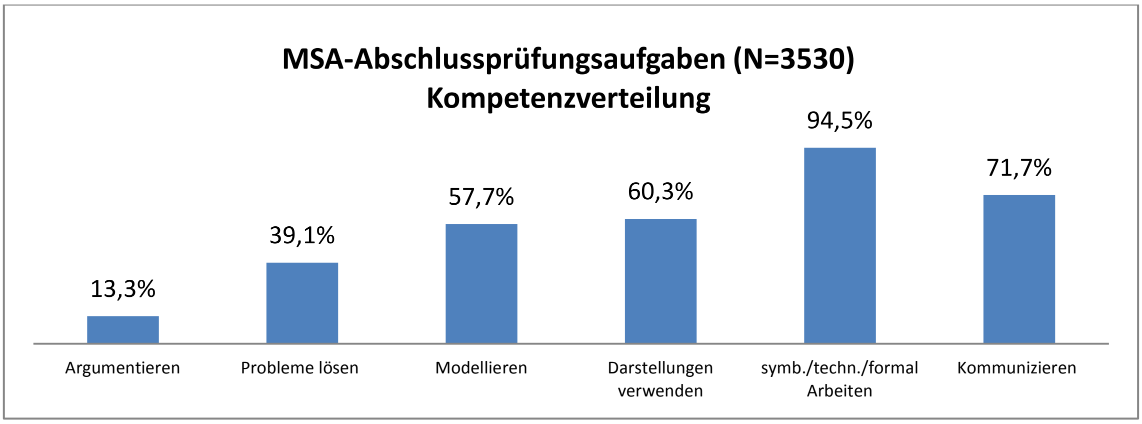
Zur Beantwortung dieser Fragen wurde eine retrospektive Längsschnittstudie durchgeführt, in der die MSA-Prüfungsaufgaben aller 15 zentral prüfenden Bundesländer aus den Jahren 2007 bis 2011 untersucht wurden. Es wurden nur die Prüfungsaufgaben des Haupttermins berücksichtigt und dabei im Falle schulformspezifischer Prüfungsverfahren die Aufgaben jener Schulform, an der der MSA am häufigsten vergeben wird. Insgesamt wurden 77 Abschlussprüfungen mit 3530 Handlungsaufforderungen (kleinste inhaltsbezogene Aufforderung; im Folgenden kurz: Aufgabe) analysiert; knapp drei Fünftel dieser Aufgaben (N=2115) sind Pflichtaufgaben. Die Kodierung führten zwei geschulte Kodierer durch (κ>.75), die hierfür ein fachspezifisches Kategorienschema verwendeten, das in verschiedenen Subkategorien die Gestaltung der Aufgaben (u.a. Pflicht- oder Wahlaufgabe), deren Steuerungsaspekte (u.a. Leitidee, Kompetenzen, Anforderungsbereich) sowie deren Innovationspotenzial (u.a. Offenheit) erfasst.

3. Empirische Analyse der MSA-Prüfungsaufgaben

Aus qualitätsorientierter Perspektive zeigen die bundeslandübergreifenden Ergebnisse deutliche Übereinstimmungen der Qualitätsmerkmale aller Pflicht- und Wahlaufgaben in der gemeinsamen Betrachtung sowie alternativ in der alleinigen Betrachtung der Pflichtaufgaben, so dass im Folgenden, sofern nichts anderes erwähnt ist, über beide Aufgabenarten aggregiert und nur bundeslandübergreifend berichtet wird. Für eine differenziertere Auswertung sei auf Kühn & Drüke Noe (in Begutachtung) verwiesen.

Die Verteilung der Aufgaben auf die fünf Leitideen der Bildungsstandards (Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall) zeigt einen inhaltlichen Schwerpunkt im Bereich der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (31,4 % der Aufgaben), was weitgehend mit den Vorgaben für die in den Prüfungsaufgaben zu berücksichtigenden Klassenstufen (Schwerpunkt: Klassen 9 und 10) zu erklären ist. Deutlich weniger Aufgaben entfallen auf die Leitideen Zahl (22,5 %), Messen (20,8 %), Raum und Form (13,1 %) sowie Daten und Zufall (11,9 %). Innerhalb letzterer gehören ca. vier Fünftel der Aufgaben zum thematischen Teilbereich Daten, so dass anteilig nur sehr wenige Aufgaben Wahrscheinlichkeit zum Gegenstand haben. Diese bundeslandübergreifende Auswertung zeigt insgesamt eine weitgehend ausgewogene Berücksichtigung der fünf Leitideen; eine Ausnahme bildet hier nur der Teilbereich der Wahrscheinlichkeit. Eine bundeslandspezifische Auswertung lässt hier jedoch sehr deutliche Länder-divergenzen erkennen, die sich nicht immer auf länderspezifische Vorgaben für die zu berücksichtigenden Klassenstufen zurückführen lassen. So entfallen z.B. Bayern und in Thüringen (in beiden Ländern werden nur Inhalte der Klasse 10 geprüft) übereinstimmend die anteilig meisten Aufgaben auf die Leitidee Funktionaler Zusammenhang; gleichzeitig gibt es in Bayern z.B. kaum Aufgaben zur Leitidee Zahl, während hierauf in Thüringen immerhin nahezu ein Fünftel der Aufgaben entfallen.

Auch hinsichtlich der sechs in den Bildungsstandards ausgewiesenen prozessbezogenen Kompetenzen würde man eine ausgewogene und damit bildungsstandardkonforme Verteilung der Kompetenzen, die nicht eine Überbetonung einzelner erkennen lässt – hier ist insbesondere die Kompetenz des symbolisch/technisch/formalen Arbeitens zu nennen –, erwarten.



Dem Diagramm ist zu entnehmen (zu beachten: eine Aufgabe kann *mehrere* Kompetenzen erfordern), dass nahezu alle Aufgaben (94,5 %) diese Kompetenz erfordern und ihr daher die relativ größte Bedeutung zukommt. Ebenfalls erwartungskonform ist der nur geringe Anteil des Argumentierens. Beide Befunde sind konform mit empirischen Ergebnissen zur Aufgabenkultur im Unterricht sowie in Klassenarbeiten (u.a. Kunter et al., 2006; Drüke-Noe, 2012). Demgegenüber ist der Anteil des Kommunizierens überraschend hoch; allerdings wird fast ausschließlich die Teilkompetenz Lesen benötigt, die andere Teilkompetenz, das Verfassen mathematikhaltiger Texte, kommt praktisch nicht vor.

Schließlich ist auch die Verteilung der Aufgaben auf die drei Anforderungsbereiche unausgewogen: etwa zwei Drittel entfallen auf den niedrigen Anforderungsbereich, etwa ein Drittel auf den mittleren, und nur jede 100ste Prüfungsaufgabe ist dem höchsten Anforderungsbereich zuzuordnen, erfordert also z.B. Reflexionen oder Verallgemeinerungen. Auch dieser Befund zum kognitiven Anspruch stimmt mit empirischen Ergebnissen zur sonstigen Aufgabenkultur überein (u.a. Neubrand et al., 2011).

Zusammenfassend zeigen die bundeslandübergreifenden Ergebnisse, dass der Bezug der MSA-Prüfungsaufgaben zu den Bildungsstandards nicht durchweg erkennbar ist. Die unausgewogene Verteilung innerhalb einzelner Dimensionen stellt damit eine gelungene Implementation und schließlich auch eine Steuerungswirkung mit Blick auf die untersuchten Prüfungen zumindest in Frage, was bereits vorliegende Befunde zum Stand der Implementation bestätigt (z.B. Böttcher & Dicke, 2008). Zudem erscheint eine Vergleichbarkeit des MSA zwischen verschiedenen Bundesländern auf der Grundlage der hier nur exemplarisch berichteten Länderspezifika, auch mit Blick auf die sonstige Aufgabenkultur, fraglich.

4. Offene Fragen

Diese deskriptiven Befunde werfen mehrere Fragen hinsichtlich einer erfolgreichen Implementation der Bildungsstandards auf, so beispielsweise die Frage, ob in den einzelnen Bundesländern genügend geschieht, um die Bildungsstandards zu implementieren, aber auch die Frage, wie letztlich eine ausgewogene Verteilung von Aufgaben, nicht nur in MSA-Prüfungen, auf die drei Dimensionen der Bildungsstandards aussehen kann.

Literatur

Böttcher, W., Dicke, J. N. (2008): Implementation von Standards. Empirische Ergebnisse einer Umfrage bei Deutschlehrern. In: W. Böttcher et al. (Hrsg.), Bildungsmonitoring und Bildungscontrolling in nationaler und internationaler Perspektive. Münster: Waxmann, 143-156.

Drüke-Noe, C. (2012): Wer Kalküle kann, schafft eine Klassenarbeit. Stimmt das? In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 1, 213-216.

Kühn, S. M. (2013) Vergleichbarkeit beim Mittleren Schulabschluss? Ein Überblick über die Vielfalt schulstrukturell möglicher Bildungswege und Prüfungsverfahren in den deutschen Ländern. In: Die Deutsche Schule, 105(1), S. 87-101.

Kühn, S. M., Drüke Noe, C. (in Begutachtung): Steuerungswirkung von Bildungsstandards auf die Qualität und Vergleichbarkeit von Prüfungsanforderungen zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses.

Kultusministerkonferenz (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss Darmstadt: Luchterhand.

Kunter, M., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W. et al. (2006): Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In: Pisa-Konsortium Deutschland (Hrsg.), PISA 2003. Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres. Münster: Waxmann, 161-194.

Neubrand, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W., & Löwen, K. (2011). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Einblicke in das Potenzial für kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In: M. Kunter, J., Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann, 115-132.

Christoph DUCHHARDT, Anne-Katrin JORDAN, Insa SCHNITTJER, Kiel

Berufsschulen und Gymnasien – mathematische Kompetenzen und Einstellungen zur Mathematik im Vergleich

Das Nationale Bildungspanel (National Educational Panel Study, NEPS) ist eine Längsschnittstudie im deutschen Bildungswesen. Gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung hat sie das Ziel, individuelle Lebensläufe vom Kindergarten- bis ins Erwachsenenalter unter bildungswissenschaftlichen Fragestellungen zu dokumentieren (vgl. Blossfeld, von Maurice, & Schneider, 2011).

Besondere Schwerpunkte liegen dabei zum einen auf der längsschnittlichen Entwicklung von Kompetenzen, zum anderen auf kritischen Übergängen im Bildungssystem.

Das Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) in Kiel ist u.a. für die Erfassung der mathematischen Kompetenz zuständig. Dazu wurde zunächst eine altersübergreifende Rahmenkonzeption ausgearbeitet, die sich an die PISA-Definition von *Mathematical Literacy* (vgl. OECD, 2003) anlehnt und strukturell zwischen inhaltlichen Bereichen und kognitiven Komponenten unterscheidet (vgl. Ehmke, Duchhardt, Geiser, Grüßing, Heinze, & Marschick, 2010). Testitems, in denen diese Konzeption umgesetzt ist, sind dabei gemäß dem Literacy-Gedanken in authentische, alltagsnahe Situationen eingebettet.

Um einen qualitativ hochwertigen Itempool zu erhalten ist ein mehrschrittiger Entwicklungsprozess notwendig. Vor der finalen Testerstellung, werden somit mindestens zwei Pilotierungsstudien durchgeführt. Ziel ist es, die Items zu analysieren und anhand von psychometrischen sowie inhaltlichen Kriterien auszuwählen.

Den NEPS-Haupterhebungen liegt ein Multi-Kohorten-Sequenzen-Design zugrunde, d.h. es startet nicht nur eine sondern vier Kohorten an für das Bildungssystem charakteristischen Stellen sowie eine Kohorte mit Neugeborenen und eine weitere mit Erwachsenen (vgl. Blossfeld, von Maurice, & Schneider, 2011). So können in relativ kurzer Zeit viele Informationen gewonnen werden. Im Herbst 2010 starteten deutschlandweit die ersten Kohorten des NEPS. Unter anderem wurden etwa 15.000 Schülerinnen und Schüler neunter Klassen aller Schularten befragt und in verschiedenen Domänen, u.a. Mathematik, getestet. Dieselben Jugendlichen werden im Herbst 2013 wieder an Haupterhebungen teilnehmen und Mathematik-Aufgaben bearbeiten. Hinter ihnen liegt dann schon ein wichtiger Übergang: ein Teil der Stichprobe wird die gymnasiale Oberstufe besuchen, während ein anderer Teil nach der neunten oder zehnten Klasse die Schule verlassen und z.B. eine Berufsausbildung begonnen haben wird.

Um geeignete Testinstrumente für diese heterogene Gruppe zu entwickeln, wurde mit der Itemerstellung 2011 begonnen. Die folgenden Ergebnisse beziehen sich auf eine Pilotierungsstudie, die im Frühjahr 2012 in Kiel durchgeführt wurde. Der Fokus lag dabei auf der Erprobung der Aufgaben: Sind die entwickelten Items geeignet, die Kompetenzen von Gymnasiastinnen und Gymnasiasten sowie von Berufsschülerinnen und –schülern fair auf derselben Metrik zu erfassen und ihre gesamte Spanne abzubilden? Zusätzlich gingen wir mit einem Fragebogen zu Einstellungen zur Mathematik der Frage nach, ob Mathematik für Berufsschülerinnen und Berufsschüler eine grundsätzlich andere Bedeutung hat als für Gymnasiastinnen und Gymnasiasten.

Die Stichprobe umfasste 454 Schülerinnen und Schüler in berufsbildenden Schulen und Gymnasien. Schülerinnen waren etwas überrepräsentiert (63,2%), da Berufsgruppen teilnahmen in denen traditionell eher Frauen zu finden sind. Um zu überprüfen, ob der Test die Kompetenzen in beiden Gruppen fair misst, wurden in einem *Partial-Credit* Modell *Differential-Item-Functioning* (DIF)- Analysen (z.B. Holland & Wainer, 1993) mit ConQuest (Wu, Adams, & Wilson, 1997) berechnet. Dabei wurde untersucht, ob Personen verschiedener Gruppen (hier Berufsschüler/Gymnasiasten) bei gleicher Fähigkeit unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten haben bestimmte Items richtig zu lösen.

Die Ergebnisse zeigen, dass 23 von 56 Items einen DIF-Wert > 0,6 und davon 14 sogar einen Wert > 0,8 aufweisen, was als großer Effekt beurteilt werden kann (Tristán, 2006). Nach Überprüfung und Überarbeitung mussten sieben Items aus weiteren Analysen ausgeschlossen werden.

Ob die Items das gesamte Fähigkeitsspektrum abdecken, wurde anhand der Skalierung der Daten untersucht. Abbildung 1 zeigt die gemeinsame Verteilung von Personenfähigkeiten und Itemschwierigkeiten, wobei geringe/hohe Werte mit geringen/hohen Personenfähigkeiten/ Itemschwierigkeiten einhergehen. Es wird deutlich, dass insbesondere im unteren Fähigkeitsbereich zu wenige Items vorhanden sind. Für die Haupterhebung ist es deshalb erforderlich, leichte Items in den Test aufzunehmen, um auch in diesem Bereich die Fähigkeiten präzise schätzen zu können. Beim Gruppenvergleich ergab sich ein Unterschied von 0,84 Logits zugunsten der Gruppe der Gymnasiastinnen und Gymnasiasten.

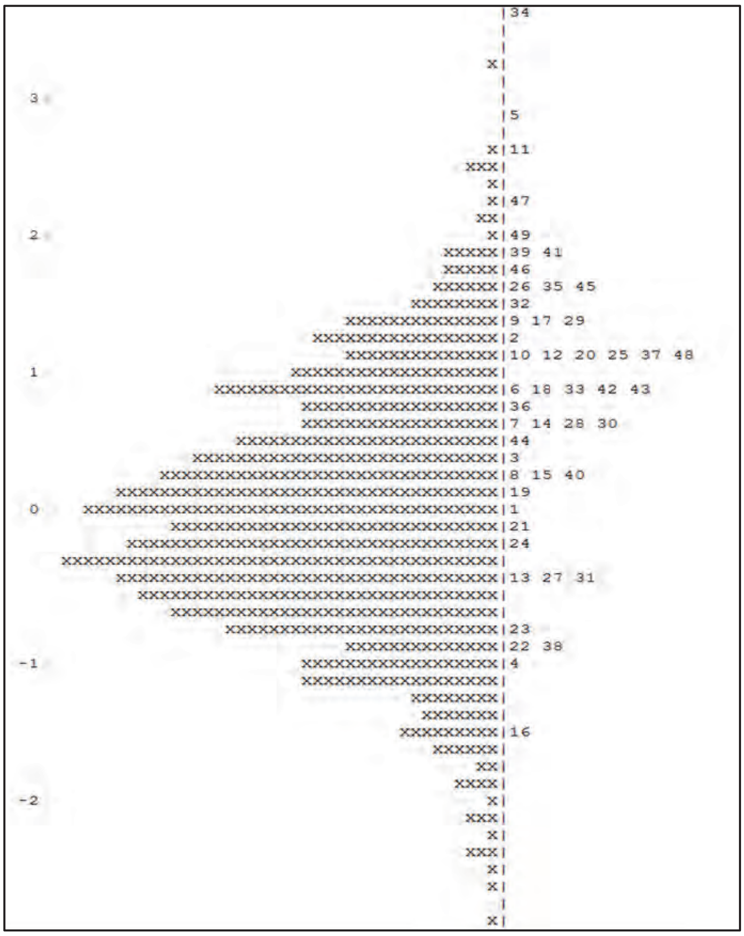


Abbildung 1: Verteilung der Personenfähigkeiten und Itemschwierigkeiten.

Im Gegensatz zur mathematischen Kompetenz gab es hinsichtlich der Einstellung zu Mathematik fast keine Unterschiede zwischen den beiden Gruppen. Betrachtet wurden die Skalen mathematische Selbstwirksamkeit, Interesse, Alltagsbezug, berufsbezogenes Interesse und gesellschaftliche Bedeutung. Lediglich für die mathematische Selbstwirksamkeit konnten signifikante Gruppenunterschiede beobachtet werden ($t\ (315) = -2.87$, $p = .004$). Wie die mathematische Kompetenz anhand dieser Hintergrundvariablen erklärt werden kann, wurde mit schrittweisen Regressionsanalysen untersucht, wobei Geschlecht, sozio-ökonomischer Status (SES) und Schulart ebenfalls kontrolliert werden (s. Tabelle 1). Über alle Modelle hinweg zeigt sich, dass außer der mathematischen Selbstwirksamkeit keine der Fragebogenskalen einen signifikanten Einfluss auf die mathematische Kompetenz hat. Der Einfluss des SES wird durch die Hinzunahme der Schulart als Prädiktor abgeschwächt. Betrachtet man die Ausbildungsgruppen im Vergleich zur Referenzgruppe der Gymnasiasten separat, so wird deutlich, dass Berufsschüler kaufmännischer und mechanischer Berufe ähnliche Fähigkeiten aufweisen wie die Gymnasiasten. Insgesamt werden 31-36% der Varianz erklärt.

Prädiktor	*Modell 1*	*Modell 2*	*Modell 3*
Alltagsbezug	.000	.006	.006
Interesse	.001	.006	.023
berufsbezogenes Interesse	.089	.057	.085
gesellschaftliche Bedeutung	.062	.053	.052
Selbstwirksamkeit	.261**	.244**	.233**
Geschlecht	-.257**	-.256**	-.139*
SES	.287**	.195**	.202**
Schulart		.196**	
kaufmännische Berufe			-.003
mechanische Berufe			-.039
Friseur			-.124*
medizinische Berufe			-.288**
R^2	.31	.34	.36

Tabelle 1: Regressionsanalyse mit mathematischer Kompetenz (wle) als abhängige Variable.

Die Analysen unterstreichen die Heterogenität der Gruppe der Berufsschülerinnen und -schüler, die demnach differenziert betrachtet werden sollte.

Literatur

Blossfeld, H.-P., von Maurice, J., & Schneider, T. (2011). *Grundidee, Konzeption und Design des Nationalen Bildungspanels für Deutschland* (NEPS Working Paper No. 1). Bamberg: Otto-Friedrich-Universität, Nationales Bildungspanel.

Ehmke, T., Duchhardt, C., Geiser, H., Grüßing, M., Heinze, A., & Marschick, F. (2009). Kompetenzentwicklung über die Lebensspanne – Erhebung von mathematischer Kompetenz im Nationalen Bildungspanel. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.). *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium.* (S. 313 – 327). Münster: Waxmann.

Holland, P. W., & Wainer, H. (1993). *Differential item functioning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Paris: OECD.

Tristán, A. (2006). An Adjustment for Sample Size in DIF Analysis. In J. Bernoulli, W. P. Fisher, C. Shannon, & G. Rasch (Eds.), *Rasch Measurement. Transactions of the Rasch Measurement SIG American Educational Research Association* (Vol. 20, pp. 1070–1071).

Wu, M., Adams, R.J., & Wilson, M.R. (1997). ACER Conquest: Generalised item response modelling software. Melbourne: ACER Press.

Simone DUNEKACKE[1], Lars JENßEN[1], Wibke BAACK[1], Martina TENGLER[2], Hartmut WEDEKIND[2], Marianne GRASSMANN[1], Sigrid BLÖMEKE[1] ([1]Humboldt-Universität zu Berlin; [2]Alice Salomon Hochschule Berlin)

Was zeichnet eine kompetente pädagogische Fachkraft im Bereich Mathematik aus? Modellierung professioneller Kompetenz für den Elementarbereich

Um Kinder im Elementarbereich mathematisch fördern zu können, bedarf es neben geeigneten Materialien gut ausgebildeter Fachkräfte. Im vom BMBF geförderten Projekt KomMa[1] wird untersucht, ob pädagogische Fachkräfte die erforderlichen Kompetenzen im Rahmen ihrer fachschulischen bzw. hochschulischen Ausbildung erwerben.

1. Kompetenzmodell

Über professionelle Kompetenz von pädagogischen Fachkräften im Elementarbereich ist bislang wenig bekannt (Fried & Roux, 2009). Dies gilt insbesondere für den Bereich Mathematik (National Advisory Panel, 2008). Kompetenz wird als ein Zusammenspiel von kognitiven Dispositionen und motivationalen Aspekten verstanden, die zur Performanz in spezifischen Situationen befähigen (Weinert, 2001). Aus der Lehrerausbildungsforschung ist bekannt, dass sich professionelle Kompetenz strukturell aus drei Wissensfacetten (fachspezifisches, fachdidaktisches und allgemein-pädagogisches Wissen) sowie allgemeinen und fachspezifischen Überzeugungen zusammensetzt (Shulmann, 1986; Blömeke, Felbrich & Müller, 2008). Für den Elementarbereich liegen noch keine fachlich differenzierten Kompetenzmodelle vor, allgemeine Kompetenzprozessmodelle der Frühpädagogik modellieren Kompetenz in ähnlicher Form (Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann & Pietsch, 2011).

Die Wissensfacetten müssen für den Elementarbereich spezifisch gefüllt werden, da Lehren und Lernen hier von anderen Rahmenbedingungen und Voraussetzungen bestimmt ist als im schulischen Kontext. Berücksichtigt wurden im Zuge der Kompetenzmodellierung daher normative Anforderungen an die Arbeit in Kindertageseinrichtungen, die über eine Analyse der Bildungspläne der Bundeländer erfasst wurden, sowie wissenschaftliche Erkenntnisse zum Lehren und Lehren im Elementarbereich, die über eine Analyse einschlägiger Fachliteratur extrahiert wurden.

---

[1] „Struktur, Niveau und Entwicklung professioneller **Kom**petenz von Erzieherinnen und Erzieherin im Bereich **Ma**thematik"

Die aus der Fachliteratur und den Curricula abgeleiteten Anforderungen erwiesen sich als komplex. Die Analyseergebnisse wurden daher zu dem in Abb. 1 gezeigten Strukturmodell verdichtet. Die Ausdifferenzierungen der einzelnen Facetten (z.B. „Gestaltung von geplanten und situativen math. Bildungsprozessen") sind dabei als Subdimensionen zu verstehen, die für die Operationalisierung weiter konkretisiert wurden.

Abb. 1: Kompetenzstrukturmodell (Kurzfassung)

Parallel zu diesem Kompetenzstrukturmodell wurde auf der Grundlage psychometrischer Fachliteratur ein Kompetenzniveaumodell entwickelt. Der Nutzen einer Niveaumodellierung ist für die Testkonstruktion darin zu sehen, dass eine gleichmäßige Verteilung schwierigkeitsbestimmender Merkmale über die Testitems angestrebt wird. Darüber hinaus ist das Niveaumodell bei der Interpretation der Ergebnisse hilfreich, da es eine kriteriumsorientierte Interpretation der Skalen ermöglicht (Hartig, 2007). Durch die Unterscheidung kognitiver Anforderungen (erinnern, verstehen/analysieren/anwenden, Handlungsoptionen generieren) wird zudem versucht, dem performativen Aspekt von Kompetenz näher zu kommen.

2. Erhebungsinstrumente

Für die Erfassung der professionellen Kompetenz von pädagogischen Fachkräften im Elementarbereich wird ein Leistungstest mit 62 Items eingesetzt, um die drei Wissensfacetten Mathematik, Mathematikdidaktik und Pädagogik abzubilden. Ein Fragebogen erfasst die Lerngelegenheiten in der Ausbildung im Bereich Mathematik. Er wurde über eine Analyse von Lehrplänen und Modulhandbüchern entwickelt. Ein zweiter Fragebogen erfasst selbst- und mathematikbezogene Überzeugungen (*beliefs*). Hierfür wurde weitgehend auf vorhandene Skalen zurückgegriffen, die modifiziert und adaptiert wurden (z.B. COACTIV, PISA, TEDS-M).

3. Itemkonstruktion und Testzusammenstellung

Der Itemkonstruktion lag das Kompetenzmodell aus Abb. 1 zugrunde. Den Subdimensionen wurden konkrete Inhalte zugeordnet, die Grundlage für die Itemkonstruktion bildeten und die Berücksichtigung aller relevanten Aspekte sicherstellten. Zu jedem Inhalt wurden mehrere Items konstruiert. Die Konstruktion erfolgte unter Berücksichtigung einschlägiger Fachliteratur sowie kritischer Diskussionen im interdisziplinären Projektteam.

Die Zusammenstellung des Tests durchlief mehrere Phasen der Qualitätssicherung. Zunächst wurden ausgewählte Items in einzelnen Fachschulklassen oder Hochschulseminaren einem Prä-Test unterzogen. Hierzu gehörten alle offenen Items sowie möglicherweise problematische Multiple-Choice-Items. Anschließend wurde alle Items in einem *Cognitive Lab* über die Technik des Lauten Denkens inhaltlich validiert, indem die zur Bearbeitung erforderlichen kognitiven Prozesse und Strategien identifiziert wurden (Terzer, Patzke & Upmeier zu Belzen, 2012). Die meisten Items wurden erwartungsgemäß bearbeitet.

Ein Experten-Rating zur Inhaltsvalidität bildete den Abschluss der Itemkonstruktion. Zwischen sieben und neun Experten aus Wissenschaft und Praxis beurteilten, ob die Items das intendierte Wissensgebiet abbilden. Zu jedem Item wurden die Standardfragen der Inhaltsvalidität (Hartig, Jude & Frey, 2008) auf einer vierstufigen Skala von „Gar nicht geeignet“ bis „Voll und ganz geeignet“ beurteilt. Zudem konnten offene Anmerkungen gemacht werden. Die Auswertung der geschlossenen Fragen erfolgte anhand von Mittelwerten, da diese auch bei nicht-normalverteilten Daten alle Werte gleichgewichten.

Von den 117 begutachteten Items wurden 71 sofort als geeignet eingestuft, 37 mussten revidiert werden. 9 Items wurden als ungeeignet eingestuft und 3 Items mussten neu konstruiert werden. Auch die angenommenen Items wurden durch die Hinweise der Experten qualitativ weiter verbessert. Eine zentrale nächste Aufgabe wird die Entwicklung von Codieranweisungen für offene Items sein. Die Klassifizierung der gegebenen Antworten als richtig oder falsch wird unter Berücksichtigung theoretischer und empirischer Erkenntnisse erfolgen.

4. Ausblick – Datenerhebung und erwartete Ergebnisse

Nach der Pilotierung im Sommer 2013 erfolgt die Datenerhebung im Winter 2013/14. Aufgrund des komplexen Konstrukts und der großen Zahl an Testitems werden diese in einem rotierten Multi-Matrix-Design an einer Stichprobe von ca. 1.500 FachschülerInnen und Studierenden im Bundesgebiet eingesetzt. Die Daten werden mittels Modellen der Item-Response-Theorie skaliert und unter Berücksichtigung der Mehrebenenstruktur der Stichprobe ausgewertet. Erwartet wird eine breite Streuung der Kompetenzniveaus, da es sich um eine heterogene Zielgruppe handelt (z.B. unterschiedliche Eingangsvoraussetzungen in der Ausbildung je nach Bundesland). Zudem hat die Analyse der Lehrpläne und Modulhandbücher gezeigt, dass die Auszubildenden unterschiedliche Lerngelegenheiten erhalten und damit verschiedene Gelegenheiten zur Kompetenzentwicklung im Bereich Mathematik geboten werden. Weiterhin interessiert die Frage, inwieweit sich Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Kompetenzfacetten zeigen. Aus der Lehrerbildungsforschung liegen hierzu unterschiedliche Befunde vor (Blömeke, Kaiser, Döhrmann, Suhl & Lehmann, 2010).

Literatur

Blömeke, S., Fellbrich, A. & Müller, C. (2008): Theoretischer Rahmen und Untersuchungsdesign. In: Blömeke, S. Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.): Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelgenheiten deutscher Mathematikstudierender und –referendare. Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung. Münster: Waxmann, 15-48.

Blömeke, S., Kaiser, G., Döhrmann, M., Suhl, U. & Lehmann, R. (2010): Mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. In: Blömeke, S., Kaiser, G., Lehmann, R. (Hrsg.): Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. TEDS-M 2008. Münster: Waxmann, 195-252.

Fried, L. & Roux, S. (2009): Zur Pädagogik der frühen Kindheit im 21. Jahrhundert – Desiderata. In: Fried, L., Roux, S. (Hrsg.): Pädagogik der frühen Kindheit. Handbuch und Nachschlagewerk. Berlin: Cornelsen, 378-382.

Fröhlich-Gildhoff, K., Nentiwg-Gesemann, I. & Pietsch, S. (2011): Kompetenzorientierung in der Qualifizierung frühpädagogischer Fachkräfte. Eine Expertise der Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte (WiFF). Frankfurt a.M.: Heinrich Druck + Medien; DJI.

Hartig, J. (2007): Skalierung und Definition von Kompetenzniveaus. In: Klieme, E., & Beck, B.: Sprachliche Kompetenzen. Konzepte und Messung. DESI-Studie (Deutsch Englisch Schülerleistungen International). Weinheim: Beltz.

Hartig, J., Jude, N. & Frey, A. (2008): Validität. In: Moosbrugger, H. & Kelava, A. (Hrsg.): Testtheorie und Fragebogenkonstruktion. Heidelberg: Springer, 135-164.

Shulmann, L. (1986): Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. In: Educational Researcher, 15, 2, 4-14.

Terzer, E., Patzke, C. & Upmeier zu Belzen, A. (2012): Validierung von Multiple-Choice Items zur Modellkompetenz durch lautes Denken. In: Harms, U. & Bogner, F. X. (Hrsg.): Lehr- und Lernforschung in der Biologiedidaktik. Innsbruck: Studienverlag, 45-62.

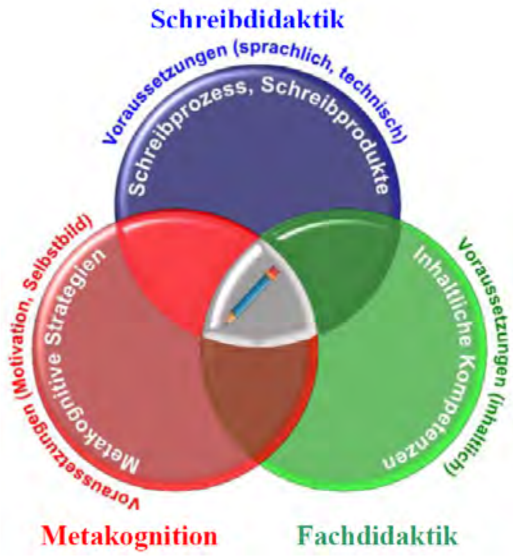
Weinert, F. E. (2001): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim: Beltz.

Carola EHRET, Timo LEUDERS, Freiburg

Entwicklung mathematischer Schreibkompetenz bei FünftklässlerInnen der Werkrealschule – erste Ergebnisse

1. Theoretischer Hintergrund

In der Analyse des Forschungsstandes zum Schreiben im Fachunterricht kristallisieren sich drei Bezugsbereiche heraus:



Hintergrund für die Auseinandersetzung mit Schreibkompetenz ist das Medium Sprache, das im Rahmen der Sprach- bzw. Schreibdidaktik konkretisiert wird. Hier erfolgt eine detaillierte Auseinandersetzung mit Ablauf und Steuerung von Schreibprozessen sowie mit der Qualität der Schreibprodukte (z.B. Fix 2008). Als Voraussetzungen zum fachlichen Schreiben können Sprachverständnis und Beherrschung der Schriftsprache gesetzt werden. Im Kontrast zum literarischen Schreiben stehen beim fachlichen Schreiben festgelegte Inhalte im Vordergrund: zum einen der (individuelle) Lernprozess selbst und zum anderen die fachlichen Inhalte.

Metakognitive Strategien unterstützten die Steuerung und Reflexion des individuellen Arbeitsprozesses. Voraussetzungen zum Einsatz dieser Strategien sind eine entsprechende Motivation und Selbstwirksamkeitsüberzeugung der Lernenden. Im mathematischen Lernprozess unterstützen metakognitive Strategien vor allem die Reflexion des mathematischen Vorgehens und des eigenen Lernprozesses, wie es bspw. für eine Fehleranalyse unverzichtbar ist. Um das Schreiben schließlich im Fachunterricht zu verankern, bedarf es einer Anbindung an mathematische Kompetenzen und somit einer fachdidaktischen Aufarbeitung. Dabei setzt das Schreiben in und über Mathematik ein elementares inhaltliches Verständnis voraus. Sprache und insbesondere das Schreiben unterstützen im fachlichen Rahmen die typischen Tätigkeiten des Definierens und Argumentierens.

Die Fachdidaktik beschäftigt sich mit allen unterschiedlichen Aspekten des fachlichen Schreibens: beispielsweise mit der sprachlichen Qualität (z.B. Waywood 1992) als Indikator für das Verständnis der Lernenden und der Reflexion von Lernprozess und Inhalten (z.B. Hoffman/Powell 1989).

Im Zusammenspiel dieser drei Teilbereiche kann sich das mathematische Schreiben als flexible Prozesskompetenz und Werkzeug zur Unterstützung der Kognition (z.B. Hußmann in Leuders 2011) entfalten.

2. Forschungsinteresse und Design

Im vorliegenden Projekt geht es, im Kontrast zu anderen Forschungsarbeiten, explizit um den Aufbau der Prozesskompetenz des mathematischen Schreibens und noch nicht um deren Nutzung zum inhaltlichen Kompetenzerwerb. Der erste Interessensbereich liegt in der theoretischen Aufarbeitung um die Vielfalt fachdidaktischer Arbeiten zu Einzelaspekten in ein Gesamtkonzept zur mathematischen Schreibkompetenz einzuordnen. Das erarbeitete Modell (vgl. 1) bildet die Grundlage für die weitere methodische und empirische Arbeit. Im nächsten Schritt erfolgt eine systematische Auseinandersetzung mit geeigneten Schreibanlässen sowie individuellen und globalen Lernhürden bezüglich des Schreibens in der Zielgruppe (Ehret 2011). Ziel ist die Konzeption einer angemessenen Schreibförderung.

Im empirischen Teil der Arbeit wird der Kompetenzaufbau in je zwei fünften Klassen an drei Werkrealschulen begleitet. Die Intervention lehnt sich maßgeblich an das Lehrwerk Mathewerkstatt (Barzel, Hußmann, Leuders, Prediger 2012) an, das Sprech- und Schreibanlässe konzeptionell berücksichtigt und systematisch aufbaut Das Interesse liegt dabei zunächst auf der Erhebung der Lernausgangslage um verschiedenen Lernerprofilen und somit möglichen Lernhürden auf die Spur zu kommen. Dies geschieht mittels standardisierter Testinstrumente (Ehret 2012). In einem Pre-Post-Design werden desweiteren die Entwicklung der fachbezogenen metakognitiven Strategien mit Hilfe eines normierten Fragebogeninstruments sowie die Schreibkompetenz mittels eines selbst entwickelten Aufgabensatzes fachbezogener Schreibanlässe erhoben. Dieser Teil der Erhebung wird zusätzlich mit einem Kontrollgruppendesign abgesichert.

Weiterführend wird in einem qualitativen Design in der Interventionsgruppe ein möglicher Zusammenhang zwischen Lernausgangslage und Entwicklung bezüglich des mathematischen Schreibens weiterverfolgt. Mit zusätzlichen Schülerprodukten aus dem laufenden Unterricht und Einzelinterviews können individuelle Entwicklungsverläufe nachgezeichnet und Hypothesen über verschiedene Schreibtypen gewonnen werden.

3. Erste Ergebnisse und Ausblick

Die im Rahmen des Modells grundgelegten Voraussetzungen wurden mittels standardisierter Testinstrumente erhoben: das Sprachverständnis mittels eines Lesetests (Elfe 2006), die fachlichen Basiskompetenzen mit einem sprachfreien Rechentests (HRT 2005) sowie Motivation und Selbstbild mittels entsprechender Skalen (Pisa 2000). Es wird vermutet, dass sowohl bezüglich der inhaltlichen als auch der metakognitiven Lernvoraussetzungen Lernerprofile existieren und es somit insgesamt eher schwächere und stärkere Lernende bzw. Lernende mit deutlichen Präferenzen im mathematischen oder sprachlichen Bereich gibt.

Tatsächlich korrelieren die sprachlichen und mathematischen Leistungen in der Erhebungsgruppe (n=136) mit r=.208* eher schwach. Mittels Mediansplitting kann die Population in die oben genannten vier Profile aufgeteilt werden. Dabei liegt der Median mit T-Wert 41,0 (Elfe) bzw. T-Wert 41,8 (HRT) im Vergleich zur Norm (T-Wert 50) deutlich niedriger (entsprechend ungefähr Prozentrang 20). Da eine Randomisierung der Stichproben nicht möglich war wurde außerdem die Verteilung der Profile in der Interventions- (n=99) und der Kontrollgruppe (n= 55) auf Vergleichbarkeit überprüft. Diese ist grundsätzlich gegeben.

In paralleler Vorgehensweise lassen sich die Profile bezüglich der metakognitiven Voraussetzungen wiederfinden. Herausforderung der Erhebung bezüglich metakognitiver Aspekte ist die Nutzung der Sprache als Medium, die zuvor als problematischer Lernbereich identifiziert wurde. Entsprechend gelang es den Lernenden nicht, die Konstrukte Selbstbild und Motivation bezüglich Mathematik und Deutsch zuverlässig zu trennen (r (Selbstbild/Motivation Mathematik) = .510**; r (Selbstbild/Motivation Deutsch) = .293*). Infolge dessen wurden jeweils fachspezifische Skalenwert gebildet, die keine Korrelation aufwiesen. Neben der fehlenden diskriminanten Validität der beiden Konstrukte ist auch die Reliabilität nur begrenzt zufriedenstellend. (Kronbachs Alpha (Deutsch) = .651; Kronbachs Alpha (Mathematik) = .805) Auf Grund der anzunehmenden sprachlichen Schwierigkeiten wurde eine sprachfreie Inhaltsvalidierung mit einer bildhaften Ein-Item-Skala durchgeführt (Moser Opitz 2007). Dabei konnten die vorigen Ergebnisse, auch hinsichtlich der mangelnden Trennschärfe der Konstrukte, mit hoher Korrelation bestätigt werden.

Ebenfalls durch deutlich signifikante Korrelationen (r (Mathematik) = .355**; r (Deutsch) = .390**) bestätigt wird der enge Zusammenhang zwischen inhaltsbezogenen und metakognitiven Lernvoraussetzungen bezüglich der Lernbereiche Mathematik und Sprache.

Die Analyse der Schreibprodukte erfolgt auf Grundlage des Zürcher Textanalyserasters. (Hanser, Nussbaumer & Sieber 1992) Das Vorgehen erfolgt in drei Stufen: der Analyse von Bezugsgrößen (hier: Textlänge erfasst über die Anzahl der Wörter), die Analyse der sprachlichen Korrektheit und der inhaltlichen Angemessenheit und Relevanz. Die vorliegenden Zwischenergebnisse beziehen sich ausschließlich auf die erste Stufe. Dabei wurde die Steigerung der Textproduktion in der Interventionsgruppe (n=99) im Verhältnis zur Kontrollgruppe (n=55) untersucht. Im Vergleich zur Kontrollgruppe ist dabei eine signifikant bessere Textproduktion im Nachtest festzustellen. Im Fortgang der Auswertung wird ein Zusammenhang mit den Lernerprofilen bezüglich der Lernvoraussetzungen betrachtet sowie ein Abgleich mit der inhaltlichen Analyse der Schreibprodukte vorgenommen.

Literatur

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo;Prediger, Susanne (2012): Mathewerkstatt. Berlin: Cornelsen

Ehret, Carola (2011): Kompetenzen und Hürden beim Schreibenlernen im Mathematikunterricht – Pilotstudie im Rahmen des Projekts Kosima. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011.

Ehret, Carola (2012): Lernausgangslage und Rahmenbedingungen zum Schreiben im Mathematikunterricht in der Eingangsstufe der Hauptschule. In: Beiträge zum MAthematikunterricht 2012.

Fix, Martin (2008): Texte schreiben. Schreibprozesse im Deutschunterricht. Paderborn, München: Schöningh.

Haffner,J.; Baro, K.; Parzer, P.; Resch, F. (2005): HRT 1-4, Heidelberger Rechentest, Erfassung mathematischer Basiskompetenzen im Grundschulalter. Göttingen: Hogrefe Verlag

Hoffman, M. R. & Powell, A. B. (1989): Mathematical and commentary writing: Vehicles for student reflection and empowerment. In: Mathematics Teaching, H. 126, S. 55–57.

Kunert, Mareike et.al. (2002): Pisa 2000: Dokumentation der Erhebungsinstrumente. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Lenhard, W.; Schneider, W. (2006): ELFE 1-6, Ein Leseverständnistest für Erst- bis Sechstklässler. Göttingen: Hogrefe Verlag.

Leuders, Timo (2005): Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Moser Opitz, Elisabeth (2007): Rechenschwäche - Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.

Hanser, C./Nussbaumer, M./Sieber, P.: Texte analysieren mit dem Zürcher Textanalyseraster, in: Sieber, P/Brütsch, E..: Sprachfähigkeiten. Besser als ihr Ruf und nötiger denn je. Aarau/Frankfürt: Sauerländer. S. 141-302

Waywood, Andrew (1992): Journal Writing and Learning Mathematics. In: For the Learning of Mathematics, H. 12 (2) June, S. 34–43.

Andreas EICHLER, Alexandra STURM, Bärbel BARZEL & Lars HOLZÄPFEL, Freiburg

Integriertes Medienkonzept in der Mathematiklehrerausbildung (IM²)

1. Einleitung

> „In der modernen Wissensgesellschaft müssen Studierende aller Lehrämter außerdem Basiskompetenzen im Umgang mit neuen Medien erwerben: mathematische Software dient zur Veranschaulichung, als heuristisches Instrument und zur Konstruktion von Problemlösungen; das Internet ist als Medium zur Informationsbeschaffung unabdingbar.“ (DMV, GDM, MNU, 2008)

Tatsächlich ist die Forderung, neue Medien in der Ausbildung von Mathematiklehrkräften einzusetzen, nicht neu, wie das Zitat der drei für den Mathematikunterricht maßgeblichen Verbände zeigt.

Im Gegensatz zu den genannten Forderungen ist national wie international allerdings festzustellen, dass der Mathematikunterricht mit Neuen Medien in Schulen nicht im gewünschten Maße anzutreffen ist (Barzel, 2012; Pierce & Ball, 2009). Auch in der Hochschulausbildung für das Lehramt wird etwa in Deutschland die Verwendung von Neuen Medien im Mathematikunterricht nur punktuell berührt.

Daher ist der Kerngedanke der hier vorgestellten Innovation für die Hochschullehre, ein *I*ntegriertes *M*edienkonzept in der *M*athematiklehrerausbildung (IM²) in das Lehramtsstudium zu implementieren und dieses so zu gestalten, dass die Studierenden im eigenen Lernprozess erfahren, Mathematik mit Neuen Medien zu lernen und zu betreiben, Lernprozesse mit Neuen Medien anzuregen, zu leiten und zu reflektieren und schließlich eine neue Lernkultur im Fach Mathematik zu erfahren und zu vertreten.

In diesem Beitrag wird die Struktur des Projekts, das durch einen sogenannten fellowship im Rahmen des durch den Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft initiierten Programms „Exzellenz in der Lehre“ durch die Baden-Württemberg Stiftung unterstützt wird, sowie erste Ergebnisse der begleitenden Evaluation vorgestellt.

2. Struktur des Projekts

Im Rahmen des Projekts IM^2 werden neue Medien in allen verpflichtenden fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Grundveranstaltungen des Lehramtsstudiums für die Sekundarstufe I integriert. Die Integration bezieht sich dabei auf Vorlesungen, Übungen und Abschlussprüfungen. Für die Wahl des Mediums war hier die Maßgabe entscheidend, ein möglichst einheitliches Instrument mit der Möglichkeit einer Tabellenkalkulation, eines dynamischen Geometriesystems sowie eines Computer-Algebra-Systems zu verwenden. Weiterhin musste der infrastrukturellen Bedingung der Hochschule Rechnung getragen werden, die einen flächendeckenden Einsatz von Laptops in Großveranstaltungen mit der Möglichkeit des Netzwerkbetriebs über einen Vorlesungstag hinweg nicht ermöglicht. Damit wurde als Medium ein Handheld (TI NSpire CAS) ausgewählt, um den Rahmenbedingungen wie auch den Anforderungen an das einzusetzende Gerät zu genügen.

Als wesentliche Ziele für die Studierenden wurde deren selbständige Erfahrung im Betreiben von Mathematik mit neuen Medien (fachwissenschaftliche Veranstaltungen) sowie dadurch bedingt die selbstverständliche Initiierung von Lernprozessen (fachdidaktische Veranstaltungen) definiert.

Die wesentlichen Einsatzmöglichkeiten des Rechners in den bisher innerhalb des Projekts durchgeführten Lehrveranstaltungen beziehen sich auf

- die präzise Beschreibung von mathematischen Phänomenen, die mit Hilfe des Rechners exploriert werden. Ein Beispiel sind dazu Phänomene der euklidischen Geometrie (Abb. 1, links).
- das Explorieren von Parametern eines mathematischen Objekts, etwa einer Funktion (Abb. 1, Mitte) sowie
- die Bewältigung von komplexen, im Kern aber elementaren Berechnungen sowie großen Datensätzen (Abb. 1, rechts).

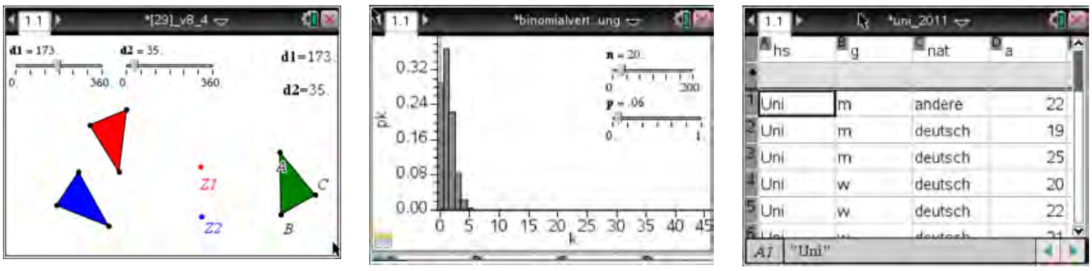


Abb. 1: Verschiedene Szenarien für den Einsatz des Rechners in fachwissenschaftlichen Grundveranstaltungen des Lehramtsstudiums

Bezogen auf die oben genannten Ziele wurden mögliche Risiken des Programms insbesondere bezogen auf die Studierenden als Abnehmer und mögliche unterstützende Maßnahmen, um diesen Risiken entgegenzuwirken, identifiziert. Um etwa einer möglicherweise negativen Einstellung der Studierenden im ungewohnten Umgang mit dem Rechner entgegenzuwirken, wurde ein möglichst stetiger Einsatz der neuen Medien in den Veranstaltungen geplant und zwar anhand von Problemen, die sowohl der inhaltlichen Ausgestaltung der Veranstaltungen genügen, als auch den Mehrwert des Rechners deutlich machen. Für die technische Unterstützung wurden Übungsgruppen verkleinert, spezifische Sprechstunden angeboten und ein spezifisch für die mathematischen Grundveranstaltungen entwickeltes Online-Kompendium bereitgestellt.

3. Evaluation

Die Evaluation im Programm IM^2 orientiert sich an den oben genannten Zielen und Risiken. Die Evaluation wurde mit Hilfe eines Fragebogens durchgeführt. Dieser enthält offene und geschlossene Items zum Umgang und zur Akzeptanz der Studierenden mit dem Rechner (12 Items), zur Einschätzung der Einbindung des Rechners in die Veranstaltungen (9 Items), zur Motivation und zu den Überzeugungen hinsichtlich des Rechnereinsatzes (9 Items), zu der spezifischen Behandlung von veranstaltungsspezifischen Aufgaben (15 Items) sowie zum Bild von der Mathematik. Die Fragebögen wurden am Ende der jeweiligen Veranstaltungen von den Studierenden im Hörsaal ausgefüllt. Ausgewertet wurden bisher die Fragebögen von drei Veranstaltungen im Zeitraum von drei Semestern (Arithmetik und Zahlbereiche; Geometrie; Funktionen und Algebra).

Bezogen auf offene Items ist eine Änderung in der Akzeptanz in den ersten beiden Semestern festzustellen, wie die beiden Aussagen eines Studierenden nach dem ersten und dem zweiten Semester illustrieren:

<u>Arithmetik & Zahlbereiche</u>	<u>Geometrie</u>
„Wenn man mit den Befehlen vertraut ist, kann der Rechner sicher sinnvoll sein. Ich bevorzuge jedoch die geistige Arbeit und nutze den Rechner daher extrem selten“	Für welche mathematischen Tätigkeiten würden Sie den Rechner nehmen, anstatt von Hand zu rechnen? „Für fast alle, außer Beweise“

Der hier sichtbare qualitative Unterschied bildet sich auch in den quantitativen Daten derjenigen Studierenden ab, die über beide oben genannten Veranstaltungen befragt werden konnten (n = 37; Tab. 1; Vergleich von Mittelwerten bezogen auf eine fünfstufige Likert-Skala von 1: Ablehnung bis 5: Zustimmung). Die Items sind hier illustrierend gebraucht. Entsprechende Ergebnisse sind auch für die Skalen selbst vorhanden.

In ähnlicher Weise verändern sich auch insgesamt die Einschätzungen der Studierenden zur Selbstwirksamkeit, zur Motivation sowie zur Sinnhaftigkeit des Rechners als Medium in den Veranstaltungen, wenn man im Längsschnitt die Veranstaltungen über drei Semester verfolgt. Allerdings ist hier die zugrunde liegende Stichprobe noch zu klein, um weitergehende Schlüsse ziehen zu können.

	Zahlbereiche & Arithmetik	Geometrie	p-Wert
Das Gerät wurde in die Vorlesungen in angemessenem Maße eingebunden.	2,59	4,19	<0,001
Die rechnerbezogenen Übungsaufgaben haben einen sinnvollen Rechnereinsatz hervorgerufen.	3,50	3,97	0,008
Der Rechner bereichert das Lernen von Mathematik.	3,11	3,61	0,01

Tab. 1: Mittelwertunterschiede von Einzelitems zu den Skalen Einsatz des Rechners in den Veranstaltungen und zur Motivation des Lernens von Mathematik mit dem Rechner.

4. Diskussion

Die bisherigen Ergebnisse geben einen Hinweis darauf, dass die Integration von neuen Medien mitsamt der unterstützenden Maßnahmen im Projekt IM^2 einen Einfluss auf die Vorstellungen der Studierenden zum Lernen von Mathematik mit Neuen Medien haben. Allerdings ist noch nicht gesichert, dass sich diese Vorstellungen tatsächlich stetig verbessern oder ab die Veränderungen durch die unterschiedlichen mathematischen Domänen bedingt sind. Zu dieser Frage sowie zu der Frage, ob die Studierenden den Rechner auch als Medium für den eigenen Unterricht wertschätzen wird erst der vollständige Längsschnitt über die gesamte Studienzeit der Teilnehmerinnen und Teilnehmer an der Evaluation zeigen können.

Literatur

Barzel, B. (2012). Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert – aber wann? Münster: Waxmann.

DMV, GDM, MNU (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik – Empfehlungen von DMV, GDM, MNU.* http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf

Pierce, R., & Ball, L. (2009). Perceptions that may affect teachers' intention to use technology in secondary mathematics classes. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 299–317.

Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Von der Schwierigkeit der Vermittlung zwischen Mathematik und dem Rest der Welt

1. Von der Existenz zweier Welten

Die Einsicht in die Nützlichkeit der Mathematik für praktische konkrete Fragestellungen des Alltags ist für uns Menschen keineswegs selbstverständlich (Wigner, 1960). Insbesondere scheint es sehr schwer zu fallen, Mathematik auf die erfahrbare Welt beziehen zu können. Mathematische Objekte existieren in unserem Kopf, sie sind geistige Entitäten. Ein idealer Kreis existiert in der erfahrbaren Welt genauso wenig wie ein idealer Würfel oder die Zahl drei. Mathematische Begriffe sind idealisierte Konstrukte. Mathematik existiert somit ausschließlich im Reich unserer Ideen und Vorstellungen. Diesem gegenüber steht das Reich der sinnlich erfahrbaren Welt, in dem es bestenfalls dünne Anhäufungen von Blei um einen gegebenen Punkt herum (aber keine Kreise), drei Äpfel und drei Bleistifte (aber keine Zahl drei an sich) und schon gar keine idealen Zufallsgeneratoren gibt. Als Wissenschaft hat die Mathematik mit einigen Geisteswissenschaften wie etwa der Philosophie und der Theologie gemeinsam, dass die Gegenstände, mit denen sie sich vordringlich befassen in einem idealisierten Universum, nicht aber in der empirisch erfahrbaren Welt existieren. Stehen sich hier zwei getrennte Welten gegenüber, ähnlich wie in Martin Luthers (schon auf Augustinus zurückgehender) Zwei-Reiche-Lehre, wonach der Christ in zwei Reichen lebt (Althaus, 1957): dem unvollkommenen *Weltlichen Reich* und dem vollkommenen *Reich Gottes* oder *Geistlichen Reich*? Wie können wir für Lernende den Gegensatz zwischen dem Reich der Mathematik und der erfahrbaren Welt überbrücken?

2. Von der Kluft zwischen mathematischem Modell und Realität

Zwischen der „Welt“, d.h. dem innerweltlichen Problem und seinem mathematischen Repräsentation klafft immer eine Kluft. Mathematisches Modell und Realität sind nicht identisch. Das ist vielleicht die wichtigste Lektion, wenn Schülerinnen und Schüler lernen, wie man Mathematik auf Probleme dieser Welt anwendet. Die Realität ist oft so komplex, dass sie sich einer exakten mathematischen Beschreibung entzieht, während jeder beobachtete Sonderfall stark mit einzigartigen Besonderheiten versehen ist. Die mathematische Beschreibung zielt hingegen auf eine allgemeinere Gültigkeit ab. Modelle sind naturgemäß nicht die Wirklichkeit, sondern eine Vereinfachung des Durcheinanders, das die Realität uns präsentiert. Um die Realität zu vereinfachen, opfern Modelle Details und machen im Idealfall den Blick frei für das Wesentliche. Bei der Betrachtung realer Daten, d.h.

in der Welt tatsächlich gemessener Werte, wird man immer wieder Abweichungen zwischen Daten und Modell feststellen. Es ist ja gerade die Absicht der Modellbildung einen idealisierten Zusammenhang herzuleiten, bei dem man von unwesentlichen Details absieht. Die Mathematik kann zu einem tieferen Weltverständnis maßgeblich beitragen. Das gelingt aber nur, wenn das nach neuen Erkenntnissen suchende Subjekt (d.h. der Modellierer) sich des dialektischen Verhältnisses zwischen Mathematik und dem Rest der Welt bewusst ist und die beiden Welten miteinander in einen Dialog bringt.

3. Forschungsfrage:

Um zu sehen, wie Lernende mit der Diskrepanz zwischen Daten und mathematischem Modell umgehen und wie sie argumentieren, haben wir 119 Studierende aufgefordert, eine vorgegebene Modellierung schriftlich zu kommentieren.

3.1 Fragestellungen:

- Nehmen Lernende die Kluft zwischen Mathematik und Rest der Welt als konstitutives Element der Modellbildung wahr?
- Diskutieren Sie plausible sachbezogene Gründe für Abweichungen zwischen Modell und Daten?
- Beurteilen sie die Angemessenheit eines Modells im Wechselspiel zwischen Mathematik und Sachkontext?
- Ziehen sie Alternativmodelle in Betracht?

3.2. Stichprobe:

119 Studierende für Lehramt Sekundarstufe I (Haupt- und Realschule), davon 73 *vor* und 46 *nach* Besuch der Vorlesung „Anwendungsorientierte Mathematik“ im Sommersemester 2012 bzw. Wintersemester 2012/2013

3.3. Methode:

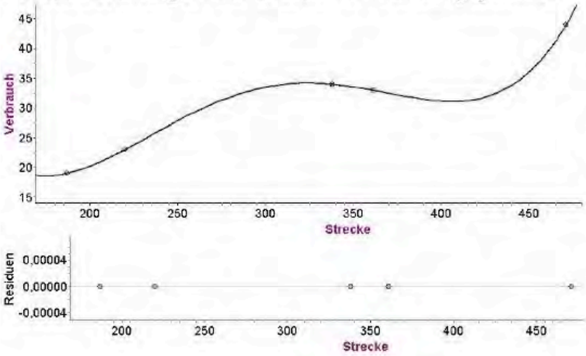
Vorgegeben war eine ausgearbeitete Modellierung des Zusammenhangs zwischen Spritverbrauch und Länge einer mit PKW gefahrenen Strecke.

Aufgabe:
Bei fünf Fahrten mit dem PKW (Opel Zafira mit Flüssiggas) wurde der verbrauchte Sprit (Flüssiggas) und die gefahrenen Kilometer gemessen, um ein Modell für den Zusammenhang zwischen diesen beiden Variablen zu erhalten. Die Daten stehen in nebenstehender Tabelle.
Als Modell hierfür wurde folgendes Polynom 4. Grades vorgeschlagen

	Strecke	Verbrauch
1	187 KM	19 L
2	220 KM	23 L
3	338 KM	34 L
4	361 KM	33 L
5	471 KM	44 L

$$y=\frac{38972834203}{873796484616677160}x^4-\frac{56951151413}{1057864993482660}x^3+\frac{20217831117400793}{873796484616677160}x^2-\frac{256287712573314827}{62414034615476940}x+\frac{9590260999286308}{34840370200027}$$

Folgende Abbildung zeigt die Daten in einem Streudiagramm mitsamt eingepasster Kurve sowie im unteren Teil ein Residuendiagramm. *Das Residuendiagramm ist eine Darstellung der Abweichungen der Daten von der eingepassten Funktion.*



Kommentieren Sie die Angemessenheit dieses Modells für den Zusammenhang zwischen Verbrauch und gefahrenen Kilometern für diesen Autotyp. Ist dieses mathematische Modell geeignet oder können Sie gegebenenfalls ein besseres Modell vorschlagen.
Begründen Sie möglichst präzise!

4. Resultate

Eine ausführliche Darstellung Analyse der Antworten ist Gegenstand einer kommenden Publikation. Hier können nur stellvertretend ein paar typische Reaktionen der Studierenden (im Originalwortlaut) wiedergegeben werden. Einige Studierende schauen ausschließlich auf die mathematische Seite der Aufgabenstellung und stellen keinen Bezug zum Sachkontext her.

- *Dieses Modell passt sehr gut, ist geeignet, da das Residuendiagramm keine größeren Ausschreitungen der einzelnen Punkte aufzeigt. Die Punkte liegen alle auf einer Linie.*

Ein anderes Argumentationsmuster stellt zwar einen Bezug zum Sachkontext her, nimmt die Realität jedoch sehr verzerrt war, damit sie sich der mathematischen Sichtweise ganz anpasst.,

- *Das Modell mit den dazugehörigen Daten passt hervorragend, da es keinerlei Abweichungen auf dem Residuendiagramm gibt. Da dieses Modell die Wirklichkeit widerspiegelt, sind die Werte nicht linear, wie es eigentlich sein müsste, da der Verbrauch bei gleichbleibendem Streckenverhältnis und zunehmender Distanz linear steigen müsste ..*

Viele Studierende können sich nicht von den konkret vorliegenden Daten lösen. Sie sind dann sogar bereit, das Modell für das vorliegende Fahrzeug zu akzeptieren ohne den nicht-monotonen Kurvenverlauf in Frage zu stellen. Sie sind aber nicht bereit, die Abweichungen zwischen Modell und Daten aufgrund nicht erhobener Verzerrungen (Fahrstil etc.) als für das Modell unerhebliche Zufallseffekte zu akzeptieren.

- *Dieses Modell ist nicht gut geeignet für die Bestimmung des Verbrauchs, da bei* <u>anderen Autos</u> *die Kurve wieder ganz anders aussehen könnte. Somit kann man auch* <u>keine Voraussagen</u> *treffen. Außerdem reichen nicht 5 Daten aus, um ein gutes Modell zu bestimmen.*

- *Meiner Meinung nach wurde hier schlecht modelliert. Man kann nicht entnehmen wo das Auto fuhr (Stadt, Landstraße). Auch die Steigung wurde außer Acht gelassen. Das Modell ist somit nur sehr schlecht in die Realität übertragbar. Monotone Tendenzen, welche einen Durchschnitt beschreiben sind hier sinnvoller ..., da man so Voraussagen durchschnittlich treffen kann*

- *Dieses Modell ist sehr gut den Daten angepasst, jedoch unbrauchbar, da das Modell keinen Sinn ergibt. Diese Kurve passt nur genau zu diesen Daten (also diesem Auto) ist jedoch für keine Aussage eines anderen Wagens brauchbar.*

Bei einer Gesamtbetrachtung der Antworten aller Studierenden lassen sich einige Trends identifizieren, die sich in vielen Bearbeitungen finden. Das Wechselspiel zwischen Mathematik und dem Rest der Welt wird oft nicht bedacht. Auch nach Besuch der Vorlesung zur Anwendungsbezogenen Mathematik wird der Sachkontext nicht unbedingt stärker berücksichtigt. Der Umgang mit Abweichungen zwischen Modell und Daten ist oft deterministisch geprägt. Ein gutes mathematisches Wissen alleine genügt nicht um das hier vorgestellte Modell angemessen validieren zu können. Es kann sogar schaden, wenn die Realität nur noch durch die Brille gewisser mathematischer Methoden wahrgenommen wird. (Meta-)Wissen um Sinn und Zweck des Modellbildens ist zentral.

Literatur

Althaus, P. (1957). Luthers Lehre von den beiden Reichen im Feuer der Kritik.*Luther-Jahrbuch*, S. 42.

Wigner, E. (1960).The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics,* Vol. 13. New York: Wiley

Ralf ERENS, Freiburg

Rekonstruktion von curricularen Überzeugungen zum Analysisunterricht

1. Einleitung und theoretischer Rahmen

Die Bedeutung individueller Überzeugungen von Lehrkräften zu ihrem Mathematikunterricht werden in der nationalen und internationalen Diskussion immer wieder betont (Hannula, 2012). Untersuchungen haben gezeigt, dass die Planung und Durchführung des Mathematikunterrichts wesentlich durch die curricularen Überzeugungen der Lehrkräfte beeinflusst werden und diese mittelbar über die reale Unterrichtspraxis einen Einfluss auf das (Mathematik-) Lernen der Schülerinnen und Schüler haben (Hiebert & Grouws, 2007). Viele Erhebungen konzentrieren sich jedoch allgemein auf die Vorstellungen zur Mathematik oder zum Mathematiklernen. So wie die Mathematik aus verschiedenen Teildisziplinen besteht, so gibt es Hinweise darauf, dass die Überzeugungen von Lehrkräften spezifisch für einzelne mathematische Teildisziplinen sind (Eichler & Erens, 2012). Daher liegt der Fokus dieses Beitrags auf den Überzeugungen von Lehrkräften zum Analysisunterricht als zentralem Themenbereich des Curriculums in der Sekundarstufe II.

Die Ergebnisse bestehender Forschung zu Curricula und Unterrichtspraxis haben gezeigt, dass zwischen den verschiedenen Ebenen von institutionellen Lehrplanvorgaben bis hin zur unterrichtlichen Realisierung ein Transformationsprozess stattfindet (Stein et. al., 2007). Staatliche Rahmenpläne und Schulbuch-Curricula können aus der Sicht der Lehrkräfte als objektive Ebene eines Curriculums verstanden werden. Daneben gibt es die Ebene der *individuellen* lehrerspezifischen Interpretation und Fokussierung auf bestimmte Inhalte und die damit verbunden Ziele. *Tatsächliche Curricula* umfassen die praktische Umsetzung der individuellen Curricula der Lehrer im Analysisunterricht (vgl. Erens & Eichler, 2012). Wesentliches Ziel des Projekts ist es, die beiden zentralen, auf die Lehrkräfte bezogenen Aspekte, des *individuellen* und *tatsächlichen (Lehrer-)Curriculums* zu untersuchen.

In der mathematikdidaktischen Forschung gibt es Ansätze, die Verbindung und Relationen dieser Curriculumsebenen zu untersuchen. Diese werden meist unter dem Konstrukt der *beliefs* oder auch *belief systems* geführt. Auch wenn eine definitorische Vielfalt innerhalb der *belief*-Forschung beobachtbar ist, besteht ein Konsens hinsichtlich der Bedeutung von *beliefs*. Diese wird darin gesehen, dass sie für Lehrkräfte einen Filter hinsichtlich des Betreibens sowie des Lernens von Mathematik darstellen (Eichler, 2011). Um die Vorstellungen der Lehrkräfte strukturieren und begrifflich präzise fassen zu können, werden subjektive Annahmen, Überzeugungen und Zielsetzungen der Lehrkräfte unter das sozialpsychologische Konstrukt der Subjektiven Theorien (Groeben et.al. 1988) subsumiert. Als zentrale Bestandteile der Subjektiven Theorien von Lehrkräften zur Planung von Mathematikunterricht werden die von den Lehrkräften intendierten Inhalte sowie die damit verbundenen Ziele im Hinblick auf den Analysisunterricht aufgefasst.

2. Studie und methodisches Vorgehen

In dem hier vorgestellten Projekt sollen die Überzeugungen von Lehrkräften hinsichtlich des Lehrens und Lernens von Analysis – bezogen auf inhaltliche und prozessbezogene Ziele und die Handlungsrelevanz dieser Ziele im Unterricht – im Übergang vom Ende der Universitätsausbildung bis zur professionellen Schulpraxis untersucht werden. Die Stichprobe besteht aus zehn Absolventen, die am Beginn der zweiten Phase der Lehramtsausbildung Mathematik stehen, zehn Referendaren des Lehramts Gymnasium im zweiten Ausbildungsjahr sowie zehn Lehrkräften des Gymnasiums mit mindestens fünf Jahren Unterrichtserfahrung. Die Erhebung der Subjektiven Theorien zum Analysisunterricht basiert auf halbstrukturierten Leitfadeninterviews, in denen die Lehrkräfte zu den Aspekten Unterrichtsinhalte, Ziele des Analysiscurriculums, Materialien und (institutionelle) Rahmenbedingungen befragt werden. Die Fragen des Interviews werden vertieft durch die Einforderung von konkreten Beispielen, insbesondere Einstiege für neu zu erarbeitende Begriffe und Ideen.

Um die Unterschiede der Subjektiven Theorien der Lehrkräfte hinsichtlich der Planung von Analysisunterricht mittels qualitativer Inhaltsanalyse zu kategorisieren, wurden die Aspekte Formalismus, Anwendung, Problemlösen und Schemaorientierung gewählt, die sich in bisherigen Studien als Kernkomponenten der Subjektiven Theorien von Lehrkräften herauskristallisiert haben (z.B. Eichler, 2011).

3. Ergebnisse

Ein sehr wichtiges Ziel für einige der befragten Lehrkräfte ist die Einbeziehung von realitätsorientierten Beispielen und Fragestellungen, wie es exemplarisch Frau N im gesamten Interview kohärent beschreibt:

> „ Das ist mir ein persönliches Anliegen, die Funktionen irgendwie greifbar zu machen, […] dass wir mit der Analysis Zusammenhänge beschreiben können, die aus dem Alltag stammen oder die einen direkten Bezug dazu haben“.
>
> „Vom inhaltlichen ist mir am wichtigsten, dass die Schüler am Ende alltägliche oder wissenschaftliche alltägliche Dinge modellieren können.“

Elementare Begriffe und Methoden der Analysis anhand von realen Problemen einzuführen und erfahrbar zu machen ist ein zentrales Ziel für Frau N. Eine besondere Betonung liegt in dieser Äußerung auf dem Potential der modellbildenden Aktivitäten sowie auf der Verbindung der Methoden der Analysis zur Realität. In Abgrenzung zu anderen Lehrkräften, die realitätsorientierte Aufgaben als Lernprinzip zur Motivation der Schülerinnen und Schüler einsetzen, ist für diese Lehrkraft die Modellierung ein Lernziel in ihrem Überzeugungssystem zum Analysisunterricht.

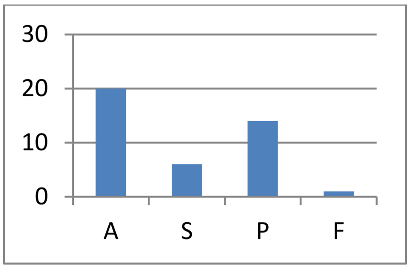
Eine Erweiterung des zentralen Ziels der Anwendungsorientierung illustriert die folgende Passage des Interviews:

> „Die mathematischen Denk- und Arbeitsprozesse in der Analysis sind mir, nach dem Alltagsbezug, am wichtigsten. Einfach ein logisches und analytisches Denken zu schulen, was einem in allen möglichen Bereichen weiterhelfen wird.“

Zahlreiche weitere Äußerungen zur Anwendungs- und Prozessorientierung unterstützen die Hypothese, dass diese beiden, hierarchisch gegliederten Aspekte zentrale Teile des Überzeugungssystem von Frau N sind: Sie wählt konsistent aus den vorgelegten Prompts und Beispielaufgaben diejenigen aus, die die beschriebene Hierarchie stützen und fundieren. Andere Aspekte werden dagegen abgelehnt:

> „ …die formale Strenge und Präzision würde ich gerade bei der Analysis nicht ansetzen, …, bei der Analysis hat man die Möglichkeit, Näherungswerte zu bestimmen, Sachen zu modellieren, auch mal auszuprobieren,…“

In obigem Zitat findet sich nicht nur eine Ablehnung des Formalismus-Aspekts, sondern ebenfalls eine Bestätigung der zentralen Überzeugung zum Thema Anwendung. In der Summe der gewichteten Kodierungen im gesamten Interview findet sich die in den exemplarischen Zitaten geäußerte Hierarchie der deduktiven Kodieraspekte in quantitativer Hinsicht wieder (Abb. 1, links).



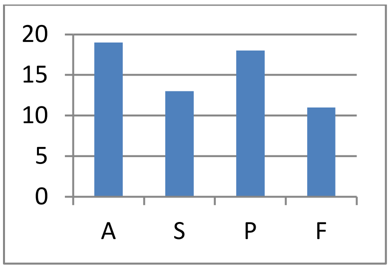


Abb. 1: Summe der gewichteten Kodierungen aus dem Interview (links) und Gewichtungen aus dem Fragebogen (rechts) zu den Aspekten Anwendung (A), Schema (S), Prozess (P) und Formalismus (F)

Die qualitative Auswertung der Interviews wird in der Studie unterstützt durch einen parallel eingesetzten Fragebogen, der auf standardisierten Items beruht (Grigutsch et al., 1998), die für diese Untersuchung speziell auf den Analysisunterricht adaptiert wurden. Die o.g. Hierarchie ist konsistent in den Fragebögen sichtbar (Abb. 1, rechts). Im Interview zeigen sich jedoch die Vorteile der qualitativen Inhaltsanalyse. Die Kategorien können an verschiedenen Stellen mit Substanz und klaren Belegen und zu verschiedenen Prompts mit Inhalt gefüllt und ausdifferenziert werden. Die Identifikation von zentralen Überzeugungen lassen sich damit eher verifizieren als mit den Fragebogenitems.

4. Diskussion

Die bisherigen Ergebnisse zu den curricularen Überzeugungen von Lehrkräften lassen den Schluss zu, dass mittels der verschiedenen Untersuchungsinstrumente eine konsistente Rekonstruktion und Beschreibung der individuellen subjektiven Theorien auf verschiedenen Ebenen möglich ist. Die qualitativen Resultate tragen dazu bei, verschiedene Überzeugungsgrade zu identifizieren und dabei auch die (hier nicht beschriebenen) weniger zentralen Ziele erklären zu können. Weiterhin ist es möglich, die zentralen Überzeugungen nicht nur zu nennen, sondern auszudifferenzieren und bis auf die tatsächliche Aufgaben- und Unterrichtssituation zu beschreiben. Die qualitativen Ergebnisse können darüber hinaus auf ihre Passung zu den quantitativen Auswertungen überprüft und entsprechend validiert werden.

Literatur

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. In C. Batanero, G. Burril & C. Reading, (Hrsg.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series, Bd. 15. Heidelberg, New York: Springer.

Erens, R. & Eichler, A. (2012). Teachers´ curricular beliefs referring to calculus, In: *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (ICME), Seoul, Korea.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik 19, 1*, 3-45.

Groeben, N., Wahl, D., Scheele, B. & Schlee, J. (1988). *Forschungsprogramm Subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen: Franke.

Hannula, Markku S. (2012): Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. In: *Research in Mathematics Education* 14 (2), S. 137–161.

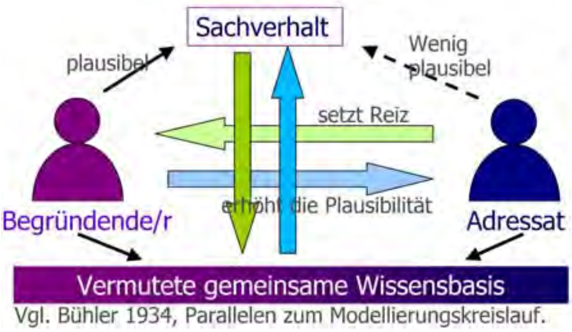
Hiebert, G.D., & Grouws, J. (2007). The effect of classroom mathematics teaching on students’ learning. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 371-404). Charlotte: Information Age Publishing.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Christian FAHSE, Landau

Argumentationstypen

Das Professionswissen zu den prozessbezogenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist eine unverzichtbare Grundlage für die Gestaltung von Mathematikunterricht, wobei die Argumentationskompetenz die Voraussetzung für substantielle Interaktionen innerhalb der Lerngruppe darstellt. Die hier vorgestellte empirische Studie möchte mit einer auch für den Unterricht griffigen Typeneinteilung einen Beitrag zu dem benötigten Professionswissen bezüglich der Argumentationskompetenz liefern.



Sachverhalt – ist auf Grund einer geteilten Kommunikations- und Wissensbasis formulierbar und für verschiedene Interakteure unterschiedlich plausibel.

Beweisen – hat als (unerreichbares) Ideal die deduktive Begründungskette

Begründen – hat als Ziel den Plausibilitätsgrad eines Sachverhaltes bei einem Adressaten zu erhöhen. Hierzu wird der Sachverhalt mit einem Bereich der gemeinsam geteilten Wissensbasis verknüpft.

Argumentation – Oberbegriff. Bezieht sich auf einen umfassenderen Prozess, in den sich die Begründung als eine Phase eingliedert, oder auf Charakteristika der Begründungen bei verschiedenen Sachverhalten.

Abb. 1: Schema des Begründens und Glossar

Begriffsklärung und Modell des Begründens

Die Studie geht von einem Modell des Begründens aus, das an gängige kommunikationstheoretische Ansätze angelehnt ist (Bühler 1934, Kopperschmidt 1995, Harel & Sowder 1998). Begründet wird ein Sachverhalt, der den Interakteuren in unterschiedlichem Maß plausibel, akzeptabel oder gesichert erscheint. Dieser Grad der Plausibilität (oft mit „Wahrscheinlichkeit" umschrieben) sei auf einer Ordinalskala zu verorten. Unter „Begründen" wird hier jede Antwort auf den Reiz „Erkläre, weshalb Du den Sachverhalt für plausibel hältst" bzw. „Bewirke, dass ich den Sachverhalt für plausibler halte" verstanden[1]. Damit wird Begründen grundsätzlich dialogisch aufgefasst, wobei allerdings der Adressat auch eine interne Instanz sein kann. Die Reizantwort kann prinzipiell auch gestisch, mimisch, deiktisch und im weiteren Sinn handelnd erfolgen. In jedem Fall wird sie aber den zu begründenden Sachverhalt mit einem Bereich verknüpfen, dessen Strukturen eine von beiden Dialogpartnern geteilte Plausibilität besitzen, zumindest vermutet der oder die Begründende diese tendenziell vorliegen-

[1] Siehe Abb. 1. In Lehrer-Schüler-Interaktionen, in denen die Lehrkraft bereits von dem Sachverhalt überzeugt ist, tritt Begründen nur als eine Art Rollenspiel auf. Aus diesem Grund sind Interaktionen innerhalb der Lerngruppe im Allgemeinen nicht nur aus pädagogischer, sondern auch aus didaktischer Sicht wertvoller.

de Übereinstimmung. Begründen wird hiermit nicht als „Vorstufe des Beweisens“ gefasst, da eine deduktive Begründungspraxis nicht das (unerreichbare) Ideal der Argumentation, sondern nur einen Spezialfall unter anderen darstellt. Argumentation umfasst nach Bezold 2009 mehr als Begründen. Im Folgenden beziehe sich Begründen auf einen speziellen Sachverhalt im Gegensatz zum Oberbegriff Argumentation, der die Begründung auch jenseits des konkreten Sachverhaltes charakterisiert.

Zur Studie

An einem rheinland-pfälzischem Gymnasium wurde ein fragebogenbasierter Test in den Jahrgangsstufen 7, 9, 11, 13 (N=365) durchgeführt. Die Stufe 11 wurde dabei aus organisatorischen Gründen zu Anfang der 12. Jgst. befragt. Die Fragen lauteten: (A) Was ist das Ergebnis der Aufgabe 7:0? (B) Begründe Deine Meinung so, dass jemand, der die Antwort nicht kennt, es versteht. Ergänzend wurden Kontrollparameter, etwa zum Leistungsvermögen, erhoben und leitfadengestützte Interviews durchgeführt. Die Forschungsfrage, die an dieser Stelle im Zentrum steht, lautet: Lassen sich sinnvolle Argumentationstypen identifizieren? Kriterien dazu siehe unten.

Die Typenbildung erfolgte in einem Wechselspiel von Clusterung und stoffdidaktischer Analyse. Dabei wurden den Typen in z. T. hohem Maße operationalisierbare Indikatoritems zugeordnet. Es ergaben sich die folgenden drei Argumentationstypen.

Reichhaltig Begründende

Inhalt und Art der Begründung sind im Prinzip fachlich sinnvoll, auch wenn das Ergebnis möglicherweise falsch ist oder die Begründung fehlerhaft und unvollständig ist. Der zu begründende Sachverhalt wird mit einem strukturreichen Bereich verknüpft. Handlungen oder Operationen sind deshalb häufiger zu verzeichnen.

Typische Beispiele sind Vorstellungen zum Hineinpassen („die 0 passt unendlich oft in die 7“) und zu konkreten Verteilungssituationen („7 : 0 = 7. Also wenn man 7 Kuchenstücke hat und sie an null Leute verteilt, hat man immer noch 7 Stücke“).

Pseudofachlich Begründende

Es werden zwar fachliche Garanten genannt, diese sind aber in grundlegender Weise nicht korrekt. Denn bei der Verknüpfung mit der gemeinsamen Wissensbasis ist entweder die Verknüpfung nicht belastbar (z. B. Analogie zu $7^0 = 1$) oder der Bereich ist zu strukturarm. Zu Letzterem zählen Phantasieregeln („Alle Rechnungen mit Null ergeben 0“), Aussagen zum Wesen der Aufgabe oder der Objekte („0 hat keine Bedeutung“). Infolge der

Strukturarmut gibt es kaum Handlungen oder Operationen außer Analogiebildungen und Generalisierungen. Einige Texte wirken wie eine oberflächliche Imitation einer fachlichen Begründung. Im Extremfall werden erfundene Formen und Begriffe verwendet.

Apodiktisch Begründende

Hier werden keine fachlichen Garanten verwendet, sondern Autoritätsgaranten wie z. B. die Lehrkraft oder auch der Taschenrechner. Die einfache Wiederholung der Aussage kann als Bezug auf die eigene Autorität im Sinne von „so ist es eben, ich weiß es" gedeutet werden. Bisweilen wird sogar betont, dass eine fachliche Begründung nicht notwendig ist. Dies zeigt einen utilitaristischen Umgang mit der Mathematik.

Typische Beispiele: „[...] Da braucht man nichts weiter erklären sondern das ist einfach so." „Es ist eine Regel, dass man durch Nichts nicht teilen kann. Man muss es [s]ich einfach merken." Im letzten Text erkennt man, dass es sinnvoll ist, die einfache Generalisierung (für alle Zahlen gilt die Regel) zum apodiktischen und nicht zum pseudofachlichen Typ zu zählen (vgl. Harel & Sowder 1998).

Diskussion

Typen lassen sich grundsätzlich willkürlich bilden. Was zeichnet eine gelungene Typenbildung aus? Sie sollte

- unterrichtspraktische Konsequenzen haben
- sich an eine Theorie oder Aussagen der Literatur anbinden lassen
- deutliche (und interpretierbare) Muster in der Anwendung zeigen.

Der Autor hält eine Thematisierung der drei Typen im Unterricht in schülerangemessener Sprache für möglich. „Das sieht aus wie Mathematik, aber wenn man genau hinsieht, ergibt es keinen richtigen Sinn" könnte z. B. eine Umschreibung des pseudofachlichen Typs sein. Apodiktische Argumentationen kann man dadurch begegnen, indem man zunächst ihren Wert herausstellt. Für Ingenieure ist z. B. die Verlässlichkeit der Quelle wichtiger als der Beweis einer mathematischen Aussage. Und auch Schüler/innen steigern den Grad der individuell zugeschriebenen Plausibilität eines Sachverhaltes nicht unbedingt durch einen selbst verfassten – und damit möglicherweise fehlerhaften – Beweis. Deshalb sind Beweise für Schüler/innen nicht unbedingt die besten Begründungen. Kontrastierend hierzu kann dann der Wert reichhaltiger Begründungen im Diskurs des Unterrichts und in der Mathematik thematisiert werden.

Die Dreiteilung der Typen schließt sich organisch an das oben vorgestellte Modell des Begründens an: Apodiktisch Begründende nennen außerfachliche (Autoritäts-)Garanten. Pseudofachlich Begründende verknüpfen mit einem strukturarmen und reichhaltig Begründende mit einem reichhaltigen Bereich. In der qualitativen Studie von Harel & Sowder 1998 entspricht „authoritarian proof scheme“ dem apodiktischen, sowie „ritual“ und „symbolic“ ungefähr dem pseudofachlichen Begründen. Auch diese Autoren finden mehrere Argumentationstypen bei ein und derselben Person vertreten.

Mit Mustern sind positive oder negative Korrelationen zu anderen Merkmalen gemeint. Im einfachsten Fall sind dies Gegenüberstellungen von Teilstichproben derselben Untersuchung. Z. B. scheint sich in der Jgst. 7 (N = 93) abzuzeichnen, dass leistungsstarke Schüler/innen eher reichhaltig argumentieren, aber in der Gruppe derjenigen mit einem richtigen Ergebnis die apodiktisch Argumentierenden dominieren. Auch unterscheiden sich die Klassen stark voneinander.

Da die Untersuchung allerdings noch nicht abgeschlossen ist, können hier keine quantitativen Ergebnisse berichtet werden. und auch die getroffenen Aussagen zur Typenbildung stehen noch unter Vorbehalt. Es liegen allerdings bereits erste Hinweise vor, dass die hier vorgestellte Typenbildung auch bei anderen Inhalten tragfähig ist.

Im AK Vergleichsuntersuchungen dieser Tagung wurde diskutiert, ob mit den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife eine Chance vertan wurde. Das Anknüpfen an die prozessbezogenen Kompetenzen scheint für eine nachhaltige Unterrichtsentwicklung sinnvoll, denn auch die seit Jahren gültigen Standards für den Mittleren Schulabschluss sind längst noch nicht von allen Lehrkräften verinnerlicht. Wichtiger als Aufgabendatenbanken sind dabei Trainingsprogramme für prozessbezogene Kompetenzen wie z. B. das Argumentieren.

Literatur

Bezold, A. (2009): Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule. Hamburg: Kovac.

Bühler, K. (1934): Sprachtheorie: die Darstellungsform der Sprache. Jena: Fischer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students’ Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In: Research in Collegiate Mathematics III. Providence, RI (S. 234–282). American Mathematical Society.

Kopperschmidt, J. (1989). Methodik der Argumentationsanalyse. Stuttgart, Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog.

Maria FAST, Wien

Typische Entwicklungsverläufe von Lösungswegen beim Addieren und Subtrahieren von Klasse 2 bis 4

Die Erforschung des arithmetischen Denkens von Schülerinnen und Schülern, insbesondere der Verlauf von Lösungswegen bei Addition und Subtraktion, steht im Mittelpunkt des Erkenntnisinteresses. In einer qualitativen Längsschnittstudie (Paneldesign, N = 44) mit sechs Erhebungszeitpunkten werden durch Fallvergleich und Fallkontrastierung Ähnlichkeiten und Unterschiede in den Lösungswegen, Lösungsquoten und Fehlermustern identifiziert. Ausgehend von der Frage, wie sich die Lösungswege von Kindern bei Additions- und Subtraktionsaufgaben von der zweiten bis zur vierten Schulstufe entwickeln, und dem bereits publizierten Forschungshintergrund (Fast 2012) werden nachfolgend die gefundenen Typen vorgestellt und interpretiert.

Typische Entwicklungsverläufe

Bestimmend für die Typenbildung ist die Vergleichsdimension *Lösungswege* mit den Ausprägungen *Zählen, Rechnen in den Stellenwerten* und *Zahlenrechnen,* in der die Art des Vorgehens, speziell die Verknüpfung der Teilschritte bei den einzelnen Rechnungen einbezogen wird. In die zweite Vergleichsdimension *Lösungsquote* fließen neben der Anzahl der richtigen Lösungen das Zahlverständnis, insbesondere auch Fehlermuster, mit ein.

Vor dem unterrichtlichen Hintergrund eines „routine approach" (Heinze, Marschick & Lipowsky 2009, S. 594), der durch Anschauungsmaterialien mit einem stark stellenorientiertem Konzept wie Zehnersystem-Blöcke und Rechengeld gekennzeichnet ist, konnten sieben Typen identifiziert werden. Die noch nicht endgültig abgeschlossene Bezeichnung der Typen erfolgt derzeit teilweise beschreibend und teilweise inhaltlich-charakterisierend.

Die ersten drei angeführten Typen von Entwicklungsverläufen bei Kindern favorisieren das Zerlegen der Zahlen in ihre Stellenwerte. Eingesetzt werden vorwiegend Split-Methoden wie *stellenweises Rechnen*, *ziffernweises Rechnen* (Schipper 2009, S. 140) und *algorithmische Rechenverfahren*. Dies erfolgt mit unterschiedlicher Lösungsquote, je nach Verständnis des Stellenwertsystems und impliziter Kenntnis der Rechengesetze.

Typ 1: Kinder, die *durchgängig stellenwertrechnend, mit hoher Lösungsquote,* vorgehen, wissen von Beginn der zweiten Schulstufe an um die Bedeutung von Zehnern und Einern, sie bündeln bzw. entbündeln und verknüpfen entsprechend der gültigen Rechengesetze. Diese Kinder verwenden keinerlei Ableitungsstrategien. Sie sind auf ihre Art (verhalten) kreativ

(Selter 2009), allerdings nur innerhalb der einzelnen Stellenwerte, die sie in vielfältigen komplexen Teilschritten richtig ausführen und zur Gesamtrechnung zusammensetzen.

Typ 2: Kinder, die *durchgängig stellenwertrechnend, mit mittlerer Lösungsquote*, vorgehen, unterscheiden meist von Beginn der zweiten Schulstufe, sicher am Ende der zweiten Schulstufe, zwischen Zehnern und Einern. Manchmal zählen sie. Sie können bei Zehnerüberschreitungen am Ende der zweiten Schulstufe bei der Addition bündeln, aber bei der Subtraktion nicht entbündeln. Erst in der dritten Schulstufe zeigen die Kinder Sicherheit beim Rechnen im Zahlenraum 100. Im Zahlenraum 1 000 dagegen sind sie, im Gegensatz zu den Kindern, die *durchgängig stellenwertrechnend mit hoher Lösungsquote* vorgehen, weniger sicher. Am Ende der vierten Schulstufe werden fast alle Aufgaben entweder durch schriftliche Rechenverfahren, aber auch durch *ziffernweises Rechnen*, vorwiegend richtig gelöst.

Typ 3: Beim Entwicklungsverlauf *von ziffern- zu algorithmisch rechnend, mit niedriger Lösungsquote,* rechnen die Kinder von der zweiten bis zur vierten Schulstufe fast nur stellenweise, sehr oft mit den Ziffern in den Stellenwerten, die sie (wenig verstanden) abarbeiten. Zu Beginn der zweiten Schulstufe sind sie großteils zählende Rechner/innen und wissen nicht um die Bedeutung zwischen Zehnern und Einern. Zu Beginn der dritten Schulstufe zeigen die Kinder vielversprechende Ansätze zum Rechnen mit Zahlganzheiten, vorwiegend kombinierte Lösungsmethoden, die jedoch nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren Mitte der dritten Schulstufe gänzlich verschwinden. Bei diesem Entwicklungsverlauf treten die niedrigsten Lösungsquoten auf. Verlässlich hohe Lösungsquoten ergeben sich erst, wenn die schriftlichen Rechenverfahren vorschriftsmäßig verwendet werden. Das gelingt frühestens am Ende der vierten Schulstufe. Kinder dieses Typus sind verfahrensorientierte Rechner/innen mit unsicherem Zahl- und Operationsverständnis.

Die nächsten drei angeführten Typen beschreiben Entwicklungsverläufe von Kindern, welche beim Rechnen eher die Zahlganzheiten sehen und öfters Jump-Methoden, wie *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden*, praktizieren. Diese Kinder verwenden, im Gegensatz zu den bis jetzt beschriebenen „Stellenwert“-Typen auch Ableitungsstrategien, wie z. B. *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* (Schipper 2009, S. 134).

Typ 4: Kinder, die *durchgängig überwiegend zahlenrechnend, mit hoher Lösungsquote*, vorgehen, verwenden ab der zweiten Schulstufe vorwiegend *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden*. Die in dieser

Studie eingesetzten Rechnungen lösen sie durch Kopfrechnen, weniger mit schriftlichen Rechenverfahren. Auch nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren, am Ende der dritten Schulstufe, werden weiterhin *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden* praktiziert. Nicht universelle Lösungsmethoden, wie *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation*, werden gehäuft erst am Ende der vierten Schulstufe eingesetzt. Während bei den Stellenwertrechner/innen häufig Stellenwertfehler auftreten, fehlen sie bei diesem Typus.

Typ 5: Kinder, die *durchgängig überwiegend flexibel, mit hoher Lösungsquote, rechnen*, lösen auf der zweiten und zu Beginn der dritten Schulstufe Additionen *stellenweise* (in Zahlganzheiten) und Subtraktionen *schrittweise*. Ab Ende der dritten Schulstufe treten vermehrt nicht universelle Lösungsmethoden, wie *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* auf. Ausgehend von einer gewissen individuellen Adaptivität (Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière 2006) erreichen diese Kinder hohe, in dieser Untersuchung die höchsten Lösungsquoten. Sie können als flexible, im weitesten Sinn auch als adaptive Rechner/innen mit einem gesicherten Zahlverständnis bezeichnet werden.

Typ 6: Kinder, die *zufällig auswählend, weniger aufgabenadäquat, mit mittlerer Lösungsquote, rechnen,* praktizieren *zählendes Rechnen*, *schrittweises Rechnen*, *stellenweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden*, später auch algorithmische Rechenverfahren und *ziffernweises Rechnen.* In der vierten Schulstufe setzen sie auch vereinzelt *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* ein. Durch Stellenwert-, Operations- und Rechenfehler werden nur mittlere Lösungsquoten erreicht. Diese Kinder zeigen ein Verständnis von Zahlen und auch ein Wissen über Rechenoperationen, das sie manchmal, aber nicht immer zeigen. Ihr Wissen divergiert mit dem tatsächlichen Verhalten (Blöte, Klein & Beishuizen 2000).

Typ 7: Beim Typus *von zahlenrechnend zu stellenwertrechnend, mit mittlerer Lösungsquote*, ändert sich im Verlauf der Entwicklung die Sicht auf Zahlen. Die Kinder verwenden bis Mitte der dritten Schulstufe eher *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden*. Nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren praktizieren sie mehr Split-Methoden, die vorerst, am Ende der dritten Schulstufe, unergiebig beherrscht, jedoch bis Ende der vierten Schulstufe perfektioniert werden. Diese Kinder sind „vorschriftsmäßige“ Rechner/innen, welche die im Unterricht bzw. im Schulbuch vorgestellten Verfahren verstehen und anwenden.

Zusammenfassung und Interpretation

Fast alle Entwicklungsverläufe sind dadurch charakterisiert, dass sie sich in den gleichen Ausprägungen bezüglich Zahlverständnis und Wissen über Rechenoperationen weiter entwickeln. Kinder scheinen ein bestimmtes Verständnis von Zahlen und der darauf aufbauenden additiven Verknüpfungen zu haben, das sie über die Jahre beibehalten und auf Basis des bei dieser Untersuchung stattfindenden Unterrichts nicht aufgebrochen werden kann. Die Kinder gewinnen an Routine und Geläufigkeit, allein der Blick auf Zahlen und das Vorgehen beim Lösen von Rechenoperationen bleiben gleich.

Algorithmische Rechenverfahren verstärken ziffernorientierte Lösungsmethoden. Sie treten in dieser Untersuchung auch schon vorher auf, was vermutlich auf den Einsatz von vorwiegend stellenwertorientierten Anschauungsmaterialien zurückzuführen ist.

Die niedrigsten Lösungsquoten und die unsichersten Konzepte treten bei Kindern auf, welche ausschließlich einzeln Stellenwerte verknüpfen. Sehen die Kinder hingegen Zahlganzheiten und verknüpfen sie diese dementsprechend, reduzieren sich die Stellenwertfehler und die Lösungsquote steigt. So gibt es kaum Zahlenrechner/innen mit niedriger Lösungsquote.

Flexibles Rechnen tritt nur in Entwicklungsverläufen auf, bei denen die Kinder auch in Zahlganzheiten denken. Um die in dieser Untersuchung auftretende reduzierte Sicht auf Zahlen aufzubrechen, bedarf es offenbar gezielter Interventionen bezüglich eines umfassenden Verständnisses von Zahlen, insbesondere von Zahlganzheiten und deren Verknüpfungen.

Literatur

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000): Mental computation and conceptual understanding. Learning and Instruction, 10, 221–247.

Fast, M. (2012): Wie Kinder addieren und subtrahieren. Längsschnittliche Analysen von Klasse 2 bis Klasse 4. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM-Verlag, 241–244.

Heinze, A., Marschick, F. & Lipowsky, F. (2009): Addition and subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. In: ZDM The International Journal on Mathematics Education, 41, 591–604.

Schipper, W. (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

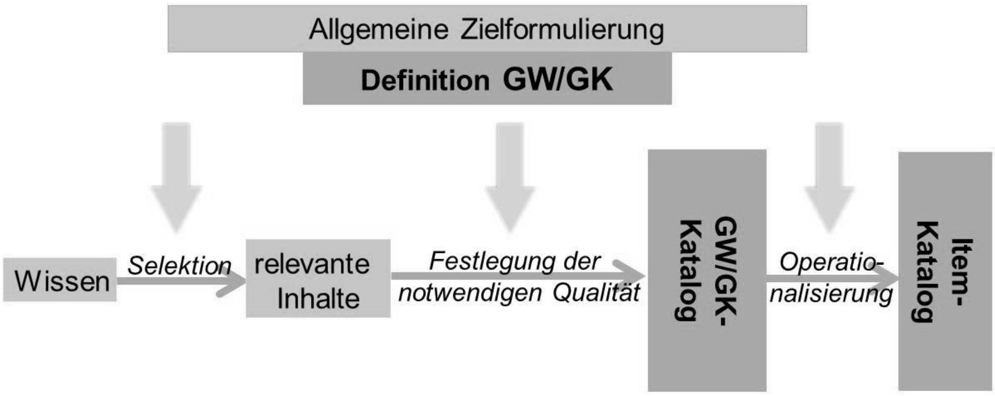
Selter, C. (2009): Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. In: ZDM The International Journal on Mathematics Education, 41, 619–625.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2006): Developmental changes of children's adaptive expertise in the number domain 20 to 100. In: Cognition and Instruction, 24, 439–465.

Nora FELDT, Darmstadt

Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen durch ein theoriegeleitetes Vorgehen

Der Prozess der Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen durchläuft in der Regel folgende Schritte (vgl. Abb.): In einer anfänglichen Zielformulierung werden die Ziele festgelegt, die durch den Erwerb von Grundwissen und Grundkönnen erreicht werden sollen. In Übereinstimmung hierzu werden in einer Definition die Eigenschaften von Grundwissen und Grundkönnen formuliert. Zielformulierung und Definition sollten auf alle weiteren Prozessschritte ständigen Einfluss nehmen. Im nächsten Schritt müssen aus dem gesamten Curriculum diejenigen Inhalte (in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren) ausgewählt werden, die der Zielformulierung und Definition entsprechend als grundlegend erachtet werden. Eine Operationalisierung führt schließlich zu einem Aufgabenkatalog.



Da die Konkretisierung und Operationalisierung von Grundwissen und Grundkönnen prinzipiell einer Festlegung von (Minimal-)Lernzielen entspricht, überrascht es nicht, dass der gesamte Prozess von der Lernzielproblematik dominiert wird, die bereits gegen Ende der sechziger Jahre ausgiebig diskutiert wurde (vgl. u.a. Teschner, 1972; Winter, 1972). Insbesondere bei der Inhaltsbestimmung wird die Schwierigkeit deutlich, aus allgemein(st)en Lernzielen konkrete, d.h. inhaltsgebundene Lernziele zu deduzieren. Hier ist letztendlich immer ein Entscheidungsprozess notwendig, der nur aus dem Spannungsfeld von Wissenschaft und Politik heraus verantwortet werden kann. Aufgabe der Wissenschaft ist es, diesen Entscheidungsprozess in allen Phasen bestmöglich zu begleiten, insbesondere ihn transparent zu machen (Teschner, 1972).

Im Folgenden soll das Konzept eines weitestgehend theoriegeleiteten Vorgehens zur Bestimmung von Grundwissen und Grundkönnen vorgestellt werden.

Zielformulierung und Definition

In Hinblick auf die aktuelle Problematik am Übergang Schule – Hochschule sowie unter Berücksichtigung allgemeinbildender Ansprüche sollen für ein Grundwissen und Grundkönnen zunächst drei zentrale Ziele formuliert werden.

Der Erwerb von Grundwissen und Grundkönnen soll in erster Linie:

- als Voraussetzung für ein erfolgreiches Weiterlernen dienen, insbesondere in einem Studium,
- die Basis für das Verstehen von Mathematik bilden,
- die Grundlagen für Reflexionsprozesse bereitstellen.

Dieser Zielformulierung entsprechend wurde folgende Definition entwickelt:

Als Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen bezeichnen wir jene mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die bei allen Schülerinnen und Schülern am Ende der beiden Sekundarstufen in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren langfristig und situationsunabhängig, das heißt insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln, verfügbar sein sollen.

Inhaltsbestimmung

Zielformulierung und Definition legen es nahe, die Selektion der Inhalte unter einer vorwiegend fachsystematischen Perspektive vorzunehmen.

Als wertvolles Hilfsmittel bei der Inhaltsbestimmung unter dieser Perspektive haben sich fachsystematisch strukturierte semantische Netze erwiesen. Zentrale Begriffe, Sätze und Verfahren lassen sich hier anhand ihrer Vernetzungen zu anderen Inhalten lokalisieren.

Qualitätsmerkmale von Kenntnissen

Doch das Ausdeuten bestimmter Inhalte als zentral reicht für die Zusammenstellung eines Grundwissen- und Grundkönnen-Katalogs noch nicht aus, denn Kenntnisse dieser Inhalte sind immer auch auf verschiedenen Qualitätsstufen denkbar. Um die Qualität von Kenntnissen näher beschreiben zu können, wurde ein auf der Tätigkeitstheorie (insbes. Pippig, 1985) basierendes Begriffssystem entwickelt. Unterschieden werden vier Qualitätsmerkmale von Kenntnissen:

Das Merkmal der *Verfügbarkeit* gibt an, inwieweit erworbene Kenntnisse zeit- und situationsunabhängig zur Verfügung stehen. Neben dem Sicheren Wissen und Können wird als weitere (und höchste) Stufe einer langfristigen und hilfsmittelfreien Verfügbarkeit die der sogenannten Elementarbausteine unterschieden, die sich durch eine automatisierte und damit bewusstseinsentlastende Verwendung der Kenntnisse auszeichnet. Kenntnisse, die nicht langfristig und hilfsmittelfrei zur Verfügung stehen, werden in Abhängigkeit von der Art der erforderlichen (Re)Aktivierung in verschiedene Stufen des (re)aktivierbaren Wissens und Könnens eingeteilt. Das exemplarische Wissen und Können fordert schließlich nur eine episodenhafte Verfügbarkeit (vgl. auch Sill, 2010). Das Qualitätsmerkmal der *Exaktheit* gibt an, inwieweit die Kenntnis eines Begriffs, Zusammenhangs oder Verfahrens mit der wissenschaftlichen bzw. didaktisch reduzierten Definition übereinstimmt. Das Maß der Exaktheit ergibt sich bei Begriffen bspw. aus dem Verhältnis der verfügbaren klassifizierungsrelevanten Merkmale gegenüber den klassifizierungsirrelevanten oder falschen Merkmalen. Inwieweit eine Kenntnis auf verschiedenen Ebenen der Abstraktion verfügbar ist und wie flexibel ein Wechsel zwischen diesen Ebenen vorgenommen werden kann, wird durch das Merkmal der *Allgemeinheit* (auch: vertikaler Transfer) beschrieben. Das Qualitätsmerkmal der *Übertragbarkeit* (auch: lateraler Transfer) gibt an, inwieweit Kenntnisse in unterschiedlichen inner- und außermathematischen Kontexten verfügbar sind. Aus der Definition von Grundwissen und Grundkönnen folgen unmittelbare Forderungen an die Verfügbarkeit und Exaktheit: Aufgrund der geforderten dauerhaften und hilfsmittelfreien Verfügbarkeit müssen die entsprechenden Kenntnisse mindestens auf der Stufe des Sicheren Wissens und Könnens verfügbar sein. Auch die höchste Verfügbarkeitsstufe der Elementarbausteine wird demzufolge zum Grundwissen und Grundkönnen gezählt, ist jedoch keinesfalls für alle Inhalte einzufordern. Ebenso muss ein Mindestmaß an Exaktheit auch – oder gerade – für die zum Grundwissen und Grundkönnen gehörenden Inhalte gefordert werden. An die Allgemeinheit und die Übertragbarkeit der Kenntnisse können aus der Zielformulierung und der Definition von Grundwissen und Grundkönnen keine allgemeinen Anforderungen abgeleitet werden, sie müssen vielmehr für jeden Inhalt gesondert festgelegt werden. Die Auswahl der als grundlegend erachteten Begriffe, Sätze und Verfahren ergibt in Kombination mit den jeweiligen Qualitätsmerkmalen einen vollständigen Grundwissen-/Grundkönnen-Katalog.

Operationalisierung

Zur Beschreibung der Schülerhandlungen, die das verfügbare Grundwissen und Grundkönnen abbilden sollen, werden die Elementaren Aneignungshandlungen bzw. Grundhandlungen von Bruder & Brückner (1989) verwendet. Das Qualitätsmerkmal der Verfügbarkeit ist in Hinblick auf eine Operationalisierung nicht weiter zu berücksichtigen, da es selbst keinerlei

Auswirkungen auf die Handlungsdimension hat, sondern sich vielmehr in den Rahmenbedingungen eines entsprechenden Tests wiederfinden würde. Eine Analyse von Aufgaben, die jeweils eines der drei übrigen Qualitätsmerkmale fokussieren, hat deutliche Zusammenhänge zwischen den einzelnen Merkmalen und bestimmten Elementaren Aneignungshandlungen bzw. Grundhandlungen offengelegt: So wird ein hohes Maß an Exaktheit durch die beiden Handlungen *Identifizieren* und *Realisieren* eingefordert. Die Handlungen des *Beschreibens* und *Begründens* verlangen hingegen einen hohen Allgemeinheitsgrad der Kenntnisse, da beide Handlungen ein Verbalisieren umfassen, das immer einen Wechsel zwischen verschiedenen Abstraktionsebenen einschließt. Die Handlung des *Verknüpfens* fordert schließlich einen hohen Grad der Übertragbarkeit der Kenntnisse ein.

Ausblick

Das Aufzeigen der Perspektive, unter der die Inhaltselektion vorgenommen wird (für einen reflexionsorientierten Zugang vgl. Schmitt in diesem Band), kann einen Aushandlungsprozess nicht ersetzen, diesen aber doch zumindest weitestgehend transparent gestalten. Ähnliches gilt für die Bestimmung der Qualitätsmerkmale. Die Entsprechung, die die Qualitätsmerkmale in den jeweiligen Handlungsdimensionen finden, ermöglicht schließlich eine relativ unmittelbare Operationalisierung des Grundwissen- und Grundkönnen-Katalogs.

Auf diese Weise soll es gelingen, den Prozess der Grundwissens- und Grundkönnens-Bestimmung schrittweise auf eine möglichst breite theoretische Grundlage zu stellen, dabei aber gleichzeitig auch die Grenzen im Blick zu behalten, an denen Entscheidungen ausgehandelt werden müssen.

Literatur

Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. *Pädagogische Forschung,* 30, 72-82.

Pippig, G. (1985). *Aneignung von Wissen und Können – psychologisch gesehen.* Berlin: Volk und Wissen.

Sill, H.-D. (2010). Probleme und Erfahrungen mit "Mindeststandards". *GDM-Mitteilungen,* 88, 5-11.

Teschner, W.-P. (1972). Wissenschaftliche Zielanalyse als Kern der Curriculumsentwicklung. In Kultusminister des Landes NRW (Hrsg.). *Beiträge zum Lernzielproblem* (S. 12-44). Ratingen: Henn.

Winter, H. (1972). Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In Kultusminister des Landes NRW (Hrsg.). *Beiträge zum Lernzielproblem* (S. 67-95). Ratingen: Henn.

Astrid FISCHER, Oldenburg; Johann SJUTS, Leer

Wie wirksam ist forschendes Lernen zum Aufbau diagnostischer Fähigkeiten?

Der **Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft** hat im Jahr 2009 mit der Initiative **Von der Hochschule in den Klassenraum: Neue Wege der Zusammenarbeit zwischen Hochschulen und Studienseminaren in der Lehrerausbildung** die gezielte Kooperation der für Lehrerausbildung zuständigen Institutionen maßgeblich vorangebracht. Zu den prämierten Projekten gehört auch das **Modellvorhaben Nordwest: Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz im Unterricht und in Lehr-Lern-Laboren** (kurz: **Lehrerausbildung im Verbundprojekt OLAW**) der Universität Oldenburg in Zusammenarbeit mit vier Studienseminaren und neun Kooperationsschulen (Fischer & Sjuts, 2011).

Im Verbundprojekt OLAW geht es darum, die zumeist weitgehend getrennt agierenden Phasen der Lehrerausbildung an der Universität und an den Studienseminaren besser zu verknüpfen. Wesentliches Kennzeichen des Projekts ist es, dass Lehramtsstudierende und Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst in Veranstaltungen der Fächer Biologie, Chemie, Mathematik und Physik zu bestimmten Themen gemeinsam forschend lernen. Lehrende der Universität und Ausbildende der Studienseminare führen dazu Seminare und Workshops im Team durch, um so die forschungs- und berufsfeldorientierte Lehrerausbildung zu stärken.

Innerhalb des Gesamtprojekts hat sich ein eigenes Fachseminar der Diagnostik im Fach Mathematik gewidmet. Beteiligt waren Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen, an Realschulen und an Gymnasien, ihre Fachleiterinnen und Fachleiter sowie Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker der Universität. Das Fachseminar bestand aus einer Einführungskompaktveranstaltung, einer von allen Lehrkräften im Vorbereitungsdienst durchzuführenden Mini-Forschung und einer Abschlusskompaktveranstaltung.

Das so angelegte Fachseminar steht beispielhaft

- für die (sonst kaum stattfindende) **Zusammenarbeit von Studienseminaren verschiedener Schulformen** mit dem Schwerpunkt **Übergang von der Grundschule auf die weiterführenden Schulen im Fach Mathematik**,

- für die (bisher erst in Ansätzen erkennbare) **Diagnostik in Mathematik** anhand der **Bildungsstandards** mit einer hier erprobten und erfolgversprechenden Aufgabengestaltung zur ausdrücklichen Verknüpfung von Diagnostizieren und Fördern,

▪ für die institutionelle Umsetzung zum **Aufbau**, zur **Weiterentwicklung** und zum **Nachweis der zentralen Berufskompetenz Diagnostik** mit einem angestrebt günstigen Verhältnis von Aufwand und Nutzen,

▪ für die **Forschungsorientierung** in der **Professionalisierung von Lehrkräften** und für die Stärkung der **Empirie im Berufsfeld Schule**.

Seit mehreren Jahren gelten Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2004). Damit rücken allgemeine und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, die für das Mathematiklernen und die Mathematik insgesamt charakteristisch sind, in den Vordergrund. Kinder sollen Gelegenheiten erhalten, selbst Probleme zu lösen und über Mathematik zu kommunizieren. Das Ziel ist die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathematischer Inhalte. Die in den Bildungsstandards beschriebenen allgemeinen Kompetenzen sind **Problemlösen**, **Kommunizieren**, **Argumentieren**, **Modellieren**, **Darstellen von Mathematik**. Mittels passender Aufgaben lässt sich der Ausprägungsgrad einer jeden Kompetenz feststellen und auf diese Weise die Anschlussfähigkeit beim Übergang von der Grundschule auf die weiterführenden Schulen zum Ausdruck bringen.

Erstellung, Einordnung und Nutzung von Aufgaben bilden ein überaus geeignetes Thema für gemeinsame Veranstaltungen von Studienseminaren verschiedener Schulformen. Die Gestaltung des Fachseminars hat dies in der Zusammensetzung von Arbeitsgruppen ausdrücklich berücksichtigt.

Im Mittelpunkt der **Einführungskompaktveranstaltung** stand die Frage: **Wie gestaltet man Aufgaben, die Denkprozesse aufdecken und Verstehensprozesse fördern?** Dazu war vorab ein umfangreicher Aufgabensatz zur Verfügung gestellt worden, aus dem an Beispielen musterhaft eine Modifizierung zu diagnostischen Zwecken erläutert wurde. Mittels eines Leitfadens waren dann entsprechende Umarbeitungen vorliegender Aufgaben vorzunehmen und vorzustellen.

In der Zeit zwischen der Einführungs- und der Abschlussveranstaltung war eine **Mini-Forschung** (in den Schuljahrgängen 4 und 5) mit den selbst gestalteten Aufgaben durchzuführen, quantitativ und qualitativ auszuwerten und schriftlich zusammenzufassen. Die forschende Beschäftigung mit den Aufgabenbearbeitungen zu den Aufgabenstellungen hatte zum Ziel, die diagnostische Kompetenz weiterzuentwickeln und die Bedeutung von Empirie im Berufsfeld zu stärken.

Eine **Abschlusskompaktveranstaltung** mit der Präsentation der Auswertungen der Mini-Forschung rundete das Fachseminar ab. Die Rückmeldung über die in den Untersuchungen sichtbar gewordenen Befunde bot Gelegenheit, die Vorstellung der Ergebnisse mit einer Erörterung zu verbinden.

Insgesamt hat das Fachseminar zu einer höheren Einstufung der Bedeutung von Diagnostik beigetragen. Die Fähigkeit, Lernergebnisse direkt zu beobachten oder sich theoriegeleitet zu erschließen, wird als wesentliches Ziel in der Erweiterung der eigenen Professionalität betrachtet. Im Kennenlernen diagnostischer Methoden liegt ein bedeutsamer Erfolg des gesamten Modellprojekts OLAW.

Wie ausgeprägt sind nach einem solchen Projekt, in dem das forschende Lernen das Vorgehen wesentlich bestimmt hat, die diagnostischen Fähigkeiten? Wie überprüft man sie? Wie **wirksam** ist das forschende Lernen? Wie lässt sich das ermitteln? Aus den Feststellungen am Ende des Fachseminars lassen sich gewisse Erkenntnisse gewinnen und einordnen:

a) Weit verbreitet sind **Fragebogenerhebungen**. Dabei kann es sich um erprobte und immer wieder eingesetzte Sets handeln, deren Ergebnisse deshalb von Wert sind, weil sie durch Mehrfacheinsatz Vergleiche erlauben. Vielfach kommen dagegen Fragebögen zum Einsatz, die eigens für die jeweilige Untersuchung erstellt werden. Kritisch anzumerken ist, dass das methodische Vorgehen auf Selbstauskünften und damit nicht auf objektiven Daten basiert.

Zu bedenken ist weiterhin, dass Fragebogenerhebungen anonym sind, was in bestimmter Hinsicht ausdrücklich sein muss. Sie werden durchgeführt, um Rückmeldungen über angebotene **Lerngelegenheiten** zu erhalten. Sie stehen allerdings in der Gefahr, durch Befindlichkeitsäußerungen geprägt zu sein, die den Lerngelegenheiten selbst nicht gerecht werden.

Zudem ist die Spannbreite der Rückmeldungen erheblich. Damit wird deutlich, dass Lerngelegenheiten nicht nur uneinheitlich bewertet, sondern auch ganz unterschiedlich genutzt werden. Nicht das Potenzial der Lerngelegenheiten für sich wird erhoben, sondern zugleich die Breite des Nutzungsausmaßes, nicht allein die Qualität des Angebots, sondern damit verbunden die Unterschiedlichkeit der Lernintensität. Identifizierbar in den Rückmeldungen der Fragebogenerhebungen sind **Nutzungsgrad** und **Lernintensität** der einzelnen Personen nicht.

b) Von diesen Vorgehensweisen abzusetzen sind die Erstellung und die Erledigung von **Forschungsaufgaben**. Hier sind Effekte aufzeigbar. So können forschend lernende (angehende) Lehrkräfte mittels geeigneter Diagnoseaufgaben einen Einblick in Vorgänge und Resultate des Lernens, Verstehens und Denkens von Schülerinnen und Schülern erhalten. Diese Art von **Praxisforschung** führt nicht selten zu unerwarteten, überraschenden Erkenntnissen. Mit bestimmten Phänomenen, Ideen und Vielfältigkeiten und ebenso mit Fehlern und Fehlvorstellungen hat man nicht gerechnet. Aus dieser Dissonanzerfahrung kann eine Auffassungsänderung, ein Bewusstseinswandel, eine Verhaltensmodifikation entstehen.

Zum Ausdruck gebracht wird diese Veränderung zunächst durch Bekenntnisse (*„Ich werde in Zukunft mehr Begründungen einfordern.“*). Unklar bleibt, in welchem Maße die Ankündigungen später tatsächlich vollzogen werden. Günstigenfalls geschieht das, mehr noch, es entwickelt sich ein **Habitus**, der dauerhaft ist und somit die Bedingung für ein berufslanges forschungsorientiertes Lernen schafft. Forschendes Lernen wirkt selbststimulierend.

c) Ob ein Aufbau diagnostischer Fähigkeiten erfolgreich verläuft, lässt sich mit aufgabenbasierten Testinstrumenten ermitteln, wenn etwa eine Abfolge Vortest, Maßnahme, Nachtest zugrunde liegt. Die verwendeten Testitems überprüfen durch ausgewiesene Fragestellungen und durch vorzunehmende Bearbeitungen vorgelegter realitätsnaher Szenarien Fähigkeiten, die im beruflichen Handeln zur **Bewältigung** authentischer Situationen erforderlich sind.

Messbar sind dann sogar quantitative Veränderungen. Allerdings haben sie in der Regel nur Aussagekraft bei der ganzen Kohorte und nicht bei den einzelnen Testpersonen. Damit bleibt der Zusammenhang von Maßnahme und Wirkung im statistischen Bereich.

Indes kann die qualitative Analyse von Testleistungen sehr aufschlussreich sein. Denn der Explikation einer Testperson zu den vorgelegten Fragen und den berufsnahen Szenarien ist durchaus zu entnehmen, über welche Fähigkeiten die Testperson verfügt. Es handelt sich dann nicht um eine Selbstzuschreibung, sondern um eine **Bewährung** unter quasi-authentischen Bedingungen. Die Testperson muss eine fallbezogene Kompetenz durch Verschriftlichung einer Analyse und einer daraus resultierenden Handlungsoption unter Beweis stellen.

Gleichwohl ist darauf hinzuweisen, dass die vorgelegte tätigkeitsfeldnahe Situation immer eine Auswahl darstellt und dass von der Bewältigung einer solchen Auswahl mit bestimmten Bedingungen nicht verlässlich oder gar zwingend auf die Bewältigung anderer Situationen und dann noch im Echtzeithandeln geschlossen werden kann.

Fazit: Beim **berufsfeldbezogenen forschenden Lernen** liegt ein hohes Maß an Verantwortung für Nutzung und Wirkung bei der lernenden Person. In dem hier dargelegten Ansatz erfolgt dabei die Rechenschaftslegung sich selbst und einer externen Instanz gegenüber durch Bewältigung und Bewährung.

Literatur:

Fischer, A. & Sjuts, J. (2011): Diagnostische Kompetenz und die Schwierigkeit der Überprüfung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, S. 807-810

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004.

Klaus-Tycho FÖRSTER, Hildesheim/Zürich

Die Programmiersprache Scratch in der Sekundarstufe I

Algorithmen sind eine fundamentale Idee für die mathematische und informatische Ausbildung in allen Altersstufen und allen Schulformen. Dieses ist seit langem ein zentraler Schwerpunkt didaktischer Untersuchungen und wird in der Literatur aus unterschiedlichsten Blickwinkeln ausführlich behandelt. Im Alltag des 21. Jahrhunderts beschränkt sich die Relevanz nicht nur auf den Unterricht dieser beiden Fächer: Algorithmen sind „*fächerübergreifend und alltagsrelevant*" (Schmidt-Thieme 2005).

Programmieren ist hierzu insbesondere hilfreich für die Überprüfung der Korrektheit von Algorithmen und ihrer formalen Präzisierung. Ebenso ist Programmierung förderlich für die Kritikfähigkeit am Ergebnis oder nach Weigand 1989 „*das Wechselspiel zwischen dem Erstellen eines Programms und dem Interpretieren der vom Computer gelieferten Ergebnisse*". Somit ist Programmieren wichtig für die Überprüfung und Bewertung komplexerer Modellierungen, sowie als Abschluss des Modellierungsverfahrens.

Die GDM forderte daher schon 1981, dass alle Mathematiklehrer die Algorithmen ihres Unterrichts in einer Programmiersprache realisieren können sollen (vergl. Weigand 1989). Aber während nach Oldenburg 2011 in den 80ern noch viele Schulbücher kleine Programme enthielten, kritisiert er, dass *„gegenwärtig im Mathematikunterricht fast nicht programmiert* [wird]*"*. Nicht nur nach Kortenkamp 2005 ist diese Entwicklung bedauerlich: *„Soll im Mathematikunterricht programmiert werden? Die kurze Antwort, ein uneingeschränktes ‚ja!' ... ".*

1. Integration von Algorithmen und Programmierung in den MU

Dieser etablierten Forderung steht in Niedersachsen durch curriculare Vorgaben in Mathematik entgegen, dass Algorithmen fast überhaupt nicht und Programmieren eigentlich gar nicht in den Lehrplänen und Schulbüchern enthalten sind, sehr wahrscheinlich auch nicht in der nächsten Iteration des Kerncurriculums Mathematik. Zwar könnte das Fach Informatik hierbei ein guter Partner sein, in Niedersachsen ist Informatikunterricht vor Klasse 10 jedoch leider fast nicht existent. Zumindest in Niedersachsen trägt damit das Fach Mathematik weiterhin die zentrale Verantwortung für die Ausbildung und Vermittlung von algorithmischem Denken!

Daher wird eine Programmiersprache benötigt, die fast unmittelbar einsetzbar und in allen Stufen verwendbar sein muss. Über die letzten Jahrzehnte gab es eine große Anzahl von verschiedenen neuen Ansätzen für die schulische Programmierung. Jedoch erfüllen die etablierten Varianten zumindest einen zuvor genannten Punkte nicht, sei es nun durch textbasierte Syntax wie in *Java* oder nur punktuelle Einsetzbarkeit wie *Turtle-Grafik* in *Logo* oder *Kara*. Bei einer zeitlichen Reduktion ausgewählter mathematischer Inhalte in den Curricula könnte Raum geschaffen werden, jedoch wird von allen Seiten um jeden Inhaltspunkt gefochten – mit guten Argumenten.

In dieser Situation bietet sich die 2007 veröffentlichte visuelle Programmiersprache *Scratch* an, die schon länger national und international in der Informatikdidaktik etabliert ist und auch in der Mathematikdidaktik genutzt wird, siehe etwa Romeike 2011 oder Wörler 2012. Scratch ist kostenfrei erhältlich für Windows/MacOS/Linux und hat diverse Erweiterungen für komplexere Projekte, wie etwa *BYOB*/*Snap* (snap.berkeley.edu), womit es auch zur Einführung in die Programmierung an Universitäten verwendet wird, siehe dazu etwa Förster 2011. Befehle in Scratch sind selbsterklärend, Syntaxfehler sind nicht möglich, Fehler (gerade in geometrischen Algorithmen) können schnell (ein)gesehen werden und auch Grundschüler ohne Programmiererfahrung haben sofort erste eigene Erfolgserlebnisse. Scratch und seine Erweiterungen sind daher sinnvoll einsetzbar in allen Klassenstufen, von der Grundschule bis zum Abitur – und darüber hinaus.

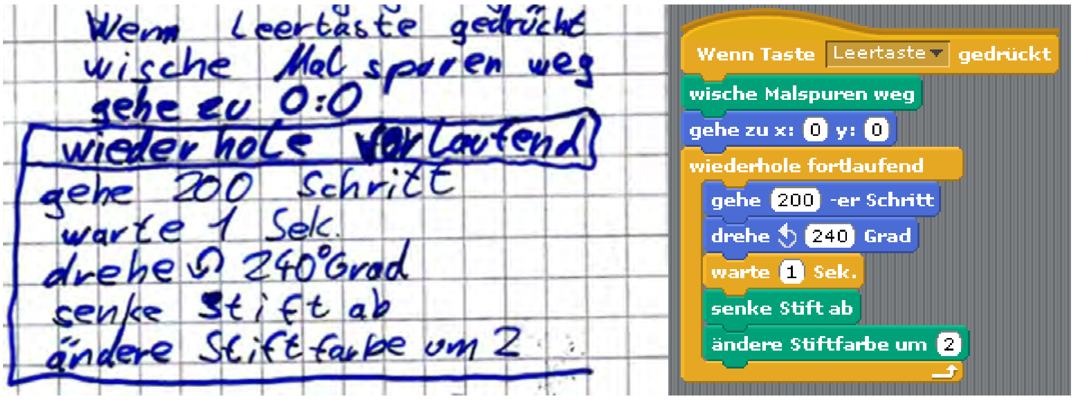
2. Bewährte Ansätze: Turtle-Geometrie & Konstruktionsbeschreibung

Nach Vollrath 1991 betonte schon Holland 1974, dass „*die klassische Konstruktionsbeschreibung nichts anderes ist als die Angabe eines Algorithmus*". Und Holland führt weiter aus, dass *„erst die Algorithmisierung der Konstruktion dazu zwingt, jeden einzelnen Konstruktionsschritt auf seine Durchführbarkeit zu überprüfen“*. Da eine vertiefte Behandlung von Variablen in Niedersachsen erst in Klassenstufe 7 erfolgt und die Einführung von Variablen in der Informatikdidaktik als einer der schwierigeren Aspekte gilt, bietet es sich naheliegender Weise an, die bewährten Aspekte der Turtle-Grafik aus Logo als begleitenden Einstieg in die mathematische Programmierung mit Scratch zu nutzen. Denn nach Hromkovič 2012 ist mit Logo eine *„hohe Interaktion und gegenseitige Befruchtung mit dem Geometrieunterricht* […] *leicht zu erreichen* […] *und prägt die Entwicklung algorithmischen Denkens“*. Selbst scharfe Kritiker der Turtle-Grafik/Logo-Philosophie räumen ein, dass die Ausbildung des Winkelbegriffs unterstützt wird, etwa bei der Konstruktion von regelmäßigen Vielecken – in Niedersachsen ein Unterrichtsinhalt der Klassenstufe 6.

3. Schulversuch: Erprobung im Unterricht der Klassenstufe 6

Uns interessierte daher vor allem, ob sich die bewährten Konzepte aus der Turtle-Grafik/Logo in Scratch umsetzen lassen und ob die gewünschte Förderung algorithmischen Denkens und formaler Präzision erreicht wird. Dazu wurde Scratch begleitend in einer Unterrichtseinheit zu Winkeln und Parkettierungen in einer 6. Klasse im Mathematikunterricht eingesetzt (15 Mädchen, 13 Jungen). Im Rahmen von zwei Doppelstunden wurde zuerst Scratch eingeführt und dann über Konstruktionsbeschreibung von Dreiecken zu Vielecken und abschließend zu Parketten weiterverwendet. Diese Vorgehensweise orientiert sich an einem Mix aus bewährten Unterrichtskonzepten von Logo und den curricularen Vorgaben in Niedersachsen.

Beim Übergang vom Dreieck zum regelmäßigen Vieleck bewegten sich die Schüler auf eine höhere Stufe des algorithmischen Verständnisses, da der Algorithmus nicht nur mehr auf eine spezifische Aufgabe beschränkt war, sondern als Konzept einer selbstdesignten „Black Box“ genutzt werden konnte. Dieser Übergang fiel nicht unbedingt leicht – oder wie es ein Schüler beschrieb, dass es beim ersten Mal schwer war, „*aber wenn man den Bogen raus hatte ging es sehr leicht*“. Als die S. eine Woche später unangekündigt gebeten wurden, ihre Vorgehensweisen noch einmal darzulegen, wählten mehrere als Sprachform eine Art Struktogramm, welche intuitiv auch beim Codieren mit den Blöcken in Scratch vorliegt.



Vergleich von nachträglicher schriftlicher Beschreibung und Scratch-Code

Somit wurde selbständig zur Beschreibung des Vorgehens oft nicht die mathematische Umgangssprache gewählt, sondern die präzise und eindeutige Sprache der Programmierung – der Vorteil der Sprachform für Algorithmen lag anscheinend für die Schüler auf der Hand.

Im Rahmen der Parketterstellung war vor allem die präzise Vorgehensweise und das Konzept der Modularisierung relevant. Ausgehend von der einzelnen Figur konnte zunächst eine Aneinanderreihung und dann daraus ein endliches Parkett erstellt werden. Hierzu waren z.T. Programme mit bis zu 30 Befehlen nötig – bei denen ein einzelner Fehler das Ergebnis zunichtemachten konnte – die von den S. erfreulich korrekt programmiert wurden.

Nach unseren Erfahrungen eignet sich Scratch daher sehr gut als begleitender Einschub in den Geometrieunterricht der Klassenstufe 6. Wir planen weitere Untersuchungen in höheren Klassenstufen zum begleitenden Einsatz von Scratch. Als Anschluss bieten sich diverse Anknüpfungspunkte an: Etwa Kongruenzsätze, Zufallsexperimente, Bisektion, das Heron-Verfahren oder der euklidische Algorithmus, wobei sich hier schon z.T. die Scratch-Erweiterung BYOB/Snap besser nutzen lässt. Eine weitere Möglichkeit ist die parallele bzw. zeitlich vorgezogene vertiefte Behandlung von Variablen sowohl aus der Sicht des Programmierens als auch aus der „klassischen" Sichtweise im Mathematikunterricht. So führt etwa Serafini 2011 aus, dass Kinder, die das Konzept der Variable über die Programmierung kennenlernen, später im Mathematikunterricht von diesen Vorerfahrungen profitieren könnten. Ein erhöhter Zeitaufwand ist hier sogar sicherlich gerechtfertigt, *„da Variablen Mittel der Verallgemeinerung sind und somit die Grundlage der formalen Betrachtung und Beschreibung von mathematischen Strukturen bilden*" (Reimann 2012).

Literatur

Förster, K.-T. (2011): Neue Möglichkeiten durch die Programmiersprache Scratch: Algorithmen und Programmierung für alle Fächer. In: BzMU 2011, 263-266.

Holland, G. (1974): Die Bedeutung von Konstruktionsaufgaben für den Geometrieunterricht.In: Der Mathematikunterricht, 20(1974), Heft 1, 71-86.

Hromkovič, J. (2012): Einführung in die Programmierung mit LOGO: Lehrbuch für Unterricht und Selbststudium. Wiesbaden: Springer Vieweg.

Kortenkamp, U. (2005): Strukturieren mit Algorithmen. In: Kortenkamp et. al. (Hrsg.): Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 77-85.

Oldenburg, R. (2011): Mathematische Algorithmen im Unterricht: Mathematik aktiv erleben durch Programmieren. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Reimann, K. (2012): Verschiedene Stufen in der historischen Entwicklung der Algebra. In: BzMU 2012, 685-688.

Romeike, R. (2011): Logos Erben – Konstruktionistische Ansätze für Mathematikunterricht und Mathematiklehrerausbildung. In: BzMU 2011, 695-698.

Serafini, G. (2011): Teaching Programming at Primary Schools: Visions, Experiences, and Long-Term Research Prospects. ISSEP 2011, 143-154.

Schmidt-Thieme, B. (2005): Algorithmen – fächerübergreifend und alltagsrelevant? In: Engel, Joachim u. a. (Hrsg.): Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatorischer Aktivitäten. Hildesheim, 177-188.

Vollrath, H.-J. (1991): Lokales Ordnen an geometrischen Konstruktionen. In: H. Postel, A. Kirsch, W. Blum (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel, Hannover, 217-228.

Weigand, H.-G. (1989): Algorithmen und Computer im Mathematikunterricht. In: BzMU 1989, 386-389.

Wörler, J. (2012): Simulieren (fast) ohne Realitätsbezug - oder: Für die Freiheit der Variation. In: Mathematik lehren, Nr. 174(2012), 41-44.

Stefan FRIEDENBERG, Bettina RÖSKEN-WINTER, Bochum

Strategien zur Lösung mathematikhaltiger Aufgaben der Technischen Mechanik

1. Sachstand

Studierende der Ingenieurwissenschaften erwerben mathematische Kompetenzen in ihrem Studium in zwei Kontexten: in der "Höheren Mathematik für Ingenieure" und situiert in Lehrveranstaltungen ihres Faches, insbesondere im Rahmen theoriehaltiger Lehrveranstaltungen wie der "Technischen Mechanik". In höheren Semestern wird von den Studierenden erwartet, dass sie diese Kompetenzen integrieren und in ingenieurwissenschaftlichen Problemlösungen anwenden können. Die Asynchronität mathematischer und ingenieurwissenschaftlicher Ausbildung wird seit Langem beklagt, ebenso die mangelnde Anschlussfähigkeit des in den Mathematikvorlesungen erworbenen Wissens. Hohe Abbrecherquoten beruhen nicht zuletzt auf dem Scheitern in den Mathematikvorlesungen und den mathematikhaltigen Lehrveranstaltungen der Ingenieurwissenschaft im ersten Studienjahr (Heublein, Schmelzer & Sommer, 2008). Des Weiteren benennen Studierende Motivationsprobleme in den Mathematikvorlesungen, weil der Bezug zum ingenieurwissenschaftlichen Studium nicht hinreichend sichtbar ist (Griese, Glasmachers, Kallweit & Rösken, 2011). Derzeit liegen weder umfassende Kompetenzmodelle noch Kompetenzerfassungs oder -messinstrumente für die Anwendung von Mathematik im Ingenieurskontext vor. Wenige Arbeiten beschreiben auf genereller Basis die mathematischen Kompetenzen der Ingenieursstudierenden (vgl. Mustoe & Lawson, 2002).

Das BMBF-geförderte Projekt KoM@ING untersucht Kompetenzen von Studierenden bei der Anwendung von Mathematik in ingenieurswissenschaftlichen Fächern. Am Beispiel konkreter Studierendenbearbeitungen typischer Aufgabenstellungen der Grundvorlesungen werden mögliche und tatsächliche Strategien der Bearbeitung aufgezeigt und analysiert. Hierbei wird ein besonderes Augenmerk auf die in den mathematischen Grundlagenvorlesungen und auch bereits in der Schule vermittelten mathematischen Problemlösefähigkeiten gelegt.

2. Kompetenzmodell und didaktische Ansätze

Grundsätzlich gehen wir von einem zweidimensionalen Kompetenzmodell aus, welches zwischen einer Wissens- und einer Prozesskomponente unterscheidet. Während in der Wissenskomponente deklaratives und prozedurales Wissen kombiniert mit technischen Fertigkeiten wie dem Ausführen von Lösungsalgorithmen verortet sind, stehen in der Prozesskomponente das Modellieren, Argumentieren, Reflektieren und Problemlösen im Vordergrund. Schnell wird jedoch bei der Aufgabenanalyse ersichtlich, dass ein Modellieren im Sinne des Modellierungskreislaufs (vgl. Blum & Leiß, 2006) keine Anwendung finden kann. Aufgabenkontexte sind keine Realsituationen, sondern entspringen der Metaebene „Technische Mechanik“. Dabei werden oft starke Vereinfachungen vorgenommen, welche dann gewissermaßen „Einkleidungen“ für die Aufgabeninhalte bereitstellen. Daher legen wir das Hauptaugenmerk unserer Untersuchungen auf das Problemlösen, welches auch im „Modulhandbuch Maschinenbau“ als bedeutender Aspekt ausgewiesen ist: „Im Modul Mathematik steht das Anwenden mathematischer Methoden zur Lösung ingenieurwissenschaftlicher Probleme im Vordergrund“. Für die didaktische Analyse der Aufgaben und ihrer Bearbeitungen greifen wir auf die Phasen des Problemlösens nach Polya (1949) und insbesondere die heuristischen Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel des Vorgehens beim Problemlösen nach Bruder und Collet (2011) zurück.

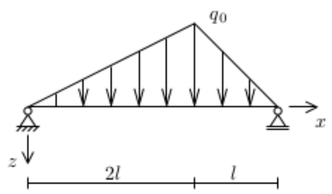
3. Beispielaufgabe

Aufgabe 4.4:

Ein Balken der Länge $3l$ wird wie skizziert durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet. Bestimmen Sie Größe und Angriffspunkt der aus $q(x)$ resultierenden Kraft R.

geg: l, q_0.

Lösung: $R = \frac{3}{2} q_0 l, \quad x_R = \frac{5}{3} l$



Einerseits kann zur Lösung der Aufgabe auf die Definitionen von Schwerpunkt und gesamt resultierender Kraft aus der zugehörigen Vorlesung „Mechanik A“ zurückgegriffen werden. In diesem Fall wird die angegeben Linienlast als stückweise lineare Funktion interpretiert und anschließend integriert, um die resultierende Kraft zu berechnen. Eine weitere Integralbeziehung liefert dann die zum Schwerpunkt gehörenden Koordinaten. Alternativ kann die Linienlast jedoch auch in zwei Teillasten aufgeteilt werden. Der jeweilige Schwerpunkt kann berechnet werden, indem man sich an die elementaren Eigenschaften der Seitenhalbierenden des Dreiecks erinnert: diese schneiden sich nämlich im Schwerpunkt und teilen einander im Verhältnis 2:1. So ergibt sich für die Schwerpunktskoordinaten des ersten Dreiecks ein x-Wert von 4/3l, für die des zweiten 7/3l. Aufgrund der doppelten Gewichtung des ersten Dreiecks (2l vs. l) liegt der Gesamtschwerpunkt damit bei $x_R = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \frac{4}{3} l + \frac{7}{3} l) = \frac{5}{3} l$. Die beiden Lösungsvarianten weisen auf deutlich unterschiedliches Vorgehen aus eher mathematischer oder ingenieurwissenschaftlicher Sicht hin. Um den Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe zu bestimmen, orientieren wir uns an den Einstufungen der Aufgabenkomplexität nach Bruder (2006).

Formalisierungsgrad F: Der Aufwand zur Mathematisierung ist insgesamt eher gering: Die gegebene Darstellung suggeriert bereits ein geeignetes Koordinatensystem, Angabe und Lage der Größen in der Abbildung unterstützen die Mathematisierung. Kategorie: niedrig (1)

Komplexitätsgrad K: Alle Lösungsschritte sind auf bekannte Grundaufgabe zurückzuführen. Die Anzahl der Lösungsschritte (und insbesondere die Verknüpfung von Lösungsschritten stark variierender Aktualität, s.u.) machen jedoch auch ein geringes Maß an Planung (vgl. *vorwärts/rückwärts arbeiten*) erforderlich; dabei hilft, dass eine in Teil (b) benötigte Größe in Teil (a) berechnet werden muss. Kategorie: mittel (2)

Bekanntheitsgrad B: Alle Lösungsschritte sind auf bekannte Grundaufgabe zurückzuführen. Die Anzahl der Lösungsschritte (und insbesondere die Verknüpfung von Lösungsschritten stark variierender Aktualität, s.u.) machen jedoch auch ein geringes Maß an Planung (vgl. *vorwärts/rückwärts arbeiten*) erforderlich. Kategorie: mittel (2)

Ausführungsgrad A: Der Rechenaufwand ist eher gering und durchschnittlich fehleranfällig (Verwendung von Bruchtermen sowie der Integralschreibweise). Kategorie: niedrig (1)

Die Aufgabenkomplexität wird insgesamt als niedrig (bis mittel) bei einer Dominanz von F eingeschätzt. Nachstehend analysieren wir die Aufgabenbearbeitung einer Gruppe von drei Studierenden.

4. Studentisches Vorgehen

Die Problemlösephasen *„1. Verstehen der Aufgabe“* und *„2. Ausdenken eines Plans“* werden zunächst eher vernachlässigt; die Studenten steigen recht zügig in die Aufgabe ein und erarbeiten sich ihr Verständnis der Situation bei den ersten Berechnungen (*Vorwärtsarbeiten* setzt keine klaren Zielvorgaben/-vorstellungen voraus, führt hier aber durchaus zu richtigen Teillösungen). Erst wenn Probleme auftreten oder erste Ergebnisse zur

Diskussion stehen, werden das Verständnis der Aufgabe und die eigene Herangehensweise reflektiert. Ein Verständnis des Problems wird nun gemeinsam aufgebaut, wobei die schriftliche Aufgabestellung (insbesondere der konkrete Arbeitsauftrag) erst spät (nach 20 Minuten) eingebracht wird. Nach vielfachem Probieren erfolgt die Phase *„2. Ausdenken eines Plans“* durch einen Analogieschluss (nach 24 Minuten). Die *heuristischen Strategien* nach Bruder und Collet (2011) kommen in der Gruppe alle zum Einsatz. Insbesondere das *systematische Probieren* mit Vorwissen (*Rückführung*) unter Verwendung gegebener Größen (*Vorwärtsarbeiten*) findet schnell Verwendung; der *Analogieschluss* ist ausschlaggebend für das *„2. Ausdenken eines Plans“*. *Heuristische Hilfsmittel* werden angemessen verwendet (Formeln als *Gleichungen*, Skizzen als *informative Figuren*, Skript und Mitschriften als *Wissensspeicher*). Verwendete *heuristische Prinzipien* sind insbesondere das *Zerlegungsprinzip/-Ergänzungsprinzip* sowie das *Invarianzprinzip* beim Analogieschluss (und das *Symmetrieprinzip* beim Verstehen der Aufgabensituation). Die Analyse der Aufgabenbearbeitung zeigt die Bedeutung des Problemlösens beim Anwenden von Mathematik im Ingenieurskontext. Weitere Aufgabenanalysen auch normativ schwierigerer Aufgaben dienen der weiteren Erfassung von Kompetenzfacetten zur Aufklärung von Zusammenhängen.

Literatur

Bruder, R. (2006). Grundlagen für Analogieschlüsse: Mathematisierungsmuster und Vorgehensstrategien in Anwendungssituationen. *Der Mathematikunterricht 52*(6), 5-18.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Griese, B., Glasmachers, E., Kallweit, M., Rösken-Winter, B. (2011): Mathematik als Eingangshürde in den Ingenieurwissenschaften. In Beiträge zum Mathematikunterricht.

Heublein, U., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2008). *Die Entwicklung der Studienabbruchquote an den deutschen Hochschulen: Ergebnisse einer Berechnung des Studienabbruchs auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2006.* HIS Projektbericht. Hannover: Hochschul-Informations-System.

Leiß, D., & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 33 - 50). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Mustoe, L. & Lawson, D. (2002). Mathematics for the European Engineer. A Curriculum for the Twenty-First Century. A Report by the SEFI Mathematics Working Group. Brussels: SEFI, 2002.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen und Basel: Francke.

Daniel FRISCHEMEIER, Paderborn

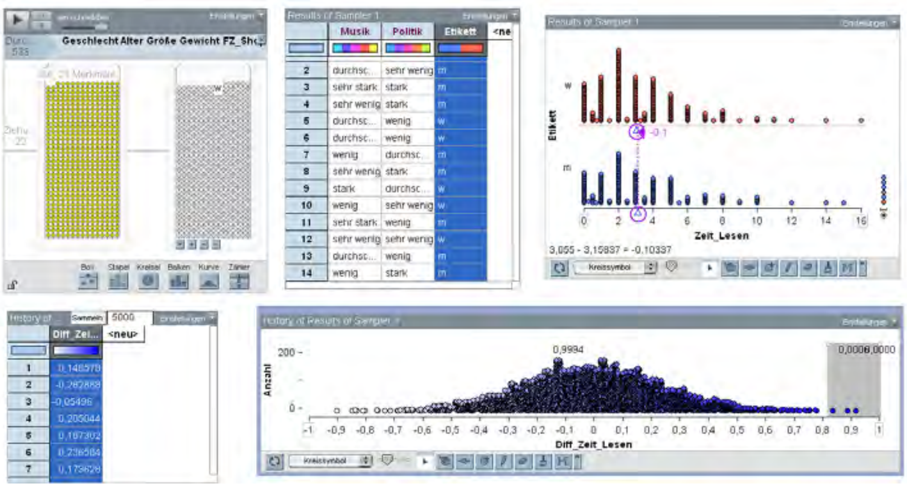
Verteilungen vergleichen mit TinkerPlots – und darüber hinaus weitere Schlussfolgerungen aus Daten generieren

Vergleiche von Verteilungen zweier quantitativer Merkmale (kurz: Verteilungsvergleiche) sind ein fundamentaler Bestandteil der deskriptiven Statistik. Wünschenswerterweise sind diese Verteilungsvergleiche in einem Datenanalysezyklus (z.B. im PPDAC-Zyklus nach Wild & Pfannkuch 1999) eingebettet, so dass diese anhand von selbsterhobenen realen Daten und selbst generierten Fragestellungen und Hypothesen durchgeführt werden. Nun liegt es nahe in einem nächsten Schritt zu versuchen, weitere Schlüsse aus den Daten zu ziehen, z.B. könnte man die Frage aufwerfen, inwieweit sich die Beobachtungen (Unterschiede zwischen den Verteilungen) verallgemeinern lassen oder ob sie nur zufällig (aufgrund der Stichprobe) entstanden sind. In diesem Artikel möchten wir eine Möglichkeit vorstellen über Verteilungsvergleiche dieser Art mithilfe von Randomisierungstests hinauszugehen und weitere Schlüsse aus den Daten zu ziehen.

1. Randomisierungstests

Neben den erhobenen Daten anhand eines selbstkonstruierten Fragebogens im Rahmen einer Umfrage unter Studienanfängern an der Universität Paderborn haben wir im Seminar (welches in Frischemeier & Biehler (2012) näher beschrieben ist) auch mit dem Muffins-Datensatz (Biehler et al., 2003) gearbeitet. Dieser Datensatz enthält über 50 Variablen zum Freizeitverhalten von 538 Schülerinnen und Schülern aus Nordrhein-Westfalen. Exemplarisch für einen Verteilungsvergleich auf Grundlage dieser Daten ist beispielsweise die Fragestellung: „Wie unterscheidet sich der Umfang der Computernutzung zwischen Jungen und Mädchen?“ (Biehler et al., 2003). Hier schließen sich, wie im obigen Abschnitt schon angedeutet, weitere Fragen an - beispielsweise: Gibt es eine Möglichkeit die Aussage zu verallgemeinern? Theoretisch könnte ein möglicher Unterschied zwischen beiden Gruppen rein zufällig (aufgrund unserer Stichprobe) entstanden sein. Wie kann man Lernenden ein Hilfsmittel oder Anhaltspunkte geben, um weitere Schlussfolgerungen aus vorliegenden Daten wie in diesem Beispiel zu generieren? Eine Alternative und ein mögliches Instrument um oben aufgeworfene Fragen zumindest qualitativ beantworten zu können, sind Randomisierungstests (Rossman, 2008, 10). Cobb (2007, 12) schlägt vor, dass Studierenden in statistischen Einführungskursen durch Randomisierungstests die Möglichkeit gegeben werden sollte die Kernideen der Inferenz zu verstehen. Dabei verweist Cobb auf drei wichtige Aspekte und die Schrittfolge beim Durchführen eines solchen Tests: „1.

Randomize data production, 2. Repeat by simulation to see what´s typical (…and what´s not), 3. Reject any model that puts your data in its tail”. An dieser Stelle müssen wir für die bei uns verwendeten Muffins-Daten eine Einschränkung machen, denn es handelt sich hier um keine Zufallsstichprobe bzw. randomisierte Stichprobe (wie bei Cobb in 1. gefordert), sondern um „observational data“. Argumente für die Durchführung eines Randomisierungstests auch unter diesen Bedingungen finden sich u.a. in Zieffler et al. (2011). Ebenso sind sich sowohl Rossman (2008) als auch Cobb (2007) einig, dass einerseits die Umsetzung ohne eine Unterstützung durch adäquate Software schwierig zu sein scheint, andererseits die Durchführung eines solchen Tests auch nicht zu software-technisch sein soll. Die Software TinkerPlots (Konold & Miller, 2011) mit ihrer visualisierten Zufallsmaschine scheint für die Durchführung in besonderem Maße geeignet zu sein. Die folgende Abbildung zeigt die Arbeitsoberfläche der Software TinkerPlots bei der Durchführung eines Randomisierungstests.



Das Vorgehen und die Durchführung eines solchen Tests mit TinkerPlots können in Frischemeier & Biehler (2013) ausführlich nachgelesen werden.

2. Eine Lernumgebung zu Randomisierungstests

Eine speziell für das Erlernen von Randomisierungstests konstruierte Lernumgebung sah neben der Einführung in die Zufallsmaschine in TinkerPlots und der Simulation einiger Zufallsexperimente das Durchführen eines Randomisierungstests anhand der Muffins-Aufgabe („Gibt es wirklich einen geschlechtsspezifischen Unterschied zwischen Jungen und Mädchen hinsichtlich ihrer Lesegewohnheiten (Merkmal: Zeit_Lesen) oder ist dieser Unterschied zufällig – aufgrund der Wahl der Stichprobe – entstanden?) vor. Als Unterstützung bekamen die Lernenden einerseits einen 6-schrittigen Randomisierungstest-Plan, der die Schrittfolge des Tests vorstrukturierte und die Schritte jeweils erläuterte, sowie ein Handout mit

„Faustregeln“ zur Beurteilung verschiedener P-Werte. Der Randomierungstest-Plan konstruiert nach dem Vorbild eines Simulationsplans (Maxara & Biehler, 2007) sollte den Lernende eine strukturierende Unterstützung bieten und den „extraneous load“ reduzieren.

3. Eine explorative Fallstudie

Im Folgenden wollen wir eine explorative Fallstudie zu Randomisierungstests mit TinkerPlots vorstellen, die wir zum Ende des Seminar „Statistisch denken und forschen lernen“ durchgeführt haben. Im besagten Seminar mussten die 22 Teilnehmer gemeinsam zu zweit eine statistische Projektarbeit als „Gesellenstück“ für einen erfolgreichen Abschluss des Seminars anfertigen. Diese Projektarbeit enthielt neben einigen Verteilungsvergleichen auch einen Randomisierungstest. Die Randomisierungstests (die von den einzelnen Paaren zu jeweils unterschiedlichen Fragestellungen durchgeführt wurden) in schriftlicher Form haben wir hinsichtlich von drei explorativen Forschungsfragen analysiert, um die Wirksamkeit unserer Lernumgebung einschätzen zu können: 1. Wie führen die Teilnehmer nach dieser kurzen Einführung einen Randomisierungstest in TinkerPlots durch? 2. Sind sie nach dieser kurzen Einführung in der Lage die sechs Schritte (Randomisierungstest-Plan) zu vollziehen? 3. An welchen Stellen treten Probleme (welche?) auf? Bei der Auswertung haben wir zwischen zwei Ebenen unterschieden: einer globalen und einer lokalen Ebene. Wir werden im Folgenden die wichtigsten Erkenntnisse der globalen Ebene beschreiben. Hier haben wir eine Häufigkeitsanalyse (Mayring, 2010), unter der Fragestellung, inwieweit die einzelnen durch den Randomisierungstest-Plan vorgegebenen sechs Schritte nach dem Abschluss der Lernumgebung sicher/ korrekt durchlaufen werden, durchgeführt.

Schritt erfolgreich durchgeführt	Anzahl der Teams (von 11 insgesamt)	%
Schritt 1 (Beobachtung)	11	100,00
Schritt 2 (Nullhypothese)	8	72,73
Schritt 3 (Simulation der Nullhypothese)	10	90,91
Schritt 4 (Teststatistik korrekt erzeugt)	10	90,91
Schritt 5 (p-Wert korrekt abgelesen)	5	45,45
Schritt 6 (korrekte Folgerungen aus p-Wert)	5	45,45

Beim Blick auf die Tabelle fällt auf, dass prozedurale Aktivitäten (wie z.B. die Durchführung des Tests mit der Software) gelingen, eher konzeptionelle Aktivitäten (wie das korrekte Aufstellen der Nullhypothese oder das Ablesen und Beurteilen des P-Wertes) aber Schwierigkeiten bereiten. Der lokale Blick auf die Daten (Ausschnitte finden sich in Frischemeier & Biehler, 2013) zeigt Schwierigkeiten beim Beurteilen eines P-Wertes, insbesondere wenn dieser größer als 0,1 ist. Alle Teilnehmer, die einen Randomisierungstest durchführten und einen P-Wert größer als 0,1 erhielten, haben falsche Schlussfolgerungen (im Sinne von: „die Nullhypothese ist richtig“ / „die Nullhypothese kann bestätigt werden“) daraus gezogen.

4. Fazit & Ausblick

Zur Fallstudie in diesem Artikel bleibt zu sagen, dass es sich um eine explorative Studie handelte und bei der Auswahl der Probanden beispielsweise keine Zufallsauswahl vorlag, so dass verallgemeinernde Aussagen nur schwer möglich sind. Außerdem hat es aufgrund von Zeitmangel nur eine mehr oder weniger knappe Einführung in das Feld der Randomisierungstests gegeben. Hier muss in Zukunft an den kritischen Stellen (Aufstellen der Nullhypothese, Ablesen und Beurteilen von P-Werten) mehr Zeit investiert und die Lernumgebung überarbeitet werden.

Literatur

Biehler, R., Kombrink, K., & Schweynoch, S. (2003). MUFFINS – Statistik mit komplexen Datensätzen – Freizeitgestaltung und Mediennutzung von Jugendlichen. Stochastik in der Schule, 23(1), 11-25.

Biehler, R. & Maxara, C. (2007). Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. Der Mathematikunterricht 53 (3): 45-62.

Cobb, G. (2007). The introductory statistics course: A Ptolemaic curriculum? Technology Innovations in Statistics Education, 1(1).

Frischemeier, D. & Biehler, R. (2012). Statistisch denken und forschen lernen mit der Software TinkerPlots. In Kleine, M. und Ludwig, M. (Eds.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, WTM: Münster.

Frischemeier, D. & Biehler, R. (2013) Design and exploratory evaluation of a learning trajectory leading to do randomization tests facilitated by TinkerPlots. Proceedings of CERME-8 (submitted).

Konold, C. & Miller, C. (2011). TinkerPlots TM Version 2 [computer software]. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. 11. Auflage. Weinheim: Beltz.

Rossman, A. (2008). "Reasoning about Informal Statistical Inference: A Statistician´s View." Statistics Education Research Journal 7(2): 5-19.

Wild, C. J. and M. Pfannkuch (1999). "Statistical Thinking in Empirical Enquiry." International Statistical Review 67(3): 223-265

Zieffler, A., Harring, J., & Long, J. (2011). Comparing groups: Randomization and bootstrap methods using R. New York: Wiley.

Daniel FRISCHEMEIER, Anja PANSE, Tobias PECHER, Paderborn

Schwierigkeiten von Studienanfängern bei der Bearbeitung mathematischer Übungsaufgaben

Das Lernzentrenprogramm innerhalb des Instituts für Mathematik an der Universität Paderborn erstreckt sich über drei Bereiche: dem Lehramt Mathematik an Grund-, Haupt-, Real- und Gesamtschulen, dem Lehramt Mathematik an Gymnasien/Gesamtschulen sowie dem Bachelor- und Masterstudium der (Techno-)Mathematik. Die diesen Studiengängen jeweils zugeordneten Zentren bieten adressatengerechte Unterstützung in Form von betreuter Gruppenarbeit, ungestörter Stillarbeit, Beratung hinsichtlich inhaltlicher und fachmethodischer Fragen sowie ein Angebot an Workshops und Thementagen. Zu ausgewählten Sprechzeiten kann man auch veranstaltungsspezifisch fachliche Unterstützung in Anspruch nehmen. Ein daran anknüpfender Workshop zum Thema „Wie bearbeitet man ein Übungsblatt?“ sowie seine Durchführung soll im Folgenden vorgestellt werden.

1. Beobachtungen aus den Lernzentren

Dazu Anlass, einen solchen Workshop zu konstruieren und anzubieten, gaben vor allem die Beobachtungen, die während der Sprechzeiten von den drei Autoren gemacht worden sind.

Generell lassen sich Schwierigkeiten beim Herangehen an eine Aufgabe, beim Beweis eines mathematischen (Hilfs-)Satzes und beim Aufschreiben mathematischer Texte feststellen. Es fällt zudem auf, dass viele Studierende sich nicht darauf einstellen können, dass das Lösen von mathematischen Übungsaufgaben einen langen Prozess darstellen kann und nicht wie bei Hausaufgaben aus der Schulzeit gewohnt, ad hoc geschieht. Die Beobachtungen werden untermauert von folgenden typischen Aussagen von Studierenden, die man teilweise auch in einschlägiger Literatur findet: Zum einen fällt es den Studierenden schwer einen Lösungsansatz zu finden oder gar die Aufgabenstellung zu verstehen („Ich verstehe die Aufgabe nicht“, „Wie soll ich hier anfangen?“, siehe auch Weber (2001)). Zum anderen scheint auch die Verbindung der Vorlesung und der zu bearbeitenden Übung („Was hat die Vorlesung mit den Übungen zu tun?“) schwerzufallen. Auch sind immer wieder Unsicherheiten beim Beweisen („Reicht das für einen Beweis?“, siehe auch Weber (2001)) und beim Aufschreiben mathematischer Texte zu beobachten („Wie schreibe ich das auf?“ siehe auch Moore (1990 und 1994)).

2. Unterstützung in den Lernzentren

Motiviert durch die Frage „Wie können wir im Rahmen der Lernzentren den Studierenden nachhaltige Unterstützung hinsichtlich der Bearbeitung ihrer Übungsaufgaben anbieten?“ entstand unter anderem die Idee, einen Workshop unter dem Motto „Wie bearbeitet man ein Übungsblatt?“ zu konzipieren und durchzuführen. Ziel sollte dabei einerseits sein, das Bewusstsein bei den Studierenden dafür zu schaffen, dass, anders als bei schulischen Hausaufgaben, die Bearbeitung von Übungsaufgaben ein Prozess ist, der unter anderem Zeit und Durchhaltevermögen erfordert. Andererseits bildete die Vermittlung von Konzepten und Strategien zum Herangehen an die Bearbeitung universitärer Übungsaufgaben einen weiteren Schwerpunkt des Workshops.

3. Inhalte des Workshops

Zur Generierung der Grundideen des Workshops orientierten wir uns an dem Artikel „Wie bearbeitet man ein Übungsblatt“ von Manfred Lehn (http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/uebungsblatt). Dementsprechend sollte im Workshop unter anderem auf die Rolle von Übungsaufgaben allgemein und den Umgang mit ihnen (z. B. den Bearbeitungszeitraum maximal zu nutzen) eingegangen werden.

Angelehnt an die vier Schritte nach Pólya (1995) beim Lösen einer mathematischen Aufgabe wollten wir den Studierenden Methoden und Konzepte vorstellen, die ihnen beim Herangehen an mathematische Übungsaufgaben helfen sollen. Pólyas vier Schritte („Du musst die Aufgabe verstehen“, „Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten […]“, „Führe deinen Plan aus“, „Prüfe die erhaltene Lösung“) haben wir für unseren Workshop in die folgenden drei Teilprozesse umgesetzt:

- A) die Analyse der Aufgabenstellung,
- L) den Lösungsprozess und
- S) das Aufschreiben der Lösung.

4. Durchführung des Workshops

Der Workshop wurde zum Beginn des WS 2012/13 begleitend zur Analysis I und Linearen Algebra I jeweils einmal durchgeführt. Im wesentlichen bestand er aus 4 Programmpunkten:

1. Begrüßung/Kennenlernen, 2. Präsentation, 3. Gruppenpuzzle - Bearbeitung der Übungsaufgaben des aktuellen Übungsblattes, 4. Abschied/Feedback.

In Hinblick auf Punkt 3 war es uns wichtig, dass die Studierenden erste Berührungsängste untereinander überwinden. Wir legten somit Wert auf eine kleine Kennenlernphase. Danach gab es eine kurze Präsentation, in der auf die im obigen Abschnitt erwähnten Themen eingegangen wurde. Für jeden der drei Teilprozesse wurden grundlegende Konzepte vorgestellt, die dabei zur Anwendung kommen können (z.B. Klärung von Definitionen in A), Generierung von Beispielen in L), etc.). Die Bearbeitungsphase diente dann der praktischen Erprobung dieser Konzepte, wobei es uns aus Gründen der Authentizität wichtig war, die aktuellen Aufgaben aus den jeweiligen Veranstaltungen zu verwenden. Wir wählten das Gruppenpuzzle, weil damit eine hohe Arbeitsintensität seitens der Studierenden gewährleistet ist und, da jede Expertengruppe je eine Aufgabe bearbeitet, sich das gesamte aktuelle Übungsblatt betrachten lässt. Nicht zuletzt kann man mit dieser Methode berufsspezifische Kompetenzen fördern. Gegen Ende der Bearbeitungsphase sollten von den Expertengruppen Poster erstellt werden, die den momentanen Stand der Bearbeitung der entsprechenden Aufgabe widerspiegelten und anhand denen die Studierenden dann ihre Gedanken erklärten und diskutierten. Während des gesamten Zeitraums standen die Betreuer als Ansprechpartner hinsichtlich fachlicher Fragen bereit und machten die Studierenden wiederholt auf Konzepte und Herangehensweisen aus der Präsentation aufmerksam.

Im Folgenden stellen wir eine Aufgabe aus der Vorlesung „Analysis I“ vor, mit der sich die Teilnehmer im Rahmen der Arbeitsphase befassen sollten.

<u>Aufgabe</u>: Sind X und Y nichtleere Teilmengen von **R**, so setzen wir

$$X\cdot Y := \{x\cdot y\colon x \text{ in } X,\ y \text{ in } Y\}.$$

Zeigen Sie: Sind X und Y nach oben beschränkt und nicht negativ, so ist

$$\sup(X\cdot Y) = \sup(X)\cdot\sup(Y).$$

Zum Zeitpunkt des Workshops waren aus der Vorlesung die Körper- sowie Anordnungsaxiome bekannt und die Definition des Supremums einer Teilmenge eines angeordneten Körpers als ihre kleinste obere Schranke.

Wesentlich für die Bearbeitung der Aufgabe ist sicherlich ein Verständnis des Objekts X·Y, als auch die Extraktion der mathematischen Behauptung mit ihrer qualitativen Komponente (unter den gegebenen Voraussetzungen existiert das Supremum von X·Y) und ihrer quantitativen (es ist das Produkt der Suprema der Ausgangsmengen).

An dieser Aufgabe wird deutlich, wie sehr die Arbeit an Beispielen, sowohl bei der Analyse der Aufgabenstellung als auch hinsichtlich der Lösungsstrategie, eine Hilfe sein kann. So eignet sich hier das Einsetzen von z.B. diskreten Mengen und/oder beschränkten Intervallen für X und Y einerseits dazu, eine Vorstellung von der „Produktmenge“ zu erhalten, als auch, anhand von Skizzen, sich mit der Multiplikativität des Supremums auseinander zu setzen.

5. Reflexion des Workshops

Als positiver Aspekt lässt sich feststellen, dass die Studierenden größtenteils in der Lage waren, die von den Betreuern angeregten Konzepte anzuwenden. Darüber hinaus wurden die Teilnehmer dafür sensibilisiert, dass der Punkt „Analyse der Aufgabenstellung“ nicht unterschätzt werden darf und dass an dieser Stelle ein gewissenhaftes Vorgehen bereits viele potentielle Fehlerquellen ausschließen sowie Grundlagen für das Auffinden einer Lösung legen kann. Im Feedback traten vor allem zwei Aussagen besonders häufig hervor: Einerseits zeigte sich, dass viele Studierende sich bisher nicht über den (hohen) Anspruch der universitären Übungsaufgaben im klaren waren und andererseits, dass sie die Arbeitsatmosphäre im Gruppenpuzzle sehr angenehm empfanden und z.T. auch erst dadurch überhaupt dazu motiviert wurden, Aufgaben gemeinschaftlich zu bearbeiten.

Der Workshop lieferte damit einen Beitrag dazu, das Frustrationspotential bei Studierenden zu senken, indem er den Sinn von Übungsaufgaben reflektierte. Verbunden mit den vorgestellten und eingeübten Konzepten gab er Studienanfängern eine sinnvolle Unterstützung in der Studieneingangsphase.

6. Ausblick

Der Workshop soll weiterentwickelt und etabliert werden und, aufgrund seiner konzeptionellen Unabhängigkeit von bestimmten Vorlesungen, weiter verbreitet werden. Ein besonderer Schwerpunkt soll dabei das „mathematische Schreiben“ einnehmen, welches im momentanen Workshop noch zu kurz gekommen ist.

Literatur

Moore, R.C. (1990): College Students Diffculties in Learning to do mathematical proofs, unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens.

Moore, R.C. (1994): Making the transition to formal proof. In: Educational Studies in Mathematics, 27(3), 249 - 266.

Pólya, G. (1995): Schule des Denkens – vom Lösen mathematischer Probleme, Francke: Tübingen, 4. Auflage.

Weber, K. (2001): Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge, Educational Studies in Mathematics, 48(1), 101-119.

Albert A. Gächter, St.Gallen

Aufgabenkultur

Ein kritischer Blick in das aktuelle Angebot an Mathematikaufgaben offenbart einige beunruhigende Trends. Etwas plakativ formuliert stelle ich fest: Wir sind eine

• **Aufgaben-Wegwerfgesellschaft**

Gute Aufgaben landen oft viel zu schnell im Abfalleimer. Erhalte ich innerhalb von 2 Minuten keine Lösung, ist das Problem unlösbar. Verweilen unerwünscht. Von Musse keine Rede. Nach einer allfälligen Lösung kommt es nicht in Frage, noch weiter über die Aufgabe oder den Lösungsweg nachzudenken. Also weg damit. Leider bleibt das Herausschälen der mathematischen Ideen auf der Strecke. Eine weitere Beschäftigung mit produktiven Variationen der Aufgabenstellung wird im Keim erstickt. Die Lösung einer Aufgabe kann so nicht der Beginn einer Auseinandersetzung mit einem Thema werden.

• **Aufgaben-Normiergesellschaft**

Aufgaben sind oft genormt und haben eine kanonische Gestalt. Ohne genau zu lesen, weiss man bereits, was zu tun ist. Das eingeübte Schema kommt gedankenlos zum Einsatz. Man reagiert auf Reizwörter und zieht die betreffende Schublade. Alle Daten zur Lösung der Aufgabe sind immer vorhanden. Überraschende Einkleidungen findet man vergeblich. Stereotype Serien von solchen normierten Aufgaben sind die Sargnägel für geistige Pensionierung.

• **Aufgaben-Hamstergesellschaft**

Ein gutes Gefühl stellt sich erst ein, wenn man alle Aufgabentypen zu einem Thema einmal gelöst und auswendig gelernt hat. So kann an der Prüfung nichts Unerwartetes passieren. Dies gibt Sicherheit. Spitzenreiter ist ein Amerikanisches Lehrbuch der Trigonometrie mit 5000 Aufgaben und den dazugehörigen Lösungen. Schrecklich. Wir sind Wiederholics (J.P. Seibt). Üben in Ehren, aber darf es nicht etwas kreativer sein?

Mathematik ist ein Fach mit vielen Freiheitsgraden. Einen einheitlichen Katalog von Kriterien für eine «gute» Aufgabe gibt es nicht.

In diesem Vortrag geht es weder um Anleitungen zu den Aufgabenarten, noch um das Problemlösen.

Vielmehr interessiert hier bei vorliegenden Aufgaben der weitere Umgang mit diesen und eine daraus entstehende mögliche Ernte.

Aus den 7 Themen

Aufgaben zu variieren,
Aufgaben zu öffnen,
Aufgaben einzubetten,
Aufgaben zu dynamisieren,
Aufgaben zu inszenieren,
Aufgaben zu vernetzen und
Aufgaben wegzulassen,

wählen wir hier 4 aus.

1. Aufgaben variieren

Variatio delectat — Abwechslung macht Freude. Auch beim Üben. Das ständige Wiederholen derselben Aufgabe mit leicht abgeänderten Daten fördert das produktive Arbeiten nicht. Üben und Wiederholen in Varianten bringt eine neue Reichhaltigkeit der Gedanken, festigt die Thematik und fordert heraus. Oft gelingt auch eine Variation der in Frage kommenden Werkzeuge. Variieren erlaubt zusätzlich eine Leistungsdifferenzierung innerhalb einer Aufgabe.

Beispiel: Schachtelproblem

2. Aufgaben öffnen

Aus einem Lehrmittel stammt die folgende Aufgabe:

Das arithmetische Mittel (a+b)/2 zweier nicht negativer Zahlen a und b ist stets grösser oder gleich dem geometrischen Mittel $\sqrt{a \cdot b}$.

Diese Formulierung enthält einige unnötige Hilfen. Ich nenne sie Schuhlöffel, da die Lösung der Aufgabe damit wesentlich erleichtert wird. Das Öffnen hin zu einer einfachen anspruchsvolleren textlichen Fassung könnte so aussehen:

Vergleiche das arithmetische und geometrische Mittel zweier Zahlen.

Offenheit hat viele Gesichter. Wir unterscheiden:

Offenheit in der Darstellung (gestalten statt ausfüllen lassen),
Offenheit bezüglich der Lösungsstrategie (verschiedene Lösungswege),
Offenheit in Bezug auf das Ergebnis (unterschiedliche Bearbeitungstiefe),
Offenheit im Schwierigkeitsgrad (Möglichkeit, den Schwierigkeitsgrad selbst zu wählen),
Offenheit bezüglich Zeitbudget (Zeit geben nach Bedarf),
Offenheit bezüglich Arbeitsumfang (mehr oder weniger Terrain beackern),
Offenheit bezüglich der Sprache und
Offenheit im Einsatz von Werkzeugen (zugelassene Hard- und Software, Instrumente).

Offenheit ist nicht Beliebigkeit. Durch die Grobziele wird der Rahmen abgesteckt, in welchem sich die Aktivitäten der Lernenden bewegen müssen. Das Offenlegen dieser Ziele fördert die Transparenz, nicht die Angabe von Schuhlöffeln. Ein offener Unterricht weckt die Neugier, wird spannender und deshalb auch effizienter. Zusätzlich fördert er eigene Fragestellungen.

3. Aufgaben dynamisieren

Bilder sagen mehr als viele Worte. Durch Veränderung von Parametern oder der Basiselemente einer Konstruktion können erstaunliche Effekte erzeugt werden. Bewegung fördert das Verstehen. Dies gilt auch für die dynamische Einführung von Begriffen.

Beispiel:

Gegeben sind der Kreis k und der Punkt P im Innern von k. Wo liegen die Mittelpunkte sämtlicher Kreise, welche durch P gehen und k berühren?

4. Aufgaben inszenieren

Weshalb empfinden viele Schülerinnen und Schüler Mathematik als öde und langweilig? Liegt es daran, dass Mathematik ohne Reagenzgläser und funkenspringende Experimente auskommt? Nein. Nach wie vor halte ich an meiner These fest: *Mathematik ist nie langweilig, WIR machen sie langweilig.* Spannung zu erzeugen will gelernt sein.

Beispiel: Suche die Mitte der Gemeinde Gossau SG (Schweiz).

Erste Szene: Diskussion → Was versteht man unter der «Mitte»?

Zweite Szene: Blick in die Geometrie. Kennen wir Figuren, wo die Mitte klar ist? Wie war das noch mit dem Dreieck? Könnte man die Gemeinde durch solche Figuren annähern?

Dritte Szene: Definitionen und ein wichtiger Satz.

Vierte Szene: Beschäftigung mit dem Dreieck.

Fünfte Szene: Flächenschwerpunkt der Gemeinde Gossau SG.

Sechste Szene: Markiere mit Topo Schweiz auf der Karte 1 : 25000 den Ort mit den berechneten Koordinaten. Leihe einige GPS-Geräte aus und organisiere nach erfolgter Einführung einen Sternmarsch zum Mittelpunkt der Gemeinde.

Siebte Szene: Nimm Kontakt mit einem einheimischen Vermessungsbüro auf. Bitte um eine Demonstration des professionellen Aufsuchens eines Geländepunktes am Beispiel des Mittelpunktes.

Achte Szene: Bespreche mit der Gemeinde die Möglichkeit des Aufstellens einer kleinen Tafel beim Mittelpunkt.

Neunte Szene: Erstelle eine Dokumentation über den langen Weg zum Mittelpunkt der Gemeinde. Eventuell plaziert die Gemeinde einen Hinweis auf ihrer Homepage.

usw.

Mathematik „in Szene setzen“ kann mithelfen, Schule attraktiver zu machen.

Interessiert? Mein Buch „Aufgabenkultur“ behandelt die eingangs erwähnten Themen ausführlich. Über 100 Aufgaben mit Lösungen runden das Angebot ab.

Die Unterlagen eignen sich für Lehrpersonen, welche gewillt sind, mehr aus ihrem Aufgabenmaterial zu machen.

Bestellungen direkt bei:

mefi-Verlag Gächter, Krüsistrasse 12, CH-9000 St.Gallen.

Infos: www.didamath.com

Literatur

Gächter A. (2012): Figurenzahlen, mefi-Verlag Gächter.

Gächter A. (2012): Aufgabenkultur, mefi-Verlag Gächter.

Wittenberg A. (1963): Bildung und Mathematik, Klett.

Hedwig GASTEIGER, LMU München

Förderung elementarer mathematischer Kompetenzen durch Würfelspiele – Ergebnisse einer Interventionsstudie

Dass mathematische Lernprozesse von Kindern bereits im Elementarbereich gefördert werden sollen, wird mittlerweile kaum mehr in Frage gestellt. Allerdings gibt es nach wie vor verschiedene Ansichten darüber, wie sich dies in den Kindertagesstätten konkret umsetzen lässt.

Grundsätze zur Gestaltung früher mathematischer Bildungsprozesse

Im Folgenden werden auf normativer Ebene zentrale Punkte aufgeführt, die bei der Gestaltung elementarer mathematischer Bildungsprozesse berücksichtigt werden sollten. Es handelt sich dabei um Schlussfolgerungen aus Erkenntnissen verschiedener Fachdisziplinen (ausführlich: Gasteiger 2010).

- Eine in der heutigen Fachdiskussion selbstverständlich scheinende Forderung ist, dass elementare mathematische Bildung dem Grundgedanken eines ko-konstruktiven Verständnisses von Lernen folgt (Fthenakis et al. 2009). Für einige eng konzipierte Lehrgänge, die für diesen Bereich auf dem Markt sind, trifft dies eher nicht zu.
- Inhalte sollten gerade, wenn es um elementare Bildung geht, mit „unbedingter intellektueller Redlichkeit gelehrt werden, aber mit dem Nachdruck auf dem intuitiven Erfassen und Gebrauchen dieser grundlegenden Ideen“ (Bruner 1970, S.26). Nun geht es im Elementarbereich zwar nicht um ein *Lehren* im eigentlichen Sinne, die Kernaussage Bruners ist jedoch, zentrale mathematische Inhalte dem jeweiligen Entwicklungsstand angemessen *so* zu thematisieren, dass sie inhaltlich anschlussfähig sind, wenn sie später wieder aufgegriffen werden. In diesem Sinne kann es kontraproduktiv sein, wenn mathematische Inhalte in vermeintlich kindgerechter Art vereinfacht bzw. verpackt werden, dabei aber die grundlegende Idee der Sache verloren geht.
- Nicht nur inhaltlich sondern auch methodisch ist zu beachten, dass ausgewählte Aktivitäten dem Entwicklungsstand der Kinder angemessen sind (Kunze & Gisbert 2007, S.46). Gerade ‚verschulte‘ Konzepte der fachlichen elementaren Bildung sind deshalb kritisch zu sehen.
- Die individuellen Lernausgangslagen der Kinder sollten berücksichtigt werden. Dies ist insbesondere mit Blick auf die große Heterogenität der mathematischen Vorkenntnisse von Kindern von Bedeutung und stellt eine Grundvoraussetzung für die Auswahl angemessener Unterstützungsangebote für Kinder dar (Steinweg 2006).

Eine Möglichkeit, elementare mathematische Bildung nach diesen Kriterien zu gestalten, ist es, *natürliche Lerngelegenheiten*, die sich vor allem in Alltags- und Spielsituationen der Kinder finden, zu nutzen (Gasteiger 2012). Gerade das Spiel bietet sach- und entwicklungsangemessene, natürlich differenzierende und ko-konstruktive Lerngelegenheiten.

Mathematiklernen in Spielsituationen

Dass geeignete Spiele Einfluss auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen haben, konnte bereits vielfach nachgewiesen werden (McConkey & McEvoy 1986; Young-Loveridge 2004; Siegler & Ramani 2008; Hauser et al. 2011). Der Fokus des Interesses liegt dabei oft auf der Wirksamkeit der Spielintervention bei Kindern, die besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben oder ungünstige Lernvoraussetzungen mitbringen. Teilweise wurden explizit für die Untersuchung Spiele kreiert oder modifiziert bzw. durch die Arbeit mit Bilderbüchern und Reimen ergänzt, teilweise wurden aber auch handelsübliche Spiele verwendet. In der Regel handelte es sich um Schulkinder oder Kinder unmittelbar vor Schuleintritt.

Die Tatsache, dass Lernanregungen im Elternhaus offensichtlich einen deutlichen Einfluss auf die mathematischen Vorkenntnisse von Kindern – noch vor Besuch der ersten Bildungsinstitution – ausüben (Anders et al. 2012), liefert Motivation, die Rolle von Spielsituationen gerade bei jüngeren Kindern näher zu untersuchen. Zudem sind gerade dann herkömmliche Spiele, die in möglichst unverfälschten Spielsituationen zum Einsatz kommen, von besonderem Interesse.

Interventionsstudie

Die Interventionsstudie MaBiiS (elementare **ma**thematische **Bi**ldung **i**n **S**pielsituationen) widmet sich folgender Hauptforschungsfrage: Wirkt sich der Einsatz von Würfelspielen auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen von Kindergartenkindern aus?

Darüber hinaus interessiert, ob sich Teilbereiche mathematischer Kompetenz ausmachen lassen, auf die die Intervention in besonderem Maße wirkt und ob die Intervention unabhängig von Geschlecht, Migrationshintergrund (MH), Intelligenz und Kindertagesstätte Wirkung zeigt.

Die Stichprobe bestand aus 95 Kindern (m: 43, w: 52; mit MH: 31, ohne MH: 64) aus fünf Kindertagesstätten im Großraum München, die eineinhalb Jahre vor Schuleintritt waren (Durchschnittsalter 4J 8M). Die Einteilung der Kinder in Experimental- und Kontrollgruppe erfolgte per Zufall.

Die Intervention wurde im April und Mai 2012 durchgeführt und dauerte dreieinhalb Wochen. In Kleingruppen (2-3 Kinder mit einer Spielleiterin) spielte jedes Kind an 7 Terminen zu je 30 Minuten Würfelspiele. In der Experimentalgruppe wurden Würfelspiele mit einem 6er-Würfel gespielt. Es handelte sich dabei um ‚Fang den Hut‘[1], das ‚Bienenspiel‘ (eine Variante von ‚Mensch-ärgere-dich-nicht‘[2] mit drei Spielsteinen pro Spieler und einer kürzeren Wegstrecke) und ‚Schätze sammeln‘[3] (ein Würfelspiel, bei dem auf dem Weg zum Ziel bei bestimmten Feldern farbige Steinchen nach vorgegebener Anzahl gesammelt werden können; wer die meisten Steinchen hat, gewinnt). Die Kinder der Kontrollgruppe spielten Spiele mit Farb- oder Symbolwürfel. Die Spiele waren ‚Der Maulwurf und sein Lieblingsspiel‘[4] (‚Mensch-ärgere-dich-nicht‘ mit Symbol- statt 6er-Würfel) und ‚Da ist der Wurm drin‘[5] (ein Spiel mit Farbwürfel, bei dem nicht gezählt werden muss). Die Spielleiterinnen wurden geschult. Maßgeblich dabei war, dass es sich ausdrücklich um *Spielen* handeln sollte und *nicht* um eine Mathematikförderung. Allerdings wurden die Spielleiterinnen aufgefordert, *bewusst* zu spielen. Dies zeigt sich einerseits darin, selbst eine Vorbildfunktion einzunehmen, indem beispielsweise beim Vorwärtsziehen laut mitgezählt wird oder die gewürfelte Zahl benannt wird, und andererseits auch durch verbale Impulse wie z. B. ‚Zähl noch einmal nach. Du warst hier.‘ oder ‚Jetzt kannst du jemanden fangen!‘. Die Spielleiterinnen wurden aufgefordert, Antworten der Kinder nicht vorwegzunehmen und den Kindern bei ihren Spielzügen genügend Zeit zu lassen.

Die mathematische Leistung der Kinder wurde vor (März 2012) und nach (Juni 2012) der Intervention mit dem TEDI-Math erhoben. Zusätzlich wurde die Intelligenz überprüft (WPPSI) und es erfolgte eine Einschätzung der Qualität der Kindertagesstätten (KES-R).

Ergebnisse

Die Wirksamkeit der Intervention konnte mit einer ANCOVA (Kovariate: Vortest, abhängige Variable: Nachtest) bestätigt werden. Die Zuteilung zu den Gruppen lieferte einen hochsignifikanten Effekt mit einer Effektstärke (partielles η^2) von 0.13. Dies ist ein deutlicher Nachweis dafür, dass das Spielen von Würfelspielen mit 6er-Würfel auf die mathematische Kompetenzentwicklung der Kinder wirkt. Der Vergleich der Mittelwerte von Vor- und Nachtest in beiden Gruppen zeigt die Verbesserung der Experimentalgruppe auch deskriptiv (Vortest: EG: $M=0.60$, KG: $M=0.61$; Nachtest: EG:

[1] Ravensburger
[2] Schmidt-Spiele
[3] aus ZahlenZauberei, Oldenbourg-Schulbuchverlag
[4] Ravensburger
[5] Zoch

M=0.72, KG: M=0.67). Besonders wirkt die Intervention auf die Fähigkeit des richtigen Abzählens. Dies verwundert nicht, wird schließlich beim Vorwärtsziehen im Spiel permanent die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahlwort und Spielfeld trainiert. Die Intervention wirkte unabhängig von Geschlecht, Migrationshintergrund, Intelligenz und Kindergartenzugehörigkeit. Detailanalysen sowie ein Follow-up-Test stehen noch aus.

Fazit

Bei der Intervention handelte es sich um ‚normales' Spielen herkömmlicher Spiele, wie es in der Familie oder auch in Kindertagesstätten relativ einfach verwirklicht werden kann. Die Ergebnisse der Studie zeigen das große Potential solcher natürlichen Lernsituationen für frühes mathematisches Lernen - auch bereits für jüngere Kinder.

Literatur

Anders, Y., Grosse, Ch., Rossbach, H.-G., Ebert, S. & Weinert, S. (2012). Preschool and primary school influences on the development of children's early numeracy skills between the ages of 3 and 7 years in Germany. In: School Effectiveness and School Improvement, DOI:10.1080/09243453.2012.749794.

Bruner, J.S. (1970): Der Prozess der Erziehung. Berlin: Berlin-Verlag.

Fthenakis, W. E., Schmitt, A., Daut, E., Eitel, A., & Wendell, A. (2009). Natur-Wissen schaffen. Band 2: Frühe mathematische Bildung. Troisdorf: Bildungsverlag EINS.

Gasteiger, H. (2010). Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Münster: Waxmann.

Gasteiger, H. (2012). Fostering early mathematical competencies in natural learning situations. Foundation and challenges of a competence-oriented concept of mathematics education in kindergarten. In: Journal f. Mathematikdidaktik, 33(2), pp. 181-201.

Hauser, B. & Rechsteiner, K. (2011). Frühe Mathematik: Geführtes Spiel oder Training? In: 4 bis 8, 5, S. 28-30.

Kunze, H.-R. & Gisbert, K. (2007). Förderung lernmethodischer Kompetenzen in Kindertageseinrichtungen. In BMBF (Hrsg.): Auf den Anfang kommt es an: Perspektiven für eine Neuorientierung frühkindlicher Bildung. S. 15-117. Bonn, Berlin.

McConkey, R. & McEvoy, J. (1986). Games for learning to count. In: British Journal of Special Education, 13(2), pp. 59-62.

Siegler, R.S. & Ramani, G.B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. In: Developmental Science, 11(5), pp. 655-661.

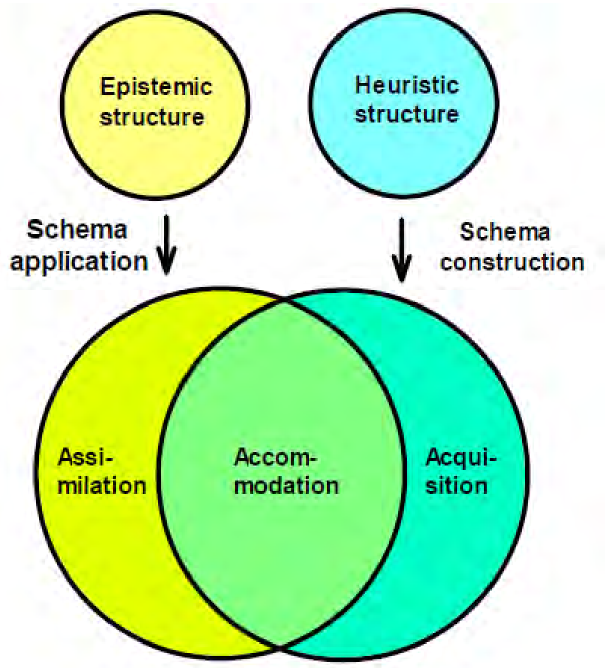
Steinweg, A. S. (2006). Lerndokumentation Mathematik. Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung.

Young-Loveridge, J.M. (2004). Effects on early numeracy of a program using number books and games. In: Early Childhood Research Quarterly, 19, pp.82-98

Thomas GAWLICK, Hannover

Problem - das Gegenteil von Routineaufgabe? Zur Konzeption von Problemlösen

Wir schlagen alternativ[1] eine Dreigliederung von Bearbeitungsprozessen vor: Reines Routinehandeln lässt sich mit Piaget als *Assimilation* in ein Schema auffassen, das Anpassen vorhandener Routinen an eine neue Situation als *Akkommodation* eines Schemas. Piaget(1962) subsumiert hierunter explizit auch den Aufbau neuer Schemata – wir hingegen möchten dies als *Akquisition* bezeichnen. Für diese Dreiteilung gibt es neuropsychologische Evidenz (Shallice 1982) - und theoretische: Man kann man Assimilation als einen v.a. vom Faktor der epistemische Struktur sensu Dörner (1976) beeinflusste Bearbeitungsprozess auffassen, Akquisition als einen v.a. durch die heuristische Struktur (vgl. Sektionsabstract in diesem Band) gesteuerten Prozess – in der Akkommodation werden beide Faktoren wirksam:



Imker-Aufgabe: Ein Imker erntet in einem schlechten Honigjahr 16kg Honig. Er füllt ihn in Gläser ab, die ¼kg fassen. Wie viele bekommt er?

Frosch-Aufgabe: Ein Frosch fällt in einen 18m tiefen Brunnen. Tagsüber klettert er 6m hoch, nachts rutscht er wieder 2m runter. Wann klettert der Frosch aus dem Brunnen?

Zwei empirisch untersuchte Aufgaben

Insgesamt enthält die vorgeschlagene Konzeption drei Schlüsselelemente:

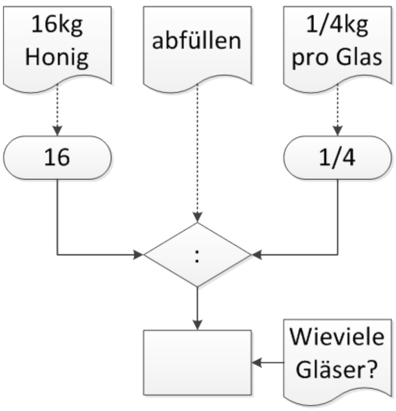
1. *Dreiteilung von Bearbeitungsprozessen* – ablesbar an:
2. *Verfeinertes Phasenmodell für Bearbeitungsprozesse* – ableitbar mit:
3. *Lösungsgraph* (Formale Repräsentation des Bearbeitungsstandes)

Erläuterung der Schlüsselelemente an Muster-Bearbeitungsprozessen

Die Imkeraufgabe kann in ein Schema assimiliert werden, falls die Division durch einen Bruch beherrscht wird. Es ist das Schema einer Simplex-

Aufgabe (Fricke 1987). Im Bearbeitungsverlauf wird der Lösungsgraph schrittweise erzeugt, vernetzt und ausgefüllt – und das definiert die Phasen:

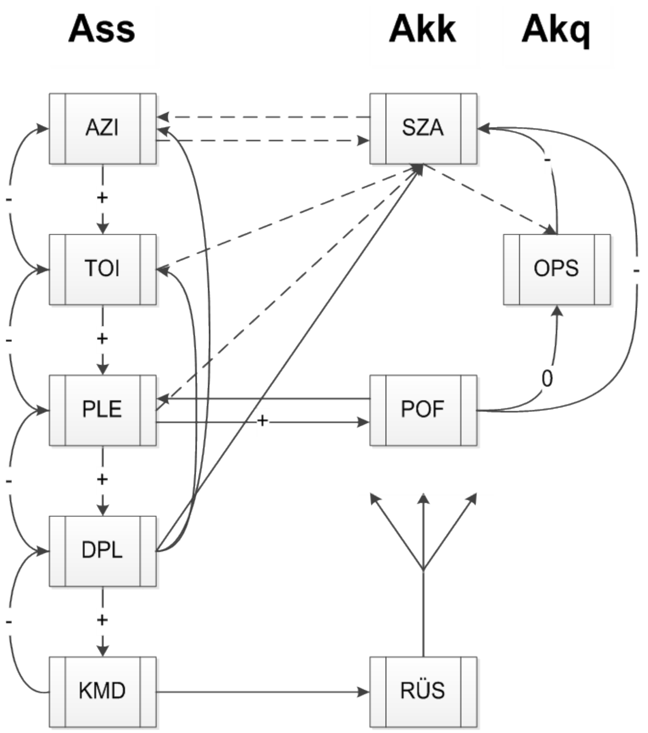
Zuerst werden **A**nfangs- und **Z**ielzustand **i**dentifiziert (AZI): Dem Aufgabentext werden die entsprechenden Angaben entnommen – dabei entstehen die „Außenknoten" des Graphen. Sodann werden **T**eilziele und **O**peratoren **i**dentifiziert (TOI): Hier erfolgt die Übersetzung des Schlüsselwortes „Abfüllen". Es folgt die Phase des **Pl**an**e**rstellens (PLE). Bei einer Routine-Assimilation fällt diese allerdings oft sehr kurz aus – hier werden einfach die gefundenen Elemente zum Simplex-Schema verknüpft.



Es folgt die **D**urchführung des **Pl**ans (DPL), hier also das Berechnen von 16 : ¼, was im Graphen durch Ausfüllen des Ergebnisfeldes gekennzeichnet würde. Zuletzt erfolgt die **K**ontrolle und ggf. **M**odifikation der **D**urchführung (KMD) an, wo z.B. Rechenfehler entdeckt und korrigiert werden.

Bei einem *Bearbeitungsprozess vom Assimilationstyp* werden also die genannten Phasen linear durchlaufen, allenfalls sind bei ausbleibendem Erfolg einfache Rücksprünge möglich (linke Spalte des u.a. Diagramms).

Die Phasen der mittleren Spalte treten bei *Prozessen vom Akkommodationstyp* auf: Ist die Anfangs- oder Zielzustandsbestimmung nicht erfolgreich, ist eine **S**ituations- und **Z**iel**a**nalyse (SZA) hilfreich, vgl. Dörner(1976). Hindernisse in der Planerstellung können mit **Po**lyas **F**ragen (POF) überwunden werden. Hier ist der Platz für heuristisches Arbeiten, wie es im „Kleinen Wörterbuch der Heuristik" (Polya 1949) beschrieben wird. Ein über das schrittweise Kontrollieren hinausgehendes Überdenken und Fortschreiben der Lösung bildet dann Polyas Phase der **Rü**ck**s**chau (RÜS).



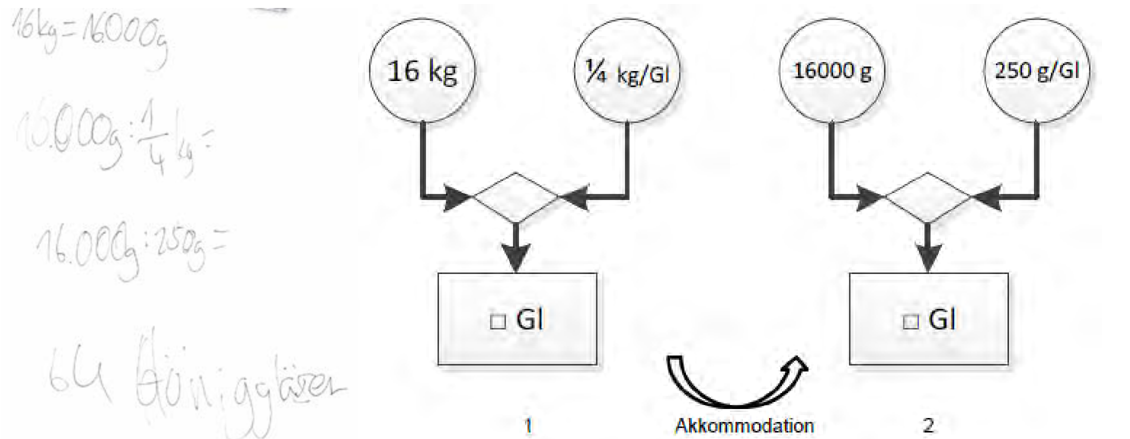
Im Beispiel ist eine Akkommodation des aus der Grundschule bekannten Schemas von Aufgabe und Umkehraufgabe möglich, wenn Brüche multipliziert, aber nicht dividiert werden können (was zum Untersuchungszeitpunkt am Ende der 5. Klasse der Fall war): Der Proband geht von 16 : ¼ = □ über zu □ · ¼ = 16, was durch (systematisches) Probieren gelöst werden kann. Handlungsleitend hierfür kann die Polya-Frage „Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken?“ sein.

Für *Prozesse vom Akquisitionstyp* ist beim gegenwärtigen Stand des Modells insbesondere die Phase **Op**erator**s**ynthese (OPS) charakteristisch. Möglich (wenngleich nicht erwartbar) wäre im Beispiel die Akquisition der Bruchdivisionsregel, etwa durch Abstrahieren aus mehreren Beispielen.

Anwendung des Verfahrens auf konkrete Bearbeitungsprozesse

Bei der Analyse von 48 Fünftklässler-Bearbeitungen der o.a. Aufgaben mit Lautem Denken identifizierten wir zwei Subtypen der Akkommodation:

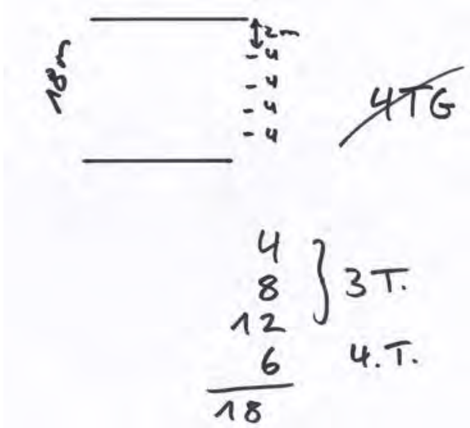
1. *routinemäßige Akkommodation*: Hierbei werden die Ass-Phasen linear durchlaufen, ergänzt um eine kurze Akkommodationsschleife, z.B:



Der Schüler versucht nicht gleich zu dividieren, sondern rechnet nach kurzem Überlegen um – er löst also eine „zugänglichere verwandte Aufgabe“.

2. *problemhafte Akkommodation*: mehrfachen Rücksprüngen, v.a. zu SZA:

„Also erst einmal eine Skizze (zeichnet) *[AZI]*. Dann schafft er pro Tag 4m. *[TOI]* 4 und 4 und 4 und 4 (Proband zeichnet dabei die 4en in die Skizze) – bleiben also 2 übrig. Also nach 4 Tagen ist der Frosch aus dem Brunnen (schreibt: 4 TG) *[DPL]* (4sec. Pause) *[SZA]* Nein falsch!(streicht durch) 4, 8, 12 und dann nur noch einmal 6m (schreibt: 4,8,12,6); das sind dann 18m. Also 3 Tage braucht er (schreibt: 3T.) und am 4.Tag (schreibt: 4.T.) nur noch tagsüber! *[DPL]*“



Dieser Proband ist einer der wenigen, die ihren falschen Lösungsweg zu erkennen *und* korrigieren vermögen. Die Deutung der 4sec Pause als SZA fußt darauf, dass danach ein Wechsel der Problemrepräsentation und des Lösungsplans erfolgt. Dass bei einer solchen SZA nicht gesprochen wird, ist übrigens charakteristisch – und auch plausibel („cognitive load theory").

Ergebnisse

1. Das vorgeschlagene Konzept ermöglicht es, Polyas *unscharfe Grenzlinie*[1] zu präzisieren: zwischen Routine- und problemhafter Akkommodation.

2. Dies macht zwei *neue Typen von Problemlöseprozessen* unterscheidbar – mit jeweils charakteristischen Anforderungen an den Löser:

Akquisition	**Problemhafte Akkommodation**
– Schema-Aufbau	- Schema-Umbau
– Synthese-Schritt	- Interpolations-Barriere
– Imker	- Frosch

3. Bei Routine-Akkommodation wird anders als aus der Literatur geläufig meist nicht das *Schema* akkommodiert, sondern wie oben die *Aufgabe*.

4. Als weiterer Nutzen der vorgeschlagenen Dreigliederung erwarten wir:

– bessere Erklärungen dafür, was Schritte zu Barrieren machen kann,
– bessere Vorhersage des Problemlöseerfolgs durch die Typeinteilung.

5. Die bisher untersuchten Beispiele zeigen dabei bereits:

– Heurismeneinsatz und PL-Erfolg sind hier positiv korreliert,
– Lautes Denken ist zur Typbestimmung essentiell,
– Stille kann als Indiz für SZA gedeutet werden – eine Absicherung des Kodierens dieser Phase ist ggf. durch „stimulated recall" möglich.

Die Anschlussforschung wendet das Konzept derzeit an auf Bearbeitungen der TIMSS-Aufgabe K10 mit Lautem Denken und „stimulated recall".

Literatur

Siehe Langfassung auf www.idmp.uni-hannover.de/gawlick.html.

[1] Der Titel verweist auf die geläufige Gegenüberstellung von Routine- und Problemaufgaben: „Die Grenzlinie zwischen beiden Arten von Aufgaben mag nicht besonders scharf sein; aber die Extremfälle sind klar erkennbar." (Polya 1980, S. 5)

Andrea GELLERT, Essen

Grundschulkinder erörtern verschiedenartige Deutungen eigener Lösungen – Interpretative Rekonstruktion mathematischer Argumentationsprozesse

Argumentationsprozesse als Voraussetzung für fundamentales Lernen

Die Rolle von Argumentationsprozessen für das Lernen wird von verschiedenen Autoren betont (Miller 1986; 2006; Tomasello 1999). Miller (1986, 9) charakterisiert *fundamentale Lernprozesse* als Prozesse, die „zu strukturell neuen kognitiven und sozialkognitiven Problemlösungen führen können" und „eine fortschreitend angemessenere, kognitiv höherstufige Erkenntnis der Welt der Natur, der sozialen Welt und der inneren Welt des eigenen Selbst" ermöglichen.

Miller unterscheidet das fundamentale Lernen vom autonomen und relativen Lernen (Miller 1986, 140). Während beim relativen Lernen die Aneignung von anwendungsbezogenem Wissen im Vordergund steht, führen sowohl das autonome als auch das fundamentale Lernen zur Aneignung von Basistheorien, die über die reine Anwendung hinausgehen, bzw. zu einer „Reorganisation von Wissenssystemen" (Miller 1986, 141). Das autonome Lernen unterscheidet sich insofern vom fundamentalen Lernen, dass die lernende Person „auf erfolgreiche Weise individuelle theoretische Argumentationen durchführen (kann)" (Miller 1986, 141). Gemäß Miller sind Kinder im Grundschulalter aber nur begrenzt zum autonomen Lernen in der Lage, sie benötigen ein soziales Kollektiv und den gemeinsamen Diskurs. So werden durch das Kollektiv zum einen Strittigkeiten erst in der Kommunikation konstituiert, zum anderen können erst durch die Interaktion über diese strittigen Fragen Lernprozesse ausgelöst werden.

Auch Tomasello (1999) hebt den Stellenwert der sozialen Prozesse, bei denen Kinder mit anderen einen Dialog führen, hervor. Durch die soziale Interaktion selbst als wesentlicher Bestandteil der grundlegendsten kognitiven Fertigkeiten des Menschen lernen Kinder durch den Austausch mit anderen verschiedene Blickwinkel auf Dinge sowie unterschiedliche Möglichkeiten des Gebrauchs sprachlicher Symbole (Tomasello 1999, 207).

Die Emergenz des Neuen

Wie aber entsteht Neues in der Interaktion? Miller (2006, 216) spricht von der Entwicklung *diskursiver Kontexte der Entdeckung neuer Überzeugungen und neuen Wissens* für die daran Beteiligten. „Ein diskursiver Kontext der Entdeckung lässt sich bestimmen und eingrenzen als das in kollektiven

Argumentationen entstehende Netzwerk möglicher Gedanken oder Teilargumente, die zwischen entgegengesetzten Ansichten, zwischen These und Antithese, vermitteln und sie eventuell sogar in Einklang bringen. Zudem gewinnt ein diskursiver Kontext der Entdeckung – auch wenn er in Diskursen von individuellen Subjekten erzeugt wird – die Autonomie eines eigenständigen Sinnzusammenhanges, der fast wie ein autonomer Text erforscht und analysiert werden kann [...]. Schließlich verändert sich ein diskursiver Kontext der Entdeckung im Laufe einer kollektiven Argumentation: er kann sich verringern oder ausdehnen. Dabei sind die entsprechenden Diskursprozesse keineswegs beliebig. Sie hängen davon ab, wie die Beteiligten vorgehen, um ein gemeinsames Verständnis über das zu erzielen, was in ihrer Auseinandersetzung strittig ist“ (Miller 2006, 216f.).

Neben der kommunikativen Dimension betrachtet Steinbring (2005) die epistemologische Dimension, um die Entstehung neuen, hier speziell mathematischen Wissens in der Unterrichtsinteraktion zu erforschen. „In the frame of elementary school mathematics instruction, new knowledge, in its interactive development, is characteristically bound to the students’ situated learning and experience contexts“ (Steinbring 2005, xii). So spricht Steinbring von einer interaktiven mathematischen Diskurssituation als „kulturelle Umgebung“, an der die Lernenden aktiv beteiligt sind und in der sie die epistemologische Besonderheit mathematischer Begriffe in ihren Deutungs- und Verstehensprozessen beachten und so selbst konstruieren (Steinbring 2005, 19).

Interaktion als diskursiver Kontext des Mathematikunterrichts

Wird Mathematikunterricht als eigenständige Kultur verstanden, so erfolgt Verstehen und Wissensentwicklung in einer selbstreferentiellen Weise (bspw. Steinbring 2005). Das Wesentliche diese Ansatzes besteht darin, nicht im voraus mittels einer a priori gegebenen Konzeption Unzulänglichkeiten zwischen Vorgaben, Zielen und beobachtbarer Unterrichtspraxis zu untersuchen, sondern tatsächliche Abläufe rekonstruktiv sorgsamen Analysen zu unterziehen. Eines der Ergebnisse sorgsamer Analysen von mathematischer Unterrichtsinteraktion besteht in der Identifizierung von kommunikativen Mustern im Mathematikunterricht. Das *Trichtermuster* (Bauersfeld 1978) als ein mögliches Extrem ist gekennzeichnet durch eine zunehmend kleinschrittigere Interaktion, bei der die Lehrperson eine ganz bestimmte Lösung bzw. Deutung einer mathematischen Aufgabe im Kopf hat. Die Schüler werden durch Handlungsverengung zu dieser Lösung geführt bis die gewünschte Antwort ohne Bezug zum Ausgangsproblem fällt. Es findet eine Elementarisierung des Wissens in kleine, getrennte Elemente statt, ganz im Gegensatz zum Umgang mit substantiellen Lernumgebungen.

Ein ganz anderes Extrem lässt sich bei Ball (2001) finden. Sie bezeichnet eine bestimmte Form des Unterrichtsabschlusses nach einer Arbeitsphase als *„show and tell“*. Die Lernenden stellen ihre Lösungen vor. Eine Reflexion dieser Lösungen findet nicht statt, stattdessen wird alles, was gesagt wird, von der Lehrperson als gleich gut stehen gelassen (Stein et al., 2008).

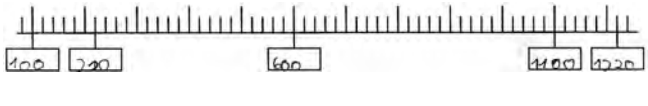
Ball grenzt eine weitere Form der Interaktion ab: „For the lesson to be more than a drawn out ‚show and tell' of the different methods requires the composition of a mathematical discussion that takes up and uses the individual contributions“ (Ball 2001, 20). Die Schülerlösungen werden hier als mit konstituierendes Element des Unterrichtsdiskurses verstanden, die Lernenden werden mit in die Verantwortung für den Diskurs einbezogen. Wood belegt eine solche Interaktion mit dem Begriff des *„focusing pattern“* (Wood 1994). Stein et al. (2008) gehen darüber hinaus: Die Lehrperson bezieht nicht nur die Lernenden aktiv in die Interaktion ein, sondern initiiert eine Interaktion, in der mathematische Beziehungen zwischen Schülerlösungen und den Kernideen der Mathematik hergestellt werden können.

Im Forschungsprojekt „Erprobung und Evaluation fokussierender Lehr-Lern-Strategien im Mathematikunterricht der Grundschule (ErfoLG)“ wird der Frage nachgegangen, wie eine fokussierende Interaktion genau aussehen kann. Insbesondere wird unter Beachtung der epistemologischen Bedingungen den Fragen nachgegangen, welche Rolle die Lehrperson, welche Rolle die Lernenden in solchen Prozessen einnehmen.

Beispiel: Deutungen am Zahlenstrahl

Werden Schülerinnen und Schüler mit eigenen Lösungen oder mit Lösungen anderer zu einem späteren Zeitpunkt konfrontiert, machen diese sich erneut einen eigenen Sinn. Die zum Teil konträren Deutungen können im interaktiven Geschehen zu sog. *Strittigkeiten* führen, die, sofern ins Zentrum der Interaktion gerückt, die Argumentation weiter ausdehnt. In einem den Kindern präsentierten Zahlenstrahl steht beispielsweise die Beschriftung des 2. Kästchens infrage (siehe Abbildung).

Die Strittigkeit besteht in der Rationalität der Beschriftung (S: „Das ist doch unlogisch“).



Im weiteren Verlauf macht sich Kevin seinen eigenen Sinn und leitet die Zahl aus dem Abstand der ersten beiden Kästchen her:

> „Das ist ne zweihundertzwanzig, das ist ne plus zwölf. [...] Das ist doch plus sechs hier. [...] Das hat er dann verdoppelt. [...] Ja. Und

> dann noch ne Null drangelegt und das ist dann zweihundertzwanzig. [...] Aber ich kapier ihn trotzdem nicht."

In diesem Beispiel bricht die Interaktion an dieser Stelle nicht ab, obwohl die 220 von allen an der Interaktion Beteiligten bestätigt wird. Kevin überträgt seine *situationsspezifische* Strategie auf andere Bereiche des Zahlenstrahls und zeigt, dass seine Strategie „verdoppeln und dann eine Null dranhängen" auch auf andere Abstände zwischen Zahlen an diesem Zahlenstrahl zutrifft. Die Interaktion kann mit dem Toulmin-Schema (Toulmin 1958) analysiert werden und zeigen, dass Kevins Aussagen zunehmend *allgemeiner* werden. Auch die anderen Kinder finden Argumente für diese Strategie: Ein neuer diskursiver Kontext der Entdeckung.

Zusammenfassung

Eine Aufrechterhaltung einer Interaktion über einen strittigen Punkt kann zu einer tieferen Auseinandersetzung der Lernenden mit einem mathematischen Sachverhalt führen und neue Möglichkeiten zum fundamentalen Lernen eröffnen. In dem Projekt ErfoLG zeigt sich jedoch auch, dass genau in dieser interaktiven Aufrechterhaltung die Schwierigkeit und besondere Herausforderung für die beteiligten Lehrpersonen besteht.

Literatur

Ball, D. (2001): Teaching, With Respect to Mathematics and Students. In: Wood, T. et al. (Eds.): Beyond classical pedagogy: teaching elementary school mathematics. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 11-22.

Bauersfeld, H. (1978): Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht. Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In: Bauersfeld, H. (Hrsg.): Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel.

Miller, M. (1986): Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Miller, M. (2006): Dissens. Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens. Bielefeld: transcript.

Tomasello, M. (2006): Die Entwicklung des menschlichen Denkens. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Toulmin, S. (1958): The Uses of Argument. Cambridge: Cambridge University Press.

Stein, M. et al. (2008): Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. In: Mathematical Thinking and Learning, 10 (2008), 313-350.

Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer.

Wood, T. (1994): Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In: Lerman, S (ed.): Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers, 149-168.

Sandra GERHARD, Frankfurt am Main und Brigitte GLASER, Stade

Zur Rolle von Zeichnungen beim algebraischen Modellieren

1. Vom Text zur Formel

Die besonderen Schwierigkeiten beim Modellieren algebraischer Textaufgaben mittels der algebraischen Symbolsprache wurden insbesondere von Malle (1993) ausführlich beschrieben. Dazu stellt er den Übergang von Text zu Formel in einem Dreischritt-Modell dar (vgl. Malle 1993, S. 96ff.). Einen wichtigen Prozessschritt sieht er in der Umwandlung des Textinhaltes von einer konkret-anschaulichen zu einer abstrakt-formalen Wissensstruktur. Erst wenn dies erfolgreich bewältigt wurde, kann der Text unter Beachtung syntaktischer und semantischer Konventionen in eine Formel übertragen werden. Wird dieser Prozessschritt übersprungen, wird also die konkret-anschauliche Wissensstruktur des Textes direkt in einer Formel verarbeitet, kann dies zu fehlerhaften Formeln führen. Malle (1993, S. 102) nennt als Beispiel dafür den Umkehrfehler, dessen additive Version er anhand einer Schülerbearbeitung zum Text „Ein Knabe ist um zwei Jahre älter als ein Mädchen." darstellt. Wird das Alter des Knaben mit X, das Alter des Mädchens mit Y bezeichnet, ergeben sich die in Abbildung 1 zeichnerisch dargestellten Wissensstrukturen. Es ist leicht ersichtlich, wie eine unzureichende Wissensstruktur, konkreter ein **fehlendes explizites Erkennen von Zahlbeziehungen**, hier zu einer fehlerhaften Formel führt.

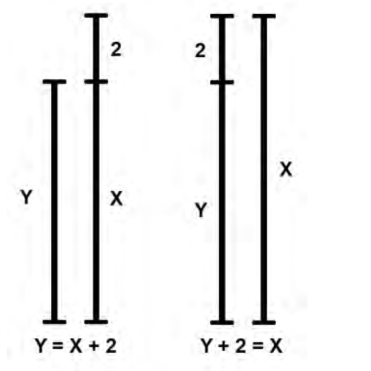


Abbildung 1: konkret-anschauliche (l.) und abstrakt-formale (r.) Wissensstruktur

Zum Umgang mit unzureichenden Wissensstrukturen schlägt Malle folgende Vorgehensweise vor (vgl. Malle, S.121f.): Schüler sollen zu algebraischen Textaufgaben Zeichnungen erstellen, die erfahrungsgemäß konkret-anschaulicher Natur sind. Aufgabe der Lehrkraft ist es nun, diese konkret-anschaulichen Zeichnungen mit abstrakt-formalen Zeichnungen zu kontrastieren. Der Unterschied zwischen konkret-anschaulichen und abstrakt-formalen Zeichnungen wird besprochen, so dass die Schüler im Laufe der Zeit lernen, selbst abstrakt-formale Zeichnungen zu erstellen. Die vorgeschlagene Vorgehensweise wirft folgende Fragen auf: Warum sind Zeichnungen überhaupt sinnvoll? Warum sind Schüler und Schülerinnen nicht in der Lage, abstrakt-formale Zeichnungen zu erstellen und wie können sie dies erlernen?

2. Zeichnungen im algebraischen Modellieren

Zeichnungen bieten Vorteile, die sie mit der algebraischen Symbolsprache gemein haben. Zunächst werden Zeichnungen dem der Algebra zugrundeliegenden **Analytischen Gedanken** gerecht. In Zeichnungen, genau wie in der algebraischen Symbolsprache, kann eine unbekannte Zahl so behandelt werden, wie eine Zahl die bereits bekannt ist. Weiterhin bieten Zeichnungen genau wie Formeln einen **relationalen Blickwinkel** auf die Aufgabe. Alle Zahlbeziehungen können mit einem Blick erfasst werden. Schließlich ermöglichen Zeichnungen genau wie Formeln eine gewisse **Inhaltsunabhängigkeit**. Wenige symbolische Ausdrücke beschreiben eine große Bandbreite an Aufgaben und Kontexten. Dies ist auch für Zeichnungen möglich, wenn sie einen gewissen Abstraktionsgrad besitzen.

Zeichnungen sind also ein möglicher Schlüssel zu abstrakt-formalem Wissen und damit ein potentielles semiotisches Mittel (vgl. Bartolini Bussi & Mariotti 2008) für Teil-Ganze-Beziehungen und Zahlbeziehungen im Allgemeinen. Gleichzeitig sind Zeichnungen für Schüler durch ihre Anschaulichkeit zunächst viel leichter zugänglich als die algebraische Symbolsprache. Aber die Vorteile von Zeichnungen können von Schülern nur genutzt werden, wenn sie die Verwendung von Zeichnungen erlernt haben. Wie bereits beschrieben, geht Malle (1993) davon aus, dass Schüler zu Beginn des Algebra-Unterrichts nur konkret-anschauliche Zeichnungen erstellen. Es stellt sich die Frage, warum das Erstellen von abstrakt-formalen Zeichnungen nicht bereits vorher erlernt worden ist. Als möglicher Unterrichtsinhalt, an dem abstrakt-formale Zeichnungen noch vor dem Algebra-Unterricht erlernt werden können, bieten sich arithmetische Sachaufgaben an.

3. Zeichnungen im Sachunterricht

In den Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2004) finden Zeichnungen nur in der Geometrie Erwähnung. Entsprechend werden in den Lehrplänen der Bundesländer Zeichnungen nur explizit für das Finden von Lösungen zu geometrische Sachsituationen verlangt. Zwar werden in einigen Bundesländern Zeichnungen bzw. Skizzen im Zusammenhang mit Sachaufgaben genannt, die genaue Rolle von Zeichnungen bleibt aber in der Regel allgemein und damit unklar. Dies spiegelt sich auch in Schulbüchern zur Grundschulmathematik wieder, in denen in der Regel Zeichnungen bzw. Skizzen als vorübergehendes Hilfsmittel dienen, die möglichst bald durch Zahlengleichungen ersetzt werden sollen (vgl. z.B. Müller & Wittmann 2006, S. 94).

Deshalb ist es nicht verwunderlich, dass Schüler in weiterführenden Schulen nicht in der Lage sind, Größenbeziehungen in Zeichnungen darzustellen. Dies soll an einem Beispiel eines Interviews mit Erik (5. Klasse) illustriert werden. Erik soll die Aufgabe „Johannes hat 2379 Murmeln. Dann gibt Nora ihm einige Murmeln. Nun hat Johannes 5147 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Nora ihm gegeben?“ visualisieren. Da es sich um große Zahlen handelt, fällt es Erik zunächst schwer, eine Zeichnung zu erstellen. Die Interviewerin gibt ihm den Hinweis, die Zahlen als Linien darzustellen. Erik gibt die Sachaufgabe episodisch wieder, indem er für jeden Satz eine Linie zeichnet (vgl. Abbildung 3). Die Teil-Ganze Beziehung der Sachaufgabe wird in seiner Zeichnung nicht sichtbar. Erik verfügt zwar über Lösungsstrategien für die Aufgabe. So schlägt er vor, von der 2379 bis zur 5147 weiterzuzählen, oder zu überlegen, wie viel von 5147 weggenommen werden muss, um 2379 zu erhalten. Eine Rechenaufgabe zur Sachaufgabe kann er jedoch nicht nennen.

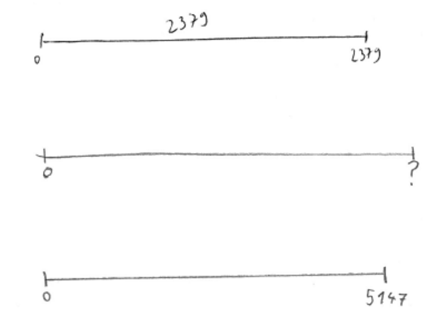


Abbildung 3: Eriks Zeichnung zur Sachaufgabe „Murmeln“.

4. Modellieren von Sachaufgaben mit Hilfe von Zeichnungen

Davydov (1975) hat in einem Unterrichtsversuch gezeigt, dass Schüler durchaus in der Lage sind, Größenbeziehungen in Sachsituationen zu erkennen und zeichnerisch darzustellen und das noch bevor sie erste Erfahrungen mit Zahlen gesammelt haben. Auch Erik bieten sich neue Möglichkeiten, wenn ihm nach Vorbild der von Davydov (1975) verwendeten Diagramme eine Zeichnung (siehe Abbildung 4) zur Verfügung gestellt wird, aus der die Teil-Ganze-Beziehung der Aufgabe ersichtlich wird. Er ist nun nicht nur in der Lage, seinen Strategien „Weiterzählen“ und „Wegnehmen“ die beiden Gleichungen 2379+?=5147 und 5147-?=2379 zuzuordnen. Auf die Frage hin, welche Rechenaufgabe in den Taschenrechner eingegeben werden kann, um das Ergebnis zu berechnen, findet Erik mit 5147 – 2379 = ? auch die dritte Gleichung. Im weiteren Interviewverlauf wendet Erik die in dieser Aufgabe erlernte Strategie aus eigener Initiative bei weiteren Sachaufgaben an.

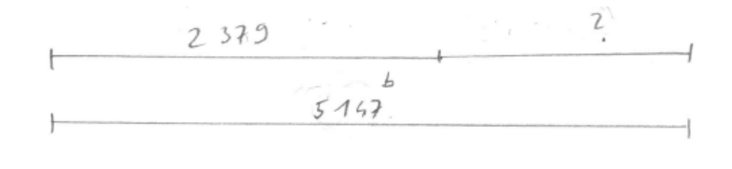


Abbildung 4: Zeichnung zur Teil-Ganze-Beziehung der Sachaufgabe „Murmeln“.

5. Zurück zur Algebra

Eriks Beispiel zeigt, dass es sich im Hinblick auf die Algebra bereits bei arithmetischen Sachaufgaben anbietet, Schülern abstrakt-formale Wissensstrukturen explizit näherzubringen. Als Vorstufe, insbesondere für rechenschwache Schüler, wie z.B. Erik, kann den Schülern in Anlehnung an Davydov (1975) anhand von einheitlichen Zeichnungen (wie z.B. das Liniendiagramm in Abbildung 4) verdeutlicht werden, dass aus B+C=A auch A-B=C, C+B=A, A-C=B usw. folgt, unabhängig davon, welche Zahlen die Buchstaben repräsentieren. Diese Strategie kann später auf komplexere Zusammenhänge ausgeweitet werden. Bei der Bearbeitung von Sachaufgaben wird dann die Lösung zunächst mit einem Zeichen (Fragezeichen oder auch Buchstaben) bezeichnet. Anschließend erstellen die Schüler gemäß Malles Vorschlag Zeichnungen, die die Größenbeziehungen in den Sachaufgaben wiedergeben. Diese Zeichnungen werden gemeinsam mit den Schülern verglichen, Gemeinsamkeiten herausgearbeitet und so abstrakt-formale Wissensstrukturen verdeutlicht. Schließlich werden zu den Zeichnungen unterschiedliche Gleichungen erstellt und zu jeder Gleichung die arithmetische Lösungsstrategie besprochen.

Diese Vorgehensweise bietet nicht nur wichtige Vorerfahrungen hinsichtlich des algebraischen Modellierens. Gleichzeitig wird dadurch auch Vorarbeit für die Elementarumformungsregeln (vgl. Malle 1993) geleistet, sowie schwachen Schülern eine neue Perspektive auf Sachaufgaben eröffnet.

5. Literatur

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), Handbook of international research in mathematics education, second revised edition. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Davydov, V.V. (1975). The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematics instruction. In L. P. Steffe, (Ed.), Children's capacity for learning mathematics. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. VII (pp.109-205). University of Chicago.

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag.

Müller G. N. & Wittmann E. Ch. (2006). Das Zahlenbuch 2. Schülerbuch. Bayern. Neubearbeitung. Leipzig: Klett.

Malle G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg, Braunschweig.

Rahmenrichtlinien / Lehrpläne für die Grundschule (o. J.). Verfügbar über http://www.bildungsserver.de/Rahmenrichtlinien-Lehrplaene-fuer-die-Grundschule-1660.html [25.03.2013]

Matthias GEUKES, Ralf BENÖLKEN, Kathrin TALHOFF, Münster

Mathematik in der lebenswertesten Stadt der Welt – Eine mathematische Stadtrallye durch Münster

1. Zur Entstehung der Stadtrallye

Die Idee einer mathematischen Stadtrallye entstand im Rahmen des Münsteraner Enrichmentprojekts „Mathe für kleine Asse“ zur Förderung mathematisch potenziell begabter Dritt- bis Achtklässler (dazu Käpnick 2008). Innerhalb der Förderstunden, die vorrangig der Bearbeitung komplexer Problemfelder gewidmet sind (z.B. Fuchs/Käpnick 2009), finden einmal im Jahr „mathematische Exkursionen“ statt, deren Ziel u.a. darin besteht, mathematische Fragestellungen in „anderen“, realitätsnahen Kontexten zu erforschen (vgl. Berlinger 2008). So besuchten Gruppen von Matheassen in den vergangenen Jahren beispielsweise das Universitätsklinikum, einen Optiker, das Planetarium, das Physiklabor „MexLab“ sowie das Institut für Didaktik der Chemie der Universität oder das Stadtplanungs- und Vermessungsamt der Stadt Münster. Etabliert hat sich zudem in diesem Kontext die mathematische Stadtrallye durch Münsters Altstadt, in der bei ausgesuchten Sehenswürdigkeiten mathematische Inhalte zu erkunden sind. Vergleichbare Konzepte für mathematische Stadtrundgänge, Stadtrallyes und Lernwege wurden auch in anderen Städten entwickelt, beispielsweise in Leipzig, Berlin, Chur (CH), Siegen, Schwäbisch Gmünd, Soest oder Billerbeck (siehe z.B. http://wiki.zum.de/Mathematische_Rundg%C3%A4nge [22.03.2013]).

2. Konzeptuelle Rahmenüberlegungen

Die Stadtrallye ist als Gruppenwettbewerb angelegt, kann aber grundsätzlich auch als mathematischer Stadtrundgang durchgeführt werden. Eine Intention bestand darin, einen möglichst breiten Adressatenkreis anzusprechen, also Aufgaben anzubieten, die aufgrund ihrer Offenheit gegenüber Lösungswegen und -darstellungen für verschiedene Altersstufen bzw. Schulformen geeignet sind und vielfältige Möglichkeiten der natürlichen Differenzierung bieten. Gleichzeitig sollten sie eine möglichst reichhaltige mathematische Substanz beinhalten und insbesondere älteren Kindern die Möglichkeit geben, vorhandenes mathematisches Wissen anzuwenden. Aus diesem Grund enthalten die Stationen zusätzlich zu grundlegenden Aufgabenangeboten weiterführende Impulse, die nach Maßgabe des Leiters oder nach Interesse der Kinder einbezogen werden können. Wichtig erschien zudem eine inhaltliche Vielfalt, u.a. die Berücksichtigung möglichst unterschiedlicher mathematischer Inhaltsbereiche. Gleichzeitig sollten vielfältige und repräsentative Impressionen der Stadt Münster vorgestellt werden – einerseits, damit Kinder einen geweiteten, „mathematischen“ Blick auf Gebäude, Skulpturen, Plätze u.Ä. entwickeln können, andererseits, damit sie viele vielleicht unbekannte und spannende Informationen über die Stadt erhalten können. Dazu enthalten die Arbeitsaufträge zu den einzelnen Stationen der Rallye über die reinen Aufgabenstellungen hinaus jeweils kindgemäß aufbereitete kurze Informationstexte. Die schulpraktische Adaption der Stadtrallye kann z.B. im Rahmen von Projekt- oder Wandertagen erfolgen, wobei sich eine vorbereitende organisatorische Besprechung (z.B. Gruppeneinteilung, Formulierung von Gruppennamen) sowie eine abschließende Präsentation von Lösungsideen empfehlen. Im Rahmen eines Projektunterrichts ist zudem die Entwicklung weiterer, eigener Stationen, z.B. auch für einzelne Stadtteile oder andere Städte, denkbar. Unseren Erfahrungen nach ist eine Auswahl an fünf Stationen für die Gestaltung einer neunzigminütigen Rallye konstruktiv, so dass bei zentrumsnah gelegenen Schulen sogar ein Einsatz innerhalb eines regulären Schultags vorstellbar ist.

3. Überblick über Stationen und mathematische Inhalte

Die Stadtrallye führt an insgesamt zehn Stationen vorbei, an denen wie bereits angedeutet jeweils Aufgaben unterschiedlicher mathematischer Inhalte realisiert sind. Neben den „Giant Pool Balls“ am Aasee (als Teil einer in Münster alle zehn Jahre stattfindenden stadtweiten Skulpturenausstellung), der Überwasserkirche, dem Schloss zu Münster, der Lambertikirche und dem Lambertibrunnen, der „Kirsch-Skulptur“ sowie dem Picasso-Museum gehören dazu die im Folgenden grob überblicksweise skizzierten vier Stationen:

An der *Lambertikirche* ist eine „Fermiaufgabe“ zu bearbeiten, bei der zu erkunden und zu begründen ist, wie viele Kinder auf den Bänken der Kirche sitzen können. Inhaltlich geht es hier damit vornehmlich um Schätzen, Messen und mathematisches Modellieren. Ein typisches Vorgehen der Matheasse ist in Abb. 1 dargestellt.

Vorgehensweise des Teams „Münster-Stadt-Affen“

1. Ausprobieren: Wie viele Kinder passen in eine Bank?
2. Bänke zählen: Unterscheidung von kleinen und großen Bänken!
3. Stühle zählen.
4. Alles zusammenrechnen.

Ergebnis:
527 Kinder finden einen Sitzplatz in der Lambertikirche

Abb. 1: Typisches Vorgehen von Kindern bei der Ermittlung der Sitzplatzanzahl

An einer Seite des *historischen Rathauses* am Prinzipalmarkt ist das Abbild einer „preussischen halben Ruthe“ angebracht (Abb. 2). Neben der Thematisierung alter Längenmaße und der Berechnung von Entfernungen geht es hier um arithmetische Aspekte, denn ursprünglich fanden Umrechnungen zwischen diesen alten Maßen im duodekadischen System statt: Eine „Ruthe“ entspricht zwölf „Fuß“ bzw. zwei „Klaftern“.

Abb. 2: „halbe Ruthe“ am historischen Rathaus

Am *St. Paulus Dom* geht es vor allem um geometrische Fragestellungen: Am Westwerk des Doms befinden sich zwölf im Kreis angeordnete Rundfenster, die ein aus vier Rundfenstern bestehendes Quadrat umgeben (Abb. 3). Hierzu wurden Fragestellungen zu Sternfiguren konzipiert, die sich mit dem Muster konstruieren lassen.

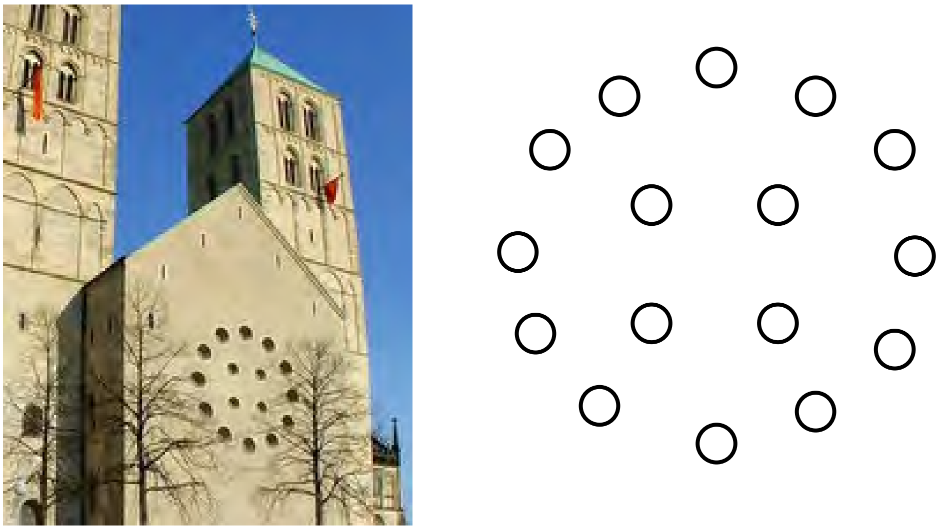


Abb. 3: Rundfenster am Westwerk des St. Paulus Doms zu Münster

Die *Promenade* ist ein 4,5km langer Rad- und Fußweg um das Zentrum Münsters, welcher der alten Stadtbefestigung folgt (Abb. 4). An dieser Station steht wiederum der Schwerpunkt Schätzen und Messen im Vordergrund: Basierend auf einer Zählung werden hier Stunden- und Tageswerte für die Anzahlen passierender Radfahrer berechnet, wobei auch eine kritische Auseinandersetzung mit den „Hochrechnungen“ gefördert wird – beispielsweise hinsichtlich der über den Tag variierenden Frequentierung des Promenadenrings aufgrund von Pendlerströmen u.Ä.

„Die Promenade ist eine im 17. Jahrhundert nach dem Abriss der alten Stadtmauer Münsters entlang deren Verlauf entstandene Ringstraße um die Altstadt, die Fahrradfahrern und Fußgängern vorbehalten ist. Sie zählt zu den bedeutenden Sehenswürdigkeiten der Stadt und ist etwa 4500m lang. Als geschlossener, von Linden gesäumter grüner Ring trennt sie die Altstadt deutlich von den umliegenden Stadtteilen. Die sternförmig aus der Innenstadt führenden Straßen kreuzen die Promenade dort, wo sich früher die Stadttore befanden."

Abb. 4: Beschreibung der „Promenade" als Beispiel für einen Informationstext

4. Erfahrungen und Potenziale

Bewährt hat sich der Charakter der Stadtrallye als mathematisches Lernangebot an außerschulischen Orten, insbesondere vermöge der enthaltenen problemorientierten offenen Aufgabenstellungen. Das auf diese Weise erreichte hohe Maß an Schülerorientierung beinhaltet zudem ein hohes motivationales Potenzial. Darüber hinaus bietet die mathematische Stadtrallye weitere Vorteile von Gruppenwettbewerben wie z.B. den Wettbewerbscharakter, ohne den Konkurrenzdruck für Einzelne zu überhöhen (siehe auch den Beitrag von Benölken in diesem Band). Über die Fokussierung unterschiedlicher mathematischer Inhaltsbereiche hinaus, ergeben sich vielfältige Möglichkeiten zum sozialen und methodischen Lernen, beispielsweise im Hinblick auf die Entwicklung von Fähigkeiten im Kommunizieren und Kooperieren. Zudem ist ein fächerübergreifender Einsatz denkbar, so dass die Stadtrallye im Rahmen eines projektorientierten Unterrichts eingesetzt werden kann. Die problemorientierten Aufgabenstellungen können nach der Stadtrallye im unterrichtlichen Kontext weiterbearbeitet bzw. tiefergehend erkundet werden, da sie jeweils eine reichhaltige mathematische Substanz beinhalten und viele Möglichkeiten für Vertiefungen sowie für das Finden und Erforschen von Anschlussproblemen bieten.

Literatur

Berlinger, N. (2008). Von Legorobotern bis zum EKG – Mathematische Exkursionen im Rahmen des Münsteraner Projektes „Mathe für kleine Asse". In C. Fischer & al. (Hrsg.): Individuelle Förderung multipler Begabungen. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte. Münster: Lit Verlag, 95–104.

Fuchs, M., Käpnick, F. (2009): Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr (Band 2). Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (2008). "Mathe für kleine Asse" – Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.): Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft. Münster: Lit Verlag, 138–150.

Boris GIRNAT, Basel

Geometrische Paradigmen als Schlüsselüberzeugungen von Lehrpersonen zur Planung ihres Geometrieunterrichts

1. Forschungshintergrund und zentrale These

Mit diesem Aufsatz wird ein Auszug aus einer qualitativen Interviewstudie vorgestellt, der Lehreransichten über den Geometrieunterricht der Sekundarstufen I erhebt und die subjektive Ziel-, Inhalts- und Methodenauswahl der neun teilnehmenden Gymnasiallehrpersonen als individuelle Curricula rekonstruiert (vgl. Eichler, 2007). Individuelle Curricula verbinden die Auswahl von Inhalten und Methoden mit übergeordneten Lernzielen und geben eine Orientierung für die Planung und Durchführung des Unterrichtes. Sie haben auf subjektiver Seite der Lehrpersonen dieselbe Funktion und eine ähnliche argumentative Struktur wie offizielle Curricula bzw. Lehrpläne und Rahmenrichtlinien auf institutioneller Ebene (vgl. Sill, 2000).

Individuelle Curricula lassen sich in die Beliefs-Forschung einordnen (vgl. Philipp, 2007). Ein wichtiges Ergebnis der Beliefs-Forschung liegt darin, dass Beliefs einer Person auf einer Skala der Zentralität eingeordnet werden können, und zwar von zentral bis peripher. Das Maß der Zentralität besteht darin, inwiefern die jeweilige Person bereit ist, ihre Beliefs aufgrund neuer Erkenntnisse, Vorgaben oder Erfahrungen zu verändern oder anzupassen (vgl. Philipp, 2007, S. 260). Die Kernthese dieses Aufsatzes besteht nun darin, dass die zentralen Beliefs in den individuellen Curricula über den Geometrieunterricht in den ontologischen und erkenntnistheoretische Überzeugungen über die Disziplin Geometrie, kurz: im geometrischen Paradigma (vgl. Houdement und Kuzniak, 2001), besteht.

Wenn diese These zutrifft, wäre dies für die Begründungsstruktur curricularer Systeme von großem Interesse: Bei aller Kritik im Detail orientiert sich die Begründungen von Lehrinhalten und -methoden weiterhin am Grundgedanken der Ziel-Mittel-Argumentation (vgl. König, 1983): Zuerst werden oberste Lernziele festgelegt; anschließend werden mittlere und untere Teillernziele in einem „top-down-Verfahren“ aus ihnen und weiterem Hintergrundwissen mehr oder weniger streng argumentativ „abgeleitet“. Wenn nun aber – wie hier für den Geometrieunterricht behauptet – auf mittlerer Ebene eine Teillernziel – hier die Vermittlung eines spezifischen geometrischen Paradigmas – so zentral wäre, dass es von den Lehrpersonen weitgehend gegen Revisionen geschützt würde, so wäre das nicht nur in theoretischer Hinsicht für den Anspruch einer „rationalen“ Planung des Unterrichts im Sinne der Ziel-Mittel-Argumentation problematisch, es würde auch in praktischer Hinsicht verständlicher machen, warum Reformanliegen, die durch neue Lehrpläne und Rahmenrichtlinien umgesetzt werden sollen, in der Praxis oft nicht die Veränderungen erreichen, die mit ihnen angestrebt werden.

2. Empirische Befunde

An dieser Stelle werden zunächst empirische Befunde aus den Interviews mehrere Teilnehmer zitiert, um Indizien zusammenzutragen, die für den zentralen Stellenwert des geometrischen Paradigmas sprechen. Anschließend werden zwei Lehrpersonen genauer betrachtet, deren individuelle Curricula rekonstruiert und grafische dargestellt werden, um an diesen Darstellungen die unterschiedlichen Paradigmen der beiden Lehrpersonen deutlich zu machen und ihre Querverbindungen zur Ausgestaltung des übrigen Curriculums zu verfolgen.

Zunächst wird exemplarisch eine Passage zitiert, in der angesprochen wird, dass ein bestimmtes Bild der Mathematik eine Leitvorstellung für die Planung des Unterrichts sein kann:

> Interviewer: Jetzt zum Beweisen allgemein. Da haben Sie gesagt, das machen Sie durchaus gern (ja) und finden das auch wichtig (ja). Warum legen Sie darauf wert?
>
> Frau G: Weil es der Kernpunkt der Mathematik ist, logisch zu argumentieren und den Schülern beizubringen, wie logische Beweisketten aufgebaut sind. Das ist für mich der Kern der Mathematik.

Ähnliche Aussagen findet man speziell zur Geometrie:

> Herr I: Also ganz, ganz strenges mathematisches Beweisen, wie man es aus der Uni kennt, ganz wenig und zunehmend weniger, habe ich den Eindruck. Da wird Beweisen zunehmend als ein Gegenseitig-Überzeugen gedeutet, wobei man als Mathematiklehrer da schon gucken sollte, dass Schüler nicht so sehr von Empirischem überzeugt sind. Das ist ja dann unmathematisch.
>
> Herr C: Also mit den formalen, also Klassikerbeweise, finde ich: Ja. Also so Pythagoras: „Einmal ausgemessen, gilt!“ finde ich: Da geht ein Wert verloren. Also das würde mich stören. Das wäre ja dann keine echte Geometrie mehr

Hier werden Kernelemente geometrischer Paradigmen angesprochen, nämliche Fragen nach dem erkenntnistheoretischen Status geometrischer Aussagen. Beide Lehrpersonen vertreten eine traditionell euklidische Sicht, nach der geometrische Aussagen unabhängig von empirischen Beobachtungen deduktiv bewiesen werden müssen und es Aufgabe der Lehrperson sei, diese Sicht der Geometrie (mit schulbedingten Abschliffen) im Unterricht erkennbar werden zu lassen. In beiden Fällen wird als Begründung angegeben, dass alles andere „unmathematisch“ bzw. „keine echte Geometrie“ sei. Dies wird als Indiz dafür genommen, dass das geometrische Paradigma dieser Lehrpersonen eine zentrale Ankerstelle für die curriculare Organisation ihres Geometrieunterrichts ist.

3. Klassifikationen

Aus Platzgründen werden abschließend zwei Ergebnisse der Studie zusammenfassend dargestellt: Zum einem wird ein Klassifikationsschema für individuelle Curricula zum Geometrieunterricht vorgeschlagen; zum anderen wird an zwei gegensätzlichen Beispielen dieses Schema mit Inhalt gefüllt und grafisch dargestellt. Zunächst zum Schema: Es wird unterschieden zwischen einer deduktiv-fachspezifischen Sicht der Geometrie, die geometrisch an Euklid orientiert ist und als Bildungsziele vor allem fachspezifische und formale Ziele verfolgt (vgl. Abb.1), und einer pragmatisch-allgemeinbildenden Sicht, die an einer empirischen Auffassung der Geometrie orientiert ist und kaum formale oder fachspezifische Bildungsziele verfolgt, sondern eher pragmatisch-allgemeinbildende (vgl. Abb 2).

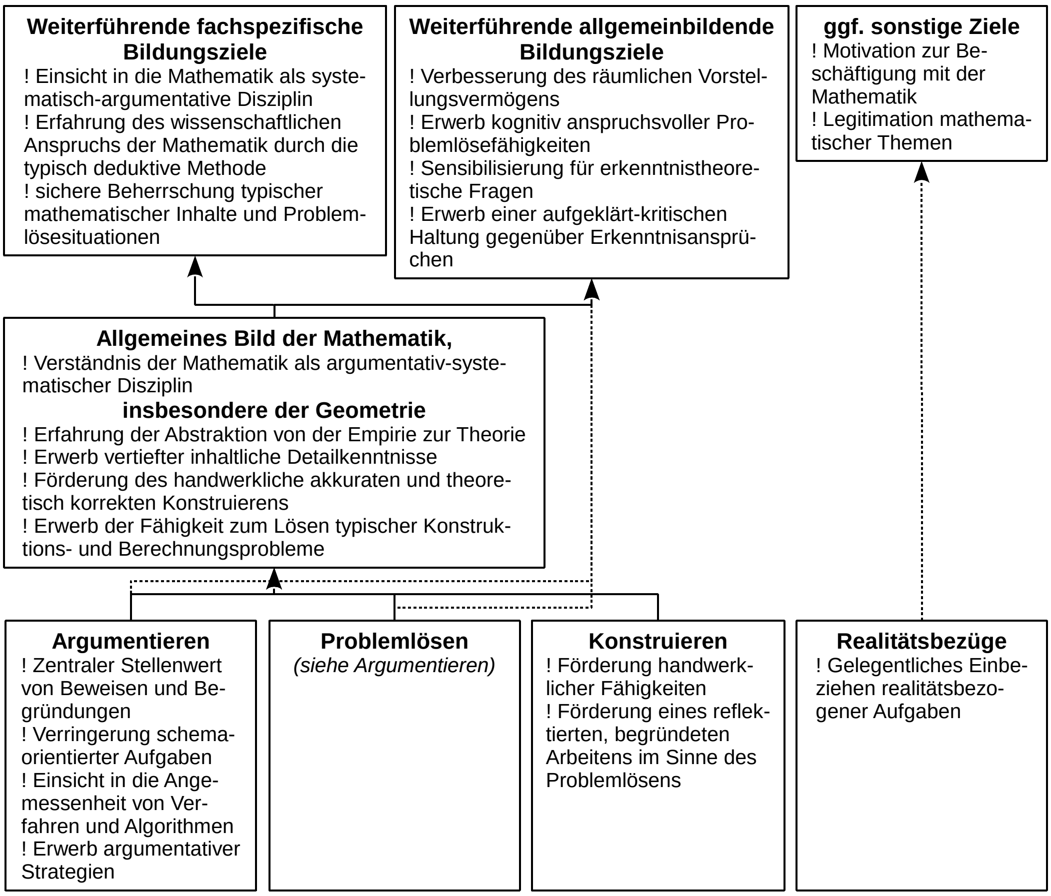


Abb. 1: Deduktiv-fachspezifisches Curriculum von Herrn F

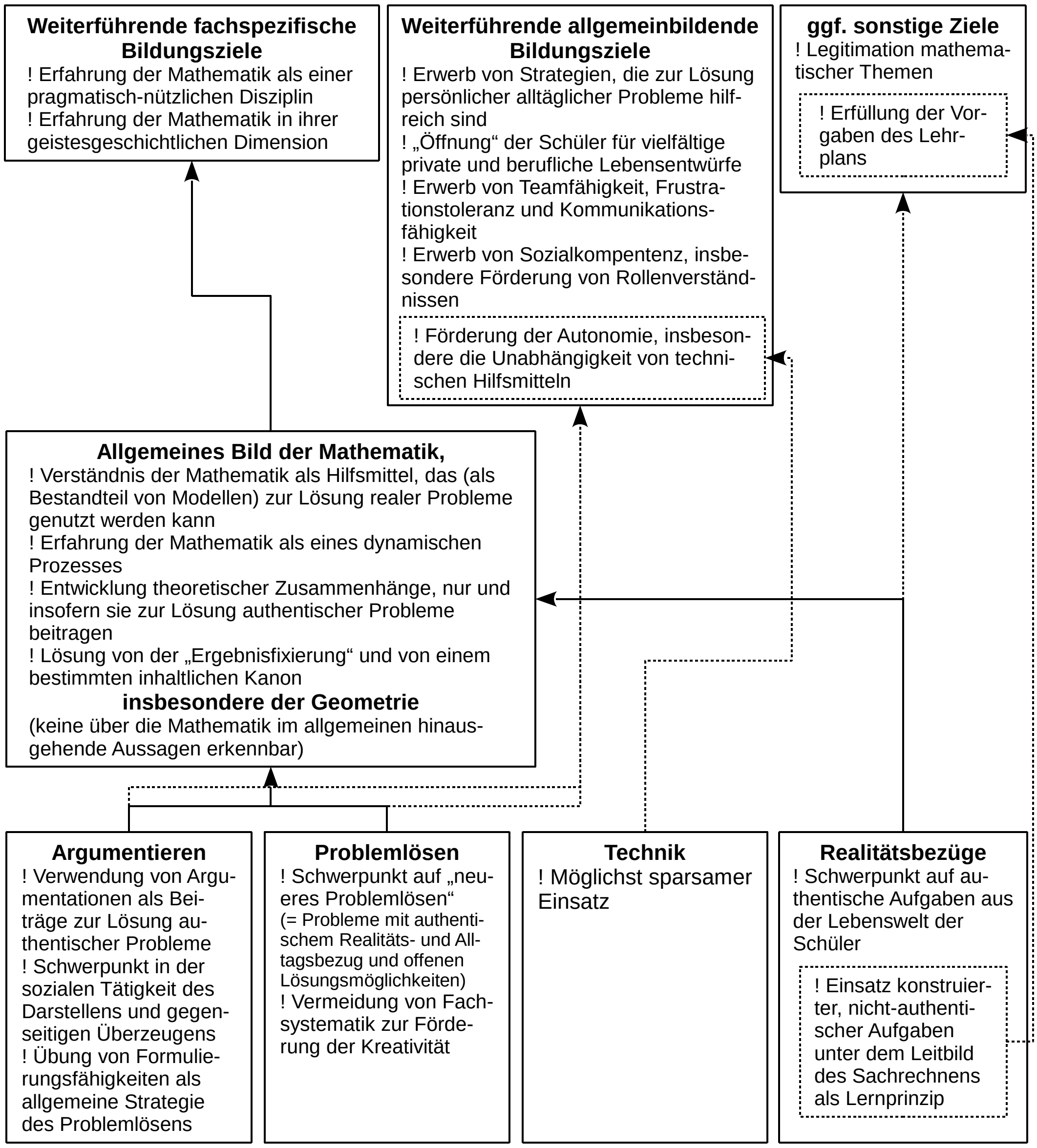


Abb. 2: Pragmatisch-allgemeinbildendes Curriculum von Herrn E

Literatur

Eichler, A. (2007). Individual curricula – Teachers' beliefs concerning stochastics instruction. IEJME 2(3). Online: http://www.iejme.com/.

Houdement, C., und Kuzniak, A. (2001): Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. Proceedings of CERME 3, Bellaria, Italy (Web).

König, E. (1983): Theorie der Erziehungswissenschaft I. Wissenschaftstheoretische Richtungen der Pädagogik, 2. Auflage. München:Wilhelm Fink Verlag.

Philipp, R. (2007): Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In: Lester, F. (Hrsg.): Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: The Project of the National Council of Teachers of Mathematics, Charlotte: Information Age Publishing, S. 257–315.

Sill, H.-D. (2000). Ziele und Methoden der Curriculumsforschung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 79, S. 611–614.

Robin GÖLLER, Kassel, Jörg KORTEMEYER, Paderborn, Michael LIEBENDÖRFER, Lüneburg, Rolf BIEHLER, Paderborn, Reinhard HOCHMUTH, Lüneburg, Jana KRÄMER, Kassel, Laura OSTSIEKER, Paderborn, Stephan SCHREIBER, Lüneburg

Instrumentenentwicklung zur Messung von Lernstrategien in mathematikhaltigen Studiengängen

Die Bedeutung von Lernstrategien für den Lernerfolg wurde an der Schule vielfach untersucht und auch für die Hochschule betont (Schiefele, Streblow, Ermgassen, & Moschner, 2003). Das betrifft auch mathematikhaltige Studiengänge, etwa für Bachelor und gymnasiales Lehramt (Rach & Heinze, 2013), für weitere Lehrämter (Vogel, 2001) und in der Ingenieursausbildung (Griese, Glasmachers, Härterich, Kallweit, & Roesken, 2011). Die Operationalisierung erfolgt dabei oft mithilfe des LIST-Fragebogens (Schiefele & Wild, 1994), der aufbauend auf den beiden englischsprachigen Instrumenten LASSI und MSLQ entworfen wurde. Er verwendet Skalen aus den drei Bereichen kognitiver, metakognitiver und ressourcenbezogener Lernstrategien. Die drei genannten Instrumente sind studienfachübegreifend angelegt, nicht spezialisiert und damit für die Anwendung in der Mathematik nur bedingt geeignet, insbesondere im Bereich der kognitiven Strategien. Eley & Meyer (2004) präsentieren ein englischsprachiges spezifisches Instrument für Mathematik, das den Schwerpunkt auf das Bearbeiten von Aufgaben setzt und Lernstrategien nicht explizit abfragt.

Wir berichten aus einem laufenden Projekt des khdm (www.khdm.de), in dem wir ein Instrument entwickeln, welches Lernstrategien valide erfassen und dabei spezifisch für Mathematik an der Hochschule, gleichzeitig aber allgemein verwendbar in allen mathematikhaltigen Studiengängen sein soll. Der Schwerpunkt liegt dabei vorerst auf dem Lernen von Stoff während des Semesters. Klausurvorbereitung oder Übungsblattbearbeitung bleiben vorerst ausgeklammert. Aufbauend auf dem LIST-Fragebogen wurden verschiedene Skalen angepasst, erweitert und ergänzt. Wir präsentieren hier erste Ergebnisse bezüglich verschiedener Facetten des Konstrukts der Elaborationsstrategien und zu Problemen mit Übungsaufgaben.

1. Operationalisierung der Elaborationsstrategien

Unter Elaborationsstrategien versteht man Lernstrategien, die, durch das Einbetten neuen Stoffs in ein Netzwerk anderer Bezüge, auf ein tieferes Verstehen des Stoffs ausgerichtet sind (vgl. z.B. Schiefele & Wild, 1994).

Auf dieser Grundlage haben wir in Expertenrunden Items formuliert, die am Verstehen orientiertes Lernen abbilden sollen. In Fokusgruppen wurden

Studierende verschiedener Fächer (Bachelor, Lehrämter) zu der unmittelbaren Verständlichkeit befragt. Die Items wurden dann in einer Ingenieurskohorte an der Universität Hannover (N = 150) eingesetzt und einer explorativen Faktorenanalyse unterzogen. Die gewonnen fünf Teilskalen wurden inhaltlich diskutiert und durch Umformulierungen oder Auswechseln von Items ausgeschärft. Sie erwiesen sich bei einem neuerlichen Einsatz an der Universität Kassel bei Bachelor- und Gymnasialstudenten (N = 95) als stabil (s.U.).

Im Folgenden werden wir die fünf gefundenen Skalen vorstellen. Die angegebenen Werte beziehen sich auf die Pilotierung in Kassel. Als Beispielitems sind je Skala diejenigen gewählt, deren korrigierte Item-Skala-Korrelation am höchsten sind.

1. Beweise (7 Items, $\alpha = 0{,}891$): Beweise nehmen in der Hochschulmathematik eine zentrale Rolle ein und dienen, neben der Sicherstellung der Aussagen, hauptsächlich dazu, verschiedene mathematische Objekte in Beziehung zu setzen. Somit ist das Lernen von und durch Beweisen eine Elaborationsstrategie. Unsere Items beschreiben mögliche Vorgehensweisen beim Lernen von Beweisen (z.B. „Wenn ich Beweise lese, versuche ich herauszuarbeiten, was die wichtigsten Schritte sind.“).

2. Vernetzen (5 Items, $\alpha = 0{,}776$): Diese Skala beschreibt den Kern des elaborativen Lernens. Sie erfasst Lerntätigkeiten, die darauf ausgerichtet sind, neue Lerninhalte durch Eruieren von Beziehungen und Zusammenhängen zu bekannten und verwandten Inhalten in die bestehende Wissensstruktur zu integrieren (z.B. „Ich versuche zu verstehen, wie neue Inhalte mit dem zuvor Gelernten zusammenhängen.“).

3. Runterbrechen (4 Items, $\alpha = 0{,}717$): Eine typische Elaborationsstrategie ist es, Gelerntes in eigenen Worten auszudrücken. Die Skala erfasst zudem Studientätigkeiten, die darauf ausgerichtet sind, den Stoff vereinfacht darzustellen (z.B. „Ich überlege mir, was mit den Sätzen und Definitionen umgangssprachlich gemeint ist.“).

4. Beispiele (6 Items, $\alpha = 0{,}733$): Diese Skala erfasst die Strategie, sich mathematische Aussagen, Definitionen und Verfahren anhand von Beispielen verständlich zu machen (z.B. „Zu Sätzen erzeuge ich mir Beispiele, um die Aussage zu verstehen.“).

5. Praxis (5 Items, $\alpha = 0{,}854$): Diese Skala erfasst Studientätigkeiten, die darauf abzielen, die Lerninhalte mit dem Alltagsleben und praktischen Anwendungen in Beziehung zu setzten (z.B. „Bei neuen Inhalten überlege ich mir, was sie in der realen Welt bedeuten.“).

Bei inhaltlicher Betrachtung ist klar, dass hier verschiedene Facetten des Konstrukts der Elaborationsstrategie angesprochen werden. Die Korrelationen der Skalen untereinander sind in unserer Stichprobe mit $p < 0{,}001$ alle signifikant. Die Korrelationskoeffizienten liegen bei (in der oben gegebenen Reihenfolge) benachbarten Skalen zwischen 0,437 und 0,596. Bei nichtbenachbarten Skalen ist der Korrelationskoeffizient stets kleiner als 0,407. Damit wird die Verschiedenheit der Skalen auch empirisch bestätigt. Dass eine getrennte Betrachtung nicht nur möglich sondern sinnvoll ist, legen die Ergebnisse in den folgenden Abschnitten nahe.

2. Operationalisierung von Problemen mit Übungsaufgaben

Das Bearbeiten von Übungsaufgaben nimmt in den meisten Mathematikveranstaltungen an der Hochschule eine zentrale Rolle und einen Großteil der Zeit für das Selbststudium ein.

Unsere ursprüngliche Idee war es, einige typische Aussagen von Studenten zu überprüfen, die Probleme mit den Übungsaufgaben zum Ausdruck bringen. Beispiele dazu sind: „Es scheint mir unmöglich, die Übungsaufgaben alleine und nur mit Hilfe des Skripts zu lösen“, „Bei den Übungsaufgaben weiß ich meist gar nicht, was ich tun soll“ und „Die Übungsaufgaben haben nichts mit der Vorlesung zu tun.“

Anhand der Pilotierungsdaten ergab sich, dass diese Items eine Skala bilden, die in unserer Kohorte eine sehr gute innere Konsistenz (6 Items, $\alpha = 0{,}844$) hat und entsprechend auch als Skala „Probleme mit Übungsaufgaben“ eingesetzt werden können. Die so gefundene Skala korreliert signifikant ($p < 0{,}001$) negativ mit den Elaborationsaspekten Beweisen (- 0,391) und Vernetzen (- 0,355). Es konnte kein signifikanter Zusammenhang zwischen den Lernstrategien Beispiele und Praxis mit den Problemen auf den Übungsblättern festgestellt werden.

3. Erste Ergebnisse

Die Pilotierungsstichprobe, die sich hauptsächlich aus Bachelor- und Gymnasiallehramtsstudierenden zusammensetzt, erlaubt es, neben dem Ziel der Instrumentenentwicklung auch einige inhaltlichen Betrachtungen anzustellen. Um die verschiedenen Teilnehmer unserer Vorlesung besser einschätzen zu können haben wir daher Unterschiede bezüglich der Lernstrategien und weiterer Merkmale zwischen den verschiedenen Studiengängen untersucht.

Im Bereich der Beweise berichten die Bachelor-Studierenden signifikant ($p < 0{,}01$) höhere Werte als die angehenden Lehrkräfte (Cohens $d = 0{,}69$). Ansonsten haben sich keine signifikanten Unterschiede gezeigt. Wenn man die Elaboration als Gesamtskala betrachtet, können keine signifikanten Unterschiede gefunden werden, so dass die Entscheidung zu einer Aufteilung der Skala bestätigt wurde.

Bezüglich anderer erhobener Skalen zeigten sich weitere signifikante Unterschiede. Von Lehramtsstudierenden wurde das Lernen mit anderen Studierenden (d = 0,67) und die Organisation des Stoffes (d = 0,65) tendenziell eher als Lernstrategie eingesetzt.

Geschlechterunterschiede bzgl. der Elaborationsstrategien und der Probleme mit den Übungsaufgaben konnten in unserer Stichprobe nicht festgestellt werden.

4. Perspektiven und Ausblick

Anhand der ersten Pilotierung konnten zwei Dinge festgestellt werden. Erstens ist es möglich, ein (hochschul-)mathematikspezifisches Instrument zur Erfassung von Lernverhalten zu konzipieren und zweitens verspricht dessen Einsatz wertvolle Einblicke in tatsächliches und – geeignet operationalisiert – in besonders erfolgversprechendes studentisches Handeln und Lernen. Aus diesen können Erkenntnisse für Lehrende und Hinweise für Lernende abgeleitet werden. Deshalb soll der Fragebogen weiterentwickelt und auf weitere Gebiete ausgeweitet werden. Insbesondere sollen Skalen, die sich speziell mit Lernstrategien im Vorfeld einer Prüfung auseinandersetzen, wie z.B. Memorisieren und Einüben der Inhalte, entwickelt werden.

Literatur

Eley, M. G., & Meyer, J. H. F. (2004). Modelling the influences on learning outcomes of study processes in university mathematics. Higher Education, 47(4), 437–454.

Griese, B., Glasmachers, E., Härterich, J., Kallweit, M., & Roesken, B. (2011). Engineering students and their learning of mathematics. (B. Roesken & M. Casper, Eds.) Current State of Research on Mathematical Beliefs XVII, Proceedings of the MAVI-17 Conference, 85–96.

Rach, S., & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? Journal für Mathematik-Didaktik, 34(1), 121–147.

Schiefele, U., Streblow, L., Ermgassen, U., & Moschner, B. (2003). Lernmotivation und Lernstrategien als Bedingungen der Studienleistung. Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 17(3/4), 185–198.

Schiefele, U., & Wild, K.-P. (1994). Lernstrategien im Studium: Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 15, 185–200.

Vogel, R. (2001). Lernstrategien in Mathematik: eine empirische Untersuchung mit Lehramtsstudierenden. Hildesheim: Franzbecker.

Stefan GÖTZ, Wien

Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien

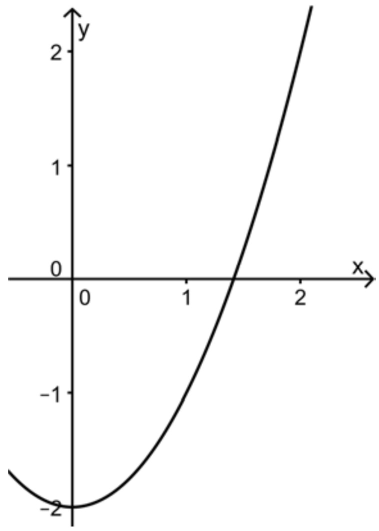
1. Motivation

Grundlegende Konzepte der Analysis stehen oft am Beginn der fachlichen Ausbildung von Lehramtsstudierenden der Mathematik. Dabei wird ihre Schulrelevanz von Seiten der Studierenden kaum gesehen und von Seiten der Lehrenden auch nicht betont. Folglich werden diese Konzepte weder als fundamentale Ideen der Mathematik wahrgenommen noch werden sie in den Grundvorstellungsvorrat aufgenommen. Eine Sinnstiftung dieser im Studium prominent platzierten Ausbildungsteile passiert auf diese Weise nicht. Als Konsequenz reihen Studierende des Unterrichtsfaches Mathematik die Fachwissenschaft an die vorletzte Stelle in einer Relevanzbewertung der Wissensbereiche ihrer Ausbildung (Etzlstorfer 2010, S. 105).

Im Wintersemester 2012/13 ist nun der Versuch unternommen worden, eine Schulmathematik-Lehrveranstaltung zur Differential- und Integralrechnung (zweistündige optionale Vorlesung plus einstündige Übungen, Leitung: S. G.) anzubieten, die eine Analysis-Lehrveranstaltung (zweistündige Pflichtvorlesung plus zweistündige Übungen, der zweite Teil des dreiteiligen Analysis-Zyklus, Leitung: Roland Steinbauer) begleitet. Sie soll dieses Defizit lindern, indem dort (die oft versteckten) Verknüpfungen, aber auch Differenzen explizit gemacht werden. Eine Verknüpfung ist beispielsweise die Definition des Grenzwertes a einer reellen Folge a_n, die in einem Schulbuch genauso lautet wie in einem universitären Lehrbuch: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ sodass } |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n > n_0$. Ganz im Gegensatz dazu steht die Definition der Sinusfunktion, unter der in der Schule üblicherweise das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse im rechtwinkeligen Dreieck für einen bestimmten Winkel α verstanden wird, in der in Rede stehenden Analysis-Vorlesung dagegen der Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion. Es wird also der zweite Teil der sog. doppelten Diskontinuität schon früh im Studium (Mindeststudiendauer neun Semester) in Angriff genommen: „[…] Tritt er [der junge Student, Anm. S. G.] aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so muß er eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, […].“ (Klein 1908, S. 1 f.).

Zur organisatorischen Verknüpfung der zwei Lehrveranstaltungen hielt R. S. eine Übungsgruppe zur Schulmathematik und S. G. eine zur Analysis.

2. Drei Spannungsfelder



Das Alltagsdenken findet keine bruchlose Fortsetzung in der Analysis. Zum Beispiel garantiert erst die Vollständigkeit der reellen Zahlen die Gültigkeit des Nullstellensatzes. Eine Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, mit $f(x) = x^2 - 2$, hat auf dem Intervall $I = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 2\}$ keine Nullstelle, obwohl $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$ gilt. In nebenstehendem Graphen sieht man das nicht.

Ein weiteres Spannungsfeld besteht zwischen den normativen Stoffbildern der Lehrenden und den individuellen Sinnkonstruktionen der Lernenden, z. B. bei der Stetigkeit einer reellen Funktion: ε-δ-Definition versus der Graph hat keine Sprünge.

Schließlich ist der Systematik eine gewisse Kalküllastigkeit inhärent, die oft auf Kosten der Heuristik geht und eine Sinnstiftung verhindert. Dann können Fragen wie „Was ist hier passiert?“ bei Rechnungen wie beispielsweise $\int \sin 2x\, dx = \int \sin z \cdot \frac{1}{2}\, dz = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$, wenn $2x$ durch z substituiert wird, bzw. $\int \sin 2x\, dx = \int 2 \sin x \cos x\, dx = \int 2z \cos x \frac{dz}{\cos x} = \sin^2 x + c'$, wenn $z = \sin x$ gesetzt wird, auftreten (Götz et al. 2013, S. 54).

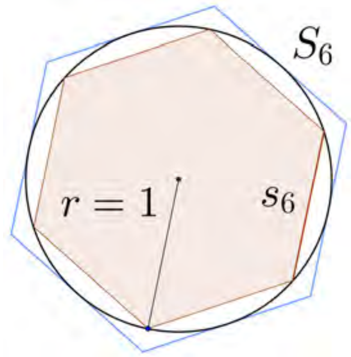
3. Folgen und Reihen

Drei Grundvorstellungen werden zu diesem Thema postuliert:

- Eine monoton wachsende/fallende und nach oben/unten beschränkte reelle Folge ist konvergent.
- Der in der Schulanalysis wichtigste Grenzwert ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$.
- Die geometrische Reihe ist – unter gewissen Voraussetzungen – berechenbar.

Die zweite Grundvorstellung kann mit der ersten begründet werden: $a_n = q^n$ ist streng monoton fallend für $0 < q < 1$ und durch Null nach unten beschränkt, also insgesamt konvergent. Die Iteration $a_{n+1} = a_n \cdot q$ liefert den Grenzwert $a = 0$.

Eine innermathematische Anwendung ist die Approximation des Umfanges des Einheitskreises nach Archimedes. Schuppar 1999, S. 35 und S. 40, entnehmen wir Rekursionsformeln für die Seitenlängen s_n der dem Einheitskreis eingeschriebenen (Umfänge $u_n < 2\pi$) und S_n der umschriebenen regelmäßigen n-Ecke (Umfänge $U_n > 2\pi$): $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ und $S_n = \frac{s_n}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$. Geometrisch anschaulich scheint es evident zu sein, dass mit wachsendem n die (Umfänge der) n-Ecke sich dem (Umfang des) Kreis(es) annähern. Numerisch ist das nicht unbedingt so: es kann zur Subtraktionskatastrophe kommen, vgl. Schuppar 1999, S. 35 f.



Erst eine analytische Untersuchung schafft Gewissheit: wegen $s_n > 0$ für alle $n > 2$ und $s_{2n} < s_n$ ebenfalls für alle $n > 2$ ist die Folge $\langle s_n \rangle$ konvergent (erste Grundvorstellung). Ihr Grenzwert s ergibt sich aus der Rekursion $s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$ zu $s = 0$. Damit ist die Differenz der Seitenlängen $S_n - s_n = s_n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} - 1 \right)$ eine Nullfolge und die Differenz der Umfänge ebenso: $U_n - u_n = n \cdot S_n - n \cdot s_n = n \cdot (S_n - s_n) = \underbrace{n \cdot s_n}_{=u_n < 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} - 1 \right)$. Also ist $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} U_n = 2\pi$.

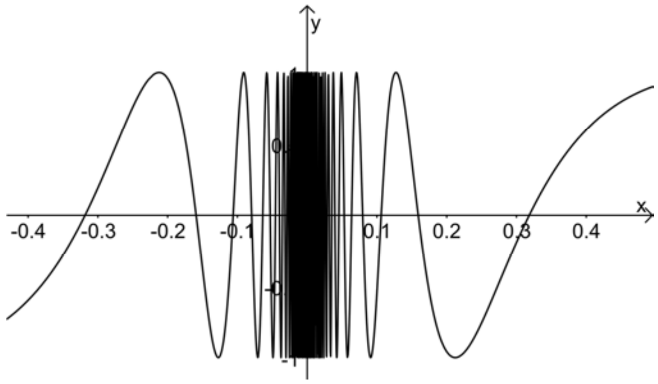
In der Schule wird die Zahl π aufgrund der Ähnlichkeit aller Kreise zueinander als das konstante Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises definiert. In der Analysis-Vorlesung ist die Zahl π das Doppelte der Nullstelle der Kosinus-Funktion im Intervall [0,2]. Erst die Berechnung der Bogenlänge eines (Viertel-)Kreises gemäß $\int \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ zeigt den Zusammenhang, sie kann viel zeitnäher in der Schulmathematik passieren.

Die dritte Grundvorstellung (welche auf der zweiten aufbaut) exaktifiziert das Rechnen mit unendlich vielen Dezimalstellen, wie es in der Unterstufe bei der Umrechnung von rationalen Zahlen in Dezimaldarstellung in die Bruchdarstellung vorkommen kann.

Die Konvergenz der Summendarstellung $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ der Euler'schen Zahl e kann ebenfalls mit der geometrischen Reihe begründet werden: wegen $n! > 2^n$ für $n \geq 4$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Die erste Grundvorstellung erledigt den Rest, sie spielt auch bei der Folgendarstellung $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ von e eine wichtige Rolle.

4. (Un-)Stetigkeit reeller Funktionen

Die Folgenstetigkeit setzt das Konzept „Grenzwert von Folgen“ auf Bildern von Folgengliedern fort: Wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für alle Folgen $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \to a$ gilt, dann heißt f stetig an der Stelle a. In der Analysis-Vorlesung ist diese Definition ein Theorem. Sie eignet sich gut, um Unstetigkeitsstellen nachzuweisen. Zwei Grundvorstellungen dazu: Sprungstellen und Oszillationsstellen. Die reelle Funktion $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ z. B.



ist an der Stelle Null nicht stetig: Für die Nullfolge $y_n = \frac{1}{(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}}$

ist $|g(y_n)| = \left|\sin(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5. Resonanz der Studierenden

„[Die] Verbindung zwischen Analysis und Schulmathe wird sichtbar. (sehr interessant!)“ und „Mir hat sich oft das eine oder andere, das wir in der Analysis VO durchgenommen hatten, besser erschlossen, als wir es wiederholt und dann auch aus einem anderen Blickwinkel betrachtet haben. […]“ sind positive Rückmeldungen zur Schulmathematik-Vorlesung gewesen. Auf der anderen Seite ist „[Bei] Manchen Themen nicht klar, warum die Analysis in der Schule gebraucht wird. Habe ich persönlich in der Schule noch nie gehört und finde es auch nicht notwendig, dies zu erläutern.“ ebenfalls ebendort zu konstatieren gewesen.

Insgesamt ergibt sich noch ein diffuses Bild, das wohl erst durch weitere Durchführungen von Parallelveranstaltungen geschärft werden kann.

Literatur

Etzlstorfer, S. (2010): $a^2 + b^2 = c^2$ – ¿Qué significa eso? Vergleich der Fachdidaktiken in Mathematik und Romanistik an der Universität Wien. Universität Wien: Diplomarbeit.

Götz, S., Reichel, H.-C. (Hrsg.) (2013): Mathematik 8. Von R. Müller und G. Hanisch. Wien: öbv.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Leipzig: B. G. Teubner.

Schuppar, B. (1999): Elementare Numerische Mathematik. Eine problemorientierte Einführung für Lehrer und Studierende. Braunschweig/Wiesbaden: vieweg.

Daniela GÖTZE, Dortmund

„Weil ich die Wörter, die ich noch nicht kannte, einfach gebraucht habe“ – Förderung (fach)sprachlicher Kompetenzen im Mathematikunterricht der Grundschule

1. Theoretische Rahmung

Der heutige Mathematikunterricht stellt hohe sprachliche Anforderungen an die Kinder. So fordern die KMK Bildungsstandards u.a., dass die Kinder sich argumentativ mündlich sowie schriftlich ausdrücken, Vermutungen aufstellen, Zusammenhänge beschreiben und Fachsprache benutzen sollen (vgl. KMK 2004, S. 7 f.). Wagenschein (1968, S. 102) betont diesbezüglich, dass die hierzu benötigte Fachsprache als „Sprache des Verstandenen“ erst am Ende des Lernprozesses aus der „Sprache des Verstehens“ nämlich der Alltagssprache sukzessiv entwickelt werden sollte (vgl. Meyer & Prediger 2012, S. 3). Oftmals werden mündliche Kommunikationssituationen genutzt, um den Kindern Fachbegriffe und fachspezifische Satzbausteine anzubieten. So werden fachspezifische Begrifflichkeiten z.B. in der mündlichen Diskussion über eine Aufgabe oder ein Aufgabenformat an der Tafel von der Lehrperson in die Kommunikation eingebracht und ggf. sukzessiv auch von den Kindern genutzt. Allerdings sind derartige Situationen häufig sehr kontextgebunden (vgl. Gibbons 2006), denn die Kinder haben hierbei die Möglichkeit z.B. über das Zeigen auf die konkreten Objekte an der Tafel die Benutzung von Fachwörtern zu umgehen. Nach Martin (1984) zeichnet sich die in solchen Sitzkreissituationen genutzte Sprache durch eine relativ geringe lexikalische Dichte und geringe Anzahl von Inhaltswörtern aus. Das oftmals an solche Szenarien stattfindende Aufschreiben „verlangt (...) einen gewaltigen sprachlichen Sprung, der mit den sprachlichen Ressourcen von vielen jungen [Zweit-]Sprachlernenden nicht zu bewerkstelligen ist“ (Gibbons 2006, S. 273). Gibbons (2006) schlägt in Anlehnung an das von Martin (1984) entwickelte Konzept des mode continuum vor, die Kinder im Wechsel vom mündlichen zum schriftlichen Beschreiben gezielt zu unterstützen, indem ihnen sprachliche Gerüste (sog. scaffolds) angeboten werden. Leisen (2010) spricht in diesem Kontext von einem möglichst reichhaltigen unterrichtlichen „Sprachbad“ (Leisen 2010, S. 76) für die Kinder.

2. Arbeit mit dem Wortspeicher

Eine relativ unaufwändige, da im Unterrichtsgeschehen leicht zu implementierende Unterstützungsmethode ist die Arbeit mit einem Wortspeicher (vgl. u.a. Leisen 2010, Meyer & Prediger 2012; Verboom 2012). Ein Wortspeicher stellt eine Sammlung von für den aktuellen Lerngegenstand nötigen Fachbegriffen auf einem Plakat dar. Neben den Fachbegriffen für die einzelnen mathematischen Objekte werden auch Begriffe zur Beschreibung der mathematischen Operationen bzw. Tätigkeiten gesammelt. Weiterhin werden den Kindern konkrete Formulierungshilfen in Form von Satzfragmenten und/oder Satzbausteinen wie z.B. „wird immer um ... kleiner“ oder auch „Das ist so, weil ...“ angeboten. Sie dienen der Strukturierung der Texte der Kinder. Der Wortspeicher wird während der gesamten Einheit gut sichtbar in der Klasse aufgehängt. Die Fachbegriffe werden im Zuge einer Lernumgebung gemeinsam mit den Kindern erarbeitet, d.h. der Wortspeicher entwickelt sich immer weiter. Dabei werden den Kindern die mathematischen Fachbegriffe nicht einfach von oben aufdiktiert, sondern mit ihnen gemeinsam ausgehandelt, indem auch Vorschläge von den Kindern aufgenommen werden, sofern sie für den aktuellen Lerngegenstand angemessen sind. In den Arbeitsphasen werden die Kinder immer darauf hingewiesen, für ihre Beschreibungen die Wörter des Wortspeichers zu nutzen. Die Fragen, die sich an dieser Stelle aufdrängen, sind u.a. die folgenden:

- Nehmen die Kinder die Wörter des Wortspeichers in ihre schriftlichen Beschreibungen auf?
- Verändert sich die Qualität der schriftlichen Dokumente aufgrund einer vermehrten Verwendung der Wörter und Satzbausteine des Wortspeichers?

3. Erste Ergebnisse einer empirischen Studie in der Grundschule

Um erste Antworten auf die oben aufgestellten Fragestellungen zu bekommen, wurden Lernumgebungen zu den Aufgabenformaten „Schöne Päckchen“ und „Mal-Plus-Haus“ (vgl. www.pikas.tu-dortmund.de) mit gezielter Förderung der fachsprachlichen Kompetenzen durch einen Wortspeicher in je 12 Grundschulklassen durchgeführt. Zu Beginn und am Ende der Lernumgebung haben die Kinder eine Standortbestimmung (SOB) bearbeitet, in der sie mathematische Auffälligkeiten zum jeweiligen Aufgabenformat beschreiben sollten. Der Vergleich beider Standortbestimmungen (SOBen) kann dazu genutzt werden, die obigen Fragestellungen ein Stück weit zu beantworten. Zum jetzigen Zeitpunkt (März 2013) sind allerdings noch nicht alle Daten vollends erfasst.

Der Vergleich beider SOBen zeigt, dass die Kinder durchaus die Begrifflichkeiten des Wortspeichers in ihre eigenen Beschreibungen übernehmen (vgl. Abb. 1). Zudem ist zu erkennen, dass diese Unterstützungsmethode in der Tat bei den sprachlichen Ressourcen, die die Kinder mitbringen, ansetzt, denn erste Begrifflichkeiten wie z.B. „Ergebnis“ sind oftmals schon vorhanden und werden durch andere neue Fachbegriffe ergänzt. Die Entwicklungen sind nicht zufällig und bei der Lernumgebung zum Mal-Plus-Haus in ähnlicher Weise beobachtbar.

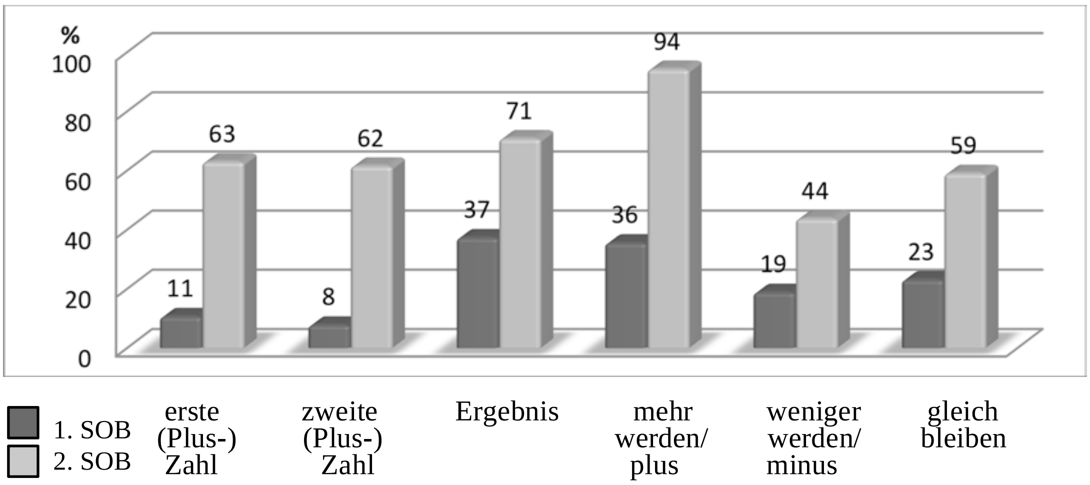


Abb. 1: Benutzte Fachwörter in den SOBen zu den Schönen Päckchen (n=281)

Bei der Analyse der qualitativen Entwicklung der Beschreibungen wurde auf ein Auswertungsmodell von Link (2012) zurückgegriffen, das für den speziellen Gebrauch in der hier beschriebenen Studie noch leicht modifiziert wurde. Link (2012) unterscheidet im Kontext der Beschreibung operativer Aufgabenserien nicht nur zwischen generalisierender und exemplarischer Beschreibung, sondern analysiert z.B. auch inwieweit bei einer generalisierenden Beschreibung eine eindeutige Identifikation des Objekts möglich ist (Details vgl. Link 2012). Wendet man dieses Auswertungsschema auf die SOBen in der vorliegenden Studie an, können deutliche Unterschiede in der Qualität der Beschreibungen erkannt werden (vgl. Abb. 2). Anscheinend fehlten den Kindern anfänglich die passenden Begriffe, so dass sie gar nicht in der Lage waren, ein Objekt zu beschreiben. Selbst die Kinder, die eine Beschreibung eines der Objekte versucht haben, haben sich

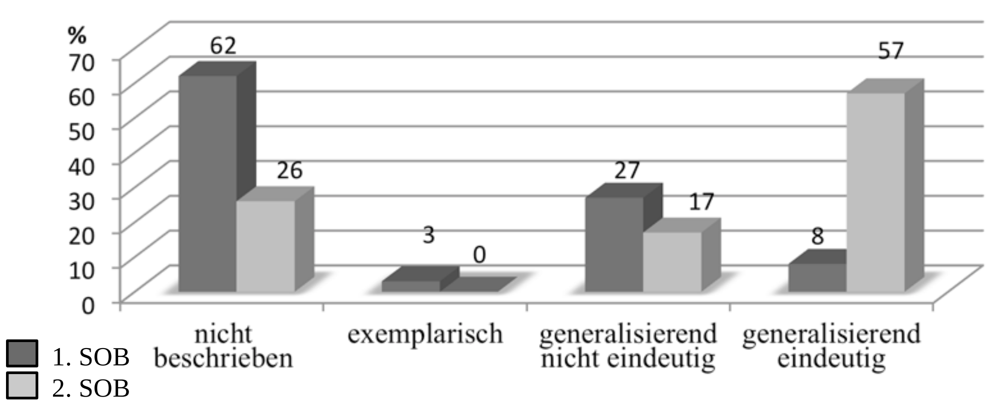


Abb. 2: Qualität der Beschreibung der Objektbegriffe der Mal-Plus-Häuser (n=108)

oftmals nicht eindeutig ausgedrückt, so dass eine eindeutige Identifikation dieser nicht möglich war. Bei der 2. SOB ist sowohl die Anzahl der beschriebenen Objekte an sich als auch deren Qualität deutlich gestiegen. Sie werden oft eindeutig identifizierbar beschrieben. Ähnliche Effekte sind sowohl bei den SOBen der Schönen Päckchen als auch bei den Beschreibungen der mathematischen Operationen der Mal-Plus-Häuser zu erkennen.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Die bisherige Datenauswertung zeigt, dass eine gezielte Förderung der mathematischen Beschreibungskompetenz im Unterrichtsprozess dazu führen kann, dass die schriftlichen Beschreibungen ausführlicher und qualitativ hochwertiger werden. In der Arbeit mit dem Wortspeicher werden die individuellen fach- und alltagssprachlichen Kompetenzen der Kinder aufgegriffen und gezielt weiterentwickelt. Um diese Aussage weiter zu stützen wird das in der Studie vorliegende Datenmaterial noch weiter ausgewertet. Darüberhinaus ist eine sehr unterschiedliche Entwicklung der einzelnen Kinder erkennbar, so dass ein gezielter Blick auf typische Entwicklungsverläufe in der Aufnahme von Fachbegriffen interessant erscheint. Auch zeichnet sich in den einzelnen Kinderdokumenten ab, dass es ggf. einen aufgabenspezifischen Einflussfaktor für die Aufnahme von Fachbegriffen gibt. Diesen Forschungsfeldern wird noch weiter nachgegangen.

Literatur

Gibbons, P. (2006): Unterrichtsgespräch und das Erlernen neuer Register in der Zweitsprache. In: P. Mecheril, Th. Quehl (Hrsg.): Die Macht der Sprachen. Englische Perspektiven auf die mehrsprachige Schule. Münster [u.a.]: Waxmann, 269-290.

KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag.

Leisen, J. (2010): Handbuch Sprachförderung im Fach. Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis. Varus: Bonn.

Link, M. (2012): Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster - Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Martin, J. (1984): Language, register and genre. In: F. Christie: Children writing: A reader. Geelong, Victoria, Australia: Deakin University Press, 21-30.

Meyer, M., Prediger, S. (2012): Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht - Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 54 (45), 2-9.

Verboom, L. (2012): “Ich kann das jetzt viel besser bedrücken”: Gezielter Aufbau fachbezogener Redemittel. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 54 (45), 13-17.

Wagenschein, M. (1968): Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch. Weinheim: Beltz

GÜNTER GRAUMANN, Bielefeld

Abbildungen in der Geometrie - Spiegelungsrechnen und dessen Analogien

Die kongruenten Abbildungen der ebenen elementaren Geometrie sind schon aus dem 5./6. Schuljahr bekannt. In der Universität im Lehramtsstudium sollte man sich damit aber systematisch befassen. So ist oft den Studierenden nicht klar, warum die bekannten Abbildungen wie Spiegelungen, Drehungen, etc. überhaupt kongruente Abbildungen sind und wie man alle kongruenten Abbildungen erfassen kann.

Eine ***kongruente Abbildung*** der Ebene bzw. des Raumes auf sich ist üblicherweise eine Bijektion, die zusätzlich die Geradentreue, Parallelitätstreue, Winkelmaßtreue und Längentreue erfüllt. Wegen der beweistechnischen Ökonomie [*ein wichtiges allgemeines Prinzip in der Mathematik*] ist es gut, zunächst den folgenden ***Hilfssatz*** zu beweisen: Allein die Bijektivität und die Längentreue reichen aus, eine kongruente Abbildung zu definieren.
Der Beweis für die Geradentreue benutzt die Charakterisierung der Nicht-Kollinearität über die Dreiecksungleichung. [*Ein einfacher aber immer wieder wichtiger Satz der Dreieckslehre wird hier wieder aufgefrischt.*] Die Parallelitätstreue folgt dann allein aus der Bijektivität und der Geradentreue [*und kann damit auch bei der Definition von Affinitäten in beliebigen affinen Räumen weggelassen werden*]. Der Beweis der Winkelmaßtreue kann über den Kongruenzsatz sss erfolgen. [*Die Kongruenzsätze sind ebenfalls wichtige Sätze der Dreieckslehre, die man immer im Hinterkopf haben sollte.*]
Ein einfach zu beweisender, aber weitreichender ***Satz über die Zusammensetzung (Hintereinanderausführung) von kongruenten Abbildungen*** sagt, dass die Eigenschaften der Bijektivität, Geradentreue, Parallelitätstreue, Winkelmaßtreue und Längentreue sich übertragen bei Hintereinanderausführung von Abbildungen, die eine (oder alle) dieser Eigenschaften besitzen. [*Eine solche Aussage sollte dann später bei der Behandlung von Ähnlichkeitsabbildungen und affinen Abbildungen selbst gefunden und die Analogie erkannt werden.*]
Über einen Widerspruchsbeweis unter Benutzung der definierenden Eigenschaften einer kongruenten Abbildung kann man leicht zeigen, dass die ***inverse Abbildung einer kongruenten Abbildung*** (die wegen der Bijektivität existiert) wieder eine kongruente Abbildung ist. [*Auch dieser Satz gilt analog für Ähnlichkeitsabbildungen und Affinitäten.*] Berücksichtigt man nun noch, dass die identische Abbildung alle definierenden

Eigenschaften einer kongruenten Abbildung erfüllt und dass die Hintereinanderausführung immer assoziativ ist (eine Klammerung hat keine Bedeutung), so erhält man den Satz, dass die Menge aller kongruenten Abbildungen [*und ebenso die Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen bzw. die Menge aller Äffinitäten*] eine ***Gruppe*** bildet.
Vertieft werden kann dieser Aspekt dadurch, dass bestimmte Teilmengen, wie etwa die Menge aller eigentlichen (Orientierung erhaltenden) kongruenten Abbildungen oder die Menge aller Verschiebungen oder die Menge aller Deckabbildungen einer Figur ebenfalls Gruppen bilden.

Wir haben bislang immer nur allgemeine Aussagen über Abbildungen aufgrund deren Definitionen hergeleitet. Man sollte sich deshalb jetzt erst einmal um Beispiele kümmern. Dazu beweisen wir zunächst [*und das ist keine Selbstverständlichkeit und auch kein Axiom*], dass eine ***Achsenspiegelung der Ebene eine kongruente Abbildung*** ist.
Eine Achsenspiegelung ist offensichtlich bijektiv, da sie zu sich selbst invers ist. Wegen des obigen Hilfssatzes braucht man deshalb nur noch die Längentreue beweisen. Für eine Strecke auf der Achse ist das trivial. Sei nun P ein Punkt auf der Spiegelachse und Q ein Punkt außerhalb sowie Q* der Bildpunkt von Q und F_Q der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QQ^*}$, der auf der Spiegelachse liegt. Aufgrund der Definition der Spiegelung sind dann die Dreiecke PF_QQ und PF_QQ^* nach dem Kongruenzsatz sws zueinander kongruent und es ist |PQ| = |PQ*|. Liegen P und Q nicht auf der Achse und schneidet die Gerade PQ die Achse im Punkt S, so folgt wie eben |SQ| = |SQ*| und |SP| = |SP*|. Damit ist dann aber |PQ| = |P*Q*|. Ist schließlich die Strecke $\overline{PQ}$ parallel zur Spiegelachse, so bildet PP*Q*Q ein Rechteck und es ist |PQ| = |P*Q*|, was zu beweisen war.

Aufgrund des Satzes über die Zusammensetzung von kongruenten Abbildungen erhalten wir nun aus der Zusammensatzung von Achsenspiegelungen neue kongruente Abbildungen. Hierbei ist nun der ***Zweispiegelungssatz und seine Umkehrung*** fundamental:
Die Zusammensetzung zweier Achsenspiegelungen $Sp_b \circ Sp_a$ ist die identische Abbildung (wenn a = b) oder eine Drehung um den Schnittpunkt von a und b mit dem doppelten Winkel von a nach b als Drehwinkel (wenn a und b sich schneiden) oder eine Verschiebung senkrecht zu den Achsen mit dem doppelten Vektor des Abstandsvektors von a nach b (wenn a parallel zu b ist).
Umgekehrt kann die identische Abbildung und jede Drehung und jede Verschiebung als Doppelspiegelung dargestellt werden, wobei eine der beiden Achsen noch bestimmte Freiheiten der Wahl hat.

Wir können den Beweis hier aus Platzgründen nicht beschreiben, man findet ihn aber in allen einschlägigen Büchern. [*Bemerkenswert ist, dass aufgrund dieses Satzes nicht mehr die Bilder und Bild-Bilder einzelner Punkte oder Figuren betrachtet werden müssen, sondern dass man mit den Spiegelachsen wie mit algebraischen Objekten rechnen kann, dem sog.* ***Spiegelungsrechnen***.]

Ein erster Satz hierbei ist der ***Dreispiegelungssatz***: Die Verknüpfung dreier Achsenspiegelungen ergibt wieder eine Achsenspiegelung, wenn die drei Achsen durch einen Punkt gehen oder alle drei zueinander parallel sind.
Zum Beweis ersetzt man die beiden ersten Achsen durch zwei Achsen, die die gleiche Drehung bzw. Verschiebung ergeben, wobei die zweite Achse gleich der dritten Achse ist, so dass jetzt die zweite und dritte Spiegelung zusammen die identische Abbildung ergeben.
Auf ähnliche einfache Weise kann man auch beweisen, dass zwei Punktspiegelungen zusammen eine Verschiebung ergeben und dass eine Punktspiegelung zusammen mit einer Verschiebung eine Punktspiegelung ergibt. Mit etwas mehr Aufwand kann man dann aber auch zeigen, dass eine Dreifachspiegelung eine Gleitspiegelung ist, wenn die drei Achsen nicht durch einen Punkt gehen und auch nicht zueinander parallel sind. Weiterhin kann man mittels Spiegelungsrechen zeigen, dass eine Vierfachspiegelung gleich einer Doppelspiegelung ist, so dass man durch Kombination von mehr als drei Achsenspiegelungen keine neuen Typen von kongruenten Abbildungen erhält. Darüber hinaus kann man mittels Spiegelungsrechnen beliebige Verknüpfungen der bisher erhaltenen Typen kongruenter Abbildungen ermitteln. Diese sind immer Achsenspiegelungen, Zweifachspiegelungen oder Gleitspiegelungen.

Hiernach ist aber immer noch nicht klar, ***ob man alle möglichen Typen von kongruenten Abbildungen der Ebene erfasst hat***, denn es könnte ja noch einen völlig anderen Typ geben, der sich nicht als Zusammensetzung von Achsenspiegelungen beschreiben lässt. [*Solche Überlegungen, die nicht nur die bekannten Fälle erfasst, sind wichtig für das Lernen systematischen Denkens*.] Um dieses Problem anzugehen, überlegen wir zunächst, wie man eine kongruente Abbildung der Ebene eindeutig bestimmen („fassen“) kann. Da schon die Bestimmungsstücke von Spiegelung, Drehung und Verschiebung verschiedene geometrische Objekte enthalten, versuchen wir es doch einfach mit einem gegebenen Punkt A und seinem gegebenen Bildpunkt A*. Offensichtlich gibt es dazu verschiedene Abbildungen schon unter den bislang bekannten kongruenten Abbildungen. Also versuchen wir es mit zwei verschiedenen gegebenen Punkten A, B und ihren Bildpunkten A*, B*. Jeder Punkt X der Geraden AB ist durch die Abstände zu A und B eindeutig bestimmt. Wegen der Längentreue der kongruenten Abbildung ist dann auch der Bildpunkt X* eindeutig durch die Abstände zu A* und B* bestimmt. Ein Punkt Y außerhalb von AB ist bis auf Spiegelung eindeutig durch die Abstände zu A und B (wegen sss für das Dreieck AYB) bestimmt. Damit ist auch Y* bis auf Spiegelung an A*B* eindeutig durch A*, B* bestimmt. Wollen wir eine völlig eindeutige Bestimmung eines beliebigen Punktes und seines Bildpunktes erhalten, so müssen wir drei Punkt A, B, C, die ein Dreieck bilden, und deren Bildpunkte A*, B*, C* vorgeben.

Nun können wir damit eine ***beliebige kongruente Abbildung bestimmen***. Wir geben einfach irgendein Dreieck ABC vor und wählen dazu irgendein kongruentes Dreieck EFG mit der Vorgabe E = A*, F = B*, G = C*. Man findet dann leicht eine Zusammensetzung aus den bisher bekannten kongruenten Abbildungen (etwa mittels Verschiebung, Drehung und Spiegelung oder mittels einer Dreifachspiegelung), die A auf E, B auf F und C auf G abbildet. Damit ist dann bewiesen, dass es außer den schon bekannten kongruenten Abbildungen keine weiteren Typen gibt.

Wie oben schon angedeutet wurde, kann man analoge Überlegungen für ***kongruente Abbildungen im Raum*** machen (wobei die Bestimmung durch eine Dreieckspyramide und ihre Bildpyramide gegeben ist) und erhält dann neben den Ebenenspiegelungen die daraus zusammengesetzten Zweifachspiegelungen (Identität, Achsendrehungen und Verschiebungen), Dreifachspiegelungen (Gleitspiegelungen und Drehspiegelungen) sowie Vierfachspiegelungen (Schraubungen).

Analoge Überlegungen bei ***Ähnlichkeitsabbildungen*** führen dazu, dass jede Ähnlichkeitsabbildung (in der Ebene bzw. im Raum) sich darstellen lässt als Zusammensetzung einer kongruenten Abbildung (der Ebene bzw. des Raumes) und einer zentrischen Streckung (in der Ebene bzw. im Raum).

Schließlich kann man auch ***affine Abbildungen*** (der Ebene bzw. des Raumes) auf entsprechende Weise typologisieren, wobei die Bestimmung eines beliebigen Punktes mittels des Teilverhältnisses erfolgt. Eine affine Abbildung kann dann dargestellt werden als Zusammensetzung eine Ähnlichkeitsabbildung und einer Achsenaffinität (axiale Streckung oder Scherung) bzw. Ebenenaffinität.

Literatur

Graumann, Günter (2011^{2}). Grundbegriffe der Elementaren Geometrie, EAGLE Leipzig.

Graumann, Günter (2013). Abbildungen in der elementaren und analytischen Geometrie. Edition am Gutenbergplatz Leipzig (EAGLE). *Erscheint demnächst*.

Gilbert GREEFRATH, Münster

Pragmatische Konzepte von Grundwissen und -können vor dem Hintergrund eines digitalen Werkzeugeinsatzes

Im Rahmen von Unterrichtskonzepten mit digitalen Werkzeugen stellt sich die Frage nach der Konzeptualisierung von hilfsmittelfrei verfügbarem Grundwissen und –können besonders deutlich. In diesem Beitrag werden zwei auf pragmatischer Grundlage entwickelte Konzepte von Basiskompetenzen bzw. sicherem Wissen und Können zum Anlass genommen auf der Basis von Erfahrungen aus einem Unterrichtsprojekt mit Taschencomputern in der Sekundarstufe I die Frage nach der sinnvollen Gestaltung von hilfsmittelfrei verfügbarem Grundwissen und –können exemplarisch zu diskutieren und damit einen Ausblick für eine Konzeption von Grundwissen und –können zu geben.

Wir verwenden hier die Begriffe des Grundwissens und Grundkönnens. Wissen bezeichnet dabei die im gesellschaftlichen Bewusstsein verankerten Abbilder der Realität. Können beinhaltet Fähigkeiten und Fertigkeiten. Letztere sind automatisierte Komponenten, die nicht bewusst gesteuert werden müssen (Pippig et al. 1988). Der Begriff der Grund- oder Basiskompetenzen schließt nach dieser Auffassung das Grundwissen und Grundkönnen ein.

Der Ansatz der Basiskompetenzen nach Drüke-Noe et al.

Im Rahmen einer Arbeitsgruppe haben Drüke-Noe et al. (2011) im Verlauf von mehreren Jahren Basiskompetenzen für das Ende der Pflichtschulzeit zusammengestellt. Sie bestehen aus Listen von Kompetenzen und illustrierenden Aufgaben, die nach Leitideen geordnet sind. Zu den Basiskompetenzen wurden sowohl inhaltsbezogenen Kompetenzen als auch prozessbezogene Kompetenzen gezählt.

Die Entwicklung der Basiskompetenzen war im Wesentlichen normativ, allerdings zum Teil unter Berücksichtigung empirischer Ergebnisse. Zwischenergebnisse wurden in unterschiedlichen Zusammenhängen auch außerhalb der Gruppe diskutiert und diese Diskussionen sind in die weitere Arbeit eingeflossen.

Die Kerneigenschaft des Zugangs von Drüke-Noe et al. wird von Pallack (2012) als ständige Verfügbarkeit bzw. als praktisch unmittelbare Verfügbarkeit von mathematischem Wissen und Können charakterisiert. Weitere Eigenschaften, die Basiskompetenzen aus Sicht der Gruppe von Drücke-Noe et al. haben sollen, sind zunächst die *Minimaleigenschaft*. In den Basiskompetenzen werden also Anforderungen beschrieben, die nicht weiter reduziert werden können. Des Weiteren wird eine *Allgemeinheit* der Mindestanforderungen für alle Bildungsgänge an allgemeinbildenden Schulen vorausgesetzt. Die Basiskompetenzen sind *praxis- und nützlichkeitsorientiert*. Sie verstehen sich als Voraussetzung für den Beruf und zur Bewältigung von Alltagssituationen.

Der Ansatz des Sicheren Wissens und Könnens nach Sill

Die Entwicklung des „Sicheren Wissens und Könnens“ geschah ausgehend von Vergleichsarbeiten für das untere Hauptschulniveau im Rahmen einer Arbeitsgruppe von Sill (2010) in Mecklenburg-Vorpommern aus Vertretern von zwei Universitäten sowie des Landesinstituts für Schule und Ausbildung. Die gesamten Inhalte der Sekundarstufen wurden gruppiert nach mehreren Themenkomplexen betrachtet.

Sill unterscheidet drei Beherrschungsgrade, die als sicheres, reaktivierbares und exemplarisches Wissen und Können bezeichnet werden. Die so entwickelte erste Stufe, das Sichere Wissen und Können spielt die Rolle des Grundwissens und -könnens. Dieses soll eine elementare Bedeutung zum einen für das Lernen im Mathematikunterricht und zum anderen für die Bewältigung von Anforderungen an jeden Bürger der Gesellschaft außerhalb des Mathematikunterrichts haben. Sie sind also *praxis- und nützlichkeitsorientiert*, sowohl bezogen auf die Gesellschaft, als auch auf den Mathematikunterricht. Ebenso ist die ständige sichere *Verfügbarkeit* ein Kriterium im Konzept von Sill. Die Entwicklung von Sicherem Wissen und Können nach Sill dient in erster Linie der Erstellung von (empirischen) Tests für Lernende mit dem Ziel der *Diagnose* im Unterricht.

Das Beispiel Lineare Gleichungssysteme

Im Rahmen des Projekts CASI (s. Greefrath 2012) wurden Unterrichtseinheiten mit Taschencomputereinsatz entwickelt, die auch hilfsmittelfreie Kenntnisse und Fertigkeiten fördern sollten. Wir wollen im Folgenden die Problematik am Beispiel eines standardmäßig in Klasse 8 oder 9 unterrichteten Inhalts erläutern, für den Erfahrungen aus dem Projekt CASI vorliegen.

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen kann in diesen Klassenstufen in erster Linie als Grundfertigkeit angesehen werden. Zusätzlich sind lineare Gleichungssysteme aber auch als Teil weiterführender Überlegungen in der Sekundarstufe II und darüber hinaus von Bedeutung. Ein Blick in die Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (KMK, 2004) macht nicht nur den algorithmischen Kern des Inhalts „Lineare Gleichungssysteme“, sondern gleichzeitig auch seine Vernetzung deutlich. Es werden im Wesentlichen innermathematische Kompetenzen genannt. Es wird aber auch deutlich, dass nicht nur algebraische Ansätze, sondern auch graphische oder numerische Verfahren gefordert werden. Außerdem werden theoretische Überlegungen zur Lösbarkeit ebenso eingefordert wie der Einsatz geeigneter digitaler Werkzeuge. Dazu kommen weitere Aspekte, die in den Lehrplänen der Länder konkretisiert werden. Die Frage der sinnvollen Auswahl eines hilfsmittelfrei verfügbaren algorithmischen Verfahrens im Sinne einer Grundfertigkeit zur Lösung linearer Gleichungssysteme in Jahrgangstufe 8 bzw. 9 ist insbesondere vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit von digitalen Werkzeugen zu diskutieren.

Die Meinungen der CASI-Projektlehrkräfte gingen hier von der vollständigen Bearbeitung mit Hilfe digitaler Werkzeuge bis zum Unterricht aller Lösungsverfahren ohne Hilfsmittel auseinander. Denkbar wäre auch der Ansatz, dass die digitalen Hilfsmittel das Erlernen der – später dann ohne Hilfsmittel ausgeführten – Lösungsverfahren unterstützen können; z. B. durch schrittweises Umformen von Gleichungen mit Unterstützung digitaler Werkzeuge oder die Kontrolle der Lösungen.

Zumindest für Überlegungen zum innermathematischen Wissensaufbau kann die Bearbeitung von linearen Gleichungssystemen aus fachdidaktischer Sicht betrachtet werden. Konkret stellt sich immer wieder die Frage, welche(s) algorithmische(n) Lösungsverfahren im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen für Schülerinnen und Schüler in Klasse 8 oder 9 geeignet ist bzw. sind. Für lineare Gleichungssysteme werden üblicherweise das Gleichsetzungs-, das Einsetzungs- und das Additionsverfahren diskutiert. Mit Blick auf die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler kann für das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen das Gleichsetzungsverfahren als sinnvolles Verfahren angesehen werden, mit Blick auf später zu bearbeitende Probleme wäre die Einführung des Einsetzungsverfahrens oder des Additionsverfahrens möglicherweise sinnvoller. Falls das Ziel die Beurteilung von Algorithmen nach Kriterien wie Durchführbarkeit, Schwierigkeit oder Effizienz ist, sollten mehrere Verfahren zum Vergleich zur Verfügung stehen. Wird dagegen heuristisches Arbeiten in das Zentrum der Überlegungen gestellt, dann können einfache Beispiele auch schon vor Kenntnis der genannten Verfahren bearbeitet werden. (vgl. Pinkernell & Greefrath 2011)

Mögliche Kriterien für die Entwicklung von Grundwissen und Grundkönnen-Konzepte

Mögliche Kriterien für die Entwicklung von Konzepten von Grundwissen und –können ergeben sich zum einen aus vorhandenen Ansätzen und zum anderen aus Erfahrungen im Rahmen des CASI-Projekts. So können zwar die technischen Möglichkeiten der verwendeten digitalen Werkzeuge zur Kenntnis genommen werden; sie sollten aber nicht als Kriterium für Grundwissen und -können-Konzepte verwendet werden. Wichtig erscheint dagegen die Berücksichtigung der Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler, die auf der Basis fachdidaktischer Argumente, wie im Beispiel der linearen Gleichungssysteme ausgeführt, mit den Zielen des Mathematikunterrichts an den Schnittstellen am Ende der Sekundarstufen in Bezug gesetzt werden können. Hier ist die praxis- und nützlichkeitsorientierierung wie in den beiden beschriebenen vorhandenen Ansätzen, wenn auch unterschiedlich akzentuiert, ein wesentlicher Faktor. Offen sind die Fragen, ob Grundwissen und -können auch kontextbezogen oder lediglich kontextfrei verfügbar sein soll und ob auch Grundkönnen für digitale Werkzeuge im Rahmen dieses Konzepts festgelegt werden sollte. Wichtig für Grundwissen und –können ist auch die Minimaleigenschaft, d.h. dass nur Elemente festgelegt werden, die unverzichtbar sind.

Fazit

Die Festlegung von Grundwissen und -können vor dem Hintergrund eines digitalen Werkzeugeinsatzes setzt also nicht nur die Betrachtung der jeweiligen Kompetenzen im Zusammenhang mit den Vorkenntnissen und den Möglichkeiten digitaler Medien sondern auch eine breite Diskussion über Ziele und Kompetenzen weit über den Mathematikunterricht hinaus, insbesondere an den Schnittstellen am Ende der Sekundarstufen, voraus.

Literatur

Drüke-Noe, C., Möller, G., Pallack, A., Schmidt, S., Schmidt, U, Sommer, N., Wynands, A. (2011): Basiskompetenzen Mathematik für Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht. Berlin: Cornelsen.

Greefrath, G. (2012). Überzeugungen und Erfahrungen von Lernenden im Unterricht mit digitalen Werkzeugen, Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster: WTM, 309-312.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. München: Wolters Kluver.

Pallack, A. (2012). Basiskompetenzen und Leistungsbeurteilung. Ein Weg Wichtiges zu betonen, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 65 (7), 388-391

Pinkernell, G., Greefrath, G. (2011). Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 64 (2), 109-113.

Pippig, G. et al. (1988). Pädagogische Psychologie. Berlin: Volk und Wissen.

Sill, H.-D. (2010). Probleme und Erfahrungen mit "Mindeststandards". In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 88, S. 5–11.

Birgit GRIESE, Michael CASPER, Bochum

Tragfähigkeit von Weg-Zeit-Kontexten beim Einstieg in die Differentialrechnung

1. Motivation und Ausgangslage

Internationale Vergleichsuntersuchungen wie TIMSS/III haben gezeigt, dass deutsche Oberstufenschüler in kontextorientierten Aufgabenstellungen daran scheitern, physikalische Größen, z.B. Geschwindigkeit, mathematisch zu beschreiben. Laut Blum (2000) ist der Grund hierfür im kalkülorientierten Analysisunterricht zu finden, in dem der Schwerpunkt auf algebraischen Lösungsalgorithmen ohne authentischen Kontext liegt. Die Schülerinnen und Schüler (SuS) werden oftmals mit künstlichen Scheinproblemaufgaben ohne Anwendungsbezug (Danckwerts & Vogel, 2006) konfrontiert, sodass „echte" Problemlöseaktivitäten nicht stattfinden. Die Idee der qualitativen Analysis (Hußmann & Prediger, 2010) betont die Bedeutung inhaltlichen Denkens und erhebt seine Förderung zum zentralen Ziel.

2. Modultage Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum

Im Alfried-Krupp-Schülerlabor der RUB werden im Fach Mathematik Modultage angeboten, die auf dieser Idee basieren. Hier sollen SuS einen Tag lang Experimente durchführen und selbstständig Aufgaben zu einem ausgewählten Thema bearbeiten. Ein Modultag bietet vorstellungsorientierte Einstiege, die im Fachunterricht aufgegriffen werden können, und fokussiert so auf nachhaltiger Verständnisbildung. Der Modultag "Steig' ein!" adressiert die Einführungsphase (Stufe 10 / 11) der Gymnasialen Oberstufe und dient als Einstieg in die Differentialrechnung am Beispiel der eigenen Fahrt zur Universität und weiterer Weg-Zeit-Kontexte.

3. Theoretischer Hintergrund – *Abstraction in Context*

Abstraction in Context (AiC) ist ein von Hershkowitz, Schwarz und Dreyfus (2001) entwickelter theoretischer und methodischer Rahmen, der es ermöglicht, den Prozess der Bildung von abstraktem mathematischen Wissen bei SuS zu beschreiben und zu analysieren. AiC unterscheidet die folgenden Phasen: Die Lernenden erkennen zunächst, dass ein vorheriges Konzept im vorliegenden Kontext sinnvoll anwendbar ist - *Recognizing* (R). Dies kann nur gelingen, wenn ein Bedürfnis nach einem neuen Konstrukt besteht (vgl. Kidron und Monaghan, 2009). Nur dann nutzen die SuS ihre intuitiven Einschätzungen (vgl. Davydov, 1990) und ihr bisheriges Wissen zur Anpassung von Strategien und Begründungen, um das vorliegende Problem zu lösen, *Building-with* (B). So entwickeln die Lernenden in der dritten Phase aktiv durch Anpassung und Integration von vorherigen Konzepten ein neues von ihnen durch- und erdachtes Konstrukt, *Constructing* (C). Dieser Vorgang wurde auch als *vertical mathematization* von Treffers und Goffree (1985) beschrieben, womit betont wird, dass die Phasen der RBC-Theorie aufeinander aufbauen und somit sukzessiv beobachtbar sind. Erfolgreich durchlaufen, ist das neu erworbene mathematische Konstrukt langfristig tragfähig, *Consolidation* (+C).

4. Forschungsfragen und Methodologie

Im Falle des Modultags "Steig' ein!" findet sich *Recognizing* in der Anwendung des Steigungskonzeptes auf Geschwindigkeiten. Das Bedürfnis der SuS, die Problemstellung zu bearbeiten, wird dadurch gefördert, dass der Kontext auf gemeinsamen persönlichen Erfahrungen beruht (Anfahrt zum Schülerlabor, Aufnahme der Bewegungsdaten mit Hilfe von GPS-Geräten, Bewegungserlebnisse im Schülerlabor). *Building-with* meint die Nutzung der Steigung von Geraden bei der Bearbeitung verschiedener Fragestellungen zur Geschwindigkeit. *Constructing* erfolgt im Rahmen der weiteren Bearbeitungen und kann in den im Begleitheft abgefragten Beschreibungen der Vorgehensweise und in den videografierten Diskussionen identifiziert werden. Aufgabenbasierte Paarinterviews und Problemstellungen aus Bewertungssituationen dienen dazu, die letzte Phase der *Consolidation* zu operationalisieren. Somit sind alle Phasen der RBC+C-Theorie überprüfbar, auf deren Grundlage eine Evaluation der Tragfähigkeit von Weg-Zeit-Kontexten und die Weiterentwicklung des Modultages stattfinden kann. Die Forschungsfragen lauten daher:

- Wie genau verlaufen die Phasen RBC (insbesondere der Abstraktionsprozess beim Übergang von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit)?
- Welche Vorstellungen im Bereich dieses Kontextes werden ausgeprägt, und gibt es *Consolidations*, die auf diesen Kontext zurückzuführen sind?

Nach einer Pilotphase im Winter 2011/2012 mit Interviews im Sommer 2012 wurde ein Jahr später die Erhebungsphase begonnen, die im Sommer 2013 mit den Interviews dieser Kohorte beendet werden wird.

5. Erste Ergebnisse

Die Aufzeichnungen bestätigen, dass die SuS nahezu vollzählig (> 90%) Verknüpfungen zwischen den Steigungen im Weg-Zeit-Diagramm und den erlebten Geschwindigkeiten herstellen, d.h. *Recognizing* bewältigen. Etwa 10% der SuS erweitern dies sogar auf Beschleunigungs- und Bremsvorgänge. Der Kontext und das reale Erleben fördern also theoriekonform den Aufbau abstrakten mathematischen Wissens.

Ob die Hauptschwierigkeit, den Übergang von der Durchschnittsgeschwindigkeit zur Momentangeschwindigkeit zu erfassen, überwunden wurde, zeigt sich im Modultag an einer Aufgabe über einen Autofahrer, dem eine Geschwindigkeitsüberschreitung vorgeworfen wird, die er abstreitet. Die Durchschnittsgeschwindigkeit von 50km/h muss hier als *Building-with* mit den Geschwindigkeiten in sinnvoll ausgewählten Intervallen bzw. mit den Momentangeschwindigkeiten verglichen werden. Und tatsächlich gelangen die SuS zu der Erkenntnis, dass der zeitweise steilere Verlauf der Kurve im Weg-Zeit-Diagramm einer Geschwindigkeitsüberschreitung entspricht.

> Er fährt nur 50km/h, wenn der Graph parallel zu der Geraden (= Durchschnittsgeschwindigkeit) ist, da dann die gleiche Steigung auch die gleiche Geschwindigkeit ausmacht. An den Stellen, an denen die Graphen nicht parallel sind, fährt er langsamer, wenn der Graph flacher ist, und schneller, wenn der Graph steiler ist. (Robin02, 19.12.2012.)

Auch die Verkleinerung des betrachteten Intervalls auf eine infinitesimale Größe wird z.B. in folgender Schülerantwort formuliert: „Wir nehmen zwei Punkte, die nah bei einander liegen, sodass der Zeitraum so minimal wird, dass er fast ein Zeitpunkt ist.“ (Sarah03, 19.12.2012). Damit ist ein neues Konstrukt geschaffen, *Constructing* findet statt. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das Konstrukt der Geschwindigkeit als Steigung von Weg-Zeit-Funktionen zur Problemlösung eingesetzt wird.

Die Höchstgeschwindigkeit wird jedoch nur etwa von der Hälfte der SuS ermittelt, wie auch in der Klausuraufgabe zwei Wochen später. Offenbar trägt der Kontext in der bisher präsentierten Form nicht so weit, dass auch diese Problemstellung als relevant empfunden wird. Das Konstrukt der mittleren Geschwindigkeit dominiert und wurde nicht vom Konstrukt der momentanen Geschwindigkeit abgelöst. In der Aufgabenformulierung wird auch nicht explizit danach gefragt, so dass die Schülerinnen und Schüler einen für sie zufriedenstellenden Ansatz wählen. Über ihre Fähigkeit zur Nutzung ihres neu erstellten Konstrukts sagt dies jedoch nichts aus. Somit wird der Übergang von der mittleren zur momentanen Steigung in diesem Kontext angeregt, *Consolidation* kann jedoch noch optimiert werden.

6. Reflexion und Ausblick

Die SuS benutzten bisher ausschließlich die mittlere Steigung als Hilfsmittel für die Beschreibung der Geschwindigkeitsverläufe. Die genauen Gründe hierfür werden Ausgangspunkt für die noch anstehenden Interviews sein. Um den Fokus des Modultages deutlicher in Richtung Momentansteigung bzw. Momentangeschwindigkeit zu verschieben und damit eine weitere mathematische Konzeptualisierung im Sinne von RBC zu erwirken, wird der Sachkontext der Autofahrer-Aufgabe dahingehend verändert, dass nicht nur nach einer beliebigen, sondern nach einer führerscheingefährdenden Geschwindigkeitsübertretung gesucht werden muss. Die Forderung nach authentischen Bezügen und echten Problemstellungen (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006) wird somit erfüllt, und die Modultage Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum können in Zukunft noch besser dazu beitragen, bei SuS wertvolle Konstrukte entstehen zu lassen, auf die im Mathematikunterricht nutzbringend zurückgegriffen werden kann.

Literatur

Blum, Werner (2000). Perspektiven für den Analysisunterricht. In: *Der Mathematikunterricht 46* (4-5), S. 5-17.

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum, Heidelberg.

Davydov, V. (1990). Types of generalisation in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. In J. Kilpatrick (Hrsg.) & J. Teller (Übers.) *Soviet studies in mathematics education, Vol. 2*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. [Original veröffentlicht 1972]

Dreyfus, T. (2012). Constructing abstract mathematical knowledge in context. Online verfügbar unter http://www.icme12.org/upload/submission/1953_F.pdf [22.02.2013].

Hahn, S., & Prediger, S. (2004). Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative. In A. Heinze & S. Kuntze (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 217-220). Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32,* 195–222.

Hershkowitz, R. (2009). Contour lines between a model as a theoretical framework and the same model as methodological tool. In B. Schwarz, T. Dreyfus, & R. Hershkowitz (Hg.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (S. 273-280). London, UK: Routledge.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2010). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(31), 35-38.

Kidron, I., & Monaghan, J. (2009). Commentary on the chapters on the construction of knowledge. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Hrsg.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (S. 81-90). London, UK: Routledge.

Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. II (S. 97-123). Utrecht, The Netherlands: OW&OC.

Matthias GROESSLER, Engelbert NIEHAUS, Landau

Geomedienkompetenz - Räumliche Orientierung und mobile Endgeräte

1. Einleitung

Wenn sich Menschen im Raum bewegen, interagieren sie mit ihrer Umwelt. Mobiltelefone stellen im Alltag einen permanenten Begleiter von Schülerinnen und Schülern dar und werden oft als Navigationswerkzeug mit GPS-Unterstützung verwendet. Durch GPS-Sensoren werden Mobiltelefone zu Werkzeugen räumlicher Entscheidungsunterstützung, da sie Zugriff auf unsichtbarer Informationen und auf Perspektiven auf die Umwelt liefert, auf die die Nutzer von ihrem aktuellen Ort ohne digitales Endgerät nicht zugreifen können. Das Orientieren im Raum und die Navigation sind räumliche Entscheidungen. Ziel ist es, diese räumlichen Entscheidungsprozesse an der Schnittstelle zwischen Mathematik- und Geographiedidaktik zu beleuchten und die Vernetzung von räumlichem Denken in der Geometrie mit außerschulischen Lernorten darzustellen.

In diesem Artikel wird eine interdisziplinäre Studie aus den Bereichen Mathematik und Geographie vorgestellt, die mit vier fünften Klassen einer integrierten Gesamtschule an der Universität Koblenz Landau am Campus Landau durchgeführt wurde. Ziel dieser Studie ist die Ermittlung des Beitrages, den die Arbeit mit mobilen Endgeräten für die Kompetenzbildung im Bereich der räumlichen Orientierung im Vergleich zur klassischen Kartenarbeit leistet. Ein zweites Ziel der Studie ist die Entwicklung eines Messinstrumentes, um die Qualität des Transformationsprozesses von Repräsentationsformen zu messen.

2. Anlass der Studie

Im vorgestellten Projekt „GeoWiss“ findet die Vernetzung auf zwei Ebenen statt. Die erste Ebene ist die fachliche Vernetzung zwischen den beiden Disziplinen Mathematik und Geographie. Die zweite Ebene der Vernetzung bezieht sich auf die Verbindung von außerschulischer Lernumgebung mit der Arbeit im Klassenraum. Zunächst wird nun die Schnittstelle zwischen Mathematik und Geographie betrachtet.

Der Rahmenlehrplan Mathematik für die Klassenstufe 5 enthält gibt vor, das Schülerinnen und Schüler (SuS) Welt in Raum und Form erfahren, sie beschreiben und begreifen sollen. Bezüglich fachlicher Vernetzung schlägt der Lehrplan vor, „auch andere Orientierungsmöglichkeiten, wie z.B. Himmelsrichtung und Entfernung, Gradnetz der Erde (Erdkunde)“ zur Förderung der Kompetenzbildung im Bereich räumlicher Orientierung im Unterricht einzusetzen (vgl. [1]). Der Rahmenlehrplan Geographie für die Klassenstufe 5 schreibt Einsichten in die Mensch-Raum-Beziehung vor. Dabei soll möglichst oft von Dingen der realen Welt ausgegangen werden. Speziell soll in der Jahrgansstufe 5 der Nahraum betrachtet werden. Im beschriebenen Projekt „GeoWiss“ wurde dies damit erreicht, dass die Umgebung um die Universität und der Schulweg der Schüler jeweils thematisch eingebunden wurden. Zudem sollen die Schüler Fähigkeiten zum Benutzen von Karten zur Orientierung erwerben. Auch im Lehrplan Geographie wird der Vernetzungsgedanke adresseiert, da „ das Thema Topographie und Orientierung [...] keinesfalls als geschlossene Unterrichtseinheit behandelt werden“ darf (vgl.[2]).

Wie im zweiten Teil des Vortragstitels anklingt, ist der Einsatz von mobilen Endgeräten die zweite Säule des Projektes. Mit mobilen Endgeräten lassen sich Karten darstellen und sie unterstützen die Orientierung im Raum maßgeblich durch zwei Aspekte. Zum einen bekommt der Nutzer dank GPS-Lokalisation als Output maßgeschneiderte Informationen präsentiert. Zum anderen kann der Nutzer dank GPS-Lokalisation ortsgesteuerte Input-Daten sammeln.

3. Didaktische Fragestellung

Die Didaktische Fragestellung lautet nun, welchen Beitrag die Arbeit mit mobilen Endgeräten für die Kompetenzbildung im Bereich der räumlichen Orientierung im Vergleich zur klassischen Kartenarbeit leistet (vgl. [3]).

Folgende Thesen fassen einige potentielle Beiträge von mobilen Endgeräten zur klassischen Arbeit mit Karten zusammen. Zunächst erlauben digitale Endgeräte die Entkopplung der beiden Teilaufgaben Orientierungspunkte zu suchen und sich dabei im Raum zu orientieren. Des Weiteren ergeben sich durch Datensammlung und Datenspeicherung erweiterte Möglichkeiten zur Selbstkontrolle. Außerdem kann durch den Prozess der Motivauswahl beim Abspeichern von Orientierungspunkten ein zusätzliches Verständnis für die Qualität von Orientierungspunkten geschaffen werden. Letztlich können beispielsweise beim Tracken die abgespeicherten Produkte der mobilen Endgeräte im Nachhinein mit der Bewegung im Raum assoziiert werden.

Die zweite Ebene der Vernetzung im beschrieben Projekt ist die Vernetzung von außerschulischer Lernumgebung mit dem Unterricht im Klassenraum. Diese wird in unserem Projekt durch die Protokollierung des erlebten durch die Schüler am außerschulischen Lernort erreicht. Dabei hat das Protokollieren im beschriebenen Projekt die Funktionen des Anfertigens von

Skizzen und Fotos erzeugen, jedoch im Weiteren auch der Verschriftlichung des Erfassten. Das Ziel der Protokollierung war jeweils die Erstellung der Vorlage zur Reproduktion entweder für sich selbst oder für andere Mitschüler. Protokollierung wird dabei als Transformation von einer Repräsentationsform (enaktiv, ikonisch, symbolisch) in die andere verstanden (vgl. [4]). Das Messinstrument, welches innerhalb dieser Studie entwickelt wird, soll die Qualität Transformationsprozesse zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen quantitativ erfassen.

4. Treatment und Unterrichtsdesign

Die Studie wurde mit 115 Schülern der 5. Jahrgangsstufe einer integrierten Gesamtschule durchgeführt. Die Schüler wurden in verschiedene Gruppen aufgeteilt und sollten in den Unterrichtseinheiten (vier Doppelstunden) alle die gleichen Inhalte behandeln. In den ersten beiden Doppelstunden wurde räumliche Orientierung und der Umgang mit Karten unter Zuhilfenahme von Orientierungspunkten vermittelt. In der dritten und vierten Doppelstunde stand das Bewerten von zurückgelegten Wegen und Raumsituationen mittels lesen, bewerten und erstellen von Tracks im Vordergrund. Die behandelten Inhalte hielten die SuS jeweils in Arbeitsheften fest. Dazu mussten sie jeweils in Gruppenarbeit, Partnerarbeit oder Einzelarbeit die Aufgaben zu den jeweiligen Themen bearbeiten. Anschließend wurden die Ergebnisse der Aufgaben im Gruppenverband gemeinsam reflektiert.

Das Unterrichtsdesign teilte die Klassen dabei in sechs Gruppen auf, die sich zunächst in der Nutzung von mobilen Endgeräten (Smartphones) und klassischen topologischen Karten zur Behandlung der beschriebenen Unterrichtsinhalte unterschieden. Die zweite Ausprägung in der Gruppeneinteilung bezog sich auf die Bereitstellung von Hilfen für Protokollierung. Zwei Gruppen bekamen dabei Aufgabenhefte mit ausführlicher Protokollierungsunterstützung für die Lösung der Aufgaben. Eine der Gruppen arbeitete mit Smartphone, die andere mit Karten. Zwei weitere Gruppen bekamen dagegen Arbeitshefte mit sehr knappen Anweisungen bezüglich der Protokollierung. Wiederum zwei Gruppen bekamen gestaffelte Protokollierungsunterstützung, in der ersten Stunde sehr ausführlich und im weiteren Verlauf immer weniger ausführlich.

5. Transformationsprozesse der Repräsentationsformen

In den Unterrichtseinheiten wurde versucht, die Transformationsprozesse der verschiedenen Repräsentationsformen für den Aufbau der Kompetenz im Bereich räumlicher Orientierung zu fördern. Dazu fand beispielsweise die fachliche Vorarbeit zum Thema Tracking in enaktiver Form auf dem Universitätsgelände erarbeitet. Gruppen von jeweils zwei Schülern wurden aufgefordert einen bestimmten Weg mit verschiedenen Gehgeschwindigkeiten abzugehen und dabei immer nach dem selben Zeitintervall ein Kreuz auf den Asphalt zu zeichnen (ein Schüler zeichnet, der zweite läuft weiter und misst die Zeit per Stoppuhr). Bei dieser Übung wurde vermittelt, dass bei der Wegeaufzeichnung mittels „Tracks“ der Punktabstand mit der Geschwindigkeit proportional in Verbindung steht. Die SuS mussten zunächst durch Kopfgeometrie die durchgeführte „Trackingmethode“ ikonisch in eine Karte einzeichnen und später die daraus gezogenen Schlussfolgerungen in einer Mind-Map symbolisch niederschrieben.

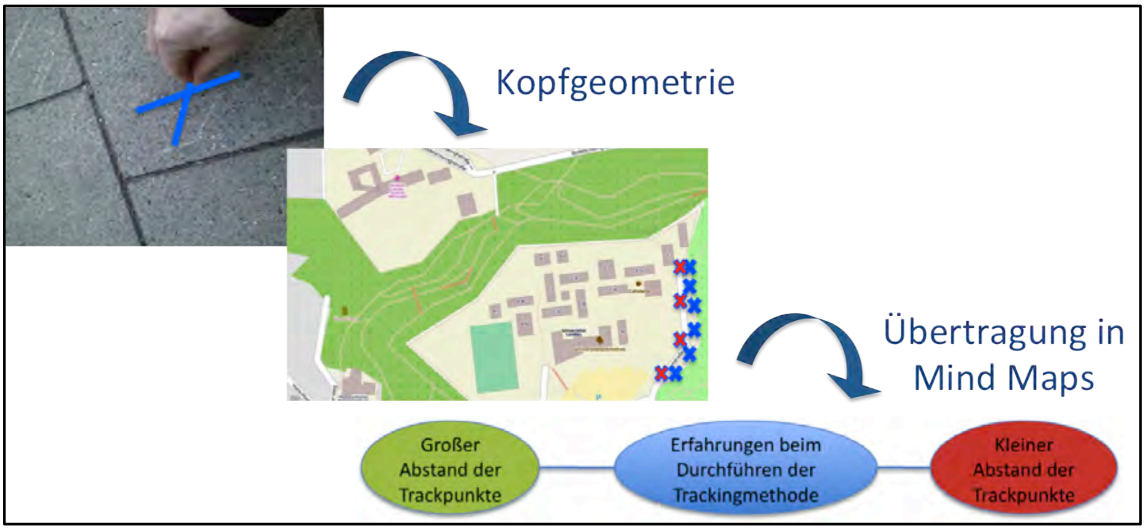


Abbildung 1: Beispiel für Transformationsprozesse der Repräsentationsformen

6. Zusammenfassung und Ausblick

Die vergleichende Studie zeigt Ansätze die Lernumgebungen für den Kompetenzbereich räumliche Orientierung für SuS an der Schnittstelle von Geographie und Mathematik durch den Einsatz von mobilen Endgeräten zu verbessern. Dabei zeigt zudem das Beispiel der Trackingmethode, dass Protokolle nicht zwingend materiell mitgenommen werden müssen, sondern auch durch Transformationsprozesse schrittweise übertragen werden können. Ziel der Studie wird es nun anschließend sein, die Qualität der Transformationsprozesse in den Protokollen der SuS zu quantifizieren.

Literatur

[1] Ministeriums für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz (2007): Rahmenlehrplan Gymnasium 5. Jahrgangstufe Mathematik

[2] Ministeriums für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz (2001): Rahmenlehrplan Gymnasium 5. Jahrgangstufe Geographie

[3] Schulmeister, R. (2009): Gibt es eine „Net Generation“? Hamburg: Universität Hamburg, Zentrum für Hochschul- und Weiterbildung

[4] Bruner, J. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie. München: Berlin-Verlag

Meike GRÜßING[1], Julia SCHWABE[2], Aiso HEINZE[1], Frank LIPOWSKY[2], [1] Kiel / [2] Kassel

Adaptive Strategiewahl bei Additions- und Subtraktionsaufgaben - eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsansätze

Theoretischer Hintergrund

Die Entwicklung der Kompetenz zur adaptiven Wahl von Rechenstrategien gilt als ein bedeutendes Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Ergebnisse verschiedener Studien zeigen jedoch, dass die Fähigkeit, verschiedene Rechenstrategien flexibel und auf die Charakteristika der jeweiligen Aufgabenstellung bezogen einzusetzen, in der Grundschule eher gering ausgeprägt ist (Selter, 2001; Benz, 2005; Torbeyns, de Smedt, Ghesquière & Verschaffel, 2009; Heinze, Marschick & Lipowsky, 2009). Schülerinnen und Schüler greifen häufig auf universelle Lieblingsstrategien zurück, auch wenn diese aus mathematischer Sicht ineffizient sind. Nach der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren werden diese häufig auch dann eingesetzt, wenn sie um ein Vielfaches aufwändiger als andere Strategien sind (z.B. Selter, 2001).

Ergebnisse einiger Studien deuten gleichzeitig darauf hin, dass sich positive Effekte für Unterrichtskonzepte ergeben, welche explizit die adaptive Strategiewahl fördern (z.B. Blöte et al., 2000; Rathgeb-Schnierer, 2007). Diese Studien beziehen sich jedoch in der Regel auf umfassende Unterrichtskonzepte. Darüber hinaus werden in der Regel Ansätze, die von Anfang an die adaptive Strategiewahl in den Vordergrund stellen, einem traditionellen Unterricht gegenübergestellt, der zunächst einen Schwerpunkt auf die Einführung und Automatisierung einer universellen Strategie legt.

Bei genauerer Betrachtung lassen sich jedoch verschiedene Instruktionsansätze zur Förderung des adaptiven Rechnens gegenüberstellen. Der *explizierende Ansatz* basiert auf der Annahme, dass Strategien als prozedurales Wissen verfügbar sind, so dass beim Lösen einer Aufgabe eine Strategie adaptiv ausgewählt werden kann. Entsprechend legt der explizierende Instruktionsansatz einen Schwerpunkt auf den sukzessiven Aufbau eines Strategierepertoires durch die Automatisierung vorgegebener idealtypischer Strategien in Verbindung mit dem kontinuierlichen Aufbau von Metawissen über ihre Effizienz. Dem *problemlöseorientierten Ansatz* liegt die Annahme zugrunde, dass Strategien nicht als Lösungsmethoden im Gedächtnis vorliegen, sondern dass bei jeder Aufgabe auf Basis des konzeptuellen Wissens über Zahlen ein individueller Rechenweg generiert wird (Threlfall, 2009). Ein Kompetenzaufbau wird daher durch die Entwicklung von konzeptuellem Wissen über Zahlen und das kontinuierliche Selbstentdecken von Lösungswegen in Verbindung mit der Diskussion über ihre Effizienz angestrebt.

Bisher liegen wenige empirische Ergebnisse zum Einfluss dieser instruktionalen Ansätze auf den Erwerb der Fähigkeit zum korrekten und adaptiven Rechnen vor. Eine offene Frage ist weiterhin, ob unterschiedliche Effekte der beiden Ansätze angenommen werden können. Zur Untersuchung dieser Fragestellungen wurde im Rahmen des Projekts „TigeR" eine kontrollierte experimentelle Studie durchgeführt. Dazu wurden die Instruktionsansätze in einem einwöchigen mathematischen Ferienprogramm umgesetzt, das in den Herbstferien 2011 am IPN in Kiel stattfand. Insbesondere wurden dabei die folgenden Forschungsfragen untersucht:

– Zeigen sich (nachhaltige) Effekte einer Intervention zu Beginn des dritten Schuljahres auf den individuellen Kompetenzerwerb zum halbschriftlichen Addieren und Subtrahieren?
– Zeigen sich unterschiedliche Effekte in Bezug auf die beiden Ansätze?

Design

Die Stichprobe besteht aus 79 Schülerinnen und Schülern aus 17 Klassen der Jahrgangsstufe 3, die an diesem Ferienprogramm teilgenommen haben. Die Kinder wurden unter Kontrolle der Mathematikleistung, der Leistung in einem Strategie-Vortest sowie des sozioökonomischen Status zufällig den beiden Instruktionsbedingungen zugewiesen. Ihre 162 Mitschülerinnen und Mitschüler bilden eine Kontrollgruppe. Der Umfang der Intervention zur adaptiven Strategiewahl entsprach etwa 16 Schulstunden. Im Dezember sowie im Februar fand eine Auffrischung im Umfang von 90 Minuten statt. Die konzeptgetreue Umsetzung der Ansätze wurde durch ein Expertenrating abgesichert.

Die von den Kindern eingesetzten Rechenstrategien sowie die Korrektheit ihrer Lösungen wurden in einem Vortest (T1), einem Nachtest direkt im Anschluss (T2) sowie in zwei Follow-Up-Tests im Januar (T3) und im Juni (T4) erfasst. Die Kontrollgruppe nahm nur an den Datenerhebungen zu den Zeitpunkten T1, T3 und T4 teil, da der Nachtest während der Ferienwoche durchgeführt wurde. Die Tests zur Strategiewahl umfassen jeweils acht Items, von denen vier Ankeritems zu jedem Messzeitpunkt eingesetzt wurden. Benachbarte Messzeitpunkte enthalten zwei weitere gemeinsame Items. Neben der Korrektheit der Lösung wurde die Lösungsstrategie auf Grundlage eines differenzierten Kategoriensystems durch zwei Personen kodiert ($\kappa > .70$). In einem weiteren Schritt wurde für jede Aufgabe normativ definiert, welche Strategien in Verbindung mit den jeweiligen Aufgabencharakteristika als effizient und somit als adaptiv anzusehen sind.

Ergebnisse

Zur Untersuchung der Effekte der Intervention im Vergleich mit der Kontrollgruppe werden Varianzanalysen mit Messwiederholung auf Grundlage der vier Ankeritems durchgeführt. Dazu werden zunächst beide Experimentalgruppen gemeinsam betrachtet. In Bezug auf die Adaptivität der Lösungen zeigt sich zum einen ein signifikanter Haupteffekt „Zeit“ ($F(2,456)=15.5$, $p<.001$, part. $\eta^2=.064$) und zum anderen ein signifikanter Interaktionseffekt „Zeit*Gruppe“ ($F\ (2,456)=13{,}19$, $p<.001$, part. $\eta^2=.055$). Für die Korrektheit der Lösungen ergibt sich ebenfalls ein signifikanter Haupteffekt „Zeit“ ($F(2,456)= 47.25$, $p<.001$, part. $\eta^2=.172$), jedoch kein signifikanter Interaktionseffekt „Zeit*Gruppe“. Während sich die Experimentalgruppe somit in Bezug auf die Adaptivität von der Kontrollgruppe unterscheidet, entwickelt sich die Korrektheit der Lösungen weitgehend parallel (vgl. Abbildung 1).

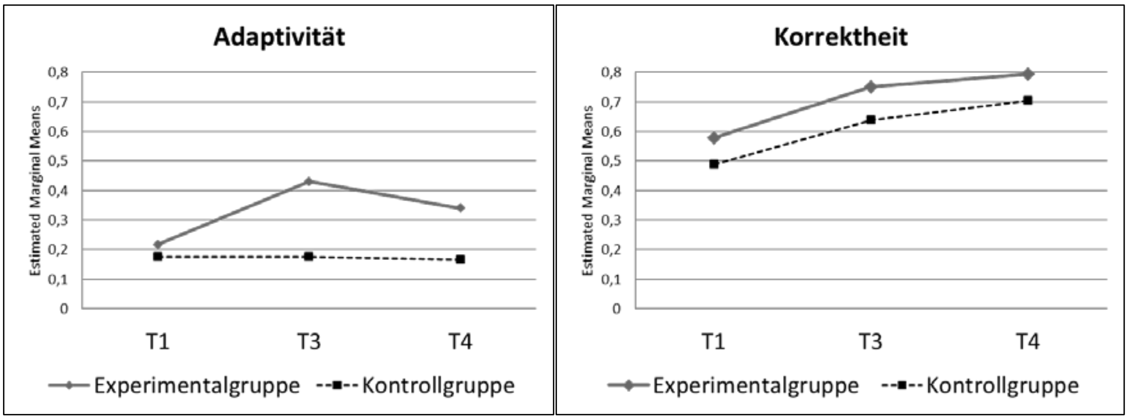


Abbildung 1: Entwicklung des Einsatzes adaptiver und korrekter Strategien der Experimentalgruppe im Vergleich mit der Kontrollgruppe

Zum Vergleich der beiden Ansätze werden Kovarianzanalysen mit Messwiederholung durchgeführt. Als Kovariate werden kognitive Grundfähigkeiten einbezogen. Es ergeben sich jedoch weder in Bezug auf die Adaptivität noch in Bezug auf die Korrektheit signifikante Interaktionseffekte „Zeit*Gruppe“. Vertiefende Analysen der Aufgabenbearbeitungen während des Ferienprogramms deuten jedoch darauf hin, dass die Ansätze in Bezug auf das Strategierepertoire der Kinder zu spezifischen Effekten führen. Während in der Gruppe des explizierenden Ansatzes eher idealtypische Strategien eingesetzt werden, verwendet die Gruppe des problemlöseorientierten Ansatzes eine größere Breite von verschiedenen Strategien. Darunter sind darüber hinaus häufiger Mischformen zu finden.

Diskussion und Ausblick

Die einwöchige Intervention zeigt nachhaltige Effekte in Bezug auf den Kompetenzerwerb zur adaptiven Wahl von Rechenstrategien. Nach drei Monaten zeigen die Kinder, die am TigeR-Ferienprogramm teilgenommen haben weiterhin eine höhere Adaptivität in ihrer Strategiewahl als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler. Auch nach acht Monaten – nach der Einführung der schriftlichen Strategien – bleibt ein Unterschied zwischen den beiden Gruppen bestehen. Die Intervention zeigt keine Effekte auf die Korrektheit der Lösungen. Die plausible Annahme, dass das Kennenlernen und Anwenden mehrerer verschiedener Strategien zu einer erhöhten Fehlerquote führt, lässt sich somit nicht bestätigen.

Im Vergleich beider Instruktionsstrategien zeigen sich auf Gruppenebene keine signifikanten Unterschiede. Eine Betrachtung der angewendeten Strategien im Detail deutet jedoch durchaus auf spezifische Effekte hin. Derzeit werden dazu weiterführende Analysen durchgeführt. Darüber hinaus werden vertiefende Analysen mit Bezug auf leistungsstärkere und leistungsschwächere Teilgruppen sowie unter Berücksichtigung von Interviewdaten zum Erkennen von Aufgabencharakteristika und zu den Kriterien der Strategiewahl durchgeführt.

Literatur

Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Hildesheim: Franzbecker.

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, *10*, 221-247.

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: How adaptive is German 3rd-Graders' strategy use? *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 591-604.

Rathgeb-Schnierer, E. (2007). Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen: Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze. *Journal für Mathematik-Didaktik, 28*(2), 173-174.

Selter, C. (2001). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: German Elementary Children's Success, Methods and Strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 145-173.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 541-555.

Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction, 19*(1), 1-12.

Roland GUNESCH, Darmstadt

Improving university courses in mathematics with new lecturing technology: practical studies of classroom video recording and dissemination on the web

Introduction: a common problem in university mathematics courses

This article presents a new (although in some ways also traditional) method to improve the teaching of mathematics in university lectures. The method presented here has been shown to improve the understanding of the course contents among some students, and it never leads to a decrease in understanding. It is relatively easy to implement.

In mathematics lectures, students face the problem that mathematical content relies heavily on previously taught content. Examples are: logical deductions; use of definitions that were stated earlier; case distinctions, where the arguments used in one case are implicitly used in following cases; etc. Thus it is easily possible that students are “lost”, i.e. unable to follow the lecture due to not being able to remember (or not having understood) previous parts of the course. This problem occurs even when the lecture itself is very clear, well structured, and charismatically presented.

This can be called a problem of “flow control”: Individual students cannot control speed (and pauses) of the course easily, at least not in a sufficiently fine-grained manner. In comparison, when reading a book, the reader has such control. The video recording method presented in the following makes it possible for students to pause arbitrarily, to move backwards (and forward) through the lecture, and it allows the student to see parts repeatedly. The lecturer is not required to adapt their teaching style; in fact, the traditional chalk-on-blackboard style can be used without modification.

Using video recording to allow students to review course content

In the method analyzed here (which has been tried out by the author several times), the lecture takes place in its usual setting in a university classroom, where the students are present. Video cameras are present and record the lecture; more precisely, they record the recent writing on the blackboard plus the lecturer while talking and explaining. Suitable audio transmission technology is also used. After class, the video recordings are made available to the world (or optionally only to the students) on the web. There is no requirement for any particular software for the students; any web browser is sufficient to get the videos, and any video playback software will play them. The students can use the recordings to review the lecture at home or at any other location and time of their choice.

Note that this approach, while using modern technology for recording and dissemination of content, is quite conservative as far as the actual teaching is concerned - after all, writing with chalk on a board is an ancient technique, but it is still highly popular with students. Clearly, much more modern methods of lecturing have been thought of, e.g. "inverted classroom" lecturing. The conservative approach discussed here will be easily adopted by all motivated lecturers, even those preferring traditional teaching.

How are mathematics courses special?

Mathematical language is particularly compressed, possessing a high density of content and ideas. Hence a slow writing method (chalk, handwriting) is popular with students. Many current video recording systems created for classroom use tend to focus on recording of presentation slides (with the image of the lecturer taking only a secondary role). Hence they assume that the lecture is held via computer and projector. This is generally not true in mathematics teaching. It is certainly not wise to require lecturers to adapt their teaching style to the recording technology available. Therefore I propose this maximally simple approach.

Results: How effective is this method in practice?

This method was tested in the following lectures at German universities:

- “Dynamische Systeme” (Dynamical Systems), 2010, University of Hamburg
- “Fachwissenschaftliche Grundlagen” (Introduction to Mathematics for MathEd majors), University of Koblenz-Landau
- “Differentialgeometrie” (Differential Geometry), 2012-2013, Technical University of Darmstadt

In the latter course, there were specially designed course evaluations to test the effectiveness of using this method to enhance teaching. Moreover, there were interviews with some of the students, asking them in detail about their use of the recordings. The evaluations and interviews showed:

- Students like the existence of video recordings profoundly, praising their existence frequently on the evaluation forms.
- There is a large fraction of students who use the video recordings regularly, in addition to attending the classroom lectures.

There is a small fraction of students who make hardly any use of the video recordings. This includes very good students (who presumably already understand the lecture in the classroom thoroughly). On the other hand, some students who had achieved top scores mentioned that they had spent particularly much time reviewing the recordings.

The evaluation questions asked in detail how the students watched the recordings, and what goals they had while doing so. The questions particularly asked how and why selected parts of the lectures were chosen by the students for review. The answers indicated that:

Primarily, students selectively review difficult parts of the lecture in order to understand them better. Sometimes, the recordings are also used to review the lectures in their entirety, e.g. for exam preparation. Students did not typically stay away from the classroom lecture to watch the recordings later. Instead, the recordings were used in addition to the classroom lecture.

Details of the required technology, and some practical suggestions

There are several big potential problems which must be avoided. They are mentioned here, as well as the required resources: people, equipment, and infrastructure. Equipment is most obvious: cameras, audio transmission systems, and video editing equipment. High definition cameras are required. (I suggest two of them; you will soon see why.) The resolution must be high so that handwriting is legible in the video later on; text must appear easily readable and crisp. Cameras should be mounted on large tripods with a special "head" which allows smooth horizontal swivel. Also needed is an audio transmission system with a microphone (e.g. worn around the neck or attached to the collar) to wirelessly transmit the words of the lecturer to the camera; this avoids recording small noises which might be present in the classroom near the camera's positions. These items are already all that is required in class (i.e., during the recording). Afterwards, a computer with video editing software is used to mark beginning and end of the recorded sequence, add a title page, and usually convert the recordings to a size suitable for internet transmission.

The expensive part is people. The cameras must necessarily have a person behind them, pointing them at the currently used part of the board, as well as the speaker, and zooming in on the current blackboard. This is important; it is usually not sufficient to just stationary cameras in the lecture room which always record all the blackboards at once, since that would make the writing on any one of them too small to read. In university courses without people behind the cameras, the resulting recordings are often illegible. A web server is required for transmission; these are easily available at universities. The basic options are download server (which just offers the recordings as files) and streaming server which lets students watch recordings in their browser. Streaming can be achieved with entirely free and open-source software. It is possible to restrict downloading and viewing of the lectures to enrolled students; my personal recommendation, however, is to allow the whole world to see the lectures. Reliability: All technology can fail. The setup presented here is quite simple but obviously contains several components (batteries, storage media, etc.) whose failure will spoil the recording. If you want to be sure that your recordings cover every lecture of the course (e.g. if you are teaching a large class or want to tell students that they can rely on having video recordings), you need a redundant setup - two separate cameras and preferably two audio systems.

Do video recordings reduce classroom attendance?

A typical question (which the author gets asked again and again by other university teachers) is: “Do students still attend class if video recordings are available?” During my course on Dynamical Systems at the University of Hamburg, even though high-quality video recordings of the lectures existed (and were made available promptly after class), attendance in class was constantly almost 100%. This may well be due to the fact that I knew every student by name, and the class size was about 30. Presumably students could be less motivated in larger or more anonymous classes.

As a conclusion to draw from this, I suggest that a large amount of interaction between teacher and students is highly important and valuable. This also supports the view of the author that technology, such as the type suggested here, can noticeably enhance teaching, but it is certainly not a substitute for teaching. Hence video recording technology will not make classroom lectures obsolete.

References

Gunesch, R. (2012): Differential Geometry explained easily: A new teaching concept. In: Beiträge zum Mathematikuterricht. Münster: WTM, 321-324.

Handtke, J., Sperl, A. (2012): Das Inverted Classroom Model. München: Oldenbourg.

Fischer, M., Spannagel, C. (2012): Lernen mit Vorlesungsvideos in der umgedrehten Mathematikvorlesung. In: J. Desel, J. M. Haake & C. Spannagel (eds.): DeLFI 2012 – Die 10. e-Learning Fachtagung Informatik der Gesellschaft für Informatik e.V. Bonn: Köllen, 225-236.

Christine GÜNTHER, Berlin

Problemlösestrategien mathematisch begabter Kinder im Grundschulalter

Probleme zu lösen ist eine anspruchsvolle denkerische Tätigkeit. Im Mathematikunterricht stellt Problemlösen eine zentrale allgemeine Kompetenz dar. Darunter sind mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten zur Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben zu verstehen. Außerdem gehört es zum Problemlösen, Lösungsstrategien zu entwickeln und Zusammenhänge zu erkennen, zu nutzen und auf ähnliche Sachverhalte zu übertragen (vgl. Walther, u.a. 2008,26f.). Eine bestimmte mathematische Aufgabe kann für ein Kind ein Problem darstellen, für ein anders Kind ist die Lösung dieser Aufgabe bereits zur Routine geworden und stellt keine besondere Herausforderung mehr dar. Ein Problem ist dann vorhanden, wenn ein oder mehrere bestimmte Ziele nicht direkt erreicht werden können, also Barrieren vorliegen (vgl. Dörner 1976). Diese Hindernisse können an verschiedenen Stellen auftreten. Unbekannte Ausgangsbedingungen oder Zielsituationen können Gründe für Barrieren sein. Ebenso kann es vorkommen, dass die Mittel und Verfahren, um das angestrebte Ziel zu erreichen, nicht direkt zur Verfügung stehen. Zu einem Problem kommt es also genau dann, wenn eine Person ein Ziel hat und ein Hindernis dabei auftritt, dieses Ziel zu erreichen. Probleme werden gelöst, indem diese Barrieren überwunden werden.

Untersuchung von Vorgehensweisen und Lösungsstrategien von Grundschulkindern beim Problemlösen

Das Ziel der hier vorgestellten Untersuchung ist es, Vorgehensweisen und Strategien von Grundschulkindern qualitativ zu untersuchen, um Problemlösen im Grundschulalter zu verstehen. Mathematisch begabte Kinder nutzen verschiedene Lösungsstrategien beim Bearbeiten problemhaltiger Aufgaben (vgl. Heinze 2005, 79ff.). Sie besitzen bereits im Grundschulalter Problemlösestile (vgl. Fuchs 2006, 93-98) und zeigen besondere Denkweisen (vgl. Sefien 2007, 297f.). Die Gruppe mathematisch begabter Kinder scheint demnach besonders für diese Untersuchung geeignet zu sein, da sie eine hohe Bandbreite und Qualität der Problemlösungen zeigt.

Ausgehend von der übergeordneten Frage, welche Vorgehensweisen und Strategien mathematisch begabte Kinder beim Lösen von Problemaufgaben zeigen, ergeben sich folgende konkretere Fragestellungen: Wie gehen die Kinder beim Lösen der Aufgaben vor? Welche allgemeinen Heuristiken wenden sie an? Welche aufgabenspezifischen Vorgehensweisen und Strategien lassen sich rekonstruieren? Welche metakognitive Planungsprozesse werden sichtbar? Welches Wissen zeigen sie?

Um diese Fragen zu beantworten, wird eine empirische, qualitative Untersuchung durchgeführt, in der in vergleichenden Fallstudien Aufgaben in Interviewsituationen von mathematisch begabten Grundschulkindern bearbeitet werden. Dies wird per Video aufgezeichnet. Nach der ausführlichen Transkription und der Erstellung von Episodenplänen werden die Videoprotokolle (Protokoll ist hier im Sinne Oevermanns zu verstehen (vgl. Oevermann 2002, 3f.)), durch systematisch-extensionale Interpretation (Beck und Maier 1994,50-55) ausgewertet.

Zehn Kinder im Alter von acht bis zehn Jahren nahmen an der Untersuchung teil. Alle Kinder haben den „Mathetreff", ein Enrichment-Angebot zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler an der Humboldt-Universität zu Berlin (vgl. Grassmann 2007), besucht. Die Kinder haben einen Eingangstest für den „Mathetreff" und einen IQ- Test (KFT 4R) bearbeitet. Die Aufgaben des Eingangstests unterscheiden sich von I-Q-Testaufgaben. Sie beinhalten neben komplexeren, offeneren, problemhaltigen Aufgaben auch Indikatorenaufgaben zur Diagnose mathematischer Begabung (Käpnick 1998, 144-159). Zusätzlich konnten die Kinder im Sinne einer prozessbegleitenden Diagnose über einen Zeitraum von drei Semestern in den Förderstunden beobachtet werden.

Interpretation der Videodaten

Um Lösungsstrategien der Kinder zu rekonstruieren, werden in dieser Untersuchung im ersten Schritt Bild und Ton der Videoprotokolle voneinander getrennt. Das Video wird zuerst ohne Ton interpretiert. Nach dem Festhalten des Ablaufs durch grobe Sequenzierung findet die Feinsequenzierung an Episoden statt, die für die Fragestellung besonders relevant sind. In diesem Fall sind die Einzelhandlungen der Aufgabenbearbeitungen der Kinder und die Entstehung von Produkten interessant. Zu den ausgewählten Einzelhandlungen werden verschiedene Deutungen entworfen, die dann durch den Vergleich mit folgenden Einzelhandlungen verifiziert oder falsifiziert werden. Mit folgenden Fragen können Deutungen entstehen: Wie könnte es anders sein? Welche Abweichungen ergeben sich vom möglichen erwarteten Vorgehen? Welche intendierten und welche nicht-intendierten Folgen haben die verschiedenen Handlungen? Wie wird auf solche Folgen reagiert?

Nimmt man das gesprochene Wort hinzu, ergeben sich neue Interpretationsmöglichkeiten. Wiederum wird die gesamte Episode unterteilt. Es werden ebenso Episoden bezogen auf die Fragestellung ausgewählt, die feinsequenziert und zu denen Deutungen entworfen werden. Interessant sind an dieser Stelle folgende Fragen: Wird während des Bearbeitens verbalisiert? Wie wird das Vorgehen beschrieben? Werden Lösungen begründet? Die Deutungen zur Einzelhandlung werden dann an Folgehandlungen verifiziert oder falsifiziert.

Im nächsten Schritt der Interpretation werden Bild und Wort zusammengeführt, Unterschiede und Gemeinsamkeiten herausgearbeitet. Diese werden wiederum gedeutet. Welche Ursache hat es, wenn sich z.B. Gesagtes und Getanes unterscheiden? Welche intendierten und welche nicht-intendierten Folgen haben die verschiedenen Handlungen? Wie wird auf solche Folgen reagiert? Welchen Einfluss könnten Konventionen oder die Interviewsituation etc. haben? Welches Wissen zeigt sich? Welches Wissen ist für die Handlungen nötig?

Im letzten Schritt wird eine Gesamtinterpretation für eine Aufgabe (Fallhypothese) formuliert. Dazu werden die Ergebnisse der Einzelfälle und die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der verschiedenen Fälle bei einer Aufgabe kontrastiert und zusammengefasst. Die Ergebnisse werden an weiteren Daten überprüft. Bei neuen oder abweichenden Szenen werden neue Fallhypothesen durch systematisch-extensionale Interpretation, wie oben beschrieben, gebildet.

Ergebnisse

Zur Konkretisierung soll hier die Fallhypothese für eine Aufgabe dienen. Die Aufgabenstellung lautet wie folgt (s.a. Sefien 2007, 144): In einer Eisdiele gibt es Kugel- Eis mit den Sorten Schoko, Vanille, Erdbeere, Banane und Himbeere. Anna möchte jeden Tag eine Eistüte mit drei verschiedenen Sorten ausprobieren. Wie viele Tage braucht sie, bis sie alle möglichen Zusammenstellungen von drei verschiedenen Eissorten probiert hat?

Es zeigen sich in den Lösungen der Kinder allgemeine Heuristiken wie das Zerlegen in Teilaufgaben oder Transfer. Zusätzlich konnten aufgabenspezifische Strategien wie z.B. die Möglichkeitsermittlung mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks oder durch systematisches Konstant-Halten und Variieren der Sorten rekonstruiert werden. Es kam auch zur multiplikativen Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten. Einige Kinder wendeten auch mehrere Strategien bei der Aufgabe an. Die aufgabenspezifischen Strategien setzten sich wiederum aus kleineren Teilen zusammen, die situationsspezifisch sind. Bezüglich der Dokumentation wurden ikonische und symbolische Varianten der Sortendarstellung gezeigt und Tabellen und Skizzen als heuristische Hilfsmittel eingesetzt.

Die Kinder bearbeiteten insgesamt 16 Aufgaben an je zwei Interviewterminen. Aus den bisher ausgewerteten Daten lässt sich erkennen, dass jedes Kind einen eigenen Weg hat, die einzelne Aufgabe zu lösen. Es werden viele unterschiedliche Lösungsstrategien von den Kindern bei einer Aufgabe eingesetzt. Die Kinder arbeiteten häufig auf formal-symbolischer Ebene und wechseln flexibel Repräsentationsebenen. Sie zeigen außerdem metakognitive Fähigkeiten. Mathematisches Wissen um Verfahren und Fachtermini spielen beim Problemlösen eine wichtige Rolle. Ist das Repertoire von Strategien groß, kann zwischen verschiedenen Strategien ausgewählt und das Vorgehen mit entsprechenden Fachtermini beschrieben werden.

Die Daten wurden vorerst aufgabenweise ausgewertet. Die Betrachtungen einzelner Kinder, Gruppierungen nach Mädchen und Jungen oder nach Alter können weitere Erkenntnisse liefern.

Literatur

Beck, C., Maier, H. (1994): Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung". In Maier, H., Voigt, J. (Hrsg.): Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung. Köln: Aubis

Dörner, D. (1976): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer.

Fuchs, M. (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen- Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile. Berlin: Lit

Grassmann, M. (2007): Lehramtsstudierende auf die Förderung mathematischtalentierter/ leistungsfähiger Grundschulkinder vorbereiten?! – Möglichkeiten und Grenzen. In Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim : Franzbecker

Heinze, A. (2005): Lösungsverhalten mathematisch begabter Grundschulkinder– aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen. Münster: Lit

Heller, K.A, PerlethCh. (2000): Kognitiver Fähigkeits-Test (Rev.) für 4. Klassen (KFT 4 R). Göttingen: Beltz-Testgesellschaft.

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Modelle empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt a.M.: Peter Lang

Oevermann, U. (2002): Klinische Soziologie auf der Basis der Methodologie der objektiven Hermeneutik – Manifest der objektiv hermeneutischen Sozialforschung. Frankfurt am Main.

Sefien, E. Sh. M. (2007): Leistungsexzellenz und ihre Determinanten. In Knopf, H.; Sefien, E. Sh. M.: Schriftenreihe zur Entwicklung sozialer Kompetenz. Band 10, Berlin: Rhombos

Walther, G., Selter, C., Neubrand, J. (2008): Die Bildungsstandards Mathematik. In: Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D., Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen

Birgit GYSIN, Münster

Lerndialoge im mathematischen Anfangsunterricht – Altersmischung als mögliche lernförderliche Ressource

1. Hintergründe des Forschungsprojektes

1.1 Forschungsinteresse

Von erziehungswissenschaftlicher Seite her liegen viele Studien zur Jahrgangsmischung vor, in denen die Leistungen der Kinder gemessen werden – meist ohne die Art und Gestaltung des zugrundeliegenden Unterrichts näher zu präzisieren. Die wenigen Untersuchungen, in denen tatsächlich der jahrgangsgemischte Unterricht selbst erforscht wird, beziehen sich in erster Linie auf das soziale Lernen. Eine Forschungslinie, die unter fachdidaktischer Perspektive auch das sachbezogene Lernen der Kinder in der Jahrgangsmischung in den Mittelpunkt rückt, gilt es daher zu intensivieren und weiterzuentwickeln (Kucharz / Wagener 2007; Gysin 2010). Untersuchungen im Bereich der Mathematikdidaktik befassen sich bisher mit den Fragen, wie Kinder im jahrgangsübergreifenden Diskurs neuartiges Wissen konstruieren (vgl. Nührenbörger 2009) bzw. wie sich der Rollenwechsel von jahrgangsjüngerem zum –älteren Kind auf die Reflexionsfähigkeiten der Kinder auswirkt (vgl. Schülke 2007).

Mein Forschungsinteresse zielt auf das Geschehen in den Lerndialogen zwischen Erst- und Zweitklässlern selbst: Welche Dynamik zeigt sich im Von- und Miteinanderlernen und inwiefern können tatsächlich beide Kinder in der Auseinandersetzung mit herausfordernden mathematischen Lernangeboten voneinander profitieren? Dieses Forschungsinteresse legt eine bestimmte Art der Theoriebildung, die empirisch-qualitative Exploration (Bortz / Döring 2006), nahe. Denn wenn die Mikroebene von Mathematikunterricht in den Blick genommen werden soll, ist es naheliegend, dieses empirische Feld qualitativ zu erschließen. Um eine explorative Untersuchung handelt es sich, weil sie das Generieren von Hypothesen zum Ziel hat.

1.2 Theoretische Bezüge

Die Bedeutung kommunikativer Prozesse für das Lernen gilt in der Mathematikdidaktik als unumstritten. Lernen wird nicht nur als individuelle, sondern auch als soziokulturelle Tätigkeit verstanden und erforscht. Beispielsweise haben die folgenden drei Autorinnen die Kommunikation zwischen Kindern im Mathematikunterricht der Grundschule näher untersucht. Dabei setzt Andrea Peter-Koop ihren Schwerpunkt auf die Betrachtung von

Interaktionsmustern (Peter-Koop 2005). Martina Röhr dagegen interessiert sich weniger für die Interaktionsrichtung als vielmehr für den Inhalt der stattgefundenen Interaktion zwischen Kindern und verwendet dafür den Begriff der Kooperation (Röhr 1995). Daniela Götze schließlich bezieht sich sowohl auf die Interaktion als auch auf die Kooperation und wählt dafür den Begriff des „mathematischen Gesprächs" (Götze 2007). Ein Ziel meiner Untersuchung ist es, die bisher gewonnenen Erkenntnisse zu Interaktions-, Kooperations- und Gesprächsmustern zwischen Kindern in Gruppengesprächsphasen für das besondere Lernarrangement des Dialogs von Erst- und Zweitklässlern auszudifferenzieren.

1.3 Forschungsobjekt

In zwei jahrgangsgemischten Klassen habe ich Lernumgebungen eingesetzt, die das Thema „Muster[1]" miteinander verbindet. Bei den Aufgabenstellungen zu Musterreihen von farbigen Plättchen, Zahlenfolgen, Mustern an Punktefeldern oder auch zu Würfelgebäuden und Bauplänen handelt es sich um solche, bei denen Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und / oder arithmetischen Mustern erkannt, beschrieben und fortgesetzt sowie selbst entwickelt und systematisch verändert werden müssen (vgl. Bildungsplan 2004). In Partnerarbeitsphasen wurden Paare von Erst- und Zweitklässlern gefilmt. Durchschnittlich beträgt die Dauer eines Dialogs etwa 40 – 50 Minuten.

Die Forschungsobjekte, die Dialoge, werden kontrastierend analysiert, beispielsweise unter dem Gesichtspunkt der Bearbeitung von unterschiedlichen Lernumgebungen durch dasselbe Team oder auch von gleichen Lernumgebungen durch ein anderes Team. Die Anzahl weiterer Dialoge, die in die Analyse einbezogen werden, hängt vom Grad der theoretischen Sättigung ab, bis also kaum noch neue Deutungshypothesen hinzukommen.

2. Forschungsfragen und erste Ergebnisse

Aus der Leitfrage lassen sich verschiedene Teilfragen ableiten:

Inwiefern findet bei der Auseinandersetzung mit arithmetisch-geometrischen Aufgabenstellungen potentielle lernförderliche Interaktion statt?

---

[1] In Anlehnung an Wittmann / Müller ist „Muster" als Oberbegriff zu verstehen. Der Begriff „Struktur" wird dann verwendet, wenn es sich um grundlegende, vorgegebene Muster handelt (vgl. Wittmann / Müller 2007).

a) Wie lässt sich potentielle lernförderliche Interaktion in den Dialogen beschreiben?

b) Lassen sich Interaktionsmuster finden, die für die Auseinandersetzung mit einer bestimmten Aufgabe oder darüber hinaus für den jeweiligen Dialog oder sogar unabhängig davon für die Lerndialoge von Erst- und Zweitklässlern prägend sind?

c) Sind in den Dialogen sowohl für das jüngere als auch für das ältere Kind Lernchancen enthalten? Worin bestehen diese?

Ausgehend vom Video habe ich eine Auswertungsmethode entwickelt, die es ermöglicht, die mathematisch gehaltvolle Interaktion der Kinder zu beschreiben. Dazu wird zunächst eine Pfeilpartitur erstellt, die den Interaktionsverlauf zwischen den Kindern widerspiegelt und erste inhaltliche Beschreibungen der Interaktion berücksichtigt. In diesen Partituren markiere ich „Aufmerksamkeitsfenster“. Dabei handelt es sich um Zeitabschnitte, die sich dadurch auszeichnen, dass beide Kinder ihre Aufmerksamkeit auf denselben mathematischen Gegenstand richten. Als eine notwendige Voraussetzung dafür, dass sich lernförderliche Momente im Dialog auftun können, wird hierbei also das Kriterium der Aufmerksamkeit angesehen. Szenen, in denen die Kinder in ihrem Wahrnehmungs- und Gedankenfluss auf mathematische Muster (in oben genanntem Sinne) aufmerksam werden – und zwar dadurch, dass sie sich zu *zweit* dem Lerngegenstand widmen – stehen demnach im Fokus der Analyse.

Mit Hilfe der transkribierten Aufmerksamkeitsfenster ließen sich bisher die folgenden fünf Kategorien[2] für potentielle lernförderliche Interaktion zwischen den Kindern bilden:

A) Moderations-Impulse an den Partner
B) Impulse inhaltlicher Art an den Partner
C) Impulse inhaltlicher Art, die ein Kind für sich spricht
D) Reaktionen auf Impulse des Partners
E) Gemeinsame Sprachmuster

Im Vortrag wurde die Zuordnung von Aussagen der Kinder zu einer bestimmten Kategorie mit Hilfe von Ankerbeispielen verdeutlicht und dargestellt, welche Unterkategorien sich zu einer Kategorie finden lassen. Anhand von zusammenhängenden Transkriptausschnitten konnte gezeigt werden, welche unterschiedlichen Interaktionsmuster sich bisher in den Dialogen finden ließen und inwiefern es sich dabei um gewinnbringende Lernsituationen für beide beteiligten Kinder handelt.

[2] Die Bezeichnungen der Kategorien sind auf Grund der Anregungen nach dem Vortrag überarbeitet worden und haben zum jetzigen Stand der Analyse vorläufigen Charakter.

3. Ausblick

Im weiteren Analyseprozess der Lerndialoge wird es darum gehen, das entwickelte Kategoriensystem zu schärfen und gegebenenfalls weiter auszudifferenzieren. Es soll versucht werden, die gefundenen Interaktionsmuster zu den mathematischen Tätigkeiten der Kinder beim Lösen der Aufgaben – wie zum Beispiel Erkennen, Beschreiben, Fortsetzen und Vergleichen von Mustern – in Beziehung zu setzen.

Literatur

Bildungsplan für die Grundschule (2004).

Bortz, J. / Döring, N. (2006): Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler, 4. Auflage, Berlin: Springer.

Götze, D. (2007): Mathematische Gespräche unter Kindern. Zum Einfluss sozialer Interaktion von Grundschulkindern beim Lösen komplexer Aufgaben /. Hildesheim: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 55).

Gysin, B. (2010): Hintergründe und pädagogischer Zugang zum jahrgangsübergreifenden Unterricht. In: Rathgeb-Schnierer, E. / Rechtsteiner-Merz, C.: Mathematiklernen in der jahrgangsübergreifenden Eingangsstufe. Gemeinsam, aber nicht im Gleichschritt. München: Oldenbourg, 12 - 27.

Kucharz, D. / Wagener, M. (2007): Jahrgangsübergreifendes Lernen. Eine empirische Studie zu Lernen, Leistung und Interaktion von Kindern in der Schuleingangsphase. Baltmannsweiler.

Nührenbörger, M. (2009): Interaktive Konstruktionen mathematischen Wissens. Epistemologische Analysen zum Diskurs von Kindern im jahrgangsgemischten Anfangsunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik. Jahrgang 30, Heft 2, 147 – 172.

Peter-Koop, A. (2006): Grundschulkinder bearbeiten Fermi-Aufgaben in Kleingruppen. Empirische Befunde zu Interaktionsmustern. In: Rathgeb-Schnierer, E. / Roos, U. (Hg): Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht. München, Düsseldorf, Stuttgart: Oldenbourg, 41 – 56.

Röhr, M. (1995): Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe. Entwicklung und Evaluation eines fachdidaktischen Konzepts zur Förderung der Kooperationsfähigkeit von Schülern. Wiesbaden: DUV Dt. Univ.-Verl.

Schülke, C. (2007): Reflexive mathematische Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im jahrgangsgemischten Unterricht. In: Möller / Hanke u.a. (Hg): Qualität von Grundschulunterricht entwickeln, erfassen und bewerten. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, 249 – 252.

Wittmann, E.C. / Müller, G.N. (2007): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: Walther, G. / van den Heuvel-Panhuizen, M / Granzer, D. / Köller, O. (Hg): Bildungsstandrads für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen, 42 – 65.

Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

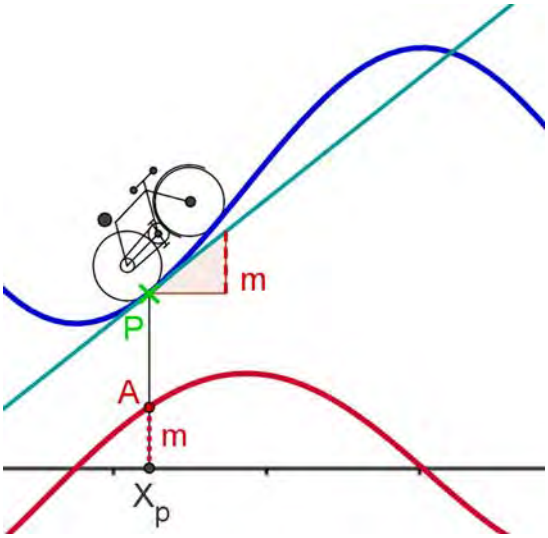
Ortslinie als Leitlinie

1. Zusammenfassung

Es geht um den Übergang von statischen Betrachtungen, bei denen im Koordinatensystem ein Punkt mit gewissen Eigenschaften erzeugt wird, zu einer dynamischen Sicht, bei welcher der Punkt eine Ortsline erzeugt. Diese zeigt eine globale Sicht auf das betrachtete Phänomen und wird dadurch selber zum Objekt weiterer Überlegungen. Ein bekanntes Beispiel ist die Steigung in einem Punkt einer Funktion, die global in der Ableitungsfunktion erfasst wird.

Lässt man sich in der Lehre aber nun von den in den Werkzeugen leicht verfügbaren Ortslinen leiten, diesen zweischrittigen Prozess interaktiv zu gestalten, so wird vertieftes Verstehen ermöglicht. Beispiele v.a. aus der Analysis von Schule und Hochschule zeigen dies.

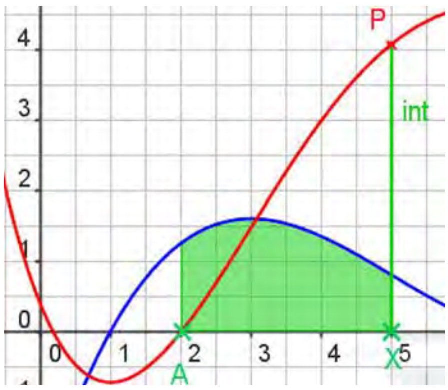
2. Ableitungsfunktion



Die lokale Eigenschaft: „Steigung einer Kurve in einem Punkt“ sollte von den Lernenden schon verstanden sein. Die hier gezeigte Interpretation als Steigung der Tangente im Punkt P ist also vertraut. Tangente in P und Steigung m einer Geraden sind fertige Befehle in GeoGebra. Nun bekommt ein Punkt A die Abszisse von P und die Ordinate m. Die Spur von A erscheint interaktiv, wenn man an P zieht. Das Fahrrad (Autor Dieter Riebesehl) „fährt“ dabei so langsam auf der Kurve, dass die Lernenden Zeit haben, die punktweise entstehende Ortslinie von A zu begreifen und ihre Besonderheiten vorherzusagen. Der Name „Ableitungsfunktion“ wird verstanden. Es ist für das Verstehen von Vorteil, wenn man f als Interpolationspolynom von z.B. 6 Punkten - mit direktem Befehl - definiert und damit eine interessante Wellenform erzeugt. Wenn alles erkundet ist, zeichnet man die „Ortslinie“ von A ein. GeoGebra und andere Dynamische Mathematiksysteme (DMS) verwenden hierzu einen Spline, der intern rechnerisch den Weg von A in dem dargestellten Fenster erzeugt und auch nachträglich auf Änderungen der gegebenen Funktion reagiert. Eindruchsvoll ist das Ziehen an den f definierenden Punkten und die direkte Reaktion der Ortslinie für die Ableitung. Dadurch wird der mathematische Sinn des Zusammenhangs von Funktion und ihrer Ableitung augenfällig. Weiterführend ist dann die analytische Behandlung von Differenzenquotienten und Differenzialquotienten und damit die Ausrechnung der Ableitungsfunktion. Eine solche kann als Probe durch Nutzung derselben GeoGebra-Datei mit der Ortslinie verglichen werden.

Das eben zur Entstehung und Verwendung der Ortslinie Gesagte gilt auch für alle nachfolgenden Bespiele. Sie entsteht stets punktweise aus dem mathematischen Zusammenhang und niemals durch die Rechnung, die später für sie hergeleitet werden kann. Für die „Tangentensteigung in einem Punkt“, bzw. und den nächsten Beispielen „Fläche unter der Kurve“, „Abstand“ o.Ä. verwendet das DMS natürlich die elaborierten mathematischen Werkzeuge, aber dies sind alles Begriffe, deren Einzelwerte die Lernenden auch mit dem Geodreieck oder mit Auszählen hätten bestimmen können.

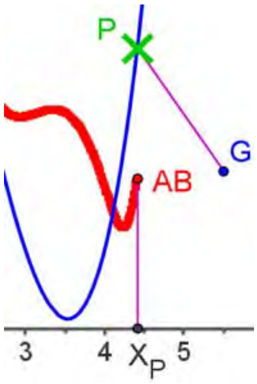
3. Integralfunktion



Es geht um einen Abschnitt aus der Hinführung zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.
Dabei ist es wichtig, dass die Lernenden verstehen, dass es sinnvoll ist, die Integralfunktion $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,d\,t$ zu betrachten. Der Ausdruck „Teppichabrollfunktion“ ist eine Hilfe um zu begreifen, dass bei Festlegung eines Startes in A=(a;0) die bis X „abgerollte“ Fläche unter der Kurve f als Punkt P mit der Abszisse a und dem Flächeninhalt unter der Kurve als Ordinate dargestellt werden kann. Langsames Ziehen an X ergibt eine Ortslinie, die als Funktion der Stellung von X sinnfällig wird. Sowohl die Wirkung der Grenzenvertauschung beim Integral als auch der negative Eintrag der Flächen unter der x-Achse sollte vorher durch entsprechenden Unterricht erarbeitet worden sein. Dann kann auch die vom DMS gezeigt gesamte Ortslinie verstanden werden. Rückt man an A, so wird diese Ortslinie parallel zur y-Achse veschoben. Konzentriert man sich nun auf den Flächenzuwachs von Stellung X nach Stellung X+dx, so wird einsichtig, dass dieser Flächenzuwachs nicht von der Stellung von A abhängt. Alle Integralfunktionen haben an derselben Stelle also denselben infinitesimalen Zuwachs. Darum haben sie also an jeder Stelle dieselbe Ableitung. Dass diese die gegebene Funktion f selbst ist, fällt den Lernenden gleich auf.

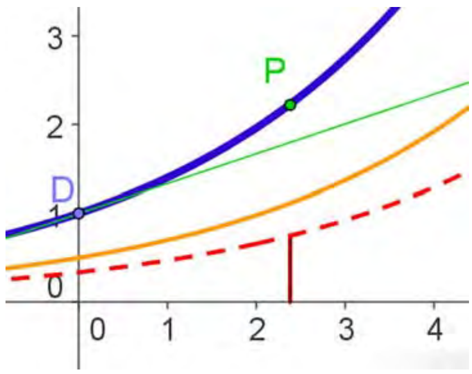
Damit ist der Boden bereitet für den Hauptsatz und seinen üblichen Beweis mit dem Differenzenquotienten der Intergalfunktion und dessen Grenzwert.

4. Extremwertaufgaben



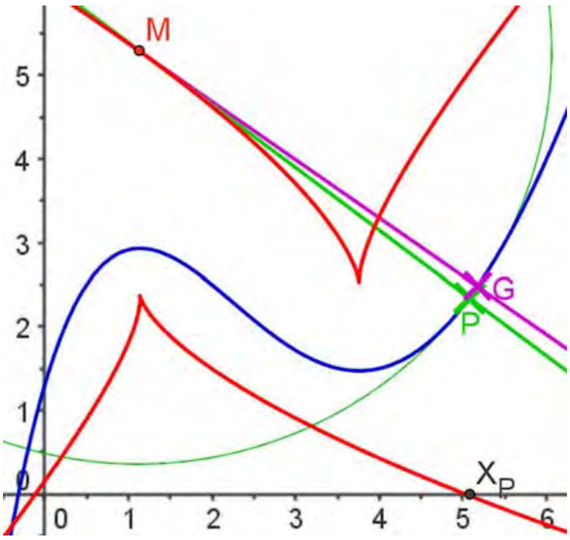
Ein unterrichtlich sehr dankares Feld sind Extremwertaufgaben. Sie geben reichlich Anlass zum Modellieren und Argumentieren. Ortlsinien eignen sich dabei sowohl bei geometrisch fundierten Aufgaben als auch bei solchen aus dem Analysiszusammenhang. Entscheidend ist, dass die zu optimierende Zielgröße, rechts im Bild ist es der Abstand eines Punktes G von einem Graphen f, zunächst als Ordinate an einer geeigneten Stelle realisiert wird. Extremale Konstellationen werden zunächst interaktiv erkundet. Durch die Ortslinie wird die Zielfunktion begriffen, bevor sie rechnerisch existiert. Auch die Nebenbedingungen, z.B. Strahlensatzzusammenhänge, müssen noch nicht in eine formale Darstellung gebracht sein. Nun sind die Lernenden in der Lage, eigenständig Lösungen zu erarbeiten, die dann in eine analytische Behandlung münden. Viele weitere Beispiele findet man auf der Site www.mathematik-verstehen.de im Bereich Analysis -> Extremwertaufgaben.

5. Exponentialfunktion



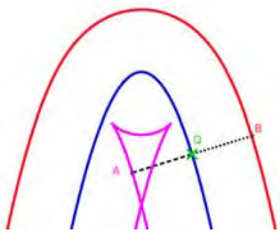
Wie in Absatz 2 gezeigt kann zu einer Exponentialfunktion f mit $f(x)=k^x$ (rechts mit Punkt P) die Ableitungsfunktion als Ortslinie (rechts gestrichelt) erzeugt werden. Der Idee der Lernenden, diese wäre evt. nur eine Stauchung, kann man interaktiv durch eine langsame Stauchung nachgehen (im Bild ist es Faktor 0,5), bis die gestauchte Funktion auf der Ableitungsfunktion liegt. Der Stauchfaktor stimmt nun mit der Steigung der Tangente in D=(0;1) überein. Dann müsste es eine Basis geben, bei der diese Steigung genau 1 ist. Also wird interaktiv k erhöht, bis die Tangente Steigung 1 hat, nun liegt die gestrichelte Ortsline der Ableitung auf der Exponentialfunktion. Diese besondere Basis wird (eulersches) e genannt, die Interaktion hat etwa $e = 2,718...$ ergeben. Nun ist die Zeit reif für die Betrachtung des Differenzenquotienten und den üblichen Weg zum Differenzialquotienten. Diese erste Erfahrung mit e verankert unmittelbar auch die für viele Wissenschaften zentrale Eigenschaft der e - Funktion.

6. Krümmung und Evolute



Der Krümmungsbegriff hat seit der Existenz der CAS-Werkzeuge verstärkt Einzug in den Schulunterricht gehalten. Eine der Methoden, den Mittelpunkt des Krümmungskreises für Punkt P zu bestimmen, ist es, die Normale in P und einem Nachbarpunkt G zum Schnitt zu bringen und dann G an P in einem Grenzprozess heranzurücken. Dieses Vorgehen ist hier nachgebildet. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit ist M gut genug gefunden, denn die Krümmungskreise durch G und P unterscheiden sich im Bild nicht, obwohl G und P noch getrennt liegen. Die von GeoGebra für M erzeugte Ortskurve ist also in hinreichender Näherung die Evolute der gegebenen Kurve. In einfachen Fällen kann eine ausgerechnete Evolute mit dieser Evoluten-Ortslinie verglichen werden. Der mathematischen Betrachtung erschließen sich aber sehr viel mehr Fälle als rechnerisch zu bewältigen wären.

7. Ausblick, Parallelkurven u.a.



Im Vortrag wurden noch Parallelkurven vorgestellt. Sie geben reichhaltige Anlässe für eigene Erkundungen der Lernenden. Auch physikalische Fragestellungen lassen sich untersuchen, z.B. „Wie muss das Vorderrad eines Fahrrades fahren, wenn das Hinterrad eine Parabel beschreiben soll?“.

8. Fazit

Visualisierungen mit Ortslinien sind alles andere als trivial. Sie bieten den Lernenden die Chance, sich durch das so erzeugte Verstehen sicher zu fühlen. Wenn dann der übliche formale Gang folgen soll, können sie mitgestalten, mindestens aber müssen sie nicht durch Unverstandenes gezerrt werden, bevor Begreifen für sie möglich wird. Danach kann die verallgemeinernde Kraft mathematisch formaler Darstellung besser gewürdigt werden.

Literatur

Haftendorn, D., (2010): Mathematik sehen und verstehen. Heidelberg: Spektrum-Verlag

Haftendorn, D. (1996-2013) Website www.mathematik-verstehen.de Bereich Analysis

Maike HAGENA, Kassel

„Das Backsteinhaus ist ungefähr 3,875 m hoch" Zum Einfluss der Größenvorstellungen auf die Modellierungskompetenz von Studierenden

Im vorliegenden Beitrag werden der Aufbau einer Interventionsstudie sowie der zugehörige theoretische Hintergrund vorgestellt. Im Mittelpunkt dieser Interventionsstudie stand die Fragestellung, inwiefern die Größenvorstellung von Lernenden deren Modellierungskompetenz beeinflusst. Um diese Frage beantworten zu können, wurde die Modellierungskompetenz von Mathematikstudierenden des Lehramts für die Primarstufe zu zwei Messzeitpunkten erhoben. Zwischen diesen beiden Messzeitpunkten hat die Hälfte der Studierenden an einer Intervention zur Förderung der Größenvorstellungen zu den Bereichen Längen und Flächeninhalten teilgenommen. Erste Auswertungen dieser Studie lassen interessante Ergebnisse erkennen, die zur Implementierung des mathematischen Modellierens in den Schulalltag beitragen können, indem Anregungen gegeben werden, wie das Lernen und Lehren mathematischen Modellierens gefördert werden kann.

Mathematisches modellieren und Größenvorstellungen

Beim mathematischen Modellieren wenden Schüler Mathematik auf realitätsbezogene Probleme an, die das permanente Übersetzen zwischen der Realität und der Mathematik erfordern. Dabei werden verschiedene Schritte durchlaufen, deren Abfolge idealtypisch im Modellierungskreislauf dargestellt wird (Blum & Leiss, 2005). Jeder dieser Schritte stellt grundsätzlich eine potentielle Hürde dar (Maaß, 2006). Erste Auswertungen der Interventionsstudie haben ergeben, dass derartige Hürden auch durch inadäquate Größenvorstellungen begünstigt werden, aus denen Fehler in einzelnen Schritten des Modellierungsprozesses resultieren können. Solche Hürden sollen für die Aufgabe „Backsteinhaus" anhand charakteristisch auftretender Schwierigkeiten beziehungsweise Fehler der Studierenden in den jeweiligen Prozessschritten deutlich gemacht werden. Zuvor wird jedoch der Begriff der Größenvorstellungen eingeführt.

Größenvorstellungen besitzen, bedeutet eng gefasst, Vorstellungen über Repräsentanten von Größen zu haben, die je nach Bedürfnis reproduziert und gedanklich weiterverarbeitet werden können. Über Repräsentanten von Größen deshalb, da Größen Abstraktionen objektiver Eigenschaften von Objekten oder Handlungen sind, die nur in Verbindung mit einem Träger greifbar werden. Im Einzelnen umfasst der Begriff Größenvorstellung nach Grund die folgenden Aspekte: Größenarten erkennen und unterscheiden, Umrechnungen ausführen und Überlegungen zu sinnvollen Resultaten anstellen zu können, Repräsentanten wichtiger Größen zu kennen sowie Fähigkeiten im Messen, Schätzen und Überschlagen zu besitzen. Grundvoraussetzung für die Ausbildung von Größenvorstellungen stellen dabei Zahlvorstellungen dar (Grund, 1992). Griesel erweiterte den Begriff der Größenvorstellung zudem um den Aspekt, Handlungsvorstellungen zu Rechenoperationen mit Größen zu besitzen. Während der Erwerb von Größenvorstellungen zwar ein wichtiges Anliegen des Mathematikunterrichts ist, stellt dieser Bereich gleichzeitig eines der Themen mit den größten Lehr-Lernschwierigkeiten dar (Thompson & Preston, 2004). Untersuchungen zu den spezifischen Schwierigkeiten im Umgang mit Größen haben ergeben, dass insbesondere die Größenbereiche Länge, Flächeninhalt und Volumen für Lernende fehleranfällig sind. Vor allem das Unterscheiden der jeweiligen Größenbereiche bereitet Lernenden Schwierigkeiten (Martin & Strutchens, 2000). Ausgehend von diesen Ergebnissen, ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:

- Wie wirken sich Größenvorstellungen auf einzelne Teilkompetenzen sowie auf den gesamten Prozess des mathematischen Modellierens aus?
- Fördert eine verbesserte Größenvorstellung die Modellierungskompetenz von Studierenden?

Methode und Instrumente

Zur Untersuchung der genannten Fragestellungen haben 118 Studierende des Lehramts für die Primarstufe an der Universität Kassel im Rahmen einer Mathematikfachvorlesung an einer Interventionsstudie teilgenommen. Die Studierenden des dritten Fachsemesters wurden in zwei etwa gleich große Gruppen (Experimental- und Kontrollgruppe) eingeteilt, die bezüglich ihrer Leistung parallelisiert waren. Während die Experimentalgruppe an einer vierstündigen Intervention zu Größenvorstellungen teilgenommen hat, erhielt die Kontrollgruppe im gleichen Zeitraum eine Einführung in die Bruchrechnung. Vor der Teilnahme an der Intervention haben alle Studierenden im Rahmen der Vorlesung eine Einführung in die verschiedenen Größenbereiche sowie in das mathematische Modellieren erhalten. Daran anknüpfend erhielten die Teilnehmer der Versuchsgruppe innerhalb der vierstündigen Intervention, eine Förderung einiger, für Größenvorstellung charakteristischer, Aspekte (Größenarten erkennen und unterscheiden, Stützpunktvorstellungen, schätzen, umrechnen von Größenangaben, Handlungsoperationen zu Rechenoperationen mit Größen). Für jeden dieser fünf Aspekte gab es eine kurze Einführung, eine anschließende Arbeitsphase sowie eine Ergebnissicherung und Diskussion. Um die Effekte der Intervention kontrollieren zu können, wurden ein Pre- und ein Posttest eingesetzt. Da die Entwicklung der Modellierungskompetenz bei den Studierenden analysiert werden soll, stand die Erhebung dieser sowohl im Pre- als auch im Posttest im Fokus. Außerdem konnte mittels Pretest sichergestellt werden, dass Experimental- und Kontrollgruppe auch bezüglich ihrer Modellierungsleistung parallelisiert waren. Der Posttest erhielt zusätzlich Items zur Erfassung der Größenvorstellung der Studierenden. Der Follow-Up Test, der eingesetzt wird, um langfristige Entwicklungen festzustellen und dafür erneut die Modellierungskompetenz sowie die Größenvorstellung der Studierenden erhebt, steht zum jetzigen Zeitpunkt noch aus. Zur Kontrolle des Treatments wurden Experimental- und Kontrollgruppe während der Intervention videografiert. Außerdem erhielten die Studierenden Fragebögen, in denen sie Auskunft über die Inhalte der Intervention geben mussten.

Erste Ergebnisse und Ausblick

Die bisher erfolgten Auswertungen der Interventionsstudie konnten beim ersten Messzeitpunkt verschiedene Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Modellierungsaufgabe „Backsteinhaus“ offen legen, die auf mangelnde Größenvorstellungen zurückzuführen sind. Hieraus lässt sich ableiten, für welche Schritte des Modellierungsprozesseses Größenvorstellungen benötigt werden.

Abbildung 1: Modellierungsitem Backsteinhaus

- Studierende haben nicht den Flächeninhalt der Außenwände, sondern das Volumen des Hauses berechnet. Das Verstehen der Realsituation erfordert, dass Lernende den zu betrachtenden Größenbereich auswählen können. Dafür ist es notwendig, dass Lernende Größenarten erkennen und unterscheiden können.

- Beim Vereinfachen des Situationsmodells wurden zu stark vereinfachende beziehungsweise unrealistische Annahmen getroffen: „Das Backsteinhaus ist 3,875 m hoch.“ Lernende benötigen Stützpunktvorstellungen, um Annahmen treffen und daraus ein geeignetes Realmodell erstellen zu können.
- Für das Mathematisieren des Realmodells ist der Flächeninhalt der Außenwände mit dem Flächeninhalt der Vorderseite eines Backsteins multipliziert worden. Lernende benötigen Handlungsvorstellungen zu den Rechenoperationen mit Größen, um ein geeignetes mathematisches Modell aufstellen zu können.
- Beim mathematischen Arbeiten resultierten Fehler aus falschen Umrechnungsfaktoren. Ein Flächeninhalt der Größe 100 cm^2 wurde mit einem Flächeninhalt der Größe 1 m^2 gleichgesetzt.

Aufgrund derartiger Fehler sind Studierende zu den Ergebnissen gelangt, dass für die Außenwände des Hauses etwa dreihundertsechzig oder Dreimillionen Backsteine benötigt wurden. Eine erste Sichtung der Testinstrumente des zweiten Messzeitpunktes lässt positive Entwicklungen hinsichtlich dieser Fehlvorstellungen erkennen. Detaillierte Ergebnisse werden jedoch erst nach der quantitativen Auswertung der Testinstrumente erwartet. Es besteht die Vermutung, dass adäquate Größenvorstellungen dazu beitragen können, systematischen Fehlern entgegenzuwirken und Schwierigkeiten zu mindern.

Literaturverzeichnis

Blum, W., Leiss, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der “Tanken“-Aufgabe. In: mathematik lehren, 128, 18-21.

Grund, K.-H. (1992): Größenvorstellungen – eine wesentliche Voraussetzung beim Anwenden von Mathematik. In: Grundschule, 12, 42-44.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? In: ZDM 38(2), 113-142.

Strutchens, M. E., Martin, W. G. &Kenney, P. A. (2003): Assessing and developing measurement with young children. In D. H. Clements & G. W. Bright (Eds.): Learning and teaching measurement (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). Reston, VA: NCTM, 195-207.

Thompson, T. D. & Preston, R. V. (2004): Measurement in the Middle Grades. Insights from NAEP and TIMSS. In: Mathematics Teaching in the Middle School, 9, 514-519.

Tanja HAMANN, Hildesheim

“Macht Mengenlehre krank?“ – Kritik an der Neuen Mathematik in der Grundschule

Zahlreiche zeitgenössische Quellen bringen ebenso zahlreiche Argumente hervor, weshalb die als Neue Mathematik bezeichnete und unter dem Schlagwort „Mengenlehre“ bekannt gewordene Reform des Mathematikunterrichts in den 1970er Jahren (für allgemeine Daten zur Reform vgl. Hamann (2011)) an deutschen Grundschulen mutmaßlich gescheitert ist. Um sich einer Antwort auf die Frage zu nähern, ob man wirklich von einem Scheitern der Reform sprechen kann, und wenn ja, welche Gründe dann für dieses maßgeblich waren, lohnt es sich, diese Argumente näher zu untersuchen. An dieser Stelle sollen zu diesem Zweck drei exemplarische Quellen betrachtet werden.

H. Karaschewski – ein entschiedener Gegner der Reform – reiht in seinem Werk *Irrwege moderner Rechendidaktik* viele Kritikpunkte aneinander, daher sei hier nur eine Auswahl genannt (vgl. im Folgenden Karaschewski (1969)). Er moniert beispielsweise, dass die Reform einen Bruch mit der bisherigen Rechendidaktik darstelle; man habe ohne Rücksicht auf bewährte Konzepte einfach etwas vollständig Neues konzipiert (V), die Gründe seien nicht unbedingt vernünftiger inhaltlicher Natur, sondern lägen z. T. in einer „Sucht nach Modernität“, die alles Alte pauschal ablehne (2). Er kritisiert die zu große Stoffmenge (VI) und zu frühe Abstraktion (1, 40) sowie den übermäßigen Gebrauch von Symbolen und Fachtermini (13, 23 f., 42 f., 48-50) und befürchtet eine damit einhergehende Einschränkung des Rechnens (XII f.), ebenso wie eine Überforderung der Schülerinnen und Schüler (VI). Ähnlich gelagert scheint zunächst das Argument, es fände sich zu viel Neues auf zu wenigen Seiten, doch wendet sich Karaschewski hier ausdrücklich gegen die neuen Schulbücher (vgl. 26-28, hier speziell gegen das Lehrwerk von Fricke & Besuden), womit sich die Kritik auf einen anderen Aspekt der Reform bezieht. Wenn dies wirklich ein Problem darstellte, dann offenbart sich hierin eine starke Abhängigkeit der Lehrerschaft von den Lehrwerken, was unter Beachtung eines weiteren Kritikpunkts auch schlüssig erscheint: So stellt Karaschewski fest, dass zwar nur 5% der Lehramtsstudierenden an einer deutschen PH (er nennt als Beispiel Berlin) Mathematik studieren, 70% aber später das Fach unterrichten werden (XVII). Er sieht also eine fachliche Überforderung von weiten Teilen der Mathematik unterrichtenden Lehrerschaft.

H. Bauersfeld und V. Weis – beide selbst u. a. als Schulbuchautoren an der Reform beteiligt – haben in diversen Artikeln, die vorwiegend im Zusammenhang mit dem *Frankfurter Projekt* (vgl. allgemein dazu Bauersfeld & Weis (1972)) entstanden sind, häufig genannte Kritik aufgeführt. Es finden sich hier durchaus Argumente Karaschewskis wieder. So nennen Bauersfeld & Weis als gängige Kritikpunkte von Seiten der Reformgegner eine zu große Fülle an Stoff und damit einhergehend eine befürchtete Abwertung des kalkülmäßigen Rechnens sowie einen Verlust an Unterrichtsqualität im Allgemeinen (Bauersfeld & Weis (1973), 127 f.). Bauersfeld selbst spricht von einem u. a. durch die Fülle an neuen Unterrichtsmaterialien erhöhten Aufwand für die Lehrerinnen und Lehrer, in inhaltlicher, materieller und somit auch finanzieller Hinsicht (Bauersfeld (1970), 40). Dennoch hält er deren Einsatz für dringend notwendig. Es sei problematisch, dass die Reform zunächst als reine Curriculumsrevision, also eine auf Inhalte beschränkte Erneuerung, geplant war, obwohl doch eine Modernisierung des Unterrichts gerade neuer Einstellungen und Methoden bedürfe (Bauersfeld (1970), 32 f.). Die Umsetzung methodischer Neuerungen wurde offenbar u. a. durch zu große Klassen erschwert (Bauersfeld (1970), 41), ein Problem, das auch an anderen Stellen immer wieder angesprochen wird.

Ein besonders prägnantes Beispiel für eine Quelle aus dem Bereich der öffentlichen Medien – die für die Fragestellung mutmaßlich von hoher Relevanz sind – ist *Der Spiegel* vom 25.3.1974. Die Frage „Macht Mengenlehre krank?“ findet sich auf dem Titel, und ein Leitartikel widmet sich Vor- und Nachteilen der Reform des mathematischen Grundschulunterrichts. Erwartungsgemäß finden sich hier Argumente ganz anderer Natur (vgl. im Folgenden *Der Spiegel* (1974)). Es wird deutlich, dass sich die Reform als schwierig für viele Eltern von Grundschulkindern darstellte, die selbst noch einen reinen Rechenunterricht erlebt hatten und dem Neuen häufig mehr als skeptisch gegenüberstanden. Ein erheblicher Teil der Elternschaft verstand die Inhalte nicht und sah sich nicht mehr in der Lage, den Kindern bei den Hausaufgaben zu helfen (62 f.). Damit waren Ängste verbunden, die über die vor Lernschwierigkeiten des Nachwuchses weit hinausgingen: Die Kinder seien „stolz darauf, […] dem Vater […] überlegen“ zu sein, sie sähen „ihre Eltern hilflos und unwissend“, es „[schwinde] die Achtung“, das „Vorbild [verblasse]“ (63). Doch war mit den neuen Inhalten auch die ernsthafte – und von Medizinern unterstützte – Befürchtung von tatsächlich krankmachender Überforderung der Schülerinnen und Schüler verbunden (65; die Autoren des *Spiegel* schließen sich dieser Meinung ausdrücklich nicht an, vgl. 68-71). Ganz im Gegensatz dazu stand der Vorwurf, die Kinder würden unterfordert, da im Unterricht ja nun nur noch gespielt werde (63). Einen weiteren Missstand, der im *Spiegel* Erwähnung findet, stellte die Organisation der Lehrerfortbildungen dar. Diese hätten bereits vor Veröffentlichung der Lehrpläne und damit zu früh begonnen, seien zu Beginn zu stark fachwissenschaftlich orientiert, damit undidaktisch gewesen und bezüglich der Organisationsform habe keine Einheitlichkeit bestanden (78). Darüber hinaus ist anzunehmen, dass eine Fortbildung im Schneeballsystem, wie es sie gab, die Gefahr der Multiplikation von Fehlvorstellungen auf Seiten der Lehrerschaft birgt. Ebenso seien einige der Schulbücher verfrüht und vorschnell fertig gestellt worden, und die Masse an Unterrichtsmaterialien habe den Markt zusätzlich „überschwemmt" (ebenda). Insgesamt ergibt sich hier das Bild eines überhastet durchgesetzten und dadurch schnell unübersichtlich gewordenen Reformvorhabens, das erhebliche inhaltliche wie organisatorische Anfangsmängel aufwies, ein Umstand, der auch von den Schulbuchautoren selbst nicht bestritten wurde (vgl. 79).

Zwei weitere Argumentationsstränge, die sich in dem *Spiegel*-Artikel finden, scheinen vor dem Hintergrund der Frage nach den Gründen für die Rücknahme der Reform nach nur wenigen Jahren von besonderem Interesse, auch wenn in diesen keine direkte Kritik an der Planung und Umsetzung der Reform formuliert wird. So wird beschrieben, dass in fast allen Bundesländern Politiker die „Mengenlehre" ablehnen; dort, wo dies nicht der Fall ist, steht das Thema im Verdacht, die Partei eine nicht unerhebliche Menge an Wählerstimmen gekostet zu haben (62). Es ist also davon auszugehen, dass sich die Politik in Bezug auf die Reform an den Wählerwillen angepasst hat. Der Wählerwille wiederum hat sich in weiten Teilen den Schlagzeilen der Medien angepasst (und andersherum), die fast ausschließlich negativ über den neuen Mathematikunterricht in der Grundschule berichten und eine differenzierte Berichterstattung weitgehend ablehnen. Die Autoren des *Spiegel* konstatieren schließlich, dass die Reform – ohne Berücksichtigung der tatsächlichen Gegebenheiten in den Schulen – möglicherweise allein an den Schlagzeilen „stirbt" (65).

Es sind vor allem folgende Punkte, die bei der Betrachtung der oben genannten Kritik auffallen: Zum einen scheint es Argumente zu geben, denen insofern ein besonderes Gewicht zukommt, als sie in verschiedenen Quellen immer wieder zur Sprache kommen, so z. B. die Angst vor einer Abwertung des Rechnens, die die Kinder überfordernde Stofffülle oder auch die für neue Methoden nicht geeigneten Klassengrößen. Zum anderen sind die Argumente nicht nur zahlreich, sondern auch sehr vielfältig und völlig unterschiedlicher Natur, sowohl in ihrer Objektivität als auch darin, auf welche Bereiche der Reform und welche beteiligte Personengruppe sie sich beziehen. Anhand des letzten Punktes wird im Folgenden eine Kategorisierung der Kritik- bzw. Problembereiche vorgenommen.

Am schwerwiegendsten sollten die *didaktischen Probleme* wiegen, wobei hiermit diejenigen Schwierigkeiten bezeichnet werden, die die Schülerinnen und Schüler insofern direkt betreffen, als sie dazu führen, dass wesentliche Inhalte nicht, falsch, unzureichend oder nur mit erheblichen Schwierigkeiten gelernt werden. Dazuzuzählen sind von den oben genannten Kritikpunkten die befürchtete mangelnde Rechenfertigkeit, die Stofffülle, die zu schweren und unnötigen Inhalte, im Zusammenhang damit eine mögliche Überforderung der Kinder und auf der anderen Seite eine mögliche Unterforderung durch den übermäßigen Einsatz von Lernspielen.

Ergänzt werden diese Argumente durch *organisatorische Probleme*, die hier alle solche umfassen sollen, die vor allem Lehrerinnen und Lehrer betreffen. Zu große Klassen, mangelnde Qualität der Schulbücher, Unübersichtlichkeit und Aufwand aufgrund der Quantität weiterer Unterrichtsmaterialien und die Organisation der Lehrerbildung im Allgemeinen wie der Fortbildungen im Speziellen gehören dazu.

Auf keinen Fall zu vernachlässigen ist der außerschulische Bereich, der die Gesellschaft und insbesondere die Eltern grundschulpflichtiger Kinder betrifft. Diese Kategorie, die hier als *gesellschaftliche Probleme* bezeichnet wird, umfasst Fragestellungen wie die nach der Beziehung zwischen Eltern und Kindern, dem politischen Willen und der Rolle der öffentlichen Medien im Prozess der Reform.

Es scheint klar, dass nicht eine einzelne Ursache die Reform zu Fall gebracht hat, sondern eine Kombination verschiedener Einflussfaktoren. Die Kategorien sind nicht scharf voneinander zu trennen, nicht alle oben hervorgebrachten Kritikpunkte lassen sich eindeutig einordnen, doch scheint diese Einteilung praktikabel, um eine Grundlage zu liefern, auf deren Basis weiterhin überprüft werden kann, welcher dieser Bereiche in besonderem Maße das vermeintliche Scheitern der „Mengenlehre" vorangetrieben hat.

Literatur

Bauersfeld, H. (1970): Mathematik in der Grundschule? In: Die Reform der Grundschule: T. 1. Hannover: Schroedel, 31-41.

Bauersfeld, H. & Weis, V. (1972): Aus dem „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule". In: Thema Curriculum: Beiträge zur Theorie und Praxis. Bebenhausen: Rotsch, 65-94.

Hamann, T. (2011): „Macht Mengenlehre krank?" – Die Neue Mathematik in der Schule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 347-350.

Karaschewski, H. (1969): Irrwege moderner Rechendidaktik: Eine kritische Analyse. Bonn: Dürr.

Der Spiegel (1974), 28, 13.

Weis, V. & Bauersfeld, H. (1973): Neue Mathematik und Rechenfertigkeit: Ergebnisse aus dem „Frankfurter Projekt". In: Westermanns Pädagogische Beiträge 25, 3, 127-135.

Judit HARTKENS, Dortmund

Reflexive Wissenskonstruktionsprozesse in argumentativ geprägten Unterrichtsgesprächen

Die Fähigkeit, über eigene und fremde mathematische Deutungen zu reflektieren, eröffnet Lernenden die Möglichkeit, neues mathematisches Wissen zu konstruieren (Nührenbörger, 2009; Schülke, 2013). Schülke (2013) arbeitet in ihrer Studie über reflexive Wissenskonstruktionsprozesse von Kindern zu Beginn der Grundschulzeit ein Konzept zur Initiierung und Rekonstruktion mathematischer Reflexion im Sinne eines Standpunktwechsels heraus, das Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist.

1. Mathematische Reflexion als Standpunktwechsel

Schülke (2013, 52) definiert „'mathematische Reflexion' als eine kognitive Aktivität, ein Denkprozess im Sinne eines *Standpunkt- bzw. Perspektivwechsels*, auf dessen Grundlage Umdeutungsprozesse stattfinden." (Hervorhebungen i.O.). Sie beschreibt so Situationen, in denen ein Kind die mathematischen Deutungen einer anderen Person nachvollzieht und beschreibt. Aus epistemologischer Perspektive zeigt sich hier der spezifische Charakter *reflexiver* Umdeutungen. Denn diese zeichnen sich dadurch aus, dass in Folge eines Standpunktwechsels eine zuvor gedeutete mathematische Beziehung (weiter-)entwickelt wird. Im Anschluss an Steinbring (2005) stellen solche reflexiven Umdeutungsprozesse mathematische Wissenskonstruktionsprozesse dar.

Freudenthal (1983) weist auf einen weiteren Aspekt mathematischer Reflexion hin: Demnach handelt es sich bei der Reflexion zunächst um ein „Sichwiderspiegeln im anderen, um ihn zu durchschauen, zu erforschen" (Freudenthal, 1983, 491). Hierauf folgt dann „ein Reflektieren über sich selber" (ebd.). Dieser Prozess des Reflektierens ist eng mit dem mathematischen Begründen verknüpft: Einerseits eröffnet die Reflexion über mathematische Beziehungen das Potential, diese zu begründen, andererseits zeigt sich der reflexive Gedankenprozess erst im Zuge des Begründens (Abb. 1).

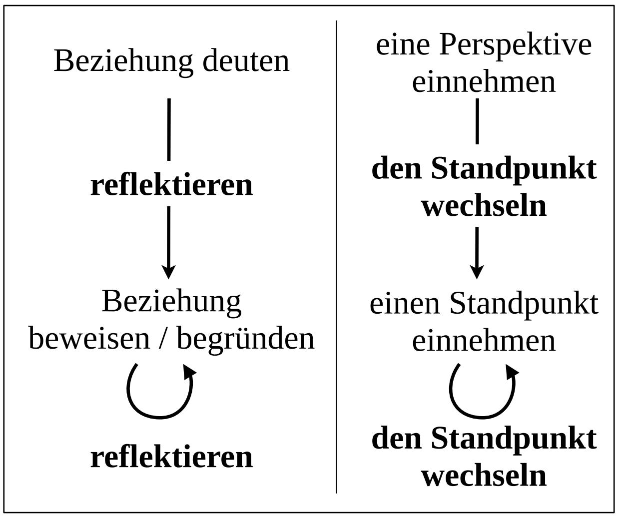


Abb. 1: Reflexion und Argumentieren/Deuten

In dem hier vorgestellten Forschungsprojekt soll herausgestellt werden, wie im Mathematikunterricht der Grundschule Gelegenheiten zum Reflektieren initiiert und von den Kindern genutzt werden und inwiefern Reflexionsprozesse im Zuge des Argumentierens herausgestellt werden können.

2. Design der Studie

In zwei aufeinanderfolgenden Schuljahren (3. und 4. Klasse) wurden jeweils drei Unterrichtsreihen durchgeführt, deren Gestaltung darauf ausgerichtet war, Standpunktwechsel anzuregen (vgl. Hartkens, 2011). Sowohl Klassengespräche als auch Arbeitsphasen wurden videografiert und ausschnittweise transkribiert.

Um erfolgte *Standpunktwechsel* zu rekonstruieren, werden die eingenommenen Perspektiven und Standpunkte analysiert und Zusammenhänge herausgearbeitet. Hierzu wird die epistemologisch orientierte Analyse (Steinbring, 2005) genutzt, mit deren Hilfe die *Perspektiven* in Form von Deutungen rekonstruiert werden können. Die entwickelten *Standpunkte* werden mit Hilfe der funktionalen Argumentationsanalyse (Schwarzkopf, 2000) als Argumente rekonstruiert.

3. Erste Ergebnisse

Die bisherigen Analysen haben gezeigt, dass sowohl in Arbeitsphasen als auch in Klassengesprächen Standpunktwechsel erfolgen. Diese Standpunktwechsel lassen sich in drei Kategorien einteilen (Abb. 2), deren Bezeichnung von Freudenthal (1983) übernommen wurde. Die Kategorien werden anhand von Beispielen verdeutlicht.

anderer SP / Umgebung	fremder Standpunkt	eigener Standpunkt aus fremder Perspektive
gleich	Richtwechsel	Reziprokwechsel
unterschiedlich	Parallelwechsel	

Abb. 2: Übersicht über Standpunktwechsel-Kategorien (SP: Standpunkt)

Richt- und Reziprokwechsel

Das erste Beispiel stammt aus einer Unterrichtsstunde über Zahlenstreifen (Abb. 3) (vgl. Steinbring, 1995). Die Partnerkinder Jochen und Jarik finden in Einzelarbeit Zahlenstreifen mit konstanter Additionszahl, deren Zielzahl nicht größer ist als 25. Dazu notieren sie Beobachtungen und begründen diese.

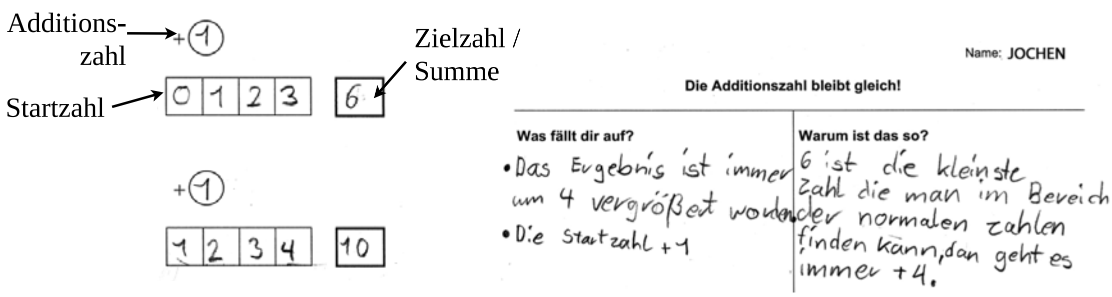


Abb. 3: Erläuterung „Zahlenstreifen" / Jochens Arbeitsblätter (Ausschnitt)

Zu Beginn der Partnerarbeit entwickelt sich ein Gespräch über Jochens Begründung, welche Jarik als „unlogisch" bezeichnet. Jochen führt daraufhin sein Argument, d.h. seinen *Standpunkt*, genauer aus: „Jetzt wird immer plus vier gerechnet. Jetzt wird die ehm mm mm Reihe fortgesetzt, weil es sind immer vier hier (*fährt über den oberen Zahlenstreifen*) also muss jedes jede in jedes Feld kommt wieder ein einer dazu (*zeigt nacheinander auf die Felder*).“ Anders als sein Partner deutet Jarik die Veränderung um eins in jedem Feld als begründungsbedürftig und interpretiert Jochens Argument entsprechend um: „Also du meinst das so, die ehm vier wird immer in plus also die plus vier wird in vier mal plus eins aufgeteilt?“ Aus dieser Äußerung ist zu erkennen, dass Jarik Jochens, für ihn *fremden Standpunkt* mit seiner eigenen Perspektive verbindet und so über die Beziehung zwischen zwei Zahlenstreifen reflektiert. Diese Art des Standpunktwechsels wird *Richtwechsel* genannt.

Für Jochen ergibt sich nun die Möglichkeit zu einem *Reziprokwechsel*. Er kann sich damit auseinandersetzen, wie Jarik ihn verstanden hat. Ob Jochen diese Reflexion tatsächlich gelingt, kann nicht geklärt werden, da er sehr knapp antwortet: „Ja sozusagen.“

Parallelwechsel

Bei den beiden bisher thematisierten Standpunktwechseln beziehen sich die verschiedenen Perspektiven und Standpunkte auf mathematische Zeichen in derselben *Umgebung*, da es sich um dieselben Zahlenstreifen handelt. Dies ist in der folgenden Szene nicht der Fall. Sie stammt aus einer Unterrichtsreihe, in der untersucht wird, wie Zahlen sich verändern, wenn in der Stellentafel Plättchen verschoben werden. Während einer Partnerarbeitsphase haben die beiden Schüler Jens und Jarik die Aufgabe, ein Zahlenpaar mit der Differenz 999 zu konstruieren (Abb. 4).

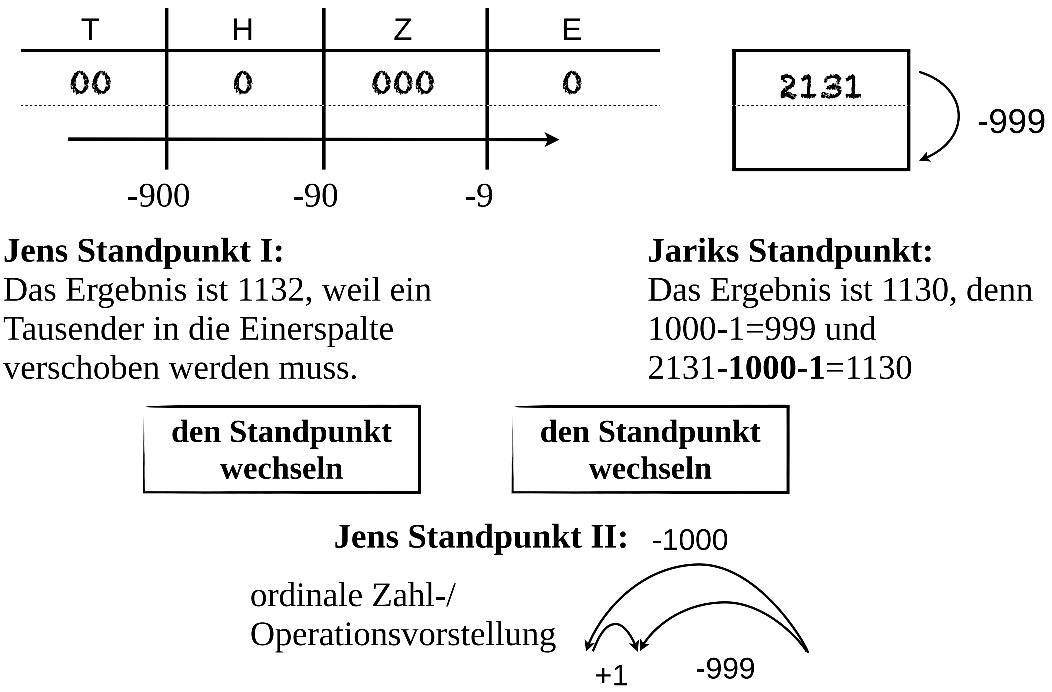


Abb. 4: Zahlenpaar mit Differenz -999: Standpunkte und Standpunktwechsel

Auslöser für die Reflexion ist hier eine Uneinigkeit über die zweite Zahl des Zahlenpaares, weil diese dazu führt, dass die Schüler unterschiedliche Standpunkte einbringen. Jens stützt sich auf die bisherigen Erkenntnisse über Beziehungen in der Stellentafel, während Jarik diese nicht beachtet, sondern versucht eine passende Rechnung aufzustellen. Die Schüler sind zunächst nicht in der Lage, ihre beiden Standpunkte, die in *parallelen Umgebungen* eingenommen werden, miteinander in Beziehung zu setzen, obwohl sie die Standpunkte des jeweils anderen nachvollziehen können. Sie kommen zur Lösung, als Jens einen weiteren Standpunkt einbringt. Diesen hat er im regulären Unterricht, d.h. in einer weiteren *parallelen Umgebung*, entwickelt. Er überlegt sich, wie er mit Hilfe einer ordinalen Operationsvorstellung die Rechnung -999 geschickt lösen würde: „Wir brauchen jetzt plus eins Jarik. Wir sind ja schon zu weit (*zeichnet einen Bogen von rechts nach links in die Luft*), wir haben ja schon zu viel abgezogen." Er vollzieht hier einen Standpunktwechsel, indem er sein Wissen über geschicktes Rechnen auf die Stellentafel bezieht. Auch Jarik kann diesen neuen Standpunkt auf seinen eigenen beziehen und so über die betrachtete Zahlbeziehung reflektieren. Er stimmt Jens zu und kann nun eine Beziehung zwischen den formalen Rechnungen und der Stellentafel herstellen: „Ja klar, da [*in der Einerspalte*] müssen wir plus eins."

4. Ausblick

In den beiden vorgestellten Gesprächen wird durch eine Irritation mathematische Reflexion ausgelöst. Diese entsteht in der ersten Szene durch die Ablehnung eines schriftlich formulierten Standpunktes und in der zweiten Szene durch die Uneinigkeit über ein (Rechen)Ergebnis. Die bisherigen Analysen zeigen jedoch, dass nicht jede Strittigkeit zu mathematischer Reflexion führt. Während durch die entwickelte Unterrichtsorganisation erreicht werden kann, dass Standpunkte anderer Kinder nachvollzogen werden, sind weitere Bedingungen erforderlich, damit die verschiedenen Standpunkte auch aufeinander bezogen und weiterentwickelt werden. Deshalb zielen die weiteren Analysen darauf ab, diese auslösenden Faktoren genauer zu beschreiben.

Literatur

Freudenthal, H. (1983): Wie entwickelt sich reflexives Denken? In: Neue Sammlung, 23, 485-497.

Hartkens, J. (2011): Reflexion durch Gespräche. In: Grundschule, 11, 20-23.

Nührenbörger, M. (2009): Interaktive Konstruktion mathematischen Wissens. In: Journal für Mathematikdidaktik, 30(2), S. 147-172.

Schülke, C. (2013): Mathematische Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern. Münster: Waxmann.

Schwarzkopf, R. (2000): Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Steinbring, H. (1995): Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da! In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.): Mit Kindern rechnen. Frankfurt a. M.: AK Grundschule, 225-239.

Steinbring, H. (2005): The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction - An epistemological perspective. New York: Springer.

Mathias HATTERMANN, Bielefeld

Einführung und erste Rechenoperationen mit ganzen Zahlen: Ein Erfahrungsbericht

Die Zahlbereichserweiterungen zu den ganzen bzw. rationalen Zahlen stellen einen aus erkenntnistheoretischer Sicht fundamentalen Umbruch bei Schülerinnen und Schülern dar. Zwar sind die zu erlernenden Rechenregeln wesentlich einfacher als beim Rechnen mit Brüchen, jedoch sind die aufzubauenden Grundvorstellungen (vom Hofe 1995) zur inhaltlichen Verknüpfung wesentlich abstrakter. Um dieses Phänomen besser verstehen zu können, genügt ein Blick in die Vergangenheit und die Genese der negativen Zahlen (Glaeser 1981). So waren die Vorzeichenregeln bereits seit Diophant (um 250 n. Chr.) bekannt. Bis zur vollständigen Akzeptanz der negativen Zahlen in der mathematischen Kommunität dauerte es jedoch bis zum Jahr 1867, in dem sich Hermann Hankel vollständig von der Interpretation der ganzen bzw. rationalen Zahlen als Größen löste und deren Existenz durch abstrakte Permanenzforderungen begründete (Hefendehl-Hebeker 1989). Die folgende Aussage von Blaise Pascal belegt die sich über Jahrhunderte erstreckende Problematik beim Umgang mit negativen Zahlen: „Ich kenne Leute, die nicht begreifen können, daß Null übrigbleibt, wenn man von Null Vier wegnimmt“ (Blaise Pascal zitiert nach Hefendehl-Hebeker 1989). Dieser Satz des anerkannten Mathematikers vermittelt eindrucksvoll, dass der Umgang mit negativen Zahlen einen Abstraktionsprozess erfordert, der alles andere als einfach ist und bereits Generationen von namhaften Mathematikern vor große Hürden stellte. So ist es nicht verwunderlich, dass sich auch noch viele Erwachsene an die Regel ‚minus mal minus ist plus‘ erinnern, jedoch keine inhaltliche Vorstellung hierzu besitzen.

Theoretischer Rahmen

Die Behandlung der negativen Zahlen ist aus Sicht der Theorie zu Grundvorstellungen deshalb schwierig, da eine durchgehende Behandlung mit dem Aufbau primärer Grundvorstellungen, also an konkreten Handlungen und Objekten aufgebauten Vorstellungen, nur schwer möglich ist. Es müssen sekundäre Vorstellungen aufgebaut werden, welche bereits mathematische Darstellungen wie bspw. die Zahlengerade, eine symbolische Schreibweise oder das Pfeilmodell erfordern. Man vergleiche solche Modelle mit dem gerechten Teilen einer Pizza durch die konkrete Handlung am Gegenstand zum Aufbau einer Anteilvorstellung, wodurch der Aufbau einer primären Grundvorstellung möglich ist. Malle (2007) identifiziert weiterhin vier Stadien der Objektivierung der negativen Zahlen, welche sich grob in Vorkenntnisse und Alltagsverständnis, Ordnung, Addition bzw. Subtraktion und Multiplikation einteilen lassen. Hierbei warnt er davor, dass im ersten Stadium Schüler zwar mit negativen Zahlen umgehen, diese jedoch als natürliche Zahlen in speziellen Verwendungssituationen wie Temperaturen oder Schulden deuten und daher keineswegs als eigenständige Objekte betrachtet werden (Malle 2007, vgl. auch Malle (1988).

Projekt in Kooperation mit der Laborschule Bielefeld

Die Laborschule Bielefeld ist eine staatliche Versuchsschule des Landes Nordrhein-Westfalen mit einem pädagogischen Entwicklungsauftrag. Hierbei wird sie von der wissenschaftlichen Einrichtung unterstützt, die der Fakultät für Erziehungswissenschaft der Universität Bielefeld angegliedert ist. Im System der Laborschule sind die Lehrerinnen und Lehrer Praxisforscher und entwickeln ihren Unterricht mit Kolleginnen und Kollegen bzw. auch Wissenschaftlern in Forschungs- und Entwicklungsprojekten weiter, wobei Ergebnisse u.a. in der Reihe *Impuls Laborschule* (Klinkhardt Verlag) publiziert werden.

Auf der methodologischen Grundlage von *Lesson Studies* (z.B. Hart et al. 2011), einer ursprünglich in Japan vor über 100 Jahren entwickelten und weit verbreiteten Methode zur Lehrerprofessionalisierung bzw. Praxisforschung, arbeiten Lehrerinnen und Lehrer im vorgestellten Projekt mit Wissenschaftlern zusammen, um Literatur zu sichten, Unterricht zu planen und diesen gemeinsam zu reflektieren.[1] Im Projekt wird ein kompletter Lehrgang zur Behandlung der rationalen Zahlen durchgeführt, welcher bei der Zahlbereichserweiterung zu den ganzen Zahlen ansetzt. Hierbei werden die gemeinsamen Sitzungen zur Vor- und Nachbereitung des Unterrichts protokolliert und Tonaufnahmen angefertigt. Darüber hinaus erfolgt eine Videographierung des Unterrichts. Nach Behandlung der Addition/Subtraktion bzw. der Multiplikation/Division rationaler Zahlen werden schriftliche Schülerevaluationen zur Selbsteinschätzung und zu mathematischen Kenntnissen durchgeführt, deren Ergebnisse durch einzelne halbstandardisierte Interviews zu ergänzen sind. Im Anschluss an die jeweiligen Sequenzen dienen die Hefte der Schülerinnen und Schüler als weitere Datenquelle zur Analyse. Die allgemeinen Ziele des Projekts bestehen in der Feststellung schülerspezifischer Präferenzen für gewisse Modelle, der Identifikation personenspezifischer bzw. modellspezifischer Lernhürden und Empfehlungen sowohl für die Kombination von Modellen als auch für deren Konventionen zur Interpretation.

[1] Weitere Projektbeteiligte, neben dem Autor: Paula G. Althoff, Reto Friedli, Rudolf vom Hofe, Harry Kullmann und Janine Lukas.

Erfahrungen zur Handlung mit didaktischen Modellen

Sowohl national wie auch international werden negative Zahlen mit didaktischen Modellen behandelt. Hierbei muss die Tragfähigkeit der einzelnen Modelle für die jeweilige Operation und deren Interpretation im Sachkontext zuvor genau analysiert werden, um akrobatische Handlungen zur künstlichen Erklärung von Rechengesetzen auf dem Spielbrett, der Zahlengeraden oder am Thermometer zu vermeiden. Im Folgenden wird ein Beispiel aus dem Forschungsprojekt gegeben, das aufzeigt, wie eine kleine Fehlinterpretation zu erheblichen Schwierigkeiten beim Umgang mit dem Modell führen kann. Zur Einführung der Addition wurde im beschriebenen Projekt das Plus-Minus-Spiel verwendet, bei dem die Schülerinnen und Schüler würfeln und anhand einfacher Regeln grüne Karten (Plus-Karten) bzw. rote Karten (Minus-Karten) auf bzw. abgeben. Die grünen Karten sind mit den Zahlen von 0 bis +10, die roten Karten von -10 bis 0 beschriftet. Hierbei trafen wir folgende Konventionen, um nach Malle (2007) die Klammerschreibweise und die Unterscheidung von Rechen- und Vorzeichen zu motivieren. Die Rechnung +5 + (-7) = -2 ist so zu deuten, dass der jeweilige Spieler einen Punktestand von +5 aufwies, dann die rote Karte -7 bekam und schließlich mit -2 Punkten in die nächste Runde ging. Analog ist die Aufgabe -3 – (-6) = +3 zu interpretieren, dass beim ursprünglichen Punktestand von -3 eine rote Karte mit -6 abgegeben werden konnte und der Punktestand sich somit auf +3 Punkte erhöhte. Das Spiel wurde sowohl nur zur Addition als auch zu einem späteren Zeitpunkt zur Einführung der Subtraktion verwendet, wobei jedoch uneinheitliche Schreibweisen während des Unterrichts auftraten. So schrieben sowohl Lehrer als auch Schüler den eigentlichen Punktestand gelegentlich in Klammern, was aus mathematischer Sicht völlig legitim ist und zunächst auch nicht sofort als Problem erkannt wurde. Die Schülerinnen und Schüler identifizieren bei dieser Schreibweise jedoch auch die erste Zahl als Karte, was bei der Addition kein Problem darstellt. So ist die Aufgabe (+3) + (+4) + (-8) = -1 problemlos mit der mehrmaligen Aufnahme von Karten zu deuten. Jedoch erweist sich die Interpretation von (-5) – (-7) = +2 in der jeweiligen Schreibweise als nicht mehr interpretierbar. Besitzt man nur die Karte -5, kann man nicht die Karte -7 abgeben und somit auch nicht weiterrechnen. Hier ist die Interpretation des Minuenden als Punktestand für die Aufrechterhaltung des Modells fundamental. So kann die Aufgabe -5 – (-7) = +2 inhaltlich gedeutet werden. Wie die Schülerinnen und Schüler auch im Spiel erfahren haben, fasst man seinen Punktestand zusammen, um bei vielen Karten den Überblick über den Gesamtspielstand zu erhalten. So kann der individuelle Punktestand von -5 durch den Besitz der Karten +8, -7, -4 und -2 zustande gekommen sein, sodass die Abgabe der Karte -7 problemlos interpretiert werden kann. Der neue Punktestand von +2 ergibt sich somit durch den Besitz der Karten +8, -4 und -2. Im Interview mit Manuel (Pseudonym), ergibt sich diese Problematik beiläufig. Manuel arbeitet an der Aufgabe: $(-2) \cdot (+3) - (-4) = -2$ und löst diese auch korrekt, ohne jedoch insbesondere die Rechnung $-6 - (-4) = -3$ erklären zu können. Auf die Frage wie Manuel sein Ergebnis begründet, entsteht die folgende Konversation: Manuel:*„-6 minus die -4, dann geht die -4 halt weg und dann rechne ich bei -6 minus -4 und dann sind da -2 weil die Vier ja weggeht, weil ich sie ja abgebe.“* Interviewer: *„Das hab ich jetzt noch nicht verstanden, was bedeutet das, die Vier geht weg?“* Manuel: *„Ja hier, das war ja das mit den Karten was wir da gemacht haben. Ich hab hier ne -6 [Manuel legt eine -6 Karte und eine -4 Karte vor sich]….ja ok, aber das kann man hieran nicht erklären, weil wenn ich die [Karte mit -4] jetzt abgeben würde, wären‘s ja immer noch -6 und so hätte ich ja -10 und deswegen geht's ja nicht, wenn ich die [-4] jetzt abgebe.“* In diesem Beispiel wird deutlich, wie kleine Ungenauigkeiten in der Interpretationsstruktur ein komplettes Modell versagen lassen und kein Rückgriff auf möglichst konkrete Handlungen mehr möglich ist, falls die Rechenregeln nach gewisser Zeit nicht mehr auswendig beherrscht werden.

Ausblick

Im Verlauf des weiteren Projekts wird mit den gleichen Methoden die Verwendung des Vektormodells zur Multiplikation untersucht, welches sich vom Kartenmodell grundlegend unterscheidet. Darüber hinaus ist die Behandlung der ganzen Zahlen auf propädeutischer Ebene in der Jahrgangsmischung 3/4/5 der Laborschule Bielefeld geplant.

Literatur

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathematiques, 2(3), 303–346.

Hefendehl-Hebeker, L.(Hg.) (1989). Minuszahlen; mathematik lehren, (35).

Hofe, R. v. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Malle, G. (2007). Die Entstehung negativer Zahlen: Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denkobjekten. *mathematik lehren*, (142), 52–57.

Malle, G. (1988). Die Entstehung neuer Denkgegenstände - untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In W. Dörfler (Ed.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Arbeiten aus dem Projekt "Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht"* (pp. 259–319). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky; Stuttgart; B.G. Teubner.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together*. Dordrecht; New York: Springer.

Petra HAUER-TYPPELT, Wien

Entwickeln von Grundkompetenzen als Herausforderung im Mathematikunterricht

Ab dem Schuljahr 2014/15 wird in Österreich die Reifeprüfung Mathematik zentral gestellt werden. Das grundlegende Konzept dafür wurde im Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik“ (SSRP Mathematik) der Universität Klagenfurt (Laufzeit 2008 bis 2012) erarbeitet.

Eckdaten zur zentralen schriftlichen Reifeprüfung Mathematik

Die Reifprüfung wird aus zwei Teilen bestehen, in denen unterschiedliche Aufgabentypen bearbeitet werden.

Im Teil 1 müssen innerhalb von 120 Minuten 18 bis 25 sogenannte Typ 1-Aufgaben gelöst werden. Dabei handelt es sich um sehr kurze Aufgaben, die den Fokus auf eine Grundkompetenz aus dem Katalog[1] legen, der insgesamt ca. 75 Grundkompetenzen inhaltlich festlegt. Es wird der Nachweis von Grundwissen und Grundfertigkeiten verlangt, der Anteil an operativen Aufgaben ist gering.

Im Teil 2 sollen innerhalb von 150 min vier bis sechs umfangreichere, sogenannte Typ 2-Aufgaben bearbeitet werden. Im Fokus stehen die Vernetzung von Grundkompetenzen und die selbständige Anwendung von Wissen und Fertigkeiten auf kontextbezogene oder innermathematische Fragestellungen.

Sowohl im Projekt SSRP Mathematik als auch bei aktuellen Lehrerfortbildungsveranstaltungen standen bzw. stehen die Typ 1-Aufgaben im Zentrum der Aufmerksamkeit. Denn das Beurteilungsschema legt fest, dass für das Bestehen der Reifeprüfung Teil 1 überwiegend erfüllt sein muss. Grob gesprochen entscheidet Teil 2 „nur“ mehr über die Note besser als „Genügend“. Genauere Details zum Beurteilungsschema sind in Aue et al. (2013), S. 33 f. angeführt. Überdies handelt es sich bei den Typ 1-Aufgaben um ein neues Aufgabenformat, das bislang bei der Reifeprüfung in Österreich keine und im Mathematikunterricht kaum eine Rolle gespielt hatte. Auch die Beurteilung der Typ 1-Aufgaben selbst stellt einen Paradigmenwechsel dar, da eine Aufgabe nur dann als richtig gewertet wird, wenn sie zur Gänze fehlerlos bearbeitet wurde, andernfalls als falsch.

Daher nehmen die im Folgenden dargelegten Herausforderungen und Konsequenzen für den Mathematikunterricht insbesondere auf die Typ 1-

[1] Vgl. Grundkompetenzenkatalog in Aue V. Frebort M. et al. (2013): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik. S. 7 ff.

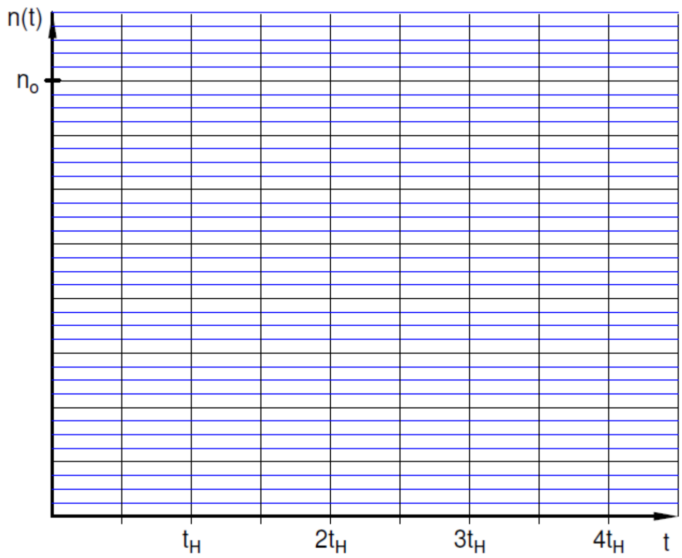
Aufgaben Bezug. Den Überlegungen zugrunde liegen die Erfahrungen aus der Arbeit im Projekt SSRP Mathematik, in dessen Rahmen 13 Pilotlehrer/innen mit ihren Klassen im Mai 2012 eine zentral gestellte Reifeprüfung absolvierten. Aber auch die Rückmeldungen von Lehrer/innen in (von mir gehaltenen) Fortbildungsveranstaltungen und die Erfahrungen aus dem eigenen Unterricht spielen eine Rolle.

Herausforderungen und Konsequenzen für den Mathematikunterricht

Herausforderung 1: Elementare Aufgaben zu Themengebieten, die **zeitnah** im Unterricht bearbeitet wurden, können bei weitem nicht von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden.

Exemplarisch sei hier die folgende Typ 1-Aufgabe aus dem 2. Pilottest des Projekts SSRP Mathematik vorgestellt:

Für den radioaktiven Zerfall ist die Halbwertszeit t_H eine charakteristische Größe. Zeichnen Sie im Diagramm die Zahl der noch vorhandenen Kerne eines radioaktiven Elements zu den Zeitpunkten t_H, $2 \cdot t_H$, $3 \cdot t_H$, $4 \cdot t_H$ ein, wenn zur Zeit t = 0 die Anzahl der radioaktiven Kerne n_o beträgt!



Diese Aufgabe zeigte auf, dass Schüler/innen, die zeitnah etwa bei Klassenarbeiten weitaus komplexere Aufgaben zum Thema lösen können, nicht in der Lage sind, grundlegendes Wissen in vergleichsweise einfachen, kurzen Aufgaben zu zeigen. Vergleichbare Erfahrungen wurden mit anderen Aufgaben und Themengebieten gemacht und führten zu dem Schluss, dass Verfahrensorientierung in der gängigen Unterrichtspraxis nach wie vor eine zu dominante Rolle spielt, da sie oft reicht um übliche, umfangreichere Aufgaben zu lösen. Für Lehrende ergibt sich daraus ein klarer Auftrag, Verständnisorientierung nicht nur bei der Einführung neuer Themen und Begriffe sondern gerade auch bei der Bearbeitung von Aufgaben, zu forcieren. Die schriftliche Rückmeldung eines Pilotlehrers im Zuge der Evaluierung des Projekts SSRP zeigt stellvertretend die Schwierigkeit der Umsetzung in der Praxis auf: *„Die schwierigste Aufgabe (…) weg vom (…) Rechnen hin zum Verstehen.“* Dangl et al. (2012), S. 68

Herausforderung 2: Typ 1-Aufgaben, die auch von Lernenden als einfach eingestuft werden, können bei weitem nicht von allen gelöst werden.

Dabei spielen vor allem Fehler aufgrund von Ungenauigkeit oder Unkonzentriertheit eine Rolle. Es gilt die eigene Haltung als Unterrichtende/r bzw. Beurteilende/r zu reflektieren: Ist genaues Arbeiten ein ausgewiesenes Ziel? Wie wird mit Flüchtigkeitsfehlern umgegangen, wie wurden sie bisher bewertet? Die Lernenden sollten auch außerhalb von Klassenarbeiten in milden Testsituationen mit Typ 1-Aufgaben konfrontiert werden, um die Auswirkung von Flüchtigkeitsfehlern im neuen Beurteilungsschema ins Bewusstsein zu rücken.

Herausforderung 3: Streuung der Ergebnisse innerhalb der Klasse

Im Projekt SSRP Mathematik zeigten die durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten der Typ 1-Aufgaben große Unterschiede zwischen den einzelnen Klassen. Der genauere Blick auf einzelne Klassen bringt oft auch innerhalb einer Klasse große Unterschiede zu Tage: Kaum eine Aufgabe, die von (fast) allen gelöst werden kann, kaum eine Aufgabe, die (fast) niemand schafft. Wenig verwunderlich, berücksichtig man die längst unbestreitbaren Erkenntnisse verschiedener Wissenschaftsdisziplinen, die Lernen als individuellen Prozess ausweisen. Die Herausforderung geht hier m. E. klar an die Lehrer/innenfortbildung: Essentiell ist, Lehrer/innen nicht mit dem zur Zeit gängigen Anspruch des „Individualisierens“ (etwa in Klassen mit 30 Lernenden) vor unlösbare Aufgaben zu stellen, sondern sie gezielt mit konkreten unterrichtspraktischen Vorschlägen zu unterstützen: Z. B. Wie können Arbeitsaufträge zum laufenden Wiederholen so gestaltet werden, dass Lernende mit ihrem unterschiedlichen Wissensstand gut andocken können? Wie können Unterrichtsmethoden und Sozialformen adaptiert werden, damit Schüler/innen tatsächlich Lernprozesse im Unterricht durchleben?

Herausforderung 4: Rein operative Aufgaben spielen eine geringere Rolle als bisher. Verstehen von Zusammenhängen und Vernetzen von Inhalten ist unumgänglich.

Im Zuge der unmittelbaren Vorbereitung auf die Reifeprüfung wurde im Projekt stark auf die Vernetzung von Inhalten Bedacht genommen. Dabei zeigte sich, dass Lernende oft über wesentlich elementarere Zusammenhänge als eigentlich in Diskussion stehen nicht Bescheid wissen. Gerade was (elementare) innermathematische Zusammenhänge betrifft, wird im Unterricht zu wenig explizit gearbeitet und zu wenig auf das Einbeziehen möglichst vieler Schüler/innen geachtet. Vernetzen von Inhalten muss schon beim Begriffsaufbau und in der Folge durchgehend zentralen Stellenwert haben, nur dann können weitläufigere Vernetzungen gelingen.

Herausforderung 5: Die Aufgaben werden bei einer zentralen Reifeprüfung nicht von der vertrauten Lehrperson formuliert.

Die naheliegendste Konsequenz ist wohl, möglichst oft vor der Reifeprüfung in Testsituationen Aufgaben zu stellen, die ebenfalls nicht von der vertrauten Lehrperson formuliert wurden. Damit wird der Anspruch Mathematik als Sprache zu verstehen, über deren Fachbegriffe man tatsächlich verständig verfügen muss, im Sinne von „What you test is what you get." unterstützt. Durch Konfrontation mit weniger vertrauten Aufgabentexten gepaart mit gezielter Förderung von Lesekompetenz – nicht über jedes fremde Wort muss man stolpern – wird insbesondere auch eine erfolgreiche Bewältigung von Typ 2-Aufgaben gefördert.

Herausforderung 6: 18 bis 25 Aufgaben – 18 bis 25 Chancen auf Fehler

Die Notwendigkeit sich innerhalb von 120 min bis zu 25 Mal auf eine neue Denksituation einzulassen, darf in ihrer Rolle als potentielle Fehlerquelle nicht unterschätzt werden. Besondere Vertrautheit mit den vorgegebenen Aufgabenformaten (vgl. Aue et al. (2013), S. 27 ff.) zu schaffen, spezifische Testbearbeitungsstrategien einzuüben, aber Schüler/innen auch beim Finden der persönlichen Idealstrategie zu unterstützen, sind Aufgaben, die Lehrpersonen eine eher ungewohnte Trainer/innenrolle zukommen lassen.

Herausforderung 7: Veränderung der inhaltlichen Schwerpunktsetzung: Streichen von Inhalten ist zugunsten des Aufbaus von Grundkompetenzen notwendig.

Diese, von den Pilotlehrer/innen im Projekt am häufigsten genannte Herausforderung, wurde als letztlich gut zu meistern eingestuft. Allerdings: *„… im Grundkompetenzenkatalog wirklich firm zu sein, ist eine Aufgabe für Jahre."* (Zitat eines Pilotlehrers, Dangl et al. (2012): S. 65) Von den Pilotlehrer/innen selbst wurden als inhaltlich herausforderndste Grundkompetenzen jene aus dem Bereich Stochastik am häufigsten angegeben.

Literatur

Aue V., Frebort M. et al. (2013): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik. Wien: BIFIE. Verfügbar unter: https://www.bifie.at/node/1442 [22.3.2013]

Dangl M., Fischer R. et al. (2009): Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik". Klagenfurt: Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik. Verfügbar unter: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf [22.3.2013]

Dangl M., Fischer R., Peschek W. (Hrsg.) et al. (2012): Abschlussbericht des Projekts Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Klagenfurt: Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik. Verfügbar unter: http://www.uni-klu.ac.at/idm/inhalt/926.htm [22.3.2013]

Reinhold HAUG, Freiburg

Kooperatives Lernen aus fachdidaktischer Sicht

Wenn man im Kontext Schule vom Kooperativen Lernen spricht, so verstehen die meisten Lehrer/innen eine bestimmte Art der Partner- oder Gruppenarbeit darunter. Konkret bedeutet dies, dass eine Ansammlung von Schüler/innen ein bestimmtes Thema, eine besondere Fragestellung oder ein Aufgabenformat selbstständig bearbeiten. Die Schüler/innen diskutieren in solch einer Arbeitsphase meist eigene Erfahrungen im Kontext theoretischer Konzepte und reflektieren im besten Fall parallel dazu ihr eigenes Vorgehen. In solchen Unterrichtssituationen gehen Experten dann davon aus, dass die Schüler/innen „besseres" und demnach mehrperspektivisches Wissen erwerben (Fischer, 2001). Lehrer/innen erhoffen sich vom Kooperativen Lernen darüber hinaus die Verbesserung des sozialen Klimas, eine Steigerung der Eigenaktivität und Kreativität sowie die Schaffung von Kommunikationsanlässen (Rotering-Steinberg, 2000). Für ihre eigene Lehrerrolle im Unterricht erhoffen sie sich eine spürbare Entlastung und mehr Zeit für individuelle Förderung schwacher Schüler/innen. Bohl (2000) hat in diesem Zusammenhang herausgefunden, dass sich die meisten Lehrer/innen durch ihr Studium und ihren Vorbereitungsdienst gut aufgestellt sehen, Kooperatives Lernen zu initiieren bzw. Kooperative Lernumgebungen zu gestalten.

1. Begriffsbestimmung und Abgrenzung

Nach Konrad & Traub (2007, S. 5) versteht man unter Kooperativem Lernen folgende Definition:

> *„Kooperatives Lernen ist eine Interaktionsform, bei der die Beteiligten gemeinsam und in wechselseitigem Austausch Kenntnisse und Fertigkeiten erwerben. Im Idealfall sind alle Gruppenmitglieder gleichberechtigt am Lerngeschehen beteiligt und tragen gemeinsam Verantwortung" (Konrad & Traub, 2007, S.5)*

Im Kern ihrer Definition sehen Konrad und Traub demnach Kooperatives Lernen als eine besondere Art einer Interaktionsform, um im wechselseitigen Austausch gemeinsam Kenntnisse und Fertigkeiten zu erwerben. Diese sehr differenzierte Definition unterscheidet sich in ihrer Darstellung von den meisten allgemeinen Definitionsversuchen, welche vor allem das gemeinsame Arbeiten mit dem Ziel etwas zu erlernen fokussieren (vgl. Huber, 1999). Kooperatives Lernen beinhaltet demnach im weitesten Sinne drei Grundkomponenten: Zum einen wird es als ein *sozialer Prozess* wahrgenommen, in dem durch vielfältige Auseinandersetzung mit dem Anderen Wissen und Kompetenzen erworben werden (erste Grundkomponente). Zum anderen stehen die Schüler/innen in Aktion und Interaktion mit ihren

Mitschüler/innen. Dabei erfahren sie eine vertiefte Auseinandersetzung mit dem Lerninhalt (Brown, 1997; Fischer, 2001). Bei dieser zweiten Grundkomponente wird die *Kommunikation als Medium* verstanden, das grundlegend für die Lerneffektivität ist (Johnson, Johnson & Holubec, 2005). Die dritte Grundkomponente besteht aus dem Prinzip des *Lernens durch Lehren*. Dieses nachhaltige Prinzip wirkt vor allem in Kleingruppen oder beim Tandem-Learning besonders gut, da in solchen Situationen die Schüler/innen sich gegenseitig Lerninhalte näherbringen.

2. Theoretische Perspektiven

Die theoretischen Ansätze des Kooperativen Lernens basieren auf unterschiedlichen Grundannahmen. In der Literatur findet man in diesem Zusammenhang vor allem die sozio-konstruktivistische Perspektive, welche auf die Arbeiten von Piaget (1980) zurückgeht, die sozio-kulturelle Perspektive nach Vygotsky (1978) sowie die motivationale Perspektive nach Slavin (1983). Während Piaget (1980) bei einem kooperativen Lernprozess davon ausgeht, dass kognitive Konflikte bei einer Interaktion mit der Umwelt auftauchen, geht Vygotsky (1978) davon aus, dass Schüler/innen stets innerhalb ihrer Gruppe am Lernprozess partizipieren möchten, indem sie ein Teil von ihm werden. Für das kooperative Lernen bedeutet dies, dass nach Piaget (1980) die Schüler/innen durch die kooperative Bearbeitung der Konflikte zum Lernerfolg kommen, während Vygotsky (1978) in solch einer Phase eher von einem dialogischen Prozess ausgeht. Dieser dialogische Prozess zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass die Schüler/innen um ein gemeinsames Verständnis der Lerninhalte und die dabei auftretenden Prozesse (Wissen, Sprache & Problemlösen) ringen. Hierbei profitiert das Individuum innerhalb einer Gruppe oder einer Lernpartnerschaft am meisten von der sozialen Kooperation, wenn die Divergenz in der Gruppe oder im Tandem nicht zu groß ist und somit die „Zone der nächsten Entwicklung“ erreicht werden kann. Bei Piaget (1980) wird dieser Vorgang durch die Äquilibration beschrieben, bei der die Kinder durch Akkomodation und Assimilation im Austausch mit der physikalischen Umwelt ihre inneren Konflikte lösen. Der dritte Ansatz fokussiert die motivationale Perspektive einer Gruppenarbeit. Slavin (1983) geht bei seinem Ansatz davon aus, dass Belohnung und Erfolg wichtige Faktoren innerhalb kooperativer Lernprozesse sind. In seiner Metauntersuchungen zum Kooperativen Lernen konnte er aufzeigen, dass Belohnung und Erfolg in einer funktionierenden Kooperation einen größeren Zusammenhalt sowie eine größere Anstrengungsbereitschaft fördern. Darüber hinaus zeigen elf der fünfzehn Studien, dass Kooperatives Lernen einen klaren Anstieg des Selbstwertgefühls sowie des Selbstbewusstseins ermöglicht (vgl. Slavin 1995).

3. Kooperatives Lernen und fachliches Lernen miteinander verbinden

Beim Kooperativen Lernen im Bereich der Fachdidaktik rückt neben der Sache vor allem der kooperative Prozess in den Mittelpunkt des gemeinsamen Lernprozesses. Schüler/innen bearbeiten, besprechen und reflektieren gemeinsam die Aufgabenstellung sowie deren Lösungsansatz. Leuders (2006) beschreibt dies explizit mit der Annahme: „Kooperative Lernformen bilden die Grundlage dafür, dass kognitives Lernen und soziales Lernen im Unterricht miteinander verbunden werden“ (Leuders, 2006, S.1). Aus seiner Sicht gibt es für Lehrende eine ganze Reihe von guten Gründen, warum kooperative Lernformen im Unterricht eingesetzt werden sollten. Dabei beschreibt er die am häufigsten angeführten Aspekte wie folgt:

- Stärkere Beteiligung und höhere Aktivität des Einzelnen
- Förderung von Kommunikationsfähigkeit
- Förderung von Kooperationsfähigkeit und Verantwortungsbereitschaft
- Höheres Reflexionsniveau und tieferes Verstehen beim „Lernen durch Lehren“
- Aktives Aushandeln statt Wissensübernahme („konstruktivistisches Lernen“)

Er geht weiter davon aus, dass ein allgemeinbildender Mathematikunterricht kooperative Aspekte von Mathematik in seinen Inhalten und seiner Gestaltung aufnehmen sollte. Die Integration eines sozialen Lernens kann das Fach zum Beispiel durch einen konstruktiven Umgang mit Unterschieden leisten (vgl. Leuders, 2006). Konkret sieht Leuders (2006) dies vor allem in dem Bereich der *Meinungsunterschiede* sowie in dem Bereich der *Leistungsunterschiede*. So können zum Beispiel die verschiedenen Sichtweisen und Ideen von verschiedenen Schüler/innen dazu beitragen, der Klasse eine gewisse Vielfalt von Lösungsansätzen anzubieten. Dies kann andere Schüler/innen wiederum beflügeln, bei einer ähnlichen Aufgabenstellung einmal einen ganz anderen Lösungsansatz auszuprobieren. Bei diesem Vorgehen werden somit vor allem die prozessbezogenen Kompetenzen wie zum Beispiel das Argumentieren, Kommunizieren oder Darstellen gefördert. Die Heterogenität und somit die teilweise großen Leistungsunterschiede innerhalb eine Klasse können durch ein Helfersystem gut ausgeglichen werden. Gerade das Lernen durch Lehren bietet vielen Schüler/innen die Chance, eigene Entdeckungen noch einmal zu reflektieren, um sie einem Partner zu präsentieren. Dies belegen auch Studien im Bereich der Tutorenprogramme, welche überwiegend positive Ergebnisse im sozialen und kognitiven Bereich aufzeigen. Darüber hinaus zeigen die Studien, dass die Entwicklung von Verantwortungsbewusstsein, die Steigerung im Bereich der Kognition und Lernmotivation sowie ein besseres Arbeitsverhalten und Selbstvertrauen die Folge solcher Programme waren. Interessant dabei ist jedoch, dass der Zuwachs des Tutors signifikant höher ist als der des Tutorschülers und dies vor allem bei leistungsschwachen und schwer zu motivierenden Tutoren (Krüger, 1975; Scholz, 1995; Topping, 2001; Traub, 2004; Slavin, 2006).

4. Kooperatives Lernen im Unterricht: Das MATHElino-Projekt

Das Projekt „MATHElino – Kindergarten- und Grundschulkinder erleben gemeinsam Mathematik“ ist ein Entwicklungsprojekt im Bereich der Anschlussfähigkeit von Kindergarten und Grundschule. Aktuell wird es an sechs Kindergärten, sechs Grundschulen sowie einem Kinderlernhaus im Großraum Freiburg durchgeführt. Je ein Kindergarten und eine Grundschule bilden zusammen ein Tandem, welches sich einmal pro Woche zum gemeinsamen Lernen in einer der beiden Institutionen trifft. In offenen sowie vorstrukturierten Lernangeboten können die Kinder erste gemeinsame Entdeckungen machen und Forscheraufträgen im Bereich Muster und Strukturen nachgehen. Ziel dieser gemeinsamen Lernphasen ist die aktive Auseinandersetzung mit ausgewähltem Material in kooperativen Lernteams. Dabei wird angestrebt, dass jeweils ein Kindergartenkind in Kooperation mit einem Grundschulkind Mathematik treibt, neu entdeckt, darüber redet oder diskutiert. Zum Schluss eines Lernprozesses können die Produkte dokumentiert und reflektiert werden. Im Zentrum dieser kooperativen Lernphasen stehen Materialien wie Patternblocks, Holzwürfel, Muggelsteine, gleichseitige Dreiecke oder kleine farbige Fließen, die in großer Anzahl vorhanden sind. An dieser Stelle folgt das Projekt dem Ansatz von Kerensa Lee (2010), die sowohl im Kindergarten als auch in der Grundschule in ihrem Konzept „Mathematik erfinden mit gleichem Material in großer Menge“ einen ersten wichtigen Schritt bei der Selbstentwicklung und Selbstbildung eigener mathematischer Kompetenzen sieht.

Das Projekt, welches von der Robert Bosch Stiftung und der Joachim Herz Stiftung gefördert wird, hat das Ziel, die Anschlussfähigkeit der mathematischen Bildung durch kooperatives Arbeiten zwischen den Einrichtungen zu unterstützen. Dabei wird angestrebt, das vielfältige Vorwissen der Kinder zu nutzen, um es im Sinne einer kontinuierlichen Lernbiographie zu fördern. Zentrale Bausteine für die Förderung kooperativer Lernprozesse zwischen Kindergarten- und Grundschulkindern sind neben den oben beschriebenen wöchentlichen Arbeitstreffen gemeinsame Fortbildungen, didaktische Begleitmaterialien sowie eine Netzwerkbegleitung vor Ort. Vor allem in den Fortbildungsphasen erhalten die Erzieherinnen und Grundschullehrerinnen die Möglichkeit sich über ihre Erfahrungen und Probleme auszutauschen, fachliche und fachdidaktische Impulse aufzunehmen und somit ihre mathematikdidaktischen Kompetenzen weiterzuentwickeln.

Anmerkung

Literatur in der längeren Fassung des Beitrags unter www.mathelino.com.

Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen

Mathematisch fundiertes fachdidaktisches Wissen

„Es ist an der Zeit, gründlich darüber zu diskutieren, was »fachdidaktisches Wissen« ausmacht, in welchem Bezug es zur Fachwissenschaft steht und welche Qualifikationen eine »Fachdidaktikerin« oder ein »Fachdidaktiker« haben muss, um dieses fachdidaktische Wissen mathematisch fundiert entwickeln und vermitteln zu können." (Walcher & Wittmann 2012)

Die nachfolgenden Überlegungen wurden durch diese für die Autorin sehr einsichtige Forderung veranlasst und verstehen sich als Beitrag zu ihrer Einlösung.

1. Bildungstheoretische Grundposition

Die Diskussion darüber, was »fachdidaktisches Wissen« ausmacht, kann nicht unabhängig von bildungstheoretischen Grundpositionen geführt werden. Wir orientieren uns an der folgenden Leitidee:

„Deshalb gehört es zur Bildung, dass sie unterschiedliche Weltzugänge, unterschiedliche Horizonte des Weltverstehens eröffnet, die … nicht wechselseitig substituierbar sind und auch nicht nach Geltungshierarchien zu ordnen sind: empirische, logisch-rationale, hermeneutische und musisch-ästhetische Weltzugänge mit ihren jeweils unterschiedlichen Potenzialen an Verfügungswissen und Orientierungswissen, mit ihren jeweils eigenen Rationalitätsformen." (Dressler 2006, S. 110)

Dahinter steht ein weit gefasster bildungstheoretischer Ansatz, der von folgender Feststellung ausgeht: „Hauptkennzeichen der Moderne ist der Prozess funktionaler Ausdifferenzierung und, damit verbunden, die Pluralisierung von Rationalitätsformen." (ebd., S. 36). Es steht keine übergreifende Zentralperspektive mehr zur Verfügung, aus der verschiedene Lebensbereiche und Lebenserfahrungen gleichermaßen Erklärung und Sinn beziehen könnten. Bildungsprozesse müssen daher auch die Fähigkeit zum Perspektivenwechsel und das damit verbundene Unterscheidungsvermögen vermitteln. Dazu gehört ein Wissen darum, „wie die Welt im Lichte dieser unterschiedlichen Zugangsweisen jeweils modelliert wird, …, was ihre Propria und Grenzen sind." (ebd., S. 112). Diese Forderung steht kurzschlüssigen Funktionalisierungen von Bildungsinhalten und Bildungszielen entgegen und ist für eine humane Qualität von Bildung konstitutiv.

2. Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Mathematik ist eine Weise des Weltverstehens, die unverwechselbar und nicht ersetzbar ist und sich in einer langen Kulturgeschichte herausgebildet hat. Sie geht logisch-rational vor und hat diese Form der Rationalität zu einem Höchstmaß an Stringenz und zugleich zu einer weiten Anwendbarkeit entwickelt. Damit nimmt sie im Zeitalter der Hochtechnologie eine unentbehrliche Position ein.

Vor dem Hintergrund von 1. formulieren wir nun folgende Bildungsziele für den Mathematikunterricht:

Epistemologisches Bewusstsein: Mathematikunterricht sollte in jeweils stufengemäßer Weise erlebbar machen, wie mathematische Wissensbildung geschieht. Dazu gehört ein Wissen um typisch mathematische Denkhandlungen und die Art ihres Einsatzes. Beispiele für solche Denkhandlungen sind: Strukturieren, Abstrahieren, Verallgemeinern, Präzisieren, Formalisieren, Definieren, Begründen und Beweisen.

Alltagstauglichkeit: Der Unterricht sollte selbstverständlich auch Sicherheit in der alltagspraktischen Bewältigung des Faches und das hierfür notwendige Verfügungswissen (z. B. Prozentrechnung) vermitteln.

Wissenschaftsorientierung: Je nach Bildungsgang sollten Lernende auch wissenschaftlich vermittelte Erfahrungen und Erkenntnisse erwerben. Dazu gehört zum Beispiel die Einsicht in die Reichweite des Integralbegriffs und das Wissen darum, dass und warum man hiermit sowohl Bogenlängen wie auch Flächeninhalte und Volumina und schließlich physikalische und ökonomische Größen berechnen kann.

Wissenschaftstheoretische Reflexion: Schließlich erscheint es wünschenswert, die Erkenntnisweisen des Faches auch wissenschaftstheoretisch zu reflektieren und Fragen wie die folgenden zu erörtern: Welche Art von Orientierungswissen stellt die Mathematik bereit? Zu welcher Leistungsfähigkeit kann eine Betrachtung von Realitätsausschnitten nach Maß und Zahl gelangen, wo liegen ihre Grenzen, wo wird sie unangemessen?

Ausgewogenheit: Auf allen Stufen sollte der Unterricht ein ausgewogenes Verhältnis zwischen intellektueller Selbstentfaltung und Aspekten der Nützlichkeit und Verwendbarkeit herstellen.

3. Was Lehrkräfte können sollten

Aus den in 2. genannten Zielen ergeben sich Anforderungen an das *»fachdidaktische Wissen«* von Lehrkräften, die wir im Folgenden nach vier Dimensionen aufschlüsseln.

Die fachlich-inhaltliche Dimension: Hierzu gehört eine solide fachliche Grundbildung, die nötige Wissensgrundlagen für den Unterricht bereitstellt und ein vertieftes Durchdringen des Schulstoffes ermöglicht. Darüberhinaus sollten Lehrkräfte wissen und erzählen können, welche Rolle Mathematik heute in der Welt spielt. Schließlich sollten sie über Wissensreserven für die Gestaltung phantasievoller und produktiver Aufgaben und Lernumgebungen verfügen.

Die fachlich-epistemologische Dimension: Hier geht es um die Frage, wie mathematische Wissensbildung geschieht. Diese Frage kann man sowohl in horizontaler wie in vertikaler Ausrichtung verfolgen. Man kann sie also auf einen augenblicklichen Lernprozess wie auch auf die langfristige mathematische Denkentwicklung beziehen.

Die *horizontale Blickrichtung* untersucht Fragen der folgenden Art: Welche Phänomene können mit dem jeweiligen Wissensbereich organsiert werden? Welche Denkhandlungen sind beteiligt? Welche spezifischen Stilmittel und Rationalisierungspraktiken sind am Werk und wodurch zeichnen sie sich aus? Spezifisch mathematische Tätigkeiten sind zum Beispiel: Genaues Beobachten und gezieltes Fragen, plausibles Schließen, exaktes Schließen (Beweisen), gedankliches Ordnen (z. B. eine Fallunterscheidung treffen), formalisieren usw.

Die *vertikale Blickrichtung* betrifft die genetische Entwicklung. Wie entwickelt sich ein mathematischer Gegenstand vom ursprünglichen Verstehen zum exakten Denken und schließlich präzisen Beschreiben in der Sprache der Mathematik? Wie kann man ein mathematisches Thema auf verschiedenen Stufen der Denkentwicklung intellektuell redlich entfalten?

Die lern- und kognitionspsychologische Dimension bezieht sich auf das lernende Individuum und dessen Umgang mit Mathematik. Ein wichtiger Aspekt ist die Denkentwicklung, die ein Individuum im Laufe einer Lernbiographie durchläuft, wie sie zum Beispiel von der genetischen Psychologie der Genfer Schule (Piaget, Aebli) untersucht wurden. Weiterhin interessant sind individuelle Präferenzen für verschiedene Formen mathematischer Begriffsbildung (Schwank 1996). Schließlich gehört in diesen Bereich die Diagnose individueller Lernwege, Lernhürden, Fehlvorstellungen und Fehlermuster.

Die unterrichtsmethodische Dimension bezieht sich auf die Umsetzung der genannten Kenntnisse in der Entwicklung von Lernumgebungen mit Aufgabenideen, Lernimpulsen und Lehrmaterialien. Dazu gehören auch fachliche Inhalte und Wissensbildungsprozesse akzentuierende Techniken der Unterrichtsmoderation.

Zu diesem Programm seien abschließend zwei illustrierende Beispiele betrachtet.

Beispiel 1: Auf der Unter- und Mittelstufe bewährt sich das operative Prinzip als Ausdruck eines speziellen handlungsorientierten Vorgehens. Der für Schülerinnen und Schüler der Klassen 5/6 schwierige geometrische Relationsbegriff „senkrecht“ kann auf diesem Wege mit Hilfe von Faltexperimenten erarbeitet werden. Man betrachte dazu, welche Gebilde aus geraden Linien durch zweimaliges Falten eines Blattes entstehen. Unter den verschiedenen Möglichkeiten gibt es eine, die bewirkt, dass beim Falten längs einer Geraden die Teile der anderen Geraden aufeinander fallen. Dabei sind die Rollen der Geraden austauschbar. In Veranstaltungen zur Didaktik der Geometrie ist jedoch häufig zu beobachten, dass Studierende den Clou dieses Experimentes nicht durchschauen und nur an der optischen Oberfläche korrekte Bilder erzeugen (vgl. Hefendehl-Hebeker 2013).

Beispiel 2: Parabelscharen bilden ein klassisches Unterrichtsthema zu Beginn der Oberstufe. Die Gleichung $y = x^2 - px + 3p$ beschreibt eine solche parametrisierte Schar. Typische Aufgaben bestehen darin, die Scheitelkoordinaten der Schargleichungen und den Trägergraphen der Scheitelpunkte zu bestimmen. Wenn eine Lehrkraft die hierzu erforderlichen Lösungsansätze und Techniken durchsichtig erklären will, muss sie sicher mit den verschiedenen Variablenaspekten umgehen können.

4. Missverständnisse und Scheinklarheiten

Studierende verkennen oft die Aufgabe der Fachdidaktik; dabei vollziehen sie grundlegende Verwechslungen, etwa zwischen Schonatmosphäre und stufengemäßer Vorgehensweise im Unterricht oder zwischen oberflächlichem „Spaß“ und echter intellektueller Herausforderung („Flow-Erleben“). Hinter diesen Fehleinschätzungen steckt oft ein unzureichendes Bewusstsein für Ausgestaltung und Anforderung des angestrebten Berufszieles. Hier muss die fachdidaktische Ausbildung korrigierend eingreifen.

Literatur

Dressler, B. (2006): Unterscheidungen. Leipzig: Evangelische Verlagsanstalt.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013): Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: Ableitinger, Ch., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.): Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Wiesbaden: Springer, 1-15.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. In: ZDM-Analysenheft ”Deutsche psychologische Forschung in der Mathematikdidaktik”. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 6, 168-183.

Walcher, S. & Wittmann, E. Ch. (2012): »Minus mal minus« Zum Fundament der COACTIV-Studie. In: MNU 65/6 (1.9.2012), 371-377.

Sabrina HEIDERICH, Dortmund

Von der Situation zur elementaren Funktion – wie Merksätze den Blick verkürzen

Der Beitrag befasst sich einerseits mit der Frage, inwiefern es Schülerinnen und Schülern gelingt ihr mathematisches Wissen zu den proportionalen, linearen und antiproportionalen Funktionen auf andere Kontexte anzuwenden und welche Hürden ggf. auftreten, um andererseits Rückschlüsse auf Lerngegenstände zu ziehen, mit denen ein angemessener Transfer gelingen kann.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass nicht selten reduktionistische Merksätze zu Rate gezogen, die sich aber nicht immer als tragfähig erweisen. Einerseits ermöglichen sie durch ihre kurze, prägnante Form einen schnellen Zugang zur vorliegenden Situation, andererseits erfassen sie aber nur einen sehr eingeschränkten und unvollständigen Bereich der Eigenschaften der einzelnen Funktionstypen und lassen damit keine eindeutige Identifikation der Situation zu.

1. Charakteristika des Lerngegenstands

Die Grundvorstellungen zum funktionalen Denken *Zuordnung*, *Kovariation* und *Funktion als Ganzes* (vgl. Vollrath, 1989, 7ff, Malle, 2000, 8f) bilden die Gelenkstelle zwischen der Realsituation und dem mathematischen Modell. Als Perspektive auf die Situationen und zur Erschließung können die Darstellungen *Tabelle*, *Graph* und *Term* zurate gezogen werden. Jede für sich gibt jedoch nur Teilaspekte der Funktion wieder (vgl. z.B. Gagatsis & Shiakally, 2004, 648), so dass eine Arbeit mit verschiedenen Repräsentationen und ihren Übersetzungen im Rahmen von Lernumgebungen notwendig ist (vgl. Stölting, 2008, 70). Insbesondere das Wissen um die Vorzüge der einzelnen Darstellungen unterstützt eine adäquate Wahl bei der Situationsanalyse (a.a.O., 61ff). Darüber hinaus ist das Wissen um die besonderen Eigenschaften der einzelnen, elementaren Funktionen unabdingbar, um das Verhalten der abhängigen Größen der vorliegenden Situation als Charakteristikum eines bestimmten, mathematischen Modells zu identifizieren. Die proportionalen Funktionen zeichnen sich durch die Existenz des Startwerts im Ursprung und eine gleichmäßigen Steigung der abhängigen Größen aus. Sie können als Spezialfall oder Teilmenge von linearen Funktionen gesehen werden, bei denen der Startwert ungleich Null sein kann. Jedoch verliert die lineare im Vergleich zur proportionalen Funktion dadurch die Eigenschaft der Quotientengleichheit und damit die Möglichkeit einer gleichsinnigen, multiplikativen Kovariation der Größen. Erhalten bleibt jedoch das gleichbleibende, schrittweise Verhalten. Die antiproportionalen Funktionen sind dagegen durch die Produktgleichheit der abhängigen Größen gekennzeichnet. Ein gegensinniges additives Vorgehen ist hier nicht möglich. Eine weitere Konkretisierung dieser eigenständigen Merkmale auf die verschiedenen Darstellungen eröffnet die Komplexität dieses Feldes und damit die Spannbreite zur Differenzierung.

2. Designexperimente

Die erste Runde von Designexperimenten wurde in das Projekt KOSIMA (vgl. Barzel et al., 2011) eingebettet. Im Rahmen der Lernumgebung „Mit Funktionen Voraussagen machen und weitere Werte bestimmen" (Jgst. 8) haben die Schülerinnen und Schüler zunächst eigenständig proportionale, lineare und antiproportionale Funktionen im Kontext der Routenplanung anhand variierender Abhängigkeiten zwischen den Größen Zeit, Strecke, Reststrecke und Geschwindigkeit in den verschiedenen Darstellungen und ihren Übersetzungen erprobt und anschließend systematisiert. Zeitlich anknüpfend wurden acht Schülerpaare in klinischen Interviews mit neuen Kontexten in Form von Bildern und kurzen Textaufgaben konfrontiert. Ebenfalls wurden elf Schülerpaare außerhalb des Projekts interviewt.
Ziel der Designexperimente ist die systematische Analyse von individuellen Vorstellungen zu charakterisierenden Eigenschaften und Darstellungen von elementaren, funktionalen Zusammenhängen und deren Verwendung zur Differenzierung der Funktionstypen.

3. Analyse und Ergebnisse

Für die Analyse wurde das Zusammenspiel aus Fokussierungen (als Kategorien, mathematische Objekte und Eigenschaften, die während der Aufgabenbearbeitung besonders in den Blick genommen und zur weiteren Argumentation genutzt werden) und Festlegungen (als für wahr gehaltene Einschätzungen zu Eigenschaften und Zusammenhängen der mathematischen Objekte zur Charakterisierung der Situation; vgl. Hußmann & Schacht, 2009) seitens der Schülerinnen und Schüler herausgearbeitet. Die Betrachtung individueller Festlegungen und Fokussierungen ermöglicht eine Analyse des inhaltlichen Verständnisses seitens der Probandinnen und Probanden und somit individueller Hürden, was eine Verbesserung des Lerngegenstands im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung (vgl. Prediger et al., 2012) begünstigt.

Besonders auffällig zeigte sich das Phänomen der Priorisierung folgender Merksätze in Form stark verkürzter, memorierbarer Versprachlichungen: *Je mehr, desto mehr* oder *je weniger, desto weniger* steht für *proportionale* Zusammenhänge; *Je mehr, desto weniger* oder *je weniger, desto mehr* steht für *antiproportionale* Zusammenhänge. Bei der Situationsidentifizierung richten diese den Fokus nur auf einen äußerst unkonkreten Ausschnitt des Wachstumsverhaltens der abhängigen Größen. Schon im elementaren Bereich, bei den negativen linearen Funktionen, führt die zweite Festlegung zu Fehlinterpretationen. Ein weiteres zentrales Phänomen tritt beim konsequenten Einhalten der eingegangenen *Erst*festlegung „Da die Größen je mehr, desto weniger variieren, ist die Situation antiproportional“ auf. Diese Aussage bleibt auch bei gegengleich additiv variierenden Größen in der Tabelle und dem Graphen einer Geraden mit negativer Steigung weiter tragfähig, wobei jedoch nicht zwangsläufig eine antiproportionale Funktion damit charakterisiert wird. Demnach müssen eingegangene und zur Entscheidung verwendete Festlegungen mehr beinhalten als die obigen es leisten. Sie müssen *vollständig* sein und zwar in dem Sinn, dass sie einerseits einen hinreichenden Zugang zu einer bestimmten Klasse funktionaler Situationen ermöglichen und andererseits die Reichweite des mathematischen Modells in seiner Gänze erfassen.

Darüber hinaus müssen Festlegungen zu den einzelnen Funktionstypen *widerspruchsfrei* sein. Die Bearbeitung in Abb. 1 stammt von einem Schüler, der zu dem Bild einer Kerze die Größen „Brenndauer“ und „noch vorhandene Höhe“ in Beziehung setzt, indem er

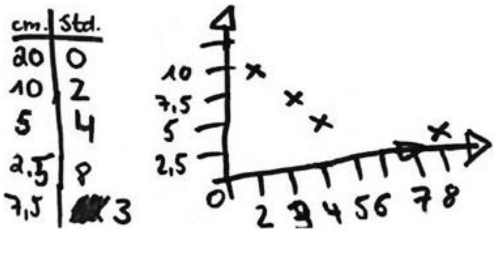


Abb.1: Schülerbearbeitung

zunächst die ersten vier Wertepaare in die Tabelle schreibt, das zweite bis vierte Wertepaar als Punkte im Koordinatensystem einordnet und schließlich das letzte Wertepaar in der Tabelle und für den Graphen als Punkt ergänzt. In der Tabelle fokussiert er zunächst auf einen Startwert bei 20 (was für Linearität spricht) und legt sich auf eine Brenndauer von 2 Stunden bei 10 cm Abnahme der Kerze bzw. Halbierung der Kerzenhöhe fest. Dann ändert er jedoch sein Vorgehen, indem er sich vom zweiten bis vierten Wertepaar auf eine gegensinnige multiplikative Strategie festlegt (was für Antiproportionalität spricht). Andere Bearbeitungen des Schülers zeigen seine Priorisierung der oben genannten Je-desto-Festlegungen. Denkbar ist der implizite Schluss auf Antiproportionalität durch das Je-mehr-desto-weniger-Verhalten der Größen in der Tabelle und eine Assoziierung des antiproportionalen Zusammenhangs mit der multiplikativen Strategie in der Tabelle. Bei der Übertragung des zweiten bis vierten Wertepaars als Punkte im Graphen zeigt seine Äußerung „Der Graph ist mir jetzt nicht so gelungen“, dass die entstehende Gestalt nicht seiner Erwartung entspricht. Die anschließende Ergänzung des fünften Wertepaars (dabei erläutert er sein Vorgehen) in der Tabelle durch die Halbierung der Addition aus 10 und 5

(7,5) und für den y-Wert entsprechend durch die Halbierung der Addition aus 2 und 4 (3) macht seine implizite Festlegung deutlich, die Verdopplungs-/ Halbierungsstrategie von einzelnen Werten auf Intervalle zu übertragen und eine Gerade zur Situation erzeugen zu wollen. Abschließend zeichnet er den neuen Punkt in das Koordinatensystem ein. In beiden Darstellungsformen nutzt der Schüler Festlegungen, die sich sowohl auf lineare als auch antiproportionale Merkmale und Strategien stützen, so dass er keine gelingende Identifizierung der Situation vornehmen kann.

Die folgende Festlegung beschreibt beispielhaft den Kernaspekt des Begriffs der Linearität bzgl. der Kovariations-Vorstellung: *Bei einer linearen Funktion kommt pro Schritt immer dasselbe dazu oder wird weniger* (Hußmann et al., 2015). Ziel von Lernumgebungen muss es sein derartige Festlegungen bei den Lernenden zu verankern, die geeignete(!) Bindeglieder zwischen Realsituationen und dem mathematischen Modell repräsentieren, die eine Ausdifferenzierung der Grundvorstellungen hinsichtlich des konkreten, mathematischen Modells bereitstellen, bzgl. der Darstellungen evident und vor allem vollständig hinsichtlich der Gültigkeit sind.

Literatur

Barzel, B., Prediger, S., Leuders, T., Hußmann, S. (2011): Kontexte und Kernprozesse – Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM, 71-74.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004): Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. In: Educational Psychology, 24(5), 645-657.

Hußmann, S., Schacht, F. (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM, 339-342.

Hußmann, S., Mühlenfeld, U., Witzmann, C. (2015): Voraussagen mit dem Routenplaner – Mit Funktionen modellieren. Erscheint in: B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders, S. Prediger (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 8. Berlin: Cornelsen

Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: Mathematik lehren, 103, 8-11.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012): Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen - Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht, 65(8), 452–457.

Stölting, P. (2008): Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I - Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. Dissertation, Universität Regensburg

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: JMD, (10)1, 3-37.

Kerstin HEIN, Berlin

Die Bedeutung von Zeichen für den Mathematikunterricht – eine mehrperspektivische Lesart

Der Verwendung von Zeichen, wie die sinnlich wahrnehmbaren Signale heißen, die sich in der Regel auf Sachverhalte in der realen Welt beziehen, kommt in der Mathematik eine große Bedeutung zu. Es wird nicht nur – wie auch in anderen Wissenschaften wie etwa der Sprachwissenschaft – über allgemeine sprachliche Zeichen, sondern mit eigenen mathematischen Zeichen kommuniziert, die abstrakte Objekte repräsentieren. Mit anderen Worten müssen mathematische Objekte nicht notwendigerweise in der außermathematischen Welt existieren. Die Beschäftigung mit der Mathematik besteht im Wesentlichen im Handeln mit Zeichen, die im Mathematikunterricht nach und nach eingeführt werden und die sich auf abstrakte mathematische Objekte beziehen. Die mathematischen Objekte sind sogar „nur über Zeichen ‚denkbar'" (Fischer 2006, S. 181). Obwohl das Verwenden von Zeichen das Wesen der Mathematik ausmacht, wird im Kontext des Mathematikunterrichts nur selten über jene reflektiert.

Die Semiotik, die Lehre von den Zeichen, beschäftigt sich interdisziplinär mit Zeichen und deren Verwendung. Sie schafft eine andere Sichtweise auf die Mathematik und ihre Didaktik und wurde in den letzten Jahren als Zugang zur Mathematik diskutiert. Insbesondere Dörfler betont die Notwendigkeit der Zeichen zum Verständnis von abstrakten, mathematischen Objekten. Mit Hilfe der Semiotik können daher zentrale Probleme des Mathematikunterrichts produktiv untersucht werden (Dörfler 2012).

Je nach Forschungsinteresse bieten sich unterschiedliche Zeichenmodelle und –auffassungen an, die vor allem durch das triadische Zeichenmodell von Pierce und das dyadische Zeichenmodell von de Saussure geprägt sind (Nöth 2000, S. 60). Pierce ging von einem dreigliedrigen Zeichenmodell aus, das das Objekt, das Zeichen als Repräsentant und das Interpretamen, also die geistige Vorstellung vom Objekt, umfasste. Da er hierbei nicht davon ausging, dass das Objekt außerhalb der Zeichen existieren muss und darüber hinaus der Interpretationsvorgang thematisiert wird, ist dieses Modell für unterschiedliche Betrachtungen mathematischer Zeichen geeignet (ebd., S. 62f.). Bei de Saussure hingegen bestand ein Zeichen aus der Vorstellung und dem Lautbild. Obwohl de Saussure das Zeichen ausschließlich als mentale Konzeption verstand, bezog er sich dabei auf sprachliche Zeichen, die in der Regel Referenzobjekte in der Realität haben und deren Interpretation häufig unproblematischer ist als die Interpretation mathematischer Zeichen (ebd.,

S. 71ff.). Obwohl dieses Zeichenmodell zur Erklärung mathematischer Interpretationsvorgänge weniger geeignet scheint, da es von einer klar zugeordneten und leicht erfahrbaren Vorstellung ausgeht, erlaubt es, die Probleme der Schüler und Schülerinnen leichter zu verstehen, denn es entspricht eher deren Alltagsverständnis. Zur Vereinfachung ist im Folgenden mit dem Begriff ‚Zeichen' der schriftliche Repräsentant gemeint, auch wenn jener je nach Zeichenmodell anders definiert wird.

Nach Morris kann die Betrachtung von Zeichen in folgende Untersuchungsaspekte unterschieden werden: *Semantik, Syntax* und *Pragmatik* (Bußmann 2002, S. 595). Klaus erweiterte diese semiotischen Dimensionen um den Aspekt der *Sigmatik* (Nöth 2000, S. 91). Die Linguistik analysiert innerhalb der Semantik die Bedeutung von Zeichen. Bei sprachlichen Zeichen gibt es teilweise eindeutige Objekte, die den Zeichen zugeordnet werden können und in der realen Welt existieren wie z.B. ein Baum, das prototypische Beispiel de Saussures. Bei mathematischen Zeichen hingegen fehlt fast immer das Referenzobjekt in der außermathematischen Welt. Die Syntax untersucht Anordnung und Beziehung verschiedener Zeichen zueinander. Innerhalb der Sprache kann beispielsweise das Wort ‚Weg' kontextabhängig unterschiedliche Bedeutungen annehmen, wie durch die Gegenüberstellung der Aussagen ‚Weg war er!' und ‚Der Weg war sehr beschwerlich.' deutlich wird. Auch innermathematisch hat z.B. das Zeichen ‚−' je nach Kontext die Bedeutung eines Vorzeichens oder die Bedeutung eines Operators. Unter dem Begriff der Pragmatik wird die Beziehung zwischen Zeichen und Zeichenbenutzer unter Einbeziehung der Äußerungssituation betrachtet. So ist beispielsweise die Bedeutung des Begriffs ‚Funktion' abhängig vom Kontext außerhalb der Zeichen. Wird dieser Begriff im Alltag verwendet, bezeichnet er in der Regel die Aufgabe eine Objektes, wohingegen er innerhalb der Mathematik wiederum ein zentraler Begriff ist, der die Abbildung bezeichnet, die jedes Element einer Menge einem Element einer anderen Menge zuordnet. In der Sigmatik, die mitunter auch als Teilaspekt der Semantik betrachtet wird, wird das Verhältnis zwischen den (sprachlichen) Zeichen „und den durch sie bezeichneten Objekten bzw. Sachverhalten der realen Welt" (Bußmann 2000, S. 599) untersucht. Dabei ist beispielsweise bedeutsam, ob Zeichen mehr oder weniger Merkmale mit den repräsentierten Objekten gemein haben. Dieser Untersuchungsaspekt ist insbesondere innerhalb der Mathematik problematisch – und dadurch aber auch besonders interessant –, da die mathematischen Objekte in der Regel nicht in der realen Welt existieren.

Unsere Studie ‚Zeichen im Kontext einer Geraden' wurde angeregt durch Fischer, die den Einsatz von Zeichen bei Mathematikstudierenden untersuchte (Fischer 2006). Nach Fischer betont die Verwendung von bestimmten

Zeichen die unterschiedlichen Bedeutungen mathematischer Objekte. Beispielsweise wird bei der Darstellung der Restklasse ‚zwei modulo fünf' durch die Schreibweise $\{5z+2 \mid z \in \mathbb{Z}\}$ die Bedeutung betont, dass die Zahlen mit Rest zwei zusammengefasst werden (ebd., S. 187).

Die nachfolgend dargestellte Studie wurde gemeinsam mit Inga Refle entworfen und in einem mathematikdidaktischen Seminar an der Freien Universität Berlin (Sommersemester 2012) durchgeführt. Die zwölf Studierenden und deren Dozent erhielten dabei die Aufgabe, über das ihnen vorgelegte Zeichen einer Geraden einen Aufsatz zu schreiben. Um die unterschiedlichen Sichtweisen der Teilnehmenden abzubilden, wurden sie gebeten, die Aspekte Eigenschaften, Lage im Raum und mögliche Rechenoperationen zu berücksichtigen. Als Grafik war das Zeichen für eine Gerade bei einem Teil der Studierenden mit und bei dem anderen Teil der Studierenden ohne Koordinatensystem beigefügt.

Die Auswertung unter den vier sprachwissenschaftlichen Untersuchungsaspekten (Semantik, Syntax, Pragmatik, Sigmatik) ergab Folgendes: Innerhalb der Semantik kristallisierte es sich heraus, dass Studierende, deren Grafik ein Koordinatensystem enthielt, schwerpunktmäßig eher Aspekte der Analysis betrachteten, wohingegen Studierende, deren Grafik kein Koordinatensystem enthielt, ihren Betrachtungsschwerpunkt eher auf die analytische Geometrie legten. Das Beifügen bzw. Weglassen des Koordinatensystems, was syntaktisch einen Unterschied darstellt, hatte großen Einfluss auf die Aufsätze der Studierenden. Diese unterschieden sich nicht nur im Bedeutungsschwerpunkt, denn bei der Aufgabestellung ohne Koordinatensystem wurden deutlich mehr inhaltliche Aspekte und zum Teil auch eigene grafische Ergänzungen angeführt. Trotz des mathematikdidaktischen Kontextes wurde das Zeichen auch als ‚Strich' bzw. ‚Linie' bezeichnet. Unter dem Aspekt der Pragmatik kann man dies so deuten, dass dafür die Aufgabenstellung verantwortlich sein könnte − auf der anderen Seite zeigt dies aber auch, dass den Studierenden das mathematische Zeichen gleichzeitig auch in seiner Verwendung als außermathematisches Zeichen präsent war. Unter dem Aspekt der Sigmatik wurde deutlich, dass die mathematischen Zeichen in der Regel auf Objekte außerhalb der sinnlich wahrnehmbaren Welt verweisen. Interessanter Weise wurde in nur einem Fall − im Zusammenhang mit Modellierungsmöglichkeiten − auf die außermathematische Welt Bezug genommen. Welche Erkenntnisse lassen sich aus dieser Studie für den Mathematikunterricht ableiten?

Die Untersuchungsergebnisse aus der Semantik zeigen, dass es notwendig ist, die Bedeutungsschwerpunkte, die mit unterschiedlichen Schreibweisen einhergehen, deutlich herauszuarbeiten und den Schülern und Schülerinnen die Möglichkeit zur Reflexion zu geben – beispielsweise mittels Lerntagebüchern. Die Betrachtung von mathematischen Zeichen im syntaktischen Kontext lässt darauf aufmerksam werden, wie wichtig ein sensibler Umgang mit Zeichen und Zeichenkombinationen unter anderem in unterschiedlichen Versionen von Klassenarbeiten oder generell bei der Unterrichtskonzeption ist. Aufgaben können durch das Hinzufügen oder Weglassen einzelner Zeichen einen mehr oder weniger offenen Charakter erhalten. Mit dem pragmatischen Blick wird die Frage aufgeworfen, wie im Mathematikunterricht mit Begriffen aus dem Alltag umgegangen werden sollte. Mit Wagenschein sollte vor der ‚Sprache des Verstandenen' bei Lernprozessen eine ‚Sprache des Verstehens' zugelassen werden (Ruf & Gallin 2011, S. 25). Beim Übergang zur mathematischen Fachsprache sollte auch deren Notwendigkeit thematisiert werden. Betrachtet man mathematische Zeichen aus der Perspektive der Sigmatik, so wird deutlich, dass selten eine Referenz in die reale Welt existiert. In der Sprachwissenschaft wird das Objekt als das Primäre betrachtet, demgegenüber können abstrakte Objekte nur über die Zeichen verstanden werden. Daher müssen Lernende „zwangsweise den umgekehrten Weg gehen: von den Darstellungen zur Idee und zum abstrakten Objekt" (Dörfler 2006, S.1). Da sich Lernenden der mathematische Hintergrund eines Zeichens mitunter nicht sofort erschließt, sollte zunächst auch das ausschließliche Operieren mit den Zeichen zugelassen werden. Durch das Handeln mit den Zeichen können dann die Eigenschaften des abstrakten Objektes erschlossen und als mentales Konstrukt aufgebaut werden.

Der Mehrwert der sprachwissenschaftlichen Betrachtung liegt darin, dass sie auf die Probleme, die bei dem Umgang mit mathematischen Zeichen auftreten können, aufmerksam macht und Anstöße für weitere Forschungen gibt. Der Zeichenbegriff von de Saussure ist sicherlich nicht hinreichend für das Verständnis mathematischer Interpretationsvorgänge, zeigt jedoch die Problemstellen von Lernenden auf.

Literatur

Bußmann, H. (Hrsg.) (2002): Lexikon der Sprachwissenschaft. Stuttgart: Kröner.

Dörfler, W. (2006): Keine Angst – Mathematik ist nicht nur abstrakt. In: BzMU 2006, Hildesheim: Franzbecker Verlag, 71-74.

Dörfler, W. (2012): Was und wie wird in der Mathematik konstruiert. In: BzMU 2012, Münster: WTM Verlag, 217-220.

Fischer, A. (2006): Der Einsatz von Zeichen als Werkzeuge zur mentalen Konstruktion abstrakter Objekte. In: JMD 27 (2006) 3/4, 180-199.

Nöth, W. (2000): Handbuch der Semiotik. Stuttgart: Metzler.

Ruf, U., Gallin, P. (2011): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen. Seelze: Friedrich Verlag.

Isabelle HEINISCH, Klaus-Peter EICHLER, Schwäbisch Gmünd

Outcomeorientierung der Mathematiklehrerausbildung

Einleitung

Die Einführung des Europäischen Qualifikationsrahmens (EQR) [EU-Kommission 2008] bzw. des deutschen Pendants, des Deutschen Qualifikationsrahmens (DQR) [DQR 2011], wird die Hochschullehre mittelfristig dahingehend beeinflussen, dass die in einem Bildungsabschnitt zu erwerbenden Kompetenzen konkret formuliert werden müssen. Eine derartige Outcomeorientierung erfordert eine neue Sicht auf die Lehre und eine veränderte Anlage der Lehre. Diese Situation kann nun aus hochschuldidaktischer Sicht genutzt werden, um die Chancen der Outcomeorientierung für eine qualitativ bessere Lehre auszuloten und wahrzunehmen.

Die begriffliche Diskussion rund um die Entwicklung von Kompetenzen kann nur ein erster Schritt sein. Im Mittelpunkt der Bemühungen müssen vielmehr praktikable Lösungen für eine kompetenzorientierte Gestaltung der Hochschullehre stehen. An der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd findet deshalb das Projekt KOALA (**K**ompetenz- und **O**utcomeorientierte **A**nlage der **L**ehramts**A**usbildung) statt, bei dem eine outcomeorientierte Lehre konzipiert, umgesetzt und evaluiert wird.

Wir erwarten, dass insbesondere Lehramtsstudierende von den im eigenen Lernprozess erworbenen Erfahrungen im Umgang mit Kompetenzen profitieren. Die Studierende erleben durch dieses Projekt, wie Kompetenzen formuliert, erarbeitet und geprüft werden. Dieses selbst erfahrene, kompetenzorientierte Lernen soll sie dazu befähigen, diese Erfahrung später als Lehrer in der Schule umzusetzen und damit selbstständig Lernprozesse kompetenzorientiert zu planen und zu initiieren.

Ziele des Projekts

Die Transparenz der zu erwerbenden Lernergebnisse und Kompetenzen soll verbessert werden. Die Studierenden sollen zu jedem Zeitpunkt ihres Studiums erkennen können, was von ihnen erwartet wird, aber auch sich selber überprüfen können, ob sie die Lernergebnisse erreicht haben. Dabei liegt insbesondere der Schwerpunkt auf lernerzentrierten Formulierungen von beobachtbaren Lernergebnissen. Wir hoffen nicht zuletzt, mit transparenteren Forderungen hinsichtlich der Lernergebnisse auch die hohe Fach- und Studiengangwechselquote im Fach Mathematik zu senken.

Die Kompetenzorientierung ist an Schulen derzeit vergleichsweise weiter als an Hochschulen entwickelt. Für Studienanfänger bedeutet dies oft eine

Umstellung von kompetenzorientierten auf inhaltsorientiertes Lernen. In der späteren Tätigkeit als Lehrer jedoch wird von ihnen wiederum erwartet, einen kompetenzorientierten Unterricht zu planen und zu realisieren. Um diese Inkonsequenz des Lernprozesses aufzuheben, sollen praktikable Konzepte und Methoden für eine kompetenzorientierte Lehre erarbeitet und erforscht werden.

Schließlich wollen wir mit qualitativen und quantitativen Methoden evaluieren, ob die Theorie des Constructive Alignment [Biggs 2011] in der Praxis tatsächlich eine Verbesserung von Studienqualität und Studienzufriedenheit mit sich bringt. Wie Braband [Braband, 2008] darstellt, ist Constructive Alignment ein geeignetes Modell, um eine Orientierung weg vom reinen Prüfungsstoff, hin zu einem auf Verständnis ausgerichteten Lernen zu erreichen.

Begriffliche Klärung

Trotz bestehender Formulierungshilfen [QSL-Projekt 2010] werden die Begriffe wie etwa „Lernergebnis“ und „Kompetenz“ bei Beschreibungen von Modulhandbüchern von Lehramtsstudiengängen an Hochschulen gegenwärtig noch sehr uneinheitlich verwendet. Neben dem synonymen Gebrauch von Lernergebnis und Kompetenz trifft man auf eine Bandbreite an Formulierungen. Die wenig einheitliche Verwendung der Begriffe hat unserer Ansicht nach mehrere Ursachen. Eine Ursache sind Divergenzen bei der Übersetzung englischsprachiger Literatur. Eine zweite, weitaus wesentlichere Ursache liegt im Wesen des Begriffes „Kompetenz“ selbst, der ein komplexes Konstrukt widerspiegelt. Eine weitere Ursache ist der Fakt, dass der Begriff „Kompetenz“ von verschiedenen Institutionen höchst uneinheitlich verwendet wird. Der EQR, an dem sich der DQR und die Hochschulen im Zuge des Bologna-Prozesses [Bundesministerium für Bildung und Forschung 2012] orientieren sollen, bezieht sich bei der Beschreibung von Kompetenz auf gezeigte Fähig- und Fertigkeiten. Der DQR orientiert sich zwar an dieser Definition, stellt aber gleichzeitig die „umfassende Handlungskompetenz“ in den Vordergrund [DQR 2011]. Der Beschluss der Kultusministerkonferenzen für die Fachwissenschaften [KMK 2010] beschränkt sich schließlich auf die Einteilung in bereichsspezifische Kompetenzen, bei denen Wissen und Methodik als Schwerpunkte gesetzt werden. In der weiteren Erläuterung werden zudem inhaltliche Anforderungen der Fächer neben den Kompetenzprofilen erläutert.

Wir schlagen für die Hochschullehre, insbesondere für die Lehrerbildung im Fach Mathematik, ein Kompetenzverständnis vor, welches sich an der in den Bildungswissenschaften als Standard geltenden Definition von

Weinert [Weinert 2002] orientiert. Demnach handelt es sich bei Kompetenz um „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“.

Kompetenz ist demnach ein holistischer Begriff [Rychen 2007]. Er schließt sowohl Kenntnisse Fertigkeiten und Fähigkeiten, als auch Metakognition, Motivation, Emotionen und Handlungen mit ein. Kompetenzzuwachs zeigt sich anhand **beobachtbarer Lernergebnisse** in Form einer abschließenden Handlung.

Beobachtbare Lernergebnisse umschreiben mit Hilfe von beobachtbaren Tätigkeiten das, „was Lernende wissen, verstehen und in der Lage sind zu tun, nachdem sie einen Lernprozess abgeschlossen haben.“ [DQR 2011]. Zur Formulierung von beobachtbaren Lernergebnissen empfiehlt sich eine Orientierung an der aktiven Verbenklassifizierung nach Bloom [Bloom 1976] oder der SOLO-Taxonomie [Biggs 2011]. Verben und Formulierungen wie „kennen“, „können“, „wissen“, „sind in der Lage zu tun“ etc. , beschreiben den Lernprozess aus Sicht des <u>Lehrenden</u> und sollten daher vermieden werden. Im Folgenden werden Beispiele für **beobachtbare Lernergebnis**formulierungen dargestellt, die im Zuge des Projekts erarbeitet wurden.

Die Studierenden

- stellen die Bedeutung des Hauptsatzes über Äquivalenzrelationen für die Begriffsbildung dar und leiten daraus didaktische Schlussfolgerungen ab,
- stellen Eigenschaften von Zahlen und Operationen dar und beurteilen Möglichkeiten und Grenzen, diese für Schüler mit unterschiedlichen Mitteln zu veranschaulichen,
- identifizieren typische Schwierigkeiten von Schülern beim Umgang mit arithmetischen Aufgaben,
- wenden Konzepte zum Erkennen und Fördern mathematisch begabter Schüler an,
- benennen Ziele und Realisierungsmöglichkeiten fächerübergreifenden Unterrichts und veranschaulichen dies an Beispielen.

Derartige Formulierungen stellen beim Lerner beobachtbare Tätigkeiten in den Mittelpunkt. Dass die Basis dafür solide Kenntnisse sind, versteht sich von selbst. Die subjektive Bedeutsamkeit der Kenntnisse erfährt der Lerner in der Anwendung dieser, also bei der Ausführung oben genannter Tätigkeiten. In dieser Anwendung des Erworbenen findet der in der Lehrveranstaltung zu durchlaufende Erkenntnisprozess einen vorläufigen, relativen Abschluss.

Fazit

Nach anderthalbjähriger Laufzeit des KOALA-Projekts können erste positive Ergebnisse verzeichnet werden. Eine ausführliche Darstellung der Ergebnisse finden sich unter www.koala-bw.de.

Über den weiteren Verlauf des Projekts werden wir bei der GDM 2014 berichten.

Literatur

Biggs, J., Tang, C.: Teaching for quality learning at university. Open University Press, 4th edition, Berkshire, 2011.

Bloom, B. S.: Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich. Beltz Verlag, Weinheim, 1976 (5. Aufl.).

Braband, C.: Constructive alignment for teaching Model-based design for concurrency. In transactions on petri Nets and other Models of Concurrency 5100/2008, 2008; S. 1-18.

Bundesministerium für Bildung und Forschung: Bericht über die Umsetzung des Bologna-Prozesses in Deutschland. Hg. v. Bundesministerium für Bildung und Forschung. 2012. http://www.bmbf.de/pubRD/umsetzung_bologna_prozess_2012.pdf

Deutscher Qualifikationsrahmen für lebenslanges Lernen. Verabschiedet vom Arbeitskreis Deutscher Qualifikationsrahmen (AK DQR) 2011. http://www.deutscherqualifikationsrahmen.de/de/aktuelles/deutscher-qualifikationsrahmen-f%C3%BCr-lebenslanges-le_ght3psgo.html

EU-Kommission: Der Europäische Qualifikationsrahmen für lebenslanges Lernen. 2008. http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:C:2008:111:0001:0007:EN:PDF

KMK: Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung. Beschluss der KMK v. 16.10.2008 i.d.F. vom 16.09.2010. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf

QSL-Projekt 2010: Kurzfassung: Formulierungshilfen für Modulhandbücher. 2010. http://www.hda.tu-darmstadt.de/media/hda/pdf_4/handreichung.pdf

Rychen, S.: OECD Referenzrahmen für Schlüsselkompetenzen-ein Überblick. In: Kompetenzen der Bildung für nachhaltige Entwicklung 2007; S15-22.

Weinert, F. E.: Vergleichende Leistungsmessung in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In (Weinert, F. E., Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen, Weinheim, 2002; S. 17-31.

Frank HEINRICH, Anika PAWLITZKI, Lara-D. SCHUCK, Braunschweig

Problemlöseunterricht in der Grundschule

Seit Vorliegen der ersten Befunde von TIMSS wurde und wird eindringlicher die Forderung nach Problemlösen im Mathematikunterricht erhoben, was seinen Niederschlag in Bildungsstandards und curricularen Vorgaben findet. Darüber hinaus existieren Vorschläge, wie Probleme unterrichtet werden könnten oder sollten, doch fehlen in der Breite empirische Befunde darüber, wie sie unterrichtlich wirklich behandelt werden, wie entsprechende Unterrichtsstunden gestaltet sind. Sollte es gelingen, unser Wissen darüber anzureichern, könnten sich bessere Möglichkeiten des Vergleichens und gegebenenfalls Bewertens derartigen Mathematikunterrichts ergeben. Zudem sind ergänzende Anregungen für seine Gestaltung zu erwarten. Vor diesem Hintergrund haben wir 2011/12 eine empirische Erkundungsstudie in der Jahrgangsstufe vier durchgeführt, über die im Folgenden überblicksartig und auszugsweise berichtet wird.

Konzipierung, Durchführung und Auswertung der Erkundungsstudie

Im Rahmen der Fallstudie wurde erkundet, wie Lehrende (von uns) vorgegebene Probleme in einer Mathematikunterrichtsstunde behandeln. Es konnten für die Studie 16 Lehrerinnen und Lehrer gewonnen werden, von denen je acht das „Kühe-Enten-Problem“ und das „Teufelsproblem“ unterrichteten.

Auf einer Wiese stehen Kühe und Enten. Zusammen haben sie 26 Beine. Wie viele Kühe und wie viele Enten können es sein?

Der Teufel sagte zu einem armen Manne: „Wenn du über die Brücke gehst, will ich dein Geld verdoppeln. Doch jedes Mal, wenn du zurück kommst, musst du für mich 8 Taler ins Wasser werfen.“ Als der Mann das dritte Mal zurückkehrte, hatte er keinen blanken Taler mehr. Wie viele Taler hatte er am Anfang? Begründe deine Antwort!

Die jeweilige Problemformulierung wurde den Lehrpersonen zwei Wochen vor Unterrichtsdurchführung an die Hand gegeben. Lösungen, Bearbeitungs- oder Unterrichtshinweise erhielten sie nicht. Unmittelbar vor der betreffenden Unterrichtsstunde wurden die Lehrenden in einem Interview nach Zielen und Methodik befragt. Im Anschluss an die Stunde hatten sie die Gelegenheit über den Unterrichtsverlauf zu reflektieren. Der Unterricht wurde mit Hilfe zweier Kameras videografiert. Darüber hinaus wurde das beobachtete Unterrichtsgeschehen protokolliert. Die Video- und Audioaufzeichnungen wurden anschließend transkribiert.

Unter Heranziehung von Literaturbefunden und Nutzung der empirisch gewonnenen Daten haben wir im Wechselspiel zwischen kategoriengeleitetem und kategorienentwickelndem Vorgehen ein System herausgearbeitet, das uns Verläufe und wichtige Komponenten unterrichtlichen Problemlösens erfassen lässt. Zur (Verlaufs-)Beschreibung und Charakterisierung von Problemlöseunterricht haben wir drei Aspekte als wesentlich angesehen, auf die sich unser Kategoriensystem gründet: die *Problemlösephasen*, durch die sich das inhaltsbezogene Lösungsgeschehen in zeitliche Abschnitte (Phasen) strukturieren lässt; die *Sozialformen*, unter denen diese Phasen vollzogen werden und die *Art und das Ausmaß der Lehrerinitiative*, also das Ausmaß der Lehrersteuerung in den einzelnen Phasen. Der erste Aspekt, der das inhaltsspezifische Moment kennzeichnet, wird im Sinne einer Modellvorstellung von den anderen Aspekten teilweise überdeckt.

Wir haben erkannt, dass sich alle unterrichtlichen Problemlöseverläufe in drei zeitlich aufeinanderfolgende und inhaltlich miteinander verbundene Problemlösephasen einteilen lassen, die wir (I) *Präsentation und Verstehen des Problems*, (II) *Suchen und Finden der Lösung(en)* und (III) *Präsentation und Auseinandersetzung mit dem / den Lösungsvorgehen und der / den Lösung(en)* nennen. In diesen Phasen können verschiedene (lehrerseitig inszenierte) Maßnahmen zum Tragen kommen. Sie sind mögliche Inhalte, Erscheinungsformen oder Ausprägungen der Phasen. Die von uns vorgenommene Erfassung und Beschreibung solcher Maßnahmen charakterisiert die Phasen (I) bis (III) näher.

Zugleich haben wir jeder Maßnahme die Sozialform(en) zugeordnet, unter der sie im Unterricht realisiert wurde. Als Sozialformen haben wir *Plenumsarbeit*, *Gruppenarbeit*, *Partnerarbeit* und *Einzelarbeit* verwendet. Darüber hinaus wurde jede Maßnahme im Hinblick auf die Art und das Ausmaß der Lehrerinitiative charakterisiert. Dabei haben wir mit den Begriffen *Vortrag haltend*, *Anleitung erteilend*, *Impulse gebend* und *Beiträge aufnehmend* gearbeitet. In der genannten Reihenfolge ist die Intensität der Lehrersteuerung abnehmend.

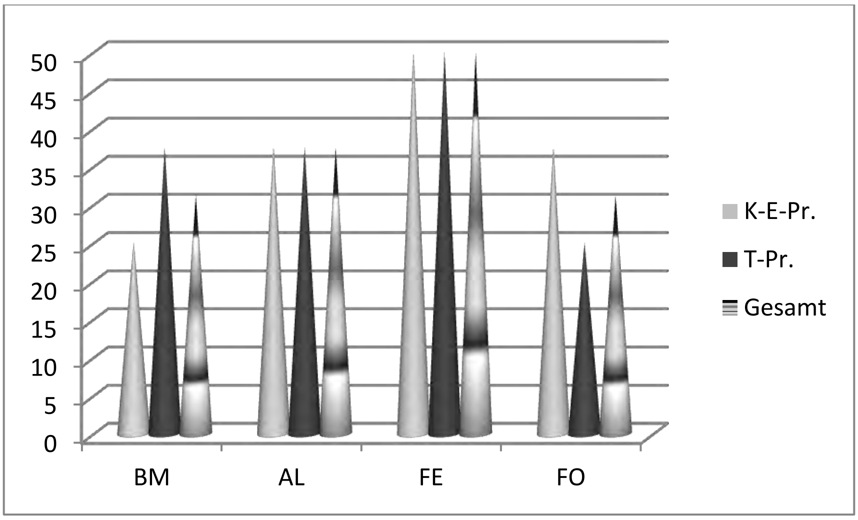
Ausgewählte Befunde zur Phase (III)

Betrachten wir exemplarisch die Auseinandersetzung mit dem / den Lösungsvorgehen und der / den Lösung(en) in Phase (III), also die Reflexionsphase nach Beendigung der Problemlöseaktivitäten. Einer solchen Phase wird in der wissenschaftlichen Literatur (z.B. Polya 1949, Mason / Burton / Stacey 1992) im Hinblick auf das Lernen des Problemlösens ein hoher

Stellenwert zugeordnet. Als mögliche und sinnvolle Maßnahmen in dieser Problemlösephase werden dabei unter anderem genannt:

- Nachbereiten, Thematisieren, *Bewusstmachen* (BM) von verwendeten Lösungsstrategien / Lösungsansätzen
- Auseinandersetzen mit Schwierigkeiten, *Fehlern* (FE), (auch ungeeigneten Lösungsstrategien / Lösungsansätzen)
- Eingehen auf *alternative* Vorgehensweisen, Lösungswege / Lösungsstrategien / Lösungsansätze (AL)
- Fortführung der Arbeit (FO), (ähnliche, weiterführende Arbeitsrichtungen, *Folgeprobleme*)

Wir haben erfasst, welche der Maßnahmen (die im Weiteren aus Platzgründen durch ein Kürzel angeben werden) davon im beobachteten Unterricht in welchem Ausmaß praktiziert wurden. In der Abbildung ist der prozentuale Anteil der Lehrpersonen dargestellt, in deren Unterricht die jeweilige Maßnahme durchgeführt wurde. Es ist zu sehen, dass im Durchschnitt bei einem Drittel bis einem Viertel der beteiligten Lehrpersonen die jeweilige Maßnahme vorkam. Bei der Maßnahme „Fehler“ fällt der Anteil sogar noch etwas höher aus.



Eine nähere Analyse der thematisierten Fehler und Schwierigkeiten macht jedoch deutlich, dass es sich dabei weitgehend um Wissens-, Verstehens- und Fertigkeitsfehler handelte. Ein Eingehen auf strategische Fehler, Schwierigkeiten, Gefahren und Defizite in Phase III war hingegen kaum vorhanden. Sollten diese Befunde im größeren Ausmaß Bestätigung finden, könnte man Potenzial darin sehen, mögliche oder tatsächlich aufgetretene strategische Defizite noch gebührender zu berücksichtigen, da Verlauf und Ergebnis von Problembearbeitungsprozessen vor allem durch die Qualität strategischen Arbeitens bestimmt werden.

Interessant ist auch ein Blick auf das Vorkommen dieser vier Maßnahmen (x) in den einzelnen Unterrichtsstunden (Lehrpersonen 1-8: Kühe-Enten-Problem, Lehrpersonen 9-16: Teufelsproblem)

Lehrp.	BM	AL	FE	FO
1				x
2		x	x	
3	x		x	x
4			x	
5				
6		x	x	x
7	x	x		
8				

Lehrp.	BM	AL	FE	FO
9				x
10	x		x	
11		x	x	
12		x	x	
13				
14	x		x	
15				
16	x	x		x

Die Belegung der Tabellenzellen regt zur Bildung von Mustern bzw. Profilen an. Beispielsweise ist hinsichtlich der Thematisierung von Vorgehensweisen (BM, AL) und / oder der anderen Maßnahmen (FE, FO) zu erkennen, dass es im Unterricht von vier Lehrpersonen zu keiner solchen Auseinandersetzung kam (LP 5,8,13,15), dass es in einer Stunde „nur" um Vorgehensweisen ging (LP 7), in anderen Stunden hingegen „nur" um die andere Maßnahmengruppe (LP 1,4,9) und in den restlichen Stunden sogar um beide. Basierend auf unser erhobenes Datenmaterial gibt es erste Hinweise auf mögliche Zusammenhänge zwischen diesen (und auch anderen) Verhaltensmustern und der mathematischen / mathematikdidaktischen Ausbildung der Lehrpersonen, ihrer Unterrichtserfahrung und ihren intendierten Zielen zur Behandlung des Problems.

Ein Blick auf die Sozialformen beim Durchführen der Maßnahmen BW, AL und FE lässt uns noch wissen, dass in allen Fällen im Plenum gearbeitet wurde. Herausheben möchten wir abschließend noch, dass im Rahmen von AL und FE sehr schülerzentriert agiert wurde. Die Lehrpersonen haben sich dabei deutlich an Schülermeinungen und -beiträgen orientiert.

Literatur

Mason, J. / Burton, L. / Stacey, K. (1992): Hexeneinmaleins – kreativ mathematisch denken. 3. Auflage. München: Oldenbourg.

Pawlitzki, A. (2011): Empirische Erkundungen zur Behandlung des „Teufelsproblems" im Mathematikunterricht der Grundschule. Masterarbeit, TU Braunschweig.

Pólya, G. (1949): Schule des Denkens. Bern: Francke.

Schuck, L.-D. (2011): Empirische Erkundungen zur Behandlung des „Enten-Kühe-Problems" im Mathematikunterricht der Grundschule. Masterarbeit, TU Braunschweig.

Johanna HEITZER, RWTH Aachen

Infinitesimalrechnung nach Lazare Carnot im heutigen Analysisunterricht?

Lazare Carnot, Vater von Sadi und Kriegsminister unter Napoleon, schrieb Ende des 18. Jahrhunderts seine *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung*. Darin akzeptiert er eine unvollkommene Form der Gleichheit, um zu einem unfallfreien Umgang mit „dem Unendlichen und dem Nichts in der Mitte“ zu gelangen. Hier soll an einem enaktiv, ikonisch und dann auch symbolisch erfahrbaren Beispiel der Frage nachgegangen werden, ob Carnots Herangehensweise eine Hilfe für die schulische Differentialrechnung „auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs“ (KMK Bildungsstandards Mathematik SekII, 2012, S.22) bieten kann.

1. Einstieg in die Theorie der Änderungsraten

Pustet man einen Luftballon auf, so wird man diesem pro Atemzug etwa die gleiche Volumenzufuhr ΔV erteilen. Der Radius des Luftballons wird dann von Zug zu Zug nicht linear, sondern (von der Elastizitätsänderung der Ballonhaut und der damit abnehmenden Luftkompression abgesehen) nur mit der dritten Wurzel des Volumens wachsen. In welcher Weise müsste man die Luftportionen vergrößern, damit der Radius linear wüchse?

Oder stetiger: Als die Erde noch eine Scheibe mit Käseglockenhaube war, hatte Gott es leicht mit der Sintflut. Für einen gleichförmig steigenden Wasserspiegel brauchte er es auch nur gleichförmig regnen zu lassen. Jetzt, wo die Erde eine Kugel ist, hätte er es schwerer: Mit steigendem Wasserspiegel wüchsen der Radius und damit (quadratisch) die Oberfläche der Kugel. Um trotzdem gleichförmig steigenden Wasserspiegel zu erreichen, müsste er es immer heftiger regnen lassen. Nach welcher Gesetzmäßigkeit?

2. Heutige und gestrige Lehrplanvorgaben

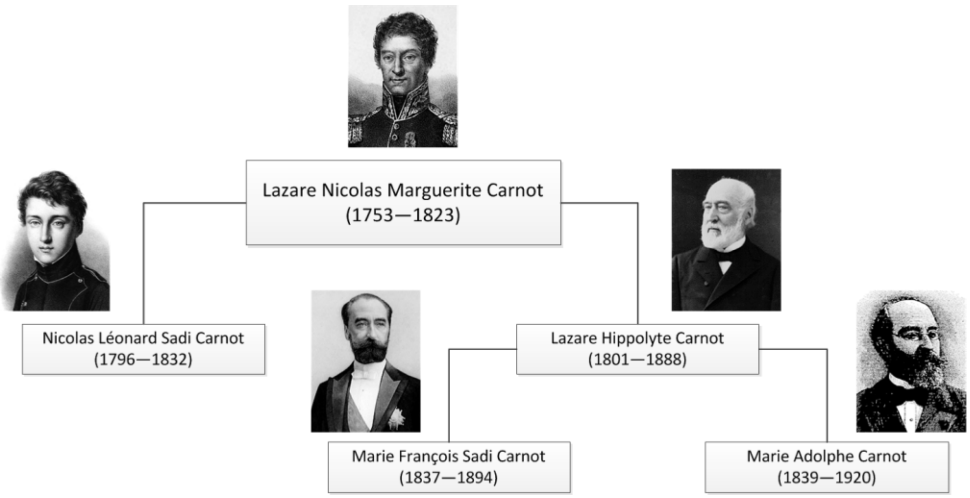
In den KMK Bildungsstandards (s.o.) steht: „Die Schülerinnen und Schüler können Grenzwerte auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen.“ Da lange vor Cauchys exakter Fassung des Grenzwertbegriffs erfolgreich differenziert und integriert wurde, kann man das historisch konsequent nennen. Bezüglich des Unterrichts ist die Entscheidung auf dem Hintergrund einer etwa 200 Jahre alten, wechselreichen Geschichte zu sehen.

Das Für und Wider einer Infinitesimalrechnung in der Schule wurde um 1900 mit Argumenten diskutiert, die bis heute Gültigkeit haben (vgl.

Zeimetz 2009). Eine der Sorgen war, die Lehre verkäme mangels echter Durchdringbarkeit zu einer reinen Kalkülvermittlung. Tatsächlich erfolgte die Darstellung in Schulbüchern ab 1925 (nach Krüger 2012) entweder sorgsam auf geometrische Anschauung gestützt mit viel „graphischem Differenzieren" oder kalkülhaft in Form von Regeln zum „unfallfreien" Umgang mit Differentialen. Dazwischen muss man sich bis heute ebenso entscheiden, wie zwischen Tangentensteigungen (speziell aber vertraut) und Änderungsraten (allgemeiner anwendbar, aber reichlich neu) als Zugang.

Ich persönlich messe dem Kalkülhaften durchaus einen didaktischen Wert bei und befürworte Änderungsraten. Allerdings nur, sofern – gar nicht einfach – deren jeweilige konkrete Bedeutung tatsächlich durchdrungen wird.

3. Ein interessantes Stück Wissenschaftsgeschichte



Etwa mittig zwischen der Begründung der Infinitesimalrechnung und den heutigen Lehrplanvorgaben lebte ein erwähnenswerter Teil der französischen Familie Carnot. Die Carnots waren ebenso einflussreich wie begabt und zumeist sowohl politisch als auch natur- bzw. ingenieurswissenschaftlich interessiert. Nach Marie Adolphe ist ein Mineral benannt (Carnotit), Marie Francois war französicher Staatspräsident (bis er von einem Anarchisten erstochen wurde), ihr gemeinsamer Onkel Sadi Nicolas gilt als Begründer der Thermodynamik. Er fand (vor seinem frühen Choleratod) den Wirkungsgrad der idealen Wärmekraftmaschine, was einen souveränen Umgang mit den Veränderunsbeziehungen diverser kovarianter Größen erfordert. Sadi hatte an der von seinem Vater Lazare mitbegründeten Ècole Polytechnique u.a. bei Poisson und Ampère studiert.

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823) war Militärstratege und Kriegsminister unter Napoleon. Um die Jahrhundertwende wandte er sich verstärkt der Mathematik zu; lange Zeit sprach man z.B. vom „Kosinussatz von Carnot“ (*Geometrie der Lage*, 1803). Grundlage dieses Beitrags ist sein o.g. Beitrag zur Infinitesimalrechnung, in dem er auf didaktisch interessante Weise zum Umgang mit Leibniz‘ und Newtons Kalkül anleitet.

4. Infinitesimalrechnung nach Lazare Carnot …

Carnots Theorie lautet in sehr groben Zügen: Zur Lösung mathematisch erfasster Probleme führe man neben „vom Ausdruck der Aufgabe selbst gegebenen“ **Hauptgrößen** so genannte **Hilfsgrößen** ein, die den Vergleich der Hauptgrößen erleichtern und Grenzen haben, „von denen sie sich nur um unendlich kleine Größen unterscheiden“. Man erhält dann „**unvollkommene Gleichungen**“, auf deren Seiten zwar nicht exakt, aber „**im letztem Verhältnis**“ gleiche Ausdrücke stehen. Im letzten Verhältnis gleich (Schreibweise hier: $\stackrel{\text{ilV}}{=}$) sind Ausdrücke, deren Quotient „der Einheit beliebig nahe kommt“. Dann gelten folgende Sätze:

Eine unvollkommene Gleichung wird durch Ergänzen/Abziehen einer unendlich kleinen Größe entweder richtig oder bleibt unvollkommen (wird aber nicht falsch). Gleichungen, die nur Hauptgrößen enthalten, können nicht unvollkommen sein (sondern nur richtig oder falsch). Eliminiert man aus einer unvollkommenen Gleichung durch Ergänzen/Abziehen unendlich kleiner Größen alle Hilfsgrößen, so ist die resultierende Gleichung richtig.

5. … am Beispiel der Volumenänderungsrate

Hauptgrößen im Ballon-Sintflut-Beispiel sind: der Kugelradius r, das Kugelvolumen V und die vom aktuellen Kugelradius abhängige Änderungsrate V' der Volumenzufuhr, die zu linearer Radiusänderung führt. Da das Krumme schon unverändert schwer zu begreifen ist, gehen wir vor der Veränderungsbetrachtung zu Eckigem über: einem Würfel mit Kantenlänge x, V und V' wie gehabt. Als Hilfsgrößen führen wir eine um beliebig wenig vergrößerte Kantenlänge $\tilde{x}$ und das zugehörige Volumen $\tilde{V}$ ein. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{V} - V = \tilde{x}^3 - x^3 &= [x + (\tilde{x} - x)]^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x) + 3x \cdot (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{x} - x)^3 - x^3 \\ &= 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x) + 3x \cdot (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{x} - x)^3\end{aligned}$$

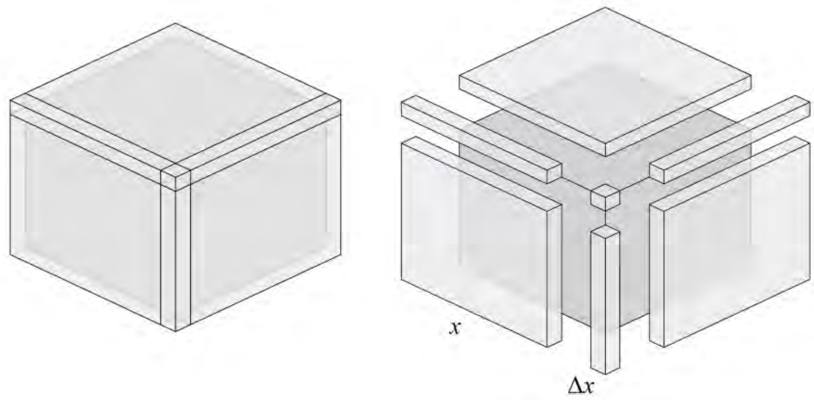
und damit $\tilde{V} - V \stackrel{\text{ilV}}{=} 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x)$, ergo $V' \stackrel{\text{ilV}}{=} \frac{\tilde{V} - V}{\tilde{x} - x} \stackrel{\text{ilV}}{=} 3x^2$.

Im vorletzten Schritt wurden (Näherung!) die Potenzen des beliebig Kleinen weggelassen, weshalb nur noch Gleichheit im letzten Verhältnis vorliegt. Dann aber gelingt durch zweierlei ilV-Gleichheit die Elimination der Hilfsgrößen und $V' = 3x^2$ gilt exakt. In etwas vertrauterer Schreibweise:

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3$$
$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

und damit $\Delta V \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2 \Delta x$, ergo $V' \overset{\text{ilV}}{=} \frac{\Delta V}{\Delta x} \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2$.

Das wiederum kann man kann man anhand folgender Würfelzerlegung begreifen: Ist Δx relativ zu x hinreichend klein, kann man die „Stäbchen“ und den „Würfelwinzling“ vergessen. Die Volumenänderung entspricht allein den drei quadratischen „Scheiben“, folglich gilt $\Delta V = 3x^2\,\Delta x$.



6. Fazit in Bezug auf den heutigen Analysisunterricht

Natürlich ist besonders Carnots erster Satz über unvollkommene Gleichungen ausgesprochen windig. Aber ist er windiger als das, was Lernenden heute als „h-Methode“ begegnet? Immerhin weist Carnots Sprache einen Weg, sich (in von Neumanns Sinn) an die Dinge zu gewöhnen, die man nicht restlos versteht. Sie bringt zugleich eine pragmatische Anwenderhaltung und ein Staunen über das Wunder der Analysis zum Ausdruck: „Dass und wie es funktioniert ist wichtig, nicht warum. Aber kontrolliertes Pfuschen führt zu exakten Ergebnissen!“

Literatur

Carnot, L.N.M. (1800): Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung, übersetzt von I.K.F. Hauff. Frankfurt am Main: Jägersche Buchhandlung.

Hochstrat, L. (2012): Die Familie Carnot und ihre Beiträge zur Mathematik. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung. RWTH Aachen.

Jahnke, H.N. (1990): Die algebraische Analysis im Mathematikunterricht des 19. Jahrhunderts. In: Der Mathematikunterricht 36(3), 61-74.

Krüger, K. (2012): 100 Jahre Analysisunterricht am Gymnasium – ein Rückblick auf die Meraner Reform. Saarbrücken: Vortrag auf der DMV-Tagung.

Zeimetz, A. (2009): Als die Differential- und Integralrechnung verboten wurde. Soest: Vortrag auf der Herbsttagung des Arbeitskreises MU&I der GDM.

André HENNING, Andrea HOFFKAMP, Berlin

Aufbau von Vorstellungen zum Grenzwert im Analysisunterricht

Derzeit gibt es in der fachdidaktischen Landschaft viele Bestrebungen dem Analysisunterricht einerseits durch qualitativ-inhaltliche Zugänge (z.B. Hoffkamp 2011) und andererseits durch erhöhten Anwendungs- bzw. Realitätsbezug (z.B. Weitendorf 2007) mehr Sinngehalt zu geben. Letztlich sind aber die sehr abstrakten Begriffe wie Grenzwert und Konvergenz die zentralen Ideen der Analysis. Diese bleiben den Schülerinnen und Schülern doch fast immer ein Mysterium. Freudenthal (1973, S. 470) fordert in diesem Zusammenhang, Begriffe wie „offene Menge, ein Limes, ein Differentialquotient und ein Integral“ geometrisch und numerisch erlebbar zu machen, ohne sie „in eine über jeden Einwand erhabene Definition“ zu fassen. In der fachdidaktischen Literatur gibt es mannigfache Vorschläge für Lernumgebungen, die Erfahrungen im Sinne Freudenthals ermöglichen (z.B. Tall 1996, Beutelspacher & Weigand 2002). In diesem Artikel werden jedoch erste Indizien für ein praxisrelevantes Gesamtkonzept erörtert und reflektiert.

1. Der Grenzwertbegriff und *cognitive roots*

Im Berlin-Brandenburgischen Rahmenlehrplan (2006) wird einerseits die Behandlung eines inhaltlich-anschaulichen Grenzwertbegriffs gefordert und andererseits soll die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten eingeführt werden, wobei der Grenzwertbegriff „propädeutisch“ zu verwenden sei.

Studien zu Schülervorstellungen zum Grenzwert zeigen, dass es bei diesem Begriff eine Reihe an Fehlkonzepten gibt (einen Überblick bietet Marx 2013). Diese resultieren daraus, dass eine intuitive Annäherung an den abstrakten Begriff oft irreführend ist (man denke an die alltagssprachlichen Konnotationen der Begriffe „Grenzwert“ oder „streben nach“) und dass die Erfahrungen mit unendlichen Prozessen in der Schule nicht vielfältig genug sind, um ein reichhaltiges Bild des Begriffes auszubilden.

Aus didaktischer Perspektive sollten Zugänge mit einer dualen Natur ermöglicht werden, mit denen einerseits auf vertraute Konzepte aufgebaut und andererseits eine Grundlage zu höherem mathematischen Denken geschaffen wird. Konzepte, die solche Zugänge erlauben, nennt Tall (1992) *cognitive roots*. Sie sind nicht als mathematische Grundlegung zur logisch deduktiven Weiterentwicklung, sondern im Sinne einer Lehrgangsentwicklung zu verstehen. Zur Beschreibung von *cognitive roots* sind neben stoffdidaktischen Analysen auch empirische Einsichten nötig.

2. Der analytische Schritt – Grenzwerte und Realität

Der analytische Schritt ist die theoretische und kognitive Hürde in Klasse 11. Während Schülerinnen und Schüler relativ leicht durchschnittliche Änderungsraten sowohl berechnen, als auch geometrisch als Sekantensteigungen und inhaltlich als Durchschnittsgeschwindigkeiten interpretieren können, sind sie oft schwer von der Existenz einer momentanen Änderungsrate bzw. einer Momentangeschwindigkeit zu überzeugen („Die kann es nicht geben, das muss immer ungenau sein“). Trotz vieler Erfahrungen beim Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten, tauchte im Grundkurs der Autorin das analoge Problem wieder bei der analytischen Definition des Integrals auf. Die Benutzung eines Geogebra-Applets[1], bei dem man für eine quadratische Funktion im Intervall [0,10] die Anzahl der Rechtecke zur Errechnung der Ober- und Untersummen, sowie den Wert dieser Summen und deren Differenz verändern konnte, führte geradezu zur Festigung der Überzeugung, dass man auf diese Art den Flächeninhalt niemals genau errechnen könne: „Man kann im Applet nicht bis unendlich, das Applet kann das nicht.“ „Im Unendlichen ist da doch immer nur ein Punkt.“ (Anm.: Deswegen die Folgerung die Rechtecke hätten „keine“ Breite und somit „keinen“ Flächeninhalt.) Die Probleme der Lernenden spiegeln sich in der Geschichte in einem Ringen um die Rolle der „Unendlichkeit“ in der Mathematik wider und sind durchaus erwartungsgemäß. So schreibt Hilbert (1926, S. 190):

„[..] das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig [..] [Wir gelangen zu der Überzeugung], daß als Vorbedingung für die Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis gewisse anschauliche Vorstellungen und Einsichten unentbehrlich sind [..] Die Rolle, die dem Unendlichen bleibt, ist vielmehr lediglich die einer Idee – einer Idee überdies, der wir unbedenklich vertrauen dürfen in dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat.“

3. Zwei Lernumgebungen

Wir plädieren dafür, dass schon in der Schule Grundideen der Mathematik explizit gemacht werden. So können der Hilbert-Text bzw. Originaltexte von Leibniz oder Newton in Lernumgebungen genutzt werden, um sich der Geschichtlichkeit mathematischer Theorien bewusst zu werden. Aufgaben-

[1] http://www.geogebratube.org/material/show/id/10948

stellungen, die dies ermöglichen, fragen nach Zusammenhängen zwischen den Texten und beispielsweise dem Verfahren zur Berechnung von Flächeninhalten mittels Ober- und Untersummen und - darüber hinaus - nach der Bewertung der Idee dieses Verfahrens auf Brauchbarkeit zur Erreichung der Ziele. Dadurch gibt man den Weg frei zur Diskussion der mathematischen Mittel und zur Erkenntnis, dass das Bilden des Grenzwerts ein *Gedankenexperiment* ist, bei dem man überprüfen muss, ob die Ergebnisse sinnvoll sind. Erst dadurch werden formale Zugänge motiviert, denn Begriffe wie Grenzwert und Konvergenz sind nur „formal erlebbar". Mit anderen Worten: Anstatt die mathematischen Mittel und Methoden nur „nachzulernen", werden sie selbst zur Diskussion gestellt, und dadurch das „Mysterium Grenzwert" auf dem Weg zu reflektiertem und aufgeklärtem Mathematiklernen explizit thematisiert.

Eine weitere Lernumgebung greift die Möglichkeiten der Nutzung DGS-basierter Applets nochmals auf. Eine von den Autoren entwickelte und in einer ersten interpretativen Videostudie überprüfte Lernumgebung im Zusammenhang mit dem Übergang zur Ableitungsfunktion als Objekt soll zwei Dinge ermöglichen: 1. die Hervorhebung der Errungenschaft des analytischen Schritts, durch den erst Rückschlüsse auf Eigenschaften der Funktion gezogen werden können. 2. die Erfahrung vielfältigerer Grenzprozesse durch zusätzliche Betrachtung des symmetrischen Differenzenquotienten (ausführlich in Hoffkamp & Henning 2013, Lernumgebung inkl. Unterrichtsmaterialien online[2]). Bei der Arbeit mit der Lernumgebung ergaben sich zahlreiche Lerngelegenheiten. Z.B. antworteten die meisten Lernenden auf die Frage, was ein positiver/negativer Differenzenquotient für die Funktion bedeuten, etwa: „Positiv, wenn der Graph von f ansteigt." Letztlich zeigte sich auch hier, dass der analytische Schritt eine Denkhürde markiert, denn die Steigung der Sekante kann nicht das Verhalten der Funktion erklären. Diese Situation wurde im Unterricht zu einer informellen Formulierung des Mittelwertsatzes genutzt. Die zusätzliche Betrachtung des symmetrischen Differenzenquotienten zeigte, dass es verschiedene Grenzprozesse mit demselben Grenzwert geben kann. Fragen der Konvergenzgeschwindigkeit, Brauchbarkeit und geometrischer bzw. rechnerischer Nachvollziehbarkeit können informell und formal aufgegriffen werden und öffnen so im Sinne einer *cognitive root* weitere Begriffsentwicklungen.

4. Fazit und Ausblick

Trotz einiger Nachteile (Tall 1992, Marx 2013) scheint uns die „historische" *cognitive root* eines intuitiven Grenzwertbegriffs, der wie Cauchy die

[2] http://www2.math.hu-berlin.de/~hoffkamp/Material/ableitungsfunktion.html

Idee der sukzessiven Änderung betont, geeignet (Weigand 1993). Dieser sollte aber mit reichhaltigen und sorgfältig ausgewählten Erfahrungen, der expliziten Thematisierung und Reflexion der Rolle der Unendlichkeit und dem Herausstellen der Errungenschaft des analytischen Schritts gepaart sein. Zur Beschreibung weiterer *cognitive roots* (bzgl. Konvergenz, reeller Zahlen oder naiver Logik und Quantifizierungen u.a.) sollten stoffdidaktische Analysen wie die von Blum & Kirsch (1979) wieder herangezogen und in heutiger Zeit und unter Berücksichtigung neuer technologischer Möglichkeiten ergänzt und adaptiert werden. Dabei sollten vielfältige Aspekte wie historisch-kulturelle, philosophische, technologische, anwendungsbezogene, gesellschaftliche u.a. berücksichtigt werden, um weitere Lernumgebungen zu entwerfen und zu überprüfen. Angesichts schon existierender mannigfacher Lernumgebungen ist es darüber hinaus vonnöten, diese nach Kriterien wie Abstraktionsgrad, Kompetenzstufen bzw. Theoriebildung versus Anwendungsbezogenheit zu sortieren. Letztlich wäre es das Ziel, einen Gesamtlehrgang der Analysis zu entwickeln, der in seinem stufigen Aufbau sinnstiftend ist und die genannten Aspekte zu einem kohärenten Ganzen vereint.

Literatur

Beutelspacher, A., Weigand, H.G. (Hrsg.) (2002): Unendlich, mathematik lehren, 112.

Blum, W., Kirsch, A. (1979): Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis IV. Der Mathematikunterricht, 25(3).

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe 2. Stuttgart: Klett.

Henning, A., Hoffkamp, A. (2013): Developing an intuitive concept of limit when approaching the derivative function. Angenommen bei CERME 8, Antalya.

Hilbert, D. (1926): Über das Unendliche. Mathematische Annalen, 95, 161-190.

Hoffkamp, A. (2011): Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse. Dissertation, Technische Universität Berlin.

Jugend und Sport Berlin Senatsverwaltung für Bildung (Ed.) (2006). Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik. Oktoberdruck AG, Berlin.

Marx, A. (2013): Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen – Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. JMD, 34, 73-97.

Tall, D. (1992): The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D.A. Grows (Hrsg.): Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 495-511.

Tall, D. (1996): Functions and calculus. In A. Bishop et al. (Hrsg.): International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 289-325.

Weigand, H.G. (1993): Zur Didaktik des Folgenbegriffs. BI Wissenschaftsverlag.

Weitendorf, J. (2007): Realitätsbezüge im Analysisunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Esther HENSCHEN, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Qualitative Analyse von Spielsituationen in der „Bauecke“

Spielsituationen in der Bauecke können beobachtet, jedoch Details dessen, was Kinder tun und sagen, nicht in Echtzeit erfasst werden. Die Analyse von Videoaufzeichnungen scheint daher ein geeigneter Weg zu sein. Eine erste Beschäftigung mit bereits erhobenen Videodaten zeigt, dass eine Beschreibung des mathematischen Gehalts der Situationen möglich und lohnenswert ist. An Beispielen soll diskutiert werden, wie dabei mit der Schwierigkeit, die sich aus Dauer, Vielschichtigkeit und Gleichzeitigkeit der Ereignisse beim Spielen ergibt, umgegangen werden kann.

1. Forschungsanliegen

Sowohl in Bildungsplänen für den Vorschulbereich (z.B. Orientierungsplan für Baden-Württemberg) sowie in Praxishandreichungen (z.B. „Jederzeit Mathezeit“) als auch in diversen Studien (z.B. Gasteiger 2012) wird die Bedeutung des Alltags für mathematisches Lernen von Kindergartenkindern hervorgehoben. Meistens wird in diesem Zusammenhang die Rolle der Fachkraft in den Blick genommen, der Alltag bzw. das Spiel der Kinder ist bisher kaum Gegenstand von Untersuchungen gewesen. Anhand einer qualitativen Analyse von Spielsituationen in der Bauecke soll dazu ein Beitrag geleistet werden.

Dabei stehen folgende Forschungsfragen im Fokus:

- Wie kann der mathematische Gehalt von Spielsituationen in der Bauecke beschrieben werden?
- Welche mathematischen Lernchancen lassen sich durch eine Analyse von Spielsituationen in der Bauecke aufdecken?
- Welche Schlussfolgerungen können daraus über gute Bedingungen für mathematisches Lernen im Rahmen von Spielsituationen (in der „Bauecke“) abgeleitet werden?

Im vorliegenden Text geht es neben der Darstellung von geeigneten Beschreibungsdimensionen vorrangig um die Frage, wie Videos vom Spiel in der Bauecke für eine Analyse im Hinblick auf das Forschungsanliegen genutzt werden können.

2. Beschreibungsdimensionen

Für den Mathematikunterricht bieten die Bildungsstandards mit den Leitideen und den allgemeinen mathematischen Kompetenzen ein Repertoire an Begrifflichkeiten, die für die Beschreibung von Inhalten und Zielen schulischen Mathematiklernens passend sind. Es stellt sich zunächst die Frage, ob diese Leitideen auch geeignet sind, um mathematisches Lernen im Kindergarten zu beschreiben. Die Verwendung von ganz ähnlichen Begriffen in den NCTM-Standards, die in der USA durchgängig vom Vorschulbereich bis zum Schulabschluss herangezogen werden, legt die Verwendung der Leitideen zur Beschreibung mathematischer Inhalte für den Kindergarten nahe. In Veröffentlichungen für und über den Kindergarten werden im Themenfeld Mathematik die Leitideen zur Beschreibung mathematischer Inhalte zumindest teilweise genutzt (vgl. Bönig 2010, Gasteiger 2012, Rathgeb-Schnierer 2012).

In Bezug auf die Beschreibung des mathematischen Gehalts von Spielsituationen in der Bauecke hat sich gezeigt, dass die Verwendung der fünf Inhaltsbereiche „Zahlen und Operationen“, „Raum und Form“, „Muster und Strukturen“, „Messen und Größen“ sowie „Datenanalyse und Wahrscheinlichkeit“ gut geeignet ist.

Genau wie für die Schule muss auch für den Vorschulbereich davon ausgegangen werden, dass neben den mathematischen Inhalten die Art und Weise der mathematischen Auseinandersetzung entscheidend für das Mathematiklernen ist (vgl. KMK 2004). Anders als bei den Leitideen ist eine Anwendung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen auf den Vorschulbereich aber kaum möglich. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind in besonderem Maße auf eine Auseinandersetzung mit Hilfe der formalen Sprache der Mathematik bezogen, wohingegen mathematische Erfahrungen im Kindergarten fast immer einen informellen Charakter aufweisen (vgl. Henschen 2012). Da es auch sonst keine einheitliche Liste mathematischer Arbeitsweisen gibt, die bisher im Kindergarten beobachtet wurden oder zu denen Kinder angeregt werden können, soll eine Analyse der Spielsituationen zeigen, welche Arbeitsweisen sich zumindest im Spiel in der „Bauecke“ beschreiben lassen. Dabei ist auch zu klären, ob die Verwendung der Begriffe Erkunden, Anwenden und Verdeutlichen sinnvoll ist, so wie eine erste Auseinandersetzung mit den vorliegenden Videoaufzeichnungen nahegelegt hat.

3. Aufbereitung und Analyse der Videodaten

Über die Beschreibung von mathematischen Arbeitsweisen hinaus ist auch für die Beantwortung der Frage, welche mathematischen Lernchancen sich in Spielsituationen in der Bauecke aufdecken lassen, eine systematische Analyse der vorliegenden Videodaten notwendig. Wohl jeder, der Unterrichtsforschung mit Videos betreibt, kennt die spezifische Problematik solcher Vorhaben. Verknüpft mit den besonderen Bedingungen von Spielsituationen im Kindergarten ist die folgende Feststellung besonders einleuchtend: „Denn die Dokumentation all dessen, was im gewählten Kameraausschnitt visuell und auditiv wahrnehmbar ist, erzeugt eine überkomplexe Fülle an Daten über Ereignisse und Zustände im beobachteten Geschehen. Um anhand dieser Daten etwas beobachten zu können, muss aus ihnen zwingend eine Auswahl getroffen werden.“ (Dinkelaker 2010, S. 92).

Wie gelangt man nun aber zu einer Auswahl aus dem Material? (In dem hier beschriebenen Projekt liegen 30 Videodateien mit einer Länge zwischen 5 und 55 Minuten vor.) Dabei geht es zum einen um die Auswahl von zur Beantwortung der Forschungsfragen geeigneten Szenen oder Sequenzen aus den Videos, zum anderen um die Auswahl dessen, was innerhalb einer Szene dargestellt oder transkribiert und dadurch für eine fundierte Analyse zugänglich gemacht werden soll.

Um eine begründete Auswahl für eine Szene treffen zu können, bedarf es zunächst eines Überblicks über das ganze Datenmaterial oder zumindest über ein ganzes Video. Die Segmentierungsanalyse könnte einen solchen Überblick über ein Video ermöglichen (Vgl. Dinkelaker u. Herrle, 2009). Die videografierten Spielsituationen, in denen es anders als bei Unterrichtssituationen keinen gemeinsamen Rahmen und keine „Lehrperson“ gibt, die diesen Rahmen durchsetzt, lassen eine klare Unterteilung in Segmente allerdings kaum zu. Oft findet ein paralleles Spiel von mehreren Kindern statt, das einen ganz eigenen, nicht leicht nachvollziehbaren Rhythmus aufweist. Eine Segmentierung dürfte hier kaum für alle im Kamerafokus spielenden Kinder gemeinsam möglich sein, sondern nur in der Betrachtung einzelner oder – längere Zeit – zusammen spielender Kinder. Der Aufwand einer Segmentierungsanalyse für jedes einzelne Kind ist nur dann gerechtfertigt, wenn so auch die im Hinblick auf die Analyse interessanten Szenen gefunden werden könnten.

Wurde eine Szene ausgewählt, müssen die Daten in einer für das Forschungsanliegen geeigneten Art und Weise dargestellt werden. Da sowohl die während des Spiels stattfindenden Gespräche als auch die Handlungen im Verlauf einer Szene von den Kindern immer wieder neu erfunden werden und auf den ersten Blick ganz unterschiedliche Spielhandlungen gleichzeitig stattfinden, bietet die Darstellung in einer Partitur (vgl. Moritz, 2010) eine Möglichkeit, dieser Spezifik des freien Spiels bei der Datenaufbereitung gerecht zu werden. Dabei können entlang einer Zeitskala in beliebig vielen Zeilen unterschiedliche Aspekte des Beobachtbaren dargestellt werden. Für die Daten in unserem Projekt ist eine Unterteilung in Zeilen für Gesprochenes und Zeilen, in denen die Spielhandlungen der Kinder beschrieben werden, sinnvoll. Auch eine Zeile, in der Veränderungen im

Gruppengeschehen erfasst werden, ist denkbar. Diese Form der Datendarstellung ist an keine Methode der Datenauswertung gebunden, für die Beschreibung von Arbeitsweisen könnten im Sinne eines kategorienentwickelnden Verfahrens darin aber Zeilen für eine Zusammenfassung (Qualitative Inhaltsanalyse) oder für das offene Kodieren (Grounded Theory) vorgesehen werden.

Damit sind zunächst Möglichkeiten, einschließlich der Schwierigkeiten, für die Aufbereitung von Videodaten mit Spielhandlungen von Kindern dargestellt worden, die einer Erprobung und weiteren Diskussion bedürfen.

Literatur

Bönig, Dagmar (Hg.) (2010): Mathematik, Naturwissenschaft & Technik. [mit Kindern Mathematik entdecken ; frühe Zugänge zu Naturwissenschaften und Technik öffnen ; mit Projekten für unter Dreijährige und den Übergang ; mit vielen Beispielen aus der Praxis]. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bostelmann, Antje (2009): Jederzeit Mathezeit! Das Praxisbuch zur mathematischen Frühförderung in der Kita. Mülheim an der Ruhr: Verl. an der Ruhr.

Dinkelaker, Jörg (2010): Simultane Sequentialität. Zur Verschränkung von Aktivitätssträngen in Lehr-Lernveranstaltungen und zu ihrer Analyse. In: Corsten, Michael (Hg.): Videographie praktizieren. Herangehensweisen, Möglichkeiten und Grenzen. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, S. 91–118.

Dinkelaker, Jörg; Herrle, Matthias (2009): Erziehungswissenschaftliche Videographie. Eine Einführung. 1. Aufl. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden (Qualitative Sozialforschung).

Gasteiger, Hedwig (2010): Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Univ., Diss.--München, 2010. Münster: Waxmann (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 3).

Henschen, Esther (2012): Wie viel Mathematik steckt in der "Bauecke". Mathematisches Potenzial von Spielsituationen im Kindergarten. In: Die Grundschulzeitschrift, Jg. 26, H. 258.259, S. 12–13.

(15.10.2004): Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. (Jahrgangsstufe 4). Herausgegeben von Konferenz der Kultusminister (KMK), 15.10.2004. Online verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf, zuletzt geprüft am 03.08.2010.

National Council of Teachers of Mathematics: Principles and standards for school mathematics. 4. print. (2005). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Rathgeb-Schnierer, Elisabeth (2013): Kleine Kinder spielen und lernen mit bunten Perlen. Einblicke in das Potenzial von Perlen für die frühe mathematische Bildung. In: Sprenger, Jasmin; Wagner, Anke; Zimmermann, Marc (Hg.): Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule. Wiesbaden: Springer, S. 37–51.

Wilfried HERGET

Funktionen – immer wieder überraschend!

Die Leitidee *Funktion* ist uns Lehrkräften wohlbekannt; da wird manch eigentlich Erstaunliches schnell *trivial*. Doch das Vertraute wird nicht langweilig, wenn uns das Besondere bewusst bleibt. Für die Schülerinnen und Schüler bieten sich hier immer wieder Überraschungen – wie in (Herget 2013) noch weitergehend ausgeführt.

Verschieben, Stauchen, Strecken

Ein klassisches Unterrichtsthema sind die Zusammenhänge zwischen Veränderungen am Funktionsterm und entsprechenden Veränderungen des Graphen. Bei den *linearen Funktionen* geht es zunächst um das Verschieben in y-Richtung und um die Graphen-Geraden-Steigung. Dass selbst hier Überraschendes passieren kann, greift die folgende Aufgabe auf, die sich auch zu einem späteren Zeitpunkt zum Üben gut eignet (Pinkernell 2009):

> Konrad verschiebt den Graphen zu $y = f(x) = 2 \cdot x$ um 3 Einheiten nach rechts und um 6 Einheiten nach oben.
>
> Überrascht stellt er fest: „Der Graph hat sich überhaupt nicht verändert!“
>
> Er hat Recht! Wie kommt das? Erkläre anhand des Terms.

Spätestens bei den *quadratischen Funktionen* gilt es, nicht nur Verschiebungen in der y-Richtung, sondern auch Verschiebungen in der x-Richtung zu untersuchen. Dabei kommt es zu einer überraschenden Entdeckung:

> Verschiebt man den Graphen zu $y = f(x) = x^2$ z. B. um 3 Einheiten in y-Richtung, dann lautet die neue Funktionsvorschrift $y = f(x) = x^2 + 3$.
>
> Verschiebt man den Graphen zu $y = f(x) = x^2$ aber um 3 Einheiten in x-Richtung, dann lautet die neue Funktionsvorschrift $y = f(x) = (x-3)^2$.
>
> Wieso in dem ersten Fall „+ 3“, aber im zweiten Fall „– 3“?

Die quadratischen Funktionen haben etwas Besonderes: Deren Graphen sind „unverbiegbar“, wenn man zum Funktionsterm irgendeinen linearen Term addiert (Herget/Jahnke/Kroll 2001, S. 98). Wie kommt das?

Die *Exponentialfunktionen* halten noch eine Überraschung für uns bereit, und zwar auch hier gerade dann, wenn man schon glaubt, alles zu wissen (vgl. vom Hofe 2001):

> Bei den Graphen zu $y = f(x) = 2^x$, $y = g(x) = 0{,}1 \cdot 2^x$, $y = h(x) = 0{,}01 \cdot 2^x$ bedeuten die Termveränderungen jeweils eine Stauchung – aber augenscheinlich entstehen die Graphen durch Verschieben in x-Richtung ... Wie lässt sich das erklären?

Wie bei der Parabel-und-Geraden-Addition kann die Auflösung hier über die Umformung der jeweiligen Funktionsterme gelingen, verbunden mit einer bewussten Reflexion zu der *merk-würdigen* Überraschung.

Die umgekehrte Aufgabe: Koordinatensystem gesucht!

Eine *umgekehrte Aufgabe* kann eine attraktive Herausforderung sein, wie die folgende Idee von Hans-Karl Eder zeigt (Herget 2005):

> Auf ein leeres, unliniertes Blatt Papier ist irgendeine Gerade gezeichnet. Die Gerade soll die Gleichung $f(x) = 2x + 3$ besitzen.
>
> Zeichne dazu ein passendes Koordinatensystem!

Diese Aufgabe findet sich auch in (Herget/Strick 2011, S. 47; Reiss/Hammer 2012, S. 71) einschließlich verschiedener Lösungsideen, ebenso entsprechende Aufgaben zu Parabeln; und naheliegenderweise lässt sich dies analog auch für die Exponential- und die Winkelfunktionen nutzen.

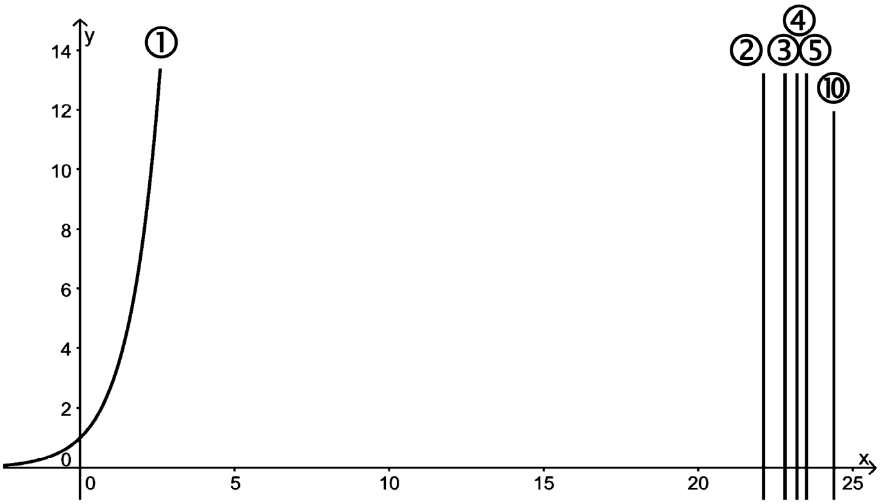
Die überraschende Exponentialfunktion

Exponentielles Wachstum wird bekanntlich unterschätzt. Also ein guter Grund, einmal „bis zum Mond zu falten“ (etwa Beutelspacher/Wagner 2008, Schmitt-Hartmann/Herget 2013)). Es ist – zumindest für Nicht-Mathematiker – unglaublich: Nach nur 42-maligem Falten (zumindest in Gedanken ...) würde der „Papierturm“ bis zum Mond reichen!

Wie dramatisch schnell Exponentialfunktionen wachsen, zeigt die folgende Idee (angeregt durch die „unschlagbar langsam“ wachsende Logarithmusfunktion in Baierlein/Barth/Greifenegger/Krumbacher 1981, S. 129):

> Wir verfolgen den Graphen von $y = \mathrm{e}^x$, der ja im üblichen Koordinatensystem schnell „nach oben verschwindet“, weiter auf seinem Weg. Wir orientieren das Koordinatensystem so, dass die y-Achse genau zum Nordpol weist, skalieren wie üblich (1 Einheit = 1 cm) und lassen nach rechts etwas mehr Platz als sonst – erst einmal bis $x = 25$, das geht noch gut im A4-Querformat. Angenommen nun, wir hätten einen (nach oben!) *sehr* langen Papierstreifen, der über den Nordpol weiter zum Südpol und wieder zu uns zurück einmal um die Erde reicht: Wo würde der Graph von $y = \mathrm{e}^x$ diesen Koordinatensystem-Streifen *nach rechts* verlassen? Schätzen Sie!

Tatsächlich würde der Graph von $y = \mathrm{e}^x$ nach dem langen Weg über beide Pole noch deutlich *innerhalb* unseres Streifens wieder „vorbeikommen“! Und wir schicken den Graphen gleich weiter, noch einmal über beide Pole ... usw. Immer dichter liegen die „Spuren“, und erst der Durchgang Nr. 19 liegt jenseits von $x = 25$.



... mit dem Rechner

Dank Grafikrechner und Funktionenplotter ist es möglich, experimentell etwas ausgesprochen Überraschendes zu erforschen:

> Jede (noch so schwach wachsende) Exponentialfunktion mit $y = a^x$ $(a > 1)$ „überholt" schließlich jede (noch so schnell wachsende) Potenzfunktion mit $y = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Auch das *Funktionen-Mikroskop* (Kirsch 1979, 1980) ist heute bequem mit Funktionenplotter zu realisieren – und lässt, durchaus überraschend, erkennen: Vergrößert man die Umgebung eines Graphenpunktes immer mehr, so wird der Graph nicht dicker (wieso eigentlich nicht?), aber mehr und mehr gerade, bis er nicht von einer Geraden zu unterscheiden ist! Dieser Zugang zur Ableitung über die lokale Linearisierung (was natürlich nur für „friedliche" Funktionen funktioniert ...) ergänzt die anderen, üblichen Zugänge.

Zuletzt sei noch auf die Schwächen der Rechner-Pixel-Grafik verwiesen. Dies führt unvermeidbar und doch überraschend dazu, dass bei hinreichend schnell schwingenden Sinus-Graphen diese nicht mehr richtig dargestellt werden können: Auf dem TI-89 z. B. sind (bei geeigneter WINDOW-Wahl) die Graphen von $\sin x$ und von $\sin 475x$ identisch (vgl. Herget/Malitte 2001), es kommt zum sogenannten *Aliasing* (Hischer 2006).

Selbst bei schlichten Funktionen können sowohl die Pixel-Grenzen des Rechners als auch eine (un-)passende Einstellung des Graphen-Fensters zu Überraschungen führen: „Langweiler-Graphen" entstehen (der Graph sieht aus wie bei einer konstanten Funktion), sogar „Leergraphen" (nur das Koordinatensystem ist zu sehen). Solch „faule Funktionen" können Ausgangspunkt für interessante Aufgaben sein (Herget/Malitte 2002, S. 62–64; Herget/Strick 2012, S. 50–51). Dies führt übrigens bis zu grundlegenden Begriffen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit (Herget/Strick 2012, *Faule*

Funktionen & feine Fenster): Wird im Grafikfenster der *x*-Bereich hinreichend klein oder der *y*-Bereich hinreichend groß gewählt, sieht der Graph *jeder* Funktion konstant aus – vorausgesetzt, sie ist nicht zu „sprunghaft“!

Vom Staunen zum Verstehen

Überraschungen bewusst im Unterricht zu nutzen, um Aufmerksamkeit und Interesse zu wecken und nachhaltiges Lernen anzustoßen, dürfte zur pädagogischen Folklore gehören, seit es Lehren und Lernen gibt. Ideen wie die hier vorgestellten sind *produktiv* (im Sinne von Herget/Jahnke/Kroll 2011, S. 5): „Produktiver Mathematikunterricht soll heißen, dass dieser Unterricht etwas hervorbringt: eine forschende Haltung, Auseinandersetzungen, Kenntnisse, Erkenntnisse, Einsichten, Erfahrungen und Gespräche.“

Literatur

Baierlein, M.; Barth, F.; Greifenegger, U.; Krumbacher, G. (1981): Anschauliche Analysis 2. München: Ehrenwirth.

Beutelspacher, A.; Wagner, M. (2008): Wie man durch eine Postkarte steigt ... und andere spannende mathematische Experimente. Freiburg: Herder.

Herget, W. (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung. Erscheint in: Allmendinger, H.; Lengnink, K.; Vohns, A.; Wickel, G. (Hrsg.): Mathematik verständlich unterrichten an Schule und Hochschule. – Springer Spektrum, Berlin.

Herget, W.; Jahnke, T.; Kroll, W. (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen.

Herget, W.; Malitte, E. (2002): Sinus-Schwächen und Rechner-Grenzen. In: Herget, W.; Lehmann, E. (Hrsg.): Exponential- und Winkelfunktionen. Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83/-89/-92 in der Sekundarstufe I. Hannover: Schroedel, S. 57–64.

Herget, W.; Strick, H. K. (2012): Die etwas andere Aufgabe 2 – Mathe mit Pfiff. Seelze: Friedrich.

Hischer, H. (2006): Abtast-Moiré-Phänomene als Aliasing. In: Der Mathematikunterricht 52 (1), S. 18–31.

Kirsch, A. (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht 25 (3), S. 25–41.

Kirsch, A. (1980): Folien zur Analysis, Serie A. Die Steigung einer Funktion. Hannover: Schroedel.

Pinkernell, G. (2009): „Wir müssen das anders machen” – mit CAS funktionales Denken entwickeln. In: Der Mathematikunterricht 55 (4), S. 37–44.

Reiss, K.; Hammer, C. (2012): Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe. Basel: Birkhäuser.

Schmitt-Hartmann, R.; Herget, W. (2013): Papierfalten im Mathematikunterricht. Arbeitsblätter für die Klassen 5 bis 12. Stuttgart: Klett.

vom Hofe, R. (2001): Funktionen erkunden – mit dem Computer. In: mathematik lehren, Heft 105, S. 54–58.

Angela HERRMANN, Essen, Christoph ABLEITINGER, Wien

Was macht eine „gute" Musterlösung aus?

Im durch die *Deutsche Telekom Stiftung* geförderten Projekt *Mathematik besser verstehen* an der Universität Duisburg-Essen entwickelte sich im Laufe des ersten Projektjahres (2009/10) die Aktivität „ausführliche Musterlösungen" heraus. Wie es zu dieser Maßnahme kam und welche Entwicklungen sie durchlaufen hat, wollen wir im folgenden Artikel darstellen. Wir werden diese Projektaktivität in einen *lerntheoretischen Kontext* einbetten und daraus *Gütekriterien* für gute Musterlösungen ableiten.

1. Musterlösungen im Projekt „Mathematik besser verstehen"

In der universitären Lehre spielen Musterlösungen vor allem in den Anfangssemestern eine wichtige Rolle. Während sich Musterlösungen unter den Studierenden großer Beliebtheit erfreuen, vertreten Dozentinnen und Dozenten häufig geteilte Meinungen. Manche unter ihnen stellen zu allen Aufgaben Lösungen zur Verfügung, um den Studierenden die Möglichkeit zur Kontrolle der eigenen Bearbeitung zu geben und ein belastbares Vorbild für spätere Aufgabenbearbeitungen hinsichtlich der äußeren Form, der Strukturierung und des erwarteten Argumentationsniveaus zu liefern. Andere Dozentinnen und Dozenten stellen gar keine Lösungen bereit. Sie vertreten die Ansicht, wonach Musterlösungen eher dazu führten, dass sich die Studierenden nicht mehr selbst intensiv mit dem Aufgabenlösen beschäftigten. Beide Positionen haben – das lehrt die Erfahrung – in gewisser Weise ihre Berechtigung.

Herkömmliche Musterlösungen, sofern sie den Studierenden überhaupt zugänglich sind, werden häufig zugeschnitten für die Übungsgruppenleiter (zur Präsentation in den Gruppen) und die Korrekteure (der Hausaufgaben) verfasst und daher nicht speziell den Bedürfnissen der Studierenden angepasst. Dadurch sind diese Musterlösungen meist sehr prägnant formuliert und enthalten nur die wichtigsten Schritte der Aufgabenlösung, ohne zusätzliche Erläuterungen und Begründungen zu liefern. Es gelingt den Studierenden nur selten, daraus selbständig die Kernideen der Aufgabenlösung zu erarbeiten. Das mögliche Potenzial von Musterlösungen für den Lernprozess und das spätere eigenständige Bearbeiten ähnlicher Probleme wird auf diese Weise sicher nicht voll ausgeschöpft.

Die Beobachtungen, die wir als Projektmitarbeiter in Übungen und im Lern- und Diskussionszentrum der Fakultät machen konnten, bestätigen dies. Die wohl häufigsten Fragen, die man von Studierenden im Zusammenhang mit dem Nachvollziehen von Musterlösungen hört, sind „Wie kommt man darauf?“ und „Warum macht man das eigentlich gerade so?“. Dies führte im Projekt schließlich zur Bereitstellung von *Anleitungen zu Musterlösungen*, in denen wir die Kernideen der Lösungen herausstellten, zusätzliche Erläuterungen und Begründungen wichtiger Schritte lieferten und nicht zuletzt auf einer Metaebene über den Sinn und das Ziel der entsprechenden Aufgaben reflektierten. Es sollte so ein belastbares Vorbild für die eigene Aufgabenbearbeitung der Studierenden entstehen (Vermittlung einer korrekten Lösung *und* einer reflektierten und effizienten Herangehensweise). Die Projektaktivität hat sich schließlich dahingehend weiterentwickelt, dass die Anleitungen zu prägnanten Musterlösungen sogenannten *ausführlichen Musterlösungen* gewichen sind, die sowohl die Lösung wie auch die Begleitüberlegungen enthielten. Da solche ausführlichen Musterlösungen in der Regel drei- bis viermal so lang waren wie die prägnanten Lösungen und das Schreiben sehr zeitaufwendig war, wurden sie nur für *eine* ausgewählte Aufgabe pro Übungsblatt verfasst. Dabei wurde zunächst eher intuitiv vorgegangen, d. h. ohne intensiver darüber nachzudenken, was vernünftige Gütekriterien für ausführliche Musterlösungen sein könnten.

Durch eine Auseinandersetzung mit lerntheoretischen Grundlagen wurde die Projektaktivität durch Elemente ergänzt, die die Qualität der ausführlichen Musterlösungen und die Nutzungshäufigkeit durch die Studierenden erhöhen sollten. Die *Cognitive Load Theory* (Sweller et al., 2003) geht davon aus, dass das menschliche Arbeitsgedächtnis kapazitär begrenzt ist. Damit ist gemeint, dass nur mit einer geringen Anzahl an Denkelementen gleichzeitig operiert werden kann. Umgekehrt lässt sich beim Langzeitgedächtnis eine solche Grenze nicht beobachten. Sogenannte *Schemata* verknüpfen einzelne Denkobjekte miteinander und reduzieren so die Anzahl an gleichzeitig zu erfassenden Elementen. Das Ziel des Lernens sollte deshalb sein, solche Schemata zu konstruieren und im Langzeitgedächtnis abzuspeichern, um auf diese Weise das Arbeitsgedächtnis zu entlasten. In der Cognitive Load Theory werden drei Formen kognitiver Belastungen unterschieden: die *innewohnende Belastung*, die von der Komplexität des Lerngegenstandes abhängt und nicht beeinflussbar ist, die *äußere Belastung*, die stark von der Gestaltung der Lernumgebung abhängt und somit beeinflussbar ist, und schließlich die erwünschte *lernbezogene Belastung*, die in Lern- und Verstehensprozessen bei der Schemabildung auftritt. Mit den ausführlichen Musterlösungen versuchen wir, die äußere Belastung zu senken und dadurch Kapazitäten für lernbezogene Belastungen zu schaffen. Die Idee des *Lernens aus Lösungsbeispielen (example-based learning)* ist nicht neu, ihre Bedeutung für Lernprozesse wurde vor allem von Renkl et al. (2003, 2009; Renkl 1997) erforscht. Es wird dabei herausgestellt, dass das Lernen aus Aufgabenlösungen gerade am Beginn des Lernprozesses effektiver sein kann als das eigenständige Problemlösen. Phasen des Selbsterklärens werden in diesem Zusammenhang allerdings als wichtige Voraussetzung für erfolgreiches Lernen aus Lösungsbeispielen betont. Die Entwicklungen, die sich aus dieser Theorie heraus ergeben haben, stellen wir im folgenden Abschnitt dar.

2. Weiterentwicklungen

Musterlösungen werden erfahrungsgemäß häufig nur überflogen und abgeheftet, was wie eingangs erwähnt viele Dozentinnen und Dozenten dazu bewegt, keine Lösungen bereitzustellen. Um dies bei unseren ausführlichen Musterlösungen zu vermeiden, wurden am Ende jeder Musterlösung Verständnisfragen formuliert, die die Studierenden dazu anregen sollten, bestimmte Passagen der Lösung noch einmal genauer unter die Lupe zu nehmen (vgl. auch „Prompts“ bei Renkl et al., 2009).

Aus einer zunächst epistemologisch orientierten Analyse der Funktionen einzelner Bearbeitungsschritte für den Lösungsprozess (Ableitinger, 2012) entwickelte sich die didaktische Idee, diese auch für Studierende explizit zu machen. Auf diese Weise sollte erreicht werden, dass sich bei den Studierenden eine reflektierende, metakognitive Disposition ausbildet, die dann auch beim eigenen Aufgabenlösen eingenommen werden kann.

Eine weitere Entwicklung der Projektaktivität bezog sich auf ihre zeitliche Positionierung im Lernprozess. Nach dem Prinzip des Cognitive Apprenticeship (Collins et al., 1989) wurden den Studierenden ausführliche Musterlösungen zu ausgewählten, prototypischen Aufgaben auch schon vor der eigenen Bearbeitung ähnlicher Aufgaben angeboten (sowohl durch eine Präsentation als auch durch eine schriftliche Version).

Der Umgang einiger Studierendengruppen mit diesen vorab zur Verfügung gestellten Musterlösungen wurde videographiert und in zwei Examensarbeiten hinsichtlich typischer Nutzungsweisen ausgewertet. Dabei wurde neben der Beobachtung erwünschter Selbsterklärungsphasen auch festgestellt, dass einige Studierende die Lösungen lediglich dazu nutzen, sie kleinschrittig auf ihre Hausaufgaben zu übertragen. Eine Idee zur Vermeidung dieses unverstandenen „Kopierens“ wäre eventuell, einfache Lösungsschritte in den Musterlösungen erst gar nicht auszuführen. Diese Lücken müssten selbstverständlich gekennzeichnet werden, damit für die Studierenden klar ist, dass hier noch etwas zu tun ist.

Aus Platzgründen können wir in diesem Beitrag leider keine konkreten Beispiele zu unserer Projektinitiative anführen. Sie finden prägnante und ausführliche Musterlösungen mit Verständnisfragen und der Angabe von Teilprozessen in Ableitinger und Herrmann (2011).

3. Konklusion

Neben diesen Elementen, die für das sinnvolle Arbeiten mit Musterlösungen wichtig scheinen, spielen auch andere, nahe liegende Kriterien wie z. B. die Verwendung einfacher Sprache und kurzer Sätze, ein gut strukturiertes Layout und die fachliche Korrektheit eine wichtige Rolle. Darauf wollen wir hier aber nicht näher eingehen. Aus den eben dargelegten Überlegungen und theoretischen Grundlagen ergeben sich folgende Kriterien für „gute" Musterlösungen. Sie sollten

- zum Selbsterklären anregen und ein tieferes Verständnis mathematischer Inhalte ermöglichen,
- zum Transfer spezifischer Strategien auf ähnliche Problemstellungen befähigen,
- als Impulsgeber für Lernende dienen, die sonst erst gar nicht versuchen würden, Aufgaben selbständig zu lösen,
- zur Habitualisierung der Lernenden beitragen,
- einen Vergleich mit der eigenen Aufgabenlösung und damit eine Selbsteinschätzung ermöglichen und
- dazu beitragen, effiziente Lösungsstrategien zu entwickeln.

Inwiefern die von uns entworfenen Musterlösungen dies tatsächlich leisten, lässt sich nur schwer empirisch untersuchen. Unsere Überlegungen sind eher als erfahrungsbasiert und theoriegeleitet zu verstehen.

Literatur

Ableitinger, C. (2012): Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele. In: Journal für Mathematik-Didaktik 33(1), S. 87-111.

Ableitinger, C., Herrmann, A. (2011): Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra – Ein Arbeits- und Übungsbuch. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

Collins, A., Brown, J., Newman, S. (1989): Cognitive Apprenticeship. Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In: L. B. Resnick (Hrsg.), Knowing, learning and instruction (S. 453-494). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Renkl, A. (1997). Learning from Worked-Out Examples: A Study on Individual Differences. In: Cognitive Science 21(1), S. 1-29.

Renkl, A., Gruber, H., Weber, S., Lerche, T., Schweizer, K. (2003): Cognitive Load beim Lernen aus Lösungsbeispielen. In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 17, S. 93-101.

Renkl, A., Hilbert, T., Schworm, S. (2009). Example-Based Learning in Heuristic Domains: A Cognitive Load Theory Account. In: Educational Psychology Review 21, S. 67-78.

Katharina HOHN, München, Rita BORROMEO FERRI, Kassel

Mathematische Denkstile bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben

Schüler können bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben und Probleme auf verschiedene Vorgehensweisen zurückgreifen. Dabei zeichnen sich Schüler durch unterschiedliche Präferenzen für verschiedene Vorgehensweisen aus. Diese lassen sich z.B. anhand mathematischer Denkstile beschreiben. Im Folgenden wird eine empirische Studie vorgestellt, welche die Präferenzen von Schülern für visuelle und analytische interne Vorstellungen bzw. externe Darstellungen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben untersucht. Darüber hinaus wird auf den Zusammenhang dieser Präferenzen mit dem Lösungserfolg bzw. -misserfolg eingegangen.

1. Theoretischer Hintergrund

Die erfolgreiche Bewältigung problemhaltiger Aufgaben durch den Einsatz adäquater Vorgehensweisen stellt ein allgemeines Lehr- und Lernziel im Mathematikunterricht dar. Mithilfe des Konzepts mathematischer Denkstile lassen sich dabei unterschiedliche Präferenzen für verschiedene Vorgehensweisen beschreiben. Unter einem mathematischen Denkstil wird „die von einem Individuum bevorzugte Art und Weise [verstanden], mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge durch gewisse interne Vorstellungen und/oder externe Darstellungen zu repräsentieren und durch gewisse Vorgehensweisen zu verarbeiten“ (Borromeo Ferri, 2004, S. 168). Somit werden zwei grundlegende Komponenten unterschieden: 1) interne Vorstellungen und externe Darstellungen und 2) ganzheitliche bzw. zergliedernde Vorgehensweisen. In der vorliegenden Arbeit steht die erste Komponente im Mittelpunkt, wobei analytische und visuelle interne Vorstellungen bzw. externe Darstellungen differenziert werden. Eine ähnliche Unterteilung lässt sich auch bei Schnotz (2005) finden. Er unterscheidet depiktionale (abbildende) und deskriptionale (beschreibende) Repräsentationen, die sowohl intern vorgestellt als auch extern dargestellt werden können.

Um das Lösungsvorgehen von Schülern bzw. deren Denkstile zu explorieren, wurden Schüler verschiedener Klassenstufen gebeten, problemhaltige Textaufgaben selbstständig zu bearbeiten. Borromeo Ferri konnte das Konstrukt bereits qualitativ und mittlerweile auch quantitativ rekonstruieren. In der vorliegenden Arbeit wurde der individuelle Lösungsprozess als Modellierungsprozess im Sinne von z.B. Verschaffel, Greer und De Corte (2000) aufgefasst und die Komponenten der Denkstile wurden im Zusammenhang mit den Modellierungsphasen erfasst. Auf den Einsatz klassischer Modellierungsaufgaben wurde verzichtet, stattdessen wurden problemhaltige Textaufgaben eingesetzt, weil „einerseits ihre Lösungen eindeutig sind und weil andererseits der Stoff zwar komplex, aber trotzdem übersichtlich ist“ (Schneeberger, 2009, S. 20f.). Ein Beispiel für eine problemhaltige Textaufgabe ist folgendes: „Eine Schnecke in einem 20m tiefen Brunnen will nach oben auf die Wiese. Sie kriecht am Tag immer 5m hoch und rutscht nachts im Schlaf wieder 2m nach unten. Am wievielten Tag erreicht sie den Brunnenrand?“ (Rasch, 2008, S. 85).

Die folgende Studie geht zwei großen Fragen nach: 1) Welche Vorgehensweisen präferieren die Schüler bei der Bearbeitung der präsentierten Textaufgaben? Der Fokus liegt hier im Speziellen auf den visuellen und analytischen internen Vorstellungen bzw. externen Darstellungen. Darüber hinaus soll 2) untersucht werden, inwieweit verschiedene Präferenzen mit dem Lösungserfolg bzw. -misserfolg zusammenhängen.

2. Methode

Um die Denkstile von Schülern bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben zu untersuchen, wurde zunächst eine Pilotstudie durchgeführt, in der das individuelle Lösungsvorgehen von 35 Grundschülern bei der Bearbeitung von fünf solcher Aufgaben videographiert wurde.

Den Schülern wurde jede Textaufgabe einmal durch die Versuchsleitung vorgelesen. Danach erhielten sie das Aufgabenblatt, um die Aufgabe eventuell nachlesen zu können und um ihr Lösungsvorgehen zu notieren bzw. zu skizzieren. Für die Aufgabenbearbeitung standen den Schülern verschiedene Arbeitsmaterialein zur Verfügung (verschiedenfarbige Stifte, Einerwürfel und Zehnerstangen), über deren Verwendung sie jedoch frei entscheiden konnten. Auf jegliche Hilfestellungen vonseiten der Versuchsleitung wurde verzichtet. Die Schüler konnten sich für die Bearbeitung jeder Aufgabe so viel Zeit lassen wie sie benötigten. Im Anschluss an jede Aufgabenbearbeitung fand ein kurzes, halbstrukturiertes Interview statt, in dem detailliert nach dem Vorgehen bei der Aufgabenbearbeitung gefragt wurde, wodurch interne Prozesse und Vorstellungen der Schüler erfasst werden sollten (wenn auch retrospektiv und introspektiv). Die Pilotstudie diente zum einen der Überprüfung des Studiendesigns (z.B. Schwierigkeit der Aufgaben, Angemessenheit der Arbeitsmaterialien, etc.) und zum anderen wurde auf Basis des Videomaterials ein Kodiersystem entwickelt, das zur Auswertung der Videos aus der Haupterhebung eingesetzt werden sollte.

Das methodische Vorgehen in der Haupterhebung entsprach dem aus der Pilotstudie. An der Haupterhebung nahmen 147 Grundschüler aus 3. und 4. Klassen und 121 Gymnasiasten aus 6. und 9. Klassen teil. Alle Teilnehmer wurden gebeten, dieselben fünf problemhaltigen Textaufgaben in identischen Settings individuell und ohne Hilfestellung zu bearbeiten. Das Lösungsvorgehen, samt anschließendem, retrospektivem Interview, wurde videographiert und anschließend von unabhängigen, geschulten Beobachtern anhand des selbstentwickelten Kodiersystems ausgewertet.

3. Ergebnisse

Allgemein kann gesagt werden, dass sowohl die Grundschüler als auch die Gymnasiasten große Schwierigkeiten bei der Aufgabenbearbeitung hatten. Zwar zeigte sich ein signifikant positiver Zusammenhang zwischen der Klassenstufe und der Anzahl richtig gelöster Aufgaben ($r = .60$, $p < .01$), jedoch fanden selbst die Gymnasiasten im Mittel lediglich $M = 2.04$ ($SD = 1.03$) von fünf möglichen, richtigen Lösungen. Aufgabenspezifische Betrachtungen bestätigen den Zusammenhang zwischen der Klassenstufe und dem Lösungserfolg bei vier von fünf Aufgaben. Die einzige Ausnahme bildet die bereits erwähnte Schneckenaufgabe; hier ließ sich kein signifikanter Unterschied zwischen den Klassenstufen finden. Dies könnte dafür sprechen, dass es problemhaltige Textaufgaben gibt, die ihren problemhaltigen Charakter auch für Schüler höherer Klassenstufen nicht verlieren.

Hinsichtlich der Unterscheidung zwischen internen Vorstellungen und externen Darstellungen zeigte sich über alle Aufgaben hinweg, dass die Grundschüler sehr stark interne Vorstellungen präferierten und z.B. Aufgaben durch Kopfrechnen lösten, während Gymnasiasten zu externen Darstellungen tendierten und z.B. ihre Vorgehensweisen meist vollständig auf dem Aufgabenblatt notierten. Letzteres könnte als Resultat schulischer Sozialisation erachtet werden. Jedoch konnte kein Zusammenhang zwischen den internen bzw. externen Vorgehensweisen und dem Lösungserfolg unter Berücksichtigung der Klassenstufe ausfindig gemacht werden.

Des Weiteren wurden analytische Vorstellungen bzw. Darstellungen ($M = 4.07$, $SD = .47$) den visuellen ($M = 1.61$, $SD = 1.07$) bei der Aufgabenbearbeitung über alle Schüler und alle Klassenstufen hinweg vorgezogen. Somit kam auch die Kombination der beiden Vorgehensweisen nur selten vor. Trotzdem erscheint gerade diese Kombination von analytischen und visuellen Vorstellungs- bzw. Darstellungsformen bedeutsam. So konnte die Datenauswertung zeigen, dass Schüler, die bei der Aufgabenbearbeitung eine Kombination aus analytischer und visueller Vorgehensweise präferierten, z.B. seltener gänzlich falsche Lösungen fanden: Unter Berücksichtigung der Klassenstufe zeigte sich eine signifikant negative Assoziation zwischen der kombinierten Verwendung von analytischer und visueller Vorgehensweise und dem Lösungsmisserfolg ($rp = -.13$, $p = .04$).

4. Fazit und Ausblick

Insgesamt kann gesagt werden, dass die Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben nach wie vor eine Herausforderung für Schüler verschiedener Klassenstufen darstellt. Selbst die Gymnasiasten hatten große Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgaben. Ferner scheint es einerseits Aufgaben zu geben, die ihren Problemcharakter mit Zunahme der Klassenstufe eher verlieren, und andererseits solche Aufgaben, die auch für Schüler höherer Klassenstufen sehr anspruchsvoll bleiben. Über alle Schüler gab es des Weiteren eine sehr deutliche Präferenz für analytische Vorgehensweisen. Jedoch scheint gerade die zusätzliche Verwendung visueller Vorgehensweisen bedeutsam.

Generell ist über die Bedeutung mathematischer Denkstile bei der Bearbeitung (problemhaltiger) mathematischer Aufgaben relativ wenig bekannt. Somit sind vielfältige zukünftige Forschungsansätze denkbar. So könnten z.B. Denkstile in weiteren Schulformen und Altersstufen als den hier berücksichtigten betrachtet werden. Darüber hinaus wäre die längsschnittliche Erforschung von Denkstilen und im Besonderen ihre Veränderung bzw. Einflussfaktoren auf diese Veränderung ein spannendes Forschungsfeld. Ferner sollte die Rolle des mathematischen Denkstils der Lehrkraft im Unterricht bzw. dessen Einfluss auf den Lernerfolg von Schülern (mit wiederum ihren eigenen mathematischen Denkstilen) weiter erforscht werden.

Abschließend kann also gesagt werden, dass die erfolgreiche Bewältigung problemhaltiger Textaufgaben für Schüler verschiedener Klassenstufen weiterhin eine große Herausforderung darstellt und dass in diesem Zusammenhang die Berücksichtigung verschiedener mathematischer Denkstile auf Seiten der Schüler gerade auch für die Unterrichtspraxis einen vielversprechenden Ansatz darstellt.

Literatur

Borromeo Ferri, R. (2004). *Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Rasch, R. (2008). *42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren*. Seelze: Kallmeyer.

Schneeberger, M. (2009). *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog*. Münster: Waxmann.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R.E. Mayer (Hrg.), *Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Carola BERNACK, Institut für Mathematische Bildung der Pädagogischen Hochschule Freiburg

Veränderung mathematikbezogener Überzeugungen durch schreiben, forschen und reflektieren

1. Einführung

„Mein Bild von der Mathematik hat sich auf jeden Fall etwas verändert. Ging ich vor diesem Seminar häufig davon aus, dass es nur einen festgeschriebenen Lösungsweg für ein Problem gibt, ist mir jetzt bewusst geworden, welche Vielfalt es davon gibt. Jeder hat also die Möglichkeit, sein Mathematikwissen in weiten Teilen selbst zu konstruieren (vgl. Konstruktivismus). Das war / ist in dieser umfangreichen Form etwas Neues für mich!“

Anlass für die hier berichtete Studie gab die Beobachtung, dass Studierende zu Beginn des Studiums für das Lehramt eine überwiegend statische Sicht auf die Mathematik mitbringen (Pehkonen & Törner, 2004). Eine solche Sicht steht bei Lehrenden in Zusammenhang mit einem Unterricht, in dem rezeptives Kalküllernen dominiert (Staub & Stern, 2002). Um diesem Mathematikbild in der Lehrerbildung zu begegnen und dabei die Beliefs hin zu einer eher prozesshaften Sicht auf Mathematik zu beeinflussen, wurde ein Seminarkonzept entwickelt, welches vor allem die prozessualen Aspekte von Mathematik erleben lässt. Studierende bearbeiten offene Problemstellungen und dokumentieren dabei schriftlich ihre Problemlöseprozesse in einem Forschungsheft. Sie reflektieren diese Arbeitsphasen aus der Metaperspektive schriftlich. Mit diesem Ansatz knüpfen wir an Erfahrungen in ähnlichen Projekten der Lehreraus- und -fortbildung an (Berger 2005; DeBellis & Rosenstein 2004).

Eine Reihe von Studien zur Beliefänderung (DeBellis & Rosenstein 2004; Liljedahl, Rösken & Rolka 2007) berichten über immer wieder ähnliche Strukturelemente der Interventionen. Demzufolge haben Reflexion und Dokumentation der gemachten Erfahrungen einen hohen Einflussfaktor auf die Veränderungsprozesse.

2. Fragestellungen und Hypothesen

An dieser Stelle berichten wir über erste Ergebnisse der quantitativen Teilstudie eines Projektes. In dieser Studie wird die Wirkung des Seminars auf die Beliefs der Teilnehmerinnen und Teilnehmer zur Mathematik und zum Mathematikunterricht untersucht. Die genannten Befunde und Erfahrungen legen die folgenden Hypothesen nahe:

(i) Offenes, eigenständiges Problemlösen über einen längeren Zeitraum hat Einfluss auf Beliefs hin zu einer eher prozesshaften Sicht.

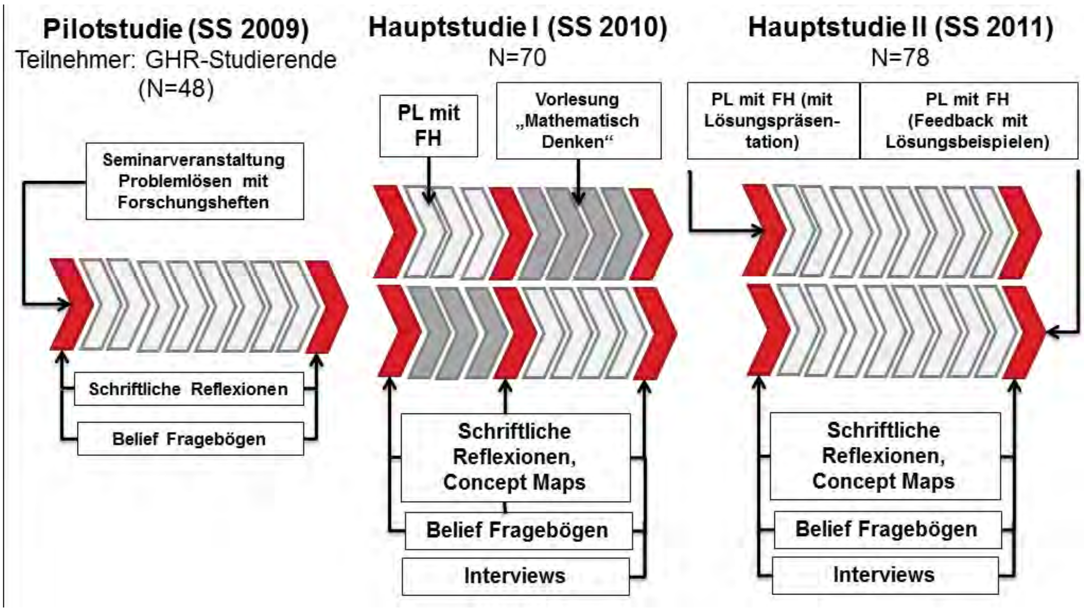
(ii) Beliefänderungen hinsichtlich des Mathematikbildes hängen mit einer veränderten Sicht auf Mathematikunterricht zusammen. Die Veränderung rückt eine eher konstruktivistische Sicht des Mathematiklernens in den Mittelpunkt.

(iii) Moderierende Variablen sind: Allgemeine Mathematikleistung, Motivationale Orientierungen und Bearbeitungsdauer

3. Seminarkonzeption und Studiendesign

Die Seminarkonzeption sah eine ausgiebige Beschäftigung mit 4-5 Problemen pro Semester (durchschnittliche Bearbeitungszeit von ca. 3-5h pro Problem) vor. Sämtliche Bearbeitungsschritte und Überlegungen sollten in einem Forschungsheft dokumentiert werden. Parallel hierzu wurde verlangt, die Problemlöseprozesse aus einer Metaebene schriftlich zu reflektieren. Auch eine Reflexion darüber, wie sich die individuellen Veränderungen der Beliefs gestalten, wurde eingefordert. Damit ergaben sich umfangreiche schriftliche Dokumentationen im Umfang von ca. 50-80 Seiten während eines Semesters.

Durch ein vom BMBF-gefördertes Projekt konnten die verschiedene Fragestellungen rund um die Veränderung der Beliefs von Studierenden über einen Zeitraum von drei Jahren beforscht werden (Holzäpfel, Bernack, Leuders & Renkl, 2012).



Zur Beantwortung der hier vorgestellten Forschungsfragen wurden primär quantitative Methoden eingesetzt. Darüber hinaus wurden noch weitere Forschungsfragen gestellt, die das Verstehen des Veränderungsprozesses und dessen Ursachen eruieren. Diese wurden mittels qualitativer Untersuchungsmethoden bearbeitet (Bernack et al. in diesem Band). Im Laufe der dreijährigen Projektlaufzeit wurden mehrere Variationen der Seminarkonzeption entwickelt und optimiert. Zusätzlich konnte im dritten Jahr in der zweiten Hauptstudie auch eine Kontrollgruppe eingerichtet werden.

Eine vorausgehende Pilotstudie diente insbesondere dazu, Instrumente zur Messung der Beliefänderungen auszuschärfen und weiterzuentwickeln (siehe Bernack et al. 2011). Der Rückgriff auf Skalen aus der Literatur diente dabei als Grundlage (Baumert et al. 2009), wobei noch differenziertere Subskalen entwickelt werden konnten. Items wie „Die Mathematik als Disziplin ist wandelbar“ (Skala „Mathematik als dynamische Wissenschaft; 6 Items) oder „In der Mathematik kann man viele Dinge selber finden und ausprobieren“ (Skala „Tätigkeiten beim Mathematiktreiben“) erfassen das Bild von Mathematik als Prozess auf zwei Skalen durchaus valide, wie durch eine konfirmatorische Faktorenanalyse bestätigt wurde. Alle Teilskalen weisen eine gute bis sehr gute Reliabilität mit Cronbachs alpha – Werten > 0.680 auf.

4. Ergebnisse

Die hier vorgestellten Ergebnisse beziehen sich auf die 2011 durchgeführte Hauptstudie 2. Die Hypothese (i) zur Veränderung der Beliefs zur Mathematik kann bestätigt werden: Während bei der Skala „Mathematik als Prozess“ eine signifikant erhöhte Zustimmung feststellbar ist (d=0,36), nehmen in den Skalen „Mathematik als System“ und „Mathematik als Toolbox“ die Werte mit d=0,47 bzw. d=0,34 signifikant ab.

Auch die Hypothese (ii) zur Veränderung der Beliefs bezüglich des Lehrens und Lernens von Mathematik lässt sich bestätigen. So nahm zum Beispiel die Einstellung „Rezeptives Lernen durch Beispiele und Vormachen“ signifikant ab (d=0,27) und das „Vertrauen in die mathematische Selbstständigkeit der Schüler“ (d=0,23) zu. Teilweise ergaben sich bei den Ausgangswerten zu einer konstruktivistischen Sicht auf das Lehren und Lernen jedoch Deckeneffekte, sodass hier nicht durchgängig Veränderungen gemessen werden konnten.

Als moderierende Variablen wurden im Rahmen von Hypothese (iii) Abiturnote, motivationale Orientierung und Bearbeitungsdauer untersucht. Hier zeigen sich unterschiedliche Ergebnisse: Während die Abiturnote in Mathematik keine signifikanten Korrelationen mit der Veränderung der Beliefskalen aufweist, zeigt sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen Bearbeitungsdauer und Beliefänderung zum Lehren und Lernen. Eine Regressionsanalyse ergab, dass die Moderatorvariable Lernzielorientierung (SELLMO) die Differenz zwischen den beiden Messzeitpunkten in den

Skalen „Mathematik als Toolbox“ (R^2=0,055), „Mathematik als Prozess“ (R^2=0,070) sowie „Mathematik als Tätigkeit“ (R^2=0,082) voraussagt.

5. Fazit, Konsequenzen und Ausblick

Beliefs konnten durch diese Lehrkonzeption von einer eher statischen hin zu einer dynamischen, vorwiegend prozesshaften Sicht auf Mathematik beeinflusst werden, alleine durch das eigenständige Bearbeiten von Problemen. Zudem zeigt sich hinsichtlich der Sicht auf Mathematikunterricht ebenfalls eine Veränderung weg vom rezeptiven Lernen und zu mehr Vertrauen in die mathematische Selbstständigkeit der Schüler. Die Dauer der Maßnahme scheint eine wichtige Grundvoraussetzung zu sein, was sich in einer früheren Variation des Designs gezeigt hat. Zudem spielen die Dauer der Bearbeitung der einzelnen Probleme und die motivationale Orientierung der Studierenden eine moderierende Rolle. Offen bleibt die Nachhaltigkeit einer solchen Beliefänderung, wobei ein solches Seminar eingebettet in ein kohärentes Gesamtkonzept der Lehrerausbildung gesehen werden sollte.

6. Literatur

Baumert, J. et al. (2009). *Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz.*. Berlin: MPI für Bildungsforschung.

Berger, P. (2005). Änderung professioneller Einstellungen durch 'Forschendes Studieren'. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 77–80). Hildesheim: Franzbecker.

Bernack, C., Holzäpfel, L., Leuders, T., & Renkl, A. (2011). Development of qualitative and quantivative instruments to measure beliefs of pre- service teachers on mathematics. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME* (pp. 145–152). Ankara

DeBellis, V. A., & Rosenstein Joseph G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *36*(2), 46–55.

Holzäpfel, L., Bernack, C., Leuders, T., & Renkl, A. (2012). Schreiben, forschen und reflektieren in der Mathematiklehrerausbildung: Veränderung mathematikbezogener Überzeugungen. In M. Kobarg et al. (Eds.), *Lehrerprofessionalisierung wissenschaftlich begleiten. Strategien und Methoden* (pp. 15–34). Münster: Waxmann.

Liljedahl, P., Rolka, K., & Rösken, B. (2007). Affecting Affect: The Reeducation of Preservice Teachers' Beliefs about Mathematics and Mathematics Learning and Teaching. In W. G. Martin et al. (Eds.), *The Learning of Mathematics* (pp. 319–330).

Pehkonen, E. K., & Törner, G. (2004). Methodological Considerations on Investigating Teachers' Beliefs of Mathematics and its Teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *9*(1), 21–49.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The Nature of Teachers' Pedagogical Content Beliefs Matters for Students' Achievment Gains: Quasi_Experimental Evidence From Elementary Mathematics. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2), 344–355.

Martin Erik HORN, Berlin

Zur Beziehung zwischen inneren und äußeren Produkten in der Geometrischen Algebra

Die Geometrische Algebra ist eine mathematische Sprache, die bei Problemstellungen gleichzeitig algebraische und geometrische Zugänge eröffnen. Nicht nur in der Physik kann sie deshalb als wirkungsvolles mathematisches Instrument (Hestenes 2003 & Parra Serra 2009) eingesetzt werden.

1. Zugang zur Geometrischen Algebra

Eine der einfachsten Zugänge zur Geometrischen Algebra besteht nach Parra Serra darin, geometrische Objekte als reelle Linearkombinationen der geometrischen Basisgrößen (also der Basisvektoren) und ihrer Geometrischen Produkte aufzufassen. Die einzigen wesentlichen Regeln, die es dann zu verinnerlichen gilt, sind: Unterschiedliche orthogonale Basisvektoren vertauschen anti-kommutativ und Basisvektoren sind normiert (Parra Serra 2009, S. 823). Sie quadrieren somit zu +1 (raumartige Basisvektoren), –1 (zeitartige Basisvektoren) und im Spezialfall lichtartiger Basisvektoren zu 0.

Die Geometrische Algebra verknüpft dabei geometrische Größen (Basisvektoren, die im dreidimensionalen Fall durch Pauli-Matrizen repräsentiert werden können) auf eine algebraisch eindeutige Art und Weise. Dieser gleichzeitig geometrische wie auch algebraische Rahmen stellt das konzeptuelle Grundgerüst der Geometrischen Algebra dar und ist einer der wesentlichen Gründe für ihre hohe didaktische Wirksamkeit (Hestenes 2003).

Der Zugang über die Diskussion von Linearkombinationen unterschiedlicher Basisgrößen ist jedoch auch erkenntnistheoretisch interessant, betrachtet er denn geometrische Objekte als Zusammensetzung von Bausteinen.

2. Zerlegung und Zusammenfügung

Aus welchen Bestandteilen besteht ein zusammengesetztes Komposit? Diese zentrale Frage umschreibt die Motivation eines großen Bereichs wissenschaftlichen Handelns. Ein Komposit in Form eines Objektes, einer anderen strukturellen Gegebenheit oder eines mathematischen Konstrukts verstehen wir wissenschaftlich nicht allein dadurch, dass wir es phänomenologisch rein auf die Oberflächenstruktur beschränkt als Ganzes beschreiben.

Wir verstehen ein solches Komposit erst dann richtig, wenn wir es in seiner funktionalen Wirkung auf andere vorhandene Strukturen (der mathematischen oder physikalischen Welt, in der sich das Komposit befindet) durchschauen. Ein solches funktionales Verständnis setzt aber voraus, dass wir das Komposit hinsichtlich seiner Bestandteile, die wir in einer Analyse auffinden (siehe Abb. 1) und die gänzlich unterschiedlich auf andere Strukturen wirken können, verstehen.

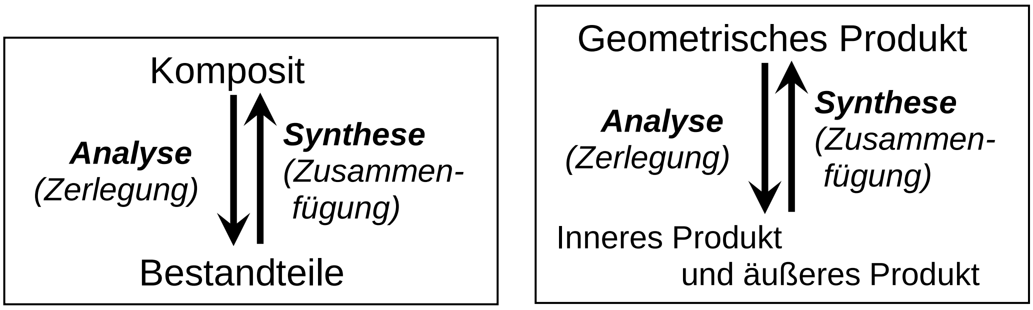


Abb.1: Analyse und Synthese eines zusammengesetzten Komposits.

Eine solche Analyse spiegelt sich im umgekehrt wider in der Synthese der Einzelteile zu einem Ganzen. Dies wird im Folgenden am Beispiel des Geometrischen Produktes von Vektoren im dreidimensionalen Raum gezeigt.

3. Zerlegung des Geometrischen Produktes

Das Geometrische Produkt zweier Vektoren $r_1 = x_1\sigma_x + y_1\sigma_y + z_1\sigma_z$ und $r_2 = x_2\sigma_x + y_2\sigma_y + z_2\sigma_z$ des dreidimensionalen Raums kann in kanonischer Form (Hestenes 2003, S. 107) in inneres und äußeres Produkt zerlegt werden, wobei zwei dimensionsunterschiedliche Teile entstehen:

$$\begin{aligned} r_1r_2 &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ &\qquad + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\sigma_x\sigma_y + (y_1z_2 - y_2z_1)\,\sigma_y\sigma_z + (z_1x_2 - x_2z_1)\,\sigma_z\sigma_x \\ &= r_1 \bullet r_2 + r_1 \wedge r_2 \end{aligned}$$

Der erste Teil des Geometrischen Produktes r_1r_2 ist ein Skalar und damit dimensionslos. Er kann als inneres Produkt $r_1 \bullet r_2$ interpretiert werden, das dimensionsreduzierend agiert. Der zweite Teil von r_1r_2 umfasst die dimensionshöheren Terme in Form von Bivektoren und wird als äußeres Produkt $r_1 \wedge r_2$ interpretiert.

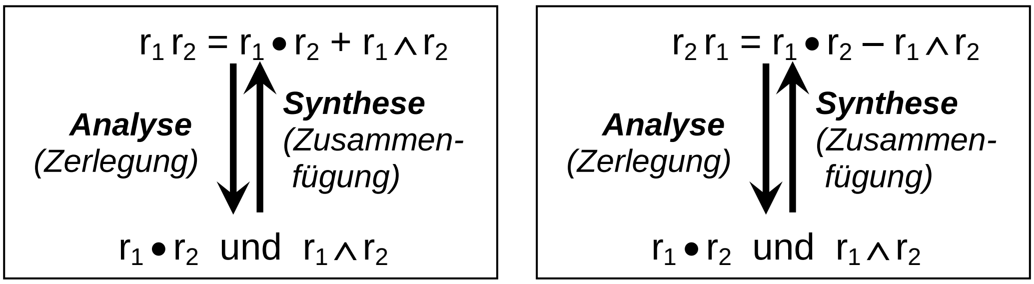


Abb.2: Zwei Synthesemöglichkeiten von innerem und äußerem Produkt.

Fazit: Das Geometrische Produkt enthält $r_1 \bullet r_2$ und $r_1 \wedge r_2$ als Bestandteile.

4. Zerlegung von innerem und äußerem Produkt

Doch was passiert, wenn wir versuchen, in einem nächsten Schritt das innere und das äußere Produkt zu zerlegen, um die Bestandteile des Geometrischen Produktes weiter auszudifferenzieren? Um dies zu bewerkstelligen, muss neben der bisher gewählten Analysestrategie (in Abschnitt 3 zum Beispiel eine Aufspaltung hinsichtlich des Dimensionsverhaltens) eine erweiterte Charakterisierung beispielsweise hinsichtlich des Vertauschungsverhaltens gefunden werden (siehe Abb. 3).

$r_1 \bullet r_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 + \frac{1}{2} r_2 r_1$	$r_1 \wedge r_2 = \frac{1}{2} r_1 r_2 - \frac{1}{2} r_2 r_1$
Analyse *(Zerlegung)* $\downarrow \uparrow$ ***Synthese*** *(Zusammenfügung)*	***Analyse*** *(Zerlegung)* $\downarrow \uparrow$ ***Synthese*** *(Zusammenfügung)*
$r_1 r_2$ und $r_2 r_1$	$r_1 r_2$ und $r_2 r_1$

Abb.3: Analyse von innerem und äußerem Produkt.

Diese erneute Analyse zeigt: Das Geometrische Produkt setzt sich nicht nur aus innerem und äußerem Produkt zusammen. Mit der gleichen Berechtigung kann gesagt werden, dass sich das innere oder das äußere Produkt aus zwei Geometrischen Produkten zusammensetzt.

Es ist ein erkenntnistheoretisch faszinierendes Artefakt der Mathematik: wir können nicht sagen, was Einzelteil und was Komposit ist. Alles scheint in allem enthalten. Und auch für die Physik hat diese Erkenntnis fatale Konsequenzen. Nach der „Machtübernahme der Mathematik in der Quantentheorie“ (v. Weizsäcker 1994, S. 511) mag auch aus mathematischen Gründen nicht explizit erfassbar sein, was Komposit oder Bestandteil ist.

5. Eine Mathematik ohne negative Zahlen

Ist die Mathematik eine freie Erfindung des menschlichen Geistes (Poincaré 1904)? Um diese und ähnliche Fragen wird gerade auch im didaktischen Bereich „most furiously“ (Hellman 2006, Kap. 10, S. 211) gestritten. Zumindest im Bereich der Zerlegung mathematischer Konstrukte scheint eine eindeutig subjektive (und damit kreativ-erfindende) Komponente enthalten zu sein: Um das Geometrische Produkt zu zerlegen, addieren wir schlichtweg Null, die wir frei wählen können und frei wählen müssen:

$$r_1 r_2 = r_1 r_2 + 0 = r_1 r_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) r_2 r_1 = r_1 r_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e_{12} + \frac{1}{3} e_{21}\right) r_2 r_1$$

Die Möglichkeit einer beliebigen Ausgestaltung der Null gestattet es, andere mathematische Setzungen zu wählen. Beispielsweise kann die Mathematik der S_3-Permutationsalgebra (Horn 2012a & b) genutzt werden, um eine Dreifach-Zerlegung des Geometrischen Produktes zu generieren (siehe rechter Teil der vorigen Formel). Dabei wird r_1r_2 in ein modifiziertes inneres Produkt $r_1 \bullet r_2 = ⅓(r_1r_2 + r_2r_1)$ und zwei verschiedene äußere Produkte $r_1 \wedge_{12} r_2 = ⅓(r_1r_2 + e_{12}\, r_2r_1)$ sowie $r_1 \wedge_{21} r_2 = ⅓(r_1r_2 + e_{21}\, r_2r_1)$ aufgespaltet.

Diese alternative Aufspaltung mag künstlich erscheinen, zumal der philosophische Ansatz, diese Ausgestaltung als eine Mathematik ohne negative Größen aufzufassen, nicht jedem gefallen wird. Aus physikalischer Sicht jedoch bietet eine solche alternative Geometrische Algebra eine effektive Möglichkeit, dreiwertige geometrische Situationen wie beispielsweise die

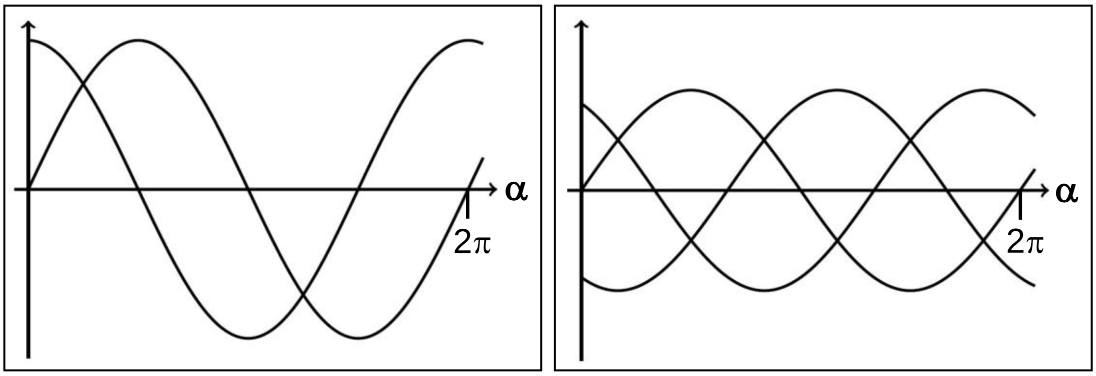


Abb.4: Phasenbeziehungen zwischen inneren und äußeren Produkten bei kanonischer Aufspaltung (links) und alternativer S_3-Aufspaltung (rechts).

Physik des Drehstroms in Zeigerdarstellung, zu modellieren. In Abbildung 4 wird dies in Anlehnung an (Horn 2013) gezeigt.

Literatur

Hellman, H. (2006): Great Feuds in Mathematics. Hoboken: John Wiley & Sons.

Hestenes, D. (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. American Journal of Physics. 71 (2), 104-121.

Horn, M. E. (2012a): Die Geometrische Algebra der (3 x 3)-Matrizen. In: M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM, 393-396.

Horn, M. E. (2012b): Pauli-Algebra und S_3-Permutationsalgebra. Eine algebraische und geometrische Einführung. Ventus Publishing ApS, URL: http://bookboon.com/de/studium/mathematik/pauli-algebra-und-s3-permutationsalgebra [29. Okt. 2012].

Horn, M. E. (2013): Der Übergang von Wechsel- zu Drehstrom. Beitrag DD 20.1 der DPG-Frühjahrstagung in Jena, zur Veröffentlichung vorgesehen in www.phydid.de.

Parra Serra, J. M. (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, 19 (3, 4), 819-834.

Poincaré, H. (1904): Wissenschaft und Hypothese. Leipzig: Verlag von B. G. Teubner.

Von Weizsäcker, C. F. (1994): Aufbau der Physik. 3. Auflage, München: dtv.

Hans HUMENBERGER, Wien

Elementarmathematische Betrachtungen zur gerechten Pizzateilung

Das wirklich gerechte Teilen einer Pizza ist – genau genommen – gar nicht so einfach, und zwar schon dann, wenn nur zwei Personen beteiligt sind (und man sich die Pizza klassischerweise kreisförmig denkt). Mit einem geraden Messer muss man dabei immerhin den Mittelpunkt treffen, so dass der Schnitt ein Durchmesser ist. Näherungsweise klappt das sicher gut, so dass man i. A. keinen Streit nach der Teilung erwarten wird. Aber was ist, wenn man es wirklich genau machen will? Solche Überlegungen haben naturgemäß eher theoretischen als praktischen Charakter, können aber trotzdem mathematisch und fachdidaktisch sehr wertvoll sein. In der Mathematik geht es eben nicht nur um Praxis, sondern auch um Theorie.

Das Phänomen der gerechten Pizzateilung („Pizzatheorem“)

Es gibt eine Möglichkeit, mit einem Pizzamesser, das aus vier geradlinigen Klingen bzw. Messern mit „Zentrum“ P besteht (P teilt jedes Messer in zwei Teile), so dass benachbarte Klingen einen Winkel von 45° einschließen, eine immer gerechte (auch in der Theorie!) Pizzateilung zu erhalten. Wir stellen uns dieses Messer als „Stanze“ vor, die irgendwo (das Stanzzentrum P liege beliebig auf der Kreisfläche) auf die Pizza gedrückt wird, so dass dadurch 8 Teile entstehen (Abb. 1). Diese Teile haben eine zu Kreissektoren verwandte Form, sind aber keine wirklichen (außer in jenem Fall, in dem man mit dem Kreuzungspunkt des Stanzmessers genau den Kreismittelpunkt trifft), trotzdem sollen sie der Einfachheit halber im Folgenden „Sektoren“ heißen.

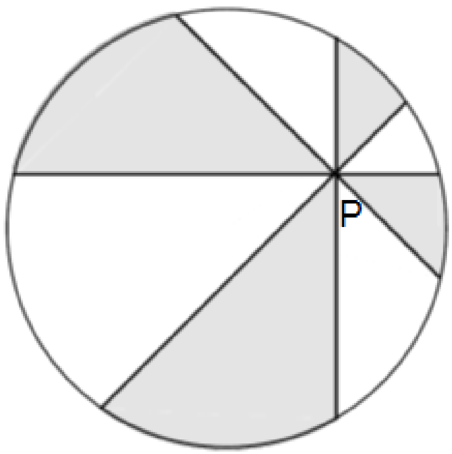


Abbildung 1 „Pizzastanze“

Wenn sich nun die erste Person jeden 2. „Sektor“ nimmt, z. B. die in Abb. 1 weiß dargestellten, und die zweite Person die anderen (die grau dargestellten), so ist die Pizza gerecht geteilt! Dieses Phänomen ist sicher überraschend und passt irgendwie nicht zu den Symmetrieverhältnissen des Kreises, kaum jemand würde dies intuitiv vermuten! Im Gegenteil, als Frage formuliert würden sicher die meisten verneinen, dass dadurch wirklich eine gerechte Teilung gegeben ist.

Heutzutage mit DGS kann man sich zumindest phänomenologisch davon überzeugen: Jede DGS kann Flächeninhalte messen und solche addieren (es handelt sich nicht um echte Sektoren, aber man kann sie zerlegen in Dreiecke und Kreissegmente und diese Typen von Figuren können einfach gemessen werden). Hier könnten Schülerinnen und Schüler ein entsprechendes Applet konzipieren, das dies leistet (*P* verschieben und die Flächensumme der grauen und weißen „Sektoren“ bleibt jeweils gleich). Enaktiv kann man sich auch dadurch überzeugen, dass man ein (großes) kreisrundes Stück Karton so wie angegeben in Stücke teilt und die weißen bzw. grauen Flächenstücke zusammen abwiegt.

Sekundarstufe 1

In der Sekundarstufe 1 könnte ein analoges Phänomen mit einem Quadrat statt eines Kreises behandelt werden, durchaus als selbständig zu lösende Problemaufgabe, je nachdem auch mit kleinen möglichen Hinweisen durch die Lehrkraft.

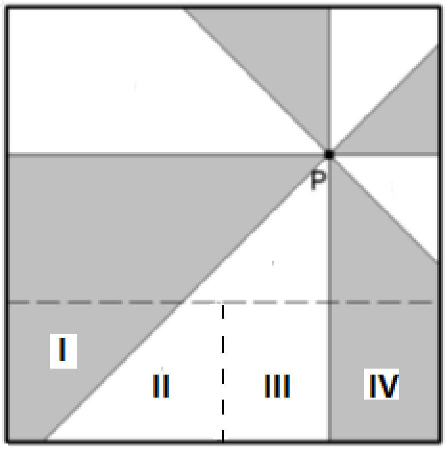


Abbildung 2 Quadrat

In einem Quadrat wird das Stanzmesser so angelegt, dass zwei Messer seiten- und die anderen beiden diagonalenparallel sind (Abb. 2). Warum ist dann die Flächensumme der weißen „Sektoren“ genau so groß wie jene der grauen (vgl. Kroll/Jäger 2010, 103f)? Hier sind schon hilfreiche gestrichelte Linien eingezeichnet (der obere Quadratrand an der Waagrechten durch *P* gespiegelt und ein Stück des rechten Quadratrandes an der Senkrechten durch *P* gespiegelt; dadurch reduziert sich das Problem auf: warum ist I kongruent zu II?), die man bei leistungsstärkeren Klassen auch weglassen könnte.

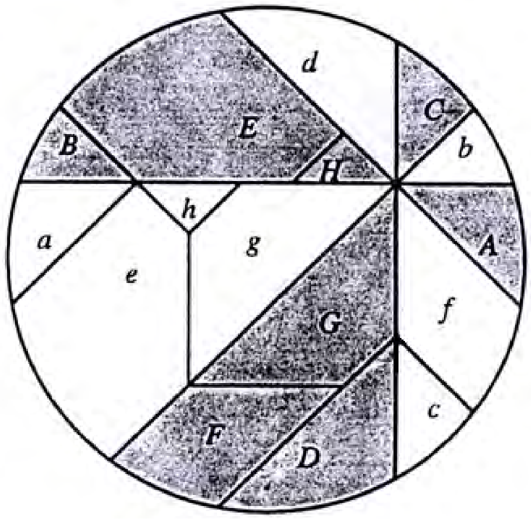


Abbildung 3 Zerlegung nach Carter/Wagon 1994

Auch die in Carter/Wagon 1994 unter dem Titel „Proof without words“ angegebene Zerlegung (die „Sektoren“ sind also nicht nur flächen- sondern sogar *zerlegungsgleich*!) kann Ausgangspunkt einer Analyse mit Schülerinnen und Schülern oder mit Studierenden sein (Abb. 3). Dabei stellt sich allerdings heraus, dass hier „Beweis ohne Worte" vielleicht nicht ganz passend erscheint – es ist noch ein ganzes Stück „Arbeit" zu begründen, warum/inwiefern die mit denselben Buchstaben bezeichneten Flächenstücke kongruent zueinander sind.

Ein inhaltlich frappierend einfacher, aber sehr viele Teile benötigender – und daher scheinbar etwas unübersichtlicher – Zerlegungsbeweis findet sich in Gallin 2011, S. 12. Wenn man sich aber von der Flut von Teilen nicht abschrecken lässt, so könnte die zugehörige Abbildung (Abb. 4) auch aus Sicht von Lernenden (Studierende oder Schülerinnen und Schüler) als ein „Beweis ohne Worte" angesehen werden, z. B. mit folgendem erklärenden Text: Man spiegelt P mitsamt den vier Schnitten bzw. Messern an M, an den beiden Koordinatenachsen und an den Winkelhalbierenden des Koordinatensystems, so dass die Bildpunkte von P ein Achteck bilden (fett gezeichnet; durch diese Spiegelungen wird ein hoher Grad an Symmetrie hergestellt – in der ursprünglichen Situation nicht vorhanden). Nun kann man das Äußere und das Innere des Achtecks getrennt voneinander betrachten und die jeweilige Flächengleichheit (sogar Zerlegungsgleichheit) der gefärbten und ungefärbten Stücke fast unmittelbar sehen.

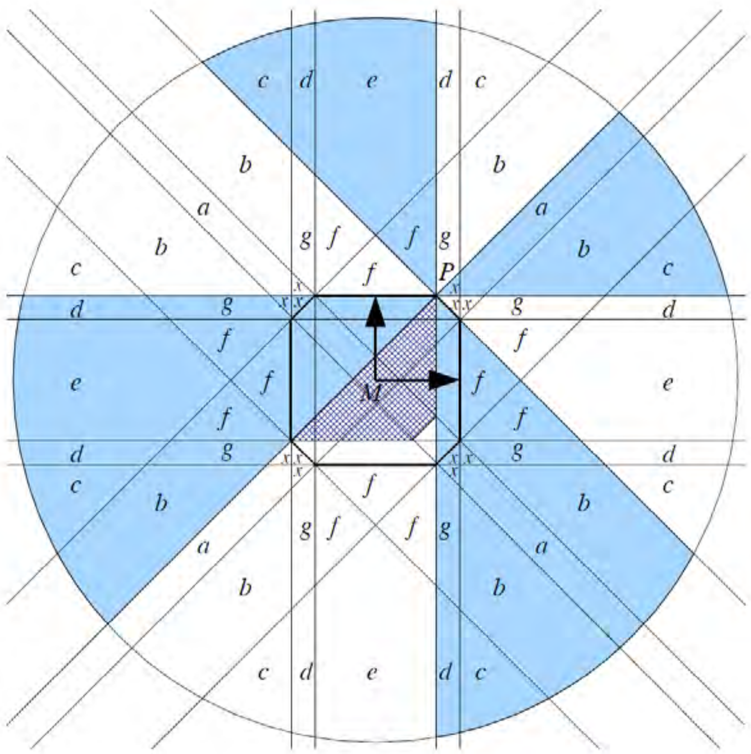


Abbildung 4 Zerlegung nach Gallin 2011

Lösung: Äußeres: Aus Symmetriegründen (diese brauchen hier wohl nicht näher erläutert zu werden) findet man kongruente Stücke im weißen bzw. gefärbten Bereich: In jedem Bereich zwei Stücke a und e; vier Stücke b, c,

d und g; sechs Stücke f und x. Außerhalb des Achtecks ist daher die Flächengleichheit der gefärbten und ungefärbten Stücke nachgewiesen. Inneres: Das schraffierte Trapez gehört eigentlich zur weißen Fläche (gleich groß wie das im Achteck daneben liegende gefärbte Trapez) und die restlichen Flächen innerhalb des Achtecks sind auch leicht als zerlegungsgleich zu erkennen (ein kleines Trapez und vier Dreiecke).

In der Sekundarstufe 2 kann man mit analytischen Mitteln einen Beweis finden. Hier wäre Integralrechnung die entscheidende Technik, was aus Platzgründen hier entfallen muss. Es soll auch noch erwähnt werden, dass bei dieser Teilung nicht nur die Summen der Flächeninhalte der weißen und grauen „Sektoren" jeweils gleich sind, sondern auch die Summen der „Pizzaränder", auch der (bei manchen unbeliebtere weil trockenere) Pizzarand ist bei dieser Teilung also gerecht aufgeteilt. Bei der obigen Version wurde jeder „Quadrant" in zwei gleich große Teile (bezogen auf den Winkel) aufgeteilt. Die angesprochenen Phänomene bezogen auf die Flächeninhalte und die Ränder gelten auch für beliebige „gleichmäßige" Unterteilungen, d. h. auch wenn jeder Quadrant in drei, vier (siehe Abb. 5) oder mehr Teile unterteilt wird. Dies ist dann das eigentliche „Pizzatheorem".

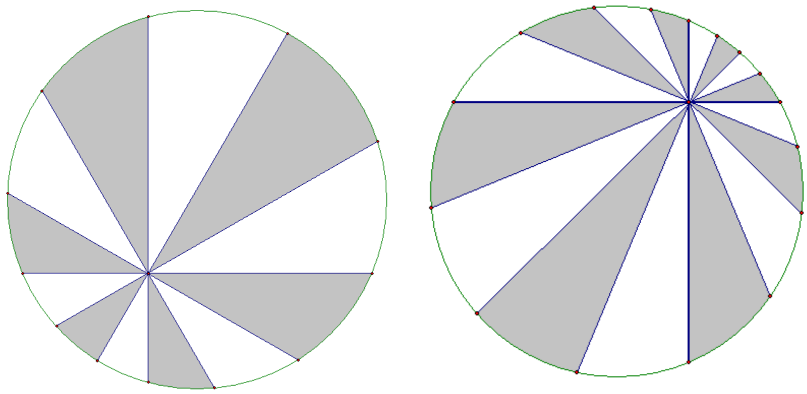


Abbildung 5 Andere Unterteilungen

Literatur

Carter, L, Wagon S. (1994): Proof without Words: Fair Allocation of a Pizza. Mathematics Magazine 67, 4, 267. Eine neuere farbige Darstellung dieses Beweises findet sich auf Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem

Gallin, P. (2011): Exzentrische Kuchenhalbierung. Bulletin des VSMP („Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte"), Nr. 116, Juni 2011, 11 – 19. Online: http://www.gallin.ch/KuchenhalbierungBulletin.pdf

Kroll, W., Jäger, J. (2010): Das Pizzatheorem. Ein Thema mit Variationen. mathematica didactica 33, 79 – 112. Online: http://www.mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2010/md_2010_Kroll_Jaeger_Pizzatheorem.pdf

Stephan HUSSMANN, Bärbel BARZEL, Timo LEUDERS, Susanne PREDIGER Dortmund/Freiburg

Fachspezifische Differenzierungsansätze für unterschiedliche Unterrichtsphasen

Vor dem Hintergrund einer größer werdenden Heterogenität auf Seiten der Lernenden wird das Differenzieren als Qualitätsmerkmal für Unterricht in den letzten Jahren immer bedeutsamer (Meyer, 2004; Helmke, 2010). Doch welcher Differenzierungsansatz ist der beste und in welcher Unterrichtsphase eignet sich der eine oder andere Ansatz besser? Darauf lassen sich keine eindeutigen Antworten geben, sie hängen von lernpsychologischen, fachdidaktischen und unterrichtspraktischen Erwägungen ab. Hier zeigen sich insbesondere fachliche Differenzierungsansätze als bedeutsam, da nicht zuletzt fachspezifische Aspekte essentiell für Unterrichtsqualität sind (Seidel & Shavelson, 2007; Lipowsky, 2009). In diesem Beitrag werden einige zentrale fachspezifische Differenzierungsansätze vorgestellt und hinsichtlich ihrer Eignung in spezifischen Unterrichtsphasen diskutiert (vgl. Leuders & Prediger 2012)
Differenzierungsansätze können sich auf unterschiedliche Ebenen beziehen, z.B. auf Unterrichtsstrukturen (Bönsch, 2004), auf Unterrichtsmethoden (Barzel, Büchter & Leuders, 2007) und für den Mathematikunterricht typisch auf Aufgaben (Hußmann & Prediger, 2007). Während die ersten beiden Ebenen stärker allgemeindidaktische Aspekte fokussieren, ist Differenzierung auf Aufgabenebene im Kern fachdidaktisch. Dennoch interagieren die Ebenen miteinander und kein Ansatz lässt sich allein allgemeindidaktisch denken.

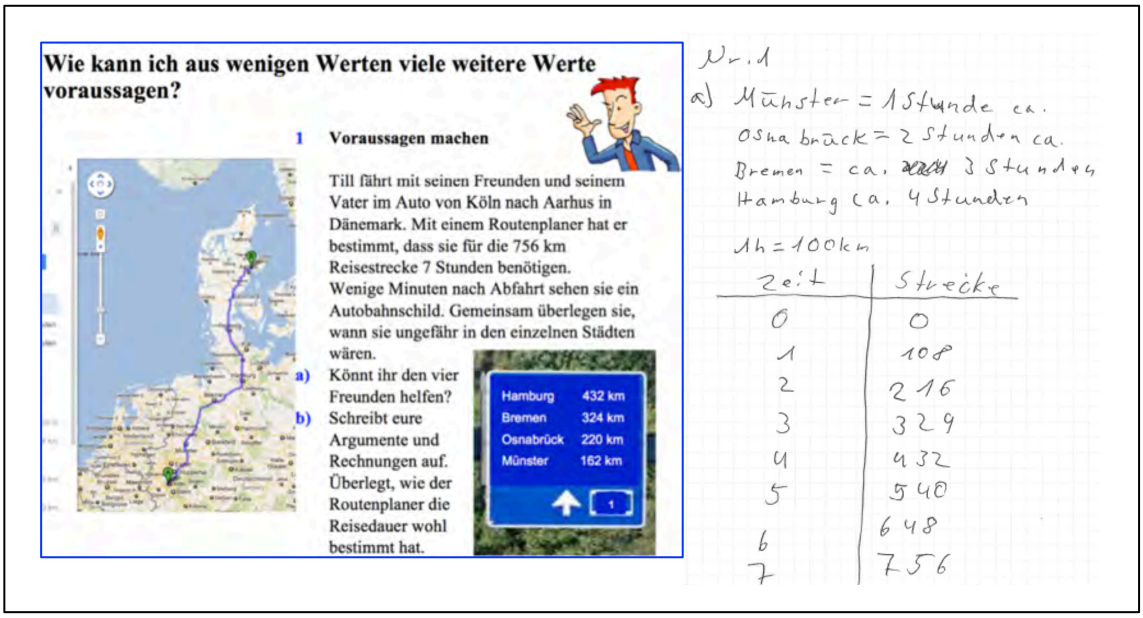
Differenzierungsmaßnahmen auf struktureller Ebene sind beispielsweise Individualisierungen durch selbstorganisiertes Lernen in Lernbüros oder anderen Freiarbeitsphasen, die in einer ‚radikalen' Ausprägung der vollständigen Individualisierung durchaus problematisch sind, da sie spezifische Aspekte von Unterrichtsphasen und Inhalten dahingehend nicht berücksichtigen, dass gewisse fachliche kognitive Prozesse strukturierte Kommunikations- und Interaktionsphasen benötigen. So ist beispielsweise zu Beginn einer Unterrichtseinheit Orientierung für die Lernenden wichtig hinsichtlich Lernzielen und Verstehen des jeweiligen thematischen Zugriffs und in Phasen der Konsolidierung sind Interaktionen mit anderen Lernenden und der Lehrperson zielführend. Mit Differenzierungsmaßnahmen auf methodischer Ebene sind beispielsweise Methoden wie Ich-Du-Wir oder Gruppenzusammensetzungen gemeint, die die Unterschiedlichkeit und die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler berücksichtigen. Doch auch hier wird der inhaltliche Kern erst durch entsprechende Aufgaben ausgestaltet. Auf allen Ebenen steht die Differenzierung nach bestimmten Aspekten im Vordergrund, z.B. nach Lerntempo, Zugangsweisen, Anspruchsniveaus sowie Lerninhalten und -zielen (zur Übersicht z.B. Hußmann & Prediger, 2007, S. 1ff.). Wie diese auf den verschiedenen Ebenen umgesetzt wird, orientiert sich an der Unterrichtsphase bzw. den Kernprozessen, in denen sie genutzt werden.

Kernprozesse

Es gibt viele Strukturierungsvorschläge, um Unterricht bzw. Lernsituationen zu charakterisieren. Wir lehnen uns an ein Modell von Herbart (1776–1841) an, welches im Rahmen des KOSIMA-Projektes in ein Strukturierungsmodell mit vier *Kernprozessen* übersetzt wurde: Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen (Barzel et al. 2011, Prediger et al. 2013). Für drei dieser Kernprozesse werden im Folgenden situationsangemessen Differenzierungsansätze entlang der oben genannten Ebenen/Aspekte vorgestellt.

Differenzierungsansätze in verschiedenen Kernprozessen

Der Prozess des *Erkundens* ist durch ein Anknüpfen an Vorerfahrungen und Vorwissen gekennzeichnet. Dazu dienen problemhaltige, intentionale Situationen (Hußmann 2006; Wittmann 1996; Krauthausen & Scherer 2010), bei denen Begriffsbildungsprozesse als Antworten auf die gestellten Probleme initiiert werden. Dabei wird an Vorerfahrungen integrativ angeknüpft. In dieser Phase bieten sich insbesondere Selbstdifferenzierungsansätze und Differenzierung über Zugangsweisen an.



Mit dem Arbeitsauftrag, aus wenigen Werten weitere Zwischenwerte zu bestimmen (s. Aufgabe 1, Hußmann et al., 2014), lassen sich nicht nur verschiedene Zugangsweisen (tabellarisch, graphisch, sprachlich) initiieren, sondern die Fragestellung lässt sich auch mit unterschiedlichen Rechenwegen bearbeiten (Hoch- und Runterrechnen, schrittweise mit dem Proportionalitätsfaktor rechnen wie im Schülerbeispiel, zeilenweises Addieren).

Statt Terme mit Variablen als Verallgemeinerung von Termen ohne Variable einzuführen, können zur Bestimmung von Zahlen an hohen Stellen einer Zahlenfolge verschiedene Wege ausprobiert werden und der Term unter Verwendung von Variablen sinnstiftend erschlossen werden (Hußmann et al., 2013, vgl. Aufgabe 6).

6 Zahlen an hohen Stellen berechnen

a) Berechne für die Zahlenfolge 6, 8, 10, 12, … möglichst schnell die Zahl an der 50. Stelle. Schreibe auf, wie du die Zahl an der 50. Stelle berechnet hast.

b) Arbeitet nun in Gruppen und findet gemeinsam den besten Weg, Zahlen an hohen Stellen in Zahlenfolgen schnell zu berechnen.

So geht ihr vor:
1. Schritt: Bestimmt auf euren Wegen aus a) die Zahl an der 100. Stelle der Zahlenfolge 6, 8, 10, 12, …
2. Schritt: Überlegt gemeinsam, welcher Weg der schnellste ist.
3. Schritt: Testet euer gemeinsames Verfahren, indem ihr für die Folge 4, 7, 10, 13, … die Zahl an der 100. Stelle bestimmt.
4. Schritt: Schreibt euer Verfahren auf.

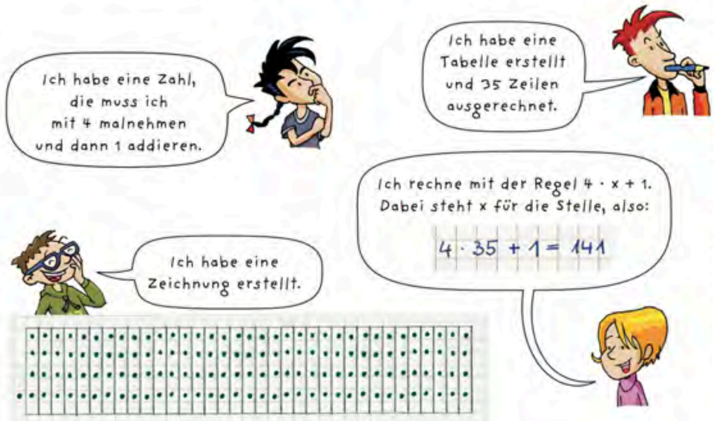
Wählt zum Schluss euren besten Rechner, der gegen die anderen Gruppen antritt.

Hier zeigt sich das große Potential von selbstdifferenzierenden, offenen Arbeitsaufträgen, die auf der einen Seite auf Aufgabenebene differenzieren, deren Zugang in der Klasse aber auch auf methodischer Ebene differenziert werden kann.

Der Prozess des *Ordnens* als aktives Systematisieren und Sichern ist dadurch gekennzeichnet, dass die Erfahrungen aus dem Erkunden vielfältig

5 Hohe Stellen von Zahlenfolgen möglichst geschickt berechnen

Till, Merve, Ole und Pia wollten die 35. Stelle der Zahlenfolge 5, 9, 13, 17, … berechnen.
Dabei sind sie unterschiedlich vorgegangen.



Das nehme ich als Zahl	Das ist mein Ergebnis
1	5
2	9
3	13
4	17
5	21
6	25
7	29
8	33
9	37
10	41
11	45
12	49
13	53
14	57
15	61
16	65
17	69
18	73
19	77
20	81
21	85
22	89
23	93
24	97
25	101
26	105
27	109
28	113
29	117
30	121
31	125
32	129
33	133
34	137
35	141

a) Berechne auch die 50. und die 100. Stelle der Zahlenfolge auf den vier Wegen. Vergleicht und ergänzt eure Ergebnisse im Wissensspeicher.

d) Begründe, warum Pia und Merve schneller zum Ziel kommen als Ole und Till.

reflektiert, konsolidiert und regularisiert werden. In dieser Phase des Ordnens ist wie beim Erkunden ebenfalls die Verwendung vielfältiger Zugangsweisen ein maßgeblicher Differenzierungsansatz, hier geht es jedoch weniger um ein Anregen sondern um eine gezielte vorstrukturierte Auseinandersetzung mit den verschiedenen Zugangsweisen.

Die Aufgabe ‚Hohe Stellen von Zahlenfolgen möglichst geschickt berechnen' ist das systematisierende Pendant zur Erkunden-Aufgabe 6. Gesichert werden alle Zugangsweisen, da jeder Zugang eine andere konzeptionelle Facette beleuchtet. Anders ist es, wenn es mehrere alternative Strategien gibt. Dann werden alle kennengelernt, aber insbesondere die schwächeren Schülerinnen und Schüler müssen nur eine sichern, während stärkere Lernende verschiedene Strategien beherrschen und adaptiv einsetzen können. Aufgrund der Konvergenz und der Lernzielorientierung dieses Prozesses bieten sich jedoch keine selbstdifferenzierenden Aufträge an. In der Phase des Ordnens bieten sich weitere Aufgabenformate an, wie z.B. die Auswahl präferierter Beispiele oder auch individuell bevorzugter Darstellungsarten.

Im Prozess des Vertiefens als produktivem und kognitiv aktivierendem Üben ist Differenzierung für eine gezielte Förderung wichtig. Hier kann das ganze Repertoire der verschiedenen Differenzierungsansätze entfaltet werden. Neben den bereits genannten Ansätzen und hierbei vor allem der Selbstdifferenzierung mit ihrem hohen Differenzierungspotenzial bieten sich beim Vertiefen Aufgabenangebote mit einer Paralleldifferenzierung wie auch solche mit einer Stufendifferenzierung (vgl. Bruder & Reibold 2012) an. Dabei sollte die Differenzierung nicht nur hinsichtlich der technischen Kompliziertheit (z.B. größere Zahl) generiert werden, sondern durch weitere verfügbaren schwierigkeitsgenerierenden Merkmale (Hußmann & Prediger, 2007; Leuders, 2009): Art der kognitiven Aktivitäten (z.B. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten nach dem operativen Prinzip, Explorieren, Formulieren, Verallgemeinern, Begründen), Komplexitätsgrad des Lösungswegs, sprachliche Komplexität, Grad der Formalisierung, Vorstrukturiertheit der Lösung, Bekanntheitsgrad der Mittel.

Fazit

Für ein ganzheitliches Unterrichtskonzept, bei dem das Lernen im Gleichschritt aufgelöst werden soll, muss das ganze Repertoire an Differenzierungsmaßnahmen ausgeschöpft werden, um je nach Situation und Zweck die angemessene Art der Differenzierung wählen zu können, denn keiner der Ansätze kann einzeln alle Qualitätsanforderungen zugleich erfüllen.

Literatur

(nur in der elektronischen Fassung des Artikels auf der Webseite: www-ko-si-ma.de)

Melanie HUTH, Frankfurt am Main

Mathematische Gestik und Lautsprache von Lernenden

1. Gestik und Lautsprache als Teile des multimodalen Repertoires

In mathematischen Interaktionen nutzen Lernende vielfältige Ausdrucksweisen, die komplex mit- und ineinander wirken. Die Modi umfassen mehr als die Lautsprache, reichen über Gestik und Handlungen am Material bis hin zum Entwickeln von schriftlichen Darstellungen (vgl. Huth 2011, 197). Lernende gestalten auf diese Weise die multimodale Interaktion. Nach Radford (2009) haben verschiedene Modi nicht nur abbildenden Charakter im Sinne des *Ausdrucks von* etwa Gedanken, sondern sind konstitutiver Bestandteil dieser: „[...] thinking does not occur solely *in* the head but *in* and *through* a sophisticated semiotic coordination of speech, gestures, body, symbols and tools.“ (ebd., 54). Die Auswahl von Gestik und Lautsprache im vorgestellten Forschungsprojekt begründet sich auf dem integrativen Sprachsystem von Gestik und Lautsprache. Auf ihre besondere Beziehung verweisen verschiedene Disziplinen: die psycholinguistische Gestikforschung (vgl. Goldin-Meadow 2003, McNeill 1992), multimodale Ansätze aus der Mathematikdidaktik (vgl. Arzarello 2006) und die Hirnforschung (vgl. Wachsmuth 2006). Gestik und Lautsprache haben spezifische Ausdrucksmöglichkeiten: Die Lautsprache ist hierarchisch und linear aufgebaut und kann begrifflich eine hohe Detailliertheit generieren. Gesagtes ist flüchtig und, einmal ausgesprochen, nicht zurückzunehmen. Lautsprache gilt mit ihrer Grammatik innerhalb einer Sprachgemeinschaft als linguistisch beschreibbares, konventionalisiertes System. Gestik ist imaginativ und bildhaft und kann komplexe Raum-Zeit-Beziehungen zeitgleich ausdrücken. Sie ist deiktisch präzise, kann Gedanken oder (nicht verfügbare) Objekte im Gestenraum verorten und darauf verweisen. Sie gilt als nicht-konventionalisiertes Sprachsystem im Sinne eines nicht regelhaft beschreibbaren Registers (vgl. Huth 2011). Gesten sind nach Goldin-Meadow (2003) Arm- und Handbewegungen von Sprechenden während des kommunikativen Aktes. Sie stellen keinen funktionalen Akt an einem Objekt oder einer Person dar (vgl. ebd., 8). Diese Definition bedarf im Sinne des multimodalen Paradigmas (vgl. Arzarello 2006) einer Ausdifferenzierung, da Objekte metaphorisch in gestische Argumentationsstränge eingebunden werden können (vgl. Huth 2011, 202).

2. Gestik und Lautsprache im Zeichenprozess

Der Zeichenbegriff von Charles Sanders Peirce erlaubt es, Gestik und Lautsprache als integratives Sprachsystem mit ihren spezifischen Ausdrucksmöglichkeiten innerhalb einer Theorie zu beschreiben. Der Fokus liegt auf der Interpretation von Zeichen und ihrer triadischen Konstitution: „Ein Zeichen oder *Repräsentamen* ist etwas das für jemanden in gewisser Hinsicht [...] für etwas steht. Es wendet sich an jemanden, d.h. es erzeugt im Geist dieser Person ein äquivalentes oder vielleicht ein mehr entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den *Interpretanten* des ersten Zeichens. Das Zeichen steht für etwas, für sein *Objekt*." (CP 2.228, aus Nöth 2000, 64). Der Zeichenprozess gilt als unendlich. Jeder Interpretant kann als Repräsentamen in eine neue Triade eingehen. Dieser „Komplexe Semiotische Prozess" (Schreiber 2010, 148) verläuft nicht immer linear, was sich auf multimodaler Ebene bestätigt (vgl. Huth 2011, 207).

3. Mathematische Zeichen und diagrammatisches Arbeiten

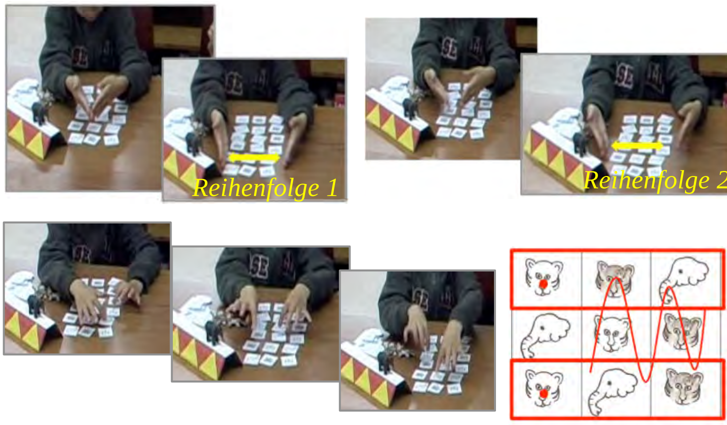
Mathematik ist geprägt von einer Zentralität der Zeichen, Symbole, Inskriptionen und Diagramme und damit einer Betonung der Schriftlichkeit (vgl. Dörfler 2006, Schreiber 2010). Im Vortrag wurden mit Gestik und Lautsprache Modi betrachtet, die zunächst wenig mit schriftlichen Darstellungen gemein haben. Mathematische Zeichen haben epistemologischen Charakter, wobei die Mathematik als „techné" betrachtet werden kann (Dörfler 2006, 211). Mathematische Zeichen sind damit nicht reine Darstellung, um abstrakte mathematische Objekte zugänglich zu machen. Sie erlangen vielmehr selbst den Charakter mathematischer Objekte, die beim Mathematiktreiben manipuliert werden können (vgl. ebd.). Nach Schreiber (2010, 14f) konstruieren Darstellungen in der Mathematik das mathematische Objekt mit. Mathematiktreiben ist dann ein kreativer Umgang mit materiellen und wahrnehmbaren mathematischen Objekten. Mathematiklernen kann als Teilnahme an einer solchen sozialen Praxis der diagrammatischen Tätigkeit verstanden werden, die von der Konkretheit mathematischer Objekte ausgeht und den Umgang mit Diagrammen ins Zentrum rückt (vgl. Dörfler 2006, 209ff). Ein Diagramm als spezifische Mischung von Inskriptionen, weist eine relationale Struktur auf und ist regelhaft manipulierbar. Es können auch dreidimensionale Objekte, wie Arbeitsmittel, diagrammatisch verwendet werden. Diagrammatisches Denken ist der regelgeleitete, kreative Umgang mit Diagrammen, basiert auf Beobachtungen und kann zu neuen Einsichten und Verallgemeinerungen führen (vgl. ebd., 211).

4. „s' gibt nur sechs Möglichkeiten" – Beispiele aus den Daten

Inwiefern können nun Gesten und Lautsprache als Modi, die zunächst offenbar keine Gemeinsamkeiten mit schriftlichen Darstellungen aufweisen, als mathematische Zeichen oder Teile des diagrammatischen Arbeitens im Sinne Dörflers (2006) verstanden werden? In meiner qualitativen Studie wurden dazu vier Paare von Zweitklässlern in mathematischen Situationen (Geometrie, Messen und Größen, Kombinatorik) videografiert. Die Daten wurden transkribiert und in einem 2-stufigen Analyseverfahren (Interaktionsanalyse und Semiotische Analyse) ausgewertet (vgl. Huth 2011). Im Vortrag wurde eine Semiotische Analyse (vgl. Schreiber 2010, Huth 2011) vorgestellt. Hier sollen ausgewählte Beispiele erste Hinweise zur oben aufgeworfenen Frage nach *mathematischen gestischen und lautsprachlichen Zeichen* geben.

Beispiel 1: Kombinatorik – Tierpolonaise (Permutation mit 3 Elementen)

Jakob und Claus finden gemeinsam alle möglichen Reihenfolgen, drei Tiere anzuordnen. Jakob äußert „s' gibt nur sechs Möglichkeiten“ und versucht dies nun näher zu erläutern. Er vergleicht vor allem Reihenfolgen bezüglich der Positionsbesetzung. Gestik und Lautsprache zeigen explizit *regelkonforme* und *nicht-regelkonforme Manipulationen* am Diagramm der gefundenen Reihenfolgen an und verweisen auf die *relationale Struktur*.

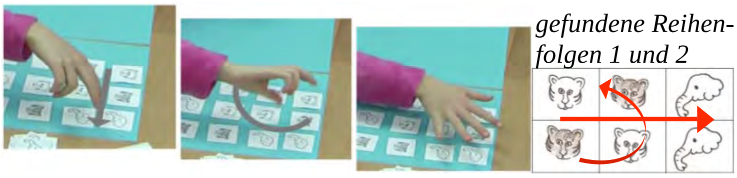


Jakob: „*Des is **so** ne Reihenfolge (.) des is **so** ne Reihenfolge (.) des **geht** des is ne **annere** (.) des is **fast gleich** (.) halt nur des is **gleich** und die zwei sin verkehrt*“

Gestenbewegungen Jakobs über den Reihenfolgen 1 und 3.

Beispiel 2: Kombinatorik – Tierpolonaise (Permutation mit 3 Elementen)

Julia und Leo finden ebenfalls alle sechs Reihenfolgen. Julia erkennt offenbar an den Reihenfolgen 1 und 2 im Diagramm ein Reihenpaar (gleiche Besetzung der 3. Position) und gestikuliert hier *mögliche Permutationen*.

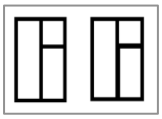


Julia*: „un dann guckt man hier/ des andere/ das is verkehrt (unverständl.) und das is schon mal **diese**\“*

Beispiel 3: Geometrie – Bauen (Nachbau eines Originalgebäudes)

Ein Gebäude aus Bauklötzen wird, ohne dass es gesehen werden kann, anhand der Beschreibung des jeweiligen Partners, nachgebaut. Maya beginnt und zeichnet in den Gestenraum den Grundriss (vgl. Abb. unten) des von ihr gebauten Gebäudes. Sie gibt ihrem Partner lautsprachlich und gestisch eine Konstruktionsanleitung und nutzt ihre Gestik als *Inskriptionsersatz*.

Grundriss des Originalgebäudes



Maya*: „Du musst die zwei langen nehmen/ und dann machst du die* ***so*** *hin (so)\ einfach so hin(tun)\ (.)“*

5. Resümee

Gestik und Lautsprache verweisen gemeinsam beim *Reden über* Diagramme explizit auf die Lesart des jeweiligen Diagramms, zeigen relationale Strukturen und regelgeleitete Manipulationen an (vgl. Beispiele 1 und 2). Insbesondere Gesten können mindestens zeitweise die Funktion von eventuell aktuell nicht verfügbaren oder nicht möglichen Inskriptionen übernehmen (vgl. Beispiel 3). Der Gestenraum wird genutzt, um Inskriptionen gestisch zu verorten, auf dieses zu verweisen und Manipulationen anzuzeigen. Damit wird insbesondere die Gestik zum mathematischen Zeichen (*Bauplan*) und *Inskriptionsersatz*, was Beobachtungen an diesen schriftähnlichen, vorübergehenden Darstellungen möglich macht. Gestik und Lautsprache als zentrale Bestandteile des diagrammatischen Arbeitens Lernender können dabei offenbar als *mathematische Zeichen* genutzt werden.

Literatur

Arzarello, F. (2006): Semiosis as a Multimodal Process. In: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Hg.), Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa (número especial). Distrito federal, México, 267–299 .

Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. In Journal für Mathematikdidaktik, H. 3/4, 200-219.

Goldin-Meadow, S. (2003): Hearing Gesture. How our Hands help us Think. Cambridge: Belknapp Press of Harvard University Press.

Huth, M. (2011): Das Zusammenspiel von Gestik und Lautsprache in mathematischen Gesprächen von Kindern. In B. Brandt, G. Krummheuer & R. Vogel (Hg.): Die Projekte erStMaL und MaKreKi, Mathematikdidaktische Forschung am “Centre for Individual Development and Adaptive Education” (IDeA). Münster: Waxmann, 197-244.

McNeill, D. (1992): Hand and Mind. What Gestures Reveal about Thought. Chicago, London: University of Chicago Press.

Nöth, W. (2000): Handbuch der Semiotik. 2. vollständig neu bearb. und erw. Aufl. Stuttgart und Weimar: Metzler.

Radford, L. (2009): Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. Educational Studies in Mathematics, 70(3), 111-126.

Schreiber, C. (2010): Semiotische Prozess-Karten – Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik. Münster: Waxmann.

Wachsmuth, I. (2006): Der Körper spricht mit. In: *Gehirn & Geist*. H.4, S. 40–47.

Caroline HÜTTEL, Weingarten

Qualität der Gestaltung und Begleitung von mathematischen Angeboten im Elementarbereich

Projekt „Professionalisierung von Fachkräften im Elementarbereich – PRIMEL“

Im Fokus des Verbundprojekts „PRIMEL[1]“ steht die Analyse der Qualität der Freispielbegleitung sowie der Angebotsgestaltung und -begleitung im Elementarbereich. Zusätzlich wird u. a. der Einfluss des Ausbildungskontextes der Fachkräfte (fachschulisch vs. akademisch) untersucht. Die insgesamt 90 pädagogischen Fachkräfte werden mittels Videographie während Freispielsituationen und im Rahmen von domänenspezifischen Bildungsangeboten (Mathematik, Naturwissenschaft, Kunst-Ästhetik und Bewegung/Sport) beobachtet. Unterstützend erfassen Fragebögen die Rahmenbedingungen der Einrichtung, die pädagogisch-psychologischen und domänenspezifischen Einstellungen, das Fähigkeitsselbstkonzept sowie das Fachwissen. Im Zentrum der Auswertung stehen quantitative Analysen der Videodaten, wobei für die Freispielsituationen auf ein bereits bestehendes und erprobtes Kategoriensystem zurückgegriffen werden kann.

Da für die Auswertung der Angebote noch kein spezielles Kategoriensystem vorliegt, besteht eine zentrale Aufgabe innerhalb des Projekts darin, ein Instrument zur Analyse der Qualität der Angebotsgestaltung und -begleitung zu entwickeln. Im vorliegenden Beitrag wird dieser Entwicklungsprozess im Hinblick auf mathematische Bildung konkretisiert.

Theoretischer Hintergrund

Ziel der in den letzten Jahren etablierten Bildungs- und Orientierungspläne im Elementarbereich ist die Unterstützung der Fachkräfte bei der Schaffung der geforderten Bildungsgelegenheiten (Peter-Koop. 2009).

---

[1] Durchführung im Rahmen des Verbundprojekts „Professionalisierung von Fachkräften im Elementarbereich“ (PRIMEL) der Goethe Universität Frankfurt (Prof. Dr. D. Kucharz, Dipl. Päd. M. Tournier), Leibniz Universität Hannover (Prof. Dr. K. Mackowiak, Dipl.-Psych. H. Wadepohl), Pädagogischen Hochschule Weingarten (Prof. Dr. M. Dieck, Prof. Dr. E. Rathgeb-Schnierer, Prof. Dr. S. Ziroli, Dipl.- Soz.- Päd. M. Janßen, C. Hüttel, Dipl.-Sportwiss. U. Billmeier), Universität Koblenz-Landau (Prof. Dr. A. Kauertz, BEd K. Gierl) in Kooperation mit den Pädagogischen Hochschulen St. Gallen (S. Bosshart) und Schaffhausen (C. Lieger, C. Burkhardt Bossi). Das Projekt wird innerhalb der „Ausweitung der Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte“ (AWIFF) durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert.
Weitere Informationen zum Projekt unter: www.primel.uni-frankfurt.de

Die Planung und Umsetzung von Bildungsangeboten sowie eine angemessene Begleitung der Kinder stellt eine der zahlreichen Aufgaben der pädagogischen Fachkraft dar (Thiesen, 2010). Kennzeichnend für die Bildungsangebote sind inhaltliche und methodische Vorausplanungen (Jaszus, Büchin-Wilhelm, Mäder-Berg & Gutmann, 2008). Diese können – abhängig von ihrer Qualität – eine adäquate Grundlage für die Anregung von Lernprozessen bilden. Im Bereich der frühen mathematischen Bildung beziehen sich solche Lernprozesse häufig auf die Förderung von mathematischen Vorläuferfähigkeiten (Jaszus et al., 2008; Schuler, 2013). Geeignete mathematische Bildungsangebote zeichnen sich dadurch aus, dass die Kinder in ihrem individuellen Lernprozess vorangebracht werden (Rathgeb-Schnierer, 2012).

Innerhalb des Elementarbereichs rückt vermehrt die Frage nach den erforderlichen Kompetenzen bei pädagogischen Fachkräften in den Mittelpunkt (Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann & Pietsch, 2011). Dabei zeigen Studien, dass die fachlichen Kompetenzen der pädagogischen Fachkräfte und die Qualität der frühkindlichen Arbeit einen positiven Einfluss auf die kognitive Entwicklung und das Sozialverhalten der Kinder ausüben (Sylva et al., 2004). Bezüglich der pädagogischen Qualität in Bildungsangeboten können drei verschiedene Aspekte unterschieden werden: die Struktur-, die Orientierungs- sowie die Prozessqualität (Tietze, Schuster, Grenner & Roßbach, 2005). Des Weiteren lassen sich aus fachdidaktischer Perspektive folgende drei Qualitätsmerkmale formulieren: kognitive Aktivierung, unterstützendes Sozialklima sowie Strukturierung, Klarheit und effektive Klassenführung. Während die beiden letztgenannten Aspekte domänenunabhängig sind, bedarf die kognitive Aktivierung der Kinder einer fachspezifischen Operationalisierung (u.a. Klieme & Rakoczy, 2008).

Forschungsinteresse und Fragestellungen

Im Fokus steht die Entwicklung eines Instruments zur Analyse der Qualität von Angebotsgestaltung und -begleitung in der Domäne Mathematik. Grundlage hierfür bietet das Kategoriensystem, welches zur Auswertung der Freispielsituationen entwickelt wurde. In der exemplarischen Anwendung auf ausgewählte Bildungsangebote werden dessen Übertragbarkeit und die Notwendigkeit von Modifikationen und Erweiterungen erprobt. Folgende Fragestellungen sind dabei von Interesse:

- Welche Kategorien eines bestehenden Kategoriensystems zur Analyse der allgemeinen pädagogischen Qualität der Freispielbegleitung können ebenso zur Erfassung der pädagogischen Qualität in domänenspezifischen Angeboten genutzt werden?

- Zeigen sich Situationen, die mit dem Kategoriensystem nicht codiert werden können, die jedoch aus fachdidaktischer Sicht relevant sind?
- Welche zusätzlichen Bewertungskriterien sind aus mathematikdidaktischer Perspektive für die Einschätzung der fachdidaktischen Qualität der Angebotsgestaltung und -begleitung von Bedeutung?

Durchführung der Erprobung

Zunächst wurde das Instrument der Freispielbegleitung durch die Anwendung auf die Bildungsangebote erprobt, wobei nach dem in Abb. 1 dargestellten Schema vorgegangen wurde.

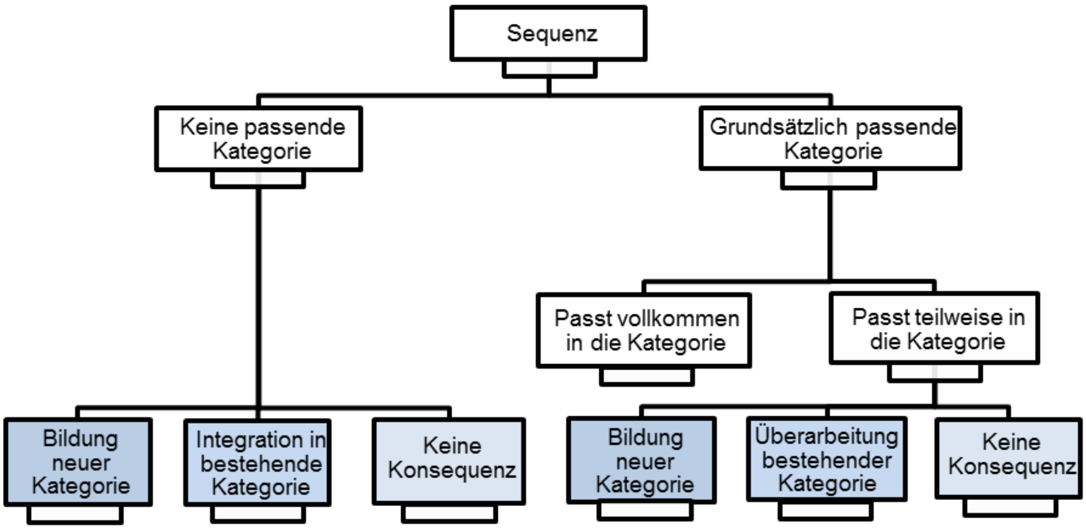


Abbildung 1. Vorgehensschema bei der Erprobung.

Ziel war es, mittels einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 1993) Bewertungskriterien für eine domänenspezifische Qualitätsanalyse zu identifizieren und darauf bezogen neue Kategorien zu entwickeln. Zusätzlich wurden aus mathematikdidaktischen Forschungsbefunden relevante Kriterien für Unterrichtsqualität als weitere Grundlage für die Entwicklung von Kategorien herangezogen (u.a. Klieme & Rakoczy, 2008).

Im Zentrum der anschließenden Erprobung des überarbeiteten Kategoriensystems stand die Prüfung der Anwendbarkeit und Verständlichkeit. Daraus resultierten weitere Präzisierungen oder Ergänzungen der bestehenden Kategorien.

Zum späteren Zeitpunkt wird überprüft, inwiefern das entwickelte Kategoriensystem für die weiteren Domänen adaptiert werden kann. Insbesondere ist hierbei eine fachdidaktische Ausdifferenzierung und Präzisierung der entwickelten Kategorien für jede Domäne unerlässlich.

Erste Ergebnisse

Das Kategoriensystem der Freispielsituationen besteht aus den drei Blöcken: Impulse, Anregungen, Rückmeldung und Reflexion (15 Items), emotionale Zuwendung & Beziehungsgestaltung (3 Items) sowie Klassenführung (9 Items). Resultierend aus der Erprobung wird für die Angebote ein vierter Block (inhaltlicher Aufbau und Gestaltung) aus acht weiteren Items erstellt. Dieser umfasst neben der Bewertung der Nutzung *fachdidaktischen Potentials* (in Situationen oder Aufgaben) und der *fachlichen Richtigkeit* von Erklärungen seitens der pädagogischen Fachkraft, ebenso die Analyse der *gegebenen Arbeitsanweisungen* und des *strukturellen Aufbaus* des Angebots. Zudem soll die Auswahl des *Inhalts* und des *Materials* sowie das *Potential der Aufgaben- oder Problemstellung* mit in die Analyse eingehen.

Literaturverzeichnis

Fröhlich-Gildhoff, K., Nentwig-Gesemann, I. & Pietsch, S. (2011). *Kompetenzorientierung in der Qualifizierung frühpädagogischer Fachkräfte* (WiFF Expertisen Nr. 19). München: Deutsches Jugendinstitut.

Jaszus, R., Büchin-Wilhelm, I., Mäder-Berg, M. & Gutmann, W. (2008). *Sozialpädagogische Lernfelder für Erzieherinnen* (1. Auflage). Stuttgart: Holland + Josenhans.

Klieme, E. & Rakoczy, K. (2008). Empirische Unterrichtsforschung und Fachdidaktik. Outcome-orientierte Messung und Prozessqualität des Unterrichts. *Zeitschrift für Pädagogik, 54* (2), 222–237.

Mayring, P. (1993). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (4., erweiterte Auflage). Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Peter-Koop, A. (2009). Orientierungspläne Mathematik für den Elementarbereich - ein Überblick. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium: Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 47–52). Münster: Waxmann.

Rathgeb-Schnierer, E. (2012). Mathematische Bildung. In D. Kucharz (Hrsg.), *Elementarbildung. Bachelor/Master.* Weinsheim und Basel: Beltz.

Schuler, S. (2103). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs.* Münster: Waxmann.

Sylva, K., Melhuis, E., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I. & Taggart, B. (1997-2004). *The Effective Provision of Pre-School Education (EPPE) Project: Final Report.* Zugriff am 03.04.2012. Verfügbar unter http://eprints.ioe.ac.uk/5309/1/sylva2004EPPEfinal.pdf.

Thiesen, P. (2010). *Die gezielte Beschäftigung im Kindergarten: Vorbereiten - Durchführen- Auswerten* (14., aktualis. Auflage). Freiburg im Breisgau: Lambertus.

Tietze, W., Schuster, K.-M., Grenner, K. & Roßbach, H.-G. (Hrsg.). (2005). *Kindergarten-Skala (KES-R). Feststellung und Unterstützung pädagogischer Qualität in Kindergärten* (3.Auflage). Berlin, Düsseldorf, Mannheim: Cornelsen Scriptor.

Thomas JAHNKE, Potsdam

Zur Epistemologie der quantitativen ‚empirischen Bildungsforschung'

Wie gewinnen die Erkenntnisse der im Titel genannten Forschung ihre Gültigkeit? Sind die benutzten Verfahren dem zu untersuchenden Bereich und Gegenstand angemessen, sind sie angebracht und sinnvoll? Diese Fragen zu beantworten, wäre natürlich eigentlich Aufgabe derer, die sich bestimmter mathematischer und insbesondere statistischer Methoden bedienen, um ihr Vorgehen und die Gültigkeit ihrer Ergebnisse zu rechtfertigen, und nicht derer, die sie befragen oder die Sinnhaftigkeit ihres Einsatzes in Zweifel ziehen.

Um dennoch einer Antwort auf die Spur zu kommen, betrachte ich die beiden Transsubstantiationen, die für die quantitative empirische Bildungsforschung charakteristisch sind: die von der begrifflichen Ebene in die der Daten oder Zahlen, die auch als Operationalisierung bezeichnet wird, und die von den aufbereiteten und mit diversen statistischen Verfahren be- und verarbeiteten Zahlen in die des Sinns, der Interpretation, der Deutung, der Formulierung von „Erkenntnissen". Ich könnte diese beiden Metamorphosen auch in die gängigen grafischen Darstellungen des sogenannten Modellierungskreislaufs einzeichnen, also den Ort dieser Übergänge markieren, aber ich sehe davon ab, weil ich zum einen das Misstrauen hege, dass es sich bei diesen Darstellungen eher um – möglicherweise etwas aufgeblasene – didaktische Erfindungen handelt als um den Versuch, einen Prozess oder Vorgang erkenntnismäßig sinnvoll zu erfassen und zu strukturieren, zum anderen weil dieser Kreislauf inzwischen sinnwidrig herangezogen wird, um die Bearbeitung einfachster Sachaufgaben ad usum delfini zu beschreiben.

Auch wenn ich periodisch der Kollegenschelte geziehen werde, als sei mein Denken darauf gerichtet, das Lebenswerk dieses oder jenes Kollegen in schlechtes Licht zu rücken, statt es durch meine Kritik zu veredeln, will ich an dieser Stelle doch meiner Verwunderung Ausdruck geben, dass mancher der in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik dem Modellieren – in den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts – Glanz und Inhalt verliehen hat, inzwischen in der sogenannten quantitativen empirischen Bildungsforschung tätig, statistische Verfahren nicht als Modellieren kritisch zu durchdenken gewillt ist, so als könnten diese Verfahren – von Kreislauf längst keine Rede mehr – der Realität ihre Erkenntnisse oder gar ihre Wahrheit einfach und faktisch abpressen. Genug der vermeintlichen Publikumsbeschimpfung.

Ich betrachte also einmal die Transsubstantiation, wobei ich die religiöse Konnotation dieses Begriffs nicht ungern in Kauf nehme, der begrifflichen, also sinnhaften Ebene in die der Daten, also die „Operationalisierung“, zum anderen die von den mit diversen statistischen Verfahren bearbeiteten Daten zurück in die Welt und deren angestrebtes Verstehen. Auf dazwischen liegende Vorgehen, das zuweilen unter der recht schlichten Bezeichnung „data processing“ subsummiert wird, werde ich an anderer Stelle ausführlich eingehen. Zu nachvollziehbaren Erkenntnissen kann die sogenannte quantitative empirische Bildungsforschung nur kommen, wenn diese drei Schritte gelingen.

Die Operationalisierung

Hier werden der Übersichtlichkeit und Handhabbarkeit halber zumeist wenige, theoretische Begriffe, prominentes Beispiel sind etwa die fachwissenschaftlichen, die pädagogischen und die fachdidaktischen Kenntnisse von Mathematiklehrkräften, transformiert in Skalenwerte, die sich dichotomisch aus der 0-1-Korrektheit ihrer Beantwortung von sogenannten Items in einem meist nicht allzu langen Fragebogen ergeben. Überprüfbar ist eine solche Operationalisierung nur, wenn die eingesetzten Items veröffentlich werden; sinnvoll wäre sie nur dann, wenn die Items tatsächlich Auskunft über die betrachteten Kenntnisse geben könnten, diese sich eindimensional quantifizieren ließen und eine gewisse Konstanz aufwiesen oder zumindest näherungsweise als konstant gedacht werden könnten. Mit dieser Konstanz meine ich, dass die Befragten auch unter anderen Bedingungen und Umständen, selbst bei anderen Items und insbesondere auch ohne solche in etwa die gleichen Antwortwerte produzieren würden. Zudem müsste sichergestellt sein, dass die Stichprobe tatsächlich repräsentativ ausgewählt wurde und das Design der Untersuchung insgesamt keinerlei Einflüssen unterliegt, die die Ergebnisse aus welchen Gründen auch immer in eine gewisse Richtung einfärbten.

Der Operationalismus betreibt eine Sinnaustreibung bis zum letzten, dem tautologischen Nullpunkt: die Items müssen lupenrein, durch keinerlei Bias kontaminiert, mit dem übereinstimmen, was sie operationalisieren sollen. Die Validität der Untersuchung muss auf solche klinische Reinheit pochen. Die Kreuze etwa, die verschiedene Probanden setzen, müssen erkenntnisgleich und untereinander identisch sein oder betrachtet werden, sonst ließen sie sich auch nicht verrechnen, ob nun mit simplen oder elaborierten statistischen Verfahren. Ob eine Fünfzehnjährige bei einem PISA-Item liebevoll einen Miniaturglobus mit den Umrissen der Erdteile perspektivisch zeichnet oder ihr Altersgenosse, der an dem Item scheitert, weil er das Wort Hemisphäre nicht kennt, zwischen den verschiedenen Distraktoren anderer

Items beherzt rät, beiden ist in Sachen science literacy in der Summe schließlich die gleiche Kompetenz zu bescheinigen.

Alles ist – oder wird – Zahl

Zahlen sind die universelle Erkenntniswährung der quantitativen empirischen Bildungsforschung. Diese Universalität lässt – und das ist nun wirklich eine assoziative, aber vielleicht doch nicht zufällige Abschweifung – an die Analyse des Geldes im Kapitalismus von Karl Marx denken.

> „Mit der ersten Entwicklung der Warenzirkulation selbst entwickelt sich die Notwendigkeit und die Leidenschaft, das Produkt der ersten Metamorphose [Ware in Geld; Th.J.] die verwandelte Gestalt der Ware oder ihre Goldpuppe festzuhalten. Aus bloßer Vermittlung des Stoffwechsels wird dieser Formwechsel zum Selbstzweck. … Das Geld versteinert damit zum Schatz, und der Warenverkäufer wird zum Schatzbildner." (MEW 23/114)

Zurück zu anderen Schatzgräbern! Alles wird in Zahlen transformiert, ob es sich um die erhobenen Daten oder Werte selbst oder deren statistische Bearbeitung und Bewertung handelt, vergleichbar und damit gleich – geschichtslos und aller Umstände entkleidet. Bei PISA finden sich bekanntlich zum Stolz der Konstrukteure so verschiedene Entitäten wie etwa die Itemschwierigkeit und die mathematische Kompetenz der Schüler auf der gleichen Skala wieder. Mehr noch: ein namhafter Psychometriker versicherte jüngst auf einer Tagung, natürlich sei es sinnvoll zu sagen, ein Mensch sei größer, als er klug sei. Man müsse dazu nur untersuchen, wie viele Standardabweichungen seine Körpergröße vom Mittelwert derselben abweiche, und dann die gleiche Untersuchung für seinen Intelligenzquotienten anstellen. Mir scheint, solche Forschung ist nicht mehr weit davon entfernt, auch den Satz „Nachts ist es kälter als draußen" wissenschaftlich zu belegen.

Sinngebung

Schließlich müssen die statistischen Resultate wieder in Worte umgewandelt werden, die eine Auskunft über den untersuchten Bereich geben. In der Sprache des Modellings geht es nun um die Rückkehr aus der Mathematik in den ‚Rest der Welt'. Man muss dazu die oben als Sinnaustreibung bezeichnete Operationalisierung wieder rückgängig machen, den numerischen Werten einen Sinn anheften. So heißt es etwa bei PISA, die Kompetenzstufen seien dazu da, die ‚Skalen zum Sprechen zu bringen'. Schon die Anzahl solcher Stufen (4 bei TIMSS; 5 bei PISA 2000; 6 bei PISA 2009) ist arbiträr, ihre oft hilflose Benennung (z.B. „intermediär") und Abgrenzung inhaltlich kaum oder nicht ohne Widersprüche nachzuvollziehen. Entweder es werden leere, nahezu tautologische Aussagen getroffen („Die mathematische Kompetenz von 12% der deutschen Schülerinnen und Schüler ist auf Stufe II.“) oder solche, die sich erkenntnismäßig aus dem Verfahren nicht ergeben. Wenn also schließlich das Hermēneuein ansteht, ohne das auch die empirische Forschung nicht auskommt, da Daten von sich aus nicht reden oder Auskünfte geben, dann ergibt sich entweder Selbstverständliches, was als nun endlich ‚wissenschaftlich‘ erhärtet oder nachgewiesen bezeichnet wird, oder offensichtliche Fragwürdigkeiten, die dann mit einigem Fußnotenaufwand weg zu retuschieren sind, oder blasse Aussagen, die sich kaum unter dem statistisch-technischen Vokabular hervortrauen – in vielen Fällen ohne es überhaupt nicht formulierbar sind. Ich würde das als das Methodendilemma bezeichnen: die Ergebnisse lassen sich von den Methoden nicht trennen, ohne dass der vermeintliche Exaktheit im Nachhinein zur Disposition stellt oder sogar mehr oder minder vorsätzlich negiert. Das scheint mir kaum hintergehbar. Endete eine Untersuchung etwa mit dem Resultat, dass die alpha-Kenntnisse von Mathematiklehrpersonen mit ihren beta-Kenntnissen korrespondieren, wäre schon der Gebrauch des Wortes Kenntnis eigentlich übergriffig und unzulässig, aber auch dies zugestanden, könnte man der Sache noch keinen Sinn abgewinnen, so lange man nicht sorgsam erläutert, was unter alpha- und beta-Kenntnissen zu verstehen ist. Zahlen belegen bei solcher Forschung nicht Argumentationen und Worte, sondern Worte oder Begriffe, die nun plötzlich eingebracht werden, bemänteln die Zahlen. Die Globalisierung der Forschung tut ein Übriges, die Bedeutungslosigkeit der Sprache zu befördern. Wenn man z.B. Bildungssystemen, schon der Begriff deutet es an, parametrisiert, sie ihrer nationalen oder lokalen Traditionen aus Gründen der Vergleichbarkeit oder aus anderen ökono- oder psychometrischen Motiven entkernt, bleiben Zahlenwerke, die schon ausgeschlossen haben, was sie zu messen versprachen oder vorgaben, und doch Glanz und Härte naturwissenschaftlicher Erkenntnisse prätendieren. Auch statistische Sprechweisen suggerieren zuweilen Erkenntnisse, die sie nicht beinhalten. Wenn man etwa von der ‚aufgeklärten Varianz‘ spricht, dann wird der Statistiker wissen, dass es sich hier um einen wohldefinierten mathematischen Begriff handelt, dessen formale (!) Bedeutung seiner Definition und nicht seiner Bezeichnung zu entnehmen ist, während der Laie wähnt, dass hier eine Varianz ‚aufgeklärt‘ ist oder wurde, was der Experte natürlich gern billigend in Kauf nimmt.

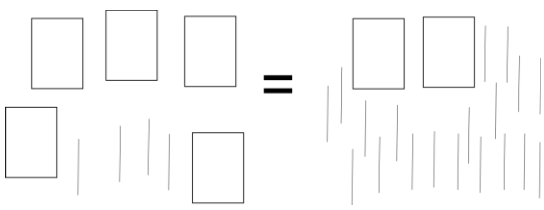
Thomas JANSSEN, Bremen

Vorsagen erlaubt – Eigenkonstruktion vs. Hilfe in der Zone der nächsten Entwicklung

Konstruktivistische Theorien spielen in der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion eine wichtige Rolle. Lernen wird gemeinhin als ein aktiver, konstruktiver Prozess verstanden, eine Auffassung, die in zahlreichen Forschungsprojekten bestätigt werden konnte. Es besteht dabei Einigkeit darüber, dass die Lehrperson keineswegs überflüssig wird. Ihre Rolle ist vielmehr, Gelegenheiten zur Wissenskonstruktion zu schaffen. Dabei gehen einige Vertreterinnen und Vertreter konstruktivistischer Modelle von Aushandlungsprozessen im Sozialen aus, also unter den Lernenden, andere nehmen an, dass das Individuum selbst im Umgang mit Lernaufgaben erkundet, welche Vorstellungen sich als gangbar erweisen. Einig sind sie sich darüber, dass der Lernprozess nicht von außen vorgegriffen werden kann, dass das unmittelbare Korrigieren falscher Vorgehensweisen – also Vorsagen – eher kontraproduktiv ist. In diesem Beitrag wird eine Situation vorgestellt, in der die Lehrerin vorsagt und genau dadurch einen Lernprozess anregt, dessen Fruchtbarkeit sich in einer späteren Szene offenbart. Das Phänomen lässt sich konstruktivistisch gesehen durchaus verstehen, eine tätigkeitstheoretische Auffassung ermöglicht aber tiefere Einsichten, insbesondere bezüglich der adaptiven Gestaltung solcher Situationen.

1. Darstellung der Unterrichtsszenen

Die hier vorgestellten Daten wurden im Rahmen einer Studie zur Ausbildung algebraischen Struktursinns (vgl. Hoch, 2007) gewonnen, die über einen Zeitraum von sieben Monaten in einer 8. Klasse einer Bremer Oberschule durchgeführt wurde. Ausgehend von einer tätigkeitstheoretischen Auffassung (Roth & Radford, 2011) und unter gleichzeitiger Berücksichtigung des sozial-konstruktivistischen SVSt-Modells (Bikner-Ahsbahs, 2005) wurden drei Einheiten zur elementaren Algebra entwickelt.



Die erste Szene spielte sich direkt zu Beginn des Beobachtungszeitraums ab. Anhand einer Streichholzgleichung (siehe rechts, vgl. Affolter et al., 2003) sollten die Schülerinnen und Schüler eigenständig das Tätigkeitsmotiv entwickeln: Die Reduktion der Gleichung, so dass die Lösung unmittelbar sichtbar ist. Zwei Schüler, hier Sabine und Herbert genannt, kommen lange zu keiner Lösung, sind frustriert und fordern die Lehrerin auf, ihnen mehr Tipps zu geben.

/Lehrerin: okay was kann man denn jetzt auf beiden Seiten (*tippt mit den Händen auf beide Seiten*) machen damit das übersichtlicher wird ihr müsst immer das gleiche machen. (*H zieht etwas Schmutz vom Tisch, L schaut S lange an, S schaut auf den Tisch, hat immer noch die drei Schachteln in der Hand*) (...) (*steht auf und geht weg, dabei flüstert sie S ins Ohr*) ,was wegnehmen.

Transkriptionsschlüssel

A-h	gedehnt
genau.	Stimme wird gesenkt
genau'	Stimme wird gehoben
genau-	Stimme bleibt in der Schwebe
,genau	Stimme setzt neu an
GENAU	mit lauter Stimme
(.),(..),...	1, 2, ... Sekunden Pause
(7sec)	7 Sekunden Pause
/Karl:	unterbricht vorherige Äußerung
SX:	unidentifizierte/r Schüler/in

Sabine: (*schaut H an, lässt eine der drei Schachteln auf dem Tisch und nimmt zwei an sich*) Was wegnehmen

Herbert: A-h- ,Mann bist du schlau. (*S lacht, legt die Schachteln wieder auf den Tisch, etwas links von den anderen*) ,Frau Kahn ist voll gemein. ,was wegnehm okay-

Sabine: (*schaut H an, zeigt auf die rechte Seite*) also wenn wir neun sind fünf ,ah nimm mal vier weg' (*beide Schüler nehmen jeweils vier Streichhölzer auf der rechten Seite weg, H nach unten rechts, S zum Gleichheitszeichen hin*)

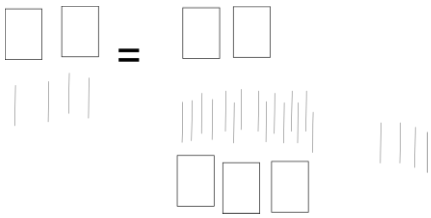
Herbert: Eins zwei drei vier hab ich.

/Sabine: ich hab hier doch weggeno-

/Herbert: A-h-r. (*S lacht*) ,sind fünfzehn.

Sabine: Ja. ,und fünfzehn- (*zeigt auf die rechte Seite, schaut auf die linke Seite*) (...) (*zeigt nacheinander auf die fünf Streichholzschachteln auf der rechten Seite*) ,eins zwei drei vier fünf- (*nimmt drei der Schachteln und legt sie weiter Richtung Mitte*) ,durch drei- ,sind fünf.

Herbert: Ja. (*schaut S an, lächelt*)



Sabine: Und jetzt ham wir (*legt die drei Schachteln unter die Streichhölzer, siehe rechts, zeigt mit der linken Hand auf die Streichhölzer und dann auf alles um das Gleichheitszeichen herum*) das hier und die drei (*rückt mit dem Stuhl zurück*) wir (*klatscht in die Hände*) HAMS. (*H schaut auf den Tisch vor sich, S beugt sich wieder vor*) ,guck. ,weil jetzt habt ihr (*zeigt erst auf die 15 Streichhölzer, dann auf die drei Schachteln*) ,wenn die jetzt hier drinne wärn (*schaut H an*) ,ne' (*zeigt auf die vier Streichhölzer, die zur Seite gelegt wurden*) ham wir noch vier draußen.

Herbert: Hähä'

Sabine: (*zeigt nochmals erst auf die 15 Streichhölzer und dann auf die Schachteln*) Und die sind doch da drinne. (*H schaut S an, erst breit grinsend, dann mit geschlossenem Mund, dann wieder grinsend*) (4sec) ,glaubst du das geht' (*legt die drei Schachteln wieder auf die linke Seite*) (...)

Herbert: Also nochmal. (*legt die rechte Hand auf die rechte Seite*) ,da sind fünfzehn.

/Sabine: (*nimmt die drei Schachteln auf der linken Seite in die Hand und schüttelt sie beim Reden*) ja und hier sind dann auch fünfzehn weil fünfzehn geteilt durch drei sind fünf

/Herbert: (*stimmt ein, hält die rechte Hand mit gespreizten Fingern nach oben*) geteilt durch drei sind fünf.

Sabine sagt „Ja" und ruft nach der Lehrerin. Beide Schüler äußern durch „Wuu"-Rufe sowie durch Gestik und Mimik Freude, Sabine geht schließlich zum Nachbartisch und erklärt ihr Vorgehen.

Vier Monate später, in der Einheit zu linearen Funktionen, entsteht im Unterrichtsgespräch zum Schnittpunkt zweier Funktionen eine lineare Gleichung. Die Lehrerin fragt, ob die Schülerinnen und Schüler wüssten, wie damit umzugehen ist:

Sabine: (*wedelt mit dem rechten Zeigefinger in der Luft*) IS DAS NICH DAS MIT DEN Zigarettendingern ‚Streichhölzern- (*L sowie H und A schauen sie an, der Rest der Klasse schaut auf die Tafel*)

/Lehrerin: s-c-h- ‚o-h-

SX1: Gleichung'

2. Deutung mit einer konstruktivistischen Auffassung von Lernen

In der vorgestellten Szene werden einige Anforderungen einer konstruktivistischen Auffassung vom Lernen (vgl. Leuders, 2001) erfüllt: Die Lernumgebung will an die Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen und motiviert zum individuellen oder kollektiven Konstruieren neuer Sicht- und Herangehensweisen. Eine aktive Auseinandersetzung findet durchaus statt. Das Eingreifen der Lehrerin ist ex ante nicht wünschenswert, eigentlich sollten die Schülerinnen und Schüler ihre Fehler selbst erkennen und beheben. Das bedeutet freilich nicht, dass sich ex post nicht eine konstruktivistische Deutung finden lässt. Das Verhalten der Lehrerin lässt sich als eine Veränderung der Umwelt der Schülerin verstehen, die eine Konstruktion viabel macht, die zuvor nicht zulässig erschien. Doch gerade in Hinblick auf den nachhaltigen Erfolg scheint die Erklärungsmacht konstruktivistischer Theorien hier eingeschränkt zu sein.

3. Deutung mit einer tätigkeitstheoretischen Auffassung von Lernen

Tätigkeitstheoretisch lässt sich die vorliegende Szene so interpretieren, dass die Lehrerin als Vertreterin der mathematischen Kultur hier richtig erkennt, dass Sabine sich in der Zone der nächsten Entwicklung befindet. Darunter verstehen Roth und Radford (2011) über die weit verbreitete Deutung hinausgehend eine soziale Situation, die durch eine starke emotionale Einbindung, hier Frustration sowie lautes und schnelles Reden, gekennzeichnet wird. Die Schüler sind so weit involviert, dass sie den Lernschritt, der hier das Erkennen des Motivs der kulturell etablierten Tätigkeit bedeutet, auch dann noch nachhaltig vollziehen, wenn er ihnen weitgehend vorgegeben wird. Das Metonym „Streichholz(schachteln)“ konserviert die Situation, in der das Tätigkeitsmotiv erkannt wurde und erlaubt seine spätere Anwendung in einer anderen Situation.

4. Diskussion und Ausblick

Man kann die Tätigkeitstheorie als eine (schon früh formulierte) Präzisierung konstruktivistischer Lerntheorien betrachten. Die Tätigkeitstheorie gibt spezifischere Hinweise zur Gestaltung und spontanen Erkennen von Lerngelegenheiten – hier gibt es wie von Reusser (2006, 166) gefordert

> Regeln, wann und wie und wie stark Lehrpersonen intervenieren, anleiten, beraten und welche Ziele sie dabei im Auge behalten sollten und was es dabei heißt, sich individuell adaptiv zu verhalten.

Damit steht der Konstruktivismus nicht als Ganzes in Frage, aber die Tätigkeitstheorie lässt sich komplementär nutzen, insbesondere um die Vertiefung von Gelerntem zu verstehen (siehe Janßen & Bikner-Ahsbahs, 2013). Eine wichtige Frage, die ein Diskutant auf der Tagung in Münster aufwarf, bleibt aber vorerst unbeantwortet: Wie hilft der individualpsychologische Begriff der Zone der nächsten Entwicklung Lehrkräften, die in ihrem Alltag auf die Bedürfnisse *aller* Schülerinnen und Schüler reagieren müssen?

Literatur

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti und B., Wieland, G. (2003). *mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I.* Bern: Schulverlag blmv & Zug: Klett und Balmer.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie.* Hildesheim: Franzbecker.

Hoch, Maureen (2007). *Structure Sense in High School Algebra*. Unveröffentlichte Dissertation. Tel Aviv: Tel Aviv University.

Leontjew, A. N. (1982). *Tätigkeit, Bewußtsein, Persönlichkeit*. Köln: Pahl-Rugenstein.

Leuders, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Reusser, K. (2006). Konstruktivismus – vom epistemologischen Leitbegriff zur Erneuerung der didaktischen Kultur. In M. Baer, M. Fuchs, P. Füglister, K. Reusser & H. Wyss (Hrsg.), *Didaktik auf psychologischer Grundlage. Von Hans Aeblis kognitionspsychologischer Didaktik zur modernen Lehr- und Lernforschung* (S. 151-168). Bern: h.e.p..

Roth, W. M. und Radford. L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning.* Rotterdam: Sense.

Judith JUNG, Rose VOGEL, Frankfurt am Main

Die Welt von oben – Kinder interpretieren zweidimensionale Darstellungen von dreidimensionalen Raumarrangements

Der Auseinandersetzungsprozess von Kindern mit mathematischen Aufträgen in gestalteten Lehr-Lernumgebungen kann als Wechselspiel zwischen Konstruktion und Instruktion beschrieben werden (vgl. Vogel 2013). Instruktionen der begleitenden erwachsenen Person (Lehrperson) schaffen den Rahmen für mathematische Interaktionsprozesse, in denen Kinder zusammen mit der erwachsenen Person mathematische Bedeutungen im Hinblick auf den zu bearbeitenden Auftrag aushandeln. Durch diesen Prozess der Konstruktion werden mathematische Konzepte der Beteiligten rekonstruierbar.

1. Die mathematische Spiel- und Erkundungssituation „Maps"

Die hier im Zentrum stehende mathematische Spiel- und Erkundungssituation „Maps" entstammt dem Dissertationsprojekt von M. Huth und wurde im Rahmen des Projektes erStMaL (early Steps in Mathematics Learning) weiterentwickelt. Das Projekt erStMaL betrachtet die mathematische Denkentwicklung von Kindern in den Jahren von 3 bis 9 (vgl. Brandt, Vogel & Krummheuer 2011) und ist am „Center for Individual Development and Adaptive Education" (IDeA) angesiedelt. IDeA ist ein interdisziplinäres Forschungszentrum, welches im Rahmen der LOEWE-Initiative des Landes Hessen eingerichtet wurde.

In der Spiel- und Erkundungssituation „Maps" bekommen Kindertandems den Auftrag aus gegebenen Materialien (Bauklötze in verschiedenen Formen, Stäbchen, Ringe, usw.) ein Raumarrangement nach einer Vorlage nachzubauen (vgl. Abb. 2). Als Vorlage dienen verschiedene, in der Perspektive der Draufsicht (Grundriss) erstellte Karten des Raumarrangements, welche als bunter Ausdruck oder in schwarzweiß vorliegen (vgl. Abb. 1). Die Situationen werden videografiert und transkribiert.

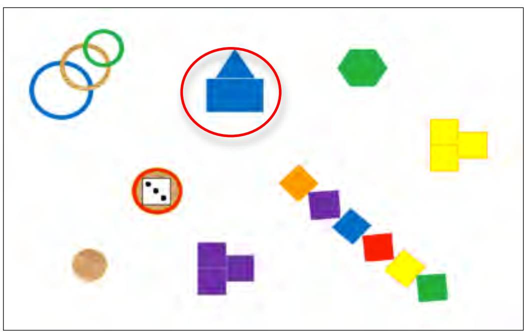


Abb. 1: Vorlage für den Nachbau

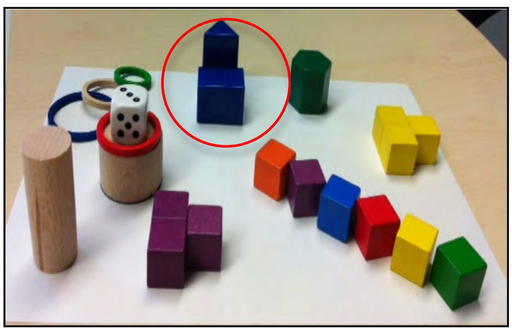


Abb. 2: nachgebautes Raumarrangement

2. Theoretischer Rahmen und Forschungsfokus

Die Besonderheit der mathematischen Situation „Maps“ besteht darin, dass ein räumliches Arrangement zweidimensional als Grundriss dargestellt wird. Durch diese Darstellung gehen Informationen über die Objekte und Objektkonstellationen verloren, die durch die Betrachterin, den Betrachter ergänzt bzw. rekonstruiert werden müssen. „There are two kinds of information that may be coded from maps and models: element-to-element (or representational) correspondence and correspondence of spatial relations [...]“ (Newcombe & Huttenlocher 2003, S.150). Der Informationsaspekt „element-to-element correspondence“ thematisiert die zweidimensionale Darstellung eines dreidimensionalen Objekts die von der Betrachterin, dem Betrachter entschlüsselt werden muss. Soll ein dreidimensionales Objekt bzw. eine Objektkonstellation zweidimensional dargestellt werden, müssen „Punkte des Raumes“ auf „Punkte der Ebene“ abgebildet (projiziert) werden (Müller 2004, S.34). Bei einer sogenannten Normalprojektion stehen die Projektionsstrahlen senkrecht auf der Bildebene (vgl. ebd., S.34), dies entspricht der Alltagsvorstellung *Blick von oben (Vogelperspektive)*. Dem so entstehenden Grundriss fehlen die Informationen zur Höhe. Diese wird durch die Hinzunahme weiterer „Rissebenen“, wie z.B. eines Aufrisses, senkrecht zum Grundriss kompensiert. Die Grundrissdarstellung findet in der Erstellung und Nutzung von Stadt- und Landkarten Anwendung.

In den von uns ausgewählten Sequenzen aus der mathematischen Erkundungssituation „Maps“ stehen den Kindertandems farbige Maps (verkleinerter Grundriss einer räumlichen Figuren-Konstellation) als Vorlage zur Verfügung (vgl. Abb. 1). In den hier vorgestellten Fallbeispielen wollen wir folgenden Fragen nachgehen: Wie gehen Kinder damit um, dass im Grundriss die Höhe von Objekten nicht repräsentiert wird? Welchen Einfluss haben die Instruktionen der begleitenden erwachsenen Person auf die Bearbeitung des Auftrags durch die Kinder?

3. Zwei Fallbeispiele im Vergleich

Für die Darstellung hier wurden zwei Fallbeispiele ausgewählt. Die mathematische Erkundungssituation mit Tandem1: Mona (7;7) und Sadira (8;0) ist im Rahmen des Projekts erStMaL und die Situation mit Tandem2: Jana (8;2) und Ayse (7;11) im Dissertationsprojekt von M. Huth entstanden.

Szene 1: Einführung in den mathematischen Auftrag
Zu Beginn der Situation wird von Tandem1 sehr ausführlich über Landkarten und Stadtkarten geredet (ca. 3 Min.), da die Kinder aus dem Unterricht unmittelbare Vorerfahrungen mitbringen. Außerdem spricht die betreuende

Person (B) von einer Spielzeug-Landkarte, die „genauso zu bauen ist“. Was dies genau bedeutet, wird in der Szene nicht ausgehandelt.

Tandem1			
00:01		B	[...] Heute soll’s um Landkarten gehen\ Wisst ihr was eine Landkarte ist/ [...]
03:19		B	*Lacht* Das ist eine Spielzeug-Landkarte\ [...]
03:36	<	B	[...] *leert den Briefumschlag mit den Figuren aus* Ich habe auch all das Spielzeug, das auf dieser Spielzeuglandkarte war mitgebracht\
	<	Mona	Das sind die Häuser\ Ich brauch aber lilane Häuser\ [...]
04:24		B	Versucht es doch mal genauso zu bauen wie es da ist\

Auch bei Tandem2 wird als Einstieg auf eine Landkarte verwiesen. Es wird aber explizit die Eigenschaften der vorliegenden Karte herausgearbeitet. Auch die Darstellungsperspektive wird explizit verdeutlicht, indem andere Perspektiven ausgeschlossen werden.

Tandem2			
02:04	<	B	Das ist wie eine Karte\ Also wie ne Landkarte, wo man Länder sehen kann und Wege und Straßen aber hier sieht man eben keine Städte oder Länder oder Wege oder Straßen, sondern hier sind [...]
	<	Jana	Das sind Figuren\ [...]
02:48		B	Das ist von **oben** drauf geguckt\ Genau von oben\ Nicht von der Seite auch nicht so schräg sondern genau von oben drauf\

Szene 2: Wie wird die blaue Figurenkonstellation dargestellt?

Tandem1 stellt die blaue Figurenkonstellation (vgl. Kreis auf Abb. 1 und 2) als Haus dar und interpretiert damit die Grundriss-Darstellung der Vorlage als Aufriss-Darstellung (vgl. Abb. 3).

Abb. 3

Tandem 1		
08:20	Mona	Das ist ein Punkt\ *zeigt auf den Grundriss des dünnen Zylinders* und das nicht\ *zeigt auf dünnen Zylinder*
	Sadira	*nimmt den dünnen Zylinder und stellt ihn auf den entsprechenden Grundriss* Da kann doch nicht hier der Turm sein/
	Mona	Ja\ Das müsstest du dann so malen *nimmt den dünnen Zylinder und legt ihn waagrecht auf die Mapvorlage* [...]
09:50	B	Ich habe einfach bei der ganzen Sache nur von **oben** draufgeguckt\
	Sadira	Ja\ Und dabei hast du vielleicht das fotografiert *zeigt auf dünnen Zylinder* anstatt das gemalt\

Die Überlegungen, die hinter dieser Wahl der Darstellung stehen, werden durch den Dialog deutlich, der sich zur Darstellung des Zylinders entfacht.

Die Kinder unterscheiden zwischen Figur-Konstellationen, welche fotografiert und einen Grundriss darstellen und Figur-Konstellationen, welche gemalt uns somit einen Aufriss darstellen.

Tandem 2		
06:55	B	Ihr könnt auch mal aufstehen und von **oben** ist das ja gemacht\ Von **oben** drauf gucken wie das von **oben** so aussehen könnte wie das blaue da\
09:23	Jana	Aber das soll ja kleiner sein\ *zeigt auf die blaue Figur* Du hast noch eins\
09:40	Ayse	Das soll so da *so nimmt Dreiecksprisma in die Hand* das da eine Hälfte so **ab**\ *nimmt den blauen Quader auch in die Hand* so\ und dann ist es genau das hier\ 

Tandem2 erkennt die Höhe als Problem und sucht nach Lösungen. Als eine Lösung wird das Fehlen eines passenden Objekts thematisiert oder dass das Dreiecksprisma gekürzt werden muss.

Insgesamt zeigt sich, dass die nicht vorhandene explizite Instruktion für den Umgang mit einer Landkarte bei Tandem1 dazu geführt hat, eine eigene Interpretation der Vorlage vorzunehmen und zwischen Fotografie (Grundriss) und Zeichnung (Aufriss) zu unterscheiden. Außerdem war durch die Betonung auf „Spielzeug-Landkarte“ eine Interpretation aus der Lebenswelt und damit aus der Darstellungswelt der Kinder möglich. In Kinderzeichnungen ist es durchaus üblich ein Haus im Aufriss darzustellen (vgl. Newcombe & Huttenlocher 2003). Die klare Instruktion für den Umgang mit der Vorlage eröffnete Tandem2 die Chance über die Rekonstruktion der blauen Konstellation nachzudenken. Die Höhe des Dreiecksprismas und damit die Besonderheit eines Grundrisses werden explizit thematisiert.

Die Erstellung dieses Beitrags wurde gefördert durch die LOEWE-Initiative der Hessischen Landesregierung

Literatur

Newcombe, N., Huttenlocher, J. (2003): Making Space: The Development of Spatial Representation and Reasoning. Massachusetts: The MIT Press.

Vogel, R. (2013): Mathematical Situations of Play and Exploration as an Empirical Research Instrument. In Ch. Benz, B. Brandt, U. Kortenkamp, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Eds.): Early Mathematics Learning – Selected Papers of the POEM 2012 Conference. New York: Springer, in Vorbereitung.

Brandt, B., Vogel, R. & Krummheuer, G. (Hrsg.) (2011): Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am „Center for Individual Development and Adaptive Education“ (IDeA). Münster: Waxmann.

Müller, K.P. (2004): Raumgeometrie. Raumphänomene – Konstruieren – Berechnen. 2. Auflage. Stuttgart: Teubner.

Steffen JUSKOWIAK, Braunschweig

Zur Wirkung von Selbstreflexion beim Bearbeiten mathematischer Probleme

Die Suche nach und die Erforschung von möglichen Maßnahmen zur Befähigung von SchülerInnen, mathematische Probleme zu lösen, ist ein Wissenschaftsgebiet von großer Relevanz. In möglichen Maßnahmen zur Verbesserung der Problemlösefähigkeit, die u. a. von KILPATRICK (1985) veröffentlicht worden sind, wird auch die Reflexion eigener Problemlösebemühungen aufgeführt. Dies legt nahe, dass das aus der Denkpsychologie bekannte Phänomen der Selbstreflexion (das Nachdenken über eigenes Denken und Handeln) eine geeignete Maßnahme zur Förderung der Problemlösefähigkeit sein kann. Bei einer genauen Sichtung bisheriger Veröffentlichungen in diesem Themengebiet, die insbesondere durch DÖRNER geprägt worden sind, wird jedoch ein Mangel an deskriptiven Erkundungen zur Selbstreflexion von SchülerInnen beim Bearbeiten mathematischer Probleme deutlich. Bisherige Studien, insbesondere zur Wirkung von Selbstreflexionen auf Problembearbeitungsprozesse, waren überwiegend präskriptiv-normativ angelegt. Selbstreflexionen wurden z. B. durch geplante Pausen und Fragen von Versuchsleitern extern angeregt. Außerdem wurden zumeist außermathematische Probleme verwendet, die von Erwachsenen bearbeitet worden sind. (vgl. z. B. TISDALE 1998)

Eigene Erkundungen und zugehörige Methodologie

Um das Wissen über nicht extern angeregte Selbstreflexionen bei SchülerInnen anzureichern und dabei insbesondere die Wirkung auf Problembearbeitungsprozesse zu untersuchen, wurde ein qualitativ angelegtes Forschungsprojekt initiiert. Dieses hat die deskriptive Erforschung von Selbstreflexionen, die vor der Beendigung der Problemlösebemühungen auftreten, zum Ziel. Als Probanden konnten dafür 16 ElftklässlerInnen Braunschweiger Gymnasien gewonnen werden. Diese haben individuell in fünf Sitzungen in regelmäßigen zeitlichen Abständen je ein geometrisches Beweisproblem bearbeitet und wurden währenddessen videographiert. Den Probanden stand je Problem eine Bearbeitungszeit von einer Stunde zur Verfügung. Außer der Aufforderung, das jeweils vorgelegte Problem zu bearbeiten und dabei laut zu denken, erfolgten keine weiteren Instruktionen. Zur Erforschung der während der Problembearbeitungen aufgetretenen Selbstreflexionen wurde zunächst eine geeignete Methodik entwickelt, um diese in Problembearbeitungsprozessen zu identifizieren.

Grundlage der Überlegungen ist aufbauend auf dem Steuerungsschritt-Arbeitsschritt-Modell von HEINRICH (2004) die Annahme, dass Arbeitsschritte (Träger kognitiver Verhaltensweisen) während der Problembearbeitung durch fakultativ auftretende Selbstreflexionen als Teile von Steuerungsschritten (Träger metakognitiver Verhaltensweisen) unterbrochen werden. Außerdem wird angenommen, dass sich zumindest ein Teil der ablaufenden Selbstreflexionen in den Verbalisierungen von Menschen und damit auf der Ebene der äußeren Sprache unter Zuhilfenahme eines geeigneten Arbeitsbegriffes (s. u.) identifizieren lassen. Entsprechend waren die Probanden aufgefordert, während der Problembearbeitungen laut zu denken. (Im Folgenden sind mit Selbstreflexionen stets anhand der Verbalisierungen der Versuchspersonen erkennbare Selbstreflexionen gemeint.) Das so gewonnene Material wurde zunächst hinsichtlich des beschrittenen Problembearbeitungsweges und der dabei verbalisierten Selbstreflexionen mit Hilfe der Methode der konsensuellen Validierung (vgl. MAIER 1991) ausgewertet. Zur Identifizierung verbalisierter Selbstreflexionen dient folgender Arbeitsbegriff: „*Selbstreflexion ist das Auseinandersetzen mit dem während der aktuellen Problembearbeitung selbst Getanem vor Beendigung der Problemlösebemühungen.*“

Davon ausgehend wurden die identifizierten Selbstreflexionen charakterisierende Merkmale herausgearbeitet und Kriterien zur Bewertung der Wirkung von Selbstreflexionen auf den Problembearbeitungsprozess entwickelt. Aus den Befunden haben sich Anregungen für das Verständnis und die unter gewissen Bedingungen mögliche Förderung der Problemlösefähigkeit durch Selbstreflexionen ergeben. Im Folgenden werden diese Befunde überblicksartig vorgestellt.

Auszüge aus den Forschungsbefunden

Insgesamt wurden für alle der 16 Versuchspersonen jeweils die letzten drei Problembearbeitungsprozesse hinsichtlich des Auftretens verbalisierter Selbstreflexionen analysiert. Es konnten dabei 21 Selbstreflexionen identifiziert werden. Keine der Versuchspersonen reflektierte in allen drei betrachten Problembearbeitungen erkennbar, mehrere jedoch in zweien, nur in einer oder gar keiner. Die Häufigkeit von Selbstreflexionen hat mit steigendem Schwierigkeitsgrad der vorgelegten Probleme deutlich abgenommen.

Hinsichtlich der herausgearbeiteten Merkmale von Selbstreflexionen sei auf JUSKOWIAK (2012) verwiesen.

Bei der Bewertung der Wirkung von Selbstreflexionen auf den Problembearbeitungsprozess wird zwischen Selbstreflexionen unterschieden, deren

Wirkung bewertet und deren Wirkung anhand der vorliegenden Informationen nicht bewertet werden kann. Im ersten Fall ist es weiterhin möglich, zwischen lösungsförderlichen, lösungshinderlichen und Selbstreflexionen ohne erkennbare Wirkung bzgl. der Zielerreichung zu unterscheiden. Eine Selbstreflexion wird als lösungsförderlich bewertet, wenn sich die Versuchsperson durch sie dem Ziel der Problembearbeitung weiter annähert. Als lösungshinderlich wird sie bewertet, wenn sich die Versuchsperson vom Ziel entfernt. Ist weder eine weitere Annäherung an das noch eine Entfernung vom Ziel erkennbar, wird die Selbstreflexion als Selbstreflexion ohne erkennbare Wirkung bzgl. der Zielerreichung bewertet.

Von 23 Selbstreflexionen konnte bei 20 die Wirkung anhand der vorliegenden Informationen bewertet werden. Drei dieser Selbstreflexionen wurden als lösungshinderlich, elf als Selbstreflexionen ohne erkennbare Wirkung bzgl. der Zielerreichung und sechs als lösungsförderlich bewertet. (Eine der 21 Selbstreflexionen musste für die Bewertung hinsichtlich ihrer Wirkung in drei getrennt zu bewertende Teile unterteilt werden.)

Als lösungsförderlich bewertete Selbstreflexionen wurden überwiegend durch einen Misserfolg ausgelöst, zeichnen sich durch eine globale (vollständige) Betrachtung zumindest des aktuellen Lösungsanlaufes (so genannte Reichweite der Selbstreflexion) und einen linearen Aufbau der Selbstreflexion aus. Letzteres meint ein chronologisches Auseinandersetzen mit dem bisher Getanen von einem Startpunkt bis zu einem Endpunkt. Drei der als lösungsförderlich bewerteten Selbstreflexionen weichen in jeweils genau einem Merkmal von den oben genannten ab. (vgl. auch NICKEL 2012)

Bei einer genaueren Betrachtung der Selbstreflexionen ohne erkennbare Wirkung bzgl. der Zielerreichung zeigt sich, dass ein großer Anteil dieser Selbstreflexionen das Potenzial gehabt hat, lösungsförderlich zu sein. Dies ist jedoch insbesondere durch das zumindest temporäre Fehlen relevanten mathematischen Wissen bzw. mathematischer Fertigkeiten verhindert worden. Damit wird die große Bedeutung auch des fachmathematischen Wissen bzw. die Beherrschung entsprechender Fertigkeiten für das Lösen mathematischer Probleme verdeutlicht. (vgl. auch NICKEL ebenda)

Während der Analysen hat sich gezeigt, dass die Probanden nicht immer den so genannten Gegenstand der Selbstreflexionen wie von den Auswertern als sinnvoll angesehen wählen. Bei fünf Selbstreflexionen betrachteten die Probanden das während der Arbeit am Problem eingesetzte mathematische Wissen bzw. die eingesetzten Fertigkeiten, während aus Sicht der Auswerter eine Betrachtung des strategischen Vorgehens sinnvoller gewesen wäre. Der umgekehrte Fall trat bei einer Selbstreflexion auf.

Gewonnene didaktische Anregungen

Die Wirkung von Selbstreflexionen wird nach den bisherigen Befunden zum einen durch die Verfügbarkeit mathematischen Wissens und mathematischer Fertigkeiten, das Wissen über strategisches Vorgehen und die Fähigkeiten zu dessen Umsetzung als situativ wenig veränderbare Faktoren bedingt. Zum anderen haben der Aufbau, die Reichweite und der Gegenstand als situativ stark veränderbare Faktoren ebenfalls Einfluss auf die Wirkung von Selbstreflexionen. Damit sind Faktoren bekannt, durch die auf die Wirkung von Selbstreflexionen Einfluss genommen werden kann.

Sollten sich die oben genannten Befunde in größerem Rahmen bestätigen, kann Selbstreflexion als Mittel zur Zielerreichung dienen, insbesondere wenn beim Bearbeiten eines mathematischen Problems ein Misserfolg auftritt und sie anschließend mit einer globalen Reichweite mit linearem Aufbau durchgeführt wird. Die Kenntnis dieser möglichen Maßnahme und das Vermögen, Selbstreflexion zu betreiben, dienen somit der Förderung der Problemlösefähigkeit.

Mitentscheidend für die Entfaltung der Wirkung der Selbstreflexion ist aber neben dem verfügbaren Wissen und Fertigkeiten die richtige Wahl des Gegenstandes der Selbstreflexionen. Hier erscheint eine stärkere Betrachtung bzw. Überprüfung des strategischen Vorgehens als bisher angebracht. Als eine Voraussetzung dafür wird die stärkere Sensibilisierung von SchülerInnen im Schulunterricht für die Betrachtung des eigenen strategischen Vorgehens angesehen.

Literatur

Heinrich, F. (2004). *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme*. Hamburg: Dr. Kovac.

Juskowiak, S. (2012). Ist Selbstreflexion beim Bearbeiten mathematischer Probleme lösungsförderlich? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 421 – 424). Münster: Wissenschaftliche Texte Münster.

Kilpatrick, J. (1985): A Retrospective Account of the Past 25 Years on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E.A. (Ed.): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (S. 1 – 15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Maier, H. (1991). Interpretative Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1991* (S. 97 – 107). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Nickel, S. (2012). *Selbstreflexionen von Schülerinnen und Schülern beim Bearbeiten mathematischer Probleme*. Masterarbeit, TU Braunschweig (Fakultät 6).

Tisdale, T. (1998): *Selbstreflexion, Bewusstsein und Handlungsregulation*. Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Gert KADUNZ, Klagenfurt

Geometrie als Mittel zur Strukturierung des Denkens

In den nun folgenden knappen Ausführungen soll die elementare euklidische Geometrie und Ihre Didaktik als Werkzeuge gesehen werden. Einerseits ist die Geometrie ein Mittel, um das Denken von Menschen in bestimmter Weise zu strukturieren. Zugleich kann die Didaktik der Geometrie als Interpretationsmittel verwendet werden, um über die Anfänge der Geometrie als beweisende Wissenschaft sprechen zu können. Den Beginn macht ein kurzer Ausflug ins antike Griechenland, in welchem über eine sozialpolitische Konstellation berichtet wird, in der die Geometrie als Übungsfeld zum Erwerb von Argumentationskompetenzen verwendet wurde. Eine geometriedidaktische Interpretation, warum die Geometrie bei den Griechen mehr der Schulung des Denkens und Argumentierens als der Bewältigung von Alltagsproblemen diente, schließt sich an die historischen Überlegungen an. Aus geometriedidaktischer Sicht waren und sind es Besonderheiten der geometrischen Zeichen und deren Verwendung, welche den angedeuteten Verwendungszweck wesentlich unterstützten.

Zuerst wenden wir uns den antiken Griechen zur Zeit der Entstehung der der Geometrie als beweisende Wissenschaft zu. Der hier betrachtete Zeitraum umfasst etwa die Zeit zwischen dem 8. Jhdt. und dem 6. Jhdt. vor Beginn der Zeitrechnung. Das Betreiben von Geometrie diente weniger den Zweck – im Gegensatz zur Verwendung in Ägypten oder Mesopotamien - Probleme des Alltags zu lösen, als vielmehr der Formulierung und Begründung geometrischer Sätze. Welche Gründe können für diese Verwendung aus historisch-sozialer Sicht und letztlich aus der Position einer geometrischen Zeichenverwendung angeführt werden? Diese Zeichenverwendung soll den Erfolg der Geometrie als eine spezielle Leitwissenschaft der antiken griechischen Kultur plausibel machen.

In Anlehnung an Pichot (1995), Netz (1998) oder Russo (2005) können wir annehmen, dass dass die Geometrie als argumentierende Wissenschaft Anteil an der Entstehung der griechischen Demokratie hatte.

These: *Die Griechen entwickelten ihre Verwendung von Geometrie, um damit auch ihre demokratische Gesellschaftsordnung zu organisieren. Dabei wurde die Geometrie, genauer das Argumentieren innerhalb geometrischer Begründungen als paradigmatisches Bsp. von nachvollziehbarer Rede betrachtet. Besonderheiten der Verwendung der Zeichen der Geometrie stützten dies.*

Aus Platzgründen kann hier nur stichwortartig festgehalten werden, dass eine neue sozialpolitische Situation, die wesentlich durch Abwanderung von Teilen der Bevölkerungen der griechischen Stadtstaaten im oben genannte Zeitraum bestimmt war, zum Problem der Neuorganisation der Stadtstaaten führte (vgl. Pichot, S. 243ff). Dies bestand unter anderem in der Rekrutierung von Teilen der Bevölkerung, die bis dato vom „Wehrdienst" entbunden waren, zu militärischen Aufgaben. Diese Teilhabe am „Wehrdienst" hatte gleichzeitig zur Folge, dass diese Bevölkerungsteile oder zumindest deren Vertreter maßgeblich in politische Entscheidungsprozesse einzubinden waren. Diese Einbeziehung von vormals nicht entscheidungsbefugten Schichten der Bevölkerung führte zu einer Reihe von organisatorischen Fragen. Unter anderem entstand das Problem, sich in Versammlungen nun auch mit diesen neuen „gleichberechtigten" Personen - als Mitglieder der „Kriegerkaste" – über politische Fragen in Rede und Gegenrede austauschen zu müssen. So zeigt sich in diesem Zeitraum eine Entwicklung der altgriechischen Sprache weg von einer eher poetischen Verwendungsweise hin zu einer argumentierenden Verwendungsweise. Gleichzeitig, so die hier vorgelegte These, findet man Anfangsgründe der Geometrie als beweisende Wissenschaft, mit der man das sozial notwendige Werkzeug der Argumentation lernen konnte. Insofern transformierten die antiken Griechen die Geometrie als Mittel zur Strukturierung von Umwelt, wie sie vornehmlich in Ägypten oder dem Zweistromland schon lange verwendet wurde, unter anderem in ein Mittel zum Lernen und Üben des nachvollziehbaren Argumentierens. Dieser Gedanke beendet die gezwungenermaßen holzschnittartigen Ausführungen und werden nun durch wenige didaktische Überlegungen unterstützt.

Womit kann diese neue Verwendungsweise der Anfänge der argumentierenden Geometrie didaktisch begründet werden? Drei mögliche Punkte, die durch weitere Überlegungen ergänzt werden müssen, können als Quelle der Verwendbarkeit der Geometrie als Argumentationsmittel vermutet werden.

1. *Die Realisierung geometrischer Begriffe mittels sichtbarer Zeichen ist wesentlich durch jene Relationen/Beziehungen bestimmt, welche diese Begriffe festlegen.*

2. *Die Zeichen der Geometrie entziehen sich im Gegensatz etwa zur elementaren Arithmetik, Algebra oder Analysis algorithmischen Umformungen. In der Geometrie können wir im wesentlichen nicht „rechnen". Wenn wir rechnen – mit den Zeichen der Arithmetik/Algebra – so verlassen wir die Geometrie.*

3. *Eine vor uns auf einem Blatt Papier sichtbare geometrische Konstruktion zeigt im Regelfall nicht ihre Geschichte. Obwohl die Konstruktion*

Schritt für Schritt durchgeführt wurde, bedarf das Ergebnis einer oft aufwendigen Interpretation. Diese geometrische Hermeneutik ist weniger eine Hermeneutik des Ergebnisses der Konstruktion als vielmehr eine Durchdringung der geometrischen Gründe der Konstruktion. Die regelhafte Verwendung der geometrischen Zeichen verbirgt notwendiger weise die Geschichte einer geometrischen Zeichnung.

Nur wenige Stichworte zur Erläuterung dieser Sichtweisen sind hier möglich. Der ersten Punkt kann aus der Position einer operativen Begriffsbildung, kurz OB, (Bender & Schreiber, 1985) betrachtet werden. Bender und Schreiber meinen und das kann auch aus einer tendenziell konstruktivistischen Position gelesen werden, dass die Grundbegriffe der Geometrie nicht durch Abstraktion, also einem Absehen von Eigenschaften, sondern durch ein Hineinsehen von Eigenschaften in „Gegenstände" – dazu zähle ich auch die Zeichen der Geometrie – gebildet werden. Diese Hinwendung zur Verwirklichung führt also zur materiellen Realisierung. Die Autoren sprechen bei dieser Realisierung von Normen, die gleichsam als operative Grundlage für die Herstellung und dann auch für den Gebrauch zu sehen sind. Sie präsentieren als erläuterndes Beispiel die Herstellung eines Würfels. Nur müssen wir uns keineswegs auf die Raumgeometrie konzentrieren. Auch die Herstellung elementarer Begriffe der ebenen Geometrie (Strecke, Kreis, n-Eck, Normale, Parallele etc.) kann mit der OB gedeutet werden. Die Konstruktion von Begriffen ist wesentlich von der Herstellung entsprechender Zeichen mitbestimmt. Denken wir nur daran, worauf wir Lernende bei der Konstruktion eines Kreises oder einer Normalen hinweisen. Das Zeichnen berücksichtigt die Vorschrift. Das sich bewährende Zeichen bestärkt kognitiv die Handlungsvorschrift. Dies nennen Bender und Schreiber die Operativität beim Begriffserwerb. Zum zweiten Punkt kann erläuternd gesagt werden, dass bei der Herstellung einer geometrischen Konstruktion, die verwendeten Zeichen im Regelfall kaum Möglichkeit anbieten, durch regelhafte Umformung die vorhandene Konstruktion in eine andere über zu führen. Einzig die Verwendung einer DGS würde in dieser Hinsicht Umformungen unterstützen. Aus diesem scheinbaren Mangel an Umformungsmöglichkeiten kann ein Gewinn erzielt werden. Erinnern wir uns an die elementare Algebra und stellen wir uns vor, dass als Ansatz bei der Lösung einer Aufgabenstellung eine Gleichung erstellt wurde. Nach einer Reihe von Umformungen entsteht eine Gleichung der Form $ax^2+bx+c=0$. Lernende erkennen diesen Ausdruck – sofern geübt – und berechnen mittels Lösungsformel für quadratische Gleichungen eine Lösung. Regelhafte Umformungen können zu Konfigurationen führen, welche die Verwendung eines Satzes – hier in Gestalt einer Lösungsformel – nahe legen. In der Geometrie sieht die Sache anders aus. Denken wir an eine Aufgabe, welche den Satz vom Peripheriewinkel benötigt. Wir können dann das Problem behandlen, wenn wir die durch diesen Satz festgelegten Relationen bescheid wissen. Kennt man diesen Satz nicht, so ist die Aufgabe günstigstenfalls näherungsweise z. B. mit DGS zu bearbeiten. Die Lösung im Sinne der euklidischen Geometrie, welche einer formalen Prüfung standhält, ist nicht vorstellbar. So erscheint bereits der Ansatz zur Lösung, also der erste Schritt von der Kenntnis eines geometrischen Satzes bestimmt zu sein. Und dies setzt sich auf dem Lösungsweg auch so fort. An den wenigsten Stellen können wir in der elementaren Geometrie auf entlastende weil gleichsam mechanisch verwendbare Aktionen hoffen. Stets verweisen wir in der Geometrie – zumindest gedacht – bei jedem Schritt auf einen Satz oder eine Definition. Dieser zweite Punkt führt also zur Frage der Modularisierung des Denkens (Dörfler, 1991) und damit zur Bedeutung von Modulen in der elementaren Geometrie. Der dritte Punkte nimmt Bezug auf die Notwendigkeit der Interpretation einer geometrischen Konfiguration und damit auch auf das Verhältnis von hörbarer Sprache und sichtbarem geometrischem Zeichen (Krämer, 2002). Über diese drei Punkte wird anderer Stelle ausführlicher berichtet werden. Was nun die Anfangsgründe der griechischen Geometrie betrifft, so waren die antiken Geometer mindestens mit den hier angedeuteten geometriedidaktischen Themen konfrontiert. Jedes kann auf seine Weise als Feld gelesen werden, auf dem das Argumentieren geübt werden kann.

Literatur

Bender, P., & Schreiber, A. (1985). Operative Genese der Geometrie (Vol. 12). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky, B.G.Teubner.

Dörfler, W. (1991). Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In P. W. Dörfler W., Schneider E., Wegenkittl K. (Hrsg.), Computer - Mensch - Mathematik (S. 51-76). Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky; B.G.Teubner.

Krämer, S. (2002). Sprache und Sprechen: Wie sinnvoll ist die Unterscheidung zwischen einem Schema und seinem Gebrauch. In S. Krämer & E. König (Hrsg.), Gibt es eine Sprache hinter dem Sprechen? (S. 97-125). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Netz, R. (1998). Greek Mathematical Diagrams: Their Use and Their Meaning. For the Learning of Mathematics, 18(3), 33-39.

Pichot, A. (1995). Die Geburt der Wissenschaft. Frankfurt, New York: Campus.

Russo, L. (2005). Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens. Berlin: Springer.

Stephan BERENDONK, Köln; Rainer KAENDERS, Köln

Am Spirographen Mathematik erleben

Die Beschäftigung mit Mathematik hat im Laufe der Jahrhunderte einen festen institutionellen Platz in Schulen und Universitäten erlangt. Dabei wird Mathematik vielfach als etwas erlebt, was man absolvieren und beherrschen soll und zu deren Beschäftigung man von „Außen“ aufgefordert werden muss. Im schulischen Kontext wird daher häufig nach dem Sinn und Zweck von Mathematik gefragt.

Möchten wir die zu behandelnde Mathematik den Lernenden gegenüber rechtfertigen, so stehen wir vor einer großen mathematikdidaktischen Herausforderung. Natürlich, eine Möglichkeit sich dieser Aufgabe zu nähern, besteht darin, den Reiz und die Leistungsfähigkeit der Mathematik in Anwendungskontexten durch Modellierung praktischer Probleme zu illustrieren, und so im Nachgang die Auseinandersetzung mit Strukturen zu motivieren. Problematisch dabei ist, dass viele relevante und interessante Anwendungskontexte nur mithilfe eines schon vorhandenen Repertoires mathematischer Strukturen sinnvoll erschlossen werden können. Die beeindruckenderen Beispiele sind eben zumeist mathematisch komplex.

Die Nützlichkeit der Mathematik in Bezug auf die Gesellschaft den Lernenden auf überzeugende Weise darzustellen und darüber die „Sinnfrage“ zu beantworten, ist jedenfalls kein leichtes Unterfangen. Andererseits beschäftigen sich viele Mathematiker mit Strukturen von deren gesellschaftlicher Relevanz sie, so sie denn schon existiert, gar nichts wissen, oder an der sie zumindest nicht erkennbar interessiert sind. So stellt sich die Frage, warum ein Mensch freiwillig Mathematik oder allgemeiner eine Wissenschaft betreibt. Dörpinghaus (2009) beschreibt das so: „*Wir betreiben Wissenschaft und nehmen Anstrengungen im Denken auf uns aus Liebe (eros).(...) Dieser Eros, diese Lust auf Bildung, dieses Angemacht-werden-von etwas und Nicht-mehr-ablassen-können, weil es uns beschäftigt und uns keine Ruhe lässt, ist, und das ist entscheidend für das Verständnis des eros, eben kein innerer Trieb des Menschen, wie man zunächst und durch psychologische Denkmuster geschult meinen könnte. Nein, er ist eine unbändige Neugierde, die sich an den Dingen entzündet und für deren Verständnis man all die Mühen auf sich nimmt.*“

Die Beschäftigung mit Mathematik muss Dörpinghaus zu folge also gar nicht an einen äußeren Zweck gebunden sein um sie als sinnvoll zu erfahren. Was wir brauchen, ist ein Kontext, der uns anspricht und über den wir aus uns heraus etwas erfahren möchten. Die Sinnfrage erweist sich dann als uninteressant. Einen solchen Kontext haben wir für uns selbst, für einige

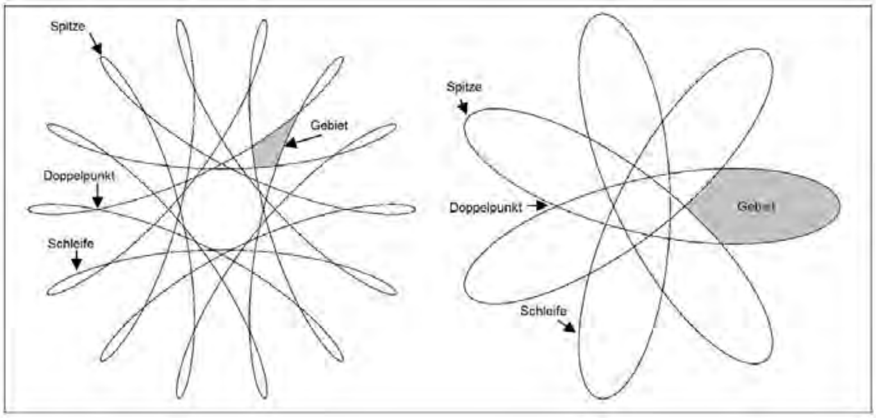
Lehrerinnen und Lehrer und vor allem für eine ganze Reihe von Schülerinnen und Schülern mit dem Spirographen gefunden.

Wir werden im Folgenden skizzieren, wie die Beschäftigung mit Spirographen Fragen bei den Handelnden hervorrufen kann, die dann weitere Strukturierungsprozesse motivieren und initiieren. Die dabei beschriebenen Erfahrungen sammelten wir bei Aktivitäten mit fünf verschiedenen Personengruppen:

- Primarstufe - KölnerKinderUni 2011 (mit M. Mink & T. Schmidt)
- Mittelstufe - Solinger Mathematik-Wochenende 2011
- Oberstufe - Masterclass Wiskunde D 2012 (mit L. van den Broek)
- Begabte - Känguru-Camp 2011 (mit L. van den Broek)
- LehrerInnen - Workshop bei den *NWD 2013*

1. Zeichnen, Zählen, Sprechen

Der Spirograph lädt zu einer spielerischen Beschäftigung ein, bei der viele bunte und ästhetische Bilder entstehen können. Das „Zeichnen" alleine führt jedoch nicht unbedingt zu mathematischen Fragen, sodass auch ein begeisterter und ausdauernder Zeichner übersehen kann, dass es sich beim Spirographen zugleich um einen mathematischen Kontext handelt.



Eine hilfreiche Aktivität um einen Zugang zu diesem Aspekt des Spirographen zu erhalten, kann das „Zählen" sein. Wir zählen einmal alles, was es an den gezeichneten Bildern, den Zahnrädern und während des Zeichenprozesses zu zählen gibt.

Nachdem wir munter gezählt haben, möchten wir gerne darüber „Sprechen". Um aber mitteilen zu können, was wir beispielsweise gezählt haben, müssen wir die jeweiligen Formen und Phänomene benennen. Wir entscheiden uns für *Spitze*, *Doppelpunkt*, *Schleife* und *Gebiet* (siehe Abb.). Die

Wahl der suggestiven Bezeichnungen zusammen mit den Pfeilen auf die betreffenden Phänomene dürfte ausreichend erklären was gemeint ist.

Das „Zählen“ hat uns dazu angehalten, bestimmte Merkmale der Spirographen-Kurven bewusst wahrzunehmen. Durch das „Sprechen“ waren wir gezwungen diese explizit mit Begriffen zu versehen. Nun haben wir etwas in der Hand über das wir konkrete Fragen stellen können.

2. Spirographen induzieren Fragen

Die soeben beschriebene überwiegend von Zeichnen und Zählen geprägte Phase des „in-Kontakt-Tretens“ mit dem Spirographen als einem mathematischen Kontext führten wir auch jeweils bei den oben genannten Aktivitäten durch. Anschließend forderten wir die Gruppen dazu auf (mathematische) Fragen zum Spirographen zu stellen. Bei der Aktivität zur Kölner KinderUni und beim NWD-Workshop traten dabei Fragen zu folgenden Gegenständen auf (‚S‘ für Schüler und ‚L‘ für Lehrer (in Sechsergruppen)):

- Radien des inneren und äußeren Begrenzungskreises (8L)
- Färbbarkeit der entstehenden Bilder mit verschiedenen Farben (5L)
- Flächeninhalt und Anzahl der Gebiete (3L)
- Vielfalt und Typisierung der möglichen Kurven (L+2S)
- Länge der Kurven (L+S)
- Eigenschaften und Anzahl der Spitzen (2L)
- Figur als Parameterkurve (2L)
- Doppelpunkte oder Mehrfachpunkte (2L)
- Verhältnisse der Anzahlen der Zähne und anderer Größen (L+S)

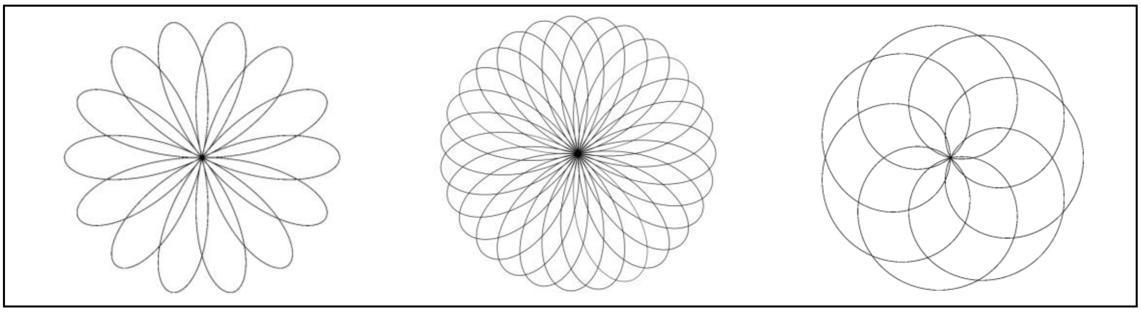
Als einzelne Punkte wurden genannt: Vorhersage der Form der Kurven aufgrund der Zahnradzahlen und der Position des Stiftes im beweglichen Rad (S), Verhältnis der Radien der Ringe von Doppelpunkten um das Zentrum (L), Anzahl der Doppelpunkte (L), Verbindung zu türkischen Knoten oder Planetenbahnen (2 L), möglicher dreidimensionaler Spirograph (L), eindimensionale Version (entlang einer geraden Linie) z.B. zwei Trommeln mit verschiedenen Rhythmen (L), Dreieck als innere Form (L), Kurven mit nur einem Gebiet (L), Tangente in einem Punkt (L), Eigenschaften und Ähnlichkeiten der Gebiete (L), „Zurückschleifen“ oder „Wendepunkte“ (L), Verhältnis 2:1 eine Ellipse? (L).

Wir beobachten, wie die pure Beschäftigung mit dem Spirographen Fragen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades hervorruft. Bemerkenswert ist zudem, dass ein bestimmter Kanon von Fragen wiederholt auftritt, sodass sich eine Lehrperson gut auf die prinzipiell offene Situation vorbereiten kann.

3. Beziehungshaltigkeit

Einige der genannten Fragen (z.B. die nach dem Radius des inneren und äußeren Kreises) können mit gesundem Menschenverstand, manche schon mit Schulwissen (z.B. ggT, Bruchrechnung, Symmetrieargumente, Schubfachprinzip, Kongruenz und Ähnlichkeit) beantwortet werden. Für das Lösen anderer Fragen kann zunächst der Erwerb einzelner neuer Begriffe hilfreich sein (z.B. das momentane Drehzentrum zur Konstruktion einer Tangente oder die Windungszahl zum Nachweis der Zweifärbbarkeit). Aber es gibt auch Fragen (z.B. nach der Länge der Kurven, nach dem Flächeninhalt der Gebiete oder nach der Anzahl der Doppelpunkte), die tiefer gehen und mit elementaren Mitteln nur schwer in den Griff zu kriegen sind.

Sobald man sich mit den Problemen beschäftigt, stößt man wieder auf neue Phänomene und es entstehen neue Fragen. Zum Beispiel führt die Frage nach möglichen höheren Schnittpunkten auf elementarem Wege zur Betrachtung und möglicherweise schließlich zu einem eingehenderen Studium von Rosenkurven (siehe Abb.).



Die aufgeführten Fragen decken auch aus thematischer Sicht ein breites Spektrum ab. Neben arithmetischen Fragen (z.B. nach der Anzahl der Spitzen in Abhängigkeit von der Anzahlen der Zähne der verwendeten Räder), und elementargeometrischen Fragen (z.B. ob es sich beim Verhältnis 2:1 um eine Ellipse handelt), treffen wir auf topologische Fragen (z.B. nach der Färbbarkeit der entstehenden Bilder mit verschiedenen Farben) und analytische Fragen (z.B. nach dem Flächeninhalt der Gebiete). Wir haben es hier offenbar mit einem äußerst reichen Kontext zu tun.

Literatur

Berendonk, S., Van den Broek, L. (2013): SpiroSporen. Zebra-Boek Serie, Utrecht: Epsilon-Uitgaven.

Dörpinghaus, A. (2009): Bildung - Plädoyer wider die Verdummung (Erweiterte Fassung). In: Dt. Hochschulverband (Hg.): Glanzlichter der Wissenschaft. Ein Almanach. Stuttgart.

Udo KÄSER, Bonn

Stochastisches Wissen und Entscheidungskompetenz in probabilistischen Problemsituationen ‚know that' und ‚know how' von Viert- und Siebtklässlern über Häufigkeit, Zufall und Wahrscheinlichkeit

1. Einleitung

Fehlvorstellungen kennzeichnen oft das Verständnis von stochastischen Problemen. Ursachen sind die unzureichende Reflektion informeller Erfahrungen (Konold, 1990) und die Bedeutungsdifferenz zwischen stochastischen Begriffen im Alltag bzw. im Kontext der Mathematik (Hauer-Typpelt, 2011). So wird das spielerische Erleben von Chancen im Alltag im Regelfall nicht reflektiert. Auch wird Zufall alltäglich entgegen der Fachbedeutung oft so aufgefasst, dass ein Ereignis zufällig ist, wenn es selten eintritt. Insofern besteht eine Aufgabe von Stochastikunterricht darin, inadäquate, primäre Intuitionen in sicheres, Handlung leitendes Wissen zu überführen (Käser, 2010, Hauer-Typpelt, 2011).

2. Theoretische Grundlagen

Grundsätzlich kann zwischen deklarativem Begriffswissen, das propositional ist und über welches explizit verfügt wird, und prozeduralem Gebrauchswissen, dass nicht-propositionalen Charakter hat und nur implizit vorliegt, differenziert werden (Käser & Röhr-Sendlmeier, 2012).

Zur Frage, inwieweit Schülerinnen und Schüler über ein deklaratives Wissen von Grundbegriffen der Stochastik verfügen, also Begriffe der Stochastik adäquat definieren, erklären oder erläutern können, bzw. inwieweit sie in probabilistischen Problemsituationen adäquat handeln oder entscheiden können, liegen nur wenige fundierte empirische Studien vor. Einige Studien geben Hinweise darauf, dass die Fähigkeit von Schülerinnen und Schülern stochastische Situationen begrifflich exakt auszudrücken und ihr Verständnis für stochastische Probleme altersunabhängig nur schwach ausgeprägt sind und Unterricht in Stochastik wenig wirksam ist (Green 1982, Engel & Sedelmeier 2004, Rasfeld 2004). Die Studie von Hirsch & O'Donnell (1993) zeigt an, dass nur ein Stochastikunterricht, der kognitive Konflikte erzeugt, mittel- und langfristig zu einer Verbesserung probabilistischer Vorstellungen führt. Die Studie von Fischbein & Schnarch (1997) liefert Hinweise darauf, dass für verschiedene inhaltliche Aspekte der Stochastik in unterschiedlicher Weise Alterseffekte hinsichtlich der Adäquatheit von Schülervorstellungen vorliegen. Für die Bewertung dieser Studien ist allerdings zu beachten, dass sie in verschiedenen Ländern mit unterschiedlichem Schulsystem erhoben wurden und teilweise methodischen Limitationen unterliegen. Insgesamt ist daher weitgehend unklar, welches stochastische Verständnis deutsche Schulkinder heutzutage besitzen.

Vor diesem Hintergrund zielt die vorliegende Studie darauf ab zu erhellen, über welches Begriffswissen von Häufigkeit, Zufall und Wahrscheinlichkeit Schülerinnen und Schüler verfügen, inwieweit sie in der Lage sind mit probabilistischen Problemsituationen umzugehen und korrekt zu entscheiden sowie den Zusammenhang zwischen Begriffswissen und Handlungs- / Entscheidungskompetenz zu untersuchen.

2. Methodik

91 Viert- und 109 gymnasiale Siebtklässlern nahmen an der Studie teil. Die Grundschulkinder waren im Mittel ca. neun ($M = 9.3$, $SD = 0.6$ Jahre), die Gymnasiasten zwölfeinhalb Jahren alt ($M = 12.5$ Jahre, $SD = 0.5$ Jahre). Jeweils lag in etwa eine Gleichverteilung des Geschlechts vor (4. Klasse: 46 Mädchen, 45 Jungen; 7. Klasse: 52 Mädchen, 57 Jungen).

Die Erhebung wurde im Klassenverband schriftlich mit Hilfe eines zweiteiligen Fragebogens durchgeführt. Der erste Teil erfasst mittels offener Fragen das Verständnis der Schülerinnen und Schüler für die stochastischen Grundbegriffe Häufigkeit, Zufall und Wahrscheinlichkeit. Der zweite Teil erhebt mittels 25 Multiple-Choice-Aufgaben die Entscheidungskompetenz in probabilistischen Problemsituationen.

Bei unabhängiger Analyse ergab sich für die Angaben im ersten Teil des Instrumentariums als Inter-Rater-Reliabilität eine Übereinstimmung von 95 Prozent. Für die Items im zweiten Teil des Instrumentariums lag nach Ausschluss zweier Items aufgrund unzureichender Trennschärfe eine gute Homogenität von $\alpha = .816$ vor. Die Auswertung des zweiten Teils wird so vorgenommen, dass die Anzahl der richtigen Antworten gezählt wird und der Score linear auf eine Skala von 0 bis 100 Punkte transformiert wird.

3. Ergebnisse

Mit Häufigkeit sind drei Vorstellungen verknüpft: die inadäquate Vorstellung von Häufigkeit als Vielheit (d. h. etwas liegt vielfach vor oder passiert sehr oft), als absolute (Anzahlkonzept) bzw. als relative Häufigkeit. Die letzten beiden Konzepte sind nur bei Siebtklässlern zu finden (34 bzw. 21 Prozent). Die Unterschiede der Jahrgangsstufen werden signifikant ($p < 0.001$, $\varphi = 0.414$ bzw. $p < 0.001$, $\varphi = 0.321$). Das Konzept der Vielheit formulieren 87 Prozent der Viert- und 88 Prozent der Siebtklässler, ohne dass der Unterschied signifikant wäre.

Der Begriff Zufall ist ebenfalls mit drei Vorstellungen verbunden: Zufall als Unvorhersehbarkeit, als Unbeeinflussbarkeit und als Gleichverteilung von Chancen. Letztere inadäquate Vorstellung zeigt sich nur vereinzelt bei wenigen Siebtklässlern (6 Prozent). In beiden Teilstichproben zeigt sich das Konzept der Unvorhersehbarkeit (40 bzw. 47 Prozent) häufiger als das Konzept der Unbeeinflussbarkeit (7 bzw. 29 Prozent), wobei der Unterschied im Jahrgangsstufenvergleich nur für die Sichtweise von Zufall als Unvorhersehbarkeit signifikant wird ($p < 0.001$, $\varphi = 0.289$).

Für den Begriff Wahrscheinlichkeit liegen sechs Konzepte vor: Wahrscheinlichkeit als Trefferchance (4 bzw. 39 Prozent), als kleiner-größer-Relation eines möglichen Eintretens (1 bzw. 16 Prozent), als Maß in [0;1] zwischen unmöglichem und sicherem Ereignis (4 bzw. 5 Prozent), als Ausdruck in Zusammenhang mit relativen Häufigkeiten (6 bzw. 30 Prozent), als Maß zum Schätzen (44 bzw. 26 Prozent) bzw. zur Berechnung von Unsicherheit (0 bzw. 13 Prozent). Die Auffassung von Wahrscheinlichkeit als Maß in [0;1] findet sich in beiden Jahrgangsstufen nur vereinzelt. Das Verständnis von Wahrscheinlichkeit als Schätzer für Unsicherheit findet sich signifikant häufiger bei Viertklässlern ($p < 0.001$, $\varphi = 0.192$). Die übrigen Vorstellungen werden signifikant häufiger von Siebtklässlern formuliert ($p < 0.001$ mit jeweils mittleren Effektstärken).

Des Weiteren sind die Beispiele und Erklärungen der Siebtklässler häufiger adäquat ($p < 0.001$ mit jeweils mittleren Effektstärken) mit Ausnahme der Erklärungen für Zufall bzw. Wahrscheinlichkeit, für die aber kleine Effekte vorliegen ($p = 0.068$ bzw. $p = 0.057$). In beiden Jahrgangsstufen gelingt am ehesten ein adäquater Zugang zum Begriff Zufall (37 bzw. 81 Prozent). Schwieriger sind die Begriffe Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (Häufigkeit: 29 bzw. 61 Prozent; Wahrscheinlichkeit: 16 bzw. 59 Prozent).

Im Test der Entscheidungskompetenz liegen die Viertklässler mit im Mittel 44.0 Punkten ($SD = 15.6$) signifikant über dem Rateniveau ($p < 0.001$, $d = 1.85$). Die Siebtklässler lösen knapp drei Viertel der Aufgaben ($M = 71.6$, $SD = 12.8$) und schneiden signifikant besser ab ($p < 0.001$, $d = 1.94$).

Schließlich zeigt sich je nachdem, ob adäquate oder inadäquate Vorstellungen vorliegen, kein signifikanter Unterschied hinsichtlich der Entscheidungskompetenz in probabilistischen Problemsituationen. Dies gilt gleichermaßen für Viert- und Siebtklässler.

4. Diskussion

Der Befund fehlender altersspezifischer Unterschiede hinsichtlich der Häufigkeit stochastischer Fehlvorstellungen bestätigt sich nicht. Ob dies auf die

Unterrichtsqualität zurückzuführen ist, bleibt offen und bedarf einer längsschnittlichen Überprüfung unter Berücksichtigung aller Schulformen. Unbefriedigend fällt die Qualität des begrifflichen Wissens aus: Dass etwa nur ein Drittel der Viert- und ca. 60 Prozent der gymnasialen Siebtklässler Häufigkeit adäquat ausdrücken können, spricht für Mängel in der mathematischen Sprachkultur. Problematisch ist auch der Befund, dass Begriffswissen und Entscheidungskompetenz weder bei Grundschülern noch bei Gymnasiasten korrelieren. Dies zeigt, dass stochastisches ‚know that' und ‚know how' ohne Bezug erworben wird. So wäre es wichtig, eine stärkere Vernetzung von stochastischem Wissen und Können anzustreben. Hierfür ist eine bessere Verschränkung von Unterrichtsinhalten der Stochastik über die verschiedenen Jahrgangsstufen hinweg unverzichtbar.

Literatur

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2004): Zum Verständnis von Zufall und Variabilität in empirischen Daten bei Schülern. In: Unterrichtswissenschaft, 32, 169 - 190.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997): The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. In: Journal for Research in Mathematics Education, 28, 96 - 105.

Green, D. R. (1982): Probability concepts in 11-16 year old pupils. Loughborough, U.K.: Centre for Advancement of Mathematical Education in Technology, Loughborough, University of Technology.

Hauer-Typpelt, P. (2011): Tragfähige Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht. In: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 43, 75 - 87.

Hirsch, L. & O'Donnell, A. (1993): An Evaluation of Instructional Interventions to Eradicate the Misconception of Representativeness. In Misconception Trust (ed.): The Proceedings of the Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Ithaca, NY: Misconception Trust.

Käser, U. (2010): Fehler begehen – Mathematik verstehen. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.): Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 167 - 178.

Käser, U. & Röhr-Sendlmeier, U. M. (2012): Inzidentelles Lernen von Faktenwissen. In U. M. Röhr-Sendlmeier (Hrsg.): Inzidentelles Lernen. Wie wir beiläufig Wissen erwerben. Berlin: Logos, 11 - 42.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A. D., Hendrikson, J. & Lipson, A. (1990): The origin of inconsistencies in probabilistic reasoning of novices. In D. Vere-Jones (ed.): Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics. Vol. 1. The Netherlands: ISI Publications in Statistical Education, 357 - 362.

Rasfeld, P. (2004): Verbessert der Stochastikunterricht intuitives stochastisches Denken? In: Journal für Didaktik der Mathematik, 25, 33 - 61.

Leander KEMPEN, Paderborn

Generische Beweise in der Hochschullehre

Um Erstsemesterstudierenden den Übergang in die Hochschulmathematik zu erleichtern wurde durch die AG eMath (eLearning in Mathematik und mathematische Vor- und Brückenkurse) des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) eine neue obligatorische Brückenkursvorlesung an der Universität Paderborn entwickelt, welche sich an Lehramtsstudierende des Bachelorstudiengangs Haupt- und Realschule richtet. In dieser Veranstaltung sollen die Studierenden explizit auf ihr vorhandenes schulmathematisches Wissen zurückgreifen, welches im Verlauf der Veranstaltung mit der „neuen" Hochschulmathematik verbunden werden soll. Im Kontext von mathematischen „Forschungsprojekten" sollen Betrachtungen von Beispielen und beispielgebundenen Beweisen (hier: operative und generische Beweise) den Übergang zum formalen Beweisen bereiten. Im Folgenden werden die Ergebnisse von Hausaufgabenanalysen von Studierenden zum beispielgebundenen und formalen Beweisen aus den Wintersemestern 2011/12 und 2012/13 dargestellt und miteinander verglichen.

1. Theoretischer Hintergrund

1913 beschreibt Branford in seinen Beweisstufen die *intuitive Ableitung*, welche sich auch auf „Postulate der sinnlichen Erfahrung" berufen kann (S. 103). „Sie [die intuitive Beweisstufe] kann allgemeine […] Wahrheiten aufstellen und kann zu dem wissenschaftlichen Evidenzideal die Anregung geben" (S. 239). Diese Idee von *inhaltlich-anschaulichen* Beweisen (Wittmann & Müller, 1988) wurde später von verschiedenen Mathematikdidaktikern aufgegriffen und unter verschiedenen Aspekten beleuchtet (etwa: Semadeni, 1974; Kirsch 1979). Während Wittmann (1985) in *operativen Beweisen* die Wirkungen von Handlungen (algebraischen Operationen u.a.) untersucht, betonen etwa Rowland (2002) und Mason und Pimm (1984) das generische Moment von Beispielbetrachtungen, um daraufhin die Beweisidee auf einen formalen Beweis übertragen zu können. Auch Padberg (1997) nutzt diesen Übergang vom beispielgebundenen Beweis zum formalen Beweis innerhalb seiner Beweisniveaus, um Studierende an das formale Beweisen heranzuführen.

2. Forschungsfragen

Für die Untersuchung dieses didaktisch motivierten Einsatzes von beispielgebundenen Beweisen wurden die folgenden Forschungsfragen formuliert:

a) Wie argumentieren die Studierenden, wenn sie aufgefordert werden einen operativen (generischen) Beweis zu führen?

b) Nutzen Sie ihre Argumentation aus dem operativen (generischen) Beweis auch im formalen Beweis?

3. Design der Studie

In den ersten beiden Vorlesungssitzungen wurden die Studierenden mit operativen und formalen Beweisen vertraut gemacht. Nachdem sie eine Übung zu dieser Thematik besucht hatten, mussten sie die erste Hausaufgabe abgegeben; das Erreichen von 50 % der möglichen Punkte war hierbei die Voraussetzung für die Zulassung zu der Modulklausur. Die Studierendenbearbeitungen zu der in Abschnitt 4 beschriebenen Aufgabe wurden eingescannt und analysiert. Die gewonnenen Ergebnisse dieser Untersuchung wurden im nächsten Durchgang der Vorlesung berücksichtig. Somit ergaben sich in der Lehrveranstaltung im WS 2012/13 die folgenden Veränderungen: Es fand eine Umbenennung des operativen Beweises hin zum „generischen Beweis" statt, um Missverständnissen vorzubeugen und um zu betonen, dass nach der Beispielbetrachtung eine explizite Erklärung dafür erfolgen muss, warum das identifizierte Argument zum Beweis der Behauptung gültig und verallgemeinerungsfähig ist. Des Weiteren wurde innerhalb der Vorlesung konkret auf typische Fehlvorstellungen zur Thematik eingegangen, welche explizit an den oben dargestellten Kategorien verdeutlicht wurden. Zusätzlich wurden Abschnitte zur „Reflexion" eingefügt, um Inhalte auf einer Meta-Ebene reflektieren zu können. Die Tutoren wurden fachlich geschult und neue Übungsaufgaben in den Tutorien eingesetzt.

4. Die hier betrachtete Aufgabe

„Beweisen Sie die nachfolgende Behauptung mit einem operativen [im WS 12/13: generischen] Beweis und einem formalen Beweis. Formulieren Sie vor dem formalen Beweis zunächst die Behauptung mit Variablen:

Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade."

Eine mögliche Lösung, die dem Wissensstand der Studierenden entspricht und mit der sozio-mathematischen Norm der Vorlesung vereinbar ist, wäre:

Operativer/ generischer Beweis:

$1 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 = 3 \qquad 3 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad 5 + 2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$
Man erkennt, dass das Ergebnis immer das Dreifache der Ausgangszahl ist. Da das Produkt zweier ungerader natürlicher Zahlen ungerade ist, muss das Ergebnis immer ungerade sein.

Formaler Beweis: (in Anlehnung an den beispielgebundenen Beweis)
Sei $a \in N$ eine beliebige aber feste, ungerade Zahl. Dann ist $a + 2a = 3a$. Da das Dreifache einer ungeraden Zahl immer ungerade ist, ist damit die Behauptung bewiesen.
[Natürlich sind hier auch andere (formalere) Beweisführungen und Argumentationen möglich, diese sollen hier aber nicht aufgeführt werden.]

5. Das Kategoriensystem

Um die Argumentationsqualität der Beweisbearbeitungen der Studierenden analysieren zu können, wurden die folgenden Kategoriensysteme entwikkelt:

Das Kategoriensystem zu dem beispielgebundenen Beweis:

E0: Der „operative/ generische Beweis" beinhaltet Beispiele, die nicht zu der Behauptung passen.

E1: Der „operative/ generische Beweis" besteht nur aus einer Verifikation durch verschiedene Beispiele, ohne dass allgemeingültige Prinzipien benannt werden.

G1: In den Beispielen innerhalb des „operativen/ generischen Beweises" werden allgemeingültige Operationen und Umformungen deutlich, welche allerdings nicht expliziert werden.

G2: In den operativen/ generischen Beweisen werden allgemeingültige Prinzipien deutlich, die benannt und in der folgenden Argumentation zum Beweisen der Behauptung genutzt werden.

Das Kategoriensystem zu dem formalen Beweis:

P1: Die Argumentation im Beweis ist logisch und korrekt.

P2: Die Argumentation im Beweis enthält Lücken und/ oder es werden Argumente genutzt, die nicht allgemeingültig sind.

P3: Die Beweisführung beinhaltet keine Argumentation.

P4: Diverses (unverständlich, falsch, ziellos, ...)

6. Ergebnisse

In den Abbildungen 1 und 2 werden die Ergebnisse der Studierendenbearbeitungen zum beispielgebundenen und zum formalen Beweis aus den Wintersemestern 2011/12 und 2012/13 dargestellt:

Kategorie	Häufigkeiten	
	WS 11/12 (n = 53)	WS 12/13 (n = 114)
E0	3 (6 %)	4 (4%)
E1	36 (68 %)	32 (28 %)
G1	8 (15 %)	30 (26 %)
G2	6 (11 %)	48 (42 %)

Abb. 1: Ergebnisse zum beispielgebundenen Beweis

Kategorie	Häufigkeiten	
	WS 11/12 (n = 56)	WS 12/13 (n = 118)
P1	29 (52 %)	48 (41%)
P2	18 (32 %)	21 (18 %)
P3	8 (14 %)	38 (32 %)
P4	1 (2 %)	11 (9 %)

Abb. 2: Ergebnisse zum formalen Beweis

Von den 14 Studierenden, deren beispielgebundenen Beweise im WS 11/12 in die Kategorien G1 und G2 eingeteilt wurden, konstruierten elf einen formalen Beweis und acht übertrugen ihre vorherige Argumentation auf ihren formalen Beweis. Im WS 12/13 lag die Quote einer entsprechenden Argumentation in beiden Beweisformen bei 61,25 %.

7. Fazit

Für viele Studierende scheint die Unterscheidung zwischen der Verifikation einer Behauptung durch Beispiele und einem allgemeingültigen beispielgebundenen Beweis problematisch. Auch im WS 12/13 wurden in 32 % aller Bearbeitungen zum generischen Beweis ausschließlich Beispiele präsentiert (E0+E1). Interessant ist in diesem Zusammenhang auch der prozentuale Rückgang der Kategorie P1 im zweiten Durchgang. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass viele Studierende ihre Beweisidee aus dem beispielgebundenen Beweis auf den formalen Beweis übertragen, dort aber nicht explizit ihre vollständige Argumentation wiederholen.

Literatur

Branford, B. (1913). *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. Leipzig und Berlin: Teubner.

Padberg, F. (1997). *Einführung in die Mathematik 1 - Arithmetik*. Heidelberg und Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische Beweise. In W. Dörfler & R. Fischer (Eds.), *Beweisen im Mathematikunterricht* (pp. 261-274). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Mason, J., &Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 277-289.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory* (pp. 157- 183). Westport, Connecticut: Ablex.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics*, *4*(1), 32-34.

Wittmann, E. C. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematiklehren*, *11*, 7 - 11.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (pp. 237-257). Berlin: Cornelsen.

Jennifer KLENZAN, Ellen ASCHERMANN, Rainer KAENDERS, Sylvia PRINZ, Köln

Selbstregulation in Klasse 8 – erste Ergebnisse eines Kooperationsprojekts zwischen Schule und Universität

In der Sekundarstufe I ist bei Lernenden ein starker Motivationsverlust zu verzeichnen, von dem insbesondere das Unterrichtsfach Mathematik betroffen ist (vgl. Rheinberg & Wendland, 2002). Diese Veränderung der Lernmotivation stellt den Ausgangspunkt zur Entwicklung einer Intervention für den Mathematikunterricht dar. Weil Lernmotivation in allen Phasen der Selbstregulation eine zentrale Rolle einnimmt (vgl. Otto & Perels, 2009), wird in der Implementierung von selbstreguliertem Lernen ein geeignetes Verfahren gesehen, diesem Motivationsdefizit entgegen zu wirken.

1. Theoretischer Hintergrund und Fragestellungen

Als Grundlage für die Analyse der motivationalen Prozesse soll das Kölner Handlungskreismodell herangezogen werden. Es geht davon aus, dass Lernhandlungen durch vier kognitive Schritte (Zielbildung, Planung, Handlung, Evaluation) beschrieben werden können, zwischen denen spezifische emotionale Regulationen stattfinden, die das Durchlaufen des komplexen Lernhandelns aufrechterhalten oder erschweren können (vgl. Aschermann & Armbrüster, 2011). Aufbauend auf diesem mehrfach im Schulkontext erprobten Modell sollen Unterrichtseinheiten entwickelt werden, die das selbstregulierte Lernen im Schulalltag implementieren. Damit stellt dieses Modell auch eine „gemeinsame Sprache“ zur Verfügung, mit welcher der Unterricht in der Gruppe effektiv reflektiert werden kann. Detailliertere Informationen zum Handlungskreismodell können Sie dem Beitrag von Prinz et al. im vorliegenden Tagungsband entnehmen.

Herkömmlich werden Innovationen im Bildungssystem extern initiiert, wie beispielsweise durch Fortbildungen oder durch die Einführung neuer Lehrpläne. Auf diese Weise werden neue Ideen aber nicht durch die Beteiligten selbst angeregt, sondern nach einer „Top-down-Strategie“ (Gräsel, 2006, S. 89) von einer externen Instanz an sie herangetragen. Deshalb verwundert es wenig, dass Fortbildungen in der Regel nicht zu einer langfristig veränderten Unterrichtspraxis führen (vgl. Gräsel, 2006; Krainer, 2003). Ein besonders geeigneter Ansatz zur Veränderung von Unterricht scheint daher die kollaborative Intervention darzustellen: Lehrer arbeiten kooperativ mit Didaktikern und entwickeln gemeinsam Unterrichtseinheiten (vgl. www.math-il.de und Kaenders, 2010).

Folgende Fragestellungen sollen bei der Evaluation unseres kollaborativen Projektes zur Förderung der Selbstregulation im Mathematikunterricht beantwortet werden: (1) Lässt sich die Selbstregulationskompetenz von Schülerinnen und Schüler durch die Implementierung des Handlungskreises im Mathematikunterricht fördern? (2) Wirkt sich der veränderte Mathematikunterricht auf die fachliche Leistung aus? (3) Wird durch die Intervention ein längerfristiger Lernvorteil im Mathematikunterricht erzielt?

2. Stichprobe und Untersuchungsdesign

Die Studie wird in Kooperation mit fünf Gymnasien im Raum Köln/Bonn durchgeführt. Es nehmen 423 Schülerinnen und Schüler teil, die zum Zeitpunkt der ersten Erhebung im Durchschnitt 13,0 Jahre (SD = .51) alt waren. Um den Erfolg des Projektes beurteilen zu können, ist die Studie in einem Prä-Post-Design konzipiert. Um längerfristige Effekte messen zu können, soll zusätzlich drei Monate nach Beendigung der Intervention ein Follow-up-Test durchgeführt werden.

Die teilnehmenden Klassen der Jahrgangsstufe 8 wurden einer von drei Gruppen zugewiesen: einer Kooperationsgruppe (N = 161), einer Fortbildungsgruppe (N = 118) bzw. einer Kontrollgruppe (N = 157). Während die Lehrpersonen der Kooperationsgruppe (N = 6) und der Fortbildungsgruppe (N = 4) identische Fortbildungen bezüglich des selbstregulierten Lernens erhielten, bekamen die Lehrkräfte der Kontrollgruppe (N = 6) keinen Input und führten den regulären Mathematikunterricht durch. Die Kooperations- und Fortbildungsgruppe unterschieden sich dahingehend, dass die Fortbildungsinhalte in der Fortbildungsgruppe individuell umgesetzt wurden, während die Kooperationsgruppe diese kollaborativ umsetzte. In der Kooperationsgruppe diente die Internetplattform math-il.de als Materialpool und regte darüber hinaus einen Austausch zwischen den beteiligten Lehrkräfte und der Universität zu Köln an.

3. Evaluationsinstrumente und Vorgehen

Um die Effekte auf Schülerebene zu erheben, wurden ein Selbstregulationsfragebogen zur Selbsteinschätzung sowie ein selbst konzipierter Mathematiktest eingesetzt. Zudem wurden mit den teilnehmenden Lehrkräften der Kooperations- und Fortbildungsgruppe Interviews durchgeführt. Die Daten zu Schüler- und Lehrervariablen wurden vor und nach der Intervention erhoben. Zudem ist ein Follow-up im Mai 2013 geplant, in dem die gleichen Daten nochmals erhoben werden sollen.

Der Selbstregulationsfragebogen besteht aus 55 Items, die den Skalen der Handlungskreisphasen zuzuordnen sind, deren Verbesserung in Folge eines Selbstregulationstrainings zu erwarten sind: Zielsetzung, Fokussierung, Planung, Bahnung, Handlung, Rezentrierung, Evaluation sowie Selbstbezug. Weil das fachliche Interesse und das fachbezogene Selbstkonzept wichtige Mediatorvariablen für die gemessenen Trainingseffekte sein können, wurden diese zusätzlich erhoben (11 Items). Die Reliabilitäten der Skalen sind nach ersten Analysen als zufriedenstellend bis gut einzuschätzen (Cronbachs Alpha > .80).

Der Mathematiktest besteht aus 10 Aufgaben zum Themenbereich der Algebra sowie einer zusätzlichen Aufforderung zur Selbsteinschätzung. Erste Ergebnisse sowie genauere Befunde zur durchschnittlichen Aufgabenschwierigkeit und zur durchschnittlichen Trennschärfe stehen zurzeit noch aus.

Die Forschungsgruppe entwickelte ein Selbstregulationstraining, an welchem die teilnehmenden Lehrkräfte aus der Kooperationsgruppe und der Fortbildungsgruppe im Rahmen von zwei halbtägigen Fortbildungen teilnahmen. Zur Dokumentation der Umsetzung der Fortbildungsinhalte fanden regelmäßig Unterrichtsbeobachtungen statt. Um den Prozess auf Lehrerebene besser begleiten zu können, wurden zudem Interviews mit den Lehrkräften der Kooperations- und Fortbildungsgruppe durchgeführt. Der Interventionszeitraum belief sich auf 6 Unterrichtswochen.

4. Bisherige Ergebnisse

Bezüglich der Einschätzung der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich ihrer Selbstregulation lassen sich im Posttest noch keine signifikanten Veränderungen feststellen. Für diesen Befund können verschiedene Ursachen verantwortlich sein: Einerseits könnte der Interventionszeitraum, in dem die Lehrkräfte den veränderten Unterricht mit erhöhten Anteilen des selbstregulierten Lernens durchführten, zu kurz gewesen sein, als dass die Schülerinnen und Schüler unmittelbar davon profitieren konnten. Hier müssen die Befunde der follow-up Erhebung abgewartet werden. Andererseits kann auch die Wirksamkeit der hier realisierten indirekten Intervention in nur einem Fach grundsätzlich zu gering gewesen sein, so dass sich zwar Effekte in der Unterrichtsgestaltung und der Haltung der Lehrkräfte nachweisen lassen, diese jedoch die Selbstwahrnehmung der Lernenden nicht substantiell beeinflussen.

Eine weitere Erklärung für die geringen Effekte könnte in der Strategienutzung selbst begründet sein. Bevor neu erlernte Strategien effektiv eingesetzt werden können, durchlaufen Lernende zunächst ein Stadium des sogenannten Nutzungsdefizits (vgl. Miller, 1994). In dieser Phase können Schülerinnen und Schüler die Strategien zwar spontan anwenden, in Folge der noch nicht ausreichenden Internalisierung erweist sich die Strategie aber noch nicht als effizient. Diese Ineffizienz der Strategie ist zum einen der noch unzureichenden Automatisierung geschuldet, zum anderen der mangelnden Sensitivität, wann eine Strategie sinnvoll eingesetzt werden kann. Diese motivational schwierige Phase ist insbesondere bei dem Erlernen komplexer Strategien zu beobachten (vgl. Hasselhorn & Gold, 2009) In den Lehrerinterviews wurde von fast allen Lehrkräften die Rückmeldung gegeben, dass ihnen bewusst geworden sei, wie vorherrschend die Handlungsphase im Mathematikunterricht ist. Die Phasen der Zielfindung, Planung und Evaluation würden in den Schüleraktivitäten hingegen nur marginal berücksichtigt werden. Die Rückbesinnung auf die einzelnen Phasen sei bei der Unterrichtsplanung hilfreich gewesen, so dass alle teilnehmenden Lehrkräfte auch in Zukunft weiterhin mit dem Handlungskreismodell arbeiten wollen. Als besonders hilfreich ist auf Seiten der Kooperationsgruppe die intensive Zusammenarbeit mit dem Kollegium erlebt worden.

Literatur

Aschermann, E. & Armbrüster, C. (2011). *Get involved – persönliche Kompetenzen erkennen und fördern*. Abschlussbericht zum Forschungsprojekt SERGE. Universität zu Köln.

Gräsel, C., Fussangel, K., Parchmann, I. (2006). Lerngemeinschaften in der Lehrerfortbildung. Kooperationserfahrungen und –überzeugungen von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *4*, 545 – 561.

Gräsel, C. (2011). Die Kooperation von Forschung und Lehrer/-innen bei der Realisierung didaktischer Innovationen. In W. Einsiedler (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und didaktische Entwicklungsforschung (88-104)*. Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Hasselhorn, M. & Gold, A. (2009). *Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren*. Stuttgart: Kohlhammer.

Kaenders, R. (2010). Entwicklung von Mathematikunterricht mit math-il.de am Beispiel des Zahlenteufels. *Beitrag zum 15. Dresdner Kolloquium zur Mathematik und ihrer Didaktik*, TU Dresden, 58-1 – 58-12.

Krainer, K. (2003). Interventionsstrategien. Auf dem Weg zu einer "kooperativen Interventionsforschung". In E. Schmidt, *Interventionswissenschaft - Interventionsforschung. Erörterungen zu einer Prozesswissenschaft vor Ort*, *Band 2 der Klagenfurter Beiträge zur Interventionsforschung (43-66).* Klagenfurt: IFF Abteilung für Weiterbildung und Systemische Interventionsforschung.

Otto, B., Kistner, S. & Perels, F. (2009). Effekte direkter und indirekter Interventionen auf die Lernmotivation von Schülern. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, *56 (4)*, 287-302.

Rheinberg, F. & Wendland, M. (2002). Veränderung der Lernmotivation in Mathematik: Eine Komponentenanalyse auf der Sekundarstufe I. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Zeitschrift für Pädagogik Beiheft 45,Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen (308-319)*. Weinheim: Beltz.

Christine KNIPPING, Andrea JANSSEN, Janett METZLER

Leistungsbezogene und soziale Stratifikationen von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht aus fachlicher und soziologischer Perspektive

Internationale Schulleistungsstudien haben die Öffentlichkeit für das Phänomen der Chancenungleichheit in der Schule und im Mathematikunterricht sensibilisiert. Anhand von Daten einer 5. Klasse einer Bremer Oberschule lässt sich rekonstruieren, welche Faktoren im Mathematikunterricht zu leistungsbezogenen als auch sozialen Stratifikationen führen können. Anhand von Unterrichtsbeobachtungen, Lehrerinterviews sowie Aufgabenbearbeitungen von Lernenden wird nachvollziehbar, warum Kinder aus bildungsfernen Elternhäusern in der Schule unterdurchschnittlichen Erfolg haben.

Theoretischer Ansatz

Gewählt wurde in der hier vorgestellten Studie ein soziologischer Analysefokus, durch den die Dominanz von sozialen Regeln, alltagsweltliche Bezüge und ein kontextualisierter Sprachgebrauch im Mathematikunterricht als Faktoren rekonstruiert werden konnten, die zu sozialen und leistungsbezogenen Stratifikationen führen können. Theoretischer Hintergrund der Analysen sind Arbeiten des britischen Soziolinguisten Basil Bernstein (1990, 1996), die es ermöglichen die Entstehung von Disparitäten im Mathematikunterricht zu analysieren. Bernsteins Ansatz hat den Vorteil, dass bei der Untersuchung der Mikrosoziologie von Unterricht auch makrosoziologische Bezüge möglich werden. Damit wird erklärbar, warum Kinder aus bildungsfernen Elternhäusern in der Schule unterdurchschnittlichen Erfolg haben. Dies soll in unserem Beitrag exemplarisch veranschaulicht werden.

Methodische Anmerkungen

Die im Vortrag herangezogenen Beispiele entstammen einer Unterrichtseinheit zum Thema Haustiere im Fach Mathematik in einem fünften Jahrgang einer Bremer Oberschule. Im Rahmen eines Forschungspraktikums zur Entwicklung einer Masterarbeit sind über drei Wochen insgesamt neun Unterrichtsstunden mit zwei Videokameras aufgezeichnet worden. Im Sinne einer Methodentriangulation sind die Unterrichtsbeobachtungen durch Lehrerinterviews, Schülerlösungen und nachträgliche Interviews mit den Lernenden zu ihren Aufgabenbearbeitungen des Wochenplans ergänzt worden. Ausgewählte Ergebnisse der qualitativen Analysen dieser Daten sollen an dieser Stelle vorgestellt werden.

Dominanz der sozialen Ordnung

Basil Bernstein geht davon aus, dass jeder fachliche Diskurs in einen Diskurs der sozialen Ordnung eingebettet ist (Bernstein 1996). Seine These, dass die soziale Ordnung die inhaltliche Ordnung dominiert, ist in dem Sinne provokant, dass sie die bildungstheoretische Position, der Inhalt sei das Wesentliche, problematisiert (vgl. Sertl & Leufer, 2012, S. 52f.). In der von uns analysierten Unterrichtseinheit einer 5. Klasse findet sich Bernsteins These bestätigt und liefert zugleich Anhaltspunkte dafür, warum soziale Stratifikationen auch zu leistungsbezogenen Stratifikationen führen können.

Der Mathematiklehrer als auch die Sonderpädagogin der erforschten fünften Klasse machen in den geführten Interviews deutlich, dass es sich bei ihrer Klasse um eine sehr heterogene Lerngruppe in Bezug auf ihre Leistungsstärke als auch ihre soziale Herkunft handelt. Die befragten Lehrkräfte sehen es angesichts der Kinder aus nichtprivilegierten Familien als „natürlich“ an, dass das Bemühen um soziale Ordnung den Unterricht bestimmt. „ ... man stößt da ja auch gar nicht zu Inhalten vor, es geht einfach nur um die Struktur äh des täglichen Lebens, dass man die einschleift“ (Int_L_Fuchs_1_04_07_2012, 24). Auch in Unterrichtsbeobachtungen konnte die hier angesprochene Dominanz der sozialen Ordnung bestätigt werden. Disziplinierungen und Maßregelungen nehmen im Unterricht einen großen Raum ein, fachliche Anforderungen treten dabei oftmals in den Hintergrund.

Dieser Sachverhalt lässt sich an einem fachlichen Unterrichtsgespräch zur Multiplikation von Dezimalzahlen mit einer (einstelligen) natürlichen Zahl am Beispiel von Geldbeträgen verdeutlichen. Dass „die Zahlen auch korrekt untereinander stehen“ (Unt_Trans_04_07_2012, Turn 10), wird zum entscheidenden Kriterium bei der Lösung der Multiplikationsaufgabe 1,45 € · 3. Eine mathematische Begründung wird dafür nicht gegeben und der Verzicht auf jegliche Fachsprache unterstreicht den fehlenden fachlichen Zusammenhang. Beim Vorrechnen des Lehrers dominiert das ziffernweise Rechnen und das korrekte Aufschreiben. Für die meisten Lernenden in dieser Klasse, für die diese Multiplikationsaufgabe keine Routineaufgabe darstellt, führt dies zu Schwierigkeiten, sobald eine andere Notation auftritt oder in den Hausaufgaben mit mehrstelligen natürlichen Zahlen multipliziert werden soll. Die Orientierung an vermeintlichen Normen des Aufschreibens ermöglicht diesen Lernenden keine Bedeutungsorientierung an fachlich-inhaltlichen Aspekten. Die von den Lehrpersonen vertretene notwendige Orientierung an solchen Normen bei Kindern aus nichtprivilegierten Familien führt somit nicht nur zur Dominanz dieser sozialen Ordnung sondern auch zu einer leistungsbezogenen Stratifikation. Ohne eine fachlich-inhaltliche Orientierung lassen sich Multiplikationsverfahren nicht flexibel anwenden.

Kontextualisierter Sprachgebrauch

In nahezu allen beobachteten Unterrichtssequenzen ist der Sprachgebrauch des Mathematiklehrers kontextualisiert. Er äußert im Interview, dass er so auf die sprachlichen Unterschiede im Klassenverbund reagiert. Indem er versucht, die mathematischen Inhalte in einer einfachen sprachlichen Gestaltung zu vermitteln, sollen diese von allen Lernenden verstanden werden. Der Mathematiklehrer bemüht sich sein Sprachniveau dem seiner Schülerschaft anzupassen. Seine Regelformulierungen sind ebenfalls durch Kontextualisierungen geprägt.

Das Problem solcher kontextualisierten Erläuterungen besteht jedoch darin, dass diese zwar konsistent innerhalb des jeweiligen Kontextes sind, jedoch oft keine Anwendung auf andere Situationen gewährleisten. Etwa beim Formulieren einer Rundungsregel für Dezimalzahlen, die in der von uns analysierten Unterrichtseinheit beobachtet werden konnte, zeigt sich eine solche Problematik.

Die Soziolinguistin Hasan (2001) sieht in der differenziellen Aneignung von dekontextualisierter Sprache in der primären Sozialisation die Ursache für Konstruktionen von verschiedenen Schülerleistungen, die sich auch im Schulalltag zeigen. In ihren empirischen Studien weist Hasan nach, dass die soziale Zugehörigkeit auch den Grad der Kompetenz zur Dekontextualisierung sowie die Handhabung von kontextualen Verschiebungen beeinflusst. Ihrer Auffassung nach liegt ein Grund für soziale und leistungsbezogene Stratifikationen in der Schule darin, dass Schülerinnen und Schüler aus nicht privilegierten Familien auch in der Schule kaum Gelegenheiten erhalten, einen dekontextualisierten Sprachgebrauch zu erlernen. Dies können wir für den von uns beobachteten Mathematikunterricht an einer Bremer Oberschule bestätigen.

Die Vermeidung eines dekontextualisierten Sprachgebrauchs kann somit dazu führen, dass nicht allen Lernenden das geboten wird, was ihnen dazu verhilft, selbstständig auch bei der Bearbeitung anderer Aufgaben erfolgreich zu sein. Auf diese Weise kann ein stark kontextualisierter Sprachgebrauch auch im Mathematikunterricht zu Stratifikationen von Leistungen führen, die zugleich soziale Stratifikationen darstellen.

Alltagsweltliche Bezüge

Über Unterrichtsbeobachtungen hinaus haben wir die Bearbeitung von Wochenplänen während der schulischen Nachmittagsbetreuung untersucht. In den Aufgaben des Wochenplans treten häufig alltagsweltliche Bezüge auf. Beispielsweise sind verschiedene Müsli-Packungen mit unterschiedlichem Gewicht und Preisen abgebildet, folgende Aufgabe ist gestellt: „Wie vergleicht ihr die Preise? Welche Packung würdet ihr kaufen? Begründet eure Entscheidung.“ In Schülerlösungen dieser Aufgabe wird deutlich, dass nicht alle Lernende die erwartete mathematische Bearbeitung realisieren und das Verhältnis von Preis zu Gewicht berücksichtigen. So antwortet etwa Caroline in der 3. Wochenplanaufgabe wie folgt: „Ich würde das Müsli für 1 kg und 1,99 € nehmen weil ich habe ja ein Bruder der isst Müsli auch gerne und meine Eltern weiß ich grade nicht.“

Cooper und Dunne (2000) erklären Antworten dieser Art damit, dass Jugendliche aus niedrigeren sozialen Verhältnissen oft nicht einschätzen können, dass Alltagserfahrungen bei Lösungen von Mathematikaufgaben einer fachlichen Logik, hier dem Preis – Gewicht – Vergleich, untergeordnet werden. So tendieren sie bei solchen Aufgaben dazu, alltagsnahe Überlegungen einer mathematischen Sachlogik vorzuziehen.

Die von uns interviewten Lehrpersonen sind sich einer solchen Problematik nicht bewusst. Sie beurteilen Realitätsbezüge im Mathematikunterricht als Vorteil, da Mathematik auch bei der Bewertung vieler Situationen im Alltag wichtig sei. Auf die Frage nach möglichen Nachteilen von Alltagsbezügen, sieht Herr Fuchs lediglich die Gefahr dem Lehrplan nicht gerecht zu werden. Daraus lässt sich schlussfolgern: Soziale als auch leistungsbezogene Stratifikation können auftreten, sofern mathematische Erwartungen bei Alltagsbezügen im Mathematikunterricht nicht hinreichend transparent gemacht werden. Erst durch die Reflexion eines möglichen differenziellen Zugangs von Schülerinnen und Schüler an realitätsbezogene Aufgaben kann erkannt werden, dass sich hier mögliche soziale Stratifikationen zeigen.

Fazit

Die Aussagekraft der hier dargestellten Ergebnisse ist eingeschränkt, da diese an den Erhebungskontext und seine Spezifika geknüpft sind. Dennoch ist es gelungen, anhand der untersuchten Einzelfälle Stratifikationsmechanismen im Mathematikunterricht zu rekonstruieren. Damit sind auch erste Ansatzpunkte aufgezeigt worden, wie die Reproduktion von sozialer Ungleichheit durch Schule unterbrochen werden kann und Bildungschancen für alle Schülerinnen und Schülern erhöht werden können. Die Wahrnehmung nicht nur leistungsbezogener, sondern auch damit verbundener sozialer Stratifikationen innerhalb der Schülerschaft zuzulassen, ist nötig. So kann ein Bewusstsein für die in den pädagogischen Prozessen eingebetteten Stratifikationsmechanismen entwickelt werden, welche zur Reproduktion sozialer Ungleichheit beitragen. Dies kann dabei helfen, im Unterrichtsgeschehen angemessen auf die heterogene Schülerschaft zu reagieren.

Literatur

Bernstein, B. (1996). Pedagogy, Symbolic Control and Identity: Theory, Research, Critique (London: Taylor & Francis).

Bernstein, B. (1990). The structuring of pedagogic discourse. Class, codes and control, vol. 4. (London: Routledge & Kegan Paul).

Cooper, B. & Dunne, M. (2000). Assessing Children’s Mathematical Knowledge: Social Class, Sex and Problem-solving. Buckingham: Open University Press.

Hasan, R. (2001). The ontogenesis of decontextualised language: some achievements of classification and framing. In: Morais, A. & Neves, I. & Davies, B. & Daniels, H. & Sadovnik (Hrsg.), Towards a Sociology of Pedagogy. Berlin: Peter Lang, 47-79.

Sertl, M. & Leufer, N. (2012). Bernsteins Theorie der pädagogischen Codes und des pädagogischen Diskurses. Eine Zusammenschau. In: U. Gellert / M. Sertl (Hrsg.) Zur Soziologie des Unterrichts. Weinheim: Beltz Juventa, 15-62.

David KOLLOSCHE, Universität Potsdam

Bürokratie und Rechnen im Mathematikunterricht

In vielen mathematikdidaktischen Diskursen wird die vorgebliche Dominanz rein technischer Arbeitsformen kritisiert und einem sinnhaltigeren Mathematikunterricht, der sich etwa auf Anwendungen, das Beweisen oder das Problemlösen stützt, gegenübergestellt. Insbesondere das Rechnen wird häufig als kognitiv zu anspruchslos dargestellt und oft ‚bürokratisch' genannt. Die Assoziation mit der Bürokratie verweist dabei auf eine formalbildende Bedeutung des Rechnens, welche bisher kaum im Fokus mathematikdidaktischer Forschung stand. Selbst Ole Skovsmose als Vertreter sozialkritischer Mathematikdidaktik fragt beinahe beiläufig nach der gesellschaftlichen Funktion einer mathematischen Bildung, im deren Rahmen jeder Schüler im Laufe seiner Schulerfahrungen geschätzte 10000 Rechenaufgaben löst:

> Could it be that 'normal' students in fact learn 'something', although not strictly speaking mathematics (and certainly not mathematical creativity), and that this 'something' serves an important social function? If we look back again at the 10,000 commandments, what do they look like? […] they might have some similarities with those routine tasks, which are found everywhere in production and administration. [...] All such jobs do not invite creative ways of using numbers and figures. Instead things have to be handled carefully and correctly in a predescribed way. Could it be that the school mathematics tradition is a well functioning preparation for a majority of students who come to serve in such job-functions? (Skovsmose 2005, S. 11f)

Um Antworten auf Skovsmoses Frage zu finden, bedarf es jedoch eines tieferen Verständnisses von Bürokratie und Rechnen, welches im Folgenden entwickelt werden soll.

1. Bürokratie

Weite Teile der Bürokratietheorie berufen sich auch heute noch auf die Gesellschaftstheorie von Max Weber, der die Bürokratie idealtypisch beschreibt und in ihr einen Gegenpol zur mittelalterlichen Patrimonialverwaltung sieht (Weber 1922, S. 125-129, 551-576). Bürokratisch nennt Weber eine Verwaltung unter anderem dann, wenn sie Ämter nach Leistung vergibt statt nach Zuneigung oder gegen Bezahlung, wenn sie für die finanzielle Unabhängigkeit ihrer Beamten (durch Entlohnung in lebenslanger Vollbeschäftigung mit anschließender Pension) sorgt, wenn sie bei Arbeitsmitteln und -orten zwischen Privatem und Beruflichem trennt, wenn sie die Arbeit durch Aus- und Weiterbildung professionalisiert und dazu

Verwaltungswissen aufbaut, und wenn sie jedem Beamten Zuständigkeiten, Befugnisse und Pflichten zuweist und diese lediglich auf die Position des Beamten innerhalb der Verwaltung, nicht jedoch auf seine Person an sich bezieht. Technisch funktioniert letzteres, indem die Bürokratie die Verwaltungsangelegenheiten vordefinierten *Fällen* unterordnet, welche dann von den Beamten gemäß vorgegebener *Regeln* bearbeitet werden. Ziel dieser Ordnung und Regelhaftigkeit ist neben der Steigerung der Effizienz der Verwaltung die Steigerung ihrer gesellschaftlichen Akzeptanz, indem Verwaltungsabläufe transparent und verbindlich festgelegt sind und nicht mehr von der Person des Beamten abhängen. Damit ist die Bürokratie für Weber aber gleichsam „entmenschlicht“: sie erfordert „die Ausschaltung von Liebe, Haß und allen rein persönlichen, überhaupt allen irrationalen, dem Kalkül sich entziehenden, Empfindungselementen“, duldet damit auch keine „persönliche Anteilnahme, Gunst, Gnade, Dankbarkeit“ (S. 563). Damit ermöglicht die Bürokratie nicht nur Effizient und Gerechtigkeit, sondern auch eine moralische Skrupellosigkeit, welche sich letztlich auch in der Verwaltung des Holocaust offenbart (Bauman 1992).

Freilich ist die Schule eine bürokratische Institution, der Lehrer ein Beamter im weberschen Sinne und auch der Umgang mit und das erwartete Verhalten von Schülern als bürokratisch zu bezeichnen. Insbesondere beim Bearbeiten von Aufgaben, wie es in allen Schulfächern abverlangt wird, wird vom Schüler erwartet, die Anforderungen vordefinierten Fällen unterzuordnen, aus denen dann die je spezifischen Regeln ihrer Bearbeitung folgen. Der Vorwurf, dass die Rechenaufgabe nun besonders bürokratisch sei, ließe sich nur dann aufrechterhalten, wenn an ihr nicht nur das reine Aufgabenstellen, sondern insbesondere auch ihre Bearbeitung in einem zu benennenden Sinne bürokratisch wäre.

2. Rechnen und Bürokratie

Die Geschichte des formalen Rechnens wurde etwa von Sybille Krämer (1988) herausgearbeitet und zeigt interessante zeitliche Parallelen zur Entwicklung der Bürokratie: Zu Weiterentwicklungen in der Formalisierung des Rechnens kam es immer gerade dort, wo sich Zentralstaaten etablierten und Verwaltungen bürokratisierten, etwa zur Blütezeit von Babylon und Ägypten, im spätrömischen Prinzipat des Diophant und im französischen Absolutismus des Vieta.

Im Laufe seiner Geschichte verliert das Rechnen immer weitere Beschränkungen. Babylonier und Ägypter kennen die Variable nur als Platzhalter für eine eindeutig definierte und bloß noch unbekannte Zahl. Allgemeine formale Ausdrücke wie $a + b = b + a$ oder $y = 2x - 1$ sind für sie noch völlig undenkbar, da a und b bzw. x und y hier gerade nicht konkrete Zahlen vertreten. Rechenverfahren können im antiken Orient folglich nur in Lösungsbeispielen dokumentiert werden. Die geometrische Algebra der Griechen löst zwar die Algebra vom Rechnen, indem sie sie an die Geometrie bindet, macht damit aber auch Rechnungen undenkbar, welche sich nicht geometrisch interpretieren lassen. Weit nach dem Höhepunkt der griechischen Mathematik trennt Diophant zwar diese Verbindung, addiert etwa Strecken und Flächen, und führt erste Zeichen für eine formale Notation von Rechnungen ein. Doch erst ein gutes Jahrtausend später mündet diese Entwicklung in Vietas Algebra, welche die Variable von der Zahl trennt, in ihr fortan ein Rechenobjekt mit eigener Natur sieht und mit ihrer Hilfe mathematische Verfahren allgemein beschreiben kann.

Vietas Algebra ist der mathematische Niederschlag einer Veränderung, welche in der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert das gesamte westliche Denken erfasst. Michel Foucault (1966) arbeitet diesen Umbruch heraus: Das Denken bis zur Renaissance war geprägt durch das Prinzip der Ähnlichkeit; Geschichten ähnelten der Wirklichkeit; Könige und Herrschaft, Zeichnen und Bezeichnetes waren untrennbar miteinander verbunden. Ab dem 17. Jahrhundert zerbricht diese Eintracht; die Zeichen werden beliebig, fragwürdig, diskutabel, Geschichten werden fantastisch, Könige abgesetzt und neue Herrscher gewählt. Alle Formen des Bezeichnens müssen nun ausweisen können, was unter ein bestimmtes Zeichen fällt und wie die Zeichen zu verwenden sind. An die Stelle der Ähnlichkeit treten die Prinzipien der Ordnung und des Maßes. Vor diesem Hintergrund gelesen ist die Bürokratie die Institution, welche die Zusammengehörigkeit sowohl von Amt und Person als auch von Verwaltungssache und je einzigartiger Situation zerbricht, die Verwaltungssache vorgegebenen Zeichen (nämlich Fällen) unterordnet und nach vorgegebenen Regeln behandelt. Und vor diesem Hintergrund zerbricht in Vietas Algebra die Einheit von Variable und Zahl, auch die Variable wird beliebig und die Algebra zur Wissenschaft ihrer Eigenweltlichkeit. Rechnen und Bürokratie sind also Ausdruck einer übergreifenden Evolution des Denkens: Beide geben Zeichen vor, in deren Rahmen ihre Tätigkeiten verstanden werden müssen; beide geben Regeln vor, in deren Rahmen ihre Aufgaben gelöst werden müssen; und beide schließen Deutungen und Verfahren aus, welche über die vorgegebenen Zeichen und Regeln hinausgehen, insbesondere solche, welche auf der Individualität des involvierten Menschen beruhen. Die Geisteshaltungen von Bürokratie und Rechnen sind damit untrennbar miteinander verbunden.

3. Rechenunterricht als bürokratisches Propädeutikum

Insofern man nicht davon ausgeht, dass Denken und Lernen in unterschiedlichen Gebieten völlig unvermittelt und voneinander unbeeinflusst nebeneinanderstehen können, und wenn man die gezeigte geistige Nähe von Bürokratie und Rechnen bedenkt, ist es sinnvoll anzunehmen, dass formale algebraische Bildung und bürokratische Bildung in einem engen Zusammenhang stehen. Wer gut mit Variablen rechnen kann, zeigt, dass er sie als vollwertige Zeichen anerkennt anstatt fortwährend nach dem Bezeichneten zu suchen, auf welches sie verweisen mögen. Er zeigt auch, dass er mit ihnen nach vorgegebenen Regeln umgehen kann und sich von subjektiven Belangen nicht beeinflussen lässt. Gerade diese ‚Kompetenzen' sind aber auch für die bürokratische Verwaltung unerlässlich. Für einen rechenintensiven Mathematikunterricht hat dies zwei Konsequenzen. Zum einen kann er aufgefasst werden als ein bürokratisches Propädeutikum, verlangt eine Schulung des Rechnens doch nach einer Geisteshaltung, die ebenso für die Bürokratie grundlegend ist. Zum anderen kann er angesehen werden als ein hervorragendes Selektionsinstrument, ist nun doch die Hoffnung begründet, dass gute Leistungen im Rechenunterricht auf eine Eignung für moderne Verwaltungstätigkeiten deuten. Beide Aspekte des Mathematikunterrichts wurden in der Mathematikdidaktik bislang noch nicht beleuchtet – womöglich auch deshalb, weil man den Gegenstand seiner beruflichen Bemühungen nur ungern als ‚bürokratisch' brandmarken will. Jedoch zeigt sich, das gar nicht gewiss ist, inwieweit die negative Konnotation dieser Zuschreibung gerechtfertigt ist. Wenn gerade die Bürokratie die Effizient und Gerechtigkeit der Verwaltung unserer modernen Gesellschaft ermöglicht, kann ‚bürokratische Bildung' dann nicht als ein legitimes Ziel von Mathematikunterricht angesehen werden?

Literatur

Bauman, Zygmunt (1989) *Modernity and the Holocaust.* Ausgabe von 1992. *Dialektik der Ordnung. Die Moderne und der Holocaust.* EVA: Hamburg.

Foucault, Michel (1966) *Les Mots et les Choses. Une archéologie des sciences humaines.* Ausgabe von 2009. *Die Ordnung der Dinge. Eine Archäologie der Humanwissenschaften.* Suhrkamp: Frankfurt am Main.

Krämer, Sybille (1988) *Symbolische Maschinen.* WBG: Darmstadt.

Skovsmose, Ole (2005) *Travelling Through Education. Uncertainty, Mathematics, Responsibility.* Sense: Rotterdam.

Weber, Max (1922) *Wirtschaft und Gesellschaft. Grundriss der verstehenden Soziologie.* Ausgabe von 1972. Hg. von Johannes Winckelmann. Mohr: Tübingen.

Jörg KORTEMEYER, Rolf BIEHLER, Niclas SCHAPER, Paderborn

Konzeptionalisierung von Lösungsprozessen bei mathematikhaltigen Elektrotechnik-Aufgaben

Im Rahmen des BMBF-Projektes KoM@ING (www.kom-at-ing.de)[1] analysieren wir implizite Kompetenzerwartungen in mathematikhaltigen Aufgaben in den Grundlagenvorlesungen zur Elektrotechnik und reale Lösungsprozesse von Studierenden der Elektrotechnik mit dem Ziel, die Schnittstelle Mathematik-Elektrotechnik zu modellieren. Gängige Modellierungskreisläufe der Mathematikdidaktik erweisen sich dafür als bedingt geeignet. In diesem Text wird ein Ansatz zur prozessbezogenen Analyse von mathematikhaltigen Elektrotechnikaufgaben vorgestellt, welches die Lösungsprozesse elektrotechnischer Übungsaufgaben konzeptionalisiert.

1. Das Projekt KoM@ING

KoM@ING ist ein Teilprojekt des BMBF-geförderten Projekts „Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor“ (KoKoHs). Das Ziel von KoM@ING ist die qualitative und quantitative Kompetenzmodellierung und –erfassung bezogen auf Mathematik und ihre Verwendung in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen. An dem Projekt sind die Universität Paderborn, die Leuphana Universität Lüneburg, die Technische Universität Dortmund, die Ruhr-Universität Bochum, die Universität Stuttgart sowie das IPN in Kiel beteiligt. Im Paderborner Teilprojekt, an dem die drei Autoren dieses Beitrags beteiligt sind, wird speziell die Verwendung von Mathematik in den Grundlagenveranstaltungen zur Elektrotechnik untersucht. Aufbauend auf den Ergebnissen sollen Grundlagen für eine Kompetenzdiagnostik geschaffen werden, die als Basis für die Gestaltung und Evaluation von Lehrinnovationen dienen sollen.

Das Ziel der Untersuchungen ist ein Kompetenzmodell zur Beschreibung der zum Lösen einer mathematikhaltigen Elektrotechnikaufgabe benötigten kognitiven Ressourcen bzw. Kompetenzen.

2. Kognitive Prozesse beim Lösen einer mathematikhaltigen Elektrotechnikaufgabe

Beim Lösen einer mathematikhaltigen Elektrotechnik-Aufgabe spielen inhaltliche Komponenten (sowohl aus der Mathematik, als auch aus der Elektrotechnik) und kognitive Prozesse eine Rolle. Häufig ist ein mehrfacher Wechsel zwischen mathematischen und elektrotechnischen Aufgabenteilen notwendig. Hierzu haben wir durch Aufgabenanalysen ein Phasen-

[1] Förderkennzeichen 01PK11021B

modell mit vier Schritten entwickelt, welches den Lösungsplan von Blum und Leiß (DISUM-Projekt, 2007) geeignet adaptiert:

- Verstehen der konkreten Fragestellung auf Basis des elektrotechnischen Wissens. Hierbei kommt es teilweise auf das Finden, Anwenden und Kombinieren passender elektrotechnischer Formeln an. Im engeren Sinne wird hierbei kein Modell verwendet.
- Mathematisches Arbeiten im elektrotechnischen Kontext. Dabei ist das Rechnen bzw. der korrekte Umgang mit symbolischen und technischen Elementen der Mathematik wichtig, wobei es häufig eine spezielle elektrotechnisch-mathematische Praxis beispielsweise bei der Verwendung von Differentialformen gibt. Oft gibt es keine klare Schnittstelle zwischen mathematischen und elektrotechnischen Teilen der Aufgabe.
- Interpretieren und Validieren. Die erhaltenen Ergebnisse werden übertragen auf Elektrotechnik. Ist das Ergebnis plausibel?
- Schriftliche Darstellung der Lösung. Die Lösung wird verständlich für andere dargelegt.

Mathematikhaltige Aufgaben in der Elektrotechnik stellen eine besondere Herausforderung dar, da sie neben den in der Grundlagenvorlesung zur Elektrotechnik vermittelten Inhalten häufig auch intuitive Vorstellungen zu physikalischen Sachverhalten voraussetzen. Um dieses zu berücksichtigen, haben wir ein Modell von dem amerikanischen Physikdidaktiker E. F. Redish hinzugezogen, welches sich mit dem Lösen mathematikhaltiger Physikaufgaben auseinandersetzt und das obige Phasenmodell ergänzt. Wie in anderen Studien werden unterschiedliche Lösungen analysiert:

- Dozentenlösung bzw. Expertenlösung: Lösungsprozess, wie ihn ein Dozent selbst durchführt
- Lösung, wie sie Dozenten von Studierenden erwarten: Lösungsprozess, wie er in Lösungshinweisen für Studierende angegeben wird
- Studierendenlösung bzw. Novizenlösung: Lösungsprozess, wie er von Studierenden durchgeführt wird

Zur Beschreibung der Lösungsprozesse von Studierenden führen Tuminaro und Redish (2007) das Konzept der „Erkenntnistheoretischen Spiele“ ein.

3. Erkenntnistheoretische Spiele

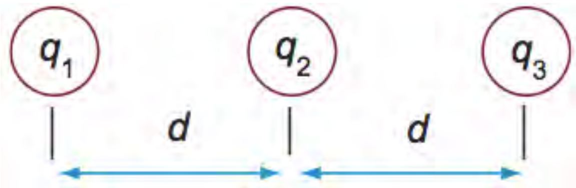
Ein erkenntnistheoretisches Spiel ist eine komplexe Menge an Regeln und Strategien, die zu Einsichten oder Lösungen bei einer Aufgaben- bzw.

Problemstellung in der Physik oder Elektrotechnik führen. Es hat vier Komponenten:

- Wissensbasis: Was brauche ich an mathematischem und physikalischem Vorwissen?
- Erkenntnistheoretische Form: Welche Form soll das Ergebnis haben? Soll das Ergebnis eine Zahl, eine Formel etc. sein?
- Eingangs- und Ausgangsbedingungen: Bedingungen, unter denen ein bestimmtes erkenntnistheoretisches Spiel beginnt oder endet
- Züge: Schritte, die beim Ablauf eines erkenntnisth. Spiels auftreten

Wir erläutern diesen Ansatz zur Analyse von Problemlöseaufgaben beispielhaft an einer Aufgabe, und lehnen uns dabei eng an Tuminaro und Redish (2007) an.

4. Beispiel zu Erkenntnistheoretischen Spielen: Ladungsgleichgewicht



In dem Bild liegen drei geladene Teilchen auf einer Geraden und ihre Abstände betragen jeweils d. Die Ladungen q_1 und q_2 werden festgehalten. Die Ladung q_3 ist frei beweglich, liegt aber im Gleichgewicht, das heißt keine elektrostatische Kraft wirkt auf sie. Wenn die Ladung q_2 den Wert Q hat, welchen Wert muss dann die Ladung q_1 haben?

In den Studien von Redish und Tuminaro wurde diese Aufgabe drei Physikstudentinnen im zweiten Semester vorgelegt, die ihre Grundlagenveranstaltungen zur Mathematik bereits erfolgreich abgeschlossen hatten. Beim Lösungsprozess durchliefen sie mehrere Erkenntnistheoretische Spiele:

- Physical Mechanism Game: Verstehen der physikalischen Situation. Die Begründungen basieren auf intuitivem Wissen und Erfahrungen mit physikalischen Phänomenen. In der betrachteten Aufgabe muss Q ein negatives Vorzeichen haben, damit ein Gleichgewicht vorhanden ist. Außerdem wird eine erste Größenabschätzung des Vorfaktors vorgenommen, in dem die Bedeutung der Abstände diskutiert wird.
- Pictorial Analysis Game: Erstellen einer bildhaften Darstellung der Problems (Skizze, Ablaufdiagramm, etc.). Das in dem „Physical Mechanism Game“ entwickelte konzeptionelle Verständnis wird klarer dargelegt und die Darstellung hilft bei der Diskussion der Problemstellung mit anderen.

- Mapping Mathematics to Meaning: Identifikation und Heranziehen der relevanten Physik. Nun werden formale Prinzipien aus der Mathematik und Physik eingesetzt. Es wird erkannt, dass das Coulomb'sche Gesetz benötigt wird, da dieses einen Zusammenhang zwischen Kräften und Abständen liefert.
- Mapping Meaning to Mathematics: Lösen der Aufgabe durch Umformung der relevanten physikalischen Gleichungen. Unter Verwendung des in den bisherigen Spielen entwickelten Verständnisses der Situation wird Q mit Hilfe des Coulomb'schen Gesetzes bestimmt.

Neben den bereits erwähnten vier erkenntnistheoretischen Spielen wurden bei weiteren Aufgaben von Redish und Tuminaro zwei weitere Erkenntnistheoretische Spiele bei Studierenden beobachtet:

- Recursive Plug-and-Chug: Einsetzen von Zahlen ohne konzeptionelles Verständnis für physikalische Implikationen der Ergebnisse. Es werden immer weiter bekannte Größen in die vermutlich relevanten Formeln eingesetzt, bis das Ergebnis die gewünschte Form hat.
- Transliteration into Mathematics: Die Studenten verwenden ausgearbeitete Beispiele (vollständig oder teilweise), um eine Lösung für ein neues Problem zu entwickeln.

5. Ausblick

In den weiteren Arbeitsschritten des Projekts sollen mittels der vorgestellten Ansätze Aufgabenbearbeitungen von Studierenden analysiert werden. Dabei werden auch Expertenlösungen und von Dozenten erwartete Lösungen zum Vergleich herangezogen. Für die Analyse werden Bearbeitungen von Klausuraufgaben zu den Einführungsveranstaltungen der Elektrotechnik gesichtet und die Lösungsstrategien und typischen Fehler kategorisiert. Die Bearbeitungen zeigen allerdings nur die Produkte des Lösungsprozesses, aber nicht die kognitiven Prozesse. Aus diesem Grund sollen die Studierenden auch bei der Bearbeitung von mathematikhaltigen Elektrotechnikaufgaben beobachtet werden, wobei sie ihre Lösungsgedanken mithilfe lauten Denkens explizit machen sollen.

Literatur

Redish, E.F. (2005): Problem Solving and the Use of Math in Physics Courses. Proceedings of the Conference World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change, Delhi, India, August 21-22, pages 1-10

Tuminaro, Jonathan, and Edward F. Redish. "Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games." Physical Review Special Topics-Physics Education Research 3.2 (2007): 020101

Nadine KRÄGELOH, Dortmund

Algebra verstehen, Terme aufstellen - Entwicklung und Erforschung diagnosegeleiteter Förderbausteine für Jugendliche nichtdeutscher Erstsprache

1. Ausgangspunkt des Projektes

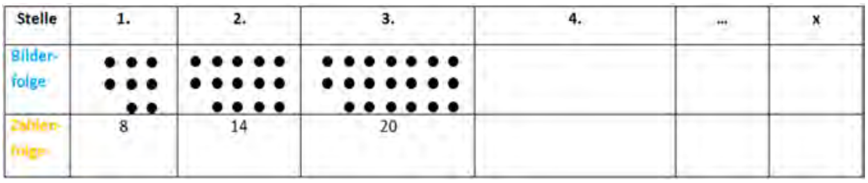
Wiederholt wurde gezeigt, dass Jugendliche mit nicht-deutscher Erstprache in Leistungstest wie Pisa, TIMSS etc. schlechtere Mathematikleistungen erzielen als Gleichaltrige mit deutscher Erstsprache (Heinze et al. 2011). Geforscht wird derzeit an der genauen Verortung der mathematischen und sprachlichen Hürden für sprachschwache Lernende (Renk et al. in diesem Band) und an theoretisch fundierten und empirisch nachweislich wirksamen Ansätzen für eine Förderung (Prediger & Wessel 2013). In einem Entwicklungsforschungsprojekt im Rahmen des MuM-Projektes werden daher folgende Fragen bearbeitet:

- Welchen sprachlichen und fachlichen Herausforderungen stellen sich sprachlich benachteiligte Lernende beim Interpretieren und Aufstellen von Termen?
- Wie kann eine sprach- und fachintegrierte Förderung nach dem didaktischen Prinzip der Darstellungsvernetzung dazu beitragen, diese erfolgreich zu bewältigen?

Dieser Beitrag fokussiert auf die Rolle der Sprache beim Erwerb von Variablenvorstellungen zu Beginn der konzipierten Förderung.

2. Inhalte und Designprinzipien der Förderung

Für den Umgang mit Termen ist der verständige Umgang mit Variablen zentral. In der hier thematisierten Fördereinheit 1 wird die Variablenvorstellung der Unbestimmten fokussiert (Malle 1993), und zwar im bewährten Kontext des Verallgemeinerns (Mason et al. 1985).



Stelle	1.	2.	3.	4.	...	x
Bilderfolge						
Zahlenfolge	8	14	20			

Als Zugang für diese algebraische Tätigkeit werden in der Förderung Punktmuster und Bilderfolgen genutzt (ähnlich zu Hußmann et al. 2013). Der Zugang ermöglicht die Realisierung dreier Design-Prinzipien bei der verstehensorientierten Einführung der Terme mit Variablen als Beschreibungsmittel für allgemeine Zusammenhänge: (1) Die Visualisierungen bieten den Vorteil einer vorübergehenden Sprachentlastung, die von den Lernenden für die Verbalisierung bzw. die Erfahrung der Verallgemeinerung genutzt werden kann. (2) Der Wechsel von Bilder- und Zahlenfolgen zum Term und zurück konkretisiert das allgemeine Prinzip der Darstellungsvernetzung, das inhaltliche Vorstellungen fördern und Sprachanlässe schaffen kann. (3) Durch Sprachangebote oder Wortvariablen, wie beispielsweise x-beliebig, die sich als Zugang zum Verallgemeinern bewährt haben, wird zudem versucht, an alltagssprachliche und vorunterrichtliche Ressourcen anzuknüpfen. Das Lernmedium stellt dabei die Vermittlungssprache dar, die als Werkzeug für das Verständigen zwischen Lerngegenstand und Lernvoraussetzung dienen soll.

Lernvoraussetzung		Lerngegenstand
Individuelle Sprache des Verstehens	Vermittlungssprache	Fachsprache

3. Einblick in die Empirie

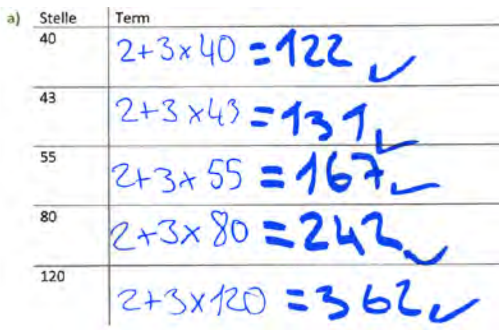
Den methodischen Rahmen der Forschungsarbeit bildet das Dortmunder Modell der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung mit seiner iterativen Verknüpfung von Forschung und Entwicklung (Prediger et al. 2012). Die hier analysierte Szene stammt aus Design-Experimenten im Interviewsetting (Cobb & Gravemeijer 2006) mit 4 x 2 Lernenden einer 8. Gesamtschul-Klasse. Alle Sitzungen wurden vollständig videographiert und partiell transkribiert. Die interpretative Auswertung erfolgte interpretativ im Hinblick auf die Rolle der Sprache beim Erwerb des Variablenkonzepts *Variable als Unbestimmte* mit der in Abschnitt 2 dargestellten Tabelle.

In der Auswertung zeigt sich, dass die Punktmuster, die einen bewährten Zugang für die Neu-Erarbeitung des Variablenaspekts der Unbestimmten darstellen, sich prinzipiell auch im sprach- und fachintegrierten Förderunterricht bewähren. Ein Problem ergab sich allerdings bei vielen Lernenden, wenn das fachsprachliche x als Beschreibungsmittel für das Verallgemeinern mit Hilfe des vermittlungssprachlichen x-beliebig erläutert werden sollte. Gesammelt sind im Folgenden einige Antworten von Schülerinnen auf die diagnostische Frage, was für sie x-beliebig bedeutet:

Ayla	Das sagt unsere Mathelehrerin auch, aber was das heißt, wissen wir nicht. .... Das sagt man im Deutschen so.
Meliha	Ich hab das Wort noch nie benutzt, glaub ich.
Gülnur	Wir kennen nur die Variablen, z.B. x. Das setzen wir dann halt ein. .... Ach. Man muss ein Ergebnis heraus bekommen.

Exemplarisch wird Gülnurs Äußerung betrachtet. Gülnur filtert aus dem Ausdruck x-beliebig die Variable x heraus. Sie kann also die Beziehung zur Fachsprache herstellen. Dennoch aktiviert sie mit dem Einsetzungs- und dem wenig später geäußerten Kalkülaspekt noch nicht die gewünschte Deutung als Unbestimmte. Auch weitere Transkriptstellen zeigen, dass nicht nur das Wort x-beliebig, sondern die damit beschriebene Denkpraxis des Verallgemeinerns vielen sprachlich schwachen Lernenden fremd zu sein scheint.

Die Beschäftigung mit Folgen ermöglicht, diese Denkpraxis kennenzulernen. Gülnür und Meliha lernen in der Förderung drei Wege, um hohe Stellen in Zahlenfolgen zu bestimmen (graphisch an Punktmustern, verbal durch Formulierung einer Regel und symbolisch mit Zahlentermen). Diese Vorgehensweisen wenden sie eigenständig auf neuen Folgen an. Für die Etablierung des Verallgemeinerns werden die zu berechnenden Stellen variiert und die Zahlenterme operativ verändert. Nach dieser Erfahrung kommt die Aufgabe auf die x-beliebige Stelle zurück:


a)

Stelle	Term
40	2+3x40 =122
43	2+3x43 =131
55	2+3x55 =167
80	2+3x80 =242
120	2+3x120 =362

Interviewerin: […] ihr könnt ja jetzt hier mal überlegen, was jetzt so ein x-beliebig hier heißt.

Gülnur: Vielleicht ist ja x-beliebige Stelle *(zeigt mit dem Stift auf das Arbeitsblatt und fährt die Tabelle entlang (s.o.))* die Stelle, die sich immer ändert. […] Weil es ändert sich ja öfters. Wir müssen ja nicht immer bis 43. Stelle zum Beispiel machen. Wir müssen ja auch mal bis 120. Stelle zum Beispiel. Es kann ja ne x-beliebige sein. Denn x ist ja bei uns immer die Variable und da ändert sich doch auch immer die Zahl.

Auf die Frage der Interviewerin nimmt Gülnur den angebotenen Ausdruck x-beliebig auf und vermittelt der Interviewerin durch eine Zeige-Geste auf die veränderlichen Stellen in der Tabelle, welche Bedeutung sich bei ihr für x-beliebig nun konstituiert zu haben scheint. Auf der Basis der operativen Erfahrung und der deiktischen sprachlichen Annäherung gelingt dann auch eine Verbalisierung: „die Stelle, die sich immer ändert“. Gülnur findet also einen anderen Ausdruck für die Beliebigkeit, die sie mit der Änderung beschreibt. Sie begründet ihre Sprachwahl, durch die Konjunktion „weil“ und durch eine Beschreibung der in der Fördereinheit erfahrenen Veränderbarkeit der Stellen. Die Schülerin verwendet im Anschluss sogar Beispiele, und das Adverb „immer“ um ihre Sprachwahl („Änderung“) weiter zu unterstützen.

Fazit

Das kurze Fallbeispiel verdeutlicht, dass eine als bekannt vorausgesetzte Vermittlungssprache Sprachmittel und Denkpraktiken enthalten kann, die für sprachlich schwache Jugendliche erst erarbeitet werden müssen. So kann zum Beispiel das Konzept des Verallgemeinerns und das bildungssprachliche Konstrukt „x-beliebig" für solche Lernende erst durch operative Veränderungen vieler Zahlenterme erfahrbar gemacht werden. Nach entsprechender Erfahrung kann das Sprachmittel zunächst durch Gesten und danach aber auch durch andere sprachliche Ressourcen ausgedrückt werden. Exemplarisch konnte insbesondere auch gezeigt werden, dass notwendige Sprach- und Denkmittel in der Vermittlungssprache nicht nur auf der Ebene einzelner Worte (x-beliebig) zu verorten sind. Das Verallgemeinern ist eine bildungssprachliche Denkpraktik, zu der nicht alle Lernenden alltagssprachliche Zugänge haben, damit ist das Anknüpfen an alltagssprachliche und vorunterrichtliche Ressourcen erst möglich, wenn die Denkpraktiken und die Vermittlungssprache selbst zum Lerngegenstand werden. Daraus ergibt sich eine Verschiebung des Lerngegenstandes.

Lernvoraussetzung	Lerngegenstand	
Individuelle Sprache des Verstehens	Vermittlungssprache	Fachsprache
„Das was sich immer ändert" Gesten	x-beliebig Denkpraktiken des Verallgemeinerns	x (Variable als Unbestimmte als Hilfsmittel zur Verallgemeinerung von Punktmustern)

Literatur

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2006): Design research from a learning design perspective In: Van den Akker; J. et al. (Hrsg.), Educational design research (S. 17-51). London et al.: Routledge.

Heinze, A., Herwartz-Emden, L., Braun, C. & Reiss, K. (2011): Die Rolle von Kenntnissen der Unterrichtssprache beim Mathematiklernen. Ergebnisse einer quantitativen Längsschnittstudie. In: Prediger, S. & Özdil, E. (Hrsg.), Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit (S. 11-33). Münster: Waxmann.

Hußmann, S., Greefrath, G., Mühlenfeld, U., Witzmann, C. (2013): Wie geht es weiter? Zahlen- und Bildmuster erforschen. In: Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. (Hrsg.): Mathewerkstatt 6 (S. 189-208). Berlin: Cornelsen.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elem. Algebra. Braunschweig: Vieweg.

Mason, J. et al. (1985): Routes to / Roots of Algebra. Milton Keynes: University Press.

Renk, N., Prediger, S., Büchter, A., Benholz, C., Gürsoy, E. (2013): Hürden für sprachlich schwache Lernende bei Mathematiktests – Empirische Analysen der Zentralen Prüfungen 10 NRW. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, in diesem Band.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012): Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: MNU, 65(8), 452–457.

Prediger, S., Wessel, L. (2013, im Druck): Fostering German language learners' constructions of meanings for fractions – Design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. Erscheint in: Mathematics Education Research Journal. Special Issue Mathematics Education and Language.

Jana KRÄMER, Kassel, Peter BENDER, Paderborn

Welche Fehler machen, welche Schwierigkeiten haben und welche Ideen entwickeln Studierende des Grundschullehramts beim Bearbeiten eines Arithmetik-Leistungstests? Oder: Was kodierte Nullen und Einsen nicht verraten...

1. Einordnung

Was bedeutet es, wenn eine Aufgabenbearbeitung in einem Leistungstest den „Score 0“ erhält? Von „völlig falsch“ bis (eben nur) „fast richtig“ ist vieles möglich, in standardisierten Tests gehen in den empirischen Leistungsparameter keine Details mehr ein. Zum Bestimmen von Leistungsständen oder -entwicklungen ein effizientes Werkzeug, doch für die Identifizierung von Fehlvorstellungen, Hürden oder möglichen Ansatzpunkten für den Lehrenden ebenso wenig geeignet wie für das Feststellen von Besonderheiten, vorhandenen Strategien, Vorstellungen und Zugängen. Wer es sich – wie das Projekt KLIMAGS (**K**ompetenzorientierte **L**ehr-**I**nnovation im **MA**thematikstudium für die **G**rund**S**chule; im Rahmen des khdm; Projektleiter Bender, Biehler, Blum, Hochmuth) – zum Ziel setzt, fachliche Kompetenzen (hier Arithmetik-Fachwissen) von angehenden Lehrern zu erfassen und dessen Erwerb zu unterstützen, braucht neben einem psychometrischen Messinstrument auch einen genauen Eindruck von den Stärken und Schwächen sowie eine Übersicht über die vorhandenen Kompetenzen, an denen Lehre und Lehrinnovationen ansetzen können.

In nationalen und internationalen Studien wurde schon das fachliche Wissen von Lehrkräften verschiedener Schulstufen untersucht. Beispielsweise TEDS-M stellte (u.a. für das arithmetische Wissen) Leistungsnachteile von angehenden Grundschullehrkräften gegenüber Haupt-/Realschullehrern fest (Döhrmann, 2012). Um zu klären, welche Schwierigkeiten genau die Aufgabenbearbeitung behindern, haben wir die im KLIMAGS-Arithmetik-Leistungstest gesammelten Bearbeitungen einer qualitativen Analyse nach Verfahrensweisen der Grounded Theory (Strübing, 2008) unterzogen. In drei Schritten (offene, axiale und selektive Kodierung) wurde für einzelne Aufgaben ein dezidiertes Kategoriensystem entwickelt, welches typische Probleme der Studierenden im ersten Studienjahr offenbart und Erklärungsansätze für die z.B. in TEDS (aus deren Instrumentarien einige Items geringfügig modifiziert übernommen wurden) berichteten Leistungsnachteile liefert. In dieses möchten wir hier einen Einblick geben.

2. Datengrundlage und Methode

An den Universitäten Kassel und Paderborn wurde die Fachvorlesung zur Arithmetik im Studiengang Grundschullehramt beforscht (in Kassel im ersten, in Paderborn im zweiten Semester). Dazu wurde an beiden Standorten je ein Vor- und ein Nachtest zur Leistungsstandbestimmung durchgeführt. Es wurden 250 Vortests und 150 Nachtests bearbeitet, der Anteil der Paderborner war jeweils etwa 42%.

In diesem Beitrag stellen wir exemplarisch die Analyse zweier Aufgaben (je eine aus Vor- und Nachtest) vor. Die Aufgabe „Relationen“ entstammt dem TEDS-Test-Instrumentarium, die Aufgabe „Zwölfer-System“ wurde in KLIMAGS entwickelt. Zielstellungen der Analysen der einzelnen Aufgabenbearbeitungen waren:

– Identifizierung von Bearbeitungswegen der Studierenden (innermathematische Wege, Strategien, Hürden, …)
– (Falls vorhanden) Identifizierung aufgabenübergreifender typischer Merkmale in den Bearbeitungen

Die offene und axiale Kodierung wurden zunächst an den Kasseler Testheften vorgenommen, die entstandenen Kategorien dann anhand der Bearbeitungen der Paderborner Studierenden in der selektiven Kodierung ergänzt und optimiert. Abschließend wurden alle Kategorisierungen in das überarbeitete Kategoriensystem übertragen und gegebenenfalls angepasst.

3. Aufgaben und Kategorien

Aufgabe „Relationen“ (Vortest-Aufgabe)

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Welcher der Ausdrücke ist größer:

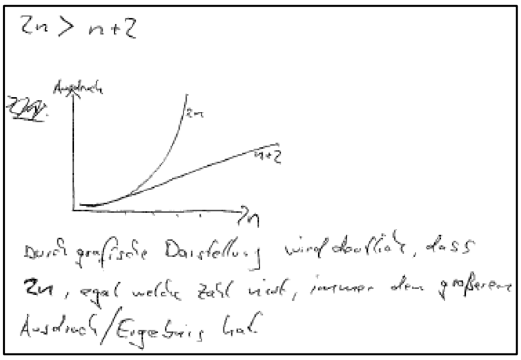
2n oder n+2 *?*

Beantworten Sie die Frage und begründen Sie ihre Antwort.

Die 250 Bearbeitungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Kategorie	**Anzahl**
Vollständige Fallunterscheidung	47
Schrittweise Entwicklung der vollst. Fallunterscheidung anhand von Bsp.	24
Aussage: Für n>2 gilt 2n>n+2	9
Fallunterscheidung für 2 Fälle anhand der 2	29
Fallunterscheidung für 2 Fälle anhand der 1	17
Interpretation als Funktionen	2

Angabe von einem Bsp. mit entsprechender Schlussfolgerung	22
Beispiel-Betrachtungen liefern nur 2 Fälle	2
Aussage, Verdopplung sei immer größer als die Addition	79
Aussage, Addition sei immer größer als Multiplikation	6
keine Antwort	13



Etwa ein Viertel der Studierenden zählt die drei Fälle auf, weitere knapp 10% erkennen zumindest die Besonderheit der Zahl 2, auch wenn sie keine vollständige Fallunterscheidung vornehmen. Die Beispiellösung zeigt (neben der fehlerhaften Konstruktion der Funktion f(n)= 2n), dass die Bedeutung von Schnittpunkten bzw. „Übereinanderverläufen“ zweier Grafen nicht angemessen interpretiert wird.

Aufgabe „Zwölfer-System“ (Nachtest-Aufgabe)

> Geben Sie die größte 3-stellige Zahl des 12er-Systems an und rechnen Sie diese ins Dezimalsystem um.
> Die größte 3-stellige Zahl des 12er-Systems ist $(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)_{12}$.
> Ihr Wert im Dezimalsystem beträgt: ______________________
> (Es genügt hier ein Rechenterm, Sie brauchen das Ergebnis nicht als Zahl anzugeben).

Bei dieser Aufgabe offenbarte sich – trotz ausgiebiger Behandlung in den Vorlesungen – ein wüstes Durcheinander von Ziffern, Potenzen und damit durchgeführten Operationen, nur 37 Studierende waren im Stande, die Zahl und ihre Umrechnung ins Zehnersystem vollständig korrekt anzugeben. Typische Fehler waren die Verwendung der 9 und die Berechnung mit falschen Basen, etliche Einzelfälle lassen sich kaum interpretieren:

Zahl	Umrechnung	Anz.	Zahl	Umrechnung	Anz.
$(BBB)_{12}$	$11 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12^1 + 11$	37	$(111)_{12}$	$1 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12^1 + 1$	6
$(BBB)_{12}$	$B \cdot 12^2 + B \cdot 12^1 + B \cdot 12^0$	4	$(1bb)_{12}$	keine	2
$((11)(11)(11))_{12}$	korrekt / keine	2/1	$(111)_{12}$	keine	2
$(BBB)_{12}$	keine	10	$(999)_{12}$	„korrekt“ /keine	4/1
$(BBB)_{12}$	$1 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12^1 + 1 \cdot 12^0$	4	$(99b)_{12}$,	$11 + 9 \cdot 12 + 9 \cdot 12^2$ / keine	1/1
$(BBB)_{12}$	$B \cdot 11^2 + B \cdot 11^1 + B \cdot 11^0$	3	„unsinnige“ Einzelfälle		18
$(BBB)_{12}$	$11^2 \cdot 11^1 \cdot 11^0$	2	keine Antwort		51

4. Beobachtungen auf der Ebene der Kompetenzen

Schon bei den beiden hier ausgewählten Aufgaben lassen sich einige aufgabenübergreifende Problemfelder erahnen:

1) Verzicht auf (auch nur leichten) Formalismus als Mittel zum präzisen Kommunizieren und als effizientes Argumentations-Werkzeug
2) Fehlende Einsicht in Effizienz und Bedeutung von Darstellungen / Darstellungsweisen
3) Überschätzung der Aussagekraft von Beispielen für Argumentationen

In der untersuchten Klientel zeigt sich eine deutliche Unsicherheit bei der Verwendung von mathematischen Symbolen oder Variablen. Einige scheinen dem Informationsgehalt von mathematischen Schreibweisen geradezu zu misstrauen, wenn sie eine korrekte formale Antwort mit (z.T. ungenauer) Prosa „erklären". Die Bedeutung von Darstellungen (z.B. Ziffernschreibweise) wird nur im üblichen Anwendungskontext (hier des Dezimalsystems) beherrscht, in anderen Systemen zeigen sich erhebliche Lücken im Verständnis. In Abschn. 3 konnten wir an einem Beispiel sehen, wie die grafische Darstellung in ihrer Aussagekraft überschätzt wurde (abgesehen von inhaltlichen Fehlern). Allerdings wurde hier immerhin eine allgemeine Form gewählt. Insbesondere zu Beginn des Studiums ist den Probanden die sehr eingeschränkte Aussagekraft von Einzelbeispielen für allgemeine Zusammenhänge noch nicht bewusst.

Die hier auszugsweise präsentierten Befunde werden derzeit anhand größerer Fallzahlen abgesichert und mit weiteren Merkmalen wie Typ der Lösungsstrategie (probierend, systematisch probierend oder zielgerichtet) charakterisiert. Wir wollen auch versuchen, die Schwierigkeiten der Studierenden in Erkenntnisse aus der Schuldidaktik, insbesondere in das Konzept der prozessbezogenen Kompetenzen (Blum et al 2006), einzubetten.

Literatur

Blum, W. et al (2006). Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Döhrmann, M. (2012). TEDS-M 2008: Qualitative Unterschiede im mathematischen Wissen angehender Primarstufenlehrkräfte. In W. Blum, R. Borromeo Ferri, K. Maaß (Hrsg.): Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität. Festschrift für Gabriele Kaiser (S. 230-237). Wiesbaden: Springer-Spektrum.

Strübing, J. (2008). Grounded Theory. Zur sozialtheoretischen und epistemologischen Fundierung des Verfahrens der empirisch begründeten Theoriebildung. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Jana KREUßLER, Horst W. HAMACHER, Kaiserslautern

Wie Geometrie zu einem anwendungsbezogenen und alltagsrelevanten Mathematikunterricht beitragen kann

Geometrie ist ein Themenfeld, welches den Mathematikunterricht durch alle Jahrgangsstufen hinweg prägt. Dieses kann mit anwendungsnahen Optimierungsproblemen so verknüpft werden, dass die Schüler durch das alltagsrelevante Thema motiviert werden und interessante Anwendungen der Mathematik in Alltag, Industrie und Wirtschaft kennenlernen. Durch die Wahl der Unterrichtsform (z.B. Modellierungsprojekte oder klassischer Unterricht) kann der Schwerpunkt auf allgemeine oder inhaltliche Kompetenzen gelegt werden. Geometrische Optimierungsthemen bieten somit eine große Vielfalt an Gestaltungsmöglichkeiten und ermöglichen eine Einbettung der gleichen Thematik in mehreren Klassenstufen und Schwierigkeitsniveaus.

1. Verknüpfung von Geometrie und Optimierung

Optimierung gehört zum Bereich der angewandten Mathematik und beschäftigt sich mit Problemstellungen aus Alltag, Industrie und Wirtschaft. Die zu betrachtende Zielfunktion, wie beispielsweise der Profit eines Unternehmens oder die Entfernung zu bestimmten Orten, soll maximiert bzw. minimiert werden, um die Situation für den Auftraggeber zu optimieren. Die lineare, ganzzahlige und multikriterielle Optimierung, sowie die Standortplanung und Spieltheorie bilden einige der Forschungsschwerpunkte, welche in der Optimierung untersucht werden. In jedem dieser Teilbereiche gibt es eine Vielzahl an Problemstellungen, welche sich anhand geometrischer Methoden lösen lassen und sich daher hervorragend für die Einbettung in den Mathematikunterricht in der Schule eignen. Klassische geometrische Inhalte des Rahmenlehrplans können somit anhand einer anwendungsbezogenen Thematik eingeführt, erarbeitet oder wiederholt werden. Durch die Behandlung dieser realen Problemstellungen aus dem Alltag der Schüler kann ihre Motivation für den Mathematikunterricht erhöht und ihre Wahrnehmung für anwendungsnahe Problemstellungen geweckt werden (Hamacher et al., 2013). Wir möchten nun einige dieser Beispiele aus dem Bereich der Standortplanung vorstellen. Algorithmen zur Lösung planarer Standortprobleme können in (Hamacher, 1995) nachgelesen werden.

Kreisringprobleme: Standortplanung von Handymasten

Ein Kreisring besteht aus zwei Kreisen mit unterschiedlichen Radien, $0 \leq r \leq R$, aber dem gleichen Mittelpunkt. Seine Breite wird als die Differenz seiner Radien definiert. Ein minimal breiter Kreisring kann beispielsweise das Dilemma bei der Standortplanung von Handymasten lösen. Da die meisten Menschen rund um die Uhr erreichbar sein möchten, ist ein Handymast in näherer Umgebung notwendig. Auf der anderen Seite ist es bisher nicht erwiesen, ob Mobilfunkmasten gesundheitsschädlich sind, weshalb ein Handymast in unmittelbarer Nähe oder neben dem eigenen Grundstück unerwünscht ist. Durch die Berechnung eines minimal breiten Kreisrings (Rivlin, 1979), welcher alle Kunden umschließt und den Handymast im Mittelpunkt positioniert, kann garantiert werden, dass viele Kunden von der Reichweite des Masts überdeckt werden und gleichzeitig niemand zu nah an ihn herankommt (siehe Abb.1).

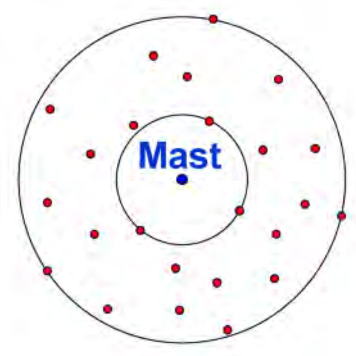


Abbildung 1: Kreisringprobleme

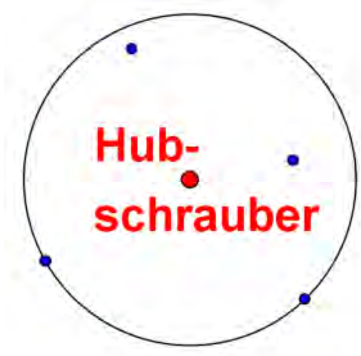


Abbildung 2: Euklidisches Botenproblem

Das Euklidische Botenproblem: Rettungshubschrauber

Das Euklidische Botenproblem beschäftigt sich mit der Suche nach einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$, welcher die maximale euklidische Distanz zu einer endlichen Anzahl gegebener Standorte minimiert. Dies findet beispielsweise bei der Wahl eines Standortes für einen Rettungshubschrauber seine Anwendung (siehe Abb.2). In den Alpen seien mehrere Skigebiete markiert, welche von einem Rettungshubschrauber angeflogen werden sollen. Da es bei Skiunfällen oft um Leben und Tod geht, ist eine minimale Entfernung und Flugzeit zu den Unfallorten von großer Bedeutung. Es wird also der Mittelpunkt eines Kreises mit minimalem Radius gesucht, welcher alle Skigebiete überdeckt. Ein geometrischer Algorithmus zur Lösung dieses Problems wird in (Elzinga et al., 1972) präsentiert. Der Einsatz dieses Standortproblems für den Schulunterricht wird in Kapitel 3 in (Hamacher et al., 2004) diskutiert.

Haltestellenplanung

In einer Stadt, in welcher wichtige Kundenstandorte und Straßen markiert sind, sollen optimale Orte für Haltestellen markiert werden. Die Anzahl dieser Haltestellen soll minimiert werden, aber trotzdem für jeden Kunden eine Erreichbarkeit innerhalb einer gewissen Entfernung garantieren. Eine ausführliche Beschreibung und Diskussion dieses Optimierungsproblems und seine Einbettung in den Lehrplan kann in (Hamacher et al., 2013) nachgelesen werden.

Voronoi-Diagramme: Marktgebiete städtischer Supermärkte

Eine Supermarktkette möchte in einer Stadt eine neue Filiale eröffnen. Um einen optimalen Standort zu finden, welcher die Anzahl seiner Kunden und somit seinen Profit maximiert, muss zunächst die aktuelle Situation des Marktes dokumentiert werden. Wir nehmen an, dass Menschen im Allgemeinen die Filiale wählen, welche am nächsten zu ihnen liegt. Das Marktgebiet einer Filiale $X \in \mathbb{R}^2$ enthält demnach die Menge der Punkte in der Ebene, welche näher an X liegen als an jeder anderen Filiale. Die Unterteilung der Ebene in Marktgebiete wird in einem *Voronoi-Diagramm* (Okabe et al., 1992) dargestellt, welches im Fall der euklidischen Distanz durch die Generierung von Mittelsenkrechten entsteht (siehe Abb.3 links). Dieses geometrische Konstrukt kann nun beliebig erweitert werden, indem das Modell durch die Wahl der Rechteckdistanz (siehe Abb. 3 rechts) oder das Einbringen von Gewichtungen, welche das Preis-Leistungs-Verhältnis der Supermärkte beschreiben, verfeinert wird.

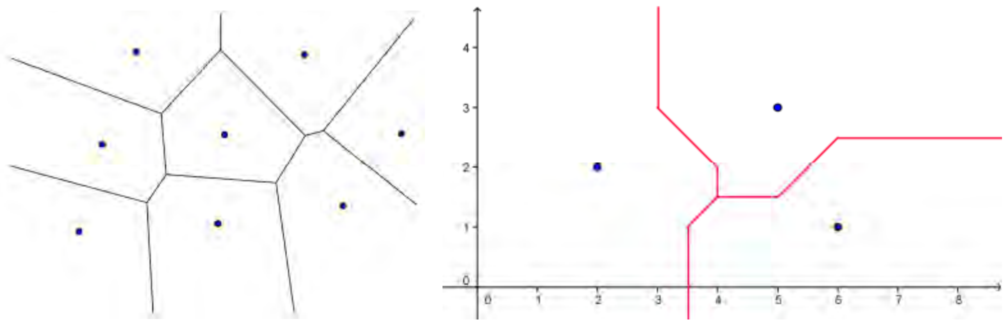


Abbildung 3: Voronoi-Diagramme
(Links: bzgl. der Euklidischen Distanz, Rechts: bzgl. der Rechteckdistanz)

2. Integration in den Schulalltag

Geometrische Optimierungsthemen können auf vielfältige Art und Weisen in den Mathematikunterricht des Schulalltages eingebettet werden. Dies wollen wir nun anhand des Beispiels der Voronoi-Diagramme demonstrieren. Mathematische Grundkenntnisse und Fähigkeiten, welche Schüler zur Bearbeitung von Voronoi-Diagrammen benötigen, werden zu großen Teilen bereits in Klassenstufe 5-7 erworben. Der rheinland-pfälzische Rahmenlehrplan Mathematik der Klassenstufen 5-9/10 (MBWJK, 2007) führt die Schüler in Klassenstufe 5/6 langsam an das Arbeiten mit dynamischer Geometriesoftware heran, um in Klassenstufe 7/8 den Betrag als Abstand vom Nullpunkt, sowie Grundkonstruktionen (z.B. Mittelsenkrechten und Winkelhalbierende) mit Zirkel und Lineal einzuführen. Im Verlauf der Unterrichtseinheit zum Thema der Voronoi-Diagramme können Begriffe wie die *Euklidische Distanz, Rechteckdistanz*, *Einheitskreis* und *Bisektor* eingeführt oder wiederholt werden. Je nach Altersgruppe, Leistungsniveau und den Vorerfahrungen der Schüler, kann der Schwerpunkt der Unterrichtseinheit angepasst werden. Dieser kann bei jüngeren Schülern auf den geometrischen Konstruktionen und der Bedienung dynamischer Geometriesoftware liegen, kann jedoch auch im Schwierigkeitsgrad beliebig erhöht werden, indem Gewichtungen eingeführt oder Beweise verlangt werden. Die Unterteilung einer Stadt in Marktgebiete kann sowohl als einführendes Beispiel zu einer neuen Thematik, als auch als roter Faden durch die ganze Unterrichtseinheit genutzt werden. Voronoi-Diagramme können ebenfalls genutzt werden, um den Schwerpunkt der Unterrichtseinheit auf die allgemeinen mathematischen Kompetenzen wie beispielsweise *K1: Mathematisch argumentieren, K3: Mathematisch modellieren* oder *K6:Kommunizieren* zu lenken, indem ein Modellierungsprojekt zum Thema der Markgebiete von Supermärkten durchgeführt wird. Hierfür wird eine Mindestanzahl von 5-6 Unterrichtsstunden benötigt. Das Feedback von Schülern gegenüber Modellierungsprojekten in der Schule ist bisher durchweg als positiv bewertet worden (siehe beispielsweise Kaiser et al., 2010). Geometrische Optimierungsthemen bieten somit eine Vielzahl an Implementierungsmöglichkeiten für den täglichen Mathematikunterricht.

Literatur

Elzinga, J., Hearn, D.W. (1972): Geometrical Solutions for Some Minimax Location Problems. In: Transportations Science 6, pp. 379-394.

Hamacher, H.W. (1995): Mathematische Lösungsverfahren für planare Standortprobleme. Vieweg Verlag Braunschweig/Wiesbaden.

Hamacher, H.W., Korn, E., Korn, R., Schwarze, S. (2004): Mathe und Ökonomie – Neue Ideen für den praxisnahen Unterricht. Universum Verlag.

Hamacher, H.W., Kreußler, J. (2013): Merging Educational and Applied Mathematics: The Example of Locating Bus Stops. Accepted and presented paper at CERME8 (Congress of European Research in Mathematics Education), Antalya, Turkey.

Kaiser, G., Schwarz, B. (2010): Authentic Modelling Problems in Mathematics Education – Examples and Experiences. In: Journal für Mathematikdidaktik 31/1, pp.51-76

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur (MBWJK) Rheinland-Pfalz (2007): Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5-9/10).

Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K. (1992): Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. John Wiley & Sons Ltd. Chichester.

Rivlin, T.J. (1979): Approximation by Circles. In: Computing, Vol. 21/2, pp. 93-104.

Schöbel, A., Hamacher, H.W., Liebers, A., Wagner, D. (2009): The Continuous Stop Location Problem in Public Transportation Networks. In: Asia-Pacific Journal of Operational Research, Vol. 26/1, pp. 13-30.

Stephan KREUZKAM, Jan Marco JANOTTA, Hildesheim

Smart-Response^{TM} – Gleiche Chance für alle?!

Ein Zitat des österreichischen Kommunikationswissenschaftlers, Psychotherapeuten und Soziologen Paul Watzlawick zur zwischenmenschlichen Kommunikation besagt: „Ich weiß nicht, was ich gesagt habe, bevor ich die Antwort meines Gegenübers gehört habe." (vgl. u.a. Watzlawick, zit. in Maywald, 2004, S.31) Genau dieses Szenario spiegelt sich oft im Klassenzimmer wider und kann dazu führen, dass Meinungen und Ideen von Schülern im Klassengespräch untergehen.

Das Feedback oder die Rückmeldung (laut Duden eine „Reaktion, die jemandem anzeigt, dass ein bestimmtes Verhalten, eine Äußerung o.Ä. verstanden wurde." (Duden, 2011)) nimmt einen großen Anteil des Schulalltags ein und spiegelt sich auch in den mündlichen Noten der Schüler wider. Die Notengebung im Bereich der mündlichen Mitarbeit ist jedoch ein heikler Prozess, der sich trotz vieler guter theoretischer Anleitungen im Berufsalltag der Lehrpersonen oft als höchst anspruchsvoll entpuppt. Es geht sogar so weit, dass sich „viele Lehrer beim Beurteilen mündlicher Leistungen unsicher oder sogar sehr unsicher fühlen" (Männel, 2008).

Hier verspricht SMART Technologies Abhilfe: „Mit SMART Response^{TM} fragen Sie Sich nicht länger, ob Ihre Schüler den Unterrichtsinhalt verstanden haben. Sie wissen es – auf Knopfdruck." (SMARTtechGermany, 2012)

Digitale Feedbacksysteme, wie SMART Response^{TM} oder das Schülerfeedbacksystem von Promethean bieten Vorteile, die hier näher erläutert werden sollen. Die natürlich resultierenden Nachteile und der kritische Blick auf diese Systeme werden ebenfalls behandelt.

1. Vorstellung und Voraussetzungen

Digitale Feedbacksysteme erfordern, wie der Name schon sagt, digitale Unterstützung im Bereich der Hard- und Sofware. Das SMART Response^{TM} System benötigt einen Computer, einen Klassensatz Klicker (kabellose Fernbedienungen), sowie einen Empfänger als Hardwareausstattung und die Softwares SMART Notebook und SMART Desktopmenü (Response Lehrerwerkzeuge) die auf dem Computer installiert sein müssen. Der Empfänger wird an den Computer angeschlossen und regelt die Kommunikation zwischen Computer und Klickern, die an die Schüler verteilt werden. Das System funktioniert, indem der Lehrende ein Frage -je nach Art der Klicker sind unterschiedlich viele Fragekategorien möglich (vgl. u.a. auf der Internetseite von SMART Technologies (Germany) GmbH) - an den Kurs stellt und die Lerngruppe mit Hilfe der Klicker antwortet. Die Antworten werden sofort an den Computer gesendet, wo die Lehrerwerkzeuge (vgl. Software) diese Daten in Form von Diagrammen, Tabellen oder in Textform (je nach Fragestellung und Geschmack des Lehrenden) darstellen und der Lehrende einen sofortigen Überblick über den Lernstand oder die Meinung seiner Lerngruppe erhält. Die Fragen können in unterschiedlichen Modi gestellt werden: Entweder kann sich die Lerngruppe anonym im System anmelden oder mit individuellen Passwörtern. Wird der zweite Modus verwand, können die Schülerantworten und -daten gespeichert und als ein Indikator der mündlichen Leistung benutzt werden.

2. Die Fragestellungen

Wie können digitale Feedbacksysteme den Unterricht sinnvoll ergänzen, erweitern oder optimieren, damit deren Einsatz überhaupt gerechtfertigt werden kann.

Auf technischer und unterrichtspraktischer Seite stellt sich die Frage: Welche Möglichkeiten und Grenzen bietet das System? Und in der Konsequenz der Einführung: Lässt sich die Bewertung der mündlichen Mitarbeit objektivieren bzw. unabhängiger von der eigenen Wahrnehmung gestalten (Chancen für stillere Schüler?)? Dementsprechend sollte im weiteren Verlauf des Unterrichts/ des Kurses das Antwortverhalten der Schüler und Studierenden und dessen Veränderung beobachtet werden.

Weiterhin sollte bei der Einführung darauf geachtet werden, wie die jeweilige Lerngruppe auf das System und die Methode reagiert und ob das diese akzeptiert werden.

3. Zwei Einsatzszenarien

Das digitale Feedbacksystem wurde sowohl in Kursen an der Universität als auch an einem Gymnasium getestet.

An der Universität Hildesheim wurde das digitale Feedbacksystem im Rahmen der Pflichtveranstaltung „Informations- und Kommunikationstechnologie“ für Studierende des Lehramts aller Fächer eingesetzt. In dieser Veranstaltung werden den Studierenden grundlegende Kompetenzen im Umgang mit Computerprogrammen für die Vor- und Nachbereitung des Unterrichts sowie die Unterrichtspraxis, als auch theoretischen Grundlagen der Mediendidaktik vermittelt. Der Einsatz des Systems erfolgte hauptsächlich über vorbereitete „Sofort-Fragen“. Bei dieser Art der Fragenstellung werden vorab die Fragen in einer Datei angelegt, während des Seminars jedoch separat aufgerufen und gestellt. Eine andere Form der Fragenstellung ist die „Prüfung“, bei der mehrere Fragen in einer Datei gespeichert und im Kurs gleichzeitig gestellt werden. In diesem Fall können die Studierenden mit einer beliebigen Frage beginnen. Die dritte und letzte Form der Fragenstellung sind nicht vorbereitete „Sofort-Fragen“. Diese können spontan im Unterricht er- und gestellt werden. Die Fragenstellung erfolgt hierbei ausschließlich mündlich, die Antworten jedoch sind mit den Klickern zu geben.

Mit den digitalen Feedbacksystemen lernen die Studierenden eine völlig neue Beteiligungs- und Prüfungsform kennen - sowohl aus der Sicht des Lehrenden, als auch aus der Sicht des Lernenden. Dadurch können sie in der Schulpraxis besser einschätzen, was sie von ihren Schülern erwarten.

Zudem kann zu jeder Sitzung ein Feedback von den Studierenden eingeholt und jederzeit wieder abgerufen werden, sodass längerfristig eine Verbesserung der Lehre möglich ist.

Am Ratsgymnasium Wolfsburg wird SMART Response™ regelmäßig im Unterricht der Klassen 5 – 10 eingesetzt. Hier wird das System hauptsächlich dazu genutzt spontane Meinungsumfragen oder Lernzielkontrollen, sowie deren Vorbereitung durchzuführen. Um jedoch überhaupt mit diesem System arbeiten zu können, müssen die Schüler zunächst mit dem System vertraut gemacht werden und regelmäßig und häufig damit arbeiten. Mit einem vorbereiteten Aufgabenkatalog können die Fragen schnell gestellt und ausgewertet und durch den kontinuierlichen Einsatz des Feedbacksystems der Lernzuwachs dokumentiert werden.

4. Fazit

Das digitale Feedbacksystem SMART Response™ bietet einige den Unterricht optimierende Möglichkeiten, weist aber auch Grenzen auf. Die Vorteile liegen ganz klar darin, dass es hiermit möglich ist ein Feedback / eine Rückmeldung / eine Antwort von allen Lernenden zu bekommen und innere Faktoren wie z.B. Schüchternheit keine Rolle mehr spielen. Ebenso ist das Feedback unbeeinflusst, da – wie im Einführungszitat beschrieben – zunächst keine Reaktion der Mitschüler erfolgt und auch keine vorige Antwort oder Meinung im Raum steht. Die schnelle Auswertung von Multiple-Choice-Fragen ist ein weiterer Vorteil, den dieses System bietet.

Allerdings muss an dieser Stelle schon betont werden, dass natürlich eine (große) Abhängigkeit von der Technik geschaffen wird. Diese wird dadurch verstärkt, dass die Anschaffung und Wartung der Technik einen hohen Kostenfaktor mit sich bringt. Ebenfalls muss das Equipment in ausreichender Anzahl verfügbar sein und es muss eine gewisse Aufbauzeit der Technik eingeplant werden. Des Weiteren ist die technische Abhängigkeit dadurch gegeben, dass je nach Klicker-Ausstattung die Möglichkeiten der Fragestellung eingeschränkt sind. Eine Differenzierung innerhalb der Klasse durch unterschiedliche Fragestellungen ist nicht möglich. Die erhöhte Transparenz der mündlichen Note durch stetige Dokumentation und die daraus resultierende Sichtbarkeit der Lernentwicklung der Schüler stellt jedoch einen großen Vorteil der digitalen Feedbacksysteme dar. Durch diese individuelle Diagnose der Schülerleistung kann das System letztlich doch noch ein erhöhtes Maß an Differenzierung im Unterricht ermöglichen. Als unterstützendes Diagnosemittel lässt sich das System ebenfalls zur Verbesserung der Objektivierung der Bewertung der mündlichen Mitarbeit verwenden.

Literatur

Arnold, Karl-Heinz; Sandfuchs, Uwe; Wiechmann, Jürgen (2006): Handbuch Unterricht. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Duden. Deutsches Universalwörterbuch (2011). 7. Aufl. Mannheim u.a: Bibliographisches Institut.

Heinrichs, Julia; Di Fuccia, David-Samuel (2012): Bewertungskompetenz bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I. Möglichkeiten der Diagnose und Förderung. In: Sascha Bernholt (Hg.): Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, [38.] Jahrestagung in Oldenburg 2011. 1. Aufl. Berlin [u.a.]: LIT (Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, 32), S. 503–505.

Kirk, Sabine (2004): Beurteilung mündlicher Leistungen. Pädagogische, psychologische, didaktische und schulrechtliche Aspekte der mündlichen Leistungsbeurteilung. Bad Heilbrunn/Obb: Klinkhardt (Erziehen und Unterrichten in der Schule).

Männel, Sophie (2008): Möglichkeiten der Leistungsmessung im Mathematikunterricht. 1. Aufl. s.l: GRIN Verlag.

Maywald, Fritz (2004): Vom Teilen zum Mit-Teilen. Wege zur effizienten Kommunikation. Wien, Klosterneuburg: Ed. Va Bene (Erfolg).

SMART Technologies (Germany) GmbH (2013): SMART Response Interactive Student Response System für den Unterricht - SMART Technologies. Online verfügbar unter https://www.smarttech.com/Solutions/Education+Solutions/Products+for+education/Complementary+hardware+products/SMART+Response, zuletzt geprüft am 24.03.2013.

SMARTtechGermany (2012): SMART Response™ -- ein Überblick - YouTube. Online verfügbar unter http://www.youtube.com/watch?v=3VknWngSLoc, zuletzt geprüft am 24.03.2013.

Stephan KREUZKAM, Hildesheim

Mangel an mathematischen Routinefertigkeiten – Basiswissen Mathematik

Immer wieder ist bei der Korrektur von Mathematik-Klausuren festzustellen und in Zeitungs- oder Internetartikeln zu lesen, dass viele Studierende in mathematischen oder mathematikhaltigen Studiengängen einfachste Routineaufgaben nicht lösen können. Ein populäres Beispiel für einen solchen Artikel ist u.a. der Bericht über eine Klausur der Universität zu Köln mit einer „Durchfallquote [von] 94 Prozent“, erschienen im SPIEGEL (Armin Himmelrath - SPIEGEL ONLINE) am 12.04.2012. Doch: Warum sind in den letzten Jahren immer wieder solche erschreckenden Meldungen zu verzeichnen? Liegt ein Grund tatsächlich in einem Mangel an mathematischen Routinefertigkeiten?

Was unter mathematischen Routinefertigkeiten zu verstehen ist, kann über den Begriff der Basiskompetenzen in Mathematik hergeleitet werden. Darunter werden die „mathematischen Kompetenzen [verstanden], über die alle Schülerinnen und Schüler aller Bildungsgänge am Ende der allgemeinen Schulpflicht mindestens und dauerhaft verfügen müssen“ (Drüke-Noe, u.a., 2011, S.8). Routine wird im Duden als „durch längere Erfahrung erworbene Fähigkeit, eine bestimmte Tätigkeit sehr sicher, schnell und überlegen auszuführen“ (Duden, 2011) definiert. Mathematische Routinefertigkeiten werden hier also als die Fertigkeiten, einfache schulische Algorithmen automatisiert und korrekt auszuführen verstanden.

Es ist allgemein in der mathematischen Community bekannt, dass es Lücken im schulischen mathematischen Wissen bei Studienanfängern gibt. Die 2. Arbeitstagung des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik der Mathematik (KHDM) 2013 zeigte, dass es bereits einige Konzepte zur Verbesserung dieser Situation - vor allem im Bereich der Tutorien, Vor- und Brückenkursen - gibt. Da die einzelnen Konzepte und deren Evaluationen noch nicht veröffentlicht wurden, kann hier nicht weiter darauf aufgebaut werden. Allgemein wurde in den Vorträgen jedoch festgestellt, dass die Leistungen der Studienanfänger nahezu überall als zu schlecht eingestuft werden müssen. Zudem können große Unterschiede im mathematischen (in den einzelnen Tests abgeprüften) Wissen zwischen den Studierenden der einzelnen Studiengänge nachgewiesen werden. So schneiden die Studierenden des 1-Fach-Bachelorstudiengangs im Vergleich zu den Lehramtsstudierenden mit Mathematik besser ab. Innerhalb der Lehramtsstudiengänge lässt sich eine weitere deutliche Abstufung von Studierenden des gymnasialen Lehramts zu Grund-/Haupt- und Realschul-Studierenden feststellen. Eine Studie ergab, dass diese Unterschiede durch fachliches Interesse vermindert bzw. ausgeglichen werden können. Weitere interessante Aspekte, die auf dieser Tagung zur Sprache kamen, waren das „neue Klientel" an Studierenden (in den letzten 40 Jahren stieg die Anzahl der Studienanfänger von 6% auf 40% eines Jahrgangs) und die Rolle der Wissenschaftspropädeutik, die in der Schule zu Gunsten der Allgemeinbildung in den Hintergrund rückt. Auch die großen Studien TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics) und COACTIV, die sich mit der professionellen Kompetenz von Lehrkräften befassen, stellen erhebliche Mängel im mathematischen Wissen von Lehrkräften und Lehramtsanwärtern fest (vgl. u.a. Blömeke, u.a., 2010a und 2010b; Kunter, u.a., 2011). Vor allem die Sekundarstufen-I-Lehrkräfte weisen laut TEDS-M starke Mängel im mathematischen Wissen auf. Etwa ein Drittel dieser Testanden befinden sich auf Kompetenzniveau I (Blömeke, u.a., 2010a) - was bedeutet, dass die (angehenden) Lehrkräfte die Konzepte, die sie vermitteln sollen, selbst kaum verstanden haben. Aus den beiden Studien TEDS-M und COACTIV geht ebenfalls hervor, dass das mathematische Wissen eine Voraussetzung für das mathematikdidaktische Wissen darstellt (Künsting, u.a. 2009, S.657f) und es demensprechend wichtig für Lehramtsstudierende ist sich dieses Wissen anzueignen. Letztendlich stellen diese Studien zwar u.a. Ergebnisse vor, die ein schlechtes mathematisches Wissen beschreiben, sind aber kein unbedingter Beleg dafür, dass die Routinefertigkeiten nicht oder nur schlecht ausgebildet sind, da diese nicht gezielt getestet wurden.

Ein eindeutiges Indiz für die mangelhaft ausgeprägten Routinefertigkeiten von GHR-Studierenden liefern zwei dahingehende Fragebogenstudien, die an der Universität Hildesheim im Rahmen von Masterarbeiten durchgeführt wurden und sich mit ähnlichen Zielsetzungen beschäftigen. Die Studie zu mathematischen Grundkenntnissen von Studierenden (Kreuzkam, 2011) stellt u.a. heraus, dass die GHR-Studierenden im Bachelorstudiengang kaum geschlossene einfache Rechenaufgaben (Grundrechenarten mit Brüchen und Dezimalbrüchen) in begrenzter Zeit bewältigen können, fehlerfrei mit Zahldarstellungen umgehen können oder sich in der mathematischen Sprache auskennen. Ähnliche Ergebnisse finden sich in der Studie „Aktivierung studienrelevanter Kenntnisse aus der Schulmathematik" (Kramer, 2013) – eine Befragung von Studienanfängern, die den Vorkurs besuchten. Auch hier konnten große Defizite in den oben genannten Bereichen aufgedeckt werden. Als (z.Z. noch nicht letztendlich bestätigtes) Fazit aus diesen beiden Studien ist abschließend festzuhalten, dass selbst GHR-Studierende mit Mathematik als Fach nicht automatisiert mit schulischen mathematischen Grundkonzepten umgehen können und somit die Routinefertigkeiten nicht ausreichend gefestigt sind.

Gerade bei diesem speziellen Klientel „Lehramt“ sollte jedoch besonderer Wert darauf gelegt werden, dass die Routinefertigkeiten ausreichend gefestigt sind, da genau diese Studierenden später Lehrer werden (und die Erfahrung zeigt, dass auch Lehramtsanwärter ohne ausgeprägte Routinefertigkeiten sowohl das Studium, als auch den Referendardienst durchlaufen) und als Multiplikatoren etliche Schüler unterrichten und prägen. Sind bei diesen Studierenden also die Routinefertigkeiten nicht ausreichend ausgeprägt, können auch größere mathematische Konzepte und Zusammenhänge nicht ausreichend verstanden werden und den Schülern kann kein mathematisch fundiertes, stichhaltiges und interessantes Bild von Mathematik vermittelt werden.

Es stellte sich heraus, dass die Studierenden die grundlegenden Techniken, und Konzepte der Mathematik, sowie den Gebrauch und die Anwendung einfacher Algorithmen in der Schule gelernt haben, diese jedoch nicht automatisiert und somit nicht als Routine gefestigt wurden. Auf der Arbeitstagung des KHDM wurde deutlich, dass solche Defizite nicht in der kurzen Zeit eines Vor- oder Brückenkurses aufgeholt werden können. Dies erklärt sich unter anderem dadurch, dass eine Automatisierung nicht nur das einfache Lernen von Regeln und Fakten voraussetzt, sondern vielmehr einen stetigen und anhaltenden Umgang mit dem Gelernten. Sollten diese Routinefertigkeiten falsch gelernt und automatisiert worden sein (Misskonzept), benötigt das Erlangen dieser Routinefertigkeit noch weitaus mehr Zeit.

An der Universität Hildesheim wird derzeit ein Konzept erprobt, bei dem die (GHR-)Studierenden in ihren Klausuren einen allgemeinen Teil - bestehend aus Aufgaben, die mit Hilfe von Routinefertigkeiten gelöst werden sollen - bearbeiten müssen. Im WS 12/13 erreichte in der Erstsemesterklausur gerade einmal die Hälfte der Studierenden 50% der Punkte.

Aus all diesen Indikatoren für die Ausprägung der Routinefertigkeiten bei Studierenden der Mathematik lassen sich abschließend folgende Fragen stellen: Kann das Studium die Defizite in den Routinefertigkeiten auffangen und die entstandenen Lücken schließen? Ist es überhaupt die Aufgabe des Studiums so grundlegende Fertigkeiten (wie z.B. Bruchrechnung oder auch Rechtschreibung) zu vermitteln? Am wichtigsten scheint allerdings die Frage, wie kann verhindert werden, dass Mathematik-Studierende mit großen Defiziten in den Routinefertigkeiten ihr Studium überhaupt abschließen und Lehrer werden können? Diese Fragen gilt es im Sinne einer nachhaltigen Bildung zukünftiger Schülergenerationen dringend zu klären, um sicherzustellen, dass Studierende mit solch eklatanten Mängeln im Bereich der mathematischen Routinefertigkeiten nicht in den Lehrerdienst entsandt werden.

Literatur

Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Lehmann, Rainer (Hg.) (2010a): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Primarstufe im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Lehmann, Rainer (Hg.) (2010b): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Döhrmann, Martina; Lehmann, Rainer (2010c): Mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen angehender Sekundarstufen-I-Lehrkräfte im internationalen Vergleich. In: Sigrid Blömeke, Gabriele Kaiser und Rainer Lehmann (Hg.): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann, S. 197–238.

Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Döhrmann, Martina; Suhl, Ute; Lehmann, Rainer (2010d): Mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. In: Sigrid Blömeke, Gabriele Kaiser und Rainer Lehmann (Hg.): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Primarstufe im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann, S. 195–252.

Duden. Deutsches Universalwörterbuch (2011). 7. Aufl. Mannheim u.a: Bibliographisches Institut.

Drüke-Noe, Christina; Möller, Gerd; Pallack, Andreas; Schmidt, Siegbert; Schmidt, Ursula; Sommer, Norbert; Wynands, Alexander (2011): Basiskompetenzen Mathematik für Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen.

Himmelrath, Armin (2012): Proteste nach harter Mathe-Klausur: Durchfallquote 94 Prozent. Hg. v. SPIEGEL ONLINE GmbH.

Kramer, Julia (2013): Aktivierung studienrelevanter Kenntnisse aus der Schulmathematik. Evaluation eines Vorkurs-Konzeptes. Master Thesis. Universität Hildesheim, Hildesheim. Institut für Mathematik und Angewandte Informatik.

Kreuzkam, Stephan (2011): Mathematische Grundkenntnisse von Studierenden. an der Universität Hildesheim. Master Thesis. Universität Hildesheim, Hildesheim. Institut für Mathematik und Angewandte Informatik.

Künsting, Josef; Billich, Melanie; Lipowsky, Frank (2009): Der Einfluss von Lehrerkompetenzen und Lehrerhandeln auf den Schulerfolg von Lernenden. In: Olga Zlatkin-Troitschanskaia (Hg.): Lehrprofessionalität. Bedingungen, Genese, Wirkungen und ihre Messung. Weinheim, Basel: Beltz, S. 655–667.

Kunter, Mareike; Baumert, Jürgen; Blum, Werner; Klusmann, Uta; Krauss, Stefan; Neubrand, Michael (Hg.) (2011): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster, New York, NY, München, Berlin: Waxmann.

André KRUG, Stanislaw SCHUKAJLOW, Paderborn

Prozedurales und konzeptuelles Wissen zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen und multiple mathematische Lösungswege

Theoretischer Hintergrund

Bei der Verbesserung des deutschen Mathematikunterrichts gibt es schon lange die Forderung multiple Lösungen im Unterricht zu behandeln (Neubrand, 2006). Dabei stützt man sich auf theoretische Überlegungen, wie bspw. eine Vertiefung der Einsicht in die Struktur des Lerngegenstandes (Wittmann, 1995). Zudem zeigt die Behandlung verschiedener Lösungswege Möglichkeiten auf, eine Lösung zu optimieren. Durch die Erstellung multipler Lösungswege kommt es zur kognitiven Vernetzungen und sie helfen bei der Förderung des Aufbaus eines intelligenten, verstehenden Wissens und selbstregulativer Fähigkeiten der Schüler (Fennema & Romberg, 1999). Bisher liegen allerdings nur vereinzelte, empirisch abgesicherte Ergebnisse vor (Große, 2005; Rittle-Johnson & Star, 2007). An bisher vorhandenen Forschungslücken bzgl. Leistungen, strategischer und motivational-affektiver Merkmale setzt das DFG Forschungsprojekt MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientiertem Mathematikunterricht) an. In der aktuellen Projektphase stehen multiple mathematisch Lösungswege im Mittelpunkt, die durch die Anwendung verschiedener mathematischer Verfahren erstellt werden können. Ergebnisse der ersten Projektphase deuten auf positive Wirkungen der Behandlung von multiplen Lösungen auf Selbstregulation, Interesse und Präferenzen für die Bearbeitung von Aufgaben mit mehreren Lösungen hin (Schukajlow & Krug, 2012a, 2012b, 2013).

Die Fähigkeit multiple mathematische Lösungswege zu erstellen hängt zum einen mit prozeduralem Wissen und zum anderen mit konzeptuellem Wissen zusammen. Prozedurales und konzeptuelles Wissen lässt sich nach (Rittle-Johnson et al., 2001) wie folgt definieren: „Procedural knowledge is the ability to execute action sequences to solve problems. This type of knowledge is tied to specific problem types and therefore is not widely generalizable.” Dagegen ist konzeptuelles Wissen “the implicit or explicit understanding of the principles that govern a domain and the interrelations between units of knowledge in a domain.” In beiden Definitionen wird deutlich, dass beide Wissensbereiche domänespezifisch sind.

In der Literatur findet sich kein einheitliches Bild zu den Zusammenhängen von prozeduralem und konzeptuellem Wissen (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Tiefe Kenntnis der beiden Wissensbereiche scheint eine wichtige

Voraussetzung zu sein, um Aufgaben zu lösen. Speziell das konzeptuelle Wissen spielt bei der Auswahl von Lösungsverfahren, für Kontrollstrategien und dem Transfer von prozeduralem Wissen auf neuen Aufgaben eine große Rolle (Hiebert & Lefevre, 1986). Darüber hinaus ist konzeptuelles Wissen elementar für die Konstruktion und die Flexibilisierung des Einsatzes von Lösungsverfahren (Blöte et al. 2001).

Forschungsfragen und Methode der Studie

Die Erstellung von multiplen Lösungen verlangt sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen. Um diese Zusammenhänge zu erfassen bedarf es eines Instrumentes, welches die Konstrukte zum Inhaltsbereich „lineare Funktion" erfasst. Die Forschungsfragen lauten:

1. Wie lassen sich prozedurales und konzeptuelles Wissen zum Inhaltsbereich lineare Funktionen operationalisieren?
2. Gibt es Zusammenhänge zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen?
3. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen prozeduralem, konzeptionellem Wissen und der Fähigkeit multiple mathematische Lösungswege zu erstellen?

Es haben 204 Realschüler aus Jahrgangsstufe 9 an der Untersuchung teilgenommen. Die Testzeit lag bei 60 Minuten. Um die Konstrukte prozedurales und konzeptuelles Wissen zu erfassen wurden 23 Items zum Inhaltsbereich lineare Funktionen eingesetzt. Die Items verteilten sich im Leistungstest auf: prozedurales Wissen zu linearen Funktionen (11 Items), konzeptuelles Wissen zu linearen Funktionen (6 Items), Lesen und Erstellen von Tabellen (7 Items) und die Entwicklung von multiplen Lösungen zu linearen Funktionen (2 Items).

Ergebnisse und Diskussion

Um die erste Forschungsfrage zu beantworten und die Güte der Operationalisierung zu prüfen, wurden zwei Messmodelle mit einander verglichen: 1- und 3-dimensionales Fähigkeitskonstrukt. Beim 3-dimensionalen Modell wurde jedes Item zu einer von den drei Dimensionen (prozedurales Wissen zu linearen Funktionen, konzeptuelles Wissen zu linearen Funktionen und Lesen und Erstellen von Tabellen) zugeordnet. Zur Bewertung beider Modelle wurden die Anzahl schlecht fittender Items (INFIT), Varianz innerhalb der Dimensionen, der Likelihood-Quotiententest (LQT) und die Reliabilität herangezogen (Rost, 2004). Analysen beider Modelle zeigen gute INFIT-Werte (zwischen 0.8 und 1.2). Die Varianz, welche auch ein Indikator für die Trennschärfe ist, lag für das 1-dimensionale Modell bei $\sigma^2 = .45$ und damit unter den Varianzen der Dimensionen prozedurales Wissen ($\sigma^2 = .60$) und konzeptuelles Wissen ($\sigma^2 = .59$) im 3-dimensionalen Modell. Allerdings beträgt die Varianz im 3-dimensionallen Modell für die Dimension Lesen und Erstellen von Tabellen nur $\sigma^2 = .12$. Der LQT zeigt ein signifikant bessere Passung des 3-dimensionalen Modells im Vergleich zum 1-dimensionalen Modell (Δ Deviance (df) = 66.27(5); $p<.001$). Die Reliabilitäten der Modelle sind mit Werten zwischen .41 und .54 beim 3-dimensionalen Modell und .52 bei 1-dimensionalen Modell allerdings eher unbefriedigend. Des Weiteren ist anhand der Verteilung der Schülerparameter und der Schwierigkeiten der Aufgaben im Test eine deutlich Rechtsverschiebung zu erkennen, sodass davon ausgegangen werden muss, dass der Test für die Schülerpopulation zu schwer war. Dieses Ergebnis zeigt die Notwendigkeit im weiteren Forschungsprozess leichtere Items zu entwickeln.

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage, wird die latente Korrelation zwischen beiden Wissensbereichen betrachtet. Diese Korrelation liegt messfehlerbereinigt bei .906 und ist somit sehr hoch. Wie andere Studien zeigen, ist eine solche Korrelation nicht ungewöhnlich. In der PISA-Studie korrelieren die mathematischen Inhaltsbereiche Arithmetik und Algebra auf latenter Ebene ebenfalls mit .91 (PISA-Konsortium Deutschland & Prenzel, 2005). Schneider und Stern (2010) berichten in ihrer Studie Korrelationen von .93 und .97 zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen.

Die dritte Forschungsfrage kann an dieser Stelle nicht beantwortet werden, da kein Schüler zwei Lösungen zu einer der zwei Aufgaben erstellen konnte. Eine Analyse der Schülerlösungen deutet darauf hin, dass auch wenn einzelne Schüler zwei Lösungsverfahren bei verschiedenen Aufgaben beherrschen, sie nicht in der Lage sind, beide Verfahren innerhalb einer Aufgabe anzuwenden. Eine mögliche Ursache für dieses Ergebnis könnten Gewöhnungseffekte sein. Lernende sind es nicht gewöhnt, mehrere Lösungswege im Unterricht zu besprechen bzw. selbst zu erstellen (Baumert & Lehmann, 1997). Ein weiterer Grund könnte sein, dass der Impuls „Finde zwei verschiedene Lösungswege“ innerhalb der Aufgabenstellung missverstanden wurde.

Literaturverzeichnis

Baumert, J., & Lehmann, R. (1997). TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

Blöte-Aanhane, A.W. & Burg, E., van der & Klein, A.S. (2001) Student's Flexibility in Solving Two-Digit Addition and Subtraction Problems: Instructing Effects. Journal of Educational Psychology, 93, S. 627-638.

Fennema, E. H., & Romberg, T. A. (Eds.) (1999). Classrooms that promote mathematical understanding. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Große, C. S. (2005). Lernen mit multiplen Lösungswegen. Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie. Münster: Waxmann.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (S. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Eds.), Bildungsstandards Mathematik: konkret Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen (S. 162–177). Berlin: Cornelsen Scriptor.

PISA-Konsortium Deutschland, & Prenzel, M. (2005). PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland. Was wissen und können Jugendliche? Münster: Waxmann.

Rittle-Johnson, B.; Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In: C. Donlan (Hg.): The development of mathematical skills. Hove: Psychology Press (Studies in developmental psychology), S. 75–110.

Rittle-Johnson, B.; Siegler, R. S.; Alibali, M.W.(2001). Developing conceptual understanding and Developing Conceptual Understanding Developing conceptual understanding and an procedural skill in mathematics: An iterative process. In: *Journal of Educational Psychology* (93(2)), S. 346–362.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?: An experimental study on learning to solve equations. Journal of Educational Psychology, 99(3), S. 561–574.

Rost, J. (2004). Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion. Bern: Huber.

Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. Developmental Psychology, (46(1)), S. 178–192.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2012a). Effects of treating multiple solutions on students' self-regulation, self-efficacy and value. Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, S. 59-66). Taipei, Taiwan: PME.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2012b). Multiple Lösungen beim Modellieren: Wirkungen auf Leistungen, kognitive Aktivierung, Kontrollstrategien, Selbstregulation, Interesse und Selbstwirksamkeit. In M. Kleine & M. Ludwig (Eds.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2011.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013). Uncertanty orientation, preferences for solving tasks with multiple solutions and modelling. Paper presented at the CERME 8, Antalya, Turkey.

Wittmann, E. C. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht - vom Kind und vom Fach aus. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Eds.), Mit Kindern rechnen (S. 10–41). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.

Stefanie KUHLEMANN, Oldenburg

Wie gehen Lehramtsstudierende mit Schülerdokumenten um?

Das Diagnostizieren und Fördern wird in den Standards der Lehrerbildung als eigene Kompetenz aufgegriffen (KMK 2004) und nach Weinert (2000) als eine von vier Basiskompetenzen für erfolgreichen Unterricht herausgestellt. „Den Kern mathematikdidaktischer Kompetenz bildet die Fähigkeit, sich mit den mathematischen Eigenproduktionen von Kindern auseinanderzusetzen.“ (Wollring 1999, S. 272) Das Unterrichten von Mathematik schließt unter anderem das Interpretieren von Schüleräußerungen und -lösungen ein (Hill et al. 2005) und wird als ein wichtiger Schritt beim Diagnostizieren betrachtet. In diesem Beitrag geht es um die Rekonstruktion von möglichen Gedankengängen in Schülerdokumenten durch Lehramtsstudierende. Ein Schwerpunkt der Untersuchung liegt darin, wie Lehramtsstudierende, die sich am Ende ihres Studiums befinden, in der Analyse eines Schülerdokuments vorgehen und worauf sie dabei eingehen. Diesbezüglich lautet die Forschungsfrage folgendermaßen: Welche heuristischen Strategien wenden Lehramtsstudierende beim Analysieren von schriftlichen Schülerdokumenten an? Es werden erste Ergebnisse heuristischer Strategien der Lehramtsstudierenden präsentiert, mit deren Hilfe sie Gedankengänge in einem Schülerdokument rekonstruiert haben.

Relevanz der Analyse von Schülerdokumenten

Lehrkräfte stehen vor der Herausforderung Schülerleistungen zu verstehen und unter anderem Schülerkompetenzen, mögliche Verständnisschwierigkeiten und (Fehl-) Vorstellungen zu mathematischen Inhalten korrekt einzuschätzen. Darauf aufbauend sollen pädagogische und didaktische Entscheidungen getroffen (Hußmann et al. 2007) und die Lernenden gezielt individuell gefördert werden. Es ist eine herausfordernde Aufgabe für Lehrkräfte zu entdecken, woran einzelne Lernende scheitern, welches mögliche Ursachen ihrer Probleme sind und worauf sie in schriftlichen oder mündlichen Schüleräußerungen achten oder wie sie damit umgehen sollen (Crespo 2000). Den mathematischen Äußerungen der Lernenden liegen Denkprozesse zugrunde (Hasemann 1986), welche es zu rekonstruieren gilt. Um das Verhalten der Lernenden zu verstehen, bedarf es der Interpretation und Erklärung der mathematischen Äußerungen von Lernenden (ebd.). Das Anknüpfen an das Denken der Lernenden erfordert ein Hineinversetzen in individuelle Denkprozesse, um die Vorgehensweisen und das Denken der Lernenden zu verstehen. In der prozessorientierten Diagnostik wird ein besonderes Augenmerk auf die Strategie gelegt, mit welcher eine

Aufgabe bearbeitet wurde; somit geht es um die Diagnose von Lösungsprozessen (Wartha et al. 2008).

Für Lehrende ist es nicht immer einfach sich in individuelle Denkprozesse hineinzuversetzen, vor allem, wenn sich die Ideen der Lernenden von der Standardmathematik unterscheiden (Ball 1993) und es sich um ungewöhnliche/originelle oder falsche Lösungsansätze handelt, die dem Lehrenden unbekannt sind. Es können originelle Lösungsansätze vorliegen, wenn es sich beispielsweise um Lösungsideen handelt, die nicht als Standardlösung gelten oder ungewöhnliche Lösungsansätze, beispielsweise aufgrund von Fehlvorstellungen. Gerade dann sind die Denkprozesse nicht immer direkt ersichtlich oder leicht verständlich. Dort entsteht der Bedarf an heuristischen Strategien, um mögliche Gedankengänge von Lernenden zu rekonstruieren. Dies ist eine Voraussetzung dafür, als Lehrperson überhaupt angemessen auf eine Schülerbearbeitung eingehen zu können und Lernende gemäß ihrer individuellen Vorstellungen zu fördern und fordern. Aufgrund der sich hieraus ergebenden Relevanz der Analyse von Schülerdokumenten ist es für zukünftige Lehrkräfte bedeutend diese Fähigkeit zu erwerben.

Design der Studie und Stichprobe

Im Rahmen einer qualitativ empirischen Untersuchung wurden leitfadengestützte Einzelinterviews mit 19 Mathematikstudierenden des gymnasialen Lehramts, welche sich am Ende ihrer universitären Ausbildung befinden, durchgeführt und videographiert. Die Studierenden sollten ohne eine zeitliche Beschränkung insgesamt drei mathematische Problemlöseaufgaben schriftlich bearbeiten und direkt an die jeweilige Lösung anschließend ein Schülerdokument zu derselben Aufgabe analysieren. Sie wurden in dem Interview aufgefordert mögliche Gedankengänge zu rekonstruieren, die der Aufgabenbearbeitung zugrunde liegen könnten und individuelle Rückmeldungen bzw. Hilfestellungen zu geben. Die mathematischen Aufgaben bieten mehrere Lösungsmöglichkeiten und sind zu unterschiedlichen mathematischen Schulinhalten gestellt. Die Schülerdokumente unterscheiden sich in ihren Lösungsideen, beispielsweise handelt es sich um graphische und algebraische Lösungsideen, sodass die Lehramtsstudierenden vermutlich verschiedene Strategien aktivieren müssen, um die Schülerdokumente zu analysieren.

In diesem Beitrag werden die Strategien erläutert, mit denen sich die Lehramtsstudierenden den Gedankengang in einem bestimmten Schülerdokument erarbeitet haben. Nahezu alle Studierende haben die mathematische Aufgabe vorweg in eigener Bearbeitung richtig lösen können. Das entsprechende Schülerdokument ist eine längere und auf den ersten Blick komplizierte Schülerbearbeitung. Dieses reale Schülerdokument wurde für die Analyse ausgewählt, da die Gedankengänge des Schülers nicht direkt ersichtlich sind und das Schülerdokument Fehlvorstellungen oder sprachliche Missverständnisse beinhaltet. Zusätzlich verfolgt der Schüler in seiner schriftlichen Aufgabenbearbeitung eine bestimmte Vorgehensweise, nämlich das schrittweise Übersetzen des Aufgabentextes in mathematische Ausdrücke. Das Schülerdokument ist sehr reichhaltig und bietet viele unterschiedliche Perspektiven (Rüede & Weber 2012), welche eingenommen werden können.

Im Folgenden wird ein Blick auf die heuristischen Strategien geworfen, mit denen die Lehramtsstudierenden mögliche Gedankengänge rekonstruiert haben, die diesem Schülerdokument zugrunde liegen könnten.

Heuristische Strategien von Lehramtsstudierenden

Erste Ergebnisse der Untersuchung weisen darauf hin, dass die Lehramtsstudierenden verschiedene heuristische Strategien angewendet haben, mit denen sie mögliche Gedankengänge in dem Schülerdokument rekonstruiert haben. In der Auswertung der Daten wurden die Analysen der Lehramtsstudierenden Zeile für Zeile durchgegangen und für jeden einzelnen Studierenden Strategien herausgestellt. Anschließend wurden die Strategien aller Studierenden verglichen, zusammengefasst und in Kategorien eingeteilt. Die Kategorien wurden somit induktiv aus dem Datenmaterial gewonnen. Die Lehramtsstudierenden zeigen in ihrer Analyse des Schülerdokuments folgende heuristische Strategien:

- Setzen eines inhaltlichen Rahmens
- Strukturieren des Schülerdokuments
- Rekonstruieren des Schülervorgehens
- Einordnen von Fehlern
- Beziehen auf eigene Lösung
- Verbessern von Detail(s) des Schülerdokuments
- Angeben mehrerer Deutungen für Detail(s)
- Übergehen nicht nachvollziehbarer Details
- Wahrnehmen von metakognitiven Prozessen

Mit der weiteren Auswertung der aufgenommenen Daten werden diese Strategien weiter ausdifferenziert, sodass sich genaue Beschreibungen der einzelnen Kategorien ergeben.

Ausblick

In dem vorliegenden Ausschnitt einer Studie wurden heuristische Strategien herausgestellt, mit denen Lehramtsstudierende mögliche Gedankengänge in einem Schülerdokument rekonstruiert haben. Im Vergleich mit den heuristischen Strategien, die die Studierenden in der Analyse eines anderen Schülerdokuments angewendet haben, zeigte sich, dass einige Strategien aufgabenübergreifend angewendet wurden.

Es steht noch die Auswertung der Analysen der Lehramtsstudierenden zu einem weiteren Schülerdokument aus. Daran anschließend werden die Strategien aller drei Analysen betrachtet, um herauszustellen, welche Strategien aufgabenspezifisch bzw. aufgabenübergreifend sind. Die Strategien einzelner Studierender sollen zu allen Schülerdokumenten in den Blick genommen und mögliche Muster bzw. Typen für Strategiekombinationen herausgestellt werden.

Literatur

Ball, D. L. (1993): With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. In: The Elementary School Journal, 93, 371-397.

Crespo, S. (2000): Seeing More Than Right and Wrong Answers: Prospective Teachers' Interpretations of Students' Mathematical Work. In: Journal of Mathematics Teacher Education, 3, 155-181.

Hasemann, K. (1986): Mathematische Lernprozesse. Analysen mit kognitionstheoretischen Modellen. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005): Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. In: American Educational Research Journal 42(2), 371-406.

Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007): Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. In: Praxis der Mathematik, 49(15), 1-8.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2004): Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. Beschluss der KMK vom 16.12.2004. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_ beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung.pdf [letzter Zugriff: 19.03.2013].

Rüede, C. & Weber, C. (2012): Schülerprotokolle aus unterschiedlichen Perspektiven lesen – eine explorative Studie. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 33(1), 1-28.

Wartha, S., Rottmann, T. & Schipper, W. (2008): Wenn üben einfach nicht hilft. Prozessorientierte Diagnostik verschleppter Probleme aus der Grundschule. In: Mathematik lehren, 150, 20-25.

Weinert, F. E. (2000): Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche an das Lernen in der Schule. In: Pädagogische Nachrichten Rheinland-Pfalz, 2, 1-16.

Wollring, B. (1999): Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In Selter, C. & Walther, G.: Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann. Stuttgart: Ernst Klett.

Sebastian KUNTZE, Anika DREHER, Ludwigsburg

Vielfältige Repräsentationen als Leitmotiv im Mathematikunterricht? Sichtweisen von Mathematiklehrkräften zum Stellenwert einer übergreifenden Idee[1]

Überzeugungen von Mathematiklehrkräften dürften eine Filterfunktion für die Weiterentwicklung ihres professionellen Wissens haben (z.B. Törner, 2002). Aus diesem Grunde sind Sichtweisen zur Bedeutung des Nutzens vielfältiger Repräsentationen im Mathematikunterricht von großem Interesse, denn es ist nicht nur zu erwarten, dass solche Sichtweisen den Unterricht mit beeinflussen, sondern auch, dass die Nutzung von Gelegenheiten professionellen Lernens durch solche Sichtweisen moduliert wird. Sichtweisen zum Nutzen vielfältiger Repräsentationen betreffen eine übergreifende Idee, die für Mathematik und mathematischen Wissensaufbau gleichermaßen von Bedeutung ist (Kuntze et al., 2011): Da mathematische Objekte nur durch ihre Repräsentationen greifbar werden (z. B. Duval, 2006, Gagatsis & Shiakalli, 2004) sind das Arbeiten mit und das Wechseln zwischen Repräsentationen nicht nur Strategien des Erkenntnisgewinns in der Mathematik, sondern sie haben auch im fachdidaktischen Sinne eine große Bedeutung (vgl. Kuntze, 2012; Kuntze et al., 2011; Kuntze & Dreher, 2011): der Blick auf das Nutzen vielfältiger Repräsentationen hält nämlich eine Fülle von Reflexionsanlässen über mathematische Inhalte und über das Gestalten von Lernanlässen bereit (vgl. z.B. Murphy & Kuntze, 2012).

Damit Lehrkräfte den Kompetenzaufbau ihrer Schülerinnen und Schüler durch das Gestalten kognitiv aktivierender Lernumgebungen optimal fördern können, ist spezifisches professionelles Wissen zum Nutzen vielfältiger Darstellungen erforderlich (vgl. Ball, 1993; Kunter et al., 2011) – Sichtweisen zur Bedeutung des Nutzens vielfältiger Darstellungen beeinflussen dessen Entwicklung. Solche Sichtweisen können einerseits unabhängig von Inhaltsbereichen sein, da das Nutzen von Darstellungen ja allgemein für die Mathematik und den Mathematikunterricht bedeutsam ist. Andererseits hängt das Nutzen von Darstellungen stark von konkreten Inhalten ab. Die Wahrnehmung der Bedeutung des Nutzens vielfältiger Dar-

[1] Die hier vorgestellten Ergebnisse stammen aus den Projekten La viDa–M („Lernen anregen durch vielfältige Darstellungen im Mathematikunterricht“, das durch Forschungsmittel des Senats der PH Ludwigsburg gefördert wird sowie ABCmaths („Awareness of Big Ideas in Mathematics Classrooms“, das mit Unterstützung der Europäischen Kommission (503215-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP) finanziert wurde. Diese Veröffentlichung gibt lediglich die Sichtweisen der Autoren wieder, die Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.

stellungen könnte aus diesem Grunde nach Inhalten und/oder Unterrichtssituationen verschieden ausgeprägt sein. Bei den im Folgenden vorgestellten Studien wurde daher versucht, auch inhalts- und unterrichtssituationsspezifische Erhebungsformate einzusetzen. Im Vordergrund standen dabei die folgenden Forschungsfragen: *Über welche* Sichtweisen *zur Bedeutung des Nutzens vielfältiger Darstellungen für den Mathematikunterricht verfügen angehende und praktizierende Mathematiklehrkräfte? Gibt es Unterschiede zwischen inhalts- und situationsspezifisch erhobenen Sichtweisen?*

Untersuchungsdesign und Stichprobe

Die Auswertung bezieht sich einerseits auf N_1=76 Lehramtsstudierende aus der Stichprobe einer Untersuchung von Kuntze und Kollegen (2011), zum anderen auf N_2=17 praktizierende Lehrkräfte der Sekundarstufe. Die Lehramtsstudierenden wurden im Rahmen einer größeren Paper-and-Pencil-Befragung gebeten, die Bedeutung der in Abbildung 1 angegebenen übergreifenden Ideen auf einer Skala von 0 bis 5 einzustufen; dabei bedeutete 5 eine „hohe Bedeutung“, 0 eine „geringe Bedeutung“. Die Sichtweisen in der Gruppe der praktizierenden Lehrkräfte wurden zu Beginn einer Fortbildung anhand einer Klebepunkteabfrage erhoben, wobei die gleiche Skala zugrunde gelegt wurde. Die Befragung der Lehrkräfte war jedoch inhalts- und situationsspezifisch angelegt: in einem ersten Schritt sollte zunächst die Bedeutung übergreifender Ideen für das Thema „Ausmultiplizieren von Klammern“ eingeschätzt werden. Danach wurde den Lehrkräften eine videografierte Unterrichtssituation gezeigt, in der das Wechseln zwischen Darstellungen eine zentrale Rolle spielte. Unmittelbar danach sollten die Lehrkräfte die Bedeutung der verschiedenen übergreifenden Ideen für die gezeigte Unterrichtssituation einstufen.

Ausgewählte Ergebnisse

Abbildung 1 zeigt die Mittelwerte und deren Standardfehler für die Sichtweisen der Lehramtsstudierenden zur Bedeutung des Nutzens vielfältiger Darstellungen im Vergleich zu verschiedenen anderen übergreifenden Ideen. Für das Nutzen vielfältiger Darstellungen wurde mit drei weiteren Ideen die größte Bedeutung wahrgenommen. Signifikant geringer ausgeprägt war die wahrgenommene Bedeutung der Ideen „mit Unendlichkeit umgehen“, „Modellieren“ und „mit Unsicherheit/Variabilität umgehen“.

In Abbildung 2 sind die Ergebnisse der Klebepunkteabfragen der inhaltsbereichsbezogenen und der unterrichtssituationsbezogenen Befragung zusammengestellt. Während das Nutzen vielfältiger Darstellungen bezogen auf den Inhaltsbereich „Ausmultiplizieren von Klammern“ im Mittel als eher bedeutsam gesehen wurde, wurde für die Unterrichtssituation mit Bezug zu diesem Thema eine geringere Bedeutung wahrgenommen.

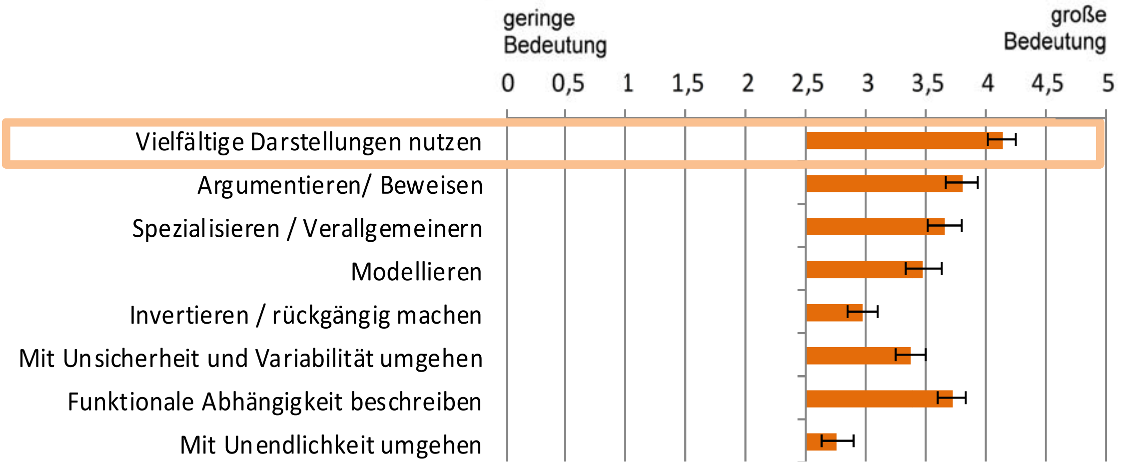


Abbildung 1: Von Lehramtsstudierenden wahrgenommene Bedeutung ausgewählter übergreifender Ideen für den Mathematikunterricht (Kuntze, 2013)

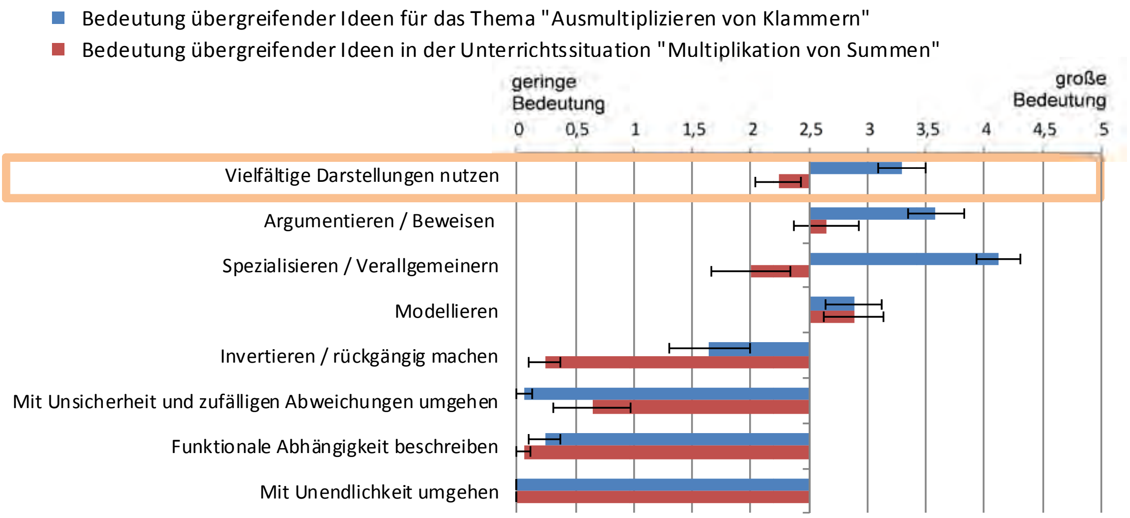


Abbildung 2: Wahrgenommene Bedeutung des Nutzens vielfältiger Darstellungen und weiterer übergreifender Ideen für den Themenbereich „Ausmultiplizieren von Klammern“ sowie für eine Unterrichtssituation mit Bezug zu diesem Thema

Diskussion

Die Ergebnisse ergänzen den Befund in Kuntze (2013b) insofern, als dort zwar Anzeichen für eine positive Sichtweise der inhaltsunspezifischen Bedeutung des Nutzens vielfältiger Darstellungen vorhanden waren, die Bedeutung für viele konkrete Inhaltsbereiche und Inhalte jedoch in weit geringerem Maße gesehen wurde. Auch die Einschätzungen der praktizierenden Lehrkräfte zeigen, dass die Bedeutung des Nutzens von Darstellungen für die videografierte Unterrichtssituation als vergleichsweise geringer gesehen wurde, und dies, obwohl der Wechsel zwischen Darstellungen eine zentrale und auch im Unterrichtsgespräch deutlich sichtbare Rolle spielte. Auf den ersten Blick mag es scheinen, dass mit zunehmendem Grad an Situiertheit bei der Erhebung professionellen Wissens die wahrgenommene Bedeutung übergreifender Ideen abnimmt, was damit erklärt werden könnte, dass Lehrkräften die Verknüpfung situierten Wissens mit übergreifenden Konzepten nicht immer gelingt. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass komplexere Zusammenhänge eine Rolle spielen. So dürften Lehrkräfte bei der Analyse von Lerninhalten und Unterrichtssituationen aufgrund der Vielfalt an Aspekten und Analysekriterien bewusste oder unbewusste individuelle Gewichtungen vornehmen, die Verknüpfungen mit übergreifenden Ideen – wie etwa mit der Idee des Nutzens vielfältiger Darstellungen – behindern oder fördern können. Dies sollte auch in Folgeuntersuchungen zu unterrichtsbezogener Analysekompetenz berücksichtigt werden.

Literatur

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, (Hrsg.), *Rational numbers: An integration of research* (S. 157-196). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, An Int. Journal of Experimental Educational Psychology*, 24(5), 645-657.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Kuntze, S. (2012). Vernetzen als Idee – Vernetzen durch Ideen. *mathematik lehren*, 173, 2-8.

Kuntze, S. (2013). Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In J. Sprenger, A. Wagner, M. Zimmermann (Hrsg.). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen (S. 17-34). Wiesbaden: Springer.

Kuntze, S. & Dreher, A. (Hrsg.). (2011). Big Ideas im Zentrum des Mathematikunterrichts – Fachdidaktischer Hintergrund, Anregungen für die Unterrichtspraxis und Materialien für schüler(innen)zentrierte Lernumgebungen. Ludwigsburg: PH.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H.-S. Winbourne, P. (2011). Development of pre-service teachers' knowledge related to big ideas in mathematics. In B. Ubuz (Hrsg.), *Proceedings of the 35th Conf. of the Int. Group for the Psych. of Math. Educ.*, Vol. 3 (S. 105-112). Ankara, Turkey: PME.

Murphy, B. & Kuntze, S. (2012). Vernetztes Wissen aufbauen. *mathematik lehren*, 173, 41-45.

Törner, G. (2002). Mathematical Beliefs – A Search for a Common Ground. In G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 73–94). Dordrecht: Kluwer.