Beiträge zum Mathematikunterricht 2012

VORTRÄGE AUF DER 46. TAGUNG FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
VOM 05.03.2012 BIS 09.03.2012
IN WEINGARTEN

FÜR DIE GDM HERAUSGEGEBEN VON
MATTHIAS LUDWIG UND MICHAEL KLEINE

BAND 1

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

ISBN 978-3-942197-18-2 (Band 1 von 2)

Inhaltsverzeichnis – Band 1: S. 1 - 512

Teil 1: Einführungen und Hauptvorträge

Teil 2: Förderpreis-Vortrag

Teil 3: Einzelbeiträge

Inhaltsverzeichnis – Band 2: S. 513 - 1026

Teil 4: Poster

Teil 5: Arbeitskreise der GDM

Teil 6: Sektionsbeschreibungen

Teil 1: Einführungen und Hauptvorträge

Matthias LUDWIG, Frankfurt, Michael KLEINE, Bielefeld

Die Jahrestagung 2012 in historischen Gemäuern

Die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik wurde zum zweiten Mal nach 1992 an der Pädagogischen Hochschule in Weingarten durchgeführt. In besonderer Weise trug die Kompaktheit des kleinen barocken Schlosscampus, mit verschiedenen zentralen Treffpunkten im Schlossbau dazu bei, den wissenschaftlichen Austausch, aber auch das persönliche Gespräch zwischen Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Tagung zu fördern. Die Tagung selbst ging nach ein paar Tagen zu Ende. Was bleiben wird, sind wissenschaftliche Erkenntnisse die präsentiert wurden und in diesem Tagungsband publiziert werden.

Der Tagungsband

Vor Ihnen liegt auf mehr als 1000 Seiten der wissenschaftliche Ertrag der 46. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Es ist der umfangreichste Tagungsband, den es bisher nach einer Jahrestagung gegeben hat. Ein deutliches Zeichen für die weiterhin andauernde Beliebtheit der Jahrestagung, aber auch eben gerade für dieses Publikationsorgan. Die Beiträge zum Mathematikunterricht bieten die einzigartige Möglichkeit, erste eigenständige Schritte im Publizieren von wissenschaftlichen Ergebnissen zu gehen. Gerade weil die Beiträge zum Mathematikunterricht kein „Peer-Review“- Tagungsband sind und somit kein offizieller Review-Prozess existiert, zeigt sich hier die ganze Bandbreite der fachdidaktischen Forschung am deutlichsten. Aber nicht nur das, die Autorin oder der Autor zeigt mit der Qualität seiner Arbeit auch, ob er seine Leserinnen und Leser, also seine Kolleginnen und Kollegen, ernst nimmt. Dies gilt für die Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchsforscher genauso wie für die etablierten Wissenschaftlerinnen und Forscher. Der „Review-Prozess“ muss also, je nachdem welchen Maßstab man an seine eigene wissenschaftliche Arbeit anlegt, in Eigenverantwortung organisiert und durchgeführt werden. Diese Eigenverantwortung wird, dies zeigt dieser vorliegende Tagungsband, von der Community in erfreulicher Weise wahrgenommen.

Reichhaltiges wissenschaftliches Programm

Die reichhaltigen Themen und Inhalte der Jahrestagung spiegeln sich natürlich im Tagungsband wider. Hier zeigt sich die wissenschaftliche Vielfalt unserer Community. Allein die Themen der Hauptvorträge reichen von der Forschung zur frühen mathematischen Bildung in Kindertagesstätten und Kindergärten (Andrea Peter-Koop, Bielefeld) über die „Lessonstudys“ in thailändischen Schulen (Maitree Inprasitha, Khon Kaen), vergleichende

Forschung in der Mathematiklehrerausbildung (Gabriele Kaiser, Hamburg) bis zur kritischen Selbstreflexion des Wissenschaftlerdaseins (Christian Spannagel, Heidelberg). Der Hauptvortrag der Nachbarwissenschaft sprach mit der Langeweile im Mathematikunterricht (Thomas Götz, Konstanz, Kreuzlingen) etwas an, gegen das wir als Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker implizit immer kämpfen.

227 Sektionsbeiträge spinnen das Netz der mathematikdidaktischen Community feiner und weiter. Beiträge aus Südafrika, Russland, Japan, Ungarn, Litauen, Kroatien, Polen und auch ein bisschen Australien, sowie die deutschsprachigen Länder und ihre Nachbarstaaten zeigen die geografische Reichweite dieser Konferenz, auf die die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik durchaus stolz sein darf. Die inhaltliche Vielfalt der Artikel ist so umfassend, dass sie hier gar nicht wieder gegeben werden kann. Sie reicht von der „Analyse von Beweisprozessen von Studienanfänger/innen bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Konvergenz von Folgen“ über „Ersten Einsichten in die Struktur interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung im familialen Kontext“ bis zu Gedanken über „Zeichen und Visualisierung“. All die Menschen hinter den Beiträgen scheuten nicht den Weg in die oberschwäbische Provinz nach Weingarten und machten so die Tagung für jeden zu einem besonderen Erlebnis.

Neue Technik

Dass dieser Tagungsband so schnell vorgelegt werden konnte, liegt zum einen an der Disziplin der Autorinnen und Autoren, aber vor allem an der neuen hervorragenden technischen Umsetzung der Plattform für den Upload der Beiträge durch Jan Schuster (Frankfurt) und seiner Entwicklung eines speziellen Redaktionstools für diesen Tagungsband. Für die intensive Mitarbeit und Unterstützung im Redaktionsbereich möchten wir hier an dieser Stelle Xenia-Rosemarie Reit (Frankfurt) und Jens Jesberg (Frankfurt) danken, ohne deren Hilfe dieser Band sicher nicht in der vorliegenden Form hätte umgesetzt werden können.

Die Herausgeber des Tagungsbandes wünschen allen Leserinnen und Lesern viel Freude beim Durchblättern und neue Erkenntnisse beim Lesen. Wir hoffen, dass wir uns zur nächsten Jahrestagung in Münster 2013 zu einem wissenschaftlichen Austausch wieder sehen.

Matthias Ludwig & Michael Kleine

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

Eröffnungsrede des 1. Vorsitzenden der GDM zur Jahrestagung in Weingarten am 05. März 2012

Sehr geehrter Herr Rektor,
sehr geehrte Frau Regierungsschuldirektorin,
liebe Kolleginnen und Kollegen von der PH Weingarten,
liebe Kolleginnen und Kollegen von fern und nah,
meine sehr geehrten Damen und Herren,

ich weiß es sehr zu schätzen, dass wir die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik nach 1992 zum zweiten Mal hier in Weingarten durchführen können. Nach Freiburg 2011 also wieder Baden-Württemberg im Jahr 2012. Das kann man als Anerkennung der besonderen Leistungen und Verdienste dieses Bundeslandes ansehen. Baden-Württemberg ist das einzige Bundesland, in dem es noch Pädagogische Hochschulen gibt, die sich in besonderer Weise vor allem – nicht nur – der Lehrerbildung widmen. Dass wir dieses Jahr die Jahrestagung hier in Weingarten durchführen ist aber vor allem der Spontanität und Entscheidungsfreudigkeit des hiesigen Teams der Mathematikdidaktik zu verdanken, genauer: Es ist das Team des Jahres 2009, Matthias Ludwig, Michael Kleine und Elli Rathgeb-Schnierer, das sich damals spontan bereit erklärt hat, die Jahrestagung durchzuführen, nachdem ein anderer Ausrichter die Tagung nicht durchführen konnte. Dafür gilt euch der Dank der gesamten GDM-Gemeinschaft. Wir wissen das zu schätzen.

Unser Dank gilt aber auch allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern und studentischen Hilfskräften hier in Weingarten für die Organisation dieser Tagung. Ganz besonders bedanke ich bei Carolin Hüttel und Dorothea Bussmann. Danke auch nochmals an Michael Kleine und Elli Rathgeb-Schnierer für die Organisation vor Ort, sowie an Matthias Ludwig, der sich an der hiesigen Organisation zentral und wesentlich beteiligt hat, obwohl er seit einem Jahr nicht mehr in Weingarten lehrt.

Die Eröffnung der Jahrestagung nutzte 1. Vorsitzende der GDM in den letzten Jahren stets auch dazu, einige allgemeine Gedanken zu verschiedenen Problemen zu äußern, zu Mathematikdidaktik, Mathematikunterricht sowie Bildung und Ausbildung. Nun ist Bildung in öffentlichen und politischen Reden ein Dauerthema. Wie ist es aber um die *Wirksamkeit* oder – um einen modernen Ausdruck mit hinreichender Unschärfe zu gebrauchen – Nachhaltigkeit derartiger öffentlicher Reden bestellt? Denn: Reden ohne Handeln ist leer, Handeln ohne Reden ist blind.

Ein Blick in die USA

Ich beginne mit einem Blick in die USA. Noch mag dieser Blick nach Westen ja wichtig sein, wer weiß, wie lange noch. Jeweils Ende Januar hält dort der amerikanische Präsident seine wohl wichtigste Rede des Jahres, die *State of the Union Address*. Vor dem amerikanischen Kongress zeigt der **P**räsident die Perspektiven und Ziele des Landes auf. Dieses Jahr war **Bildung** ein zentraler Punkt in der Rede von Barrack Obama. Dabei stellte er die wirtschaftliche Bedeutung von Bildung heraus: „*Education is an economic imperative*“, er gab eine Ehrenerklärung für die Bedeutsamkeit des Lehrerberufs ab: „*Teachers matter*“, und er forderte mehr Geld für eine Bildung für alle: „*Higher education can't be a luxury*“. Dem können wir sicherlich uneingeschränkt zustimmen.

Der Blick in andere Länder fordert immer – darin liegt ja gerade der Sinn – zum Nachdenken über die Situation im eigenen Land heraus. So erinnert uns dieser Blick z. B. wieder einmal daran, dass wir in Deutschland bei den Bildungsausgaben aller OECD-Länder abgeschlagen in der unteren Hälfte stehen.

Roman Herzogs „Ruck-Rede“

Nun haben wir in Deutschland gerade die Diskussionen um unsere Bundespräsidenten miterlebt und sind täglich auf die Bedeutung dieses Amtes, dessen Beschädigung oder Nicht-Beschädigung hingewiesen worden. Die Kraft dieses Amtes liegt ja vor allem – oder vielleicht nur – in der Rede, im gesprochenen Wort. Was blieb eigentlich von den Reden unserer bisherigen Bundespräsidenten in Erinnerung? Welche Wirkungen haben sie hervorgerufen? Woran erinnert man sich noch bei Horst Köhler oder Christian Wulff? *Eine* Rede blieb aber – bei mir, bei vielen – in guter Erinnerung. Das war die Rede von Roman Herzog, dem Nachfolger von Richard von Weizsäcker und dem Vorgänger von Johannes Rau, gehalten am 26. April 1997 im neu aufgebauten Hotel Adlon in Berlin. Es war die Rede „Aufbruch ins 21. Jahrhundert“, die sog. „Ruck-Rede“.

Roman Herzog kam damals gerade von einer Asienreise zurück und stand unter dem Eindruck der „*unglaublichen Dynamik*“ in diesen aufstrebenden Ländern. Bei uns stellte er dagegen eine „*erstarrte Gesellschaft*“ fest. (Zitat): „*Hier (in Deutschland) herrscht ganz überwiegend Mutlosigkeit, Krisenszenarien werden gepflegt. Ein Gefühl der Lähmung liegt über unserer Gesellschaft.*“ Und weiter: „*Durch Deutschland muß ein Ruck gehen. … Wir brauchen wieder eine Vision. ... Bildung muß das Megathema unserer*

Gesellschaft werden. Wir brauchen einen neuen Aufbruch in der Bildungspolitik, um in der kommenden Wissensgesellschaft bestehen zu können. Ich rufe auf zu mehr Selbstverantwortung.“ Auf einige diese Worte werden wir noch zurückkommen.

Über die Nachhaltigkeit einer Rede

Sind dieser Rede Taten gefolgt? War diese Rede nachhaltig? Worte können *nur dann* eine Wirkung haben, wenn sie eine Situation treffend beschreiben, wenn sie einen vorhandenen Leidensdruck verdeutlichen, oder zumindest die Sinne dafür schärfen. In die Zeit nach dieser Rede von 1997 fielen in Deutschland u. a. die Ergebnisse der TIMSS- und PISA-Studien, und 1999 wurde von Deutschland die Bologna-Erklärung unterzeichnet.

Wenn wir heute auf die Veränderung an den Schulen und die Reformen an den Universitäten in den letzten 10 Jahren zurückblicken, so denke ich wohl, dass ein Ruck durch die Bildungslandschaft in Deutschland gegangen ist. Ein Ruck kann allerdings die Lage eines Ausgangsobjekts in verschiedene Richtungen – insbesondere positiv und negativ – verändern. Ich denke, dass dies für die Mathematikdidaktik, den Mathematikunterricht und die Lehramtsausbildung auch zutraf und -trifft.

Visionen

Ein erstes Beispiel: „Wir brauchen Visionen“ hat Roman Herzog 1997 gefordert. „We need a vision“ forderte etwa auch Seymour Papert noch 2006 in gleicher Weise für die Mathematikdidaktik.[1] Visionen können oder sollten *Strategien des Handelns* implizieren. Das ist es, was sie von Illusionen und Utopien unterscheidet. Roman Herzog sagte „Visionen *sind* Strategien des Handelns“, was ich nicht so ganz glaube. Visionen und entsprechende Strategien entstehen im gesellschaftlichen, politischen oder wissenschaftlichen Diskurs, im Aufgreifen von Bestehendem und im Antizipieren des Möglichen. Die NCTM-Standards von 1989 und 2000 stellten und stellen eine Vision für den Mathematikunterricht dar. Die KMK-Standards von 2004 – wenn auch Regelstandards – stellen – für mich – ebenfalls eine *Vision* dar. Genau das erwarte und erhoffe ich mir auch von den gegenwärtig entwickelten Abiturstandards.

Visionen implizieren Strategien. Es ist die Aufgabe der Mathematikdidaktik mögliche Visionen sowie adäquate Strategien zu entwickeln und Grundlagen und Voraussetzungen für diese Strategien mit wissenschaftlichen

[1] 2006 in Hanoi bei der Eröffnungsrede der Study Conferene anlässlich der 17. ICMI Studie “Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain”

Methoden zu untersuchen. Hierzu gibt es Dissertationen, Habilitationen, Aufsätze in wissenschaftlichen Zeitschriften wie etwa dem Journal für Mathematikdidaktik. Diesbezüglich sehe ich in der Mathematikdidaktik der letzten Jahre einen *Ruck in die richtige, positive Richtung* (wohlwissend und sehr genau beobachtend, dass und wie das manche auch anders sehen).

Darüber hinaus bin ich aber auch davon überzeugt, dass wir in der Mathematikdidaktik Wirkung und Nachhaltigkeit nur dann erreichen werden, wenn Visionen und Strategien die Verbesserung des realen Unterrichts als Kern- und Zielbereich unserer Tätigkeiten stets mitbedenken, vielleicht sogar darauf ausgerichtet sind. Mathematikdidaktik benötigt eine globale Strategie von der Vision, über die Entwicklung und Evaluation von Strategien bis zur konkreten Umsetzung im Mathematikunterricht. Der Ruck in diese Richtung könnte sicherlich stärker sein.

Die BA-MA-Reform

Ein zweites Beispiel: Die Bologna- oder Bachelor-Master-Reform. Hat sie die Erwartungen erfüllt? Hat sie zu einer besseren Bildung oder Lehramtsausbildung geführt? Ich war durchaus einmal ein Befürworter der Reform, bin heute allerdings mehr als skeptisch, aber vielleicht ist es für eine Bilanz auch noch zu früh. Die Nachteile der Reform sind heute unübersehbar: Der nicht mehr zu verantwortende bürokratische Aufwand, die mangelnde Flexibilität selbst bei kleinen Änderungen von Studienordnungen, die für Studierende kaum mehr vorhandenen Möglichkeiten des Wechsels der Hochschule selbst innerhalb eines Bundeslandes. Das bürokratische Korsett und die täglichen Restriktionen verhindern selbst kleinste als sinnvoll erachtete inhaltliche Veränderungen, und sie ersticken Visionen.

Nun können wir – die Hochschullehrer – das natürlich kritisieren, aber wir alle haben bei der Umsetzung dieser Reform mitgemacht, obwohl viele von uns skeptisch waren und das Ganze – auch welchen Gründen auch immer – ablehnten. Vor zwei Wochen war ich bei einem Vortrag des ehemaligen bayerischen Wissenschaftsministers Thomas Goppel zum Thema „Bologna – Fluch oder Segen“. Er konstatierte süffisant: Ihr Hochschullehrer braucht euch nicht zu beschweren. *Ihr* habt euch zunächst *nicht* für Bologna interessiert, und später habt ihr dann alles *selbst* so umgesetzt, wie es heute ist. Ja, es stimmt, wir haben uns in der Anfangsphase zu wenig um Bologna gekümmert und sahen uns dann einer beschlossenen Situation alternativlos gegenüber. Kurzer Exkurs: In gleicher Weise haben wir – die etablierten Hochschullehrer – bei der Absenkung der Professorengehälter – Stichwort W2- und W3 – schlichtweg nur zugeschaut, vielleicht geredet, aber nicht gehandelt. Beide Beispiele – Bologna und die neue Besoldungen – sind im

Hinblick auf die von Roman Herzog geforderte Selbstverantwortung der Hochschullehrer ein Ruck in die negative Richtung.

Freiheit in Verantwortung

Aber, wir wollen natürlich mit einem positiven Ruck enden. Jetzt kommt der neue Bundespräsident Joachim Gauck. Es kommen neue Reden, die sicherlich sein Leitmotiv „*Freiheit in Verantwortung*“ zum zentralen Thema haben werden. Bei keiner sonstigen Berufsgruppe ist die behütete Freiheit so groß wie bei uns Hochschullehrern. „*Freiheit im Dienste der Verantwortung für andere*“, das ist es, was die Gesellschaft von uns erwartet und an der wir gemessen werden.

Damit komme ich zum Schluss. Ich wünsche Ihnen allen, dass Sie auf dieser Tagung interessante Vorträge hören, an belebenden Arbeitsgruppen teilnehmen, neue Anregungen bei vielen Gesprächen bekommen, und wir am Ende der Woche mit neuen Visionen für die Didaktik der Mathematik und den zukünftigen Mathematikunterricht nach Hause fahren.

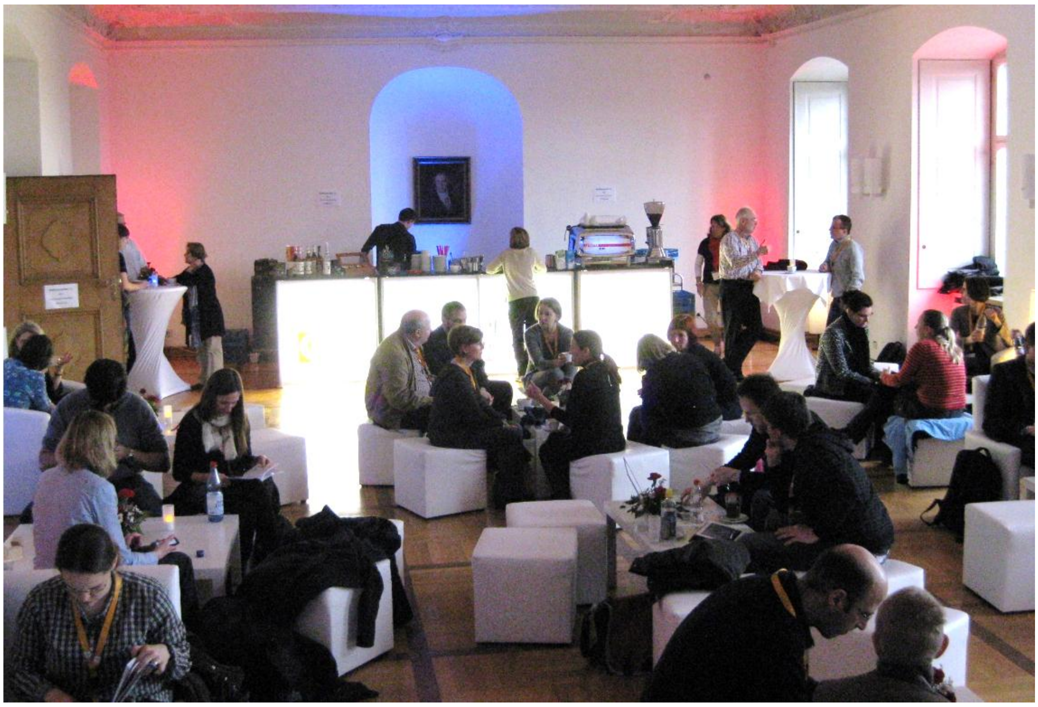
Die Tagung ist damit offiziell eröffnet.

Hans-Georg Weigand

(1. Vorsitzender der GDM)

Kurz vor der Eröffnung der Tagung in der Aula der PH Weingarten

Das Tagungslogo wird dem barocken Tagungsgebäude gerecht.



Die Mathelounge war ein beliebter Treffpunkt aller Tagungsteilnehmer.

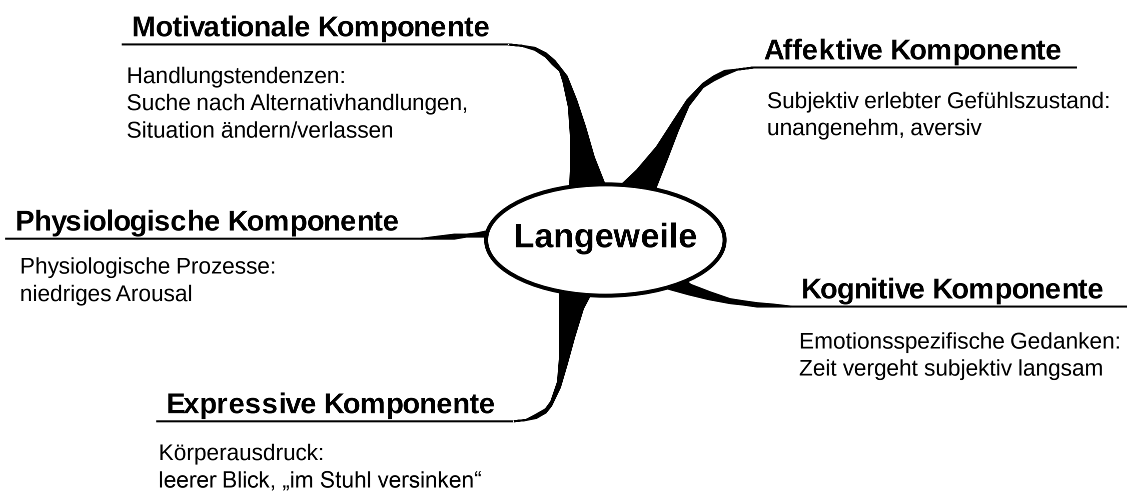
Thomas GÖTZ, Konstanz, Kreuzlingen

Langeweile im Fach Mathematik

Langeweile: kennen wir nicht alle die „Windstille der Seele“, wie Friedrich Nietzsche sie einst nannte? Und neben „langen Kindheit-Nachmittagen“ (R. M. Rilke) schien uns vielleicht auch manche Unterrichtsstunde „lange zu weilen“. Unabhängig von Kontext wird Langeweile häufig als „Plage der modernen Gesellschaften“ bezeichnet (Spacks, 1995). Aber was versteht man überhaupt unter dieser „Langeweile“? Findet man sie auch im Fach Mathematik? Tritt sie dort weniger stark auf als in anderen Fächern, wie z.B. in Deutsch, Englisch oder Geschichte? Wie entsteht sie? Ist sie in ihren Wirkungen vor allem negativ oder gibt es auch positive Facetten der Langeweile? Und was schließlich machen Schülerinnen und Schüler, wenn sie sich langweilen? Auf alle genannten Aspekte wird in diesem Beitrag eingegangen.

1. Definition von Langeweile

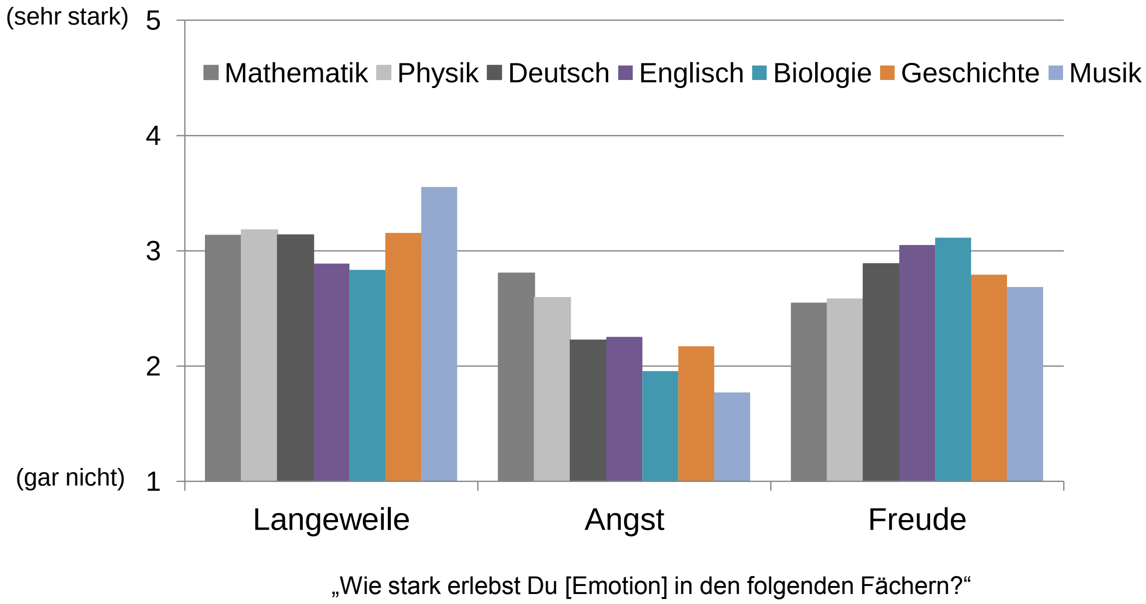
Es gibt einen anhaltenden Diskurs dazu, ob Langeweile als Emotion zu bezeichnen ist, oder eher als Affekt oder Stimmungsfacette. Bezieht man sich auf die sehr häufig herangezogenen Komponentendefinitionen von Emotionen (z.B. Scherer, 2000), so kann Langeweile durchaus als Emotion bezeichnet werden, da ihr Erleben sich in spezifischen Komponenten äußert, die in der folgenden Abbildung dargestellt sind (siehe Pekrun, Götz, Daniels, Stupnisky & Perry, 2010).



Wird Langeweile im Kontext von Lernen- und Leistung erlebt, so kann sie als eine Lern- und Leistungsemotion bezeichnet werden.

2. Auftreten von Langeweile im Mathematikunterricht

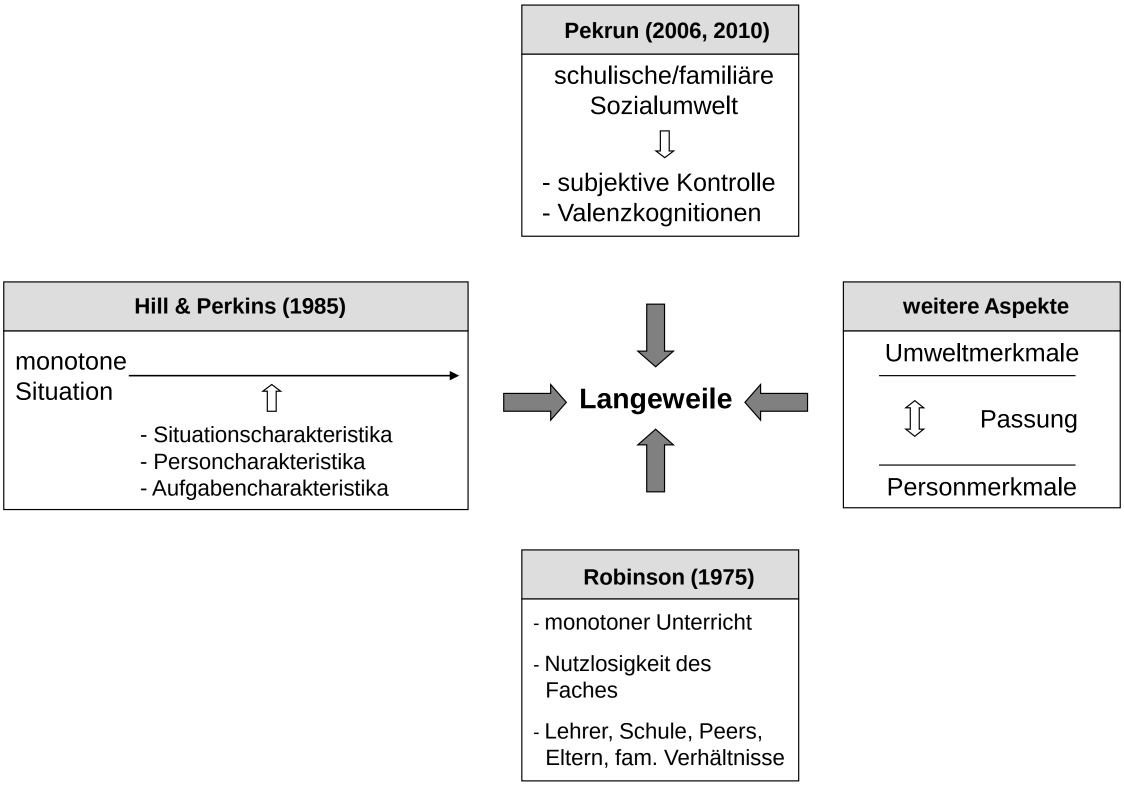
Langeweile ist eine im Mathematikunterricht häufig auftretende Emotion (Götz, 2004; Götz, Frenzel & Pekrun, 2007; Nett, Götz & Hall, 2011). Die folgende Abbildung zeigt Ergebnisse einer Studie von Haag und Götz (2012), in welcher 1683 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 8 und 11 an Gymnasien und Realschulen untersucht wurden (standardisierte Fragebögen).



Es zeigt sich, dass Langeweile in Mathematik ebenso stark ausgeprägt ist wie in den anderen Hauptfächern – im Nebenfach Musik ist die Langeweile am stärksten. Angst ist im Fach Mathematik im Vergleich zu den anderen Fächern stark ausgeprägt und Freude hingegen relativ gering. Insgesamt zeigt sich für Mathematik ein aus emotionaler Perspektive ungünstiges Muster. Die Abbildung zeigt in Einklang mit anderen bisherigen Studien, dass Langeweile im Vergleich zu anderen Emotionen intensiv in der Schule generell und auch im Fach Mathematik erlebt wird. Eine Experience-Sampling-Studie von Nett, Götz und Hall (2011), bei welcher 79 Schülerinnen und Schüler (Jahrgangsstufe 11, Gymnasium) anhand von PDAs randomisiert während des Mathematikunterrichts zur Intensität von Langeweile befragt wurden, zeigte, dass bei 58% der Erhebungen zumindest leichte Ausprägung von Langeweile berichtet wurden und bei 23% der Erhebungen starke bis sehr starke Langeweile. Was Langeweile bei Lehrkräften anbelangt, so gibt es derzeit sehr wenige empirische Befunde, die darauf hindeuten, dass diese durchaus auch Langeweile erleben, allerdings in einem sehr geringen Ausmaß. Mathematiklehrkräfte scheinen sich hierbei nicht von anderen Lehrkräften zu unterscheiden (Becker, 2011).

3. Ursachen von Langeweile

Es gibt unterschiedliche Theorien und Ansätze, welche die Entstehung von Langeweile zu erklären versuchen. Ausführlich sind diese bei Götz, Frenzel und Haag (2006) dargestellt. Die folgende Abbildung zeigt zusammenfassend die unterschiedlichen Herangehensweisen zu den Ursachen von Langeweile. Nach Hill und Perkins (1985) ist Monotonie die zentrale Ursache von Langeweile – allerdings führt Monotonie nur unter spezifischen Bedingungen zur Langeweile, z.B. wenn es keine Möglichkeiten gibt, an der aktuellen Situation etwas zu verändern. Monotonie spielt auch im Modell von Robinson (1975) eine zentrale Rolle. Pekrun (2006) geht davon aus, dass sowohl zu hohe als auch zu geringe Kontrolle (Unter- oder Überforderung) sowie eine geringe Valenz (d.h. Wichtigkeit der Situation und/oder der Ergebnisse) zu Langeweile führen. Zudem wird Langeweile häufig als „Passungsproblem" zwischen Erwartungen und Vorhandenem gesehen.



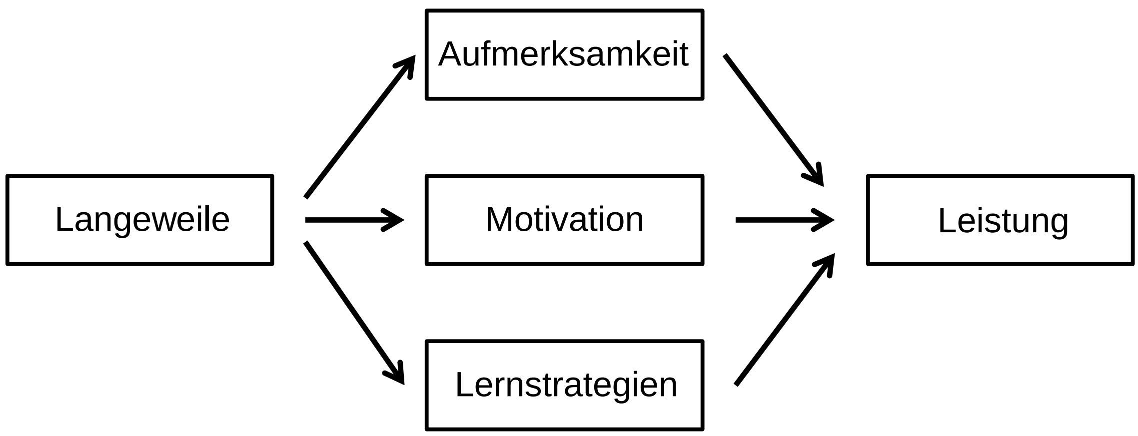
Empirisch zeigte sich, dass die Valenz in der Tat eine zentrale Rolle im Hinblick auf die Entstehung von Langeweile spielt. Langeweile ist die einzige Emotion, die schwächer wird, wenn die Wichtigkeit von Tätigkeiten und Situationen als gering eingeschätzt wird (Götz, Frenzel, & Haag, 2006; Pekrun et al., 2010) – alle anderen Emotionen (positive wie negative) sind bei hoher Valenz stärker ausgeprägt.

4. Wirkungen von Langeweile

Was die Wirkungen von Langeweile anbelangt, so gibt es bisher sehr wenige Studien, die auf Kausalität schließen lassen. Langeweile geht mit folgenden, durchaus als negativ zu bezeichnenden Erlebens- und Verhaltensweisen einher (Götz, Frenzel & Pekrun, 2007): Drop out, Missbrauch psychotroper Substanzen, Übergewicht, deviantes Verhalten, schwache Leistungen, geringes subjektives Wohlbefinden, Delinquenz, ineffektive Nutzung von „Humanressourcen“, Spielsucht und Absentismus. In der Literatur werden häufig auch potenziell positive Wirkungen von Langeweile thematisiert, zu denen es jedoch bisher kaum empirische Daten gibt:

- Sich in Langeweile-Phasen selbst erfahren
- Langeweile als wichtiges Signal für Veränderungsbedarf (vgl. evolutionäre Sicht von Langeweile)
- Initiierung kreativer Prozesse („Inkubationsphasen“)
- Langeweile-Phasen als Entspannung

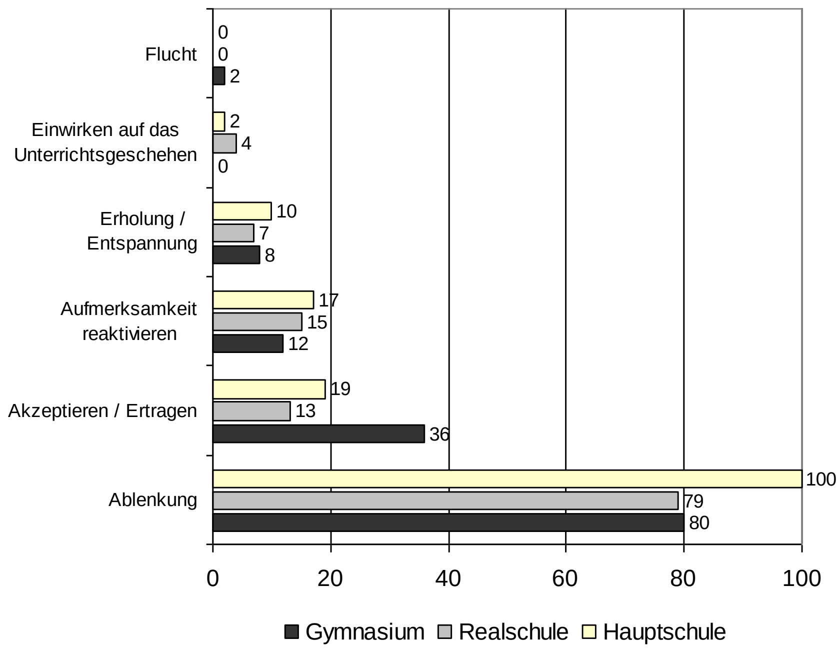
Was die Leistungswirkung von Langeweile anbelangt, so ist anzunehmen, dass Langeweile über eine Reduktion von Aufmerksamkeit und Motivation, sowie über den Einsatz ineffektiver Lernstrategien zu schlechter Leistung führt (s. Abbildung).



Bisherige (primär korrelative) Studien zeigen, dass Langeweile in der Tat mit schlechten Noten einhergeht. Für das Fach Mathematik zeigen sich Korrelationen einer Größenordnung von -.20 bis -.30 zwischen Langeweile und Leistung (invertierte Noten) in Mathematik (Götz, 2004; Götz et al., 2006; Götz et al., 2007; Götz et al, 2010; siehe auch Pekrun et al., 2010). Auch die in der Abbildung angenommenen Zusammenhänge zwischen Langeweile und den mediierenden Variablen (Aufmerksamkeit, Motivation, Lernstrategien) konnten empirisch gefunden werden (Götz, 2004).

5. Regulation von Langeweile

Es gibt bisher kaum Ansätze zur Kategorisierung von Regulationsverhalten bzw. des Einsatzes von Coping-Strategien im Falle des Erlebens von Langeweile (siehe Nett, Götz & Hall, 2011). In einer explorativen Interviewstudie von Götz, Frenzel & Pekrun (2007) an 161 Schülerinnen und Schüler der 9. Jahrgangsstufe (Haupt- und Realschulen, Gymnasien) fanden sich die in der folgenden Abbildung dargestellten Ergebnisse. Die Schülerinnen und Schüler wurden gebeten, sich an eine als langweilig erlebte Unterrichtsstunde zu erinnern (mentales recall) und es wurde ihnen dann die Frage gestellt, was sie beim Erleben von Langeweile gemacht haben. Die Ergebnisse wurden unter anderem getrennt für verschiedene Fächer analysiert – es zeigte sich kein Unterschied zwischen den Fächern, so dass die Ergebnisse auch für das Fach Mathematik gelten.



Was hast Du gemacht, als Du dich gelangweilt hast?

Ein wichtiger Befund war, dass Langeweile an Schulen häufig einfach akzeptiert und ertragen wird. Langeweile wird in der Regel als weniger negativ als z.B. Angst erlebt, so dass die Motivation, am Langeweile-Erleben etwas zu verändern, als relativ gering zu bezeichnen ist. Aus dieser Perspektive kann Langeweile als eine „tückische“ Emotion bezeichnet werden, da sie oft einfach ertragen wird. Zudem ist Langeweile für Lehrkräfte häufig schwer zu erkennen, da Schülerinnen und Schüler die Langeweile derart „ertragen“, dass sie für Lehrkräfte nicht ohne weiteres ersichtlich ist.

6. Vermeidung von Langeweile im Unterricht

Basierend auf dem bisher Dargestellten, gibt es folgende zentrale Möglichkeiten, Langeweile im Unterricht zu vermeiden bzw. zu reduzieren: (1) individualisiertes Unterrichten (vgl. Über- bzw. Unterforderungslangeweile); (2) intrinsische Valenz erhöhen (d.h. den Wert einer Handlung unabhängig von deren Ergebnissen erhöhen) – z.B. durch das häufige Herstellen von Bezügen zur Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler; (3) enthusiastisches Unterrichten; (4) Langeweile und Umgang mit Langeweile thematisieren; (5) Langeweile als Handlungsaufforderung sehen. Vielleicht gelingt es anhand des einen oder anderen Aspektes, der „Windstille der Seele" im Fach Mathematik entgegenzuwirken.

Literatur

Becker, E. S. (2011). Teacher's emotion in the classroom and how they relate to emotional exhaustion - an experience-sampling analysis. Masterarbeit im Fach Psychologie, Universität Konstanz.

Goetz, T., Cronjaeger, H., Frenzel, A. C., Lüdtke, O. & Hall, N. C. (2010). Academic self-concept and emotion relations: Domain specificity and age effects. Contemporary Educational Psychology, 35, 44-58.

Götz, T. (2004). Emotionales Erleben und selbstreguliertes Lernen bei Schülern im Fach Mathematik. München: Utz.

Götz, T., Frenzel, A. & Pekrun, R. (2007). Regulation von Langeweile im Unterricht Was Schülerinnen und Schüler bei der „Windstille der Seele" (nicht) tun. Unterrichtswissenschaft, 35(4), 312-333.

Götz, T., Frenzel, A. C. & Haag, L. (2006). Ursachen von Langeweile im Unterricht. Empirische Pädagogik, 20(2), 113-134.

Haag, L. & Goetz, T. (2012). Mathe ist schwierig und Deutsch aktuell. Vergleichende Studie zur Charakterisierung von Schulfächern aus Schülersicht. Psychologie in Erziehung und Unterricht, 59, 32-46.

Nett, U. E., Goetz, T. & Hall, N. C. (2011). Coping with boredom in school: An experience sampling perspective. Contemporary Educational Psychology, 36(1), 49-59.

Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. Educational Psychology Review, 18, 315-341.

Pekrun, R., Goetz, T., Daniels, L. M., Stupnisky, R. H., & Perry, R. P. (2010). Boredom in achievement settings: Exploring control-value antecedents and performance outcomes of a neglected emotion. Journal of Educational Psychology, 102(3), 531-549.

Scherer, K. R. (2000). Emotions as episodes of subsystems synchronization driven by nonlinear appraisal processes. In M. D. Lewis & I. Granic (Ed.), Emotion, development, and self-organization (pp. 70-99). Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Maitree INPRASITHA, Center for Research in Mathematics Education, Faculty of Education, Khon Kaen University, Thailand

Lesson Study as an Innovation for Teacher Professional Development: A Decade of Thailand Experience

Before entering the 21st century, most of affluent countries have been preparing new skills for their children while most of non-affluent countries do not recognize this shift. Report on TIMSS and PISA is a good evidence for the difference. However, during the last decade before entering the 21st century, all of the countries across the world have become recognized the necessity of 21st century skills and attempting to improve their school education to serve these skill demand for their citizen. If taking Thailand as a case, it has been undergoing an educational reform movement since 1999, after the first Educational Act was launched. A number of educational institutions have been attempting to respond to the national agenda, to reform learning process, and respond to the new demand of 2001 curriculum which emphasis on the integration of three major components of the curriculum: subject matters, skills and learning processes, and desirable characters. This paper describes a decade of Thailand experience attempting to implement Japanese Lesson Study as an adaptive innovation for teacher professional development through the project running by Center for Research in Mathematics Education (CRME), Khon Kaen University since 2002.

The long-term plan for implementing Lesson Study

There are many attempts in implementing new innovations in Thailand. But, most of the attempts often failed. One cause came from the lack of context preparation for using those innovations or approaches. Lesson Study as a Japanese teaching professional development has been developed and used in Japan for more than 130 years (Shimizu, 2006). Now, it is expanded throughout the world for improving teacher's profession. However, in order to implement in Thailand, the following context preparations have been implemented.

2002	Incubation of Ideas with 15 student teachers and the first two schools
2002-2005	Experimentation in a number of schools
2006-2008	Starting Whole School Approach in 4 schools in the Northeast of Thailand

Incubation of Ideas in two schools in 2002

Traditionally, most of mathematics classroom in Thailand depend heavily on following the national textbooks. Textbook style starts with introducing some definitions, principles, rules, or formula follow by some examples, and close with some assigned exercises. Unfortunately, most of exercises are kinds of closed problems, which have one and only one correct answer. This style of textbook has influenced the teacher's style of teaching, or even become teaching method for most of them. The script of teaching of mathematics teachers will look like this; starting with explaining new contents, some examples, and closing with giving the students some assigned exercises. This method of teaching has formed the classroom culture where the students cannot initiate their own learning. They become passive learners in this kind of mathematics classrooms.

In order to change this kind of mathematics classroom, the author challenges the idea of using open-ended problems in the classrooms of 15 student teachers in 2002 academic year (Inprasitha, 2011). In the summer of 2001 academic year during March and May, 15 student teachers had been coached by the author how to make lesson plan using open-ended problems as a focal mathematics activity. They were trained to organize teaching sequence in a new way, which starting with posing prepared open-ended problems to the students, allowing time for the students to think by themselves within their small-group working. While the students were doing their small-group working, the student teachers had to make some notes for collecting students' ideas emerged in the classroom and bringing for whole class discussion. On every Friday, all 15 student teachers came back to the university to discuss about the teaching problems with the author. In the first half of the semester, all of student teachers had pressure with many aspects. For examples, the classroom teachers reminded them that they should go directly to teach to cover the contents, otherwise their students would run into trouble when having mid-term test. Even the students in the classroom also complained that the student teacher did not teaching anything according to the textbook. They were afraid that they did not learn what other students in other classes learned. The student teachers presented these problems in Friday discussion. They all faced the same problem in every class and in every school.

However, after the first half of the semester has passed, the situation changed. The students in every class showed a good sign of responses to the class. They like to present their ideas in the whole discussion session. One typical example in every school is most of incapable students in traditional classroom play an important role in group-working activities. Hands-on activities provided them a chance to use their ability. At the end of semester, there had great changes in the classroom of all student teachers and the student teachers also changed their worldview about teaching and learning mathematics. They perceived that learning mathematics is more than just coverage of contents. This change influences their career path after they graduated. For the author, this one semester gave an idea on how to integrate Open Approach which emphasis on using open-ended problems in the traditional mathematics classroom to challenge mathematics teachers to change the way they teach mathematics. He provided much training for teachers during 2002 -2005.

Experimentation in Some Schools during 2002-2005

Since the second half of 2002, the author introduced how to use some 5-6 open-ended problems in the classroom through short training program in many schools. During 2002-2005, more than 800 teachers had been trained to use open-ended problems in their lesson plan while emphasis on changing their role of teaching in the classes by posing the open-ended problems and allowed time for students to think by their own in group-working activities, following by whole class discussion. There has a great change in those teachers as in the following survey (Inprasitha, Loipha, and Silanoi, 2006). The great impact of changing classroom after using open-ended problems was apparent to teachers. However, most of the teachers were still being worried about how to cover the contents because they used only some 5-6 open-ended problems in their classroom. Almost of teachers who had been trained to use open-ended problem called for open-ended problems which covering all of the contents in every grade.

The Center for Research in Mathematics Education does not respond to this demand. The author then decided to recommend teachers to create open-ended problems by themselves. This made them to be perceived that it was very difficult for them to do that. Then, it is timely to prepare to introduce a tool for creating “open-ended problems” by school teachers, rather asking the Center to provide for them. The tool for creating “open-ended problems” is that they have to collaboratively working together according to the three basic steps of lesson study; collaboratively plan, do, and see for making lesson plan which emphasis on using “open-ended problems” in the mathematical activities in the lesson plan. This idea had been implemented in the first two lab schools in 2006.

Lesson Study with Whole School Approach

As mentioned in the earlier session, the idea of integrating Open Approach into the three steps of lesson study; collaboratively plan the lesson together for creating lesson plans emphasis on how to creating “open-ended problems” in terms of 3-4 short instructions, teachers have to anticipate the students’ responses to their instructions, and coming to discussion in the end of the week. In the first stage of implementing lesson study, the author did not focus in the detailed research lesson like those of Japanese teachers but still emphasis on how to help the teachers to reconceptualize “what does it mean ‘mathematics classroom’ for them?” In terms of research, they were trained to use classroom as a unit of analysis for improving their daily practices. The author proposed a new approach for teaching which integrating both the idea of teaching and research for the tool of the teachers.

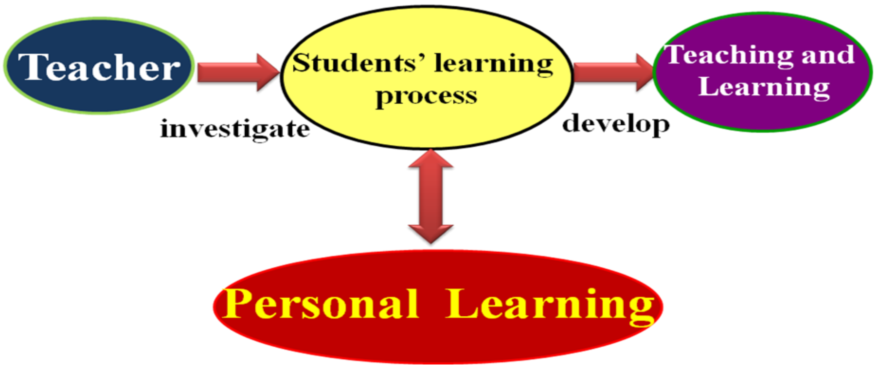


Figure 1 A new approach for teaching

In this model, teachers had been encouraged to focus on how to investigate the “students’ ideas” emerged in the classroom. Their focus is on how to bring “those students’ ideas” to be discussed in the whole class session in order that all or most of the students in the class being engaed in such aspects of the problem, which is very important for them to view problems from many angles. This is the central issue for using open-ended problems in these classrooms. As we might expect, most of the teachers have limited tools to collect students’ ideas. Even though we recommended them to use short note to collect the students’ ideas but they usually ignore what is important for the students. They are not familiar with the students’ natural ways of thinking. This also returns back to the step that they have a difficulty in anticipating the students’ ideas when making lesson plan.

Positively, teachers come to realize that “classroom” is not just a simple idea. It is a culture which the teacher and students in that class have created in the long-term tradition. Parts of this classroom culture are classroom norm, belief system, attitudes, and values. All of these has formed the complicated aspects of that classroom culture. Thus, changing the classroom is not just providing teachers with new method of teaching and expecting that the changing will occur in the classroom. Creating new teaching practices by integrating Open Approach into Lesson Study is a promising context for changing teachers' roles in the mathematics classroom. This idea has been implemented in the following two lab schools since 2006. Khoo Khum Pittayasan, a typical expansion school in the remote area of Khon Kaen province 30 kilometers far from Khon Kaen city and Chumchon Ban Chonnabot, an elementary school in the typical country side of Thailand in some 50 kilometers far from Khon Kaen city voluntarily participated in the project.

The most difficult part of implementing lesson study in schools in Thailand is how to form lesson study team. We do not have senior or expert teachers in schools like those of Japan. We also lack of outside knowledgeable persons to support the schools. In order to have effective lesson study team in the project school, Faculty of Education, Khon Kaen university has trained our graduate students in master degree program in mathematics education, which first offered in 2003 to take part in the workshop organized by the Faculty during 2003-2005. We organized our workshop into small group mixing both teachers or school principals and supervisors. The graduate students take their roles to observe group-working and then come to reflect what they observed after the representative people of the group presented their work.

The roles of graduate students provided a chance for school teachers to reflect on their traditional roles. In 2006, when we started to fully implement the idea of lesson study and Open Approach, our graduate students have been assigned to be members of lesson study team working closely with school teachers where as they used the school they participated as their research site. Thus, each lesson study team will look like this; three classroom teachers from grade 1, 2, and 3 added with one graduate student, one teacher from other grade (option), the principal (mostly attended in reflection session). A team for grades 4, 5 and 6 or for grades junior 1, 2, and 3 will do the same way to form their lesson study team. Three steps of lesson study have been practiced as follows: Monday or Tuesday was set for collaboratively plan the lesson for each team. One teacher went to teach according to usual time table in a week. Then, all teachers in that school with the school principal took leadership in reflection session in the end of the week, may be Thursday or Friday. The author adapted many steps of lesson study by putting revision step into yearly cycle. This made the three step lesson study could be practiced as a weekly cycle. Thus, we can plan to do lesson study every week for still covering all content teachers have to teach. This adaptive version relaxed teacher to be comfort to use innovations like lesson study and Open Approach in their classroom. They feel like they have outside knowledgeable persons to help them improve the classroom, rather feeling that they had to have more extra work than they used to do. Figure 2 shows three steps of lesson study adapted to be used in mathematics classroom in the project schools in Thailand in two schools mentioned earlier.

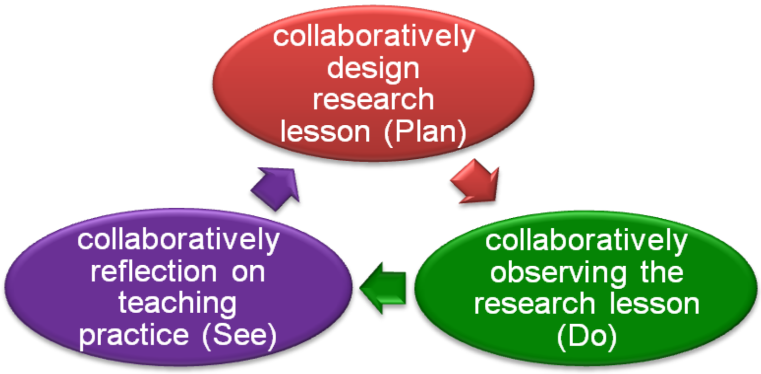


Figure 2 Adaptive Lesson study in Thailand (Inprasitha, 2006)

Lesson Study with Whole School Approach: A Case of Khoo Kham Pittayasan School

Khoo Kham Pittayasan School is an extended school (1st grade to 9th grade). There are one hundred-eighty students and eighteen teachers in 2010 academic year. The school has been participating in the project since 2006. In the 2006 academic year, the school implemented three phases of lesson study in the 1st grade, the 4th grade and the 7th grade. In the academic year 2007, they extended to 6 classrooms; 1st grade, 2nd grade, 4th grade, 5th grade, 7th grade and 8th grade. In 2008 academic year until now, they extended to 9 classrooms; 1st grade, 2nd grade, 3rd grade, 4th grade, 5th grade, 6th grade, 7th grade 8th grade and 9th grade. In order that all 18 teachers of this school could participate in 3 phases, especially the reflection phase. The school principal took leadership in the reflection phase and it is obligation for all school teachers had to participate in this phase. This weekly cycle of lesson study activities could relax the new comers of lesson study team as in this school in Thailand.

In the "Plan" Phase; it involved the researcher, school coordinator, co-researchers, and participant teachers to collaboratively design a research lesson (Plan). During this phase mathematics problem activities were chosen using open-ended problems based on a Japanese mathematics textbook. The materials to be used in the classroom were then designed. This was conducted once a week.

In the "Do" Phase, during this phase the LS group collaboratively observed the research lesson (Do) and implemented the lesson plan of the school teacher in the classroom. In addition, the classroom teaching was observed by the research team, school coordinator, co-researchers, and other teachers. The objective of the observation focused on the students' thinking approach, and not on the teacher's teaching competency.

In the "See" Phase, during this phase the team collaboratively discussed and reflected on the research lesson, and examined the findings of the teaching observation for improving the research lesson. The research lesson was then kept with a view of using it again in the following year. This phase was conducted once a week. A unique feature of this phase is that the school principal took leadership in running this session and this motivated all the teachers in school to attend the session.

Concluding Remarks

After a decade has passed, we have learned that implementing lesson study in a different context, which is quite different from that of Japan, there are many issues we have to be concerned. Analysis of its own national contexts including social and cultural aspects of school and classroom is very important. In the case of Thailand, teaching mathematics by emphasis on the coverage of contents is the central issue of most of the school teachers. Thus, modifying the time schedule so that we can implement lesson study in weekly cycle is a key for the success. This does not mean that 'revision and reteach the research lesson' is not important but we put it in the yearly cycle. Khoo Kham Pittayasan school now can become 'learning center' for other school to learn how to adapt lesson study in their schools. Since 2009, the idea of using lesson study to improve teaching practices has been extended into another 18 schools and into another 8 schools in 2011. It is expected that since 2012, lesson study will become expansion nationwide.

Acknowledgments

This research is supported by Center for Research in Mathematics Education, Khon Kaen University, Thailand.

References

Inprasitha, M. (2006). Open-ended approach and teacher education. Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 25, 169–178. Retrieved from http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec2006/Tsukuba_Journal_25.pdf

Inprasitha, M., Loipha, S. & Silanoi, L. (2006). Development of effective lesson plan through lesson study approach: a Thai experience. Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 25, 237-245 (Special Issue on the APEC-Tsukuba international conference: Innovative teaching mathematics through lesson study)

Inprasitha, M. (2011). One Feature of Adaptive Lesson Study in Thailand: Designing a Learning Unit. Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia. 34 (1). pp.47-66.

Gabriele KAISER (Universität Hamburg) Sigrid BLÖMEKE, Rainer LEHMANN (Humboldt Universität zu Berlin), Martina DÖHRMANN (Universität Vechta), Johannes KÖNIG (Universität zu Köln), Nils BUCHHOLTZ (Universität Hamburg), Ute SUHL (Humboldt Universität zu Berlin)

Empirische Studien zur Wirksamkeit der Mathematiklehrerausbildung

Im Beitrag werden Studien vorgestellt werden, die in den letzten Jahren auf der Basis der IEA-Studie Teacher Education and Development Study – Learning to Teach Mathematics (TEDS-M) zur Wirksamkeit der Mathematiklehrerausbildung durchgeführt wurden.

1. TEDS-M

Die international vergleichende Lehrerbildungsstudie TEDS-M wurde von der International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) aufbauend auf TIMSS und PISA als Reaktion auf die kontinuierliche Kritik an der Lehrerausbildung beschlossen. Die Kritik an der Lehrerbildung und ihrer geringen Wirksamkeit ist sehr alt und wurde bereits Anfang des 20. Jahrhunderts von Klein (1908) als „Doppelte Diskontinuität" beschrieben. Allerdings lagen bis dato keine gesicherten Erkenntnisse über deren Wirksamkeit vor. Die umfassenden Reformdiskurse liefern allerdings Hinweise auf Wirkungsannahmen, die mit TEDS-M am Beispiel der Ausbildung von zukünftigen Mathematiklehrerinnen und -lehrern in den Klassen 4 und 8 überprüft wurden:

- Welchen Einfluss haben systemische, institutionelle und individuelle Bedingungen der Lehrerausbildung auf den Erwerb von professioneller Kompetenz durch zukünftige Mathematiklehrpersonen?
- Welche der erfassten Merkmale sind im internationalen Vergleich mit dem Erwerb einer besonders hohen professionellen Kompetenz verbunden?
- Inwiefern gibt es Unterschiede in Bezug auf die Primarstufe und die Sekundarstufe I?
- Welche Merkmale weisen die Ausbildenden der Lehrerbildung beider Phasen im internationalen Vergleich auf?

Weltweit haben 17 Länder mit mehr als 20.000 zukünftigen Lehrkräften an der Studie teilgenommen, in Deutschland waren alle 16 Bundesländer beteiligt mit 1803 Referendarinnen und Referendaren. Erhoben wurde mit Förderung der DFG von 2007 bis 2009 neben institutionellen und curricularen Daten das mathematische, mathematikdidaktische und erziehungswissenschaftliche Wissen zukünftiger (Mathematik-)Lehrkräfte am Ende der Lehrerausbildung, die in Deutschland mit dem Referendariat endet. Die zentralen Konzeptualisierungen und der theoretische Rahmen sind anschlussfähig an bedeutende andere Studien zur Messung des Lehrerprofessionswissens wie COACTIV (siehe Kunter et al., 2011).

Folgende zentralen deskriptiven Ergebnisse wurden für die **zukünftigen Lehrkräfte der Primarstufe** erzielt (für Details siehe Blömeke, Kaiser, Lehmann, 2010a; die Annotationen beziehen sich auf Einschränkungen der Stichprobe):

Mathematische Kompetenz	
Land	**Mittelwert**
Taiwan	623
Singapur	590
Schweiz*	543
Russland	535
Thailand	528
Norwegen*	519
USA*	518
Deutschland	**510**
International	500
Polen*	490
Malaysia	488
Spanien	481
Botswana	441
Philippinen	440
Chile*	413
Georgien	345
IEA: Teacher Education and Development Study	© TEDS-M Germany

Mathematikdidaktische Kompetenz	
Land	**Mittelwert**
Singapur	593
Taiwan	592
Norwegen*	545
USA*	544
Schweiz	537
Russland	512
Thailand	506
Malaysia	503
Deutschland	**502**
International	500
Spanien	492
Polen*	478
Philippinen	457
Botswana	448
Chile*	425
Georgien	345
IEA: Teacher Education and Development Study	© TEDS-M Germany

Die mit Abstand höchste *mathematische Kompetenz* zeigen am Ende der Ausbildung angehende Grundschullehrkräfte aus Taiwan. Starke Leistungen zeigen auch die Lehrkräfte aus Singapur, der Schweiz, Russland, Thailand und Norwegen. Die mathematische Kompetenz angehender deutscher Grundschullehrkräfte liegt zusammen mit jenen aus den USA signifikant über dem internationalen Mittelwert, allerdings bleiben sie im Mittel deutlich hinter den Leistungen der Länder an der Spitze zurück.

Auch im Bereich der *Mathematikdidaktik* wird die Leistungsspitze von den Lehrkräften aus Singapur und Taiwan gebildet, über dem internationalen Mittelwert liegen auch die Leistungen angehender Grundschullehrkräfte aus Norwegen, den USA und der Schweiz. Deutschland gehört mit Russland, Thailand und Malaysia zu einer internationalen Mittelgruppe. Im Vergleich der sechs europäischen TEDS-M-Länder liegt Deutschland statistisch signifikant unter deren Mittelwert.

Detailanalysen der vier *Ausbildungsgänge*, die in Deutschland zu einem Grundschullehramt führen, machen deutlich, dass es in den beiden Lehrämtern der reinen Grundschullehrerausbildung mit Mathematik als Schwerpunkt im internationalen Vergleich überdurchschnittlich gut gelingt, mathematische und mathematikdidaktische Kompetenz zu sichern.

Ein etwas anderes Bild ergeben die Analysen für die **zukünftigen Lehrkräfte der unteren Sekundarstufe** erzielt (für Details siehe Blömeke, Kaiser, Lehmann, 2010b):

Mathematische Kompetenz	
Land	**Mittelwert**
Taiwan	667
Russland	594
Singapur	570
Polen*	540
Schweiz*	531
Deutschland	**519**
USA*	505
International	500
Malaysia	493
Thailand	479
Oman	472
Norwegen*^{n}	444
Philippinen	442
Botswana	441
Georgien*	424
Chile*	354
IEA: Teacher Education and Development Study	© TEDS-M Germany

Mathematikdidaktische Kompetenz	
Land	**Mittelwert**
Taiwan	649
Russland	566
Singapur	553
Schweiz*	549
Deutschland	**540**
Polen*	524
USA*	502
International	500
Thailand	476
Oman	474
Malaysia	472
Norwegen*	463
Philippinen	450
Georgien*	443
Botswana	425
Chile*	394
IEA: Teacher Education and Development Study	© TEDS-M Germany

Die Kompetenzen angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I aus *Taiwan* liegen an der Spitze. Sie verfügen im internationalen Vergleich über die höchste mathematische und mathematikdidaktische Kompetenz. Eine Gruppe von fünf Ländern zeichnet sich dadurch aus, dass ihre angehenden Lehrkräfte sowohl in Mathematik als auch in Mathematikdidaktik über dem internationalen Mittelwert liegen. Zu dieser Gruppe gehört *Deutschland*. Daneben handelt es sich um *Russland, Polen, Singapur* und *die Schweiz*. In Mathematik weisen die Lehrkräfte aus diesen vier Ländern gegenüber jenen aus Deutschland allerdings noch einmal einen signifikanten Leistungsvorsprung auf. Bedeutsam ist eine Differenzierung der Ergebnisse nach *Ausbildungsgängen*. Deutsche Gymnasiallehrkräfte zeichnen sich am Ende ihrer Ausbildung im internationalen Vergleich durch herausragende mathematische und mathematikdidaktische Kompetenzen aus. Deutsche Mathematiklehrkräfte mit einer Lehrberechtigung bis zur Klasse 10 zeigen dagegen deutliche Schwächen.

Neben diesen deskriptiven Ergebnissen sind inzwischen eine Reihe relationaler Analysen publiziert, z.B. zur Frage, ob es international akzeptierte Kerncurricula in den drei untersuchten Domänen Mathematik, Mathematikdidaktik, Erziehungswissenschaft gibt. Es wird deutlich, dass internationale curriculare Profilen von den Lerngelegenheiten der Mathematiklehramtsstudierenden und kulturellen Einflüssen beeinflusst sind (Blömeke, Kaiser, 2012). Insbesondere die Frage nach der Effektivität der Mathematiklehrerausbildung ist von hohem aktuellem Interesse. Enttäuschende Ergebnisse erster Analysen, die auf den geringen Einfluss mathematikdidaktischer Lerngelegenheiten auf die Entwicklung des Lehrerprofessionswissens hinwiesen (Blömeke, Döhrmann, Kaiser, 2011) konnten durch differenziertere und weiterführende Analysen relativiert werden. Es konnten international am Ende der Ausbildung zwei Profile identifizieren werden: Lehrkräfte mit einem kognitiv anspruchsvollen und dynamisch-konstruktivistisch akzentuierten Kompetenzprofil sowie leistungsschwächere Lehrkräfte mit stärker statischen und transmissionsorientierten Überzeugungen. Als erklärende Merkmale der Profilzugehörigkeit konnten das Geschlecht, fachliche und insbesondere fachdidaktische Lerngelegenheiten sowie die Kohärenz der Ausbildung identifiziert werden. Aus den Ergebnissen lassen sich zum einen unmittelbar Hinweise auf ein Reformpotenzial in der Lehrerausbildung ableiten. Bedeutsam ist zum anderen die hohe Erklärungskraft der mathematikdidaktischen Lerngelegenheiten. Diese Ergebnisse führen erstmals zu anderen Schlussfolgerungen in Bezug auf die Bedeutsamkeit der einzelnen Ausbildungskomponenten als bereits erwähnte variablenorientierten Analysen, in denen vor allem der Mathematik signifikant Vorhersagekraft für die erreichten Ausbildungsergebnisse zugekommen war. Betrachtet man Lehrerkompetenz dagegen als mehrdimensionales Konstrukt tritt das Wirkungspotenzial der Fachdidaktik in den Vordergrund (Blömeke, Suhl, Döhrmann, 2012).

2. MT21

Zur Vorbereitung von TEDS-M wurde von der IEA aufgrund des Fehlens geeigneter Konzeptualisierungen und Instrumente eine Vorbereitungsstudie durchgeführt, die Studie „Mathematics Teaching in the 21st Century" (MT21), ursprünglich P-TEDS genannt. An dieser 6-Länder-Studie, die mit Gelegenheitsstichproben arbeitete und die von 2002-2006 durchgeführt wurde, nahm Deutschland ebenfalls teil. Der Studie lag ein Drei-Kohorten-Design zugrunde und erfasste Kohorten aus allen Phasen der Lehrerausbildung von Studienanfang bis Ende des Referendariats, allerdings beschränkt auf Studierende für das Sekundarstufenlehramt. Insgesamt haben 878 Probanden aus vier Ausbildungsregionen an dieser Studie teilgenommen. Bereits in dieser Studie wurden die deutlichen Leistungsunterschiede zwischen den zukünftigen Lehrkräften aus den ostasiatischen Ländern, hier Taiwan und Korea, zu den Lehrkräften aus den beteiligten westlichen Ländern wie z.B. USA und Deutschland deutlich. Auch Leistungsunterschiede zwischen den zukünftigen Lehrkräften für die verschiedenen Studiengänge wie sie in Deutschland üblich sind, nämlich Lehramt für Haupt- und Realschule sowie Gesamtschule bzw. Gymnasien werden deutlich. Aus Platzgründen verzichten wir auf Details und verweisen auf die umfangreichen publizierten Darstellungen (u.a. Blömeke, Kaiser, Lehmann, 2008). Zu dieser Studie wurde eine qualitative Ergänzungsstudie durchgeführt, die strukturelle Zusammenhänge zwischen den einzelnen Wissensdomänen, wie sie in MT21 unterschieden werden, analysiert (siehe Schwarz, 2012).

3. TEDS-LT

Ziel der von 2009 bis 2011 durchgeführten BMBF-Studie „Teacher Education and Development Study: Learning to Teach" (TEDS-LT) ist es, die vorhandene Forschung zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung auf andere Lehrergruppen auszuweiten und um eine Längsschnittkomponente zu erweitern. Unter Aufgreifen der Erkenntnisse aus den Mathematikstudien wurde die Ausbildung von Deutsch-, Englisch- und Mathematiklehrkräften in den Blick genommen, womit die drei Lehrerausbildung in den drei schulischen Kernfächern abgedeckt ist, eingeschränkt auf Studierende mit der Lehrbefähigung für das Sekundarstufenlehramt. Die in Form einer Längsschnittstudie mit zwei Messzeitpunkten und additiven Querschnitten angelegte Studie untersuchte Studierende an acht deutschen Hochschulen, die sich zum ersten Messzeitpunkt am Ende des Bachelor-Studiums befanden und beim Messzeitpunkt im Master. Insgesamt nahmen am ersten Messzeitpunkt 1568 Studierende an der Studie teil, davon 500 im Fach Mathematik. Am zweiten Messzeitpunkt 2011 mit der Zielgruppe der Lehramtsstudierenden des 6. – 8. Semesters nahmen insgesamt 1856 Studierende teil, 641 davon im Fach Mathematik.

Die Ergebnisse des ersten Messzeitpunkts machen deutlich, dass die - sowohl bei TEDS-M als auch MT21 festgestellten - starken Zusammenhänge zwischen fachlichem und fachdidaktischem Wissen in den Fächern Deutsch und Englisch deutlich geringer ausfallen (für Details siehe Blömeke et al., 2011). Diese Befunde führen zu der weiterführenden Frage, ob es sich bei diesen Unterschieden um systematische Unterschiede zwischen den Fächern handelt, oder ob die Unterschiede einer verschiedenen Konzeptualisierung der Wissensdomänen, speziell im Bereich der Fachdidaktik, unterliegen. Betrachtet man, wie das Konstrukt des fachdidaktischen Wissens in einschlägigen vorangegangenen Studien wie TEDS-M 2008 oder COACTIV auf Ebene der eingesetzten Testitems operationalisiert wird, so zeigt sich immer wieder der allgemeine starke Einfluss des mathematischen Wissens auf die Lösung mathematikdidaktischer Items. Die Grenzen dieser fachnahen Konzeptualisierung fachdidaktischen Wissens und deren Umsetzung in Testinstrumenten sind evident, reduziert sich Lehrerprofessionswissen in Unterrichtssituationen nicht nur auf mathematisches Fachwissen, sondern basiert zentral auf der Integration von allgemein-pädagogischem Wissen, mathematikdidaktischen Wissen und mathematischen Wissen. In Weiterführungen ist geplant, spezifisch mathematikunterrichtsdidaktische Inhalte und pädagogische Fragestellungen stärker einzubinden, fachdidaktische „Einkleidungen“ mathematischer Aufgaben zu vermeiden sowie eine stärkere Differenzierung der Testitems anhand der Bezugswissenschaften für eine differenzielle Diagnostik des Wissens zu realisieren.

Ebenfalls mit dem TEDS-M-Instrumentarium wird in der DFG-geförderten Studie „Längsschnittliche Erhebung pädagogischer Kompetenzen von Lehramtsstudierenden“ (LEK) eine differenzierte Beschreibung und längsschnittliche Beschreibung des pädagogischen Wissens angehender Lehrkräfte in der universitären Ausbildung vorgenommen, und zwar an vier deutschen Universitäten mit Studierenden zu Studienbeginn und danach im vierten Semester (für Details siehe König, Seifert, 2012).

4. TEDS-Telekom

In der von der Deutschen Telekom-Stiftung geförderten Studie „TEDS-Telekom“ wurde mit Instrumenten aus MT21 und TEDS-M eine längsschnittliche Evaluation der von der Stiftung finanzierten Projekte „Mathematik Neu Denken“ an den Universitäten Gießen und Siegen sowie „Mathematik Besser Verstehen“ an der Universität Essen zur Verbesserung der Gymnasiallehrerausbildung im Fach Mathematik durchgeführt. Im Mittelpunkt des von 2008-2010 bzw. von 2009-2011 durchgeführten Projekts stehen die bereits zu Studienbeginn angelegte Integration von Hochschulmathematik und Schulmathematik von einem höheren Standpunkt, worunter ein vertieftes inhaltliches Verständnis zentraler schulmathematischer Konzepte gefasst wird, sowie die frühe Integration fachdidaktischer Aspekte in die Mathematiklehrerausbildung. Einen externen Maßstab bildeten Kontrollgruppen an zwei anderen deutschen Universitäten. Die Studien weisen auf die Wirksamkeit der von den Projekten implementierten Maßnahmen (vgl. Blömeke et al., 2009 sowie Buchholtz et al., 2011).

5. TEDS-FU

In der DFG-geförderten Nachfolge-Studie zu TEDS-M, TEDS-Follow-up, wird der Frage nachgegangen, wie sich das Lehrerprofessionswissen bei Mathematiklehrkräften nach dem Ende des Referendariats weiterentwickelt. Es wird untersucht, wie sich das von TEDS-M gemessene Kompetenzniveau und die Kompetenzstruktur unter den Bedingungen des Berufseinstiegs verändert. Des Weiteren wird untersucht, wie sich Professionswissen handlungsnah erfassen lässt und wie sich insgesamt Lehrerexpertise entwickelt. Anknüpfend an Arbeiten aus der Expertiseforschung (für einen Überblick siehe Li & Kaiser, 2011) wird professionelle Lehrerkompetenz durch einen hohen Vernetzungsgrad des Wissens mit vielfachen Verknüpfungen, einer veränderten kategorialen Wahrnehmung von Unterrichtssituationen durch die zunehmende Integration der einzelnen Dimensionen professionellen Wissens charakterisiert. Mathematikdidaktisch bedeutet dies eine Zunahme des begrifflichen Verständnisses, die Ausdifferenzierung eines Repertoires an heuristischen Strategien und metakognitiven Kontrollstrategien, eine zunehmende Kompetenz über Unterricht zu reflektieren und die Zunahme des Wissens über Schulmathematik in Tiefe und Breite.

In der von 2010 bis2013 angelegten Studie werden Kohorten von Probanden aus der TEDS-M-Primar- und Sekundarstufe webbasiert getestet, wobei eine handlungsnahe Erfassung von Professionswissen durch Videovignetten erfolgt, die Unterrichtssequenzen zu Fehlerwahrnehmung, Umgang mit Heterogenität, Individualisierung, Unterrichtsstrategien, Entwicklung von Handlungsoptionen enthalten. Des Weiteren wird die Weiterentwicklung des erziehungswissenschaftlichen, mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens mittels gekürzter TEDS-M-Tests erhoben. Erste Ergebnisse werden im Sommer 2013 verfügbar sein.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2008): Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und –referendare. Münster: Waxmann

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010a): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann R. (Hrsg.) (2010b): TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Bremerich-Vos, A., Haudeck, H., Kaiser, G. , Nold, G., Schwippert, K. & Willenberg, H. (Hrsg.) (2011): Kompetenzen von Lehramtsstudierenden in gering strukturierten Domänen. Erste Ergebnisse aus TEDS-LT. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Kaiser, G., Lehmann, R. & Rinkens, H.-D. (2011). Empirische Studie zur Effektivität innovativer Projekte der Mathematiklehrerausbildung im Kernfach Mathematik im Kontext der internationalen IEA-Studie TEDS-M 2008 (TEDS-Telekom). Bonn: Deutsche Telekom Stiftung, unveröffentlichter Abschlussbericht.

Blömeke, S. & Kaiser, G. (2012). Homogeneity or heterogeneity? Profiles of opportunities to learn in primary teacher education and their relationship to cultural context and outcomes. In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. http://www.springerlink.com/content/56012027403228m7/fulltext.pdf.

Blömeke, S., Suhl, U. & Döhrmann, M. (im Druck, 2012). Zusammenfügen was zusammengehört. Kompetenzprofile am Ende der Lehrerausbildung im internationalen Vergleich. In: Zeitschrift für Pädagogik.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Döhrmann, M. (2011). Bedingungsfaktoren des fachbezogenen Kompetenzerwerbs von Lehrkräften. Zum Einfluss von Ausbildungs-, Persönlichkeits- und Kompositionsmerkmalen in der Mathematiklehrerausbildung für die Sekundarstufe I. In: Zeitschrift für Pädagogik, 57. Beiheft, 77-103.

Buchholtz, N., Blömeke, S., Kaiser, G., König, J., Lehmann, R. Schwarz, B. & Suhl, U. (2011). Entwicklung von Professionswissen im Lehramtsstudium: eine Längsschnittstudie an fünf deutschen Universitäten. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser & P. Bender (Hrsg.), Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung. Berlin: Lit Verlag, 201-214.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band 1. Berlin: Verlag von Julius Springer.

König, J. & Seifert, A. (Hrsg.) (2012). Lehramtsstudierende erwerben pädagogisches Professionswissen. Ergebnisse der Längsschnittstudie LEK zur Wirksamkeit der erziehungswissenschaftlichen Lehrerausbildung. Münster: Waxmann.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand M. (Hrsg.) (2011): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann.

Li, Y. & Kaiser, G. (Hrsg.) (2011). Expertise in Mathematics Instruction. New York: Springer.

Schwarz, B. (2012, im Druck): Strukturelle Zusammenhänge der professionellen Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Andrea PETER-KOOP, Bielefeld

Frühe mathematische Bildung – Grundlagen, Befunde und Konzepte

Frühe mathematische Bildung ist ein Thema, das seit einigen Jahren in Deutschland im Trend liegt. Zu beobachten sind zum einen bildungspolitische Vorgaben wie die länderspezifische Orientierungspläne für die frühe Bildung (vgl. Peter-Koop 2010), Projekte zur (fachlichen) Gestaltung des Übergangs vom Kindergarten zur Grundschule sowie eine zunehmende Akademisierung der Ausbildung von pädagogischen Fachkräften für den vorschulischen Bildungsbereich. Allerdings ist festzustellen, dass weder den Bildungsplänen (Royar 2007) noch den diversen Studiengängen ein einheitliches Bildungskonzept für die vorschulische Mathematik zugrunde liegt. Zum anderen finden sich zunehmend mathematikdidaktische Forschungsprojekte, die im vorschulischen Bereich angesiedelt sind, und das frühe mathematische Lernen zwischen Instruktion und Konstruktion thematisierten.[1]

Ziel dieses Beitrages ist ein Überblick über das Handlungs- und Forschungsfeld frühes mathematisches Lernen und Lehren bezogen auf die drei Schwerpunkte (1) historische Entwicklung früher mathematischer Bildungsansätze, (2) Darstellung zentraler Forschungsbefunde und -desiderata sowie (3) Konzepte zur frühen Bildung unter besonderer Berücksichtigung der aktuellen Diskussion in der Elementarpädagogik und ihre Anschlussfähigkeit an die mathematikdidaktische Diskussion.

1. Historische Perspektive

Die Idee der frühen Bildung geht zurück auf Jean Jacques Rousseau, der 1762 mit seinem Werk „Emile oder über die Erziehung" die Entdeckung der Kindheit anstieß. Johann Heinrich Pestalozzi entwickelte den Erziehungsgedanken Rousseaus weiter in Richtung eines Bildungsverständnisses und warf bereits zentrale Fragen im Schnittfeld von Pädagogik, Psychologie und Fach auf, die nach wie vor Gegenstand empirischer Forschung sind: Wie aufnahmefähig ist ein Kind in welchem Alter und was ist es bereit zu lernen? Wie unterrichte ich Kinder von unterschiedlicher sozialer Herkunft und mit unterschiedlichem Kenntnisstand? Ein Schüler Pestalozzis, Friedrich Fröbel (1782 – 1852), gründete 1840 in Thüringen den ersten Kindergarten. Ursprünglich sollte die Einrichtung für Kinder von ca. zwei

[1] Diesem Thema war auch internationale Tagung im Februar 2012 in Frankfurt am Main gewidmet. Näheres unter: http://cermat.org/poem2012/

bis sieben Jahren eine Anschauungsstätte für Mütter sein, denen Fröbel die entscheidende Bedeutung in der Kindererziehung zusprach, um diesen die Handhabung der von ihm entwickelten Spielgaben aufzuzeigen. Vom Kindergarten sollten positive Impulse in die Familie ausstrahlen. Fröbel wollte den Kindern mit seinen Spielgaben ein ihrer Entwicklung angemessenes Spielmaterial an die Hand geben. Im spielerischen Umgang mit den Spielgaben sollte das Kind deren Struktur erkennen und sich selbst als strukturierendes Wesen erfahren. Zugleich betonte Fröbel in seinen vielfältigen Schriften aber auch die Rolle des Erwachsenen, dem er die Rolle des Spielführers zuwies und dessen Aufgaben er genau beschrieb. Er unterstrich die Wechselwirkung zwischen dem vom Kind gesteuerten und vom Erziehenden begleiteten und unterstützten Bildungsprozess (Fröbel 1851, zit. nach Heiland 1974, 124) und verwies damit bereits auf das Spannungsfeld zwischen Instruktion und Konstruktion, in dem sowohl die Praxis als auch die Forschung bis heute stehen.

Interessant ist Fröbel für Mathematikdidaktiker auch aus einem weiteren Grund: In seinen Ausführungen geht Fröbel sehr detailliert auf mathematische Aspekte im Elementarbereich ein und bezieht sich vor allem auf den Bereich Raum und Form – nicht auf Zahlen, wie das aktuell weitgehend zu beobachten ist (s.u.). Viele Lege- und Faltspiele sowie auch Konstruktionsspielzeug (z.B. Bausteine, Lego) gehen auf die Idee von Friedrich Fröbel zurück. Sein Anliegen war es, dass die Kinder die Realität aus geometrischen Formen nachbilden (sog. Lebensformen) oder frei erfundene ästhetische Muster legen (sog. Schönheitsformen) und dabei auch Erkenntnisse über Zahl- und Maßverhältnisse (Erkenntnisformen) ziehen können. Hierbei ist zu betonen, dass sich Fröbel aus fachlicher Sicht mit früher mathematischer Bildung beschäftigte. Er war ausgebildeter Kristallograph, verfügte über solides mathematisches Fachwissen und ging bei seinen Überlegungen wissenschaftspropädeutisch vor. Man kann ihn daher entsprechend als ersten Mathematikdidaktiker bezeichnen.

War Fröbel der Protagonist der frühen mathematische Bildung im 19. Jahrhundert, so haben diese Rolle im 20. Jahrhundert Jean Piaget und Zoltan Dienes. Piagets (1952) Versuche zur Zahlbegriffsentwicklung wurden als Grundlage für Überlegungen zur frühen mathematischen Bildung herangezogen und dienten als Ausgangspunkt für die Entwicklung von Konzepten, die wiederum nicht Zahlen und das Zählen in den Mittelpunkt stellten, sondern vielmehr darauf abzielten, ein Verständnis für Äquivalenz- und Ordnungsrelationen anzubahnen. Hinzu kam die generelle Neuorientierung des Mathematikunterrichts mit einer Hinwendung zur strukturbezogenen Mathematik. Anstelle der Vermittlung des Rechnens rückte in den 1960er und

1970er Jahren die sog. mathematische Bildung in den Fokus. Die mathematische Früherziehung unterlag dabei häufig, gemäß der damals vorherrschenden Wissenschaftsorientierung, einer strengen Systematik und war weitgehend pränumerisch ausgerichtet. Entsprechende mathematische Forschungs- und Versuchsprojekte dieser Zeit wären ohne den Einfluss der Arbeiten von Zoltan Dienes allerdings nicht denkbar gewesen, wie Radatz, Rickmeyer und Bauersfeld (1972) betonen:

„Mehr als Dreiviertel der Versuchskurse benutzen Dienes-Material bzw. -Methoden, so dass die überwiegende Mehrheit der Versuche sehr wahrscheinlich ohne Z. P. Dienes nicht entstanden wäre. Die wachsende Einsicht in die Bedeutung kompensatorischer Erziehung der Drei- bis Siebenjährigen und das Streben nach einer Modernisierung des Mathematikunterrichts allein hätten wohl schwerlich ausgereicht.“ (S. 230)

Das schnelle Verschwinden vieler diesbezüglicher Ansätze und Projekte in den 1980er Jahren ist in erster Linie auf den Gegensatz zwischen großen Zielen und hohem Anspruch auf der einen und mühsamer Kleinarbeit und wenig allgemeiner Akzeptanz für die Methoden auf der anderen Seite zurückzuführen (Besuden 2007). Kritik am strukturbezogenen Ansatz der mathematischen Frühförderung betraf vor allem das verschulte Vorgehen, das nicht an die Alltags- und Spielerfahrungen der Kinder gebunden war. Im 21. Jahrhundert ist nun ausgelöst durch den sog. PISA-Schock ein „Revival“ der frühen (mathematischen) Bildung zu beobachten. Und im Gegensatz zu den verschulten und streng pränumerisch ausgerichteten Konzepten der sechziger und siebziger Jahre betonen gegenwärtige forschungsbezogene Ansätze und bildungspolitische Vorgaben vielfach inhaltlich die Auseinandersetzung mit Zahlen und Zählen sowie methodisch einen engen Alltags- und Spielbezug vorschulischer mathematischer Förderung. Um deutlich zu machen, warum aktuelle Ansätze inhaltlich nun eindeutig numerisch ausgerichtet sind, werden im Folgenden diesbezüglich einschlägige Befunde vorstellt und diskutiert. Abgeleitet werden Desiderata für die mathematikdidaktische Forschung.

2. Wissenschaftliche Perspektive

Parallel zur weitgehend pränumerisch ausgerichteten Praxis der mathematischen Früherziehung wurde in den 1970er Jahren in der Forschung hingegen ausdrücklich die Bedeutung früher Zählfähigkeiten in den Fokus gerückt. Aufgrund der Beobachtung, dass auch junge Kinder bereits über Einsichten und Fertigkeiten in Bezug auf Zahlen verfügen, unterstreichen die Vertreter(-innen) des *skills integration* Ansatzes die Bedeutung des Zählens, der Simultanerfassung und des Vergleichens bei der Entwicklung des

Zahlbegriffs (vgl. Gelman & Gallistel 1978, Fuson 1983, Resnick 1983). In einem aktuellen Entwicklungsmodell früher numerischer Kompetenzen beschreibt Krajewski (2008) – unter Rückgriff auf theoretische Arbeiten von Resnick (1989) zu protoquantitativen Schemata – die sich bis zum Schuleintritt entwickelnden Mengen-Zahlen-Kompetenzen anhand von drei Kompetenzebenen. Sie bilden die Grundlage für das Verständnis der Schulmathematik, wobei die ersten beiden Kompetenzebenen (numerische Basisfertigkeiten; Verständnis für Mengenrelationen und Anzahlkonzept) als sogenannte mathematische Vorläuferfähigkeiten betrachtet werden (ebd.). Die Kompetenzen der dritten Ebene (Anzahlrelationen) hingegen erfordern bereits erste Rechenfertigkeiten und bilden damit den Beginn eines arithmetischen Verständnisses.

Auch wenn der Schwerpunkt der Forschungsarbeiten der letzten vierzig Jahr bezogen auf das frühe Mathematiklernen i.W. auf der Entwicklung des Zahlbegriffs liegt, so kann dies nicht losgelöst von der Entwicklung in den Bereichen Geometrie (Clements 2004), Maßzahlverständnis (Schmidt & Weiser 1986) und Muster- und Strukturierungsfähigkeit (Lüken 2011) betrachtet werden. Bislang fehlt jedoch noch ein Entwicklungsmodell, das nicht nur isoliert auf numerische Kompetenzen ausgerichtet ist, sondern auch Kompetenzen im Bereich Raumvorstellung, Mustererkennung und Strukturierungsfähigkeit sowie den Umgang mit Größen einschließt.

Neben den Befunden zur Zahlbegriffsentwicklung, die die Bedeutung von Mengen- und Zahlenkompetenzen für das schulische Mathematiklernen unterstreichen, liefert die SCHOLASTIK-Studie Erkenntnisse zu den Bedingungen individueller Entwicklungsverläufe während der Grundschulzeit. Die Ergebnisse wurden 1997 in einem von Weinert und Helmke herausgegebenen Band „Entwicklung im Grundschulalter" zusammenfassend berichtet. Ein zentraler Befund dieser Studie ist, dass Kinder, die die Grundschulzeit mit schwachen Leistungen beginnen, diese Position meist bis zum Ende der Grundschule beibehalten. Ein Aufholen der Schwächeren im Sinne von kompensatorischen Effekten des Grundschulunterrichts findet offenbar nicht statt (ebd.). Ein weiterer Befund mit starken Implikationen für die frühe mathematische Bildung ist, dass fachspezifisches Vorwissen für den Schulerfolg offenbar bedeutsamer ist als allgemeine kognitive Faktoren wie Intelligenz: „Eine hohe Intelligenzleistung kann offensichtlich nur in geringem Maß Defizite in der Lerngeschichte kompensieren" (Stern 1997, 160). Hinzu kommen Befunde zur Vorhersage und Früherkennung von Rechenschwierigkeiten. Die Bedeutung der Entwicklung mathematischer Vorläuferfähigkeiten vor Schulbeginn für das schulische Mathematiklernen wird dabei eindrucksvoll belegt. In einer Längsschnittstudie im

Kontext der Früherkennung von Rechenstörungen, in der die mathematische Entwicklung von Kindergartenkindern ein halbes Jahr vor Schuleintritt bis zum Ende des vierten Schuljahres untersucht wurde, konnte Krajewski (2005) einen hohen Zusammenhang zwischen mengen- und zahlenbezogenem Vorwissen und den Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit zeigen. Ein erheblicher Teil der Mathematikleistung am Ende des zweiten sowie auch des vierten Schuljahres lässt sich demnach durch die Kenntnis von und das Wissen über Zahlen sowie Zählfertigkeiten und frühe Rechenfertigkeiten bereits im letzten Kindergartenjahr vorhersagen. Auch die Ergebnisse einer finnischen Längsschnittstudie (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi 2004) belegen, dass sich die Probleme schulisch schwacher Rechner bereits vor Einschulung in schwachen Mengen-Zahlen-Kompetenzen zeigen. Zudem indizieren die finnischen Befunde einen Kumulationseffekt dieser Defizite im Vorschulalter. So zeigte sich, dass Kinder, die zu Beginn des letzten Kindergartenjahres nur über ein schwaches mengen- und zahlenbezogenes Vorwissen verfügten, eine deutlich langsamere mathematische Entwicklung vollzogen als Kinder mit besseren Mengen-Zahlen-Kompetenzen. Um hier einen Ausgleich zu schaffen und möglichst allen Kindern solide Grundlagen für den Schulbeginn im Fach Mathematik zu ermöglichen, ergibt sich unmittelbar die Notwendigkeit einer frühen Intervention im Sinne spezieller Förderangebote für Kinder, die zu Beginn des letzten Kindergartenjahrs schwache Kompetenzen in Bezug auf Zahlen und Mengen zeigen, zumal internationale Studien belegen, dass frühe Interventionen diesbezüglich positive Effekte zeigen (vgl. u.a. Dowker 2004, Kaufmann 2003). In der Praxis bestehen jedoch vielfach Probleme bezüglich der Identifizierung der Kinder mit besonderem Unterstützungsbedarf beim frühen Mathematiklernen – sowohl was die Logistik im Sinne eines frühen Screenings als auch was die Auswahl und den Einsatz geeigneter diagnostischer Instrumente betrifft. Was bislang noch fehlt sind empirisch validierte und praxistaugliche Screeningverfahren für die Hand von Erzieherinnen und Erziehern.

Weitgehend unerforscht sind bislang weiterhin noch die Bedeutung und Einflussmöglichkeiten der Eltern für bzw. auf das frühe mathematische Lernen ihrer Kinder. Befunde im Kontext von PISA zeigen, dass in Deutschland Merkmale der sozialen Herkunft sehr stark mit der mathematischen Kompetenz der Schülerinnen und Schüler zusammenhängen (Ehmke & Siegle 2008). Vorreiter für Bemühungen um die Einbeziehung der Eltern in das (vor-)schulische Mathematiklernen ist das US-amerikanische Programm „Family Math“ (Stenmark, Thompson & Cossey 1986), das in Berkeley entwickelt wurde und in den 1980er und 1990er Jahren großflächig in den meisten US-Bundesstaaten sowie zahlreichen weiteren Industriestaaten durchgeführt wurde. Es zielte darauf Eltern zu zeigen, wie sie mit Hilfe mathematischer Spiele, Bilderbücher und der Thematisierung von mathematischen Situationen im Alltag (Einkaufen, Kochen etc.) das mathematische Denken, mathematische Fertigkeiten sowie eine positive Einstellung zum Fach bei ihren Kindern unterstützen können. Allerdings sind die Effekte des Programms nicht entsprechend wissenschaftlich evaluiert worden. Gerade in Bezug auf das vorschulische Mathematiklernen im Familiensetting kommen offenbar erhebliche soziale und kulturell bedingte Unterschiede zum Tragen, die es weiter zu erforschen gilt, wenn entsprechende Aktivitäten zur Einbeziehung von Eltern effektiv greifen sollen (Brandt, Vogel & Krummheuer 2012). Doch es fehlen weitere Untersuchungen zum Einfluss des Elternhauses und zum elterlichen Unterstützungspotential bei der Entwicklung von mathematischen Vorläuferfähigkeiten und damit auf die späteren Schulleistungen im Fach Mathematik.

3. Elementarpädagogische Perspektive

Fachlich orientierte Konzepte zur frühen mathematischen Bildung wie zum Beispiel „Das kleine Zahlenbuch" (Wittmann & Müller 2002) oder „Kleine Welt der Zahl" (Rinkens & Baier 2011) erschließen sich aus mathematikdidaktischer Perspektive relativ schnell und sind eng an weit verbreitete Schulbuchwerke für die Grundschule gebunden. Allerdings scheinen sie in der Kindergartenpraxis längst nicht so verbreitet wie die entsprechenden Schulbuchwerke. Ein Grund hierfür mag darin liegen, dass die mathematikdidaktische Perspektive bislang kaum oder nur zu sehr geringen Teilen Bestandteil der Erzieherinnenausbildung ist. Das pädagogische Fachpersonal in Kindertagesstätten ist in seiner Arbeit viel stärker an der allgemeinen elementarpädagogischen Diskussion orientiert. Daher sollen an dieser Stelle abschließend aktuelle frühpädagogische Konzepte gegenübergestellt und hinsichtlich ihres Potentials für das frühe mathematische Lernen diskutiert werden.

Sventje Bonn (2010) unterscheidet mit Blick auf die frühe naturwissenschaftliche Bildung drei Entwürfe frühkindlicher Bildung: Bildung als Ko-Konstruktion (Fthenakis 2009), Bildung als Aneignung von Welt (Laewen 2010) und Bildung als Selbstbildung (Schäfer 2005). Wie die folgenden Ausführungen zeigen, offenbart sich sehr schnell, dass den Entwürfen ein unterschiedliches Bildungsverständnis zugrunde liegt. Bildung als Ko-Konstruktion ergibt sich nach Fthenakis (2009) in der Interaktion von Kindern und Erwachsenen, wobei die Erwachsenen bewusst die Bildungsprozesse der Kinder mit dem Ziel der gesellschaftlichen Teilhabe gestalten.

Konkretisiert wird das Bildungskonzept in der Publikationsreihe „Natur-Wissen schaffen“, die auch einen Band zur mathematischen Bildung einschließt (Fthenakis, Schmitt, Daut, Eitel & Wendell 2009). Basierend auf einem breiten Mathematikbild, das über Arbeit mit Mengen und Zahlen hinausgeht, werden konkrete mathematische Bildungsziele genannt. Dabei ist das ko-konstruktive Prinzip „eine durchgängige Leitidee der mathematischen Bildung: Ziel ist es, mit Kindern gemeinsam im Dialog mathematisches Verständnis zu entwickeln (und nicht das „Einüben“ der „richtigen“ mathematischen Regeln und Konventionen)“ (ebd. 23). Auch wenn das Kind ko-konstruktiven Bildungskonzept sein mathematisches Lernen aktiv mitkonstruiert, sind es doch in erster Linie die Erwachsenen, die die kindlichen Bildungsprozesse gestalten.

Laewen (2010) hingegen weist darauf hin, dass Kinder ihr Bild von der Welt nicht nur in Interaktion mit Erwachsenen konstruieren. Bildung ist in seinem Verständnis die „Aneignung von Welt“ als Selbsttätigkeit des Kindes. „Wegen der Vergleichbarkeit ihrer Situation können wir davon ausgehen, dass Kinder ihre Themen untereinander leichter erkennen und bearbeiten können, als dies in Interaktionen mit Erwachsenen der Fall ist. Wir müssen aber auch davon ausgehen, dass einige wichtige Themen nur unter Kindern angemessen bearbeitet werden können“ (S. 63). Für Laewen ist Bildung die eigentliche Tätigkeit des Kindes, in der es sich seine Welt erschließt und konstruiert. Deshalb bezeichnet er Kinder entsprechend als „Forscher, Künstler, Konstrukteure“. Wie Laewen lehnt auch Schäfer (2005) – aus fachlicher Perspektive durchaus sinnvolle – kompetenzorientierte Bildungskonzepte ab. Aus seiner Sicht vergibt die Gesellschaft mit derartigen Bildungskonzepten die Chance, von der ganz eigenen Kreativität der Kinder, die möglicherweise ganz neue Fragen aufwerfen und Antworten finden, profitieren zu können. Nach Schäfer reicht es nicht „die Kinder lediglich mit Antworten au Fragen, die wir bereits kennen, zu füttern, um sie „kompetent“ für die Zukunft zu machen“ (S. 69). Frühkindliche Bildung ist nach seinem Verständnis „in erster Linie Selbstbildung im sozialen Kontext“ (S. 63) und erfolgt aufgrund von individuellen Sinnfindungen jenseits des Könnens. Schäfer sieht in kleinen Kindern „Allroundforscher par excellence“ und stilisiert somit nach Bonn (2010) das sich selbst bildende Kind zum besseren Forscher. Dies kritisiert Grell (2010). Er hat grundsätzlich zwar keinen Zweifel an den Selbstbildungspotenzialen von Kindern, verweist jedoch darauf, dass nicht alle Kinder über die gleichen Potenziale verfügen: „Es besteht zu befürchten, dass moderne Selbstbildungskonzepte [...] gerade *die* Kinder erheblich benachteiligen könnten, die am meisten auf Unterstützung, gezielte Anregungen und aktive Hilfen angewiesen sind. “ (S. 164)

Das Recht auf eine angemessene frühe (mathematische) Bildung gilt hingegen für alle Kinder. Daher soll abschließend mit der *Reggio Pädagogik* ein frühpädagogischer Ansatz skizziert werden, der das Potenzial hat, die mathematische Bildung junger Kinder im Schnittfeld von fachlichen und elementarpädagogischen Maximen zu realisieren. Die sog. Reggio Pädagogik wurde in der norditalienischen Stadt Reggio Emilia entwickelt und hat international wie auch in Deutschland die Theorie und Praxis der frühkindlichen Bildung erheblich beeinflusst. Einen Grund dafür sieht Lingenauber (2009) darin, dass Unterschiede in den Bildungsbiographien in den kommunalen Kindertageseinrichtungen Reggio Emilias nicht zu Bildungsbenachteiligungen führen: „Vielmehr steht Bildungsgerechtigkeit für jedes Kind im Zentrum dieser Pädagogik. Kinder mit Lernschwierigkeiten sind Kinder mit besonderen Rechten. Es geht im frühkindlichen Bildungssystem R.E. also darum, die bestmöglichen Lernstrategien und die jeweils bevorzugte Sprache eines Kindes zu finden. [...] Die pädagogische Haltung beruht auf einer sozialkonstruktivistischen Perspektive, in der Unterschiede keine Hierarchien begründen.“ (S. 9) Dies wird durch die umfassende Partizipation von Kindern, Erziehern und Eltern angestrebt und vielfach auch erreicht, wie die umfangreiche Dokumentation dieses Ansatzes nahelegt (vgl. Reggio Children 2002). Die Reggio Pädagogik liegt genau im Schnittfeld von Konstruktion und Instruktion im Sinne einer einfühlsamen individuellen Begleitung und liegt somit in dem oben beschriebenen Spannungsfeld. Zugleich liegt ihr ein Ansatz zugrunde, der auch kompatibel ist zu modernen mathematikdidaktischen Ansätzen, die i.W. ebenfalls von einem sozialkonstruktivistischen Verständnis von Lernen ausgehen und aktivitäts- und kommunikationsorientierte Ansätze der reinen Belehrung gegenüber den Vorrang geben. Ein Schwerpunkt der Reggio Pädagogik liegt auf dem sozialen Austausch zwischen Kindern einerseits und zwischen Kindern und den sie begleitenden Erwachsenen andererseits. Im Zentrum steht das kompetente Kind im Sozialaggregat mit kompetenten Erzieher(innen) und kompetenten Eltern. Wirkungszusammenhänge der drei Kompetenzen und die Beiträge der Kinder, Eltern und Erzieher(innen) zu diesem konstitutiven Sozialaggregat bezogen auf das frühe Mathematiklernen sind Gegenstand eines Beitrags, der zur Zeit in Vorbereitung ist.

Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann bei der Autorin per Email angefordert werden: andrea.peter-koop@uni-bielefeld.de

Christian SPANNAGEL, Heidelberg

Die sieben Todsünden eines Wissenschaftlers

Dies ist ein nicht ganz ernsthafter, aber doch ernst zu nehmender Beitrag über Sünden in der Wissenschaft, auch über die ganz eigenen "sündigen" Erfahrungen des Autors. Der Mensch ist ja bekanntermaßen ein lasterhaftes Wesen, und Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker sind davon nicht ausgenommen. Bereits als Nachwuchswissenschaftler(in) wird man gerne schleichend von einer beliebigen Auswahl der sieben Todsünden heimgesucht: Geiz, Faulheit, Hochmut, Neid, Völlerei, Wollust und/oder Zorn. Was aber ist mit Wissensdurst, Neugier und Spaß am Forschen und Lehren?

Zu Beginn des Beitrags muss hervorgehoben werden, dass die Metapher der Sünde nicht allzu wörtlich ausgelegt werden soll. Zugegebenermaßen lag die Intention der Verwendung dieses Begriffs im Wesentlichen darin, auf den entsprechenden Hauptvortrag neugierig zu machen, als die hier beschriebenen Phänomene unter einer religionswissenschaftlichen Perspektive zu beleuchten. In diesem Sinne seien die Leserinnen und Leser eingeladen, den Einsatz der Metapher mehr in Begleitung eines Augenzwinkerns zu verstehen. Darüber hinaus sind die in den jeweiligen Abschnitten beschriebenen Aspekte nicht erschöpfend, sondern exemplarisch aufzufassen; man könnte zu jeder Sünde sicher noch viele weitere Facetten aufführen. (Weitere Aspekte sind auf einer Wiki-Seite zu finden, auf die am Ende des Artikels eingegangen wird.)

1. Geiz und Habgier

In meiner wissenschaftlichen Arbeit wurde ich regelmäßig von Kolleginnen und Kollegen vor Ideenklau mit dem Hinweis gewarnt, man solle besser nicht allzu viel Unveröffentlichtes preisgeben. Hin und wieder hört man auch von Fällen, in denen Ideen geklaut wurden. Wie groß die Gefahr tatsächlich ist, lässt sich schwer abschätzen. Nachwuchswissenschaftler lassen sich oft aber erst einmal von solchen Warnungen einschüchtern (mir ist es so ergangen). Darüber hinaus werden Informationen auch gerne von Wissenschaftlern „im Geheimen" gehalten, um nicht *zu* transparent zu sein. Wer stellt schon gerne seine Originaldaten zur Verfügung, damit andere die statistische Auswertung nachvollziehen und überprüfen können? Man „geizt" mit Informationen und bewahrt sich so den exklusiven Zugang zu ihnen. Dadurch werden allerdings mitunter persönliche Interessen über diejenigen der wissenschaftlichen Gemeinschaft gestellt.

Im Sinne einer *scientific community* wäre es hingegen wünschenswert, wenn das *Teilen* dem Zurückhalten vorgezogen würde. Im Web 2.0 hat sich hierfür der Begriff *sharism* etabliert (Mao, 2012). Dieser bezeichnet die Haltung, in der man Informationen (im Netz) mit anderen teilt in der Gewissheit, dass man dadurch auch Informationen von anderen bekommt und in diesem Zusammenspiel alle Beteiligten voneinander profitieren. Web-2.0-Werkzeuge wie Weblogs, Wikis und Twitter können beispielsweise verwendet werden, um Forschungsideen mit anderen zu teilen, Fragen zu diskutieren und gemeinsam an wissenschaftlichen Projekten zu arbeiten.

Öffentliche Wissenschaft im Sinne von *Open Science 2.0* bindet dabei andere Wissenschaftler(innen) und „Nicht-Wissenschaftler(innen)“ bereits in den Prozess des Entstehens wissenschaftlichen Wissens ein (Spannagel, 2011b). Aus der Sicht öffentlicher Wissenschaft wäre es somit wünschenswert, in der wissenschaftlichen Diskussion das Teilen verstärkt zu praktizieren und dabei darauf zu *vertrauen*, dass andere Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler ebenso redlich arbeiten wie man selbst.

2. Faulheit und Trägheit

Diese Todsünde soll im Folgenden auf die Lehre bezogen werden, auch wenn man sie sicherlich in der Forschung finden kann. Als Anfänger in der Hochschullehre neigt man dazu, diejenigen Methoden anzuwenden, die man selbst in seinem eigenen Studium kennengelernt hat. Und weil man recht schnell „begreift“, dass andere Aktivitäten wie beispielsweise Forschungsprojekte in der Wissenschaftslandschaft eine höhere Priorität genießen als die Lehre, behält man diese Methoden auch bei – schließlich hat man keine Zeit, um in diesem Bereich auch noch innovativ zu sein. Man greift letztlich zu Veranstaltungsformen und Methoden (wie dem Vortrag in der Vorlesung oder dem Referatsseminar), mit denen man sich *sicher* fühlt.

Wenn man allerdings im Lehramtsstudium tätig ist, bekommt man von den Studierenden relativ schnell einen Spiegel diesbezüglich vorgehalten, z. B. nachdem man eine neunzigminütige Vorlesung über selbstentdeckendes Lernen oder einen PowerPoint-Vortrag über Methoden- und Medienvielfalt gehalten hat. Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker haben letztlich die Pflicht, als Vorbild das zu verwirklichen, was man in Fachdidaktik-Veranstaltungen vermittelt: ausgetretene Pfade verlassen, studierendenaktivierende Methoden verwenden, mit eigenen Fehlern konstruktiv umgehen. In der eigenen Lehre Innovationen zu riskieren bedeutet dabei somit, *Unsicherheiten* einzugehen und sich angreifbar zu machen.

Selbstverständlich bedeutet die Anwendung innovativer Methoden nicht, dass diese auch zwangsläufig besser sein müssen. Ansätze wie die umgedrehte Mathematikvorlesung (Fischer, Werner, Strübig & Spannagel, im Druck) oder das Aktive Plenum (Spannagel, 2011a) haben ihre eigenen Vor- und Nachteile. Sie können aber auf jeden Fall demonstrieren, dass man es als Hochschuldozent *wagen* kann, andere Wege zu gehen und diese auch (öffentlich) zur Diskussion zu stellen.

3. Hochmut und Eitelkeit sowie Neid und Eifersucht

Der Wissenschaftsbetrieb ist hierarchisch strukturiert: „unten“ die Studierenden, „oben“ die Professorinnen und Professoren. Es besteht die Gefahr dass man sich umso „weiter“ von den Studierenden entfernt, je höher man in der wissenschaftlichen Karriereleiter „aufsteigt“. Dieser Aufstieg kann mit jeder Menge Eitelkeiten einhergehen. Wie oft betrachtet man sich bewundernd seine eigene Publikationsliste? Wie gekränkt ist man, wenn die eigene Arbeit nicht in einem Kontext, in dem sie eigentlich relevant ist, zitiert wird? Selbstverständlich kann man stolz auf das bisher Erreichte sein – aber Stolz und Eitelkeit liegen dicht beieinander. Diese können in einem schleichenden Prozess in übertriebene Eitelkeit und schließlich in Überheblichkeit münden. Studierende müssen diese nicht selten ertragen, beispielsweise wenn sie mal wieder vor einer verschlossenen Bürotür stehen, weil sie zu einer vom Dozenten zuvor angekündigten Sprechstunde kommen wollten, oder wenn sie von einer Professorin oder einem Professor harsch abgefertigt werden.

Darüber hinaus besteht die Gefahr, dass man sich zunehmend mit Problemen befasst, die rein akademischer Natur sind und denen es an Praxisrelevanz mangelt. Sicherlich ist Grundlagenforschung sinnvoll und wichtig, auch ohne dass eine direkte Anwendbarkeit der Ergebnisse absehbar ist. Hin und wieder hat man aber den Eindruck, dass die Relevanzfrage mancher Forschungsarbeit in einem frühen Stadium zuträglich gewesen wäre.

Ich habe beispielsweise lange Zeit an CleverPHL, einem Werkzeug zur Aufzeichnung und Analyse von Benutzerverhalten am Computer, gebastelt und vieles dazu veröffentlicht (z.B. Spannagel, 2007). Nüchtern betrachtet ist dieses Werkzeug aber ein Forschungsprototyp geblieben und für den breiten Praxiseinsatz nicht geeignet. Zu Beginn der Arbeit hätte ich das natürlich nicht erahnen können. CleverPHL hielt sich aber hartnäckig in meinem Geiste und erzeugte jede Menge Weiterentwicklungsideen und Forschungsfragen, die rein aus diesem akademischen Kontext entstanden sind und letztlich den Bogen überspannt haben.

Darüber hinaus ergeben sich aus der Arbeit im akademischen Feld Fragestellungen, die sich z. B. mit Experimenten beantworten lassen, bei denen aber hinterfragt werden kann, welche tatsächliche Praxisrelevanz *die Forschungsfrage* hat (z.B. Schimpf & Spannagel, 2011). In diesem Kontext scheint auch der Neid eine Rolle zu spielen, und zwar der Neid eines ganzen Wissenschaftszweiges (die Bildungswissenschaften) auf eine Wissenschaft (die Psychologie), die als „Königin der sozialwissenschaftlichen Forschungsmethodik“ gilt. Es entsteht im Rahmen empirischer Bildungsforschung zunehmend der Eindruck, dass quantitative Forschungsmethoden (inklusive der Entwicklung entsprechender Messverfahren, einer ordnungsgemäß durchgeführten Fragebogenkonstruktion mit Itemanalyse usw.) und das Experiment als Methode zur Aufdeckung kausaler Zusammenhänge den höchsten Grad an Wissenschaftlichkeit für sich beanspruchen. Dabei haben diese Ansätze ihre eigenen Nachteile: Das Experiment zielt zwar, wenn es nach allen Regeln der Kunst durchgeführt wird, auf eine hohe interne Validität ab und entspricht dadurch bestimmten Ansprüchen von Wissenschaftlichkeit. Dabei besteht allerdings die Gefahr, dass man vergisst zu hinterfragen, welche Rolle die Ergebnisse denn in der Unterrichtspraxis tatsächlich spielen und ob die damit beantwortete Forschungsfrage über den akademischen Kontext hinaus überhaupt relevant ist.

In einem Modell fasst Prediger (2010) die verschiedenen Bereiche wissenschaftlicher Arbeit in der Fachdidaktik übersichtlich zusammen: Die Theorie vermittelt zwischen den Bereichen Forschung, Entwicklung und Unterrichtspraxis. In vielen wissenschaftlichen Arbeiten spielen leider nur die ersten beiden Bereiche eine wesentliche Rolle und der dritte Bereich, die Unterrichtspraxis, eine untergeordnete, obwohl hier im Modell explizit *das Phänomen* und *das Problem* angesiedelt sind.

In diesem Zusammenhang wäre es wünschenswert, dass Forschungsansätze in den Bildungswissenschaften eine größere Rolle spielen, in denen das Praxisproblem *methodisch verankert* ist. Ein solcher Ansatz ist beispielsweise Aktionsforschung (auch Handlungsforschung; Hinchey, 2008). Ziel von Aktionsforschung ist nicht, allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten aufzudecken, sondern konkrete Praxisprobleme theoriebasiert und mit wissenschaftlichen Methoden zu lösen, den Problemlösungsprozess zu dokumentieren und mit anderen zu teilen. Dies geschieht oft über einen langen Zeitraum in mehreren Handlungszyklen. Dabei kann ein und dieselbe Person durchaus sowohl die Rolle des Lehrenden als auch die Rolle des Forschenden übernehmen und zwischen diesen Rollen jeweils wechseln. In diesem Kontext wäre es zum Beispiel hilfreich, wenn man als Wissenschaftler selbst regelmäßig in einer Schule unterrichtet, um dort direkt aus der Praxis heraus fachdidaktische Aktionsforschung zu betreiben (so wie dies beispielsweise der Französischdidaktiker Jean-Pol Martin über einen langen Zeitraum getan hat).

Aktionsforschung hat, wie jede andere Methode auch, Vorteile (z.B. kreative Ideen zur Lösung von Praxisproblemen und Würdigung der Komplexität des Kontexts) und Nachteile (z.B. eine niedrigere Objektivität und geringere Verallgemeinerbarkeit). Letztlich muss man – ganz gleich, ob man experimentell forscht, Handlungsforschung betreibt oder eine andere Methode gewählt hat – die jeweiligen Vor- und Nachteile kennen und damit reflektiert umgehen.

4. Völlerei und Maßlosigkeit

Gegen die eigene unterrichtspraktische Tätigkeit wird in der Regel das Zeitproblem ins Feld geführt. Wie soll man als Professorin oder als Professor das *auch noch* machen – neben der Lehr- und Forschungstätigkeit und den sonstigen Dienstleistungen, die man erbringen muss? Zeitprobleme sind oft zu einem gewissen Anteil auch Probleme der Prioritätensetzung und damit selbstgemacht. Viele Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler beklagen sich über *publish or perish*, „spielen das Spiel" aber trotzdem weiterhin mit. Darüber hinaus ist es der Reputation einer Professorin oder eines Professors zuträglich, sehr viele (sehr teure) Projekte mit sehr vielen Doktorandinnen und Doktoranden zu haben. Nicht selten ist man als Professor nicht mehr Forscher, sondern Forschungsprojektverwalter – weniger, weil man dies anstrebt hat, sondern weil man dazu getrieben wurde. Trotzdem stürzen sich alle auf die nächste große BMBF-Ausschreibung, um etwas von dem Topf abzubekommen, auch wenn es inhaltlich „nicht hundertprozentig" passt. Was nicht passt, kann ja schließlich passend gemacht werden. Ein weiterer Nachteil dabei ist, dass sich hierdurch Forschungstrends (wie beispielsweise Kompetenzforschung) entwickeln, die andere (ebenso wichtige und interessante) Forschungsfelder in den Hintergrund drängen.

Eine Möglichkeit, diesem Problem zu entrinnen, ist sich zu entscheiden, bei dem Wettrennen um Forschungsgelder nicht mitzumachen, weniger Forschungsanträge zu schreiben und nur solche, die den eigenen Forschungsinteressen *hundertprozentig* entsprechen (mit denen man sich also nicht „verbiegen" muss). Die Konsequenz wäre: weniger Geld, weniger Forschungsprojekte, weniger Doktoranden, mehr Autonomie.

5. Wollust

Man umgibt sich gerne mit dem Schönen und dem Außergewöhnlichen. Schön ist beispielsweise, wenn bei einer Studie signifikante Unterschiede herauskommen – daran ergötzt man sich als Wissenschaftler! Nicht signifikante Unterschiede werden hingegen als „kein Ergebnis" interpretiert. Ich habe einmal erlebt, wie ein Doktorand nach seinem Vortrag auf einer Tagung gefragt wurde, wie er denn damit umgeht, dass er keine signifikanten Unterschiede ermittelt hat. Streng genommen muss man sich eigentlich über diese Frage wundern. Selbstverständlich ist „kein Unterschied" auch ein Ergebnis und sollte ebenso veröffentlicht werden. Nicht-Signifikanz wird allerdings häufig als Scheitern interpretiert. Aber selbst wenn man es für Scheitern hält – nichts spricht dagegen, auch dies zu publizieren. Man könnte sich sogar auf den Standpunkt stellen: *Gerade das Scheitern* ist interessant und steckt voller Potenzial für neuartige Lösungsansätze. Neben der Diskussion von gescheiterten Vorhaben in Gesprächen mit Kolleginnen und Kollegen können hier auch die Vorteile öffentlicher Wissenschaft zum Tragen kommen (vgl. Abschnitt 1): Die Schilderung von Scheitern in einem Weblog kann beispielsweise zu kreativen Anregungen „von außen" führen. Die Diskussion im Netz kann Impulse geben, auf die man von selbst nicht gekommen wäre, wenn man die Fragen mit sich selbst ausgehandelt hätte.

Die Diskussion gescheiterter Versuche im Netz ist allerdings nicht unproblematisch: Es besteht die Gefahr, dass Kritik im Netz nicht kritisch genug (wenn überhaupt) geäußert wird, weil sie öffentlich ist, und dass stattdessen übermäßig gelobt wird (z. B. wird gelegentlich die Tatsache gelobt, dass man Scheitern öffentlich diskutiert, ohne dabei inhaltlich konstruktive Vorschläge zu machen). In *social media* herrscht in vielen Bereichen eine Tendenz zur gegenseitigen Verstärkung, die man nicht selten auch als Lobhudelei empfinden kann (Spannagel, 2010). Es muss also mehr darauf hingewirkt werden, dass Diskussionen im Web im Sinne einer wissenschaftlichen Auseinandersetzung verstanden werden, beispielsweise durch die Übertragung traditioneller Methoden wie dem Korreferenten-Vortrag auf das Verfassen von Weblog-Beiträgen (vergleiche die Kommentare zu Spannagel, 2012a).

6. Zorn und Rachsucht

Die Leserin/der Leser möge ich zu dieser Todsünde selbst Beispiele überlegen und mit Kolleginnen und Kollegen diskutieren.

7. Schlusswort

Anja Lorenz hat in einem Kommentar zu meinem Weblog-Beitrag zu diesem Vortrag die Frage gestellt, ob die „Sündhaftigkeit“ denn dem einzelnen Wissenschaftler oder dem System zugeschrieben werden sollte. Schließlich fördere das System eine gewisse Arbeitsweise. Viele Publikationen, viele Projekte: all das bringt Reputation. Dieser Einwand ist berechtigt. Es handelt sich um eine gewisse Wissenschaftskultur, und Kulturen sind schwierig zu ändern. Dennoch ist man als Wissenschaftler diesem System nicht gänzlich ausgeliefert. Letztlich sind es gerade die Wissenschaftler, die als Teil des Systems die Kriterien zu einem nicht unerheblichen Teil mitbestimmen: Wissenschaftler sind Reviewer, sie sind Herausgeber, sie veranstalten Tagungen, sie sitzen in Berufungskommissionen. Das System wird von Wissenschaftlern so gestaltet, wie es ist.

Es ist (leider) leicht einzusehen, dass Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, die in einem gewissen Abhängigkeitsverhältnis innerhalb des Systems stehen (z.B. Doktorandinnen und Doktoranden) nicht ohne Weiteres ihre Kriterien und ihre Arbeitsweisen selbst bestimmen und ändern können. Aber die lebenszeitverbeamteten Professorinnen und Professoren beispielsweise würden dadurch nicht viel riskieren. Nehmen wir einmal an, dass ein solcher Professor ernstzunehmende Kritik an den gängigen Prinzipien zu äußern hätte. Wäre er nicht sogar in gewisser Weise verpflichtet, dies zu tun, sein Handeln entsprechend zu ändern und auch öffentlich dafür einzutreten? Die *eigentliche „Sünde“* ist vielleicht, hinter vorgehaltener Hand über das System zu klagen, vordergründig aber systemkonform zu handeln. Die *eigentliche „Sünde“* ist die Mutlosigkeit.

Es war nicht beabsichtigt, durch diesen Beitrag zu polarisieren. Das Ziel war nicht, die eine Arbeitsweise gegen die andere zu stellen. Der Beitrag soll aufgefasst werden als ein Plädoyer für eine größere Vielfalt an Methoden und für eine verstärkte Reflexion der Wissenschaft über sich selbst. Ich würde mir wünschen, dass in unserer täglichen Arbeit der Community-Gedanke wichtiger wird, dass sich mehr Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler in ihrer Arbeit öffnen, das reflektierte Unterrichtspraxis eine größere Rolle spielt, dass eine größere Vielfalt an Forschungsansätzen unvoreingenommen akzeptiert und gefördert wird, dass mehr Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler Mut zu Fehlern zeigen, und dass wir alle *noch mehr* Spaß am Forschen und Lehren haben.

8. Danksagungen

Den Vortrag zu diesem Beitrag habe ich im Sinne öffentlicher Wissenschaft in einem Wiki geplant und z. B. über Twitter zur Mitwirkung in einem gemeinsamen Brainstorming zu Todsünden in der Wissenschaft angeregt. Ich danke allen recht herzlich, die sich an diesem Brainstorming beteiligt haben. Die Wiki-Seite kann weiterhin aufgerufen werden unter http://tinyurl.com/gdm2012spannagel – und selbstverständlich können dort auch weiterhin neue Aspekte eingebracht werden! Darüber hinaus möchte ich – auch stellvertretend für viele andere Personen im Netz – in besonderer Weise Jean-Pol Martin, Oliver Tacke und Michael Gieding danken. Sie haben mich in den letzten Jahren im positiven Sinne in meinem Denken „verunsichert“, sodass ich immer wieder „gezwungen“ war, neu zu konzeptualisieren. Danken möchte ich auch Andrea Hoffkamp für ihre hilfreichen Anregungen in allen Planungsphasen des Beitrags.

Literatur

Fischer, M., Werner, J., Strübig, T. & Spannagel, C. (im Druck): YouTube-Vorlesungen: Der Mathematikprofessor zum Zurückspulen. In M. Zimmermann, C. Bescherer & C. Spannagel (Hrsg.): Mathematik lehren in der Hochschule. Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen. Im Druck.

Hinchey, P. (2008): Action Research Primer. New York: Peter Lang.

Mao, I. (2012): Sharism: A Mind Revolution. http://freesouls.cc/essays/07-isaac-mao-sharism.html. Stand: 22. März 2012.

Prediger, S. (2010). Über das Verhältnis von Theorien und wissenschaftlichen Praktiken – am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben. Journal für Mathematikdidaktik, 31(2), 167-195.

Schimpf, F. & Spannagel. C. (2011): Reducing the graphical user interface of a dynamic geometry system. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43(3), 389-397.

Spannagel, C. (2007): Benutzungsprozesse beim Lernen und Lehren mit Computern. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Spannagel C. (2010): Lobhudelei ist verboten! http://cspannagel.wordpress.com/2010/05/18/lobhudelei-ist-verboten/. Stand: 18. Mai 2010.

Spannagel, C. (2011a): Das aktive Plenum in Mathematikvorlesungen. In L. Berger, C. Spannagel & J. Grzega (Hrsg.): Lernen durch Lehren im Fokus. Berichte von LdL-Einsteigern und LdL-Experten. Berlin: epubli, 97-104.

Spannagel, C. (2011b): Open Science 2.0. http://cspannagel.wordpress.com/2011/10/08/open-science-2-0/. Stand: 8. Oktober 2011.

Spannagel, C. (2012a): #vile12. http://cspannagel.wordpress.com/2012/02/21/vile12/. Stand: 21.2.2012.

Spannagel, C. (2012b): 7 Todsünden eines Wissenschaftlers. http://cspannagel.wordpress.com/2012/02/29/7-todsunden-eines-wissenschaftlers/. Stand: 29.2.2012.

Teil 2: Förderpreis-Vortrag

Florian SCHACHT, Dortmund

Rekonstruktionen individueller Begriffsbildungsprozesse mit Festlegungen und Inferenzen

Eine wesentliche Eigenschaft menschlichen Denkens und Handelns ist dadurch gekennzeichnet, dass Gründe auf uns eine besondere normative Kraft ausüben: Wir binden unser Verhalten, unser Denken und Tun, an Vorerfahrungen und *begründen* unser Handeln damit und führen es so auf bestimmte Prämissen zurück. Andererseits ergeben sich aus unserem Handeln Konsequenzen, die für uns bindend sind und die gleichsam unsere weiteren Handlungen, unsere Konklusionen, begründen.

So ist für viele Schüler zum Beispiel zunächst nicht klar, ob 8·4 das Gleiche sein soll wie 4·8 – immerhin ist 8:4 nicht das Gleiche wie 4:8. Hat man die Kommutativität der Multiplikation aber einmal verstanden, so macht es durchaus Sinn, auch die Gleichheit von 7·5 und 5·7 anzunehmen, ja allgemein eben $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b aus $\mathbb{R}$.

Unsere Gründe, die Prämissen, die unserem Denken und Handeln zugrunde liegen, sowie die Konklusionen, die sich daraus ergeben, üben daher eine besondere normative Kraft auf uns aus: wir binden uns an sie. Gleichzeitig sind die Prämissen und Konklusionen unseres Denkens und Tuns keinesfalls streng logisch in einem mathematischen Sinne strukturiert. Menschliches Denken folgt häufig Umwegen und Irrwegen. Und dennoch: Wir *begründen* unser Denken und Tun auf Prämissen und Konklusionen, die innerhalb unseres individuellen Begründungszusammenhangs stehen und damit in der Regel einer individuellen Logik folgen.

In diesem Beitrag wird ein theoretischer Rahmen beschrieben, der die Rekonstruktion von individuellen Begriffsbildungsprozessen auf die individuellen *Begründung*szusammenhänge von Schülerinnen und Schüler zurückführt, die ihrem mathematischen Denken und Handeln zugrunde liegen. Dazu wird einerseits die Theorie des Inferentialismus des derzeit sehr intensiv diskutierten Philosophen Robert B. Brandom (2000) genutzt. *Gründe und Konklusionen*, Brandom spricht genauer von Festlegungen (s.u.), sind die wesentlichen strukturierenden Elemente unseres Denkens und Tuns, und die Idee des Inferentialismus nimmt letztlich ihren Ausgangspunkt bei ebendieser Idee: „Im Mittelpunkt der diskursiven Praxis steht das Spiel des Gebens und Forderns von Gründen." (Brandom 2000, S. 242) Angereichert wird diese philosophische Theorie mit der mathematikdidaktischen Theorie der Conceptual Fields nach Gérard Vergnaud (1996). Auf diese Weise entsteht ein multiperspektivischer (und sozial-psychologischer) Theorierahmen, der sowohl zur Analyse individueller Begriffsbildungsprozesse genutzt werden kann (auf der Ebene der Rekonstruktion von Lernprozessen) als auch zur sorgfältigen Entwicklung, Strukturierung und Evaluation von Lernkontexten (auf der Ebene der Entwicklung von Unterrichtsdesigns). Das Potential des Theorierahmens wird deutlich vor dem Hintergrund einer empirischen Studie (vgl. Schacht 2012), die im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen, vgl. Leuders et al. 2011 oder Prediger et al. 2011) durchgeführt wurde. Die unterrichtlichen Gegenstände der Studie befassen sich mit der Propädeutik der Variable und stellen ihrerseits einen Ausschnitt aus dem (ebenfalls im Kontext des Projektes KOSIMA entwickelten) Schulbuch *mathewerkstatt* (Hußmann et al. 2012 und Prediger et al. 2012) dar.

Im Folgenden werden wesentliche Grundzüge des Theorierahmens entlang eines empirischen Beispiels entfächert und sein Potential somit verdeutlicht.

1. Festlegungen und Inferenzen als analytische Einheiten

Der Festlegungsbegriff geht wesentlich auf die inferentialistische Theorie nach Brandom (2000) zurück. Brandom lehnt seinen Begriff der Festlegung stark an das *Urteil* an, das Kant als die kleinste Einheit der Erkenntnis betrachtet. Festlegungen sind die zentralen analytischen Einheiten eines in Schacht (2012, siehe dazu auch Hußmann / Schacht 2009) entwickelten Theorierahmens, mit Hilfe dessen Begriffsbildungsprozesse rekonstruiert werden können. Vor dem Hintergrund der Idee, dass die diskursive Praxis implizit normativ ist, weil die beteiligten Akteure die Gründe (und zwar sowohl die eigenen als auch die der Diskurspartner) hinsichtlich ihrer *Richtigkeit* hinterfragen, spricht Brandom von Festlegungen: „Der nötige normative Grundbegriff ist der der *Festlegung*. Festgelegt zu sein ist ein normativer Status.“ (Brandom 2000, S. 242f) Für die Mathematikdidaktik wird dieses philosophische Konzept dahingehend erweitert, als es für die Rekonstruktion individueller Festlegungen (z.B. von Schülerinnen und Schülern) und damit hinsichtlich einer eher sozial-psychologischen Perspektive konkretisiert wird: „Festlegungen sind (rekonstruierte) Behauptungen in propositionaler Form, die wir für wahr halten. Damit liegen sie unseren Äußerungen und Handlungen zugrunde. Festlegungen können wir explizit machen und sie stellen eine Form praktischen *Tuns* dar. “ (Schacht 2012, S. 17) Eine wesentliche Eigenschaft von Festlegungen ist daher, dass sie unserem Handeln, unserem Denken und Tun, zugrunde liegen – sowohl implizit als auch explizit. Die Rekonstruktion von Lernprozessen mit Hilfe von Festlegungen als analytische Einheit wird demnach im Wesentlichen über die Rekonstruktion von individuellen Festlegungen erfolgen, die die Schülerinnen und Schüler beim Mathematiktreiben eingehen.

Karin, eine Schülerin in einer sechsten Klassen an einem Gymnasium, wird in einer Interviewsituation das Punktmuster in Abbildung 1 vorgelegt. Auf die Frage, wie viele Punkte die 10. Stelle der Punktmusterfolge zu sehen seien, umkreist sie zunächst 6 Punkte im dritten Folgenglied (vgl. Abb. 1). Karin sagt: *Hier kommen ja noch 7 mal von diesen 6-Dingern dazu. 7·6 sind 42. 42 und dann plus die!* Dabei zeigt sie auf alle Punkte der dritten Stelle.

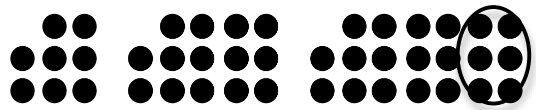
	Die Regel des dynamischen Punktmusters kann beschrieben werden durch 2+6x.
Stelle 1 Stelle 2 Stelle 3	

Abbildung 1: Rekonstruktion der individuellen Festlegung (1) von Karin

Dieser Ausschnitt erlaubt einen kleinen Einblick in Karins Lernprozess. Sie identifiziert zunächst das Bildungsgesetz der Punktmusterfolge: Es werden bei jedem Folgenglied 6 Punkte hinzugefügt. Karin umkreist 6 Punkte und benennt sie schließlich mit dem Begriff „*6-Ding*“. Als Karin nach der Anzahl der Punkte der 10. Stelle gefragt wird, nutzt sie dieses Bildungsgesetz und stellt heraus, dass noch sieben weitere „*von diesen 6-Dingern*“ hinzugefügt werden. Sie berechnet das Produkt 7·6=42 und beschreibt, wie man die Gesamtzahl der Punkte der 10. Stelle dann berechnet: „*42 und dann plus die!*“ Karin macht in diesem Ausschnitt einige Gründe für ihr mathematisches Tun explizit. Sie beschreibt zunächst einige ihrer Prämissen, indem sie das Bildungsgesetz der Zahlenfolge benennt. Die arithmetische Struktur des obigen dynamischen Punktmusters ergibt sich aus der Folge 2+1·6, 2+2·6, 2+3·6,... Aus Karins Äußerungen lässt sich die folgende Festlegung (1) rekonstruieren: *Die Regel des dynamischen Punktmusters kann beschrieben werden durch 2+6·x.* Die geometrischen Muster (6-Ding) dienen ihr dabei zur Beschreibung der allgemeinen arithmetischen Struktur.

Zwar verfügt Karin zu dem Zeitpunkt des Interviews noch nicht über einen expliziten Variablenbegriff, gleichwohl lässt ihre Beschreibung und ihre Argumentation darauf schließen, dass sie das Bildungsgesetz der Punktmusterfolge erkannt hat und die allgemeine Termstruktur (zumindest implizit) nutzt, um die Anzahl der Punkte im 10. Folgeglied in expliziter Form direkt anzugeben (im Unterschied zu einer rekursiven Bestimmung der Anzahl des 10. Folgegliedes, indem sie z.B. durch sukzessives Addieren von 6 Punkten die Anzahl bestimmt). Insofern lässt sich ihre Prämisse als wesentliche Stütze ihres individuellen Begründungszusammenhangs mit Hilfe der obigen Festlegung (2) beschreiben: *Die Regel des Wachstums kann zur Anzahlbestimmung genutzt werden*.

Anhand der obigen Situation wird auch deutlich, dass Karin Festlegungen eingeht, die sie nicht explizit benennt, z.B. die Festlegung (2). Diese Festlegung benennt Karin keinesfalls explizit, jedoch liegt sie gleichsam implizit ihrem Handeln zugrunde.

Karin macht in der obigen Szene noch eine weitere Festlegung explizit, die deutlich macht, inwiefern rekonstruierte Festlegungen inferentiell miteinander verknüpft sind, die Karin für wahr hält: Weil der Folge das von ihr erkannte Bildungsgesetz zugrunde liegt, ergibt sich die Anzahl der Punkte des 10. Folgegliedes aus der Anzahl der Punkte im dritten Folgeglied und 42(=7·6). Karin benennt hier ihre Konklusion und zeigt auf, welche Folgerungen sich aus ihren Prämissen ergeben. Sie *begründet* die Konsequenzen mit der folgenden Festlegung (3): *Die Anzahl der Punkte an der 10. Stelle ergibt sich aus der Summe der Anzahl der Punkte an der 3. Stelle und 7 mal dem Zuwachs.*

Sichtbar wird hier, inwiefern Begriffsgebrauch und das Eingehen von Festlegungen miteinander zusammenhängen. Die Bedeutung von Begriffen ist ohne die Rekonstruktion der jeweiligen Festlegungen, in die sie eingebunden sind, nicht verstehbar. Welche Bedeutung der Begriff des *6-Ding* für Karin beispielsweise hat, dass er in fundamentaler Weise mit dem Konzept der Regel und des geometrischen Musters zusammen hängt, die der Punktmusterfolge zugrunde liegt, lässt sich ohne die Festlegungen, in die dieser Begriff eingebunden ist, nicht verstehen.

Eine weitere Eigenschaft von Festlegungen als analytische Einheit wird hier deutlich: sie sind inferentiell miteinander verbunden. Die Festlegungen (1) und (2) stehen nicht in isolierter Weise nebeneinander. Vielmehr wurde oben bereits hervorgehoben, dass die Festlegung (1) eine Prämisse darstellt, aus der Karin die Festlegung (2) ableitet. Insofern sind Festlegungen immer gleichsam eingebunden in ein ganzes Festlegungsnetz. Die inferentielle Relation allerdings ist hier keinesfalls entlang einer formallogischen (inferentiellen) Verknüpfung zu verstehen. Vielmehr werden hier die individuellen Begründungszusammenhänge betrachtet und damit diejenigen Festlegungen rekonstruiert, die (für wahr gehaltene) Gründe der Schülerinnen und Schüler für das mathematische Denken und Handeln darstellen.

Über die Rekonstruktion solcher individueller Festlegungen sowie deren inferentielle Relation werden dann individuelle Begriffsbildungsprozesse rekonstruiert (vgl. Schacht 2012). Weil die Bedeutung, die wir in unserem (individuellen) mathematischen Denken und Tun den jeweiligen Begriffen zuweisen, nur verständlich wird über die Festlegungen, in denen sie verwendet werden, und die Festlegungen gleichsam inferentiell miteinander verbunden sind, wird letzthin das Begreifen eines Begriffs auf das Beherrschen seines inferentiellen Gebrauchs zurückgeführt: „Das Begreifen des *Begriffs* (…) besteht im Beherrschen seines *inferentiellen* Gebrauchs: im Wissen (in dem praktischen Sinne, daß man unterscheiden kann, und das ist ein Wissen-*wie*), worauf man sich sonst noch festlegen würde, wenn man den Begriff anwendet, was einen dazu berechtigen würde und wodurch eine solche Berechtigung ausgeschlossen wäre“ (Brandom 2001, S. 23).

Es ist eine der wesentlichen erkenntnistheoretischen Merkmale dieses Ansatzes, dass der Begriff der Inferenz bei der Rekonstruktion von Lernprozessen in den Mittelpunkt gerückt wird und der Begriff der Repräsentation in den Hintergrund tritt. Das Verstehen eines Begriffs wird hier nicht über das zunehmende Verfügen von - wie auch immer gearteten – Vorstellungen oder mentalen Repräsentationen modelliert, sondern als eine Entwicklung von Festlegungen. Auf diese Weise wird ein epistemologischer Theorierahmen der Philosophie für eine sozial-psychologische Perspektive in der Mathematikdidaktik nutzbar gemacht, die es erlaubt, individuelle Begriffsbildungsprozesse zu rekonstruieren. „Neben der Beschreibung der Lernendenperspektive dient diese Analyse andererseits der Untersuchung und Entwicklung des ‚begrifflichen Potentials' von Lernumgebungen“ (Hußmann / Schacht 2009, S. 339).

2. Die mathematikdidaktische Konzeptualisierung

Im ersten Abschnitt wurde dargestellt, inwiefern Begriffsbildungsprozesse mit Hilfe von individuellen Festlegungen rekonstruiert werden können. Das gewählte Eingangsbeispiel zeigt, inwiefern Karin die Anzahl der Punkte des 10. Folgegliedes in expliziter (statt in rekursiver) Weise bestimmt und die Situation dabei ganz wesentlich mit Hilfe geometrischer Muster strukturiert. Die Art des (individuellen) Zugriffs, den Karin wählt, um in dieser Situation mathematisch (aus ihrer Sicht) angemessen zu handeln, ist für die Einordnung der Szene von großer Bedeutung. Eine passende Konzeptionalisierung bietet G. Vergnaud mit den *concepts-in-action*: „Concepts-in-action sind diejenigen individuellen Begriffe, die in gewissen Situationen handlungsleitend sind und die uns helfen, adäquate Informationen auszuwählen.“ (Schacht 2012, S. 78, vgl. auch Vergnaud 1996) Mit Hilfe der Concepts-in-action kann demnach im Einzelfall rekonstruiert werden, welche Kategorien die Schülerinnen und Schüler wählen, um in einer Situation mathematisch zu handeln. Hier wird ein weiterer Aspekt angedeutet, der von wesentlicher Bedeutung bei der Betrachtung von Begriffsbildungsprozessen ist: Mathematisches Denken hängt nicht nur wesentlich von den individuellen Festlegungen sowie den Concepts-in-action ab, sondern auch ganz wesentlich von der (mathematischen bzw. unterrichtlichen) Situation, in der sich die Schülerinnen und Schüler bewegen. Karin beispielsweise nutzt hier den Begriff des *6-Ding*, dessen spezifische Bedeutung sich aus den Festlegungen ergibt, die Karin hier aktiviert (vgl. oben). Vergleicht man Karins Äußerungen über verschiedene Situationen hinweg, so fällt auf, dass sie ebendiesen Begriff in Situationen, wo sie allein die mathematischen Strukturen von *arithmetischen* Folgen betrachtet, nicht gebraucht. Der Begriff des 6-Ding ist demnach maßgeblich an die (hier ganz konkrete) Situation der Betrachtung von Punktmusterfolgen gekoppelt. Insofern hängt unser Begriffsgebrauch ganz wesentlich von der Situation ab, in der wir uns bewegen und damit von den mathematischen Gegenständen, mit denen wir handeln: „Knowledge can be traced to the individual's way of acting with objects and dealing with situations and not only to his or her declarations. Action is the main factor in the knowing process." (Vergnaud 1990, S. 18)

Vergnauds Theorie der Conceptual Fields liefert zwei wichtige Bausteine, die die Rekonstruktion von inviduellen Begriffsbildungsprozessen mit Hilfe von Festlegungen anreichern: zentrale (sozialpsychologische) Analyseeinheiten und die forschungstheoretische Anbindung an mathematikdidaktische Erklärungsrahmen für individuelle Lernprozesse. Zum einen kann dem individuellen kategorialen Zugriff auf bestimmte mathematische Situationen dadurch Rechnung getragen werden, dass concepts-in-action rekonstruiert werden, auf die die eingegangenen Festlegungen als Prämissen bzw. Konklusionen verweisen. In Karins Beispiel sind die Concepts-in-action der Regel- und der Musterbegriff, die handlungsleitend sind. Karin setzt (beispielsweise) nicht das (geometrische) Muster bis zum 10. Folgenglied fort und zählt dann die Punkte ab. Sie nutzt hier arithmetische Zusammenhänge, um die Anzahl zu bestimmen. Gleichwohl liefert das geometrische Muster den Anlass für den Gebrauch des Begriffs *6-Ding*. Insofern aktiviert Karin hier den Blick auf Muster, um die Situation dann im Sinne des arithmetischen Regelbegriffs für sich zu bewältigen.

Mit dem vorliegenden theoretischen Zugriff kann demnach auch der Bedeutung der Situation bzw. der Lernumgebung Rechnung getragen werden. Vor diesem Hintergrund entsteht ein analytisches Tripel, bei dem jedoch die Ebene der Festlegungen die bedeutsamste ist: *Rekonstruiert werden individuellen <u>Begriffen</u> zugrunde liegende individuelle **<u>Festlegungen</u>** in spezifischen individuellen <u>Situationen</u>.*

Reiht man nun solche Festlegungsdreiecke für verschiedene Situationen im Verlauf eines Lernprozesses aneinander, so sind qualitative Aussagen über die Entwicklung der individuellen Festlegungen in Abhängigkeit von der Situation sowie der concepts-in-action möglich. Sichtbar werden zum Beispiel die Entstehung von neuen Festlegungen sowie die Auswirkungen des Eingehens mathematisch nicht tragfähiger Festlegungen und die dadurch entstehenden Hürden. Gleichzeitig lässt sich das zunehmend sich entwickelnde inferentielle Gefüge zwischen den einzelnen Festlegungen herausarbeiten.

3. Empirische Ergebnisse

Vorgestellt werden hier einige Besonderheiten der Ergebnisse der oben beschriebenen empirischen Erhebung (vgl. Schacht 2012), die im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA (vgl. Leuders et al. 2011 oder Prediger et al. 2011) durchgeführt wurde.

Zunächst ist hervorzuheben, dass sich Begriffsbildungsprozesse mit Hilfe eines inferentialistischen Theorierahmens rekonstruieren lassen. Ein wesentliches Spezifikum des vorliegenden Theorierahmens ist, dass sowohl geradlinig verlaufende Begriffsbildungsprozesse von Schülern mit einem hohen Leistungspotential dargestellt werden können als auch solche, die weniger geradlinig verlaufen.

Der inferentielle Zugriff ermöglicht es, neben der analytischen Ebene noch eine weitere Ebene hinzuzuziehen. So entsprechen den individuellen Festlegungen auf der Ebene der Rekonstruktion von Lernprozessen sog. *konventionale Festlegungen* auf der Ebene der Planung oder Analyse von Fachinhalten bzw. Unterrichtsdesigns (vgl. dazu Schacht 2012). Die Analyseeinheiten zur Rekonstruktion individueller Begriffsbildungsprozesse sind auf die Analyse oder auf die planvoll angelegte Entwicklung von Unterrichtsdesigns übertragbar. Dadurch ist es prinzipiell möglich, die rekonstruierten Begriffsbildungsprozesse von Schülerinnen und Schülern mit den im Lernkontext angelegten oder intendierten (konventionalen) Festlegungen zu vergleichen. Auf diese Weise können qualitative Aussagen über die Wirksamkeit von Lernkontexten getroffen werden.

Für den konkreten vorliegenden Fall eines Schulbuchkapitels (Hußmann et al. 2012) aus der *mathewerkstatt* (Prediger et al. 2012) zur Einführung des Variablenbegriffs über die intensive Auseinandersetzung mit Punktmuster- und Zahlenfolgen konnte in diesem Zusammenhang die Wirksamkeit auf diese Weise nachgewiesen werden (vgl. Schacht 2012). Dabei lassen sich besondere Festlegungen, sog. *elementare Festlegungen*, identifizieren: Als *elementare Festlegungen* werden diejenigen konventionalen Festlegungen bezeichnet, die für einen Lernkontext ein reduziertes Festlegungsnetz aufspannen. Spezifisch für solche elementaren Festlegungen ist, dass sie (aus konventionaler Perspektive) die zentralen Lernziele abstecken. Aus individueller Perspektive lässt sich daher festhalten, dass sich Hürden von Schülerinnen und Schülern im Verlaufe von Lernprozessen insbesondere dann ergeben, wenn sie diese elementaren Festlegungen nicht eingehen. Im Kontext des oben skizzierten Beispiels wäre eine elementare Festlegung, die dem Lernkontext zugrunde liegt, z.B.: *Viele Bildmuster und Zahlenfolgen weisen Strukturen und Regelmäßigkeiten auf*. Karin äußert diese Festlegung nicht explizit, sie geht sie aber gleichsam implizit ein. Das wird dadurch deutlich, dass sie die geometrische Struktur und die arithmetische Regelmäßigkeit der Punktmusterfolge nutzt, um die Anzahl der Folgeglieder im 10. Folgenglied zu bestimmen.

Literatur

Brandom, Robert B. (2000): Expressive Vernunft. Begründung, Repräsentation und diskursive Festlegung. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Brandom, Robert (2001): Begründen und Begreifen. Eine Einführung in den Inferentialismus. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Hußmann, Stephan / Greefrath, Gilbert / Mühlenfeld, Udo / Witzmann, Conny (2012): Wie geht es weiter? Zahlen- und Bildmuster erforschen. In Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Hußmann, Stephan / Schacht, Florian (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM, S. 339-342.

Leuders, Timo / Hußmann, Stephan / Barzel, Bärbel / Prediger, Susanne (2011): Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. In: PM Praxis der Mathematik.

Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.) (2012): mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Leuders, Timo / Hußmann, Stephan (2011): Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. In: Mathematik lehren 164, S. 2-10.

Schacht, Florian (2012): Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Vergnaud, Gérard (1990): Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In: Nesher, Pearla / Kilpatrick, Jeremy (Hrsg.): Mathematics and Cognition. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cambridge, New York: Cambridge University Press, S. 14-30.

Vergnaud, Gérard (1996): The theory of conceptual fields. In Steffe, L.P. / Nesher, P. / Cobb, P. / Goldin, G.A. / Greer, B. (Hrsg.): Theories of Mathematical Learning. Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum, S. 219-239.

Teil 3: Einzelbeiträge

Christoph ABLEITINGER, Essen

Lernen an Demonstrationsaufgaben in der Studieneingangsphase

Das Projekt „Mathematik besser verstehen“ (gefördert durch die Deutsche Telekom Stiftung) setzt neben zahlreichen anderen Aktivitäten auf die Verwendung sogenannter Demonstrationsaufgaben im Lehrbetrieb. Dabei werden den Studierenden prototypische Aufgabenlösungen aus Analysis und Linearer Algebra vorgestellt, schon bevor sie selbst an ähnlichen Aufgabentypen arbeiten. Wir folgen dabei dem Konzept des „Cognitive Apprenticeship“.

1. Musterlösungen – hochgelobt und hochumstritten

Üblicherweise finden Musterlösungen zu Übungsaufgaben auf unterschiedliche Art und Weise Verwendung im Lehrbetrieb von Universitäten. An unserem Standort beispielsweise werden Studierenden im Anschluss an die Hausaufgaben-Abgabe üblicherweise prägnante Lösungsskizzen zum Download angeboten. Mancherorts werden Musterlösungen auch durch die Übungsgruppenleiter an der Tafel vorgestellt. Es gibt natürlich auch Fachbereiche, die komplett auf den Einsatz von Musterlösungen verzichten.

Befürworter berufen sich meist darauf, dass Musterlösungen eine verlässliche Basis für die Studierenden böten, auf die sie sich beim Lernen für die Klausuren und Prüfungen am Semesterende beziehen und verlassen könnten. Zudem wohne Musterlösungen eine wichtige Kontrollfunktion für die eigenen Hausaufgabenbearbeitungen inne. Schließlich wird Musterlösungen vielerorts auch eine wichtige Rolle beim Aufbau geeigneter Grundvorstellungen zu Begriffen aus den Vorlesungen zugeschrieben. Gegner von Musterlösungen hingegen argumentieren häufig damit, dass Studierende sich durch den bloßen Besitz von Musterlösungen zu sehr in Sicherheit wiegen würden. Sie würden die Lösungen gedanklich abheften, anstatt sich intensiv mit ihnen auseinanderzusetzen. Es sei dann keine eigenständige kognitive Anstrengung mehr nötig und keine Motivation, die Aufgaben selbst zu bearbeiten. Schließlich bekomme man die Lösungen ja ohnehin ein paar Tage später fein säuberlich präsentiert. Zu guter letzt sei auch erwähnt, dass man als Dozent durch das Ausgeben von Musterlösungen die entsprechenden Aufgaben für spätere Studierendengenerationen nicht mehr ohne weiteres verwenden kann.

Wir wollen diese Frage hier aber nicht weiter erörtern, sondern die spezielle Form der Verwendung von Aufgabenlösungen im Projekt „Mathematik besser verstehen“ darstellen.

2. Demonstrationsaufgaben

Die Initiative „Demonstrationsaufgaben“ wurde im Projekt „Mathematik besser verstehen“ im Studienjahr 2010/11 etabliert. Uns wurden von den Dozenten der Anfängervorlesungen Analysis und Lineare Algebra an insgesamt acht Terminen pro Semester 30 Minuten der sogenannten „Globalübung“ zur Verfügung gestellt. In dieser Zeit konnten wir prototypische Aufgaben und deren Lösungen zu wichtigen Begriffen der Veranstaltungen vor dem Studierendenauditorium vorstellen, noch bevor die Studierenden selbst an ähnlichen Aufgaben arbeiten mussten. Wir wollten damit dem Problem Rechnung tragen, dass Studierende sich bei Aufgaben eines neuen Themengebietes meist nur schwer zurechtfinden. Häufig führt das dazu, dass sich im Laufe eines Semesters immer weniger Studierende tatsächlich mit ihren Hausaufgaben beschäftigen. Viele sind so frustriert, dass sie lediglich die Lösungen von besseren Studierenden abschreiben, ohne sich selbst inhaltlich damit beschäftigt zu haben.

Demonstrationsaufgaben sollen nicht bloß fertige Aufgabenlösungen sein, sondern sie sollen vielmehr den Prozess darstellen, der bei der Lösung einer Aufgabe im Kopf der Aufgabenlösers abläuft. Dazu gehört es beispielsweise darzulegen, worin das eigentliche Problem der Aufgabe liegt, welche unterschiedlichen Lösungswege man verfolgen könnte, welche Funktion einzelne Bearbeitungsschritte für den Lösungsprozess haben (siehe dazu Ableitinger 2012) und welche heuristischen Strategien zur Lösung beitragen können. Zusätzlich zur Präsentation der Aufgabenlösung an der Tafel, erhalten die Studierenden im Anschluss auch eine schriftliche Version der Demonstrationsaufgabe, um sich auch zu Hause noch einmal damit auseinandersetzen zu können.

Es ist an dieser Stelle zu betonen, dass die von uns präsentierten Demonstrationsaufgaben nur exemplarische Funktion haben (können). Selbstverständlich sichern das Mitverfolgen und das Durchdringen der vorgestellten Aufgabenlösung nicht, dass die Studierenden dann auch alle ihre Hausaufgaben erfolgreich bearbeiten können. Dazu sind die gestellten Hausaufgaben meist viel zu unterschiedlich und in ihren Anforderungen zu komplex. Allerdings haben die Demonstrationsaufgaben sehr wohl den Anspruch, die Studierenden zumindest bei einer der im Anschluss zu bearbeitenden Hausaufgaben zu unterstützen. Dafür sorgen wir bei der Auswahl der Demonstrations- und Hausaufgaben.

Unter anderem zu folgenden Themen aus Analysis wurden im Studienjahr 2010/11 Demonstrationsaufgaben vorgestellt: Supremum/Infimum, Reihen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrationsmethoden.

3. Cognitive Apprenticeship

Demonstrationsaufgaben sind keine Erfindung unseres Projektes. Die Idee geht vielmehr auf ein seit vielen Jahren bekanntes Konzept zurück. In den späten 1980er Jahren haben drei amerikanische Bildungswissenschaftler das sogenannte „Cognitive Apprenticeship“ (Kognitive Anlehre) vorgestellt, bei dem das Lernen in Handwerksberufen auf das Erlernen kognitiver Fähigkeiten übertragen wird (Collins et al. 1989). Der Lernprozess läuft dabei in sechs Phasen ab:

Modelling: Soll ein Schüler (Lehrling, Novize) eine Fertigkeit neu erlernen, so zeigt der Lehrer (Meister, Experte) dies zunächst einmal selbst vor. Dabei soll er möglichst viel implizites Wissen explizieren, seine Gedankengänge versprachlichen und die den Prozess steuernden Begleitüberlegungen offenlegen.

Coaching: Im Anschluss daran soll sich der Schüler selbst an der neuen Aufgabe versuchen. Er wird dabei zunächst noch vom Experten begleitet und unterstützt.

Scaffolding: Kommt der Lernende bei der Bearbeitung der Aufgabe nicht zurecht, können Teile der Problembewältigung vom Experten übernommen werden. Erst nach und nach soll die Unterstützung zurückgenommen und der Schüler sprichwörtlich auf eigene Beine gestellt werden.

Articulation: In einer nächsten Phase soll der Schüler dazu angehalten werden, über die neu erlernte Fähigkeit zu sprechen.

Reflection: Erst wenn der Ablauf der Problemlösung auf einer handwerklichen Ebene sicher beherrscht wird, soll der Schüler gemeinsam mit dem Lehrer darüber reflektieren, warum die neu erlernte Methode so funktioniert, wie sie funktioniert, wo ihre Grenzen liegen und inwieweit sie sich auf ähnliche Probleme übertragen ließe.

Exploration: Schließlich soll die neu erworbene Fähigkeit auch in anderen Kontexten angewendet und die Aufgabenstellung variiert werden.

Was bedeutet das für die Umsetzung in unserem Lehrbetrieb? Die Präsentation von Demonstrationsaufgaben (Modelling) leitet in der Konzeption des „Cognitive Apprenticeship“ den Lernprozess ein. In den Übungsgruppen, bei der Bearbeitung der Hausaufgaben und der anschließenden Korrektur müssen dann die weiteren Phasen abgedeckt werden. Wir beschränken uns aus Platzgründen in diesem Artikel allerdings auf die Darstellung der Demonstrationsaufgaben.

4. Mögliche Wirkungen

Was versprechen wir uns vom Einsatz von Demonstrationsaufgaben in der universitären Lehre?

Studierenden soll es ermöglicht werden, ihren für das Aufgabenlösen so dringend erforderlichen Erfahrungsschatz anzureichern. Neben dem eigenständigen Problemlösen gehören dazu auch das Beobachten und das Nachahmen von Experten eines Fachgebietes.

Die Demonstrationsaufgaben sollen Vorbildwirkung in vielerlei Hinsicht entfalten. Zum einen betrifft dies fachliche Aspekte, also z. B. das Know-How, wie man üblicherweise einen Stetigkeitsbeweis mit Hilfe der Epsilon-Delta-Definition in Angriff nimmt. Zum anderen sollen sie auch in habitueller Hinsicht Vorbildfunktion haben. Durch das Beobachten des Experten, durch das Eintauchen in seine Gedankenwelt, durch das Mitverfolgen des Abwägens von Handlungsoptionen wird den Studierenden ein Einblick in authentisches mathematisches Arbeiten gewährt. Nicht das Fach Mathematik selbst konstituiert die Gewohnheiten und Haltungen von Mathematikern, sondern die Art, wie Mathematik betrieben wird und wie diese Handlungsweisen und Dispositionen an die nachfolgenden „Generationen" weitergegeben werden.

Ein weiterer Vorteil von Demonstrationsaufgaben im Gegensatz zu herkömmlichen Musterlösungen ist, dass bei Demonstrationsaufgaben viel eher gesichert ist, dass Lernende sie tatsächlich studieren und zu durchdringen versuchen. Weil diese Präsentationen am Beginn des Lernprozesses stehen und sich durch die Beschäftigung mit den Demonstrationsaufgaben Vorteile bei einzelnen Hausaufgaben ergeben, sind Studierende viel eher dazu bereit, Zeit in das Verstehen der Demonstrationsaufgaben zu investieren.

In unserer qualitativen Begleitforschung interessieren wir uns nun dafür, in welcher Art und Weise die Demonstrationsaufgaben die von uns intendierten Wirkungen tatsächlich entfalten können. Entsprechende Ergebnisse werden andernorts publiziert.

Literatur

Ableitinger, C. (2012): Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 33(1), 87-111.

Collins, A., Brown, J.S., Newman, S.E. (1989): Cognitive Apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L.B. Resnick (Hrsg.): Knowing, learning and instruction. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 453-494.

Ergi ACAR BAYRAKTAR, Frankfurt

Erste Einsichten in die Struktur „interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung“ im familialen Kontext

1. Theoretischer und analytischer Rahmen

Analog Brunners Konzept des Unterstützungssystems für den Spracherwerb („Language Acquisition Support System“ - LASS) wird analog für das Mathematiklernen ein Unterstützungssystem für das Mathematiklernen „Mathematics Learning Support System“ - MLSS) angenommen (Bruner 1990). Derartige Unterstützungssysteme treten sowohl im familialen Kontext als auch in instituionellen Kontexten, wie dem Kindergarten und der Grundschule auf. Auf der interaktionalen Ebene begleiten Familien ihre Kinder in ihren mathematischen Lernprozessen durch ein ‚paralleles Unterstützungssystem’ neben Kindergarten und (Grund-)Schule. MLSS wird also als ein interaktionales System verstanden, das gegebenenfalls in der Interaktion (z. B. zwischen den Eltern und ihren Kindern) in der konkreten Situation emergiert. Das hier formulierte Forschungsinteresse an der interaktiven Genese von MLSS in familialen Spielsituationen ist eingebunden in das umfassendere Forschungsprogramm zur Untersuchung sogenannter „interaktionaler Nischen zur mathematischen Denkentwicklung“ (NMD oder auch kurz „Entwicklungsnische“ genannt). Eine „Entwicklungsnische“ besteht aus den kulturspezifischen, von einer Gruppe oder Gesellschaft bereitgestellten Lernangeboten (Allokationsaspekt) und aus den aus diesen Angeboten in einem realen Interaktionsprozess emergierenden Situationen (Situationsaspekt) (Krummheuer 2011, S.65). Diesen Begriff entwickelt und begründet Krummheuer (2011) empirisch auf der Basis einer komparativen Analyse von Mathematik-Episoden aus dem Kindergarten und Grundschul- Mathematikunterricht. In erStMaL-FaSt findet eine empirische Ausweitung auf familiale Situationen statt. In Bezug auf de interessierenden familialen Kontext hat die NMD die folgende Ausprägung:

NMD(Fam.)	Inhaltskomponente	Kooperations-komponente	Vermittlungskomponente
Allokations-aspekt	mathematische Inhaltsbereiche „Geometrie“ und „Messen und Größen“	Spiele als familiale Arrangements für Kooperationen	Entwicklungs- und mathematikdidaktische Theorien und darauf basierende Handlungsvorschläge für Eltern
Situationsas-pekt	interaktive Aushandlung der Spielregeln und der Inhalte	Partizipations-spielräume	Alltagstheorien zum (Mathematik)-Lernen; MLSS

Abb. 1: Struktur der Entwicklungsnische im familialen Kontext

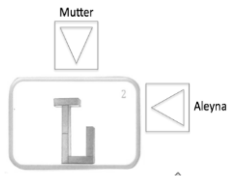
Es folgen zunächst Ausführungen zu der Tabelle.

1. *Inhalt:* Konkret auf die erStMaL-FaSt bezogen, werden Familien mit Spielen konfrontiert, in denen die mathematischen Inhaltsbereiche „Geometrie“ und „Messen und Größen“ angesprochen werden. Auf der situationellen Ebene werden hierdurch Aushandlungsprozesse ausgelöst, die freilich in ihrer Eigendynamik sich weder an den Inhaltsbereich noch an die Spiel-Regeln halten müssen.

2. *Kooperation:* In erStMaL-FaSt sind dies familiale Spielsituationen, in denen Kind-Erwachsenen Interaktionen und/oder Geschwister-Interaktionen initiiert werden. Diese Sozialformen müssen in jeder Interaktion interaktiv hervorgebracht werden und je nach konkreter Emergenz werden hierdurch spezifische Partizipationsspielräume (Brandt 2004) für die jeweiligen Kinder erzeugt bzw. scheitert dieser Prozess.

3. *Vermittlung:* Hierbei werden darauf abgestimmte methodische Vorschläge zur Ermöglichung und Unterstützung der kindlichen Entwicklung ausgearbeitet. In einer konkreten Interaktion werden jedoch eher alltagspädagogische Vorstellungen bei den Erwachsenen Betreuern (Erzieherinnen, Lehrerinnen) und auch bei den lernenden Kindern aktiv. Auf dieser situationellen Ebene wird der Begriff des MLSS angesiedelt.

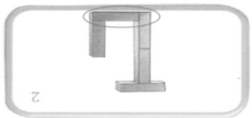
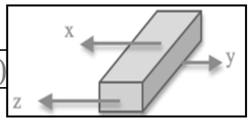
In der noch vorzustellenden Analyse eine Spielsituation in eine bilinguale türkisch-deutsche Familie zu Spielen aus dem Inhaltsbereich der Raumgeometrie streben wir eine theoretische Reflexion des Begriffs des MLSS an, bei der wir die konzeptionelle Einbindung dieses Begriffs in eine familiale NMD berücksichtigen.



2. Fallbeispiel

Im Fallbeispiel beschäftigen sich die eine türkische Mutter Leyla und ihre Tochter Aleyna (5;8 Jahre) mit dem Spiel ‚Bauherr’. Sie ist das einzige Kind der Familie. Ziel des Spiels ist es, das Gebäude auf der Spielkarte genau nachzubauen. Dadurch wird der Unterschied zwischen der zweidimensionalen Abbildungen und den dreidimensionalen Körpern erfahrbar. In der vierten Runde zieht Leyla eine Karte und fängt mit dem Nachbauen an. Im Laufe der Runde bittet sie Aleyna um Hilfe und sie bauen die obenstehende Karte zusammen weiter nach. Vor der Widergabe der Handlungen im folgenden Transkript haben sie zuammen die nebenstehende Figur gebaut (siehe Acar Bayraktar & Krummheuer 2011).

409		#	Mutter	nein nein. *auf die Karte zeigend* es muss jetzt so rum

409 *		#		 *Zeigt dabei auf den eingekreisten Teil des Bildes*
410				guck mal so . ein L werden\ *legt K4 wieder bündig*
411				*zur Y-Seite von K3*
412		#	Aleyna	tihhh Mama sieh mal *zeigt mit beiden Zeigefingern*
413 *				*wieder auf den oberen querstehenden Stein* 
414 *				 das muss so so sein*schiebt K4 wieder fast mittig auf K3* (Flächen des Quaders) 
415			Mutter	ah ja stimmt\ ja\ risch**ti s c h** *klatscht*

In der ausgewählten Szene tritt als zusätzliche Schwierigkeit auf, dass die Mutter die Spielkarte vor sich auf den Kopf stehend sieht und das Bild dann als Aufriss deutet. Dieser Körper ist aus statischer Sicht aufrecht nicht zu bauen. Dies scheint weder die Mutter noch das Kind zu erkennen oder zu stören. Sie beschäftigen sich zunächst mit dem Bau des senkrecht stehenden Teilkörpers, der statisch gesehen in der Aufrissdeutung des Bildes auch konstruierbar ist. Als sie dann dazu kommen, den oberen horizontal liegenden Stein anzubauen, der auf die bereits erstellte Säule gelegt werden muss, zeigt sich, dass Mutter und Tochter zunächst den erstellen Teilbau in Bezug auf das Bild der Spielkarte unterschiedlich deuten: Die Mutter scheint zu versuchen, die auf den Kopf gestellte Figur weiterzubauen, indem sie einen Stein horizontal in der Höhe auf die Säule legen will, der in der „Originalsicht“ der Karte unter die Säule gehört. Sie nimmt offenbar mental keine Rotation des Bildes vor. Statisch ist diese Figur nicht herstellbar. Aleyna hingegen deutet die erstellte Säule im „Original“-Verständnis des Bildes und legt den oberen horizontalen Abschlussstein auf. Dieser Stein liegt jedoch nicht mit seiner X-Seite flach sondern mit seiner Y-Seite hochkant auf und ist zudem noch um 90º gedreht.

3. Zusammenfassung und Ausblick

In der Präsentation wurde Familie Ak beim Spiel „Bauherr“ beobachtet. In der ausgewählten Szene erzielen die Tochter und Mutter eine Art von Konsens zum Ende, in dem aus geometrischer Sicht jedoch eher eine Aporie zum Ausdruck kommt. Man kann der Mutter keine entwickelter raumgeometrische Kompetenz als der Tochter unterstellen. Die Standardvorstellung von einem Supportsytem, in dem ein in der Sache kompetenter Erwachsener agiert, kommt hier nicht zum Zuge. Die derzeit entwickelten drei Komponenten (Inhalt, Kooperation und Vermittlung) einer interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung (NMD) sind im dargestellten Fall folgendermaßen ausgeformt (siehe Acar Bayraktar & Krummheuer 2011):

NMD (Fam. Ak)	Inhaltskomponente	Kooperationskomponente	Vermittlungskomponente
Allokationsaspekt	mathematischer Inhaltsbereich „Raumgeometrie“ – Bauherr –	Spiel von Mutter, Fokuskind Aleyna	Theorien zur Entwicklung räumlicher Fähigkeiten
Situationsaspekt	interaktive Aushandlungen von Teilen des Quadergefüges; Schwierigkeiten bei der Wahrnehmung der differierenden perspektivischen Sichtweisen des Anderen	Mutter und Tochter führen aktiv das Gespräch; hinsichtlich der Inhaltsaspekts symmetrische Beziehung	implizites, teilweise unvollständiges Erfahren von raumgeometrischen Eigenschaften; peer-ähnliche Ko-Konstruktionen

Die raumgeometrischen Kenntnisse aller Beteiligten sind unzureichend. Naheliegender Weise finden so nur inhaltlich vage Abstimmungen statt. Wenn man in derartigen Situationen Aspekte einer MLSS zur rekonstruieren beabsichtigt, wird man die Vorstellungen revidieren müssen, dass sich der inhaltsbezogene supportive Effekt eines solchen Systems auf die Entwicklung des raumgeometrischen Denkens bei Kindern nicht notwendig aus der entwickelteren raumgeometrischen Kompetenz der Eltern speist. Die geplanten longitudinalen Analysen werden unter dieser Annahme auch zu untersuchen haben, in wieweit das gesamte familiale System an raumgeometrischen Kompetenzen zunimmt.

Literatur

Acar Bayraktar, E. & Krummheuer, G. (2011): Die Thematisierung von Lagebeziehungen und Perspektiven in zwei familialen Spielsituationen. Erste Einsichten in die Struktur „interaktionaler Nischen mathematischer Denkentwicklung“ im familialen Kontext. In Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (Hrsg.) Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education". Grundlagen und erste Ergebnisse der Projekte erStMaL und MaKreKi (Bd. 1). Münster: Waxmann, 135-174.

Brandt, B. (2004): Kinder als Lernende. Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer. Frankfurt a. M. usw., Peter Lang.

Bruner, J. (1990): Acts of Meaning. Cambridge, MA: London, Harvard University Press.

Krummheuer, G. (2011): Die empirisch begründete Herleitung des Begriffs der „Interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD). In Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (Hrsg.) Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education". Grundlagen und erste Ergebnisse der Projekte erStMaL und MaKreKi (Bd. 1). Münster: Waxmann, 25-90.

Henrike ALLMENDINGER, Siegen

Hochschulmathematik versus Schulmathematik in Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus"

In der mathematikdidaktischen Forschung für das gymnasiale Lehramt wird Felix Klein in Zusammenhang mit dem Begriff der *doppelten Diskontinuität*, der aus seinem Munde stammt, und seiner Vorlesungsreihe *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* immer wieder zitiert. Heutzutage gibt es zahlreiche Vorlesungen, die vermeintlich im Sinne Kleins gehalten werden. Dabei unterscheiden sich Ausgangsperspektive, Intention und Schwerpunktsetzung oft bereits in ihrer Anlage wesentlich von ihrem Vorbild.

Der Begriff *höherer Standpunkt* wird von Klein stark intuitiv gebraucht; er liefert keine präzise Beschreibung dessen, was er sich unter dem Begriff vorstellt. Mein Dissertationsprojekt strebt an, anhand der veröffentlichten Manuskripte der Vorlesungsreihe, den *Kleinschen höheren Standpunkt* darzustellen und damit die für Klein spezifische Vorstellung einer Elementarmathematik vom höheren Standpunkt herauszuarbeiten. Insofern ist meine Arbeit eine Fallstudie, die bestenfalls als Grundlage für eine weiterentwickelte, die aktuelle didaktische Forschung einbeziehende, Auffassung des Begriffs dienen kann.

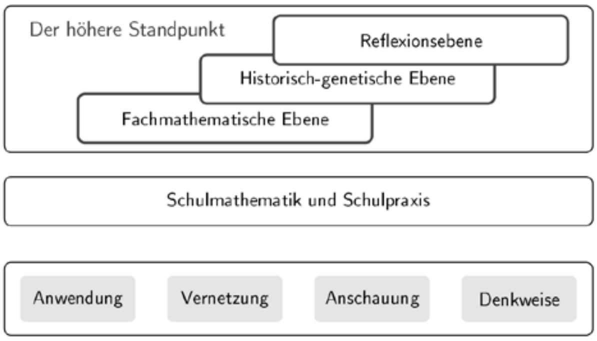
Der Analyserahmen

Als Auftakt zu seinem ersten Kapitel der ersten Vorlesung schreibt Klein:

„Zuerst legen wir uns hier, wie stets im Verlaufe der Vorlesung, die Frage vor, auf welche Weise man diese Dinge in der Schule behandelt. Dann wird die weitere Untersuchung fragen, was vom höheren Standpunkte aus betrachtet in ihnen alles enthalten ist." (Klein 1908, S. 6)

Diese Vorgehensweise, seine Vorstellung des höheren Standpunkts direkt mit einer Diskussion der aktuellen Lage in der Schule zu verbinden, zieht sich durch das gesamte Werk. In der Analyse konnten drei Ebenen herausgearbeitet werden, auf denen die von Klein angekündigte „weitere Untersuchung" stattfindet. Es gibt eine *fachmathematische Ebene*, die aus mathematischer Perspektive den dem Schulstoff zu Grunde liegenden Hintergrund beschreibt und mögliche Erweiterungen diskutiert. Eine *historisch-genetische Ebene* bettet den Inhalt in seine Entstehungsgeschichte ein. Schließlich werden auf einer *Reflexionsebene* erkenntnistheoretische Fragen über das Wesen der Mathematik gestellt, mathematische Definitionen und Begründungen hinterfragt sowie Methoden und Inhalte des Schulcurriculums kritisch reflektiert.

Auf allen drei Ebenen wird der anvisierte höhere Standpunkt von folgenden vier Prinzipien entscheidend geprägt: das *Primat der Anschauung*, *innermathematische Vernetzung*, eine hohe *Anwendungsorientierung* und das Beschreiben von *mathematischen Denk- und Arbeitsweisen*.



Tiefenanalyse am Beispiel der fachmathematischen Ebene

In vorliegendem Beitrag liegt der Fokus auf der fachmathematischen Ebene. Sie soll anhand signifikanter Textstellen aus der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* vorgestellt werden.

Diese Ebene dient zum einen dazu, den fachmathematischen *Hintergrund* zu schulrelevanten Themen bereitzustellen. Darunter versteht Klein fachmathematisches Wissen, das nicht direkt in den Schulunterricht einfließt, aber eine präzise hochschulmathematische Begründung der schulmathematischen Inhalte bereitstellt und somit einen fachlich flexiblen Umgang mit diesen ermöglicht. Erkennbar wird dies bereits zu Beginn seiner Vorlesung bei der Einführung der Grundrechengesetze der Arithmetik.

„*Für diesen Unterricht erscheint es nun unbedingt nötig, daß der Lehrer die logischen Gesetze und Grundlagen des Rechnens und der Theorie der ganzen Zahlen selbst genau kennt, wenn er sie auch dem Schüler keineswegs unmittelbar darbieten kann. Beschäftigen wir uns also etwas näher mit ihnen.*“ (Klein 1908, S. 8)

Hier ist entscheidend, dass die Diskussion zwar aus hochschulmathematischer Perspektive geführt wird, die behandelten Themen aber direkt dem Schulcurriculum entnommen sind.

An folgendem Beispiel wird aber deutlich, dass Klein sich auf der fachmathematischen Ebene nicht ausschließlich auf Hintergrundbetrachtungen beschränkt.

„*Kann man nun – diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe – nicht auch andere, höhere komplexe*

Zahlen mit mehreren neuen Einheiten als dem einen i bilden und mit ihnen vernünftig rechnen?" (Klein 1908, S. 64)

Im Anschluss an die zitierte Stelle behandelt Klein die Quaternionen, die nicht zum Schulstoff gehören, sondern vielmehr diesen *erweitern*. Er bettet den Schulstoff, in diesem Fall die komplexen Zahlen, somit in höhere mathematische Überlegungen ein.

An diesem Beispiel lassen sich zudem noch weitere Aspekte des Kleinschen höheren Standpunkts verdeutlichen. So liefert er mit „diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe" einerseits einen Beitrag zur Charakterisierung mathematischer Denkweisen, andererseits betritt er an dieser Stelle die Reflexionsebene: Was heißt eigentlich „vernünftig rechnen"? Welche Einschränkungen ergeben sich, wenn wir eine solche Erweiterung der komplexen Zahlen beschreiben?

Wie weit Klein in die hochschulmathematische Diskussion eintaucht und sich damit auch inhaltlich von der Schulmathematik löst, wird in Passagen deutlich, in denen er auf die zu seiner Zeit *aktuelle mathematische Forschung* eingeht. Dort verweist er auf aktuelle Vorträge und unveröffentlichte Werkstattberichte. Diskutiert werden beispielsweise das große Fermatsche Problem sowie die Rechtfertigung der Grundgesetze der Arithmetik:

„Während der Schulunterricht zu den schwierigsten Fragen natürlich noch viel weniger wird aufsteigen können, setzt die Fragestellung der heutigen mathematischen Forschung hier erst eigentlich ein: Wie rechtfertigt man denn die angegebenen Grundgesetze, wie erklärt man den Zahlbegriff überhaupt? Hierüber will ich Ihnen eine Orientierung zu geben suchen, getreu der Absicht dieser Vorlesung, die Dinge des Schulunterrichts durch Betrachtung von einem höheren Standpunkte aus in neue Beleuchtung zu setzen." (Klein 1908, S. 11)

Die fachmathematische Ebene zeichnet sich aber nicht alleine durch die hier beschriebene Tiefe (bzw. Höhe) aus, sondern ebenso durch ein gewisses Maß an Breite. Zum Beispiel wird der damals üblichen Einführung gebrochenrationaler Zahlen, „mit durchaus konkreter Bedeutung" (bspw. Gewichte, Längen,...), eine „in der modernen Mathematik ausgebildete Darstellung" entgegengesetzt, die einen Bruch $\frac{a}{b}$ als abstraktes Zahlenpaar auffasst, mit dem nach bestimmten Regeln gerechnet wird. (Vgl. Klein 1908, S. 31ff)

Auch hier verwischen die Grenzen der einzelnen Ebenen. Die Beschreibung der Darstellungen und die Begründung der paarweisen Äquivalenz sind der fachmathematischen Ebene zuzuordnen, der bewertende Vergleich liegt auf der Reflexionsebene.

Die vorangegangenen Ausführungen zusammenfassend, lassen sich als wesentliche Elemente der fachmathematischen Ebene das Bereitstellen von Hintergrundwissen, das Vorstellen von Erweiterungen, der Einblick in aktuelle mathematische Forschung sowie das Beschreiben mathematischer Darstellungs- und Lösungsvielfalt feststellen. Bemerkenswert ist, dass Klein zwar die Schulmathematik als Ausgangspunkt seiner Betrachtungen wählt, jedoch sehr rasch die eigentlichen Inhalte der Schulmathematik verlässt, so dass seine mathematischen Untersuchungen sich vornehmlich auf hochschulmathematische Fragestellungen beziehen. Die fachmathematische Ebene des Kleinschen höheren Standpunktes ist somit hauptsächlich in der Hochschulmathematik verankert.

Eine Alternative

Alternativ ist es denkbar, den höheren Standpunkt stärker an den eigentlichen schulmathematischen Inhalten orientiert zu entwickeln. Eine solche Vorgehensweise bezieht erst allmählich rein hochschulmathematische Inhalte ein und hat somit das Potenzial, den Respekt für die Elementarmathematik zu stärken. Diesen Ansatz hat Franz Meyer mit seinem *Repetitorium zur Elementarmathematik* gewählt (vgl. Allmendinger 2011). Er sagt dazu:

„[Grundgedanke der Vorlesung ist,] daß man bei häufiger Durcharbeitung des Elementarstoffes nicht nur eine wesentliche Ersparnis an Gedanken- und Rechnungsarbeit erzielt, sondern in enger Verbindung damit höhere Gesichtspunkte fast von selbst einführt.“ (Meyer 1899, S. 147)

In meiner Arbeit soll nach einer detaillierten Analyse der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* gezeigt werden, dass Klein das Potenzial der schulmathematischen Inhalte nicht vollständig ausschöpft. Eine moderne Interpretation des *höheren Standpunktes* sollte einen solchen Perspektivwechsel nutzen.

Literatur

Allmendinger, H. (2011): Elementarmathematik vom höheren Standpunkt. Eine Begriffsanalyse in Abgrenzung zu Felix Klein. In: Haug, R. & Hölzäpfel, L. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag, S. 51-54.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Arithmetik, Algebra, Analysis, Berlin: Julius Springer.

Meyer, F. (1899): Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, S. 147-154.

Gabriella AMBRUS, Budapest

Entwicklung (auch) des problemlösenden Denkens von Lehramtsstudenten in den Wahlfachseminaren „Realitätsnahe Aufgaben”

Die Sichtweise von Humenberger (1995, S.16) ist anders als der traditionelle Unterricht, aber erweist Gemeinsamkeiten in vielen Hinsichten mit dem problemlösenden Unterricht, was auch in der ungarischen Unterrichtstradition wesentlich ist.

Was die traditionelle und Problemlösende Methoden kurz zusammenfasst bedeuten, kann z.B. bei Ambrus G. 2003, S.65) nachgelesen werden.

Im Hintergrund dieser Vorstellungen stehen zwei verschiedene Einstellungen zu Mathematik und zu ihrem Unterricht gegenüber, die auch mit den „antagonistischen Leitvorstellungen von Mathematik” (Grigutsch/Raatz/Törner, 1998, S.11) in Zusammenhang gebracht werden können. Bei dem traditionellen Unterricht erscheint ein statisches Bild von der Mathematik (Schema – Aspekt, Formalismus-Aspekt), bei dem problemlösenden Unterricht wird Mathematik als Tätigkeit betrachtet und kommt ihr Prozesscharakter in den Vordergrund. Viele Merkmale des problemlösenden Unterrichts tauchen auch beim Arbeiten mit realitätsnahen Aufgaben auf, da der Problemlöseprozess mit dem Modellierungsprozess viele Ähnlichkeiten aufweist Greefrath (2007).

Was bedeutet „realitätsnah zu sein” und seine Rolle

„Realitätsnahe Aufgabe” bedeutet dass diese Aufgabe die Realität nur annähert, aber mit dieser auch in Zusammenhang steht. Die Annäherung der Realität ist wichtig da: die reale Situation oft zu komplex ist, man mehr Mathematik (oder gezielte Inhalte) „einbringen” will, dadurch die Aufgabe der Erlebniswelt der SchülerInnen mehr entspricht. Die realitätsnahen Aufgaben gelten als Brücke zwischen erworbenes (schulisches) Wissen und alltägliches Wissen. Diese Brücke ist auch aus dem Grunde äußerst notwendig, da die Annahme, dass man die erworbenen Kenntnisse gleichzeitig ohne weiteres auch in allerlei Situationen anwenden kann, sich als falsch erwies.

Bezüglich der Problematik des Transfers zwischen Wissen und Anwendung gibt es viele Theorien (z.B. Renkl, 1996).

Über realitätsnahe Aufgaben und ihre Typen

Realitätsnahe Aufgaben können verschiedenerweise gruppiert werden. Betrachtend die Offenheit der Aufgaben gebe ich folgende Typen an (es gibt notwendigerweise Überlappungen): *einfache Aufgabe* (geschlossene oder wenig offene, man braucht im allgemeinen wenig Zeit zum Lösen), *Arbeitsblatt - Bearbeiten eines Themas mit mehreren Teilaufgaben-* (beinhaltet mehr oder weniger komplexe Teilaufgaben, man braucht im allgemeinen mehr Zeit zum Lösen) *Modellierungsaufgabe* (Diese kann mit Hilfe des schon erwähnten Zyklus gelöst werden.)

Aufgrund der vorherigen Überlegungen kann behauptet werden, dass diese Aufgaben im allgemeinen: eine vom Gewohnten abweichende Betrachtungsweise/Einstellung vom Lehrer und vom Schüler verlangen; im traditionellen Unterricht nicht vorkommen; aufgrund der langen Traditionen im Problemlösen gut gelöst werden können; den Studenten helfen ihre Mathematikkenntnisse aus der Oberstufe und aus dem Studium anwendbar zu machen. Aus den vorherigen ist es besonders interessant mit der Einstellung der Studenten zu Mathematik zu beschäftigen, da dies in großem Maß mit dem „Muster" zusammenhängt was die Studenten (früher) in der Mittelschule erfahren haben und wie sie an der Universität unterrichtet wurden.

Die Einstellung von Lehramtsstudenten ist also ein interessantes Forschungsgebiet (Thompson, 1992, 135) und ist auch darum wichtig, da diese Vorstellungen als Basis für die künftige eigene Praxis dienen. (Skott, 2001). Die Einstellung festigt sich bald während der Unterrichtspraxis und kann im Grunde später kaum noch verändert werden. Die Lehrer, die schon seit einigen Jahren unterrichten, akzeptieren nur noch diejenigen neuen Vorstellungen, die in ihre bereits vorhandenen Schemen einpassen. (Thompson, 1992, 140.)

Über die Seminare

Es gibt zwar Kurse an der Universität ELTE in Budapest, die mit Anwendungsbezügen bzw. Modellierung im MU in Zusammenhang stehen, die Erfahrungen aus diesen Kursen können aber nur teilweise in die Schule „transportiert" werden. Und was noch wichtiger erscheint, die Studenten denken oft gar nicht daran, diese überhaupt zu verwenden, wenn sie in die Schule kommen (situiertes Wissen- geknüpft zur Universität). Es sind also solche Aufgaben und didaktische Kenntnisse notwendig, die ausgesprochen in der Schule verwendbar sind.

Die Problematik aufgreifend habe ich mich entschieden vor einigen Jahren zwei Wahlfachseminare für Lehramtsstudenten zu organisieren: *Realitäts-*

nahe Aufgaben I: beschäftigt sich im Allgemeinen mit verschiedenen Typen von realitätsnahen Aufgaben, Modellierungsaufgaben kommen nur als ein Typ kurz vor. *Realitätsnahe Aufgaben II* : beschäftigt sich mit Modellierungsaufgaben. Das Ziel beider Seminare bestand darin, dass neben dem Kennenlernen von Formen der Betrachtungsweise des Mathematikunterrichts auch methodische Kenntnisse erworben werden (durch gemeinsame Arbeit sowie durch Einzelarbeit) und am Ende auch noch eine Aufgabensammlung den Teilnehmern zur Verfügung steht. Diese beinhaltet bearbeitete und selbst/gemeinsam entwickelte Aufgaben, die auch mit Lösungen, Kommentaren ergänzt sind.

Die wichtigsten Gesichtspunkte bei der Realisierung und Organisation der Seminare waren: a) das Erwerben von ausreichenden Kenntnissen bezüglich Modellierungsaufgaben und ihrer Didaktik, b) Bearbeiten von Modellierungsaufgaben, c) Anwendung von verschiedenen (Bearbeitungs-)Methoden (in den Seminaren und auch außerhalb der Seminare), Abwechselnde Sozialform: Einzel- Partner- und Gruppenarbeit. Bei der Zusammenstellung des Materials für die Seminare verwende ich größtenteils meine Aufgabensammlungen (Realitätsnahe Aufgaben, Modellierungsaufgaben), die Aufgaben von Seminarteilnehmern aus früheren Jahren, Diplomarbeiten von Studenten, die unter meiner Leitung geschrieben wurden.

Aus den Resultaten der Erhebungen

Ich habe in beiden Seminaren mehrere Erhebungen durchgeführt. Im Weiteren werden nur Ergebnisse aus dem Seminar „Realitätsnahe Aufgaben II" erwähnt. Zu Beginn und am Ende des Semesters erkundigte ich über die relevanten (Vor)kenntnisse (Kenntnistest)und ich war neugierig auch auf die Meinung der Studenten über das Seminar in der letzten Stunde. Für die Untersuchung der Vorstellungen/Einstellungen bezüglich des Mathematikunterrichts habe ich den relevanten Teil aus dem Fragebogen[1] für Lehrer aus der LEMA Projekt verwendet, diese wurde auch zweimal ausgefüllt: zu Beginn und am Ende des Semesters.

Anhand der Ergebnisse konnte ich *drei Typen* aus der (anonymen) Antworten feststellen, diese sind die folgenden: **Student I** („Ist interessiert schon vorher und nahm auch aktiv teil") **Student II** (Gleichgültig dem Thema

[1] Den Fragebogen haben die Teilnehmer des Lehrerfortbildungskurses des LEMA Projekts vor und nach dem Kurs ausgefüllt. Partners of LEMA: Katja Maass (Coordinator), University of Education Freiburg, Geoff Wake, University of Manchester, Fco. Javier Garcia Garcia, University of Jaen, Nicholas Mousoulides, University of Cyprus, Ödön Vancsó & Gabriella Ambrus, University of Budapest, Anke Wagner, University of Education Ludwigsburg, Richard Cabassut, IUFM Strasbourg.

gegenüber, dies änderte sich etwas gegen Ende des Semesters, etwas passiv, wenige zusätzliche Arbeit) **Student III** (zeigt etwas Interesse von Anfang an, mäßige zusätzliche Arbeit)

Zusammenfassung der Erfahrungen

Es lohnt sich schon ganz am Anfang die Kenntnisse zu testen, und die ergänzende Literatur differenziert anzugeben. Obwohl es nicht zeitökonomisch ist, es ist wichtig die gelesene Literatur mindestens in großen Zügen gemeinsam zu besprechen - zum Beispiel in Form von Studentenvorträgen. Diejenigen Studenten, die bewusst das Thema gewählt haben, haben auch mehr gearbeitet und mehr vom Seminar „profitiert". Es muss noch nach weiteren Möglichkeiten gesucht werden, die Aktivität der Studenten zu steigern. (Siehe andere Punkte und z. B. weniger Seminarleitervorträge). Es wäre wichtig 2-3 Stunden (mindestens Teile von Stunden) mit Anwendung von Modellierungsaufgaben zu zeigen. Die gemeinsamen Besprechungen sind sehr wichtig, bringen viel der Einstellung/ Anschauung der Lehramtsstudenten bezüglich der Modellierungsaufgaben bei. Im Grunde genommen war eine positive Einstellung für die Seminargruppe charakteristisch, auch wenn am Anfang die Einstellung mancher eher gleichgültig oder etwas ablehnend war. Das Niveau der Kenntnisse wurde im Allgemeinen immer besser, aber es gibt auch noch am Ende des Seminars große Leisungsunterschiede.

Literatur

Humenberger, H./Reichel, H.-Ch.(1995): Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik, Mannheim,

Ambrus, G.(2003): Üben in der Planung des Mathematikunterrichtes Salzburg, , Dissertation

Grigutsch, S./Raatz U./Törner G. (1998): Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrer, , In. JMD, 19(98) S. 3-45

Blum, W.- Leiß, D.: „Filling up"- The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. I.: Bosch, M. (Ed.) CERME-4 –Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Guixol (2006)

Renkl, A.: Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird, In. Psychologische Rundschau, 1996, 78-92.

Skott, J.: The emerging practices of novice teachers: The roles of his school mathematics images. In. Journal of Mathematics Teacher Education, 4(1) 3-28

Thompson, A.G.: Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research In: Handbook of research on mathematics teaching and learning, Ed. Douglas A. Grouws, 1992, Macmillan Publishing Company, 127-146

Greefrath, G.: Modellieren lernen, Aulis, 2007

Judith AMES, Landau

Muster- und Strukturverständnis von Studierenden im lehramtsbezogenen Masterstudiengang (Lehramt für die Primarstufe)

„Ein wesentlicher Teil der mathematischen Aktivität [konzentriert sich] darauf, neue Muster in der Welt zu finden, sie zu analysieren, Axiome zu ihrer Beschreibung und Untersuchung zu formulieren, Muster, die bereits gefunden wurden, in anderen Gebieten wiederzuentdecken und mathematische Theorien und Ergebnisse auf Erscheinungen in der Alltagswelt anzuwenden." Mit diesen Worten beschreibt Devlin (1998, S. 60) die Bedeutung von Mustern und Strukturen für die Mathematik. Schon im Grundschulunterricht können beispielsweise Rechengesetze als die grundlegenden Strukturen der Rechenoperationen mithilfe geometrischer Muster dargestellt und begründet werden und bei der Bearbeitung von Sachaufgaben genutzt werden (vgl. Wittmann/Müller 2009).

Beim Erkennen und Nutzen solcher Muster und Strukturen sollten Lehramtsstudierende ihre künftigen Schülerinnen und Schüler unterstützen können. Inwieweit Studierende dies leisten können, soll im Rahmen einer Lehrveranstaltung für Studierende im Masterstudiengang Grundschulbildung an der Universität in Landau untersucht werden. Die Studierenden führen dort ein so genanntes Mathematikjournal, in dem sie ihr Vorgehen beim Bearbeiten verschiedener Problem- bzw. Fragestellungen beschreiben. Die Einträge sollen zur Klärung des vorhandenen Muster- und Strukturverständnisses der Studierenden beitragen, und die Ergebnisse sollen mit Blick auf die Lehramtsausbildung diskutiert werden.

1. Vorbemerkung

Die Begriffe „Muster" und „Strukturen" sollen hier zunächst nicht getrennt voneinander betrachtet werden. „Muster und Strukturen" soll im Folgenden als begriffliches Ganzes im Sinne der gleichnamigen Leitidee in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich verwendet werden. Dort ist der Bereich „Muster und Strukturen" allen Inhaltsbereichen übergeordnet und in diesen integriert (vgl. Wittmann & Müller 2009). „Muster und Strukturen" in der Grundschulmathematik sind beispielsweise strukturierte Zahldarstellungen oder arithmetische und geometrische Muster oder funktionale Beziehungen (vgl. KMK 2005, 10f.).

2. Fragestellungen und die Lehrveranstaltung *Kompetenzerwerb beim Entdecken von Mustern und Strukturen*

Die Beobachtung von Studierenden beim Bearbeiten von Aufgabenstellungen aus dem Bereich „Muster und Strukturen" zeigt, dass das Erkennen der mathematischen Struktur den Studierenden nicht immer leicht fällt. Mitunter bleiben sie in eher oberflächlichen, beispielsweise visuell wahrnehmbaren Strukturen verhaftet, und das Erkennen oder Nutzen abstrakterer mathematischer Strukturen gelingt nicht.

Folgende Fragen sollen im Rahmen der Untersuchung geklärt werden:

– Welche mathematischen Muster und Strukturen erkennen Studierende?
– Das Erkennen welcher Muster und Strukturen bereitet Schwierigkeiten?
– Welches Wissen über Muster und Strukturen nutzen sie bei der Bearbeitung mathematischer Aufgabenstellungen?
– Wie entsteht Vertrauen in das eigene mathematische Denken?

Ich gehe davon aus, dass sich das Muster- und Strukturverständnis der Studierenden nur durch die eigene Beschäftigung mit entsprechenden Problemstellungen entwickeln kann. Und Vertrauen in das eigene mathematische Denken scheint eine wesentliche Voraussetzung dafür zu sein, dass sich Studierende selbsttätig mit einer mathematischen Problemstellung auseinandersetzen. Aus hochschuldidaktischer Perspektive sollte dieser Aspekt daher Beachtung finden.

Die Lehrveranstaltung *Kompetenzerwerb beim Entdecken von Mustern und Strukturen* ist ein Modul des Masterstudiengangs Grundschulbildung am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau. Im Mittelpunkt der Lehrveranstaltung steht das eigenständige Bearbeiten von verschiedenen Arbeitsaufträgen durch die Studierenden. Die Aufgabenstellungen intendieren beispielsweise das Erkennen von arithmetischen Zahlbeziehungen oder das Erkennen von Strukturen innerhalb figurierter Zahlen oder das Übertragen bekannter Strukturen innerhalb des Dezimalsystems auf ein anderes Stellenwertsystem. Die Bearbeitung der Aufgabenstellungen erfolgt in einem so genannten Mathematikjournal. Hierbei wird das Dialogische Lernmodell von Peter Gallin und Urs Ruf (vgl. Gallin & Ruf 1998) in Teilen aufgegriffen. Studierende erhalten die Gelegenheit, ihr singuläres Wissen zu zeigen. In Form einer schriftlichen Rückmeldung zu den Einträgen in die Mathematikjournale durch die Lehrperson können erkannte Muster und Strukturen noch einmal bewusst gemacht werden, noch ungelöste Probleme thematisiert werden und fruchtbare Irrwege und interessante Fragestellungen, die sich während des Bearbeitungsprozesses ergaben, positiv hervorgehoben werden.

3. Methodisches Vorgehen

Die Untersuchung fand im Rahmen der Lehrveranstaltung *Kompetenzerwerb beim Entdecken von Mustern und Strukturen* im Wintersemester 2010/2011 statt. An der Lehrveranstaltung nahmen 71 Studierende teil. Zusätzlich zu den Einträgen in die Mathematikjournale, die Aufschluss über das Muster- und Strukturverständnis der Studierenden liefern sollen, wurden mittels Fragebogen ausbildungsbiografische Daten der Studierenden erhoben. Dazu gehörten Informationen zum bisherigen Studienverlauf, der Motivation für das Studium und eine Selbsteinschätzung der Mathematikkenntnisse. Auf einer fünfstufigen Skala sollten die Studierenden ihre Mathematikkenntnisse im Vergleich mit ihren Kommilitoninnen und Kommilitonen einschätzen. Außerdem werden die Ergebnisse des durchgeführten Berliner Intelligenzstruktur-Tests (BIS-4), die Beurteilung der Schwierigkeit der einzelnen Arbeitsaufträge und die Einschätzung des eigenen Lerngewinns durch die Studierenden in die Auswertung einbezogen.

4. Vorläufige Befunde zum Lernerfolg aus der Sicht der Studierenden

Die Beurteilung der Schwierigkeit der einzelnen Arbeitsaufträge und die Einschätzung sowie Beschreibung des eigenen Lerngewinns durch die Studierenden lassen folgende erste Schlüsse zu:

Aus Sicht der Studierenden ist die Bearbeitung der Aufträge dann mit Lernerfolg verbunden, wenn...

- … sie das Gefühl haben, dabei ähnliche Lernerfahrungen wie ihre späteren Schülerinnen und Schüler zu machen.
- ... sie verschiedene Repräsentationsformen zur Lösungsunterstützung einsetzen können.
- ... sie sich selbst als kompetent erleben.
- ... sie sich als Gruppe kompetent erleben.

Aus Sicht der Studierenden ist die Bearbeitung von Aufträgen nicht mit Lernerfolg verbunden, wenn ...

- ... sich ihnen der Sinn der Bearbeitung nicht erschließt.
- ... die Aufträge „nicht GS-relevant“ erscheinen.
- ... sie "keinen Hang zu solchen kniffeligen Lösungen“ haben.

Explizit benannte, konkret beschriebene erkannte Muster- und Strukturen werden von den Studierenden an dieser Stelle nicht angeführt.

5. Ausblick

Die Einträge in die Mathematikjournale lassen jeweils sehr unterschiedliche Einsichten in die Bearbeitungsprozesse der Studierenden zu. In den Mathematikjournalen verschiedener Studierender kommen sehr unterschiedliche Aspekte zur Geltung. So nutzten beispielsweise einige Studierende ihre Mathematikjournale, um Emotionen, beispielsweise den Grad ihrer Zufriedenheit mit der eigenen Bearbeitung eines Auftrages, auszudrücken. Andere versuchten möglichst viele Erkenntnisse durch Visualisierungen zu stützen. Deutliche Unterschiede sind auch bezogen auf die Ergebnisse des Berliner Intelligenzstruktur-Tests sowie die mathematische Vorbildung der Studierenden zu erkennen.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung sollen Kriterien zur Analyse der Einträge in die Mathematikjournale erarbeitet und Zusammenhänge der Ergebnisse, die durch die einzelnen Untersuchungsinstrumente gewonnen wurden, untersucht werden. Es sollen mögliche Zusammenhänge der von den Studierenden erkannten Mustern und Strukturen mit den Ergebnissen des eingesetzten Berliner Intelligenzstruktur-Tests (BIS-4) untersucht werden. Insbesondere soll ein möglicher Zusammenhang des Fähigkeitskonstrukts „Einfallsreichtum“ mit einer möglichen Vielfalt an Lösungswegen oder –versuchen erkundet werden. Ob die Art der Einträge in die Mathematikjournale mit der Selbsteinschätzung der Mathematikkenntnisse durch die Studierenden zusammenhängt, wird ebenfalls untersucht.

Literatur

Devlin, K. (1998): Muster der Mathematik. Heidelberg: Spektrum.

Gallin, P. und Ruf, U. (1998): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1 und 2. Kallmeyer, Seelze.

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). München: Luchterhand.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2009): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther et al (Hg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 42-65.

Lucas AMIRAS, Weingarten

Mathematisches Experimentieren in der Lehrerausbildung – Hintergründe und Erfahrungen

Seit einiger Zeit steht das Experimentieren beim Lernen von Mathematik in der Lehrerausbildung im Vordergrund. Dabei geht es sowohl um eine Verankerung im Curriculum der Lehrerausbildung im Fach Mathematik an Hochschulen als auch um eine Untersuchung der Teilprozesse bzw. Kompetenzen, die Experimentierhandlungen konstituieren (Phillipp/Leuders 2010).

1. Experimentelle Mathematik in der fachlichen und didaktischen Tradition

Bereits in der antiken Mathematik ist die Rolle der Empirie für die Schöpfung mathematischen Wissens offenkundig. Sowohl in der ägyptischen (z.B. Berechnung von Flächen, insb. Bestimmung von π, Volumenformeln) als auch in der griechischen Mathematik (figurierte Zahlen bei den Pythagoreern) sind - in einem vorwissenschaftlichen Sinn - „empirische" Zugänge zum mathematischen Wissen wirksam. Zur Gewinnung von Vermutungen setzt Archimedes (Methodenlehre) mehrfach Gedankenexperimente gezielt ein, ohne die exakte Begründung aus dem Blick zu verlieren. Der methodische Unterschied zwischen der Kunst der Entdeckung, der „Heuristik" (ars inveniendi), und der Kunst der Begründung (ars judicandi), der in neuerer Zeit (etwa bei Leibniz) klassisch geworden ist, findet sich bereits hier deutlich ausgesprochen. Im 20. Jahrhundert sind die Bemühungen um die Heuristik in der Mathematik besonders mit dem Namen von Georg Polya (1887-1985) verbunden, der in mehreren Schriften richtungsweisende Beiträge geliefert hat. Der Mathematikphilosoph Imre Lakatos (1922-1974) befasst sich in der Folge eingehend mit der Logik mathematischer Entdeckungen anhand von Fallstudien zu Erkenntnissen der klassischen Mathematik (z.B. Eulers Polyedersatz). Aber auch in der Mathematikdidaktik sind seit langem Bestrebungen virulent, die der Empirie einen wichtigen Platz beim Lernen von Mathematik zuweisen (Lietzmann, Sprengel, Kempinsky bis zu neueren Beiträgen zum Experimentieren in einem Geometrie-Tagungsband der GDM (2006) oder im Heft 141 von „mathematik lehren").

2. Experimentieren als Teilprozess des Problemlösens – Rolle der Empirie

Das Problemlösen ist eine herausragende menschliche Kompetenz, die in der Mathematik ihre besondere Ausprägung erfährt. In der langen Tradition des experimentellen Arbeitens in der Mathematik, wird dies manchmal zu vordergründig auf Apparate und Hantieren bezogen, obwohl es auch beim Finden von Beweisen unverzichtbar ist. Eine wissenschaftstheoretisch angesetzte Perspektive macht dies deutlich: Mathematik, wie Wissenschaft überhaupt, entsteht auf der Basis von Erfahrung. Diese Erfahrung ist zunächst **alltägliche Erfahrung**, die sich in technischen und symbolischen Handlungskompetenzen ausdrückt. **Wissenschaftliche Erfahrung** konstituiert sich darauf aufbauend durch Hochstilisierung, d.h. durch Idealisierung, Normierung und viele andere Prozesse der Wissens- und Theoriebildung. Das Experimentieren ist damit ebenfalls auf <u>zwei Stufen</u> angesiedelt: Auf der elementaren, lebensweltlichen Ebene (so wird in der Küche mit Gewürzen und Verfahren experimentiert, sogar menschliche Beziehungen werden so angegangen, überhaupt wird probiert und experimentiert, ob etwas in gewünschter Weise <u>funktioniert</u> oder nicht) und erst recht auf der wissenschaflichen Ebene. Bei dieser pragmatischen Sicht der Konstitution von Erfahrung spielen Argumentationen eine entscheidende Rolle zur Stabililierung von Handlungsweisen und des darauf aufbauenden Wissens in unterschiedlichen Praxiszusammenhängen.

Am besten lässt sich dieser Unterschied zwischen den beiden Erfahrungsebenen im Fall der Physik verstehen: Das Experimentieren, alltäglich verstanden, unterscheidet sich vom planvollen physikalischen Experiment weniger hinsichtlich seiner Funktion als im Hinblick auf die hohen Anforderungen an Normierung und Reproduzierbarkeit, die für physikalische Experimente charakteristisch sind, also nicht in prinzipieller Hinsicht. In beiden Erfahrungsebenen geht es um Hypothesenbildung und das Testen deren Konsequenzen durch „trial and error“ (or success).

Im Fall der Mathematik kann man mit unterschiedlichen Absichten experimentieren: Erkunden von Situationen (Explorationen), Begründungen finden, Konstruktionen und Berechnungen ausprobieren, Lösungen finden durch Probieren usw. Eine Hauptfunktion ist auch hier die Hypothesenbildung, also das phantasievolle Vermuten von Zusammenhängen und deren Verifikation oder Falsifikation durch das Aufsuchen von geeigneten Instanzen bzw. Beispielen.

So findet auch in vielen Bereichen des zeitgenössischen Mathematikunterrichts Experimentieren statt. Einige Beispiele von relevanten Themen bzw. Lernumgebungen: Produktive Rechenübungen, schriftliche Normalverfahren, Bruchrechnen-Lernumgebungen (z.B. Besuden), Punktemuster, Figurierungen von Zahlen, Methoden zur Lösung von Gleichungen (weites Feld), Satz des Pythagoras, Vergrößern – Verkleinern und vieles mehr. Experimentieren ist Teilprozess der Lösung von Aufgaben: Probieren, Experimentieren, Korrigieren (Standardstrategie, auch in der Mathematik)

3. Beispiele und Erfahrungen

Grundlage der kritischen Betrachtungen im Vortrag waren Arbeitsunterlagen von Studierenden aus einer Veranstaltung „Experimentelle Mathematik“, die vom Autor mehrfach als fächerverbindendes Angebot im Fach Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Weingarten angeboten und vorwiegend von fortgeschritttenen Studierenden besucht wurde. Zu den Inhalten gehörten der Umgang mit Folgen und Reihen figurierter Zahlen, Entdeckungen am Pascal´schen Dreieck, Zahlentricks, geometrische Probleme, wie das Finden des Kreismittelpunktes von konkreten, verschieden dimensionierten Kreisen auf möglichst viele Arten, Parkettierungen, empirische Kreismessung, Volumen von Kegel und Kugel, Finden kürzester Wege (durch Messen, Konstruieren, Berechnen oder mittels Seifenhautexperimenten).

Folgende Probleme wurden in den Veranstaltungen deutlich:

- **Transferprobleme** bei der Übertragung von Methoden auf neue Situationen (z.B. von der Gauß-Summe auf die Summe der Quadratzahlen oder Kubikzahlen)
- Die **Bereitschaft** zum Einsatz geeigneter Tools (z.B. DGS) war kaum vorhanden.
- Studierende hatten nach eigenem Bekunden elementare experimentelle **Strategien** zur Lösung von Problemen nicht im MU der Schule erlebt, waren (in der Mehrzahl) zu eingeschränkt in den Lösungsansätzen, stark fokussiert auf Berechnungen, wenig flexibel und kreativ, oft etwas ratlos.
- Sie hatten immer wieder **Hilfen** und **Anstöße** nötig (Anregungen, Ermutigung zum freieren, robusten Umgang mit der jeweiligen Fragestellung, Begleitung)

Man gewann besonders bei höheren Semestern (die Mehrzahl der Teilnehmenden) den Eindruck, dass nicht nur die Arbeit im Schulfach Mathematik, sondern auch die Ausbildung von Mathe-Lehrern noch nicht richtig angelegt ist.

4. Folgerungen – Konsequenzen für die Lehrerausbildung

Die Studierenden des Lehramts (aber auch die Mathematikstudierenden überhaupt) brauchen geeignete **Angebote** (kleinere Pflichtveranstaltungen, Tutorien, Mathe-Labor), damit sich ihre Einstellung insgesamt tiefer greifend ändert.

Die Veranstaltung zur Experimentellen Mathematik des Autors wurde bisher im Fächerverbund naturwissenschaftlicher Fächer angeboten. Der Schwund von Teilnehmern während des Semesters war relativ groß.

Eine Konsequenz aus den Erfahrungen bildet die Einsicht, dass die Verankerung des Experimentierens im regulären Studium so früh wie möglich erfolgen sollte. Zusätzlich erscheint eine Ausbaumöglichkeit in weiterführenden Veranstaltungen dringend erforderlich, um Nachhaltigkeit zu sichern. Speziell für das Fach Mathematik an der PH Weingarten bedeutet dies konkret, dass in der neuen Studienordnung der Sekundarstufe (ab WS 2011/12) Mathematisches Experimentieren als Pflichtveranstaltung im Modul 1 für alle Mathe-Studierenden angeboten wird. Eine Ausbaumöglichkeit in einem didaktischen Hauptseminar ist anvisiert.

Die Vorteile liegen auf der Hand: Es wird damit eine längerfristige Perspektive des Aufbaus von Kompetenzen geschaffen, durch die Ausbaumöglichkeit erfolgt eine didaktische Durchdringung und eine Reflexion experimenteller Verfahrensweisen. Die Rolle des Dozenten wird in der ersten Veranstaltung sein, die Lernumgebungen zum Experimentieren zu entwerfen und einen Rahmen für die Teilnehmer (aus Vorbereitung, Durchführung und Reflexion mit Feedback) zu gestalten. Im Hauptseminar übernehmen dann die Teilnehmer selbst die Gestaltung, der Dozent beschränkt sich auf die Beratung und die Planung der Sitzungstermine in Absprache mit den Studierenden. Längerfristig lässt sich auch über eine „AG Experimentelle Mathematik“ ein darüber hinaus gehender Rahmen denken, in welchem Schulversuche und deren Evaluation in einem institutionalisierten Forschungsseminar stattfinden können.

Literatur

Lakatos, I. (1976): Proofs and refutations. Cambridge. Cambridge University Press. Deutsche Übersetzung: Beweise und Widerlegungen. Braunschweig, Vieweg-Verlag.

Leuders, T., Ludwig, M., Oldenburg, R. (Hrsg.) (2008): Experimentieren im Geometrieunterricht. Herbsttagung 2006 des GDM-Arbeitskreises Geometrie. Hildesheim, Franzbecker.

Philipp, K., Leuders, T. (2010): Innermathematisches Experimentieren – Eine empirische Analyse von Denkprozessen beim Experimentieren mit Beispielen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM Verlag.

Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern, Sammlung Dalp.

Polya, G. (1966): Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung. Lernen und Lehren. 2 Bde. Basel, Birkhäuser-Verlag.

Sergey ATANASYAN, Moskau

On the possibility of teaching elements of Lobachevski Geometry at School

Today the secondary school in Russian Federation (grades 10 and 11) passes to the profile teaching. There are several profiles, including physical and mathematical ones, assigned to the profile teaching. The profile preparation assumes the intense study of the appropriate subjects. Therefore, it increases the possibility of intensive studies of mathematics, especially its parts connected with school program, but exceeding the limits of school curriculum. Special role in the organization of teaching in profile classes belongs to so-called elective courses, or courses that can be selected by pupils. They provide a possibility to perform lessons on sections of mathematics that are interesting to pupils, to expand their views of the subject and of methods of research of modern mathematical knowledge.

The interest in teaching elements of non-Euclidean hyperbolic (Lobachevski) geometry at school has heavily grown recently. Pupils of classes of mathematical profile show increased interest in studying qualities of figures on the Lobachevski plane. The main reason for this is the fact that studying the foundations of Lobachevski plane renders essential influence on understanding of the role and place of the parallelity axiom in the school course of elementary geometry that in turn results in more complete mastering of the school program.

The experience of teaching the elements of Lobachevski geometry to school pupils allows formulating the following purposes and problems of such teaching. The purpose of these lessons is to increase the general and mathematical cultural level of pupils and to stimulate and strengthen their interest to mathematics. The problem consists of mastering the material of the elementary concepts of Lobachevski plane geometry by the pupils and studying the importance of the parallelity axiom in the logical substantiation of the school course of elementary geometry. As a rule, the lessons should be carried out for those pupils who have finished studying plane geometry and have begun studies of space geometry.

The material of the course is designed for 8 lessons. As it is accepted at the Russian school, each lesson is 45 minutes long. The subject matter can be divided into four parts. The first part is introductory and deals with the repetition of the school material. It is necessary to indicate distinctly those statements of elementary geometry, proof of which does not depend of the parallelity axiom: these are statements of so-called absolute geometry. Furthermore, it is necessary to indicate the facts based on the properties of parallel straight lines. For the further study, it is necessary to prove three statements of absolute geometry: the first theorem on the external angle of a triangle (the external angle of a triangle is greater than any of internal angles that are not adjacent with it) and also the first and the second theorems of Legendre:

1) The sum of angles of a triangle is not greater than the sum of two right angles.

2) If the sum of angles of some triangle on a plane is equal to the sum of two right angles then the sum of angles of any other triangle is also equal to the straight angle.

Thus, it is very interesting to hear the answer of the pupils to the question "Why parallel straight lines do not cross on a plane? The experience shows, that in 90% of cases the pupils are at a loss to answer this question. The funniest answer is: "In the textbook, the axiom of parallelity is given, therefore, they exist".

The second part of the course consists of the facts from the history of attempts of the proof of the fifth postulate of Euclid. In the beginning of this part it is necessary to explain essence of a problem of the fifth postulate. It is necessary to tell about Euclid, his famous book "Elements of geometry". It is appropriate to explain to the pupils some concepts of the axiomatic method, to mention the basic definitions, axioms and postulates of Euclid and also formulation of the famous fifth postulate. Here it is necessary to explain the essence of the problem and reasons which have encouraged mathematicians since almost two thousand years to try to check the validity of this statement. It is well-known that all attempts to prove this postulate were logically wrong, as they implicitly used other statements actually equivalent to this postulate. We can mention the following statements: by Poseidonius: "On a plane, there exist at least three collinear points equidistant from a straight line"; by Farkas Bolyai: "On a plane, it is possible to draw a circle around any triangle"; by John Wallis: "On a plane there are two similar but not equal triangles"; and by Legendre: "A perpendicular line erected in any point of one of the sides of an acute angle crosses the second side of the angle". In conclusion of this part, it is necessary to tell about mathematicians who have discovered non-Euclidean geometry (Gauss, Lobachevski and Janos Bolyai).

The history of the discovery of Lobachevski geometry has exclusive methodological importance. Generally, the history of the discoveries and development of scientific theories, the practical needs that have brought to their formation, and the historical period of development of a civilization, during which the discoveries were made, are extremely important for the understanding of scientific ideas and ways of their development. In connection with this, the history of the discovery of non-Euclidean geometry has some peculiarities. While the discovery and study of properties of geometrical figures, of concepts and statements of algebra and trigonometry followed the needs of practical activity of people, the research of the problem of the fifth Euclid's postulate had no practical purpose. It has arisen only as a logical problem; its research has resulted in the discovery of non-Euclidean geometry, in the substantiation of the axiomatic method in mathematical research.

In the third part the proofs of the statements formulated above should be carried out. First, the equivalence of the Playfair's axiom (that is present in all Russian Geometry textbooks as the parallelity axiom) to the fifth postulate of Euclid is proved. Then, we prove the equivalence of the axiom of parallelity to the following statement: "the sum of angles of any triangle on a plane is equal to the sum of two right angles". It follows from the second theorem of Legendre that for the fulfillment of the axiom of parallelity, it is enough to prove that on a plane there exists, at least, one triangle with the sum of angles equal to the sum of two right angles. This statement is used for the proof of the equivalence between the statements of Poseidonius, Wallis and Legendre, on the one hand, and the axiom of parallelity, on the other hand. It is necessary to draw special attention to the statement of F.Bolyai. The experience shows that many teachers of Russian schools do not understand where in the proof of the statement "It is possible to describe a circle around any triangle" the axiom of parallelity is used. Therefore, the study of the proof of this statement is extremely useful for pupils, because it allows understanding the essence of the application of this axiom to the substantiation of the statements of elementary geometry.

The fourth part of the course is devoted to the facts of Lobachevski plane geometry and their interpretation on the Cayley - Klein model. We do not demonstrate strict proofs of properties of figures on the Lobachevski plane. The understanding of the main ideas of the proof suffices. The axiom of parallelity of straight lines on the Lobachevski plane is formulated as the logical negation of Playfair's axiom. The Lobachevski's concept of parallel straight lines with a common point is introduced. As the statements of Farkas Bolyai, Poseidonius and John Wallis are equivalent to Playfair's axiom, on the Lobachevski plane there exist triangles, around which it is impossible to describe a circle. Furthermore, points, equidistant from the given straight line, do not belong to one straight line, and there is no similarity, i.e. one more sign of the equality of triangles is true: "The triangles are equal, if their corresponding angles are equal". From the first and second theorems of Legendre, and also from the equivalence of Playfair's axiom to the statement "The sum of angles of a triangle is equal to the sum of two right angles" follows, that on the Lobachevski plane the sum of angles of any triangle is strictly less than the sum of two right angles. Using the statement of Legendre, it is not difficult to explain major property of acute angles and segments on the Lobachevski plane, namely 1-1 correspondence between segments and their parallelity angles. From this fact easily follows that for each angle there is a straight line entirely laying inside the angle and parallel to its sides.

All these statements are extremely interesting to the pupils, cause many questions and stimulate them to the active understanding of the subject matter. In the last part of the course, it is useful to consider the Cayley - Klein model on the Euclidean plane. Usually, this model is constructed on a projective plane as the set of internal points of the real oval quadric. It can be also constructed on a Euclidean plane as a set of internal points of a circle. Under a straight line its part inside the circle is understood. Using such model, it is easy to interpret properties of straight lines on the Lobachevski plane: the Lobachevski's axiom of parallelity, the existence of parallel straight lines and of the straight line parallel to the sides of the angle. Properties of perpendicular straight lines are more difficultly interpreted. One can tell the pupils (without the proof) the following property of perpendicular straight lines on the Cayley - Klein model: Two straight lines are perpendicular, if each straight line on a Euclidean plane, containing on of them, passes through the pole of other straight line. Using this fact, it is easy to explain the statement of Legendre for the perpendiculars to the sides of an acute angle. Also it is possible to construct a common perpendicular to hyperparallels and to explain why it is unique.

The experience of the implementation of the course on elements of Lobachevski geometry with the pupils of mathematical classes has shown its efficiency. The pupils show the increased interest and, most important, the mathematics is no more a boring discipline for them, but rather a subject rich by ideas, beautiful theories and interesting reasonings.

Daniela AßMUS, Frank FÖRSTER, Braunschweig

Fähigkeiten zur Analogieerkennung und zum Transfer mathematischer Strukturen bei mathematisch begabten Grundschulkindern

„Das ist eigentlich die gleiche Aufgabenstellung. Nein, nicht, das ist eigentlich ein anderer Weg, wie man darauf kommen kann.“ (Leon)

Nach Käpnick (1998, 266) ist die „Fähigkeit im selbständigen Transfer erkannter Strukturen“ eines von sieben Merkmalen mathematischer Begabung bei Grundschulkindern. Um im Rahmen eines *Transfers* Strukturen, Strategien oder Ergebnisse von einer mathematischen Situation (Quellbereich) auf eine analoge mathematische Situation übertragen zu können, muss zunächst die Analogie der beiden Situationen erkannt werden. *Analogien* verstehen wir dabei als Paar von Sachverhalten, die sich durch eine gemeinsame Struktur auszeichnen. „Die strukturelle Gemeinsamkeit besteht nicht im Material und nicht in den Eigenschaften oder den Merkmalen der Objekte, sondern in den Relationen, die zwischen den Objekten herrschen.“ (Klauer 2011, 60, nach Gentner, 1983, Gentner & Markman, 1997)

Obwohl es zahlreiche Veröffentlichungen zu Analogieerkennung und Transfer gibt (ebd., 13), nehmen nur wenige expliziten Bezug auf mathematische Begabung. Dies war der Anlass zu der folgenden Videostudie mit insgesamt 32 potentiell mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern.

Die konkreten Zielsetzungen der Videostudie waren:

- Die Analyse von Zusammenhängen zwischen Vorgehensweisen und Analogieerkennung von mathematisch begabten Kindern bei der Bearbeitung von zueinander strukturgleichen Aufgaben;
- Die Ermittlung des Zeitpunkts der Analogieerkennung im Lösungsprozess und deren Eigenständigkeit.

Als Ausgangshypothese gingen wir davon aus, dass Analogieerkennung abhängig von der gewählten Vorgehensweise im Lösungsprozess ist.

1. Rahmenbedingungen und Design der Videostudie

Probanden der Studie waren Teilnehmer der mathematischen Lernwerkstatt der TU Braunschweig. Im Einzelinterview bearbeitete jedes Kind eine von drei Aufgaben. Jede Aufgabe enthielt zwei zueinander analoge Teilaufgaben (Quell- und Zielaufgabe), die jedoch unabhängig voneinander lösbar waren, sodass das Erkennen der analogen Grundstruktur für die Bearbeitung der Zielaufgabe nicht notwendig war, diese aber deutlich erleichterte.

Ausgewählt wurden zwei Aufgaben zu figurierten Zahlen, eine zu *Dreieckszahlen* (Bestimmung der 20. Dreieckszahl vs. Bestimmung der Summe der ersten 20 natürlichen Zahlen) und eine zu *Rechteckszahlen* (Bestimmung der 20. Rechteckszahl vs. Bestimmung der Summe der ersten 20 geraden Zahlen), sowie eine *kombinatorische Aufgabe* (Ermittlung der Anzahl möglicher Kombinationen von drei verschiedenen Eissorten aus 5 möglichen vs. Ermittlung der Anzahl möglicher Dreiecke, die sich zwischen 5 Punkten zeichnen lassen, s. Abb. 1).

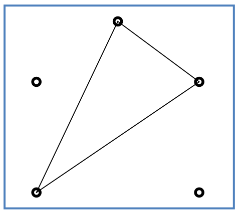


Abb. 1

Nach Durchlesen der Fragestellungen und Klärung relevanter Begriffe bearbeiteten die Probanden die Aufgaben eigenständig. Die Kinder wurden vorab zum lauten Denken aufgefordert und im Anschluss an die Bearbeitung noch einmal in Form eines teilstandardisierten Leitfadeninterviews zu ihren Vorgehensweisen sowie zu möglichen Auffälligkeiten und ggf. Ähnlichkeiten bei den Aufgabenstellungen, Vorgehensweisen und Lösungen befragt. Die Auswertung erfolgte auf Grundlage der Videos und der Transkription wesentlicher Interviewteile. Die Analyse war hinsichtlich verschiedener Aspekte wie Vorgehensweisen bei der Bearbeitung der Aufgabenstellungen, Eigenständigkeit und Stabilität der Analogierkennung sowie Zeitpunkt der Analogieerkennung im Lösungsprozess kategorienbildend angelegt.

2. Erste Ergebnisse

Es zeigten sich bei den drei eingesetzten Aufgaben deutliche Unterschiede bzgl. Analogiekennung und Transfer.

Bei den *Dreieckszahlen* erkannten fast alle Kinder (10 von 12) eine Analogie. Ausnahmen bildeten lediglich die beiden Kinder, welche bei der Bearbeitung der Quellaufgabe eine Vorgehensweise gewählt hatten, die nicht auf der Summation der ersten 20 natürlichen Zahlen beruhte. Hinsichtlich des Zeitpunkts der Analogieerkennung waren große Unterschiede zu beobachten. So wurde die Analogie von 6 Kindern bereits vor Bearbeitung der Zielaufgabe erkannt und dahingehend eigenständig genutzt, dass das Ergebnis der Quellaufgabe auf die Zielaufgabe übertragen wurde (Transfer). Der Zeitpunkt der Analogieerkennung differierte dabei noch zwischen dem erstmaligen Durchlesen der Aufgabenstellungen und dem Zeitpunkt unmittelbar vor Bearbeitung der Zielaufgabe. Die anderen 4 Kinder stellten erst bei oder nach Bearbeitung der Zielaufgabe eine Verbindung zwischen beiden Aufgabenteilen her, einmal war eine gezielte Nachfrage notwendig.

Deutlich seltener als vorab vermutet zeigte sich bei den *Rechteckszahlen* eine Analogieerkennung (3 von 9). Zwar traten darüber hinaus in den Interviews immer wieder Situationen auf, bei denen wir eine Analogiererkennung interpretativ „feststellten", aber diese „Analogie" stellte sich im weiteren Verlauf des Gesprächs als äußerst brüchig heraus und wurde oft mit neuen Gedanken oder der ursprünglichen Lösungsidee des Kindes vermengt. Weiterhin trat die Analogieerkennung (ob vollzogen oder nur vermutet) bei keinem Kind bereits bei der Aufgabenbearbeitung ein, sondern frühestens beim Ergebnisvergleich und wurde überwiegend erst durch Nachfragen der Interviewerin initiiert. Bezüglich der Vorgehensweisen konnten wir feststellen, dass die Analogieerkennung vereinfacht wurde, wenn die Kinder die Veränderung der Figur als hinzukommenden „Haken" interpretiert hatten (s. Abb. 2). Dies trat aber nur in wenigen Fällen auf. Erstaunlicherweise wurde zum Teil auch dann keine Analogie erkannt, wenn von den Kindern gleiche Rechnungen in beiden Teilaufgaben durchgeführt wurden.

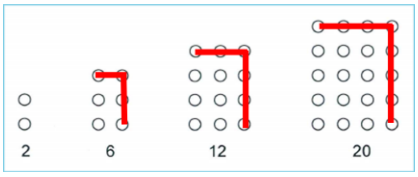


Abb. 2

Die Analogieerkennung bei der *Kombinatorikaufgabe* war bereits im Vorfeld der Erprobung durch die unterschiedlichen Sachkontexte der Aufgabenteile sowie den, im Unterschied zur Quellaufgabe, naheliegenden zeichnerischen Zugang bei der Zielaufgabe als schwierig eingeschätzt worden. Diese Einschätzung bestätigte sich dahingehend, dass nur einzelne Kinder (3 von 11) vor bzw. bei der Bearbeitung der Zielaufgabe eigenständig einen Bezug zur Quellaufgabe herstellten und das Ergebnis transferierten bzw. die Korrektheit des Ergebnisses der Zielaufgabe über die Analogie zur Quellaufgabe begründeten. Alle anderen erkannten die Analogie erst nach der Bearbeitung beim Nebeneinanderlegen der beiden Aufgabenblätter bzw. auf Nachfrage der Interviewerin. Inwieweit die Kinder sich dabei wirklich die analoge Aufgabenstruktur vergegenwärtigten, war nicht immer beurteilbar, da sich die Analogiebegründungen häufig auf die Zuordnung gleicher Zahlen in den Aufgabenstellungen beschränkten. Wurde die Analogie vor der Nachfrage eigenständig erkannt, so wurde dies meist durch die Ergebnisgleichheit beider Aufgabenteile ausgelöst. Eine Abhängigkeit der Analogieerkennung von verwendeten Vorgehensweisen bei der Quellaufgabe war bei dieser Aufgabe nicht zu beobachten, obwohl insgesamt ein großes Spektrum an unterschiedlichen Vorgehensweisen gezeigt wurde.

3. Fazit und Ausblick

Aufgrund der relativ kleinen Datenbasis sind zwar zur Absicherung der Ergebnisse weitere empirische Untersuchungen erforderlich, wir ziehen jedoch ein erstes Fazit:

Das Erkennen und Nutzen von Analogien scheint von der jeweiligen Aufgabenstellung abhängig zu sein und findet zu unterschiedlichen Zeitpunkten im Lösungsprozess statt. Bei der Dreiecksaufgabe gelingt die Analogieerkennung weitgehend und eigenständig, aber auch mathematisch begabte Kinder haben bei komplexeren Aufgabenstellungen Schwierigkeiten, Analogien zu erkennen und zu nutzen.

Bzgl. unserer Eingangshypothese deutet sich eine schlüssig interpretierbare Abhängigkeit der Analogieerkennung von der Vorgehensweise nur bei der Dreiecksaufgabe an. Die Analogieerkennung wurde hier, wie vermutet, begünstigt, wenn bereits die Quellaufgabe über die Summenbildung der ersten 20 natürlichen Zahlen gelöst wurde. Bei der Rechtecksaufgabe könnte die Strukturierung des Zuwachses, nicht aber das konkrete Vorgehen im Quellbereich einen Einfluss haben. Erstaunlicherweise ist bei der Kombinatorikaufgabe kein Zusammenhang erkennbar.

Wie kommt es zu diesen großen Unterschieden in der Analogieerkennung bei den verschiedenen Aufgaben? Die übliche theoretische Erklärung über *Unterschiede in der Transferdistanz* (Barnett/Ceci, nach Klauer 2011, 30) greift nicht, da es sich bei unseren Aufgaben bzgl. dieser Kategorisierung durchweg um einen nahen Transfer handelt, auch wenn es kleine Unterschiede in der Modalität bzw. Repräsentation gibt. Ein möglicher Erklärungsansatz besteht in den unterschiedlichen *Tiefenstrukturen* der Aufgaben. Obwohl nämlich mit der Summation theoretisch isomorphe Tiefenstrukturen vorliegen, zeigen sich aber insbesondere bei der Rechtecksaufgabe deutliche Unterschiede in den für die Kinder naheliegenden Strukturierungen (Produktbildung $20 \cdot 21$ bei Rechteckszahl vs. Summation bzw. Produktbildung $10 \cdot 42$ bei Summenbildung).

Ein Letztes: Gleiche Ergebnisse, selbst wenn diese ohne explizite Rechnungen präsentiert werden, lassen nicht den Schluss zu, dass ein Transfer und somit eine Analogieerkennung vollzogen wurde. Lösungsprozesse lassen sich also nicht vom schriftlichen Produkt aus interpretieren.

Literatur

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Frankfurt a. Main: Lang

Klauer, K. J. (2011): Transfer des Lernens. Warum wir oft mehr lernen als gelehrt wird. Stuttgart: Kohlhammer

Bärbel BARZEL, Stephan HUSSMANN, Timo LEUDERS, Susanne PREDIGER, Freiburg/Dortmund

Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern - Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt

Das Systematisieren und Sichern gehört neben dem Erkunden und dem Vertiefen und Üben zu den zentralen Phasen des Mathematikunterrichts. Während es zum Erkunden und Vertiefen ein breites Spektrum an Konzepten und schüleraktivierenden Lernumgebungen gibt (z.B. Freudenthal 1983; Müller/Wittmann 1990), ist die Anzahl an konzeptionellen Ideen zum Sichern und Systematisieren eher gering. Unter Systematisieren verstehen wir die Prozesse, die dazu dienen die Ideen und Erfahrungen der Lernenden aus den Erkundungsprozessen in Einklang zu bringen mit den existierenden Definitionen und Sätzen der Mathematik. Das Sichern meint alle Tätigkeiten, mit denen man sich das konsolidierte Wissen und Können so aneignet, dass langfristig darauf zugegriffen werden kann.

Zwei Kerngedanken stehen im Mittelpunkt der hier vorgestellten Konzeption (Prediger et al. 2011). Es ist zum einen das Explizieren verschiedener Wissensarten und -facetten und es ist zum anderen, dass die Tätigkeiten des Sicherns und Systematisierens bewusst in die Hände der Schülerinnen und Schüler gelegt werden, sie aktiv am Ordnen beteiligt sind.

Warum ist das Systematisieren und Sichern notwendig?

Das Systematisieren und Sichern reagiert auf verschiedene Bedürfnisse und Anforderungen:

1. Reflexionsbedarf: Was ist genau gelernt worden? Erfahrungen werden nur dann zu Wissen und Können, wenn sie bewusst gemacht werden. Das Reflektieren über das Erkundete stellt einen ersten Schritt dazu dar.

2. Vernetzungs- und Strukturierungsbedarf: Wie hängt das Gelernte zusammen und wie kann man es ordnen? Freudenthal spricht dabei vom lokalen Ordnen:

> „Es blieb eben nichts anders übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Tätigkeit die des lokalen Ordnens genannt.“ (Freudenthal 1963, S. 7)

Dabei geht es nicht nur um das Erkennen des einzelnen Begriffs sondern ihn in seiner Abgrenzung zu anderen und seinem Beziehungsgefüge wahrzunehmen. Allein einzelne Kenntnisse ohne eine systematisierende und strukturierende Einordnung führen nur zu isoliertem, bruchstückhaftem, allenfalls additiv wahrgenommenem Wissen.

3. Regularisierungsbedarf: Auch wenn individuelle (Nach-)Erfindungen zentral im Lernprozess sind, bedarf es gemeinsamer Konzepte und einer gemeinsamen Sprache. Diese bilden das Fundament für aufbauende Lernprozesse und sichern die Tragfähigkeit des Gelernten für die Anbindung an gesellschaftlich geteiltes Wissen. Gallin/Ruf 1990 nennen diesen Schritt vom Singulären zum Konsolidierten das Regularisieren.

4. Dokumentationsbedarf: Zu einem Sichern gehört auch das Festhalten, dabei vor allem das Verschriftlichen des Systematisierten und Konsolidierten, das einerseits bewirkt, dass Gedanken ausgeschärft und präzisiert werden und auf das andererseits später zurückgegriffen werden kann.

Der klassische Ansatz, alle wichtigen Sätze und Verfahren in einem Merkheft oder selbst angelegten Wissensspeicher (Brückner 1978) festzuhalten, hat sich bewährt. Jedoch ist eine zentrale Frage im Projekt KOSIMA, inwieweit können die Lernenden sich die Vielfalt der zu sichernden Wissenselemente selbstständig und aktiv aneignen.

Was muss systematisiert und gesichert werden?

Dazu ist es zunächst hilfreich, Wissensformen nach verschiedenen Arten zu unterscheiden, da damit auch verschiedene Arten des Umgehens im Unterricht verbunden sind. Die klassische Unterscheidung zwischen dem Wissen über Fakten, Konzepte und Zusammenhänge (*konzeptuelles Wissen*) einerseits und Handlungswissen und Können (*prozeduralem Wissen*) andererseits gibt eine erste Orientierung (Hiebert & Carpenter 1992). Ziel des Mathematikunterrichts muss es sein, diese verschiedenen Arten des Wissens zu erwerben. Dazu hilft eine Strukturierung wie in Abbildung 1 gezeigt.

Konzeptuelles Wissen bezieht sich sowohl auf Konzepte (z.B. Zahlen, Operationen, Eigenschaften oder Relationen) als auch auf unterschiedliche Arten von Zusammenhängen. Beim prozeduralen Wissen müssen mathematische Verfahren und Algorithmen von handwerklichen Verfahren unterschieden werden. Neben dem Wissen um Konzepte und Prozeduren ist es für langfristigen Wissenserwerb wichtig, metakognitives Wissen für bewusstes Vorgehen aufzubauen, zum Beispiel Strategien und Abläufe bewusst zu machen um sie auf andere Situationen übertragen zu können.

Was daran ? (Facette des Wissens)

Was ? (Art des Wissens)

	Explizite Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutungen & Vernetzung	Konventionelle Festlegung
Konzeptuelles Wissen				
Konzepte	Definitionen	Beispiele / Gegenbeispiele	Vorstellungen / Darstellungen	Fachwörter Bezeichnungen
Zusammen-hänge	Satz	Beispiele / Gegenbeispiele	(anschauliche) Begründung / Beweis	Namen der Sätze Konventionelle Regeln
Prozedurales Wissen				
Mathematische Verfahren, Algorithmen	Anleitung	Bedingungen der Anwendbarkeit, Spezialfälle Fehlerwissen	Vorstellung / Begründung als Verknüpfung zu konzeptuellen Gehalten	Nicht begründbare Festlegungen
Handwerkliche Verfahren	Anleitung	Umsetzung, Bedingungen		Nicht begründbare Festlegungen
Metakognitives Wissen (z.B. Strategien des Problemlösens; Schritte beim Modellieren, ...)				

Abb. 1: *Wissenselemente im Mathematikunterricht (Prediger et al. 2011)*

Für den Erwerb der Wissensarten entscheidend sind jeweils unterschiedliche Wissensfacetten (vgl. z.B. Winter 1983, Vollrath 2011), die die Wissenselemente in der Tabelle in Abb. 1 vertikal gliedern.

In Definitionen und Sätzen wird konzeptuelles Wissen *explizit formuliert* und kondensiert, muss jedoch bzgl. des Denkens der Lernenden in weiteren Facetten aufgefächert werden: Winter (1983) betont die Bedeutung eines exemplarischen Begriffsverständnisses als erste Form der Begriffsbestimmung (wie im Beispiel von Abb. 2), über die Lernende sich Begriffe aneignen. Gegenbeispiele dienen dabei auch der Erzeugung von Abgrenzungswissen. Für Verfahren und Sätze kommen dabei auch Bedingungen der Anwendbarkeit hinzu. Zwar nachgeordnet, aber wichtig zu lernen, sind *Konventionen* (z.B. Fachwörter) als weitere Wissensfacetten.

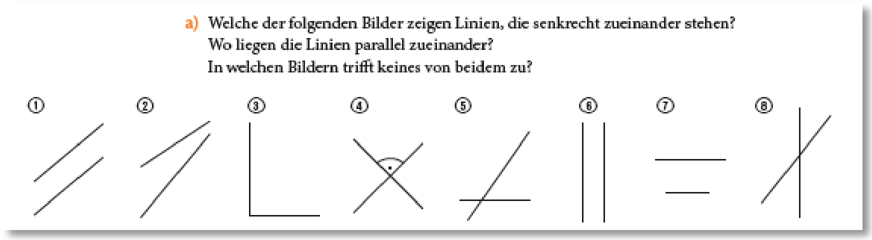


Abb. 2: *„Parallel und Senkrecht" an Beispielen und Gegenbeispielen (Barzel et al. 2012)*

Inhaltliches und strukturelles Verständnis wird durch die Wissensfacette *Bedeutungen und Vernetzungen* erfasst, zu der z.B. inhaltliche Vorstellungen und Darstellungen (vom Hofe 1995, Prediger 2009) gehören. Sie ermöglichen *Vernetzungen* zu anderen Wissenselementen (vgl. Vollrath 2001), z. B. durch inhaltlich-anschauliche Begründungen. Diese Systematisierung in Wissensarten und –facetten (sichtbar in jeder Zelle der Tabelle) ermöglicht eine fokussierte Planung des Systematisierens und Sicherns.

Wie wird systematisiert und gesichert?

Die Phase des Systematisierens und Sicherns erfolgt in der Unterrichtspraxis meist im Unterrichtsgespräch unter Lenkung der Lehrkraft. Eine zentrale Frage im Projekt KOSIMA lautet: Inwieweit können die Lernenden aktiv an dem Prozess des Sicherns und Systematisierens teilhaben?

Dazu wird für jedes zu sichernde Wissenselement gezielt nach Aktivitäten gesucht, mit der sich die Lernenden dieses Wissenselement aneignen (*Aneignungshandlung*). Herausgearbeitet wurde ein Spektrum von Aneignungshandlungen, bei der der Grad der Beteiligung der Lernenden sinkt vom kompletten Alleinfinden über Zwischenstufen bis hin zum ausschließlichen Nachvollziehen. Der Beteiligungsgrad steht dabei in Umkehrbeziehung zum Grad der Konvergenz. Abb. 3 zeigt die Aneignungshandlungen für das Wissenselement Konkretisieren von Konzepten, zu dem Bruder (2001) *Identifizieren* und *Realisieren* als zentrale Tätigkeiten nennt.

Konvergenz	**Art der Aneignungshandlung**	**Beteiligung**
Gering	1. **Realisieren** des Konzepts /Satzes: Finde Beispiele und Gegenbeispiele und erkläre, wieso sie (nicht) passen.	Hoch
	2. **Identifizieren** des Konzepts: Welches dieser Beispiele passt zum Konzept, welche nicht? Wieso?	
Hoch	3. Für gegebene Beispiele (Nicht-)**Passung begründen**: Inwiefern ist dies ein Gegenbeispiel? Wieso?	Gering

***Abb. 3**: Aneignungshandlungen für das Konkretisieren von Konzepten*

Umsetzung und Herausforderungen

Im Rahmen des Schulbuchs Mathewerkstatt wurden Lernumgebungen zum Ordnen entwickelt. Die Ergebnisse fließen in einen Wissensspeicher, der trotz einer gewissen Vorstrukturierung die Möglichkeit zur individuellen Dokumentation lässt. Inwieweit die jeweiligen Gegenstände wirklich systematisiert und gesichert werden und zu langfristigem Wissen und Können führen, untersuchen wir im Rahmen des KOSIMA-Projekts (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen, vgl. Hußmann et al 2011).

Anmerkungen

Alle Autorinnen und Autoren haben am Projekt gleichberechtigt mitgewirkt.
Literatur in der längeren Fassung des Beitrags unter www.ko-si-ma.de

Andreas BAUER, Universität Würzburg

Argumentieren mit multiplen und dynamischen Darstellungen

Wird über mathematische Objekte gesprochen, so entziehen sich diese als abstrakte, nicht-stoffliche Objekte dem direkten Zugriff menschlicher Wahrnehmung. Ein Zugang zu diesen Objekten ist nur über Repräsentationen möglich, also sichtbare Informationsdarbietungen, welche bestimmte Eigenschaften eines mathematischen Objektes abbilden (vgl. Duval 2006). Diese bezeichnet man in Abgrenzung zu den mentalen, subjektiven Modellen mathematischer Objekte als *externe* Repräsentationen.

Der Computer hat als relativ neues Medium die Bandbreite externer Repräsentationen erheblich erweitert, insbesondere durch die Einführung dynamischer und dynamisch verbundener multipler Darstellungen (vgl. Abbildung 1). Multiple, externe Repräsentationen (MER) waren bereits Gegenstand von Studien. Diese haben jedoch nicht nur positive Effekte nachweisen können (vgl. Acevedo Nistal et al 2009).

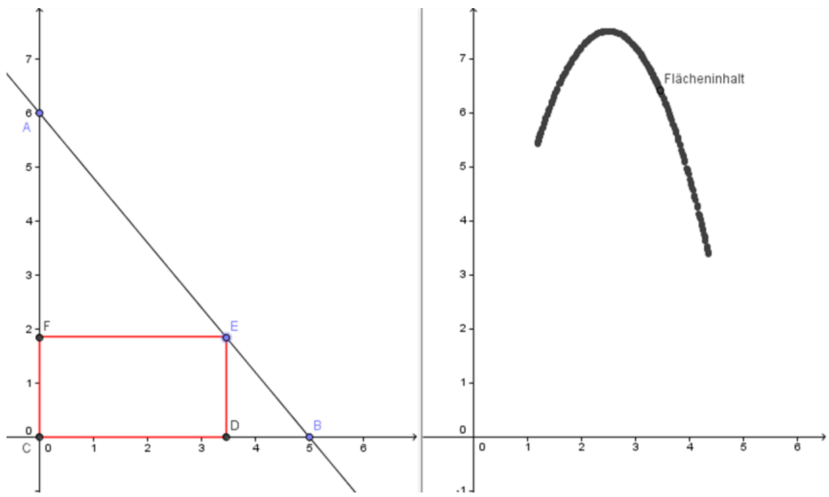


Abbildung 1: Beispiel einer multiplen, dynamischen Repräsentation

Vor allem die Verbindung von und das Umschalten zwischen den einzelnen Darstellungen bereiten Lernenden wegen des notwendigen Wissens über Repräsentationen Schwierigkeiten, sodass diese die Vorteile multipler Repräsentationen nicht immer nutzen können (vgl. Ainsworth 2006).

Die dynamische Verbindung dieser Repräsentationen mit Hilfe des Rechners verspricht jedoch eine Vereinfachung des Verständnisses durch eine automatische Übersetzung zwischen den Teilrepräsentationen der MER im Sinne des *„computational offloading“* (vgl. Scaife & Rogers 1996): Werden einzelne Eigenschaften – beispielsweise die Lage des Punktes E auf der

Gerade in Abbildung 1 – eines mathematischen Objektes variiert, so verändern sich dessen Repräsentationen analog zueinander und zum zugrundeliegenden Objekt. Dadurch wird die Struktur des abgebildeten Objektes sichtbar, weshalb die dynamische Verbindung multipler Repräsentationen im Prozess der Verknüpfung von Repräsentationen möglicherweise eine Schlüsselrolle spielt.

Repräsentationen am Computer lassen sich anhand zweier Merkmale klassifizieren: durch vorhandene Dynamik und/oder Multiplizität der Darstellung. Dabei wird eine Repräsentation als dynamisch bezeichnet, wenn sich die dargestellten Eigenschaften des mathematischen Objektes über die Zeit verändern. Multiple Darstellungen sind solche, in denen mehrere Einzelrepräsentationen eines mathematischen Objektes dargestellt werden, wobei die einzelnen Repräsentationen jeweils unterschiedliche Eigenschaften des Objektes darstellen. Diese beiden Merkmale können zudem gemeinsam auftreten, sodass sich eine multiple, dynamische Darstellung ergibt.

Aus dieser Art der Unterscheidung ergeben sich vier Kategorien, in welche externe Repräsentationen eingeordnet werden können:

IER Isolierte, statische ext. Rep. *Bsp.: Gleichung, Abbildung oder Wertetabelle*	**IDER** Isolierte, dynamische ext. Rep. *Bsp.: Konstruktion aus der dynamischen Geometrie*
MER Multiple, statische ext. Rep. *Bsp.: Funktion als Gleichung, Graph und Wertetabelle*	**MDER** Multiple, dynamische ext. Rep. *Bsp.: Wie MER, die Funktionsparameter werden mit Schiebereglern variiert*

Tabelle 1: Kategorien von Repräsentationen

Zur Voruntersuchung

In der Voruntersuchung wurden insgesamt 80 Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 10 und 11 drei zufällig ausgewählte Aufgaben in jeweils einer Repräsentationsvariante – IER, IDER, MER oder MDER – am Computer vorgelegt. Die Bearbeitung erfolgte nicht am Computer, sondern auf dem Blatt, um das benötigte technische Vorwissen möglichst gering zu halten. Bei der Untersuchung wird von der Grundannahme ausgegangen, dass, wenn Lernende dynamische bzw. multiple Argumente vorbringen, dies auf dynamische bzw. multiple interne Repräsentationen hinweist.

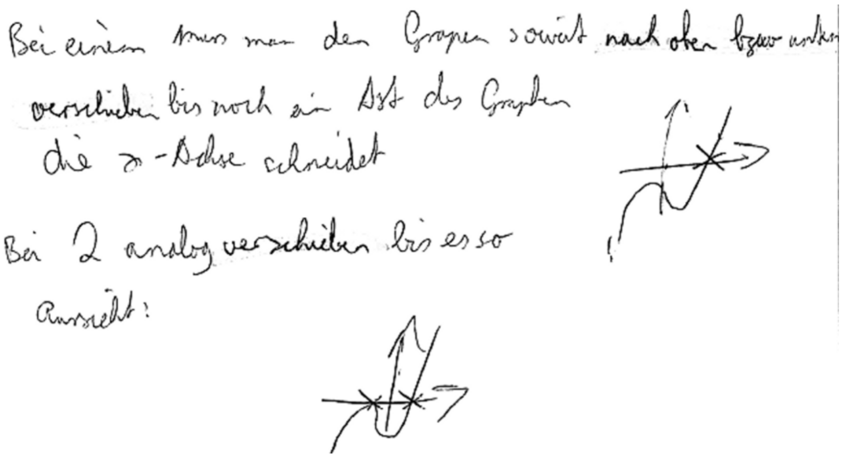


Abbildung 2: Ein dynamisches Argument

Als dynamische Argumente werden solche Schüleräußerungen bezeichnet, welche Schlüsselworte oder -formulierungen enthalten, die auf eine dynamische Schülervorstellung schließen lassen, zum Beispiel „*verschiebt* sich der Punkt E", „*variiert* man die Größe" oder „*bewegt* sich der Graph" (siehe Abbildung 2).

Entsprechend erfolgt die Klassifizierung eines Arguments als multiples Argument, wenn sich die angebotene Argumentation über mehrere Einzelrepräsentationen erstreckt oder ein Repräsentationswechsel durchgeführt wurde (siehe Abbildung 3).

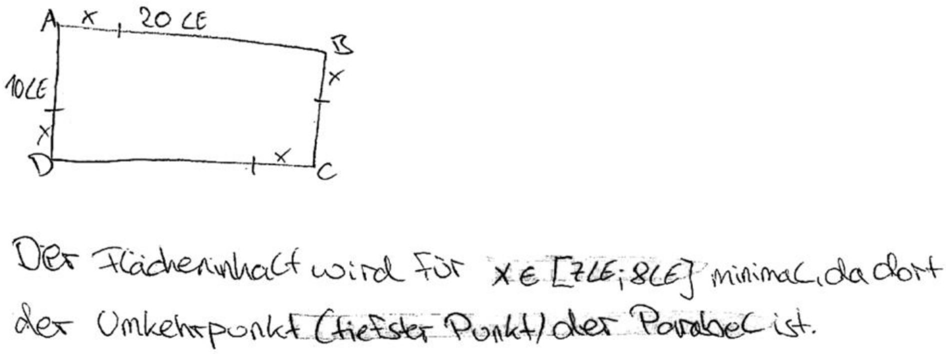


Abbildung 3: Ein multiples Argument

Kombiniert man die Kategorien von Repräsentationen mit denen der Argumente, so ergibt sich ein zweidimensionales Antwortschema (Abbildung 4). Durch die in der Aufgabenstellung gegebene Repräsentationsform und die Klassifizierung des schriftlich vorgebrachten Arguments anhand des Auftretens von dynamischen oder multiplen Argumenten lässt sich jede Antwort ins Schema einordnen. Dadurch lässt sich ein möglicher Zusammenhang zwischen angebotenen Repräsentationen und der Art der Argumente beschreiben.

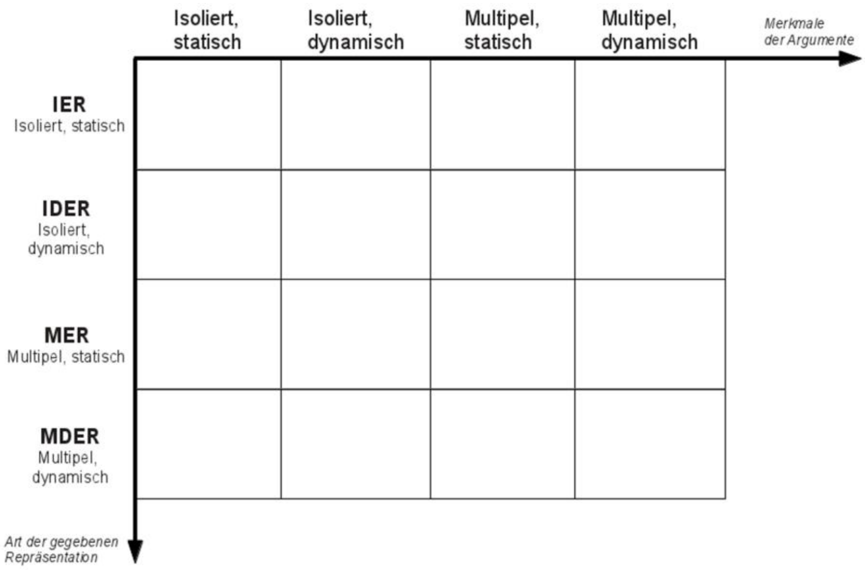


Abbildung 4: Antwortschema zur Klassifikation von Argumenten

Gibt es einen Zusammenhang...

- … zwischen dynamischen externen Repräsentationen und dynamischen Argumenten?
- … zwischen multiplen externen Repräsentationen und multiplen Argumenten?
- … zwischen dynamischen Repräsentation und multiplen Argumenten?

Besonders die letzte Frage erscheint interessant, ließe sich so doch ein Hinweis auf die Beantwortung der Frage geben, ob die dynamische Verbindung multipler Repräsentationen tatsächlich eine Schlüsselrolle bei deren Verknüpfung spielt. Das Dissertationsprojekt, welches die obigen möglichen Zusammenhänge untersuchen soll, befindet sich derzeit in der Auswertungsphase der ersten Voruntersuchung.

Literatur

Acevedo Nistal, Ana; Dooren, W.; Clarebout, G.; Elen, J.; Verschaffel, L. (2009): Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. In: *ZDM Mathematics Education* 41 (5), S. 627–636

Ainsworth, Shaaron (2006): DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. In: *Learning and Instruction* 16, S. 183–198

Duval, Raymond (2006): A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. In: *Educ Stud Math* 61 (1-2), S. 103–131.

Scaife, M.; Rogers, Y. (1996): External cognition: how do graphical representations work? In: *International Journal of Human-Computer Studies* 45, S. 185–213.

Sabine BAUM, Würzburg

Das Mathematiklabor und seine Verzahnung mit dem Schulunterricht

Seit einigen Jahren gibt es an der Universität Würzburg das Mathematiklabor, das fortwährend weiter entwickelt wird. Seit Anfang 2012 empfangen Lehramtsstudierende der Universität im Rahmen von Praxisseminaren regelmäßig Schulklassen im Labor. Im Folgenden sollen die Konzeption des Labors, erste Ideen zur Unterrichtsintegration und das im Rahmen des Mathematiklabors stehende Dissertationsvorhaben vorgestellt werden.

1. Das Mathematiklabor - ein Schülerlabor

Das Mathematiklabor versteht sich als Schülerlabor und lässt sich damit, angelehnt an eine allgemeine Beschreibung durch Guderian und Priemer (2008), als außerschulischer Lernort definieren, in dem sich Schülerinnen und Schüler in handlungsorientierten Unterrichtsformen mit mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fragestellungen experimentell beschäftigen.

Das Mathematiklabor befindet sich auf dem Campus der Universität Würzburg und gehört zu den wenigen Schülerlaboren, die mathematische Inhalte in den Mittelpunkt stellen (Dähnhardt, Haupt & Pawek 2009, S.18). Für den Besuch stehen den Schülerinnen und Schülern verschiedene Stationen zur Auswahl, von denen aber nur eine während des Besuchs bearbeitet wird, um eine genügende Durchdringungstiefe zu erreichen. In außermathematischen Stationen können technische Geräte (z.B. Bagger) und verschiedene Phänomene und Abläufe, die in Natur und Alltag vorkommen, (z.B. Einparkvorgang) mathematisch durchdrungen werden. In innermathematischen Stationen werden mathematische Objekte (z.B. Gelenkvierecke) experimentell untersucht oder anhand historischer Konstruktionselemente (z.B. Ellipse) analysiert. Die Zielgruppe sind Schülerinnen und Schüler ab der 10.Jahrgangsstufe, die, betreut durch Studierende des Lehramts, 3 Stunden an einer Station arbeiten. Das soll möglichst selbstständig in Kleingruppen geschehen. Um das für alle Schülerinnen und Schüler in der begrenzten Besuchszeit zu gewährleisten, sind die Arbeitswege weitgehend vorstrukturiert, und es stehen gestufte Lösungshilfen und kurze Videotutorials zur Verfügung, die bei Bedarf abgerufen werden können.

Kennzeichnend für die Arbeitsweise im Mathematiklabor ist die dem Labor zugrunde liegende 3-Phasen-Idee *Experimentieren – Mathematisieren – Simulieren*, die im Folgenden an einem einfachen Beispiel erläutert wird.

2. Die 3-Phasen-Idee

Folgendes Beispiel ist ein kleiner vereinfachter Ausschnitt aus der Laborstation „Mathematische Aspekte des Scheibenwischers".

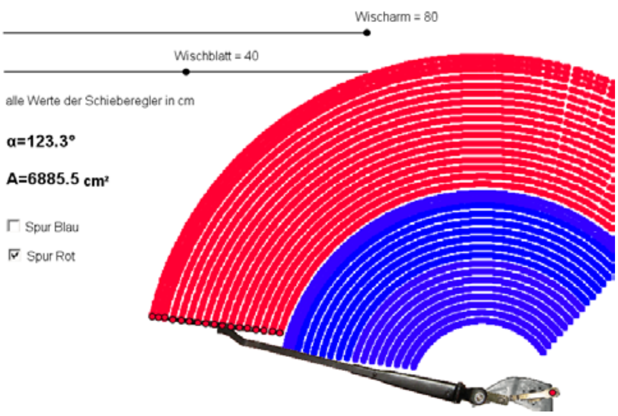
Experimentieren Zum Experimentieren stehen gegenständliche Modelle (Realmodelle) zur Verfügung, an denen grundlegende Einsichten in die

Struktur des Phänomens gewonnen werden können. Durch das Betätigen der Kurbel des Einarmscheibenwischers wird im Experiment die Wischfläche sichtbar, anhand derer man Vermutungen über die geometrischen Formen der Wischfeldbegrenzung und somit zur gewischten Fläche treffen kann. Mithilfe eines Tafelzirkels erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass die Wischfeldbegrenzung durch zwei Kreisbögen mit demselben Mittelpunkt beschrieben werden kann, deren Radien durch die Längen am Scheibenwischer gegeben sind. Angelehnt an eine Kategorisierung von Experimenten durch Barzel, Büchter und Leuders (2007) nach der Rolle, die die Mathematik dabei spielt, handelt es sich in dieser Phase nur um außermathematische Experimente mit Realmodellen bzw. Experimente mit Realisierungen mathematischer Objekte, also nicht um innermathematische Experimente. Die Phase des Experimentierens liefert die Basis für die Erfahrungswelt der Schüler und bereitet die Mathematisierung vor.

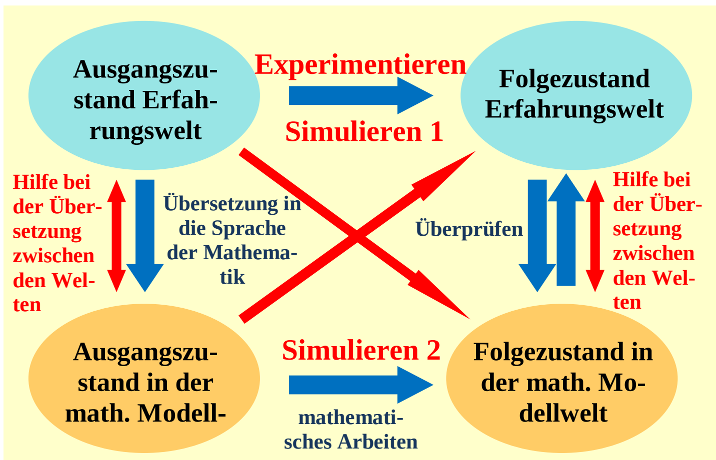
Mathematisieren Beim Mathematisieren geht es um das Aufstellen eines mathematischen Modells. Im Beispiel des Scheibenwischers wird nach der Formel für die Berechnung der Wischfeldgröße A_{WF} gefragt. Vereinfachend soll zunächst davon ausgegangen werden, dass Wischarm und Wischblatt parallel übereinander liegen. In der Experimentierphase wurden dabei bereits die relevanten Einflussgrößen, die Wischarmlänge l_{WA}, die Wischblattlänge l_{WB} und der Auslenkwinkel α, erkannt, die hier algebraisch ausgedrückt und in Bezug auf die konkrete Problemstellung in Zusammenhang gebracht werden sollen: $A_{WF} = \frac{\alpha}{180°}\pi \cdot l_{WA} \cdot l_{WB}$.

Simulieren In dieser Phase arbeiten die Schülerinnen und Schüler mit vorgefertigten GeoGebra-Applets, in denen sie ihre Ergebnisse überprüfen, Experimentiererfahrungen, hier auch innermathematische Experimente, erweitern und neue Einsichten gewinnen können. In den Simulationen sind eine virtuelle, dynamische Repräsentation des Realmodels und die des mathematischen Modells miteinander verbunden. Über Schieberegler können sie die Werte wichtiger Einflussgrößen systematisch variieren und dadurch

Fragen beantworten, die typisch für den Aspekt des Änderungsverhaltens in funktionalen Zusammenhängen (Vollrath 1989, S.12) sind. Eine entsprechende Frage lautet: Wie verändert sich der Flächeninhalt des Wischfeldes, wenn die Länge des Wischarms verdoppelt, gedrittelt ... wird? Die Proportionalität kann mathematisch mithilfe der Formel begründet werden. Die Arbeit mit der Simulation kann der Mathematisierung aber auch vorgeschaltet sein. In diesem Fall würde die Begründung zur Proportionalität qualitativ erfolgen, indem der hier verfremdet dargestellte funktionale Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Wischarmlänge durch geläufigere Darstellungen, wie qualitative Graphen oder Tabellen, dargestellt wird.



Zusammenhang der 3 Phasen Das Experimentieren und Simulieren soll den Modellbildungsprozess unterstützen. Entscheidend hierfür ist zum einen, dass durch das Experiment der reale Folgezustand unabhängig von der Mathematisierung sichtbar wird und mit dem mathematischen Ergebnis verglichen werden kann. Zum anderen wird in der Verbindung von gegenständlicher und algebraischer Repräsentation in den Simulationen ein wichtiger Einfluss vermutet, da die Übersetzungen zwischen Erfahrungs- und mathematischer Modellwelt so erleichtert werden sollen.



3. Integration in den Schulunterricht

Die Forderung nach Verzahnung von Schülerlaboren mit dem Schulunterricht findet sich häufig (z.B. Engeln 2004). Konzepte für eine solche Verzahnung sind allerdings selten. Für das Mathematiklabor werden spezielle Module zur Vor- und Nachbereitung des Laborbesuchs im Unterricht entwickelt. Für die Vorbereitung gibt es sogenannte Ministationen, welche die 3 Phasen für eine Unterrichtsstunde an einem einfachen Beispiel (z.B. Schachteln falten – funktionale Zusammenhänge zwischen Oberflächeninhalt und Volumen) aufbereiten und so durch das Kennenlernen der Arbeitsweise und methodische Reflexionen vorbereiten. In der Nachbereitung kommt es zur gegenseitigen Vorstellung der Anwendungszusammenhänge mithilfe zentraler Simulationen, bevor der funktionale Zusammenhang durch Graphen explizit gemacht wird und eine Überleitung in eine Unterrichtseinheit zur Betrachtung spezieller Funktionstypen stattfindet.

4. Forschungsfragen

Im Rahmen des Dissertationsvorhabens stehen schülerbezogene Zielsetzungen des Labors im Vordergrund. Auf der einen Seite sollen Akzeptanz und Interesse für mathematische Inhalte geschaffen werden. Auf der anderen Seite geht es um die Wiederholung, Vertiefung und Vermittlung mathematischer Inhalte und Fertigkeiten. Hierbei muss zwischen stationsabhängiger und stationsunabhängiger Zielsetzung unterschieden werden, da die Schülerinnen und Schüler verschiedene Stationen bearbeiten. Stationsabhängig geht es um das vertiefte Kennenlernen eines bestimmten Anwendungsbereichs, das stationsunabhängige Ziel liegt in dem zugrunde, was allen Stationen gemeinsam ist, also der 3-Phasen-Idee. Wie oben bereits dargestellt soll durch den methodischen Dreischritt das Prozessziel mathematisches Modellieren unterstützt werden. Darüber hinaus soll in den Phasen das Erkennen von und Argumentieren mit funktionalen Zusammenhängen auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus gefördert werden.

Das empirische Vorhaben wird sich zunächst auf den Beitrag des Mathematiklabors zum funktionalen Denken konzentrieren. Außerdem werden Konzepte für die Verzahnung des Labors mit dem Unterricht entwickelt, die die skizzierte Zielsetzung des Mathematiklabors unterstützen sollen.

Literatur

Appell, K., Roth, J., Weigand, H.-G. (2008): Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren – Konzeption eines MATHEMATIK-Labors. In: Eva Vásárhelyi (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2008, WTM-Verlag, Münster, 25-28

Barzel,B., Büchter, A., Leuders, T. (2007): Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen, Berlin

Dähnhardt, D., Haupt, O. J., Pawek, C. (Hrsg.) (2009): Kursbuch 2010: Schülerlabore in Deutschland. Tectum, Marburg

Engeln, K. (2004): Schülerlabors: authentische, aktivierende Lernumgebungen als Möglichkeit, Interesse an Naturwissenschaften und Technik zu wecken. Logos, Berlin

Guderian, P., Priemer, B. (2008): Interessenförderung durch Schülerlaborbesuche – eine Zusammenfassung der Forschung in Deutschland. In: Physik und Didaktik in Schule und Hochschule, 2/7, 27-36

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: Journal der Mathematikdidaktik 10, S.3–37

Isabell BAUSCH, Regina BRUDER, Darmstadt

Beurteilen von Unterrichtsentwürfen - Eine Repertory-Grid-Befragung im Längsschnitt

Der Rückgriff auf das im Studium gelernte Professionswissen fällt gerade den noch nicht routinierten Lehrkräften während des Unterrichtsalltags schwer (Fischler, 2001). Um diesem Phänomen schon in der ersten Phase der Lehrerausbildung entgegen zu wirken, wurde eine adaptierte Repertory-Grid-Befragung (Bausch, Bruder & Prescott, 2011) entwickelt. Das Ziel dieser Befragung ist zum einen die explorative Erforschung des Erwerbs von mathematikdidaktischem Wissen und zum anderen die Entwicklung eines daraus resultierenden Feedbackinstruments zur Förderung von Professionalisierungsprozessen im Lehramtsstudium Mathematik.

1. Theoretischer Hintergrund

Basierend auf der Theorie persönlicher Konstrukte (Kelly, 1955) kann das unterrichtliche Handeln einer Mathematiklehrkraft dadurch beschrieben werden, dass sie ihr Handeln auf der Basis von Konstrukten über Mathematikunterricht antizipiert. Diese Konstrukte können sich aufgrund von Unterrichtserfahrungen, Erfahrungen in einer Fortbildung oder Ähnlichem verändern, neu bilden oder im existierenden Konstruktsystem reorganisieren. Während des Lehramtsstudiums werden Konstrukte über guten Mathematikunterricht überwiegend auf der Basis von Erfahrungen, die innerhalb der Lehrveranstaltungen erworben werden, überprüft und reorganisiert. Dies gelingt jedoch nur partiell, da - wie Fischler (2001) beschreibt - ein Spannungsfeld zwischen Professionswissen und unterrichtlichem Handeln zu beobachten ist. Es entsteht also eine Notwendigkeit die Konstrukte zukünftiger Mathematiklehrkräfte zu erfassen, zu erforschen und hieraus Unterstützungsinstrumente zu entwickeln, die die Entwicklung von verfügbaren Konstruktsystemen fördern, so dass auch im Unterrichtsalltag die gelernten Theorien angewendet werden können.

2. Datenerhebung und Auswertung

Um individuelle Konstrukte über guten Mathematikunterricht zu erfassen, wurde eine Repertory-Grid-Befragung designt (Bausch, Bruder & Prescott, 2011), in deren Zentrum das Vergleichen von zwei Unterrichtsentwürfen steht. Als Ergebnis dieses Vergleichs entsteht ein so genanntes Grid (Abb.1), welches die Konstrukte der Studierenden beinhaltet. Diese Konstrukte werden mithilfe eines

Abbildung 1: Beispiel für ein Grid

eigens dafür entwickelten Kategoriensystems (Abb. 2) ausgewertet. Dieses Kategoriensystem beinhaltet zum einen Elemente eines gelungenen Unterrichtsentwurfs und zum anderen Qualitätskriterien für den Mathematikunterricht (Bausch, Bruder & Prescott, 2011).

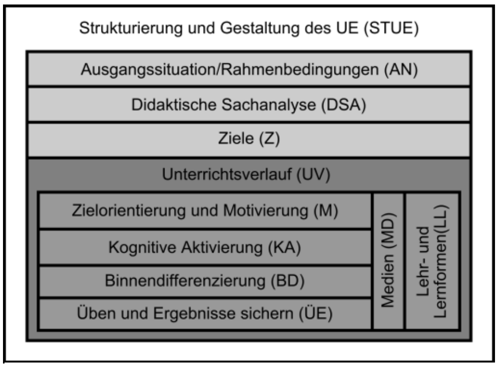


Abbildung 2: Kategoriensystem zur Analyse der Konstrukte

An der sogenannten Lesson-Plan-Studie haben bisher 90 Studierende der University of Technology Sydney und 334 Studierende der TU Darmstadt teilgenommen. Durch die Einbettung der Befragung in obligatorische Mathematikdidaktik-Lehrveranstaltungen sind innerhalb der Stichprobe auch längsschnittliche Evaluationen möglich. Im Folgenden sollen die Ergebnisse von 42 Lehramtsstudierenden der TU Darmstadt beschrieben werden, die sowohl im ersten, als auch im dritten Semester an der Befragung teilgenommen haben.

3. Ergebnisse einer Clusteranalyse

Um Muster in Bezug auf die Entwicklung von mathematikdidaktischen Konstrukten innerhalb des ersten Studienjahrs zu identifizieren, wurden die Veränderungen in den Konstrukten mithilfe einer Clusteranalyse untersucht (Wardmethode) und anschließend mittels einer Clusterzentrumsanalyse optimiert. Hierbei entstanden folgende vier Cluster:

<u>Cluster 1 (Trend zur Unschärfe) N=14:</u> Cluster 1 richtet in der ersten Befragung einen Fokus auf motivationsbeschreibende Aspekten (Abb. 3). Dieser Fokus lässt sich in der zweiten Befragung nicht mehr erkennen. Stattdessen nennen die Studierenden Merkmale, die den Medieneinsatz und die Struktur des Unterrichtsentwurfs beschreiben. Insgesamt lässt sich bei dieser Gruppe eine abnehmende Tendenz sowohl in der Anzahl der Merkmale, als auch in der Anzahl der Kategorien beobachten. Somit wird die Analyse der Unterrichtsentwürfe weniger detailliert und die zu Beginn der Ausbildung existierenden Fokusse treten in den Hintergrund.

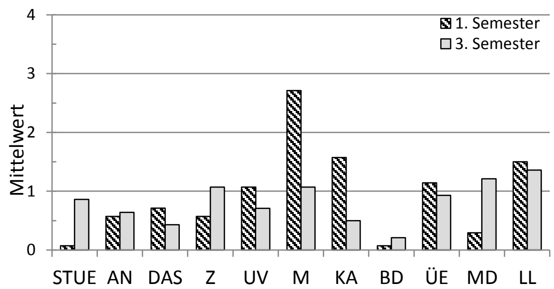


Abbildung 3: Ergebnisse Cluster 1

<u>Cluster 2 (Relevanzverschiebung) N=11:</u> Diese Gruppe von Studierenden richtet in der ersten Befragung ihre Aufmerksamkeit auf die Kategorien „Unterrichtsverlauf“, „Motivation“ und „kognitive Aktivierung“ (Abb. 4).

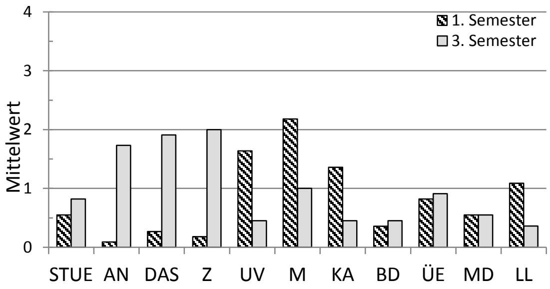


Abbildung 4: Ergebnisse Cluster 2

Im Vergleich hierzu verschiebt sich diese Orientierung in der zweiten Befragung hin zu den Kategorien „Ausgangsniveausicherung“, „Didaktische Sachanalyse“ und „Ziele“. Insgesamt nennt die Gruppe zum Vergleichen der Unterrichtsentwürfe sowohl in der ersten, als auch in der zweiten Befragung ähnlich viele Merkmale und Kategorien. Somit ergibt sich für dieses Cluster eine Relevanzverschiebung in Bezug auf die zu analysierenden Merkmale der Unterrichtsentwürfe. Inhaltlich passt diese Fokusverschiebung zu den Lerninhalten der Lehrveranstaltung im 3. Semester, so dass aktuelle Lerninhalte die bereits vorhandenen Konstrukte überdecken.

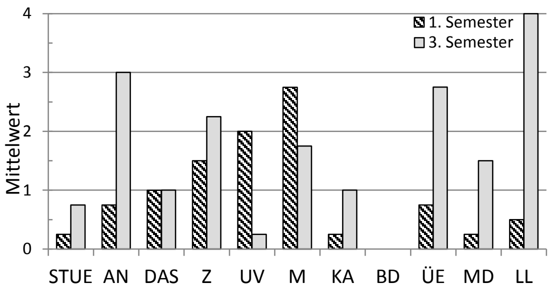


Abbildung 5: Ergebnisse Cluster 3

<u>Cluster 3 (Erweiterung der -Perspektive) N=4:</u> Ebenso wie Cluster 1 und Cluster 2 lässt sich auch in dieser Gruppe ein Fokus auf motivationsbeschreibende Konstrukte erkennen, wobei hier auch der Verlauf und die Ziele des Unterrichts im Mittelpunkt der Analyse stehen (Abb. 5). In der zweiten Befragung reduzieren sich einerseits die Merkmale zum „Unterrichtsverlauf“. Andererseits bilden sich in den Kategorien „Ausgangsniveausicherung“, „Üben und Ergebnissicherung“, „Medien“, „Lehr- und Lernformen“ neue Konstrukte aus. Diese Beobachtung kann mit einem Zuwachs an Merkmalen und Kategorien bestärkt werden. Insgesamt wird der Blick auf Unterrichtsentwürfe vielfältiger und detaillierter.

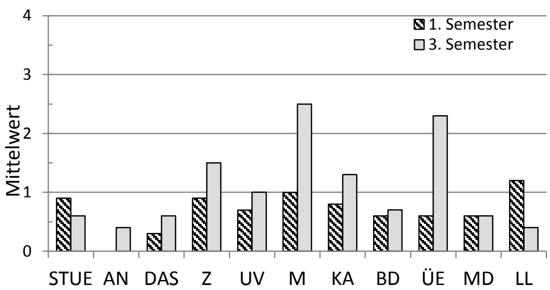


Abbildung 6: Ergebnisse Cluster 4

<u>Cluster 4 (Ausbildung von Fokussen) N=10:</u> Cluster 4 unterscheidet sich von den zuvor beschriebenen dadurch, dass diese Gruppe in der ersten Befragung keinen speziellen Analyseschwerpunkt erkennen lässt (Abb. 6). In der zweiten Befragung hingegen zeigen sich detaillierte Vorstellungen in den Kategorien „Ziele“, „Motivation“, „Üben und Ergebnissicherung“. Diese Beobachtung kann dadurch gestützt werden, dass sich

die Anzahl der genannten Merkmale erhöht, wohingegen sich die Anzahl der Kategorien nicht ändert. Diese Gruppe entwickelt also in der zweiten Befragung einen detaillierten Blick auf die Unterrichtsentwürfe.

4. Diskussion und Ausblick

Die vorgestellten Ergebnisse der Clusteranalyse zeigen, dass mithilfe der Lesson-Plan-Studie verschiedene Entwicklungen in Bezug auf die Analyse von Unterrichtsentwürfen beschrieben werden können. Es ist jedoch noch zu prüfen, ob sich die vorgestellten Ergebnisse auch bei einer größeren Stichprobe reproduzieren lassen, da die Stichprobe mit N=42 noch relativ klein ist. Dennoch lassen sich diese Ergebnisse nutzen, um ein Feedbackinstrument zu entwickeln, welches darauf zielt den Kompetenzerwerb im Lehramtsstudium zu unterstützen. Ein solches individualisiertes Feedback, welches verschiedene Bezugsnormen (Rheinberg, 2002) als Basis für eine motivierende Rückmeldung verwendet, soll die Studierenden dazu anregen ihr aktuelles Konstruktsystem zu reflektieren und die aufgezeigten Entwicklungspotentiale zu nutzen. Eine solche Auseinandersetzung zielt darauf ab die eigenen Vorstellungen von Mathematikunterricht zu hinterfragen, so dass später ein impliziter Rückgriff auf dieses Konstruktsystem möglich ist und so ein adäquates Handeln im Mathematikunterricht möglich wird.

Da die Auswertung der Lesson-Plan-Studie zurzeit noch sehr aufwendig ist, soll die Befragung in Zukunft über ein Webinterface realisiert werden, welches eine teilautomatisierte Auswertung ermöglicht. Ein solches individuelles Feedback kann beispielsweise auch Teil eines (e-)Portfolios sein, welches den individuellen Lernprozess dokumentiert.

Literatur

Bausch, I., Bruder, R., & Prescott, A. (2011). Personal Constructs of Planning Mathematics Lessons. In Ubuz, B., Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, S.113–120). Ankara, Türkei: PME

Fischler, H. (2001). Verfahren zur Erfassung von Lehrer-Vorstellungen zum Lehren und Lernen in den Naturwissenschaften. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften (7). S.105-120

Kelly, G. A. (1955). The psychology of personal constructs. New York: Norton.

Rheinberg, Falko (2002): Motivationsförderung im Unterrichtsalltag. Probleme, Untersuchungen, Ergebnisse. In: Pädagogik (9), S. 8–13

Ramona BEHRENS, Würzburg

Forschendes Lernen im Mathematikunterricht – unterstützt durch den Einsatz von Taschencomputern

Forschendes Lernen ist ein aktiver Prozess, bei dem die Lernenden eigenständig Fragestellungen entwickeln und das Ziel verfolgen, diese selbstständig zu beantworten (vgl. auch Messner, 2009, S. 22f, Bönsch 1995, S. 198f). Im Rahmen eines Forschungsprojekts wird der Frage nachgegangen, inwieweit der Einsatz von Taschencomputern im Mathematikunterricht beim forschenden Lernen unterstützend helfen kann.

Zur Annäherung an den schwer zu fassenden Begriff des forschenden Lernens orientieren wir uns zunächst an dem Begriff „Forschung", wie ihn Dewey gesehen hat (2008, S. 131). Zu Beginn der Forschung liegt nach Dewey eine „unbestimmte", also ungewisse oder ungeklärte „Situation" vor. Diese wird „offen" genannt, womit ausgedrückt wird, dass ihre Bestandteile, von denen man nicht alle Eigenschaften kennt, nicht in Beziehung zueinander stehen. Ziel der Forschung ist es, die „unbestimmte Situation" in eine „bestimmte Situation" zu überführen, die sich dadurch auszeichnet, dass sie „geschlossen" ist. Durch Forschung sind nämlich wesentliche Eigenschaften der Elemente und deren Beziehungen zueinander ermittelt wurden. Das Ergebnis der Forschung darf nicht vom Forscher abhängig sein, sondern muss objektiv, also auch von anderen, reproduzierbar sein, dies beschreibt Dewey mit den Begriffen „controlled" oder „directed".

Forschendes Lernen ist dadurch kennzeichnet, dass der Forschende der Arbeitsweise der wissenschaftlichen Forschung entsprechend, selbstständig Fragestellungen und Vermutungen aufstellt. Forschung basiert nicht auf Versuch und Irrtum, sondern auf einer reflektierten Handlungsweise. Deshalb ist forschendes Lernen ein, zu einem großen Teil selbstbestimmter, Lernprozess, bei dem es wichtig ist, dass der Lernende sein Vorgehen systematisch plant, mögliche Vorgehensweisen und Methoden eigenständig auswählt sowie auch reflektiert (vgl. Bönsch 1995, S. 199, Radits 2002 zit. nach Aepkers 2002, S. 76). Einige dieser Kriterien treten auch beim entdeckenden Lernen auf, jedoch nicht in so starker Ausprägung wie beim forschenden Lernen. Bei beiden Konzepten ist Lernen kein rezeptiver Vorgang, sondern ein aktiver Prozess, bei dem Lerninhalte von den Schülern größtenteils selbstständig erarbeitet werden (vgl. Bönsch 1995, S. 198). Beim forschenden Lernen ist im Gegensatz zum entdeckenden Lernen das systematische Vorgehen stärker ausgeprägt, die Entwicklung von eigenen Fragestellungen spielt eine größere Rolle, und es werden die angewandten Methoden stärker reflektiert. Aus diesem Grund könnte man entdeckendes

Lernen als Vorform des forschenden Lernens bezeichnen (vgl. auch Messner 2009, S.23f). In Bezug auf die Schule werden unter forschendem Lernen Arbeitsweisen der Schüler zum Erwerb subjektiv neuer Kenntnisse gefasst, die dem systematischen Vorgehen und Methoden des wissenschaftlichen Arbeitens entsprechen (vgl. Messner, 2009, S. 22f, Bönsch 1995, S. 198f). Damit wird bereits ein Ziel von forschendem Lernen deutlich, nämlich der Erwerb von Fachwissen, den die Schüler durch Eigentätigkeit und aktive Auseinandersetzung besser erreichen sollen. Zudem geht es beim forschenden Lernen auch darum, bei den Schülern eine forschende Einstellung zu erzeugen, die das aktive Gestalten eines Forschungsprozesses mit Entwickeln eigener Fragestellungen und Strategien sowie eigenständige Methodenwahl beinhaltet. Beim forschenden Lernen erwerben die Schüler neben Wissen auch metakognitive Kompetenzen, wie Reflexion und Bewertung ihres eigenen Vorgehens und Lernens (vgl. White & Frederiksen 1998, S. 3ff., Schratz & Weiser 2002, S. 40f).

Im Folgenden wird ein Forschungskreislauf angegeben (Abb. 1), der als ein theoretisches Modell für die Vorgehensweise beim forschenden Lernen zu verstehen ist.

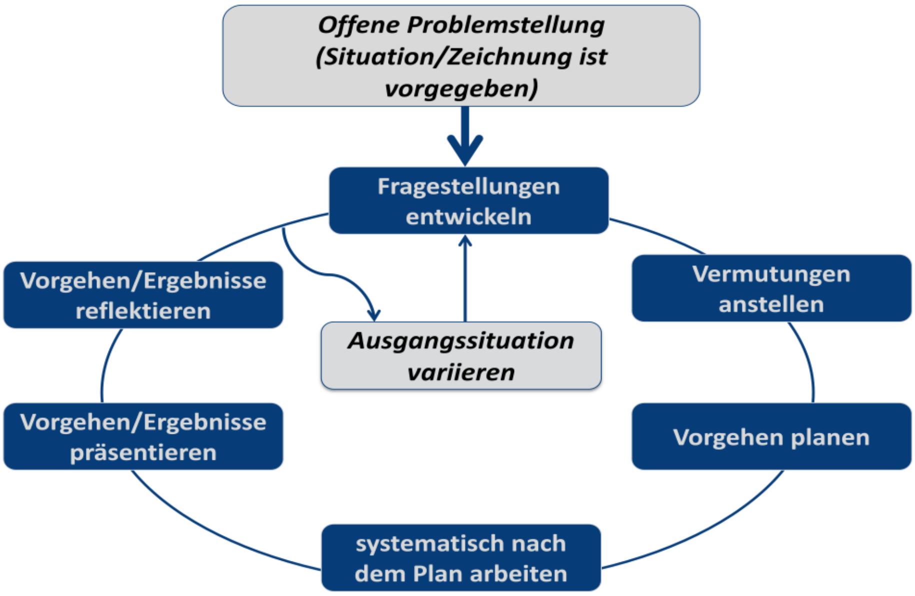


Abb.1: Forschungskreislauf modifiziert (vgl. Huber 2003, Bruce&Bishop 2008, S. 710)

Dieser stellt die zentralen Phasen beim forschenden Lernen dar und wird anhand eines Beispiels (Abb. 2) erläutert, bei dem insbesondere die unterstützende Funktion des Taschencomputers herausgestellt wird. Die Problemstellung ist für Schüler der 10. Klassenstufe gedacht, denen Differentialrechnung noch nicht bekannt ist. Das Ziel ist die Erforschung der Gesamtsituation oder - nach Dewey - das Überführen einer unbestimmten in eine bestimmte Situation. Die Idee ist dabei, ausgehend von einer gegebenen Situation - durch Variieren oder Öffnen - neue Problemfelder, also zunächst eine unbestimmte Situation zu erzeugen.

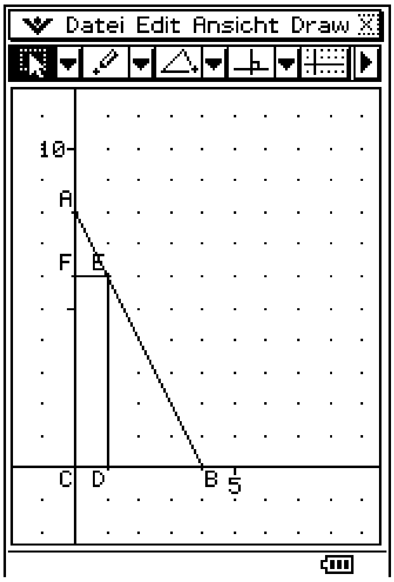


Abb. 2 Screenshot (ClassPad)

Das Entwickeln eigener Fragestellungen zu der offenen Problemstellung stellt die erste Phase im Forschungskreislauf dar. „Für welche Koordinaten von E ist der Flächeninhalt des Rechtecks am größten?“ könnte beispielsweise eine mögliche mathematische Fragestellung zu dieser Problemstellung sein. Neben Fragestellungen zur Extremwertberechnung wären auch Fragestellungen zur Ähnlichkeit von Dreiecken oder zur Berechnung von Flächeninhalten und Verhältnissen denkbar. Zweckmäßig wäre es, in einem Unterrichtsgespräch mit den Schülern zu klären, welche Fragestellungen sinnvoll sind und betrachtet werden sollen. In der zweiten Phase geht es um das Aufstellen von Vermutungen zur Fragestellung. Die dritte Phase besteht aus der systematischen Planung des Vorgehens, welches in der nächsten Phase umgesetzt wird. Abschließend präsentieren die Schüler ihr Vorgehen und ihre Ergebnisse ihren Mitschülern und es findet eine Reflexion des gewählten Vorgehens und der Methoden statt, was z.B. auch das Suchen alternativer Lösungswege und das Beurteilen von Vermutungen beinhaltet. Die stattgefundene Reflexion sowie die Variation der vorgegebenen Problemstellung führen zur Entwicklung neuer Fragestellungen, so dass der Kreislauf von Neuem beginnt. Hierbei ist der Idealzustand für forschendes Lernen dargestellt. Natürlich können die Übergänge zwischen den einzelnen Phasen fließend sein oder eine Phase kann in einer anderen enthalten sein, da forschendes Lernen nicht immer linear abläuft. Außerdem muss nicht jede Phase bei jedem Forschungsprozess durchlaufen werden (vgl. auch Bruce & Bishop 2008, S.711).

Bei dem Beispiel (Abb. 2) kann eine Variation der Problemstellung auf verschiedene Arten erfolgen. Zum einen können Werte und Positionen in der Zeichnung verändert werden, wie beispielsweise die Lage des Dreiecks im Koordinatensystem oder die Lage der Punkte A und B. Eine weitere Möglichkeit besteht im Austausch von Objekten. Die Zeichnung kann dahingehend verändert werden, dass eine andere Figur eingeschlossen ist oder dass anstatt einer Strecke ein Parabelstück als Begrenzung des Rechtecks verwendet wird. Drittens ist zur Variation der Problemstellung auch die Dynamisierung von anderen bzw. mehreren Objekten denkbar. Mithilfe von Taschencomputern, das sind grafikfähige Taschenrechner, in denen zusätzlich ein Computer-Algebra-System integriert ist, können einfach

Werte verändert und so in kurzer Zeit verschiedene Fälle betrachtet und verglichen werden. Ein Taschencomputer erleichtert es auch, Auswirkungen beim Verändern von Werten zu erfassen. Insbesondere beim Variieren, das ein Element für das methodische Vorgehen beim forschenden Lernen ist, bietet der Taschencomputer sinnvolle Unterstützung, da sich Variationen von Problemstellungen ohne großen Aufwand realisieren lassen. Insgesamt können Taschencomputer hilfreich bei der Lösung der selbstgestellten Fragestellungen eingesetzt werden. Die Vielfalt an Darstellungsmöglichkeiten kann den Schülern beim forschenden Lernen eine größere Anzahl an Lösungsmöglichkeiten bieten (vgl. auch Laakmann 2008, S. 45).

Das Ziel des Forschungsprojekts ist es, zu untersuchen, ob forschendes Lernen im Mathematikunterricht möglich ist und ob der Taschencomputer eine Hilfe beim selbstständigen Auffinden von Fragestellungen sowie bei der eigenständigen Beantwortung dieser Fragestellungen ist.

Literatur

Aepkers, M. (2002): Forschendes Lernen - Einem Begriff auf der Spur. In: Bönsch, M., Kaiser, A. (Hrsg.): Basiswissen Pädagogik Bd. 4 - Unterrichtskonzepte und -techniken. Hohengehren, Schneider Verlag.

Bönsch, M. (1995): Variable Lernwege - Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden, Paderborn, München, Wien, Zürich, Verlag Ferdinand Schöningh.

Bruce, B. C. & Bishop, A. P. (2008): New Literacies and Community Inquiry. In: The Handbook of research on new literacies, Coiro, J., Knobel, M., Lankshear, C., Leu, D. J., Tailor & Francis Group, LLC S. 699-742.

Dewey, J. (2008): Logik - die Theorie der Forschung. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag.

Griesel, G. Postel, H., Suhr, F. (2005): Elemente der Mathematik 11 - Einführung in die Analysis. Schroedel Verlag.

Götz, H. u.a. (2009): Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien 11. Stuttgart, Ernst Klett Verlag.

Huber, L. (2003): Forschendes Lernen in deutschen Hochschulen - Zum Stand der Diskussion. In: Obolenski, A./Meyer, H. (Hrsg.): Forschendes Lernen. Theorie und Praxis einer professionellen LehrerInnenausbildung. Rieden, Julius Klinkhardt.

Laakmann, Heinz (2008): Multirepräsentationsprogramme im Mathematikunterricht. In: Mathematikunterricht 54 (6), Friedrich Verlag, S. 44–49.

Messner, R. (Hrsg.) (2009): Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. Edition Körber-Stiftung.

Schratz M., Weiser B (2002).: Dimensionen für die Entwicklung der Qualität von Unterricht, Journal für Schulentwicklung (se 4/02). Wien, Studien Verlag.

White, B. Y. & Frederiksen, J. R. (1998): Inquiry, Modeling, and Metacognition: Making Science Accessible to All Students. In: Cognition and Instruction, Vol. 16, No. 1, Taylor & Francis, Ltd, S. 3-118.

Ralf BENÖLKEN, Münster

Geschlechts- und begabungsspezifische Besonderheiten im Grundschulalter

In mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildungsgängen und Berufsfeldern ist in der Regel eine deutliche Unterrepräsentanz von Mädchen und Frauen festzustellen. Dieses Phänomen zeigt sich bereits im Grundschulalter in Projekten und Wettbewerben der Begabtenförderung (eine Übersicht gibt z.B. Benölken 2011) und steht im Kontrast zum wissenschaftlichen Konsens, dass beide Geschlechter bereichsübergreifend im Grundsatz über gleiche Begabungspotenziale verfügen (z.B. BMBF 2010, S. 13). Aus begabungstheoretischer Perspektive steht in diesem Zusammenhang die Erforschung eventueller Besonderheiten (unabhängig von deren Zustandekommen) im Vordergrund, welche für eine effizientere Identifikation mathematisch begabter Mädchen zu berücksichtigen sind.

1. Wissenschaftliche Erkenntnisse zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter

Forschungsergebnisse zu vermeintlichen geschlechtsspezifischen Besonderheiten im Hinblick auf die Beschäftigung mit Mathematik liegen in Mathematikdidaktik und in Bezugsdisziplinen wie Psychologie, Biologie und Sozialisationstheorien in großer Vielfalt vor. Die wissenschaftlich begründete Herausstellung solcher Besonderheiten zum Zweck einer effizienteren Diagnostik erfordert daher m.E. die Vermeidung einseitiger Sichtweisen, sondern vielmehr eine komplexe und interdisziplinäre Betrachtungsperspektive. Unter einem solchen Ansatz benennt Benölken (2011) auf der Basis empirischer Forschungen „hypothetische Besonderheiten“ mathematisch begabter Mädchen für die Bereiche „Begabungspotenzial und Problemlösen“, „Sozialisation“, „Motivation“ sowie „Bearbeitung und Präsentation von Aufgaben“ in einem komplexen Wechselgefüge. Insbesondere zeigte sich in diesen im Rahmen eines Promotionsvorhabens durchgeführten Untersuchungen die relative interpersonale und zeitliche Stabilität solcher Besonderheiten, die auf der Basis komplexer Einzelfallstudien zugleich eine vorläufige Einteilung in drei Typen mathematisch begabter Mädchen zulässt: Mädchen, die auf verschiedene Weisen über „günstige“ Voraussetzungen für das Betreiben von Mathematik vor dem Hintergrund häufiger Unterrichtskulturen verfügen, scheitern demnach in der Regel nicht an aktuellen Diagnoseverfahren. Ein Typus von Mädchen, der u.a. besonderen Wert auf Kooperationen, kreative und z.T. spielerische Zugänge zur Mathematik legt sowie vielfältige kognitive wie nicht-kognitive Interessen besitzt, scheint demgegenüber vergleichsweise selten identifiziert zu werden und könnte das oben beschriebene Phänomen der Unterrepräsentanz von Mädchen in einschlägigen Fördermaßnahmen explizieren (dazu im Detail Benölken 2011).

2. Konkrete Förderempfehlungen

Die von Benölken (2011) präzisierten „hypothetischen Besonderheiten" sind mehrdimensional lesbar und deuten somit gleichzeitig Ansätze zur besseren Förderung von Jungen sowie von mathematisch nicht überdurchschnittlich begabten Mädchen an. Die im Folgenden auf diesen Besonderheiten basierenden praktischen Implikationen in Form von Förderempfehlungen vor dem Hintergrund einer differenzierteren Einschätzung individueller Begabungspotenziale besitzen exemplarischen Charakter und sind wiederum mit dem Blick auf mathematisch begabte Mädchen formuliert.

1. *Viele Mädchen brauchen Zeit.*

   Mädchen tendieren vergleichsweise häufig zu vollständigen, oft relativ aufwendigen und sorgsam ausgearbeiteten Lösungsdarstellungen. Jungen sind demgegenüber häufig mit der kurzen Notiz zentraler Lösungsideen zufrieden, deren Darstellungen im Vergleich zu den Mädchen weniger Zeit erfordern. Ferner scheinen viele Mädchen weniger gut mit Zeit- und Konkurrenzdruck umgehen zu können – z.B. in (Einzel-) Testsituationen.

2. *Mädchen sollten die Möglichkeit haben, Ergebnisse gemeinsam zu präsentieren.*

   Während Jungen häufig regelrecht wetteifern, Lösungsideen im Plenum zu präsentieren, verhalten sich Mädchen hier oft eher zurückhaltend. Nach Erfahrungen im Münsteraner Enrichmentprojekt „Mathe für kleine Asse" ist es aus Gründen der Motivation sowie der Berücksichtigung von Sicherheitsdenken, das viele Mädchen aufweisen (vgl. etwa auch Jahnke-Klein 2001, S. 137), ratsam, Mädchen die gemeinsame Lösungspräsentation anzubieten. Dies stellt zudem eine folgerichtige Konsequenz aus häufig zu beobachtenden Kommunikationsstrukturen dar – z.B. aus dem Phänomen, dass sich Mädchen bei der Bearbeitung mathematischer (Problem-) Aufgaben häufiger als Jungen zu Gruppen zusammenschließen.

3. *Nicht vorschnell über kognitive Neigungen von Mädchen urteilen, denn sie haben häufig deutlich mehr Interessen als Jungen.*

   Viele Mädchen besitzen ein breites Interessenspektrum, das verschiedene kognitive und nicht-kognitive Schwerpunkte umfasst. Kontrastierend haben Jungen häufig eher wenige Interessen, insbesondere meist nur einen kognitiven Schwerpunkt (vgl. Benölken 2010a). Mädchen wenden sich u.U. daher trotz eines hohen mathematischen Begabungspotenzials eher als Jungen einem anderen Interessenschwerpunkt zu, was die Diagnostik erschweren kann.

4. *Leistungsmotivationale Positiva sind für viele Mädchen im Hinblick auf die Beschäftigung mit Mathematik sehr wichtig.*

   Mädchen weisen u.a. vergleichsweise häufig motivational eher ungünstige mathematische Selbstkonzepte und Attributionsmuster auf. Dies kann dazu führen, dass sie sich der Mathematik nicht als einem Bereich nähern, in dem sie das Gefühl haben, besondere Leistungen erbringen zu können. Große Bedeutung kommt deshalb der Sensibilität der Lehrkräfte für die individuelle Leistungsmotivationsförderung zu – z.B. anhand positiver, authentischer Rückmeldungen.

5. *Spielerische, künstlerisch-kreative Zugänge eignen sich besonders zur Förderung von Mädchen.*

   Regelhaft-abstrakte, direktive und formelle Zugänge zur Mathematik scheinen bei vielen Mädchen eher Desinteresse in diesem Bereich zu begünstigen, während es sich bei Jungen häufig durchaus umgekehrt verhält. Sowohl im regulären Unterricht als auch in besonderen Arbeitsgemeinschaften bieten sich daher kreativere Zugänge an – z.B. Spiele oder offene Problemaufgaben, welche insbesondere Raum für verschiedene und kreative Lösungsdarstellungen und -wege lassen.

3. Empfehlungen für spezifische Förderangebote und -materialien

Über oben genannten, aus den von Benölken (2011) präzisierten „hypothetischen Besonderheiten“ abgeleiteten Förderempfehlungen hinaus sind in Einklang mit Forschungsergebnissen zur monoedukativen Bildung von Mädchen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich (überblicksweise Heinbokel 2001, S. 120) Potenziale spezifischer Förderangebote und -materialien für Mädchen zu betonen. Positive Erfahrungen liegen im Projekt „Mathe für kleine Asse“ vermöge einer wöchentlichen, in den Schulvormittag einer Grundschule integrierten Fördergruppe für Dritt- und Viertklässlerinnen vor (deren Konzept beschreibt Benölken 2012). Die Lehrkräfte berichteten hier über sehr positive Effekte hinsichtlich motivationaler Aspekte im regulären Mathematikunterricht. In diesem Rahmen wurden auf der Grundlage der Ergebnisse von Benölken (2011) verschiedene Aufgabenfelder zur speziellen Förderung von Mädchen entwickelt und erprobt. Solche Materialien könnten demnach eine oder mehrere Perspektiven der folgenden „Denkrichtungen“ aufnehmen:

- Mischung aus herausfordernden Aufgaben und Aufgaben, die in besonderer Weise dem Sicherheitsdenken entsprechen, das sich bei vielen Mädchen findet.
- Berücksichtigung besonderer Präferenzen bei der Lösungsdarstellung im Hinblick auf vielfältige und kreative Möglichkeiten.
- Besondere Angebote kooperativen Arbeitens, d.h. viele Gelegenheiten zum gedanklichen Austausch und zum gemeinsamen Knobeln.
- Angebote an Aufgaben künstlerisch-kreativen Inhalts, an „echten“ Rechenaufgaben, an Aufgaben zur Logik und Mustererkennung, für die Mädchen jeweils häufig besondere Vorlieben äußern.
- Günstige „Stützfaktoren“ bestehen zudem ggf. in der Akzentuierung von bei Mädchen beliebten Themen, in positiven Identifikationsangeboten sowie im Einbringen „außermathematischer“, z.B. sprachlich-literarischer Stärken.

Exemplarisch umgesetzt wurden diese Denkrichtungen innerhalb o.g. Projektgruppe etwa anhand der Problemfelder „Nonogramme“ und „Mathematische Bewegungsspiele“ (Benölken 2010b; 2010c).

Literatur

Benölken, R. (2012): „Mathe für kleine Asse“ (für Mädchen!) – Über eine Gruppe des Münsteraner Förderprojekts für mathematisch begabte Kinder an einer Grundschule. In: Fischer, C. et al. (Hrsg.): Individuelle Förderung multipler Begabungen. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte. Münster u.a.: Lit Verlag (in Vorbereitung).

Benölken, R. (2011): Mathematisch begabte Mädchen. Untersuchungen zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter. Münster: WTM.

Benölken, R. (2010a): Interessen mathematisch begabter Kinder. In: Käpnick, F. (Hrsg.): Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“. Perspektiven von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern. Münster: WTM, 109 – 124.

Benölken, R. (2010b): Begabungs- und geschlechtsspezifische Besonderheiten bei mathematischen Selbstkonzepten. In: Fritzlar, T.; Heinrich, F. (Hrsg.): Kompetenzen mathematisch begabter Kinder erkunden und fördern. Offenburg: Mildenberger, 95 – 110.

Benölken, R. (2010c): Anspruchsvolle mathematische Bewegungsspiele – auch und gerade für Mädchen. In: MNU Primar, 3, 95 – 98.

BMBF [Bundesministerium für Bildung und Forschung] (Hrsg., 2010): Begabte Kinder finden und fördern. Ein Ratgeber für Eltern, Erzieherinnen und Erzieher, Lehrerinnen und Lehrer. Bonn und Berlin.

Heinbokel, A. (2001): Hochbegabte. Erkennen, Probleme, Lösungswege. Münster u.a.: Lit Verlag.

Jahnke-Klein, S. (2001): Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen. Baltmannsweiler: Schneider-Verlag Hohengehren.

Carola BERNACK[1], Lars HOLZÄPFEL[1], Timo LEUDERS[1], Alexander RENKL[2], [1] Pädagogische Hochschule Freiburg, [2]Universität Freiburg

„Ich muss noch mehr Beispiele erproben“ – Entwicklung eines Analyseverfahrens zur quantitativen Evaluation offener Problemlöseprozesse

In der Diskussion zu Bedingungen und Ergebnissen der Lehrerbildung finden zunehmend fachspezifische Aspekte professioneller Kompetenz Beachtung. Dazu gehören neben dem Fachwissen auch fachspezifische übergreifende Kompetenzen wie Problemlösekompetenz sowie Überzeugungen zum Fach (Beliefs). Lehrer, die eine konstruktivistische Sicht auf das Lehren und Lernen einnehmen sollen, müssen Mathematik als Problemlösen schon in ihrer Ausbildung erfahren (Schoenfeld, 1992). Von reflexiven Problemlöseseminaren, in denen die Teilnehmer offene Probleme bearbeiten und ihr Vorgehen sowie ihre Beliefs reflektieren, wird berichtet, dass sie diese Ziele haben und erreichen (z.B. DeBellis & Rosenstein, 2004; Lijedahl, Rösken & Rolka, 2007). Im Projekt ForMat – Forschende Mathematiklehrer – fokussieren wir hauptsächlich auf die Beliefänderung der Studierenden (Bernack, Holzäpfel, Leuders, & Renkl, 2011). Es eröffnet sich auch die Möglichkeit, die Problemlöseprozesse der Studierenden zu beschreiben und Veränderungen in ihrer Qualität festzustellen, die mit dem Seminarkonzept zusätzlich angestrebt wird. Hierbei handelt es sich um ausführliche, explorative Problembearbeitungen an, die einem ‚quasi-experimentellen‘ Vorgehen ähneln, sodass es sich anbietet den Kodierleitfaden zum innermathematischen Experimentieren von Leuders, Naccarella & Philipp (2011) darauf anzuwenden. Dieser erlaubt sehr detaillierte Analysen mit einer Vielzahl an Kodes, sodass für eine quantitative Erfassung einer großen Anzahl an Problembearbeitungen ein darauf basierendes Analyseverfahren entwickelt werden musste. In diesem Beitrag beantworten wir die Frage, inwieweit sich der Kodierleitfaden zum innermathematischen Experimentieren auf die vorliegenden Bearbeitungen anwenden lässt und ob es möglich ist ein quantitatives und reliables Analyseverfahren zu entwickeln.

1. Theoretischer Hintergrund: Problemlösen und innermathematisches Experimentieren

Die im Seminar eingesetzten Probleme erfordern ein geringes fachliches Vorwissen und sollen es den Teilnehmern ermöglichen sich selbst als Mathematiktreibende zu erfahren, sodass z.B. der gezielte Erwerb bestimmter Strategien nicht im Vordergrund steht. Die Probleme haben einen stark explorierenden Charakter und sind rein innermathematisch. Durch diese Art der Problemstellung und -bearbeitung ist Polyas lineares Modell (Polya, 1949) zur Beschreibung eher ungeeignet. Ein Modell, das eine genauere Beschreibung des Vorgehens bei solchen Problemstellungen liefert, ist das zum innermathematischen Experimentieren von Leuders et al. (2011). Es basiert u.a. auf der Theorie von Polya (1954) zum induktiven Schließen und auf Scientific Discovery as Dual Search (Klahr & Dunbar, 1988). Leuders et al. (2011) entwickelten innerhalb dieser Theorie durch eine Interviewstudie mit Schülern einen empirisch abgesicherten Kodierleitfaden. Hierbei konnten typische Prozesse (Kodes) identifiziert werden, die sich zu vier Kodefamilien zusammenfassen lassen: Beispiele, Hypothesen, Ordnung/ Struktur und Hypothesenprüfung.

2. Forschungsfragen

Mit Bezug auf die in der Interviewstudie von Leuders et al. (2011) entwickelten Kodes stellt sich unsere erste Frage:

(1) Inwieweit können diese Kodes für die schriftlichen Bearbeitungen in der vorliegenden Studie genutzt werden, um die dortigen Problemlöseprozesse zu beschreiben?

Um eine größere Menge an Bearbeitungen auf dieser Basis quantitativ vergleichbar auswerten zu können schließt sich dann die zweite Frage an.

(2) Ist es möglich ein reliables Analyseverfahren zu entwickeln, um quantitativ die zentralen Merkmale der Problemlöseprozesse zu messen?

3. Vorstellung der Studie

Die Studie fand in verschiedenen Prä-Post-Designs einmal jährlich von 2009 bis 2011 statt. Die Studierenden der PH Freiburg (vornehmlich Lehramt Grundschule, Semester 3-5) bearbeiteten die Probleme ohne inhaltliche Unterstützung der Dozenten. Dabei dokumentierten sie ihren gesamten Problemlöseprozess mit allen Ideen, Gefühlen und Gedanken in einem sogenannten „Forschungsheft". Die Dokumentation umfasst in der Regel ca. zehn Seiten pro Problem. Zusätzlich wurden sie zur Reflexion des Problemlöseprozesses zu Ende jedes Problems aufgefordert. Die Entwicklung des Leitfadens fand mit den Daten der Pilotstudie im Jahr 2009 (N=48) und teilweise mit den Daten aus Hauptstudie 2011 (N=78) statt (Bernack et al. 2011).

4. Anwendung des Kodierleitfadens „Mathematisch Experimentieren"

Um die Frage (1) zu beantworten, wurden sechs Bearbeitungen nach dem Kodierleitfaden kodiert. Dabei zeigte sich, dass sich die Kodes zum Mathematischen Experimentieren durchgehend anwenden lassen und somit eine Möglichkeit bieten, diese Prozesse detailliert zu beschreiben. Es konnten alle Kodefamilien identifiziert werden. Zusätzlich fanden sich jedoch Sinneinheiten, denen kein Kode zugewiesen werden konnte. Diese hatten reflexiven, planenden und kommentierenden Charakter. Diese zusätzliche Kategorie könnte sich aus dem schriftlichen Charakter der Bearbeitung und der Aufforderung, alles Aufzuschreiben ergeben. Zudem enthalten andere Modelle zum Problemlösen meist eine metakognitive Komponente (z.B. Schoenfeld, 1992).

5. Entwicklung eines Ratingverfahrens zur quantitativen Analyse

Um nun die vorhandene Stichprobe quantitativ und reliabel vergleichbar zu analysieren, wurde aufbauend auf dem obigen Kodierleitfaden zum mathematischen Experimentieren und den Ergebnissen der ausführlichen Analyse ein Ratingverfahren entwickelt. Im ersten Schritt werden die Bearbeitungen in Sinneinheiten [SE] eingeteilt, denen die folgenden vier Kategorien zugeordnet werden: Beispiel, Beschreibung, Vermutung, Metakognition. Zur Überprüfung der Übereinstimmung der drei eingesetzten Rater wurde die Intra-Klassen-Korrelation ICC bestimmt.

Kategorie (Anzahl Problembearbeitungen)	*$ICC_{unjust,random}$ SE absolut*	*$ICC_{unjust,random}$ SE relativ*
Beispiel (23)	0.914**	0.902**
Beschreibung (13)	0.827**	0.885**
Vermutung (23)	0.717**	0.714**
Metakognition (23)	0.919**	0.853**

Im zweiten Schritt folgt die Analyse nach der Qualität der Bearbeitungen. Die folgende Tabelle zeigt die Items zur Beurteilung sowie die Beurteilerübereinstimmung von zwei Ratern. Insgesamt kann mit dem Analyseverfahren eine gute bis sehr gute Beurteilerübereinstimmung erreicht werden. Das Verfahren bietet folglich eine Möglichkeit solche offenen Problemlöseprozesse zu beschreiben und ihre Qualität bezüglich gewisser Aspekte einzuschätzen.

Kategorie (Anzahl der Problembearbeitungen)	*$ICC_{unjust,random}$*
Beispiele: Anteil systematischer/zielgerichteter Beispiele (18)	0.948**
Hypothesen: Anteil beispielorientierte Hypothesen (18)	0.842**
Strategien: Einsatz von Tabellen (12)	0.866**
Metakognition: Anteil Plan (18)	0.766**
Beeinflussung des Problemlöseprozesses durch fehlendes Wissen (12)	1.000
Erreichen von Teilzielen/ -lösungen (mehrere Items)	Cronbachs α durchgehend gut

6. Diskussion und Ausblick

Das entwickelte Ratingverfahren eignet sich zur Einschätzung der Bearbeitungsqualität offener Explorationsaufgaben und ergänzt bisherige Instrumentarien zur quantitativen Erfassung von Problemlöseprozessen und -kompetenzen. Ziel nachfolgender Analysen wird es sein, mithilfe des Ratingverfahrens, Typen von Vorgehensweisen zu identifizieren und in Zusammenhang mit Überzeugungen bzw. mit dem Bearbeitungserfolg zu stellen.

Auf der Basis des hohen Ratingerfolges ist es ebenfalls denkbar, das Kategoriensystem zu verfeinern, und um weitere Kriterien zur Beurteilung der Problemlösebearbeitungen zu ergänzen, z.B. die Problemlösestrategien nach Polya (1949). Es ist allerdings in Abhängigkeit vom jeweiligen Untersuchungsziel zu prüfen, ob eine solche Verfeinerung geeignet ist, Problemlöseprozesse valide zu bewerten, oder ob nicht höher-inferente Verfahren zur Anwendung kommen sollten.

Literatur

Bernack, C., Holzäpfel, L., Leuders, T., & Renkl, A. (2011). Initiating change on preservice teachers’ beliefs in a reflexive problem solving course. In: Kirsti Kislenko (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVI. Proceedings of the MAVI-16 Conference June 26-29, 2010, Tallinn, Estonia* (pp. 27–43). Tallinn, Estonia: Institute of Mathematics and Natural Sciences, Tallinn University.

DeBellis, V. A., & Rosenstein Joseph G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 36*(2), 46–55.

Klahr, D., & Dunbar, K. (1988). Dual space search during scientific reasoning. *Cognitive Science,* (12), 1–48.

Leuders, T., Naccarella, D., & Philipp, K. (2011). Experimentelles Denken - Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik, Volume 32, Number 2,* 205–231.

Liljedahl, P., Rolka, K., & Rösken, B. (2007). Affecting Affect: The Reeducation of Preservice Teachers' Beliefs about Mathematics and Mathematics Learning and Teaching. In W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliott (Eds.), *The Learning of Mathematics. Sixty-ninth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 319–330).

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme.* Sammlung Dalp: Vol. 36. Bern: Francke.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Induction and analogy in mathematics (Vol. I),* Patterns of plausible inference (Vol. II). Princeton: UP.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Michael BESSER, Kassel/Lüneburg, Werner BLUM, Kassel, Dominik LEISS, Lüneburg, Malte KLIMCZAK, Frankfurt, Eckhard KLIEME, Frankfurt, Katrin RAKOCZY, Frankfurt

Auswirkung kompetenzorientierter, prozessbezogener und individueller Leistungsbewertung und -rückmeldung auf das Lernen von Mathematik am Beispiel einer empirischen Unterrichtsstudie

Leistungsbewertung und -rückmeldung finden im deutschen Mathematikunterricht oftmals allein durch Klassenarbeiten einmalig am Ende einer Unterrichtseinheit und in Form von Noten statt. Im Rahmen des DFG-Forschungsprojekts Co²CA[1] ist ein Diagnose- und Rückmeldeinstrument erprobt worden, das den Mathematikunterricht entgegen üblicher Praxis mehrfach wie selbstverständlich begleitet und Schülerinnen und Schülern dabei in kurzen Abständen individuelle Informationen zu deren Leistungsstand sowie konkrete Hilfen zur Verbesserung desselben zur Verfügung stellt. Auswirkungen dieses Instruments auf die Leistungsentwicklung von Lernenden sollen im Folgenden vorgestellt und diskutiert werden.

1. Unterrichtsstudie im Rahmen des Forschungsprojekts Co²CA

Das Forschungsprojekt Co²CA untersucht u. a., wie Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht gestaltet werden können, um sowohl Lehrkräften eine präzise und detaillierte Leistungsdiagnostik zu ermöglichen als auch bei Lernenden eine positive Wirkung auf (zukünftige) Lernprozesse sowie Motivation und Emotion zu erreichen. In Laborsitzungen zur Erprobung verschiedener Arten von Rückmeldungen (zur lernförderlichen Gestaltung von Rückmeldungen siehe auch Deci et al 1999, Hattie & Timperley 2007, Kluger & DeNisi 1996) innerhalb des Projekts hat sich gezeigt, dass vor allem eine individuell gestaltete, sich direkt auf den Bearbeitungsprozess von Aufgaben beziehende, dem Lernenden Stärken und Schwächen aufzeigende und gleichzeitig Hilfen für weiteres Lernen bereitstellende Leistungsrückmeldung von Schülern als besonders „unterstützend“ wahrgenommen wird und sich tendenziell positiv auf deren Leistungsentwicklung auswirkt (vgl. Besser et al. 2010, Harks et al. (2012); für eine detaillierte Beschreibung des

[1] Co²CA: Conditions and Consequences of Classroom Assessment. DFG-Forschungsprojekt im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen“ (SPP 1293). Projektleitung: E. Klieme, K. Rakoczy, W. Blum, D. Leiss.

Projekts selbst siehe Bürgermeister et al. 2011). In einer im Herbst/Winter 2010/11 durchgeführten Unterrichtsstudie, innerhalb welcher der Mathematikunterricht von 39 Schulklassen zum Thema „Satz des Pythagoras“ über einen Zeitraum von 13 Unterrichtsstunden begleitet wurde, wurde daher eine derart gestaltete, individuelle Leistungsrückmeldung in 25 Klassen den Schülern in so genannten „Diagnosesituationen“ mehrfach schriftlich durch den Lehrer zur Verfügung gestellt (Untersuchungsbedingungen). In weiteren 14 Klassen bekamen die Schüler eine derartige Rückmeldung hingegen nicht (Kontrollbedingung). Als zentral erscheint nun die Frage, inwieweit sich die Leistung der Schüler dieser beiden Bedingungen am Ende der Unterrichtseinheit unterscheiden bzw. inwieweit die schriftlichen Rückmeldungen einen positiven Einfluss auf die Leistungsentwicklung der Schüler haben (für eine detaillierte Darstellung zu Aussehen und Anwendung der Rückmeldungen siehe Besser & Leiss 2012)?

2. Auswirkung kompetenzorientierter, prozessbezogener und individueller Leistungsrückmeldung auf Leistungen von Lernenden

Eine Untersuchung der Auswirkung der den Schülern in der Untersuchungsbedingung bereitgestellten Rückmeldungen kann – einerseits unter Kontrolle der Schülerleistungen in einem Vortest zu Beginn der Unterrichtseinheit, verstanden als „mathematische Grundbildung“, andererseits unter Rückgriff auf Schülerleistungen in einem Nachtest am Ende der Unterrichtseinheit – unterschiedlich erfolgen: (I) mit Blick auf Leistungsunterschiede zwischen Untersuchungsbedingung und Kontrollbedingung im gesamten Nachtest oder auch (II) mit Blick auf einen Einfluss der „Qualität“ der Rückmeldungen auf die Bearbeitungsqualität einzelner Aufgaben im Nachtest allein innerhalb der Gruppe der Schüler der Untersuchungsbedingung. Diese „Qualität“ der Rückmeldungen ist dabei im Folgenden stets als eine „Güte der Passung“ zwischen der Schülerleistung beim Bearbeiten einer Aufgabe sowie der zugehörigen Rückmeldung der Lehrkraft zu dieser Schülerleistung zu verstehen und ist bisher für 7 von 25 Klassen vollständig erfasst.

(I) Leistungsunterschiede zwischen Untersuchungsbedingung und Kontrollbedingung im Nachtest (alle 39 Klassen): Erste quantitative Analysen der Schülerleistungen zeigen – allein unter Kontrolle des Vorwissens – auf Klassenebene im Nachtest keinen Unterschied zwischen den beiden genannten Bedingungen. Dies gilt sowohl „global“ für die Leistung im Nachtest insgesamt als auch bzgl. der speziell erfassten Subdimensionen „technisches Arbeiten“ sowie „mathematisches Modellieren“.

(II) Einfluss der Qualität der Rückmeldungen auf die Bearbeitungsqualität von Aufgaben im Nachtest (7 von 25 Klassen): Analysen des Einflusses der Qualität der schriftlichen Rückmeldungen unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Vorwissens der Lernenden zeigen auf quantitativer Ebene ebenfalls keinen Effekt im Nachtest. Aber: Bei detaillierter Betrachtung der Bearbeitungsqualität von Aufgaben aus den Diagnosesituationen, der Qualität der diesbezüglich durch die Lehrkraft an den Schüler gegebenen Rückmeldung sowie der Bearbeitungsqualität bei „Parallelaufgaben" im Nachtest zeigen sich über die Klassen hinweg bemerkenswerte Einflüsse der Rückmeldungen auf die Bearbeitungsqualität der Lernenden – in Abbildung 1 und 2 hier nur beispielhaft und in Auszügen aufgeführt.

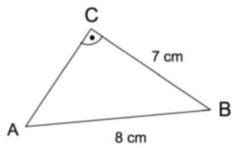
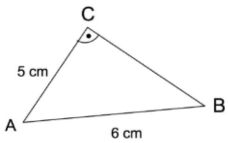
Aufgabe aus Diagnosesituation	Lehrerrückmeldung	Parallelaufgabe aus Nachtest
Berechne die Länge von b = |AC|.  $c^2 + a^2 = b^2$ $8^2 + 7^2 = b^2$ ...	Du hast noch Probleme, den Satz des Pythagoras aufzustellen, wenn eine Kathetenlänge gesucht ist. Erinner dich: Kathete² + Kathete² = Hypotenuse²	Berechne die Länge von a = |BC|.  $a^2 + b^2 = c^2$ $b^2 = 6^2 - 5^2$ ...

Abbildung 1: Ausschnitt zur Bearbeitungsqualität einer technischen Aufgabe

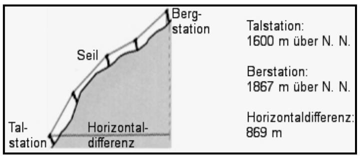
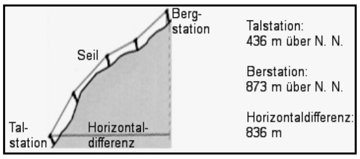
Aufgabe aus Diagnosesituation	Lehrerrückmeldung	Parallelaufgabe aus Nachtest
Das Stahlseil der Luftseilbahn Ristis muss erneuert werden. 1 m Stahlseil kostet 8 €. Bestimme den ungefähren Preis des neuen Stahlseils.  ... Seil = 909,09 m 909,09 m · 8 = 7272,8 Das Seil kostet 7272,8 €	Du hast nur eine Seilrichtung berücksichtigt. Überlege dir: Brauchst du 1 oder 2 Seilrichtungen?	Das Stahlseil der Luftseilbahn Bürgenstok muss erneuert werden. 1 m Stahlseil kostet 7 €. Bestimme den ungefähren Preis des neuen Stahlseils.  ... Seil: 943,32 m ≈ 1000 m Annahme: 2 Seile 1000 · 7 · 2 = 14000 Das Seil kostet 14000 €.

Abbildung 2: Ausschnitt zur Bearbeitungsqualität einer Modellierungsaufgabe

3. Ausblick und Diskussion

Analysen zu Auswirkungen von innerhalb einer Unterrichtsstudie im Projekt Co²CA eingesetzten schriftlichen, individuellen und prozessbezogenen Rückmeldungen zu Schülerleistungen in Diagnosesituationen deuten – auf qualitativer Ebene – auf einen positiven Effekt bzgl. der Bearbeitungsqualität von Aufgaben bei Schülern innerhalb der Untersuchungsbedingung hin. Zugleich zeigt sich jedoch auch, dass – auf rein quantitativer Ebene – allein ein Vergleich der Schülerleistungen im Nachtest zwischen Untersuchungsbedingung und Kontrollbedingung keinen Effekt des Treatments belegt. Für eine bessere Kontrolle desselben hat daher in nächsten Schritten neben der Erfassung der Qualität der Rückmeldung für alle 25 Klassen insbesondere auch eine Diskussion der Umsetzung der Rückmeldungen im Unterricht selbst sowie des Einflusses kognitiver Aktivierung im Unterricht (unter Rückgriff auf videografierte Unterrichtssequenzen) als sicherlich ebenfalls erklärungsmächtige Faktoren für das Gelingen von Unterricht und hiermit verbunden für das Erzielen von Lernfortschritten bei Schülern zu erfolgen, um die Ergebnisse besser verstehen und einordnen zu können.

Literatur

Besser, M., Leiss, D., Harks, B., Rakoczy, K., Klieme, E. & Blum, W. (2010): Kompetenzorientiertes Feedback im Mathematikunterricht: Entwicklung und empirische Erprobung prozessbezogener, aufgabenbasierter Rückmeldesituationen. *Empirische Pädagogik*, 24 (4), 404-432.

Besser, M. & Leiss, D. (2012): Von der Leistung zur Lernanregung. Erfahrungen mit der formativen Beurteilung. *mathematik lehren*, 170, 41-46.

Bürgermeister, A., Klimczak, M., Klieme, E., Rakoczy, K., Blum, W., Leiß, D., Harks, B. & Besser, M. (2011). Leistungsbeurteilung im Mathematikunterricht – Eine Darstellung des Projekts "Nutzung und Auswirkungen der Kompetenzmessung in mathematischen Lehr-Lernprozessen". In A. Füchter & K. Moegling (Hrsg). *Diagnostik und Förderung*, 28–51, Vol. 16. Immenhausen: Prolog-Verlag.

Deci, E. L., Koestner, R. & Ryan, R. M. (1999). A Meta-Analytic Review of Experiments Examining the Effects of Extrinsic Rewards on Intrinsic Motivation. *Psychological Bulletin*, 125, 627-668.

Harks, B., Rakoczy, K., Klieme, E., Hattie, J. & Besser, M. (2012). Indirekte und moderierte Effekte von Rückmeldung auf Leistung und Motivation. Manuskript zur Veröffentlichung eingereicht.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77, 81-112.

Kluger, A. N. & DeNisi, A. (1996). The Effects of Feedback Interventions on Performance: A Historical Review, a Meta-Analysis, and a Preliminary Feedback Intervention Theory. *Psychological Bulletin*, 119, 254-284.

Bianca BEUTLER, Braunschweig

„Das ist das gleiche, nur anders." – Vorschulkinder erkennen geometrische und arithmetische Beziehungen beim Umstrukturieren von Flächen und Bauwerken

Eine fortgeschrittene Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung zeigt sich unter anderem im Erkennen und Nutzen geometrischer und arithmetischer Beziehungen. Die Entwicklung der Strukturierungsfähigkeit wird daher maßgeblich sowohl von der Entwicklung geometrischer als auch von der Entwicklung arithmetischer Fähigkeiten vorangetrieben. Doch wie genau greifen die verschiedenen mathematischen Entwicklungsverläufe ineinander? Lassen sich Indizien für übergeordnete Entwicklungsprozesse finden?

1. Erkenntnisse zur Fähigkeit räumlicher Strukturierung

Die Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung äußerst sich in der Strukturerkennung, -herstellung und -nutzung bei verschiedenen geometrischen Anordnungen und Größen, insbesondere beim Erfassen von Konfigurationen zwei- oder dreidimensionaler Elemente. Die individuelle Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung verhält sich nach Mulligan und Mitchelmore (z. B. 2009) aufgabenübergreifend konsistent und verändert sich nur im zeit-lichen Verlauf. Interindividuell reichen die kindlichen Repräsentationen vom Fehlen jeglicher struktureller Elemente bis hin zur vollständigen Integration numerischer und räumlicher Strukturelemente. Im Modell zur „Entwicklung von Strategiekomplexen zur räumlichen Strukturierung am Beispiel von Bildern zu Würfelkonfigurationen" von Merschmeyer-Brüwer (2001) sowie in der Beschreibung von Ebenen der „visuellen Strukturierungsfähigkeit" beim Umgang mit arithmetischen Anschauungsmitteln nach Söbbeke (2005) wird weiterhin deutlich, dass eine geringe Strukturierungsfähigkeit mit konkreten empirischen Deutungen, dem Beachten einzelner sichtbarer Elemente, einem stark zerlegenden Gliedern und dem Abzählen in Einerschritten verbunden wird. Für Würfelbauwerke erfolgt oft eine Orientierung an einzelnen Flächen anstelle des Erfassens dreidimensionaler Elemente. Eine hohe Strukturierungsfähigkeit zeigt sich hingegen im Strukturieren einer Konfiguration in Subeinheiten, im Beachten von Beziehungen zwischen Einzelelementen und den Subeinheiten sowie in strukturbezogenen Abzählstrategien bzw. im Ermitteln einer Anzahl durch Rechenoperationen. Söbbeke ergänzt die Fähigkeit strukturellen Umdeutens.

Die Fähigkeit zur räumlichen Strukturierung steht weiterhin in hoher Korrelation zur allgemeinen Mathematikleistung (vgl. Lüken 2012) und sie entwickelt sich bei leistungsschwächeren Kindern nicht immer positiv (vgl. Mulligan, Mitchelmore & Prescott 2005). Letzteres ist besonders problematisch, da Strukturierungsfähigkeit gerade für die sinnvolle Nutzung arithmetischer Anschauungsmittel als wesentlicher Schritt zur Ausbildung arithmetischer Konzepte benötigt wird (vgl. Söbbeke 2005, Lorenz 1992).

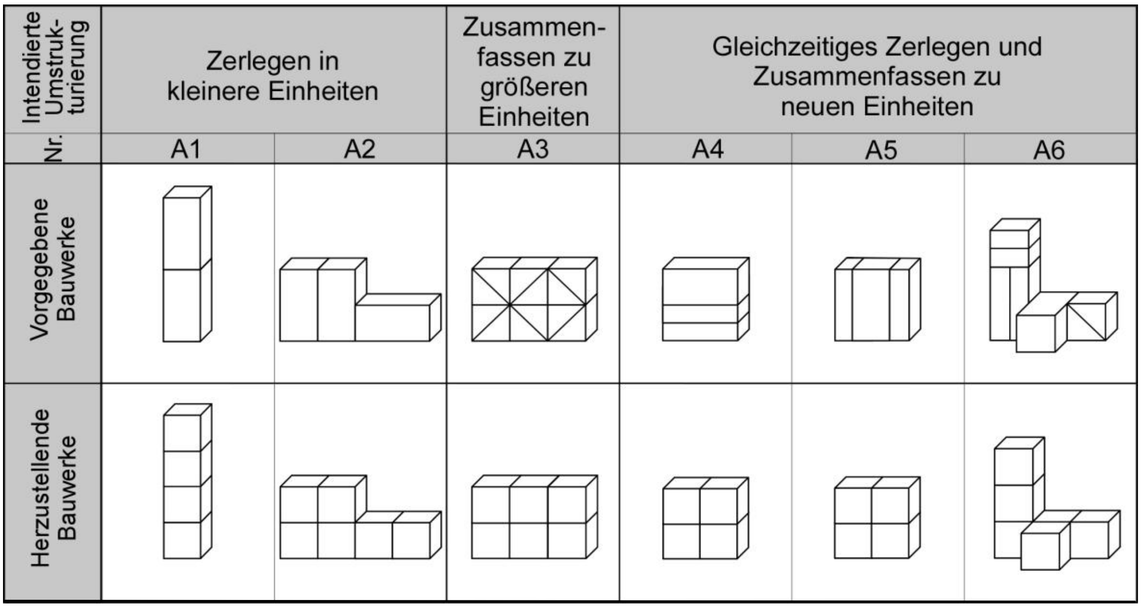
2. Die Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts

Ein für die Zahlbegriffsentwicklung wesentliches arithmetisches Konzept, das aus theoretischer Sicht in einem Zusammenhang zu räumlichen Fähigkeiten steht, ist das Teil-Ganzes-Konzept (vgl. Beutler 2011). Nach Resnick (1989) ist es zunächst als protoquantitatives Schema verfügbar und bezieht sich somit auf nicht exakt quantifizierte Mengen. Mit dem Erwerb von Zahlwortreihenfolge und Zählprinzipien beginnt eine Integration von Mengen- und Zahlenwissen, sodass Teil-Ganzes-Beziehungen bei exakten Mengen innerhalb der „mathematics of quantities" nun handelnd und zählend auswertbar sind. Erst auf der Ebene der „mathematics of number" wird das Teil-Ganzes-Konzept auf Anzahlen bezogen. Mit zunehmender Erfahrung werden Zahlentripel für derartige Zahlbeziehungen abgespeichert, sodass nichtzählende Rechenstrategien möglich werden (vgl. auch Gaidoschik 2010).

3. Empirische Studie zu Zusammenhängen von Strukturierungsfähigkeit und dem Anwenden des Teil-Ganzes-Konzepts

In einem Dissertationsprojekt zur Untersuchung von Zusammenhängen zwischen der Fähigkeit zum räumlichen Strukturieren und dem Fortschritt der Zahlbegriffsentwicklung werden 25 Vorschulkinder einerseits durch den standardisierten Test TEDI-MATH hinsichtlich ihrer numerisch-rechnerischen Fähigkeiten verortet, andererseits dienen halbstandardisierte Interviews mit Aufgaben zur räumlichen Strukturierung einer qualitativen Analyse von Lösungen und Bearbeitungsstrategien. Die entwickelten Aufgabensequenzen thematisieren die Seriation, das Bestimmen von Anzahlen, das Angleichen von Strukturen, das Wiedererkennen von Teilstrukturen, das Umstrukturieren und das Vervollständigen von Strukturen. Zum Einsatz kommen Konfigurationen aus Punkten, Quadraten, konkreten Würfeln sowie Schrägbilder von Würfelbauwerken. In einer Aufgabensequenz zum Umstrukturieren konkreter Bauwerke werden den Kindern nacheinander sechs verschiedene Bauwerke aus nichtwürfelförmigen Bausteinen unter einem Plexiglaskasten präsentiert. Die Kinder sollen jeweils die Anzahl an Würfeln ermitteln, die sie für ein Würfelbauwerk gleicher Größe benötigen, und anschließend das Würfelbauwerk herstellen. Nachdem der Plexiglaskasten entfernt wird, dürfen die Kinder vorgegebenes und hergestelltes Bauwerk zusammenstellen und noch einmal vergleichen. Gegebenenfalls sollen die Kinder ihr Bauwerk korrigieren und erneut die Anzahl benötigter Würfel ermitteln.

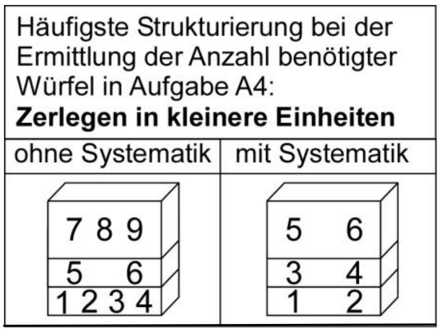
Die Aufgabensequenz beinhaltet drei Typen intendierter Umstrukturierung: Zerlegen, Zusammenfassen sowie Zerlegen und Zusammenfassen:



4. Erste Ergebnisse zum Umstrukturieren von Bauwerken

Um Zusammenhänge von Strukturierungsfähigkeit und arithmetischen Fähigkeiten zu identifizieren, werden zu allen Aufgabensequenzen die Videos, Transkripte und Zeichnungen hinsichtlich Lösungskorrektheit, erfolgter Strukturierung, Strategien der Anzahlerfassung, Verwendung arithmetischer Konzepte und aufgabenspezifischer Aspekte analysiert.

In der Aufgabensequenz zum Umstrukturieren ergibt sich zunächst aus der Anzahl korrekter Lösungen das Anspruchsniveau der Aufgaben (A1 als Absicherung des Aufgabenverständnisses bleibt unbeachtet): Bei A2 nennen 18 von 25 Kindern zu Beginn die korrekte Anzahl an benötigten Würfeln, bei A3 sind es 15 und bei A4 bis A6 nur 5 oder 6 Kinder. Aufgaben zum Umstrukturieren im Sinne eines Zerlegens in kleinere Einheiten scheinen damit am leichtesten zu sein. Eine Analyse aller erfolgten Umstrukturierungen während der ersten Anzahlermittlung ergibt, dass fast alle Kinder in kleinere Einheiten zerlegen, sie jedoch nur selten zu größeren Einheiten zusammenfassen (zu Aufgabe A4 siehe Abbildung; die Zahlen entsprechen den beobachteten Zählprozessen).



Anwendungen des Teil-Ganzes-Konzepts zeigen sich in ordinalen Strategien wie *Alles Auszählen* oder *Weiterzählen*, in Mischstrategien mit Verwendung von Ordinal- und Kardinalzahlen sowie in kardinalen Anzahlbenennungen von Teil- und Gesamtmengen. Während die meisten Strategien der „mathematics of quantities“ nach Resnick zuzuschreiben sind, finden sich auch Strategien der „mathematics of numbers“, insbesondere wenn die Kinder Rechenfakten aufsagen und auf Mengenbeziehungen anwenden.

Eine Voraussetzung für die Entwicklung des Teil-Ganzes-Konzepts für Zahlen ist das Verwenden von Kardinalzahlen, das als ein Denken einer Menge „als Ganzes für sich“ (Gaidoschik 2010), d.h. als ein Zusammenfassen von einzelnen Elementen zu interpretieren ist. Als Weiteres ist ein Zusammendenken zweier Teil- zu einer Gesamtmenge gefordert. In den Untersuchungen fällt auf, dass Kinder häufig Strukturen in Teile zerlegen und diese meist auch mit Kardinalzahlen quantifizieren. Ein darauf aufbauendes Zusammenfügen der Teile zu einer Gesamtmenge lässt sich jedoch nur selten beobachten. Es ergeben sich Parallelen zur Fähigkeit zum Umstrukturieren, bei der sich ebenfalls das gleichzeitige Zerlegen und Zusammenfassen als besondere Schwierigkeit erwiesen hat. Dies lässt vermuten, dass generell ein Zerlegen schon auf niedrigeren und ein gleichzeitiges Zerlegen und Zusammenfassen erst auf höheren Entwicklungsstufen möglich ist.

Literatur

Beutler, B. (2011): Vorschulkinder integrieren Mengen- und Zahlenwissen beim Vergleichen und Verändern von Punktmustern. In: Haug, R. & Holzäpfel, L. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM Verlag.

Gaidoschik, M. (2010): Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt: Lang.

Lorenz, J. H. (1992): Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen: Hogrefe.

Lüken, M. (2012): Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern. Münster: Waxmann.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2001): Räumliche Strukturierungsprozesse bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen – Empirische Untersuchungen mit Augenbewegungsanalysen. Frankfurt: Lang.

Mulligan, J., Mitchelmore, M. & Prescott, A. (2005): Case Studies of Children’s Development of Structure in Early Mathematics: A Two-Year Longitudinal Study. In: Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Hrsg.): Proceedings of the 29th PME, 4. Melbourne: PME, 1-8.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009): Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. In: Mathematics Education Research Journal, 21, 33-49.

Resnick, L. B. (1989): Developing mathematical knowledge. In: American Psychologist, 44, 162-169.

Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Angela BEZOLD, Universität Würzburg

Entwicklung eines Forschercamps für Grundschulkinder

An der Universität Würzburg besteht seit einigen Jahren ein Lehr-Lern-Labor für die Sekundarstufe. Diese Tradition sollte nun mit der Gründung eines Forschercamps für Kinder fortgesetzt bzw. die Chance genutzt werden Schülerinnen und Schüler bereits im Alter der Primarstufe an einen außerschulischen Lernort zu holen. Im Folgenden sollen nun Konzeption und Entwicklung des Forschercamps sowie die damit verbundene Forschungsintention und Perspektiven für die Weiterbildung vorgestellt werden.

1. Grundkonzeption für das Forschercamp

Das Forschercamp richtet sich an Kinder aus der zweiten bis vierten Jahrgangsstufe, die besonders interessiert an der Mathematik und begabt für dieses Fach sind. Es wurde mit der Zielsetzung entwickelt

- das Interesse und die Freude an mathematischen Phänomen zu wecken sowie
- mathematische Phänomene zu durchdringen und zu erklären.

Das Forschercamp enthält konzeptionelle Elemente eines Science Centers (vgl. Mathematikum Universität Gießen), allerdings sollen im Sinne eines Lehr-Lern-Labors stärker Erklärungen und Begründungen für die Ergebnisse der „Experimente“ eingefordert werden. An einem Forschertag werden Schülerinnen und Schüler eingeladen, interessante mathematische Phänomene aus der Arithmetik und Geometrie zu erkunden. Dabei werden diese durch Studierende betreut bzw. gefördert, die im begleitenden Seminar herausfordernde Aufgaben für die Kinder neu entwickeln oder bereits bestehende Forscherstationen optimieren. In einem Zeitraum von drei Stunden beschäftigen sich die Kinder in jahrgangsgemischten Kleingruppen mit drei bis vier selbst gewählten Aufgaben.

2. Entwicklung der Forscherstationen

Bei der Gründung des Forschercamps stellte sich die Frage, mit welchen Aufgabenformaten es gelingen kann, Kinder verschiedener Altersstufen im Hinblick auf die Zielsetzung anzusprechen. Forscheraufgaben (vgl. auch *gute* Aufgaben) haben insbesondere die Eigenschaft allen Kindern einen Einstieg in die Thematik zu ermöglichen, aber auch „Rampen“ für besonders Begabte bereit zu halten (vgl. Hengartner 2006, S. 11). Diese erfüllen im eigenen Begriffsverständnis folgende Kriterien: Forscheraufgaben

- geben vielfältige Anlässe für Entdeckungen mathematischer Phänomene.

- stellen Anforderungen unterschiedlicher Niveaus (selbstdifferenzierend).
- weisen ein Argumentations- bzw. ein Begründungspotential auf.

(Bezold 2009, S. 97, vgl. Verboom & Nührenbörger 2005, S. 39)

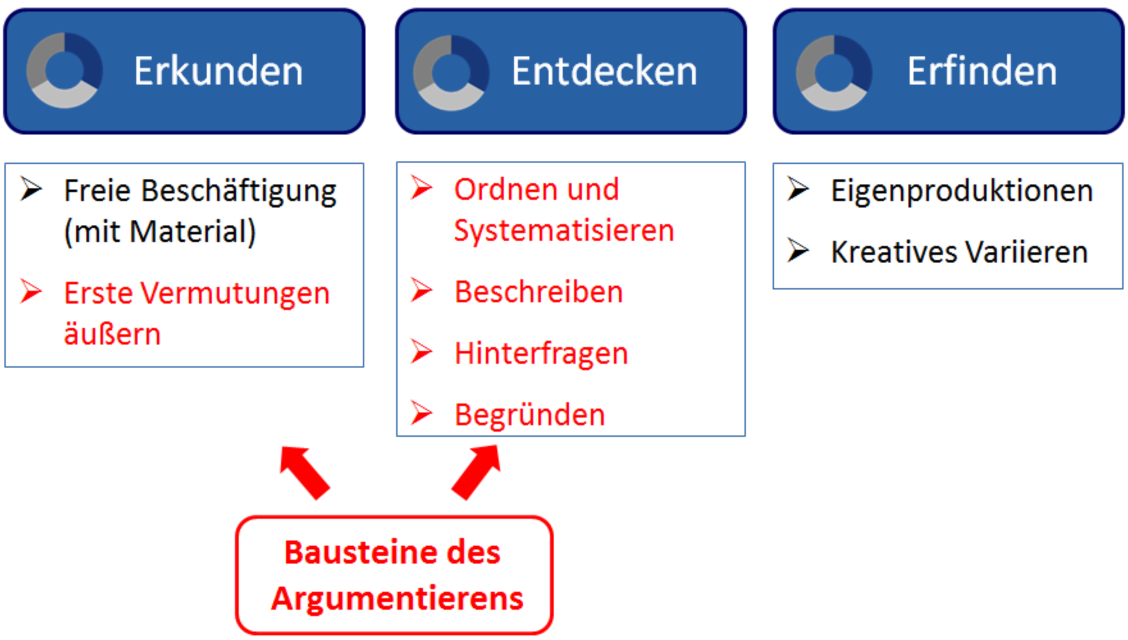
Dabei wird mathematisches Argumentieren in der Primarstufe durch drei Bausteine charakterisiert (Bezold 2009, S. 31, vgl. KMK 2005):

Argumentieren bedeutet Vermutungen über mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge (kurz: Entdeckungen) zu beschreiben (Baustein 1), diese zu hinterfragen (Baustein 2) sowie sie zu begründen bzw. hierfür eine Begründungsidee (Baustein 3) zu liefern.

Aufgrund der besonderen Bedingungen für das Forschercamp schließen sich folgende Fragen an:

- Wie können die allgemeinen Kompetenzen insbesondere das Argumentieren gefördert werden?
- Welche Forscheraufgaben und Arbeitsaufträge ermöglichen ein selbstständiges Arbeiten in einer jahrgangsgemischten Gruppe?
- Welche Forschertipps fördern und fordern die Kinder unterschiedlicher Jahrgangsstufe?

3. Drei-Phasen-Modell: Erkunden – Entdecken – Erfinden



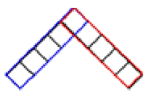
Die Kinder durchlaufen nach einem Drei-Phasen-Modell die Forscherstationen. In die Überlegungen des Drei-Phasen-Modells wurde das vorliegende Argumentationsverständnis (vgl. Bausteine) miteinbezogen. Erwähnt werden sollte, dass diese Phasen fließend ineinander übergehen und nicht unbedingt linear verlaufen müssen. Die erste Phase bedeutet ein freies **Erkunden** mit offenen „Forscheraufträgen“, die Phase des **Entdeckens** geht über erste (spontane) Vermutungen hinaus und erfordert Tätigkeiten des Beschreibens, Hinterfragens und Begründens, wobei sich das Ordnen und Systematisieren als hilfreich erweisen kann und daher auch angeregt wird. In der Regel beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler zunächst **alleine** mit dem Aufgabenformat. Anschließend tauschen sie sich in einer **gemeinsamen** Phase über ihre Entdeckungen aus und beschäftigen sich mit weiteren Forscheraufträgen. Mit den Forschertipps stehen die Studierenden den Gruppen beratend und fördernd zur Seite. In der Phase des **Erfindens** produzieren die Kinder **für andere** Aufgabenvariationen.

Dieses Modell soll am Beispiel der Zahlenwinkel (Bezold/ Schraml) konkretisiert werden.

Zahlenwinkel: Forscherkarte 1 *Erkunden*

alleine

Lege die Zahlen von 1 bis 9 so in den Zahlenwinkel, dass jeder Arm die gleiche Summe ergibt.



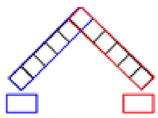
Finde möglichst viele Möglichkeiten!

- Hast du eine geschickte Strategie gefunden?

Zahlenwinkel: Forscherkarte 2 *Entdecken*

alleine

Wie hoch ist das Ergebnis, wenn du die Zahlen aus jedem Arm zusammenzählst?
Schreibe diese Ergebnisse in die Kästchen!



- Was fällt dir auf?

Zahlenwinkel: Forscherkarte 3 *Entdecken*

gemeinsam

Sammelt alle gefundenen Ergebnisse!
Ordnet diese und klebt sie auf ein Plakat auf!

Findet ihr noch mehr Möglichkeiten?

Zählt die beiden Summen der Arme zusammen und zieht davon die Eckzahl ab!
Was fällt euch auf?

Zahlenwinkel: Forscherkarte 4 *Erfinden*

für andere

Erfindet neue Zahlenwinkel!

Das dürft ihr ändern:
- die Länge der Arme
- die Regel für die Summen der Arme
- die Zahlenkärtchen

Stellt den Kindern euren Zahlenwinkel vor!
Wer kann ihn lösen? Welche Strategie hilft?

Weitere Forscherstationen tragen u. a. die Titel Erforschung der Primzahlen, Würfelbauten und Folgen, Kunst und Mathematik sowie Erforschung der Parkette.

4. Forschungsfragen und Weiterentwicklung

Im Rahmen der Entwicklung und Umsetzung des Forschercamps ergibt sich eine ganze Reihe von Forschungsfragen, die zukünftig auf der Grundlage von Videoaufzeichnungen, Schülerdokumenten und eines Kinderfragebogens empirisch untersucht werden sollen:

1) Wie gehen die Kinder mit den Arbeitsaufträgen und den Forschertipps um?
2) Bei welchen „Forschertätigkeiten“ ist ein selbstständiges Arbeiten möglich und sinnvoll, bei welchen Situationen helfen Impulse weiter?
3) Findet eine Teamarbeit zwischen den „Kleinen“ und „Großen“ statt? Wie sieht diese Zusammenarbeit aus?

Im Rahmen des Projektes Akima (www.dmuw.de), in das das Forschercamp eingebunden ist und das sich insbesondere das Ziel setzt die Aus- und Weiterbildung Gewinn bringend zu verknüpfen, stellt sich abschließend folgende Forschungsfrage:

4) Welche Kooperationsmöglichkeiten zwischen Lehrkräften und Studierenden sind Gewinn bringend?

Auf der Grundlage der Forschungsfragen sollen die Konzeption und die Aufgaben des Forschercamps kontinuierlich unter Einbeziehung von „Kooperationslehrkräften“ weiterentwickelt und optimiert werden.

Literatur

Bezold, Angela (2009). Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Hamburg: Dr. Kovač.

Bezold, Angela (2010): Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern. In: http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/ Handreichung_Mathe_Bezold.pdf (01.03.2012).

Hengartner, Elmar (2006): Lernumgebungen für das ganze Begabtenspektrum: Alle Kinder sind gefordert. In: Hengartner, Elmar & Hirt , Ueli & Wälti, Beat und Primarschulteam Lupsingen: Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Zug: Klett und Balmer Verlag, 9-15.

KMK (2005). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.

Nührenbörger, Marcus & Verboom, Lilo (2005): Eigenständig lernen – Gemeinsam lernen. Beschreibung des Moduls 8 für das Projekt SINUS-Transfer in der Grundschule. In: http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_STG/Mathe-Module/Mathe8.pdf (01.03.2012).

Ewald BICHLER, Frank FRITSCHE, Hans-Georg WEIGAND

Der Modellversuch „M3 – Medienintegration im Mathematikunterricht“ an bayerischen Gymnasien

Der Modellversuch M³ wurde ab dem Jahr 2003 vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus initiiert und von Texas Instruments und Casio finanziell unterstützt. Es ist ein langfristiges Projekt in einer authentischen Entwicklungsumgebung an bayerischen Gymnasien. Die positiven Ergebnisse des Projekts haben dazu geführt, dass es bayerischen Gymnasien vom Schuljahr 2011/12 an freigestellt ist, ab der 10. Klasse Taschencomputer (TC) einzuführen und diese dann auch in der Abiturprüfung zu verwenden. Ausführliche Darstellungen des Projekts finden sich in Weigand (2008) und Weigand u. Bichler (2010) und in der Dissertation von Ewald Bichler (2010). Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die zentralen Ergebnisse des Modellversuchs der letzten Jahre gegeben.

1. Ergebnisse des Modellversuchs aus den Jahren 2003-2009

Lernfortschritte verschiedener Leistungsgruppen: Zwischen leistungsstärkeren und -schwächeren Schülern kommt es *nicht* – wie häufig befürchtet – zu einer Öffnung der Leistungsschere. Allerdings zeigt der langfristige Einsatz des TC auch *keine* – entgegen den anfänglichen Ergebnissen – überproportionale Leistungssteigerung der leistungsschwächeren Schüler.

TC-Verwendung in Prüfungen – Einsatz und Erfolg: Eine Integration des TC in das Arbeiten bei Prüfungsaufgaben erfolgt erst nach einer relativ langen Zeit (etwa ein Schuljahr). Wenn Schüler aber mit dem TC vertraut sind, dann schlägt sich seine Verwendung in signifikant besseren Prüfungsergebnissen nieder.

TC-Verwendung in Prüfungen – Einsatzzeitpunkt und Lösungsstrategien: Mit dem TC werden neue Lösungsstrategien bei Prüfungsaufgaben angewandt. Allerdings stellt sich das – natürlich – nicht von alleine ein, sondern die größere Vielfalt an Lösungsmöglichkeiten muss von der Lehrkraft im Unterricht beständig aufgezeigt werden.

TC-Verwendung in Prüfungen – graphisch, numerisch, symbolisch: Bzgl. der drei Darstellungsformen symbolisch, numerisch und graphisch zeigt sich, dass der numerische Bereich beim TC-Einsatz im Unterricht und in Tests eine untergeordnete Rolle spielt. Bei den beiden anderen Bereichen arbeiten Schüler mit dem TC weitaus mehr symbolisch als die Lehrkräfte dies einschätzen, aber weitaus weniger graphisch als die Lehrkräfte dies vermuten.

Einstellungen der Schüler zum TC: Eine deutliche Mehrheit der Schüler empfindet den Unterricht mit einem TC abwechslungsreich und gut die Hälfte empfindet ihn interessant. Eine in den anfänglichen Jahren beobachtete Polarisierung in eine Gruppe, die den TC annimmt und weiterhin mit ihm arbeiten möchte und in eine Gruppe, die ihn ablehnt, konnte langfristig nicht bestätigt werden.

Das Drei-Säulen-Modell – Der Rechner als Rechen-, Lehr- und Lernwerkzeug: Die Interviews zeigen, dass viele Schüler den TC vor allem als ein „Lernwerkzeug" und weit weniger als ein „Rechenwerkzeug" ansehen. Die Schüler sehen den TC als eine Hilfe beim Verständnis der Inhalte und weniger als ein Gerät zum alleinigen Ausführen von Algorithmen. Diese Sichtweise ist weitgehend unabhängig von der Klasse und vom erlebten Unterricht.

TC als Katalysator für „moderne" Unterrichtsformen: Mit der Verwendung des TC gehen verstärkt – moderne(?) – Unterrichtsformen wie Partner-, Gruppen- oder Projektarbeit einher.

Hilfsmittelfreie Prüfungsteile: Der TC war in allen schriftlichen Prüfungen zugelassen, allerdings mit unterschiedlicher Gewichtung. Teilweise gab es bei den Klassenarbeiten hilfsmittelfreie Teile, teilweise wurden einzelne Klassenarbeiten ohne TC geschrieben. Bei mündlichen Prüfungen hat etwa die Hälfte der Lehrkräfte den TC eingesetzt.

Veränderung von Prüfungsaufgaben: Die Prüfungsaufgaben in den Klassenarbeiten haben sich – gegenüber rechnerfreien Klassen – nicht sehr verändert. Veränderungen spiegeln sich vielmehr in den Lösungsstrategien (verstärktes numerisches und graphisches Arbeiten) wider. Der Einsatz des TC bei Prüfungen ist allerdings wichtig, da ein TC-Einsatzverbot bei Prüfungen zu einem Akzeptanzproblem und Verdrängen des TC aus dem Unterricht führt.

Verlust händischer Rechenfertigkeiten: Anfänglich wurden Klassenarbeiten mit „rechnerfreien Teilen" geschrieben. Im Laufe des Projektes sind nahezu alle Lehrkräfte zu der Auffassung gelangt, dass eine Überprüfung der händischen Rechenfertigkeiten auch ohne eine äußere Teilung von Aufgaben möglich ist. Alle Lehrkräfte sind der Meinung, dass keine Gefahr des Verlustes händischer Fertigkeiten besteht, da man dem im Unterricht gezielt entgegenwirken kann.

Einstellung der Lehrkräfte zum TC: Die Lehrkräfte sehen den Einsatz des TC mit großer Mehrheit positiv. Bezüglich der Einsatzhäufigkeit kommt es bei den Lehrkräften zur Bildung von zwei Polen. Eine Gruppe setzt den TC sehr häufig ein (überwiegend jede Stunde bzw. jede zweite

Stunde), die andere Gruppe setzt den TC seltener als einmal pro Woche ein.

Fortbildungen: Hat eine Lehrkraft wenig Erfahrung im Unterrichten mit dem TC, so stellen die Bedienung des Geräts sowie die Fragen zum Prüfungseinsatz große Problemfelder dar. Diese müssen entsprechend durch Material und/oder Fortbildungen thematisiert werden. Im Projekt M^3 ist dies durch Fortbildungen, die MMMs und Videokonferenzen gelungen.

Dokumentation von Lösungen: Die Art und Weise der Dokumentation von Lösungen bleibt ein Problem. Es ist schwierig hier allgemein verbindliche Richtlinien aufzustellen, da sie sehr stark problemabhängig sind. Zukünftig sind verstärkt Strategien für die Lösungsdokumentation gefordert.

Zusammenarbeit von Lehrkräften: Wenn eine Lehrkraft den TC einsetzt, an der jeweiligen Schule aber ein „Einzelphänomen“ bleibt, so kann dies dazu führen, dass sich die Verwendung eines TC an der Schule nicht etabliert. Eine Zusammenarbeit von Kolleginnen und Kollegen an der Schule ist deshalb unumgänglich. Auch ist die konstruktive Unterstützung des TC-Einsatzes durch die Schulleitung unbedingt erforderlich.

Schwerpunktverschiebungen bei Lehrplaninhalten: Bzgl. der im Unterricht behandelten Inhalten traten Schwerpunktverschiebungen dahingehend auf, dass es zur Behandlung einer höheren Zahl an Aufgabenstellungen gekommen ist bzw. zu einer Behandlung von komplexeren Aufgaben. Manche dieser komplexeren Aufgaben hat nach Angaben der Lehrkräfte der TC erst ermöglicht.

Materialien zum TC-Einsatz: Bei den eingesetzten Materialien zum TC-Einsatz ist der mathematische und didaktische Inhalt nicht völlig vom technischen Bedienungswissen des Gerätes zu trennen. Dies ist vor allem für unerfahrene Lehrkräfte wichtig. In dem Modellversuch hat sich ein Materialformat bewährt, welches auf kleineren Beispielen mit methodischen Anmerkungen aufsetzt, welche – individuell – durch den Nutzer steuerbardurch Bildschirmvideos ergänzt werden, welche zum einen die didaktisch-methodischen Intention, zum anderen die konkrete Bedienung herausstellen. (vgl. www.ti-unterrichtsmaterialien.net/mmm).

2. Ein Kompetenzmodell für den Taschencomputereinsatz

Für das weitere zukünftige Arbeiten mit Taschencomputern im M^3-Projekt wurde ein Kompetenzmodell entwickelt, mit dessen Hilfe Arbeitsweisen mit Taschencomputern diagnostiziert und klassifiziert werden können. Darauf aufbauend soll dann über Strategien für Hilfen und Unterstützung nachgedacht werden, um besser und schneller eine Vertrautheit der Schülerinnen und Schüler mit dem TC herbeizuführen. Das mathematische Verständnis wird dabei – exemplarisch – am Funktionsbegriff getestet, da dieser ein zentraler Begriff im gesamten Mathematikunterricht ist und es ein gut entwickeltes Stufenschema zum Verständnis dieses Begriffs für den Mathematikunterricht gibt (vgl. Vollrath u. Weigand 2006).

Das Kompetenzmodell enthält die drei „Dimensionen" *Verständnis* des Funktionsbegriffs, *Arbeitsweisen* mit dem Taschencomputer und *Anforderungsbereiche*. Beim Verständnis des Funktionsbegriffs unterscheiden wir vier Stufen oder Ebenen:

- *Intuitives Begriffsverständnis,*
- *Inhaltliches Begriffsverständnis,*
- *Integriertes Begriffsverständnis* und
- *Strukturelles Begriffsverständnis*.

Die Arbeitsweisen mit dem Taschencomputer wurden in drei Kategorien eingeteilt:

- *Statisches Arbeiten:* Umformen von Termen und Darstellen von Funktionsgraphen
- *Dynamisches Arbeiten:* Verändern von Termen, Gleichungen und Graphen;
- *Multiples Arbeiten:* (Gleichzeitiges) Arbeiten mit mehreren Darstellungen.

Ferner wurden verschiedene Anforderungsbereiche unterschieden, die üblicherweise mit Reproduktion, Reorganisation und Transfer bezeichnet werden können (vgl. Weigand & Bichler 2010). Gegenwärtig werden Aufgaben entwickelt, die in den Modellklassen getestet werden und die eine kritische Analyse des Kompetenzmodells ermöglichen sollen.

Literatur

Vollrath, H.-J., Weigand, H.-G., Algebra in der Sekundarstufe, Spektrum-Verlag, Heidelberg 2006

Bichler, E. (2010). Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M³) am Gymnasium, Verlag Dr. Kovac: Hamburg.

Weigand, H.-G., Teaching with a Symbolic Calculator in 10th Grade - Evaluation of a One Year Project, International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 15 (2008), No 1, 19-32

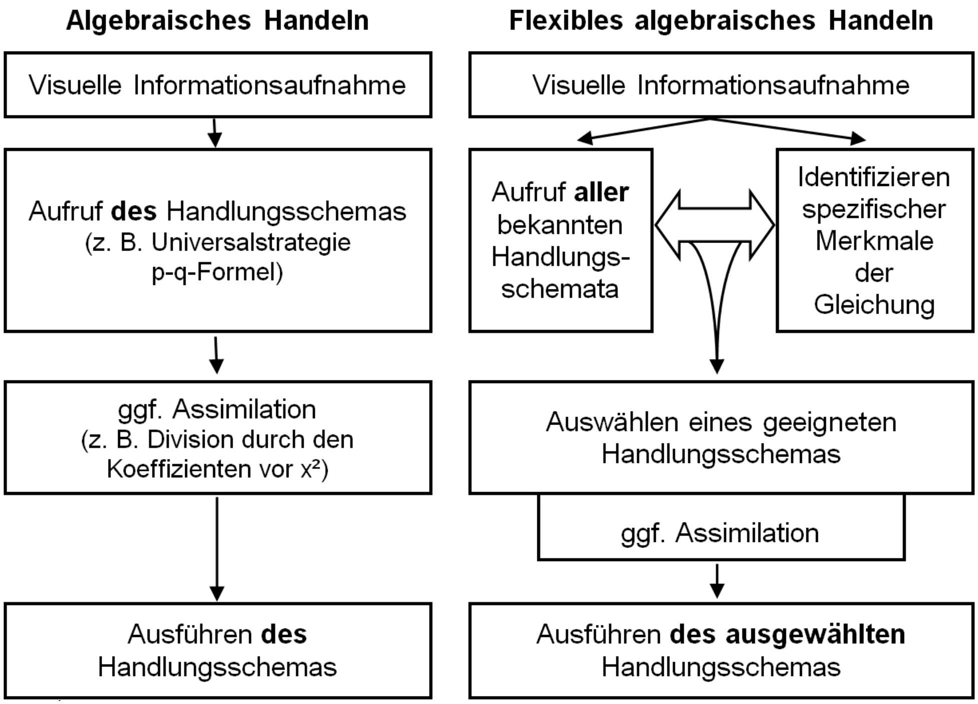
Weigand, H.-G., Bichler, E. (2010). Towards a Competence Model for the Use of Symbolic Calculators in Mathematics Lessons – The Case of Functions, ZDM - The International Journal on Mathematics Education 42(7), 697-713

Jan BLOCK, Braunschweig

„Aber das rechnet man doch mit der p-q-Formel!“ – Wie erfassen Schülerinnen und Schüler Merkmale quadratischer Gleichungen?

Von Schülerinnen und Schülern wird am Ende der Sekundarstufe I erwartet, dass sie verschiedene Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen anwenden können (vgl. z. B. KMK 2004, 15). Hierzu gehören insbesondere die Anwendung einer Lösungsformel, das Verfahren mit quadratischer Ergänzung, das Faktorisieren bzw. Ablesen der Lösungen aus einer Faktorisierung unter Kenntnis der Nullteilerfreiheit und das Erkennen der Unlösbarkeit. Um mit einer möglichst geringen Anzahl möglichst fehlerunanfälliger Rechnungen zur Lösung zu gelangen, sind die Verfahren je nach Merkmalen der Gleichung mehr oder weniger geeignet.

Die Fähigkeit, eine in diesem Sinne adäquate Bearbeitungsmethode zur Lösung einer algebraischen Problemstellung auszuwählen, lässt sich in Anlehnung an den Begriff des flexiblen Rechnens in der Arithmetik (z. B. Rathgeb-Schnierer 2006) als flexibles algebraisches Handeln bezeichnen. Dies ist von den spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden abhängig. Flexibles algebraisches Handeln ist gebunden an Aufgabenstellungen, zu deren Bearbeitung es mindestens zwei unterschiedliche Wege gibt. Für quadratische Gleichungen lässt sich dieses einem algebraischen Handeln gegenüberstellen, bei dem nur eine Universalstrategie zur Verfügung steht.



Algebraisches Handeln entspricht einem Modell von Malle zur Beschreibung des Bearbeitungsprozesses bei algebraischen Termumformungen (vgl. Malle 1993, 163ff). Wesentliches Merkmal des Modells zum flexiblen algebraischen Handeln sind die kognitiven Verarbeitungsprozesse, bei denen den wahrgenommenen Merkmalen Bedeutungen zukommen, sodass zwischen den aufgerufenen Schemata und den wahrgenommenen spezifischen Merkmalen Beziehungen hergestellt werden können. Diese führen dann zur begründbaren Auswahl eines geeigneten Handlungsschemas.

In einer explorativ angelegten Laborstudie wird mit Mitteln qualitativer Forschung der Frage nachgegangen, inwieweit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe die Identifikation spezifischer Merkmale quadratischer Gleichungen gelingt und welche Bedeutungszuweisungen vorgenommen werden.

Zur Beantwortung dieser Frage bedarf es geeigneter Aufgabenstellungen, die über das Lösen quadratischer Gleichungen hinausgehen. Analysen von Lösungswegen der Probanden oder von Retrospektiven der Probanden auf ihre Lösungswege geben nur indirekt Hinweise auf die zu rekonstruierenden kognitiven Prozesse beim Erfassen der Gleichungen. Hinweise auf prominente Merkmale, die von den Probanden erfasst werden, können jedoch gewonnen werden, wenn eine oder mehrere Gleichungen gleichzeitig vorgelegt werden, ohne dass das Lösen Ziel der Auseinandersetzung ist. Vielmehr müssen die Aufgabenstellungen eine Reflexion der vorliegenden Gleichungen ermöglichen. Derartige, auf einer Metaebene angesiedelte Aufgabenstellungen, werden in dieser Studie als Metaaufgaben bezeichnet. Sie beinhalten einen analysierenden oder generierenden Umgang mit einer Menge von Aufgaben (hier Gleichungen), die in einem für die die Metaaufgabe bearbeitende Person erkennbaren Zusammenhang stehen müssen.

Typen von Metaaufgaben (unterschieden nach Tätigkeiten)

<table>
<tr><td rowspan="5">Analysieren</td><td rowspan="3">Sortieren</td><td>nach selbst zu formulierenden Kriterien</td></tr>
<tr><td>nach subjektiven Kriterien</td></tr>
<tr><td>nach objektiven Kriterien</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Beschreiben/ Begründen</td><td>einer vorgelegten Sortierung in Gruppen</td></tr>
<tr><td>einer vorgelegten Sortierung in einer Reihenfolge</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Generieren</td><td rowspan="2">Erfinden</td><td>als Fortsetzung einer Folge</td></tr>
<tr><td>in einem vorgegebenen fachlichen Kontext</td></tr>
<tr><td>Variieren</td><td>ausgehend von einer Initialaufgabe</td></tr>
</table>

Es werden zwei Typen von Metaaufgaben unterschieden: Bei analysierenden Metaaufgaben kann eine vorgegebene Menge von Aufgaben auf verschiedene Arten analysiert werden. Bei generierenden Metaaufgaben hingegen entwickeln die Probanden ausgehend von einem Kontext oder einer Initialaufgabe neue Aufgaben, deren Zusammenhang zum vorgegebenen Kontext oder zur Initialaufgabe beschrieben werden muss.

In der Studie bearbeiten die Probanden drei Aufgabenstellungen:

> Aufgabe 1: Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + 2x - 6 = 0$.
> Erfinde ausgehend von dieser Gleichung durch Veränderung neue Gleichungen.

Bei Aufgabe 1 handelt es sich um eine generierende Metaufgabe, um das Variieren einer Initialaufgabe ohne Vorgabe von Strategien. Schupp (2002) stellt das Variieren von Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler ausführlich als Konzept für die Unterrichtsgestaltung dar, hier hingegen dient es einem diagnostischen Zweck. Die Wahrnehmung von spezifischen Merkmalen der Initialaufgabe ermöglicht erst deren zielgerichtete und begründbare Variation. Die Bearbeitung zeigt an, welche Merkmale der Gleichung erfasst und als relevant eingestuft werden. Erläuterungen der Versuchspersonen während des Entwickelns der Variationen erlauben es festzustellen, welches Wissen Verwendung findet und welche Überlegungen und Strategien zu der jeweiligen Variation geführt haben.

> Aufgabe 2: Löse die Gleichungen.
> Die Reihenfolge der Bearbeitung ist beliebig wählbar.

Bei Aufgabe 2 müssen fünf quadratische Gleichungen gelöst werden, die sich hinsichtlich der Syntax der Gleichungen und der auftretenden Terme und bzgl. der geeigneten Lösungsverfahren unterscheiden. Funktion von Aufgabe 2 ist es, zu erfassen, welche Lösungsverfahren von den Probanden verwendet werden und wie der Umgang mit diesen Verfahren beherrscht wird bzw. welche Fehler auftreten.

> Aufgabe 3: Auf den 20 Karten sind Gleichungen gegeben. Sortiere die Karten mit den Gleichungen. Beachte: Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten die Karten zu sortieren.

Zu Aufgabe 3, einer analysierenden Metaaufgabe, erhalten die Probanden 20 Karten mit quadratischen Gleichungen, die so ausgewählt sind, dass ein breites Spektrum bzgl. der anwendbaren Lösungsverfahren und der syntaktischen Unterschiede in der Gestalt der Gleichungen und auftretenden Terme abgedeckt ist. Weitere Sortierkriterien können semantische Aspekte wie z. B. Bezüge zu den zugehörigen Graphen entsprechender Parabeln oder subjektive Kriterien, etwa die Vermeidung negativer Zahlen, sein. Durch das Nennen der Sortierkriterien werden die bewusst wahrgenommenen Merkmale erkennbar. Mit Hilfe der verbalisierten Begründungen für die Sortierungen soll erfasst werden, welche Bedeutungen den Merkmalen jeweils zugeschrieben werden.

Die Auswertungen einer Vorstudie zeigen, dass die verwendeten Metaaufgaben geeignet sind, Hinweise auf kognitive Prozesse der Wahrnehmung und Bedeutungszuweisung, die beim flexiblen algebraischen Handeln relevant sind, zu erhalten. Bei der Auswertung von Aufgabe 3 wird deutlich, dass zahlreiche Zusammenhänge eine Rolle spielen. Vorgelegte Sortierungen und deren Begründungen lassen z. B. die Analogiebildung der Probanden zu Prozessen beim Lösen linearer Gleichungen (Isolieren der Variablen; Prinzip des Gegenoperators, vgl. z. B. Vollrath 1999) erkennen. Ebenso tritt die Bedeutung des Verständnisses für das Gleichheitszeichen (vgl. z. B. Siebel 2005) hervor, wenn Probanden nach der „Größe der Ergebnisse der Gleichung“ sortieren und hiermit nicht die Lösungen der Gleichung meinen, sondern die Zahl oder den Term auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens. Ein dominierender Aspekt bei den Sortierungen ist das Auftreten von Klammern in den Termen der Gleichung. Insbesondere die Anwendbarkeit binomischer Formeln auf die Terme der Gleichung wird als relevantes Kriterium genannt, selbst wenn dies im Widerspruch zu den verwendeten Lösungsverfahren bei Aufgabe 2 steht.

Die Studie lässt Hinweise für eine praxisnahe Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsentwicklung zum Thema quadratische Gleichungen erwarten. Die Relevanz von Metaaufgaben für diagnostische Zwecke und ihr Einsatz im Unterricht im Hinblick auf flexibles algebraisches Handeln werden reflektiert.

Literatur

KMK (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz) (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. Köln: Luchterhand.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006): Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Hildesheim: Franzbecker.

Schupp, H. (2002): Thema mit Variationen. Hildesheim: Franzbecker.

Siebel, F. (2005): Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Mühltal: Verlag allgemeine Wissenschaft.

Vollrath, H.-J. (1999): Algebra in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Thomas BORYS, Karlsruhe, Mutfried HARTMANN, Karlsruhe, Seiji MORIYA, Tokio, Naomasa SASAKI, & Nobuki WATANABE, Kyoto

Mathematische Interkulturalität erleben

Was kann die Auseinandersetzung mit interkulturellen Aspekten des Mathematikunterrichts zur Lehrerbildung beitragen? Ist es im Rahmen knapp bemessener Ausbildungszeiten überhaupt gerechtfertigt, ein Seminar anzubieten, das sich primär mit derartigen interkulturellen Aspekten beschäftigt? Gibt es nicht wichtigere Themen in der Mathematiklehrerausbildung, die dort bereits zu kurz kommen? Fragen, die durchaus gerechtfertigt erscheinen, insbesondere in Hinblick auf die oftmals nicht wirklich überzeugenden fachlichen und fachdidaktischen Kenntnissen von Lehramtsstudierenden. Fragen, die wir uns selbst immer wieder kritisch stellen, seitdem wir ein entsprechendes Seminar anbieten. Der folgende Beitrag soll keine endgültigen Antworten darauf liefern. Er stellt auch selbst keinen wissenschaftlich fundierten Beitrag zur Interkulturalität des Mathematiklehrens und –lernens dar. Vielmehr soll er einen Einblick in die Organisation, vor allem aber in die Chancen und Probleme eines solchen Seminars geben, wie wir es seit dem Sommersemester 2010 regelmäßig mit Lehramtsstudierenden der Grund- und Hauptschule bzw. der Realschule durchführen.

1. Zu den Chancen

Die Chancen des Seminars liegen naturgemäß auf sehr unterschiedlichen Ebenen. Einerseits betreffen sie fachübergreifende softskills wie Weltoffenheit, Kommunikationsfähigkeit, Präsentations-know-how etc., andererseits liegen sie aber auch in einem inhaltlichen fachdidaktischen Bereich.

Seitens der Lehrenden war dabei der Fokus zunächst primär auf zwei Ziele gerichtet:

- Die Studierenden sollen durch den Blick auf das Fremde lernen, das Eigene und selbst Erlebte nicht als selbstverständlich wahrzunehmen, sondern kritisch zu reflektieren und somit ihre Vorstellung von Mathematikunterricht geeignet zu erweitern. Dies betrifft nicht nur die Auswahl der Inhalte, die Gewichtung derselben oder die Weise, in der diese unterrichtet werden, sondern auch das Schulsystem und die Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften.
- Diese Reflexion würde eine Diskussion fachdidaktischer Ziele im Allgemeinen und intensive fachdidaktische Analysen im Speziellen erfordern.

2. Zur Organisation

Von einigen Studierenden wurden immer wieder eigene Erfahrungen aus anderen Ländern wie etwa Irland, Schweden, Türkei, Mexiko, Südafrika, Brasilien oder China mit eingebracht. Diese Erfahrungen, die sie als Schüler, Austauschstudierende teils auch bereits als Mathematiklehrende gemacht haben, werden über Präsentationen dem Seminar zugänglich gemacht. Diese individuellen Erfahrungsberichte stellen allerdings meist nur den kleineren Teil des Seminars dar.

Der Hauptteil des Seminars besteht in einem Kontakt mit japanischen Studierenden der Kyoto University of Education, der Sonoda Women's University und der Tamagawa University. Zentrale Bedeutung haben dabei Telekonferenzen, die in englischer Sprache durchgeführt werden.

Bei ersten Konferenzen, die bereits früher an der Universität Erlangen stattgefunden hatten, erwies sich die Sprachbarriere als so groß, dass ein gewinnbringender Austausch allein über diese Telekonferenzen nicht erreicht werden konnte.

Aufgrund dieser Erfahrungen wurden strukturelle Änderungen vorgenommen, die die Kommunikation bereits ins Vorfeld der eigentlichen Telekonferenzen verlagern sollten. Folgende Organisationsstruktur wurde dazu entwickelt und getestet:

- *Phase1: Einarbeitung in die Thematik*

  Die Studierenden aus Karlsruhe hatten die Aufgabe, Themen aus dem Bereich der Geometrie (Flächen- und Rauminhalt) unter inhaltlichen, didaktischen und methodischen Aspekten anhand deutschsprachiger Literatur aufzuarbeiten. Den Abschluss dieser Phase bildeten Kurzpräsentationen, die die Studierenden vor ihren eigenen Kommilitonen in ihrer Landessprache hielten.

- *Phase 2: Kommunikation im Vorfeld der Telekonferenz*

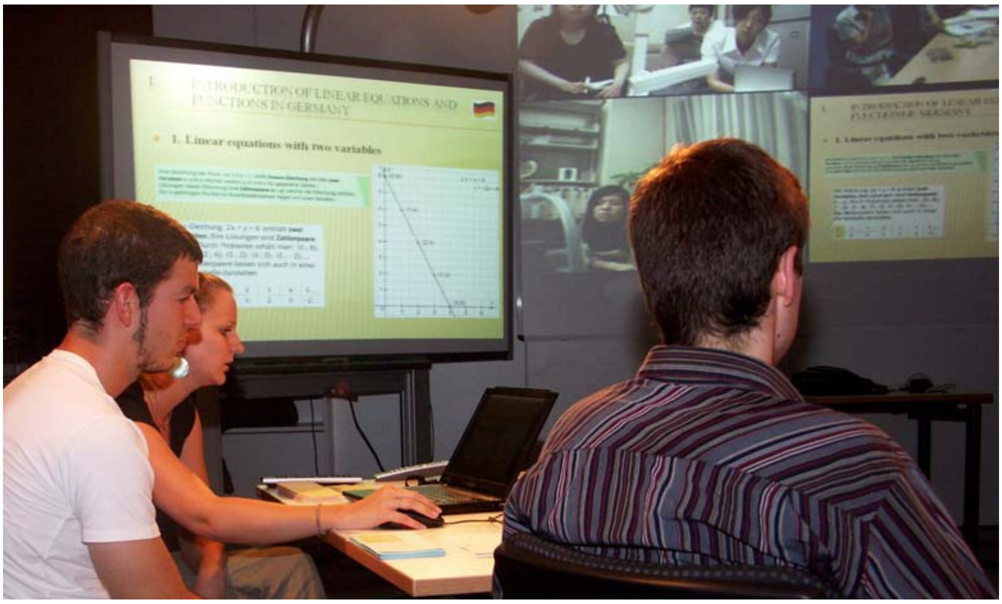
  Hier sollten die Studierenden den japanischen und deutschen Mathematikunterricht in Bezug auf das von ihnen in Phase 1 gewählte Thema in Vorbereitung auf die Telekonferenz vergleichen. Um einen persönlichen Kontakt zwischen den deutschen und japanischen Studierenden zu initiieren, erstellten diese zunächst Steckbriefe zur gegenseitigen Vorstellung. Daraufhin wurden Tandems aus deutschen und japanischen Studierenden gebildet. Der japanische Tandempartner hatte beispielsweise die Aufgabe, Fragen zum japanischen Unterricht zu beantworten und gegebenenfalls Bild- und Videomaterial zur Verfügung zu stellen. Außerdem standen den Karlsruher Studierenden japanische Schulbücher und Curricula als Informationsquelle zur Verfügung. Die Kommunikation sollte per Email und Skype, der Datenaustausch über eine Dropbox erfolgen.

- *Phase 3: Telekonferenz*

  Die Studierenden der beteiligten Universitäten präsentieren in englischer Sprache die Ergebnisse aus Phase 2. Bei dieser Präsentation sind alle Studierenden über das Telekonferenzsystem zusammengeschaltet. Im Anschluss an die jeweilige Präsentation findet eine kurze gemeinsame Diskussion statt, die von den Studierenden selbst moderiert wird (vgl. Abbildung unten).

- *Phase 4: Reflexion*

  Zum Abschluss des Seminars müssen die Studierenden ausführliche schriftliche Ausarbeitungen verfassen.



Telekonferenz aus deutscher Sicht

3. Resümee

Der Austausch über eine Dropbox hat sich bewährt. Die Kommunikation mittels der Tandembildung im Vorfeld der Konferenzen zu verstärken gelang nicht immer und wenn dann oft nur rudimentär. Über Email fand ein gewisser Austausch statt, währenddessen Skype dabei kaum eine Bedeutung hatte. Dies lässt sich mit den Sprachproblemen erklären. Auch wenn sich die Kommunikation im Vorfeld nur auf wenige Studierende konzentrierte, waren die Präsentationen der Studierenden dennoch insgesamt auf einem guten Niveau. Auch die sich anschließenden Diskussionen wurden von Telekonferenz zu Telekonferenz besser.

Als besonders ergiebig erwies sich für uns der exemplarische Vergleich deutscher und japanischer Mathematikschulbücher. Hier wurde deutlich, dass sich die Unterrichtsinhalte zwar insgesamt nur wenig unterscheiden, in Japan allerdings oft deutlich früher behandelt werden als in Deutschland. So werden Flächeninhaltsberechnungen ebener Figuren (Dreiecke, Vierecke, Kreis) bereits in Klasse 5 ausführlich behandelt - um nur ein Beispiel zu nennen. Auffallend war auch, dass hier in manchen Werken gerade der elementary school eine vielfältige und tiefe stoffdidaktische Durchdringung stattfindet, wie sie bei uns eher in Lehrwerken zur Didaktik der Mathematik vorzufinden ist.

Für uns überraschend waren die durchweg guten bis sehr guten Ergebnisse dieses Seminars im Rahmen der hausinternen Evaluation:

Das Interesse an der Veranstaltung ist im Vorfeld von etwa 70% der Studierenden als hoch bis sehr hoch angegeben worden. Überraschender Weise sank das Interesse bei 80% der Studierenden nicht nur nicht ab, rund 20% gaben an, dass ihr Interesse an der Veranstaltung sogar gestiegen sei. Wie oben angedeutet haben wir versucht, die Organisationsstruktur des Seminars über mehrere Semester hinweg zu verbessern. Insofern war es für uns erfreulich, dass 90% der Studierenden diese Struktur in ihrer jetzigen Form mit gut bis sehr gut bewerteten. Erfahrungsgemäß wird der Lernzuwachs bei Seminaren mit studentischen Präsentationen eher niedrig eingeschätzt. Für dieses Seminar gaben 83% der Studierenden an, dass sie sehr viel bis viel durch ihre eigenen Präsentationen gelernt haben und immerhin noch 75% gaben an, dass sie sehr viel bis viel von den Präsentationen ihrer Kommilitonen gelernt hätten.

In den Freitextbemerkungen ist uns besonders aufgefallen, dass die Studierenden die Situation der Telekonferenz als besonders faszinierend und motivierend wahrgenommen haben. Durch die Außenperspektive auf den Mathematikunterricht in Deutschland hätten sie sehr viel über diesen aus inhaltlicher, didaktischer und methodischer Sicht gelernt.

Die eingangs genannten Bedenken, die Zeit könnte nicht effizient für die dringend notwendige Auseinandersetzung mit fachdidaktischen Inhalten genutzt worden sein, werden offensichtlich zumindest von studentischer Seite nicht geteilt. Wir sehen dies als ein Zeichen dafür, dass wir zusammen mit unseren japanischen Kollegen auf dem richtigen Weg sind.

Literatur

JSME (2000): Mathematics Program in Japan. Tokio, Japan Society of Mathematical Education.

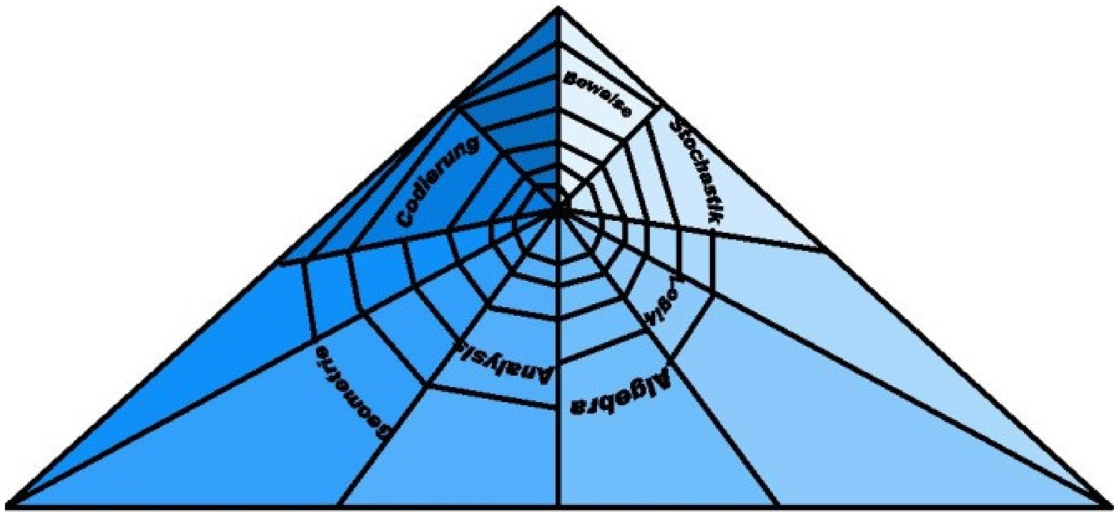
一松信 (2011): みんなと学ぶ小学校算数: 5 年下. 学校図書

Astrid BRINKMANN, Münster

„Mathe vernetzt“ – Band 2 (Hrsg.: Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß, Hans-Stefan Siller)

1. Einleitung

Die Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (herausgegeben von Astrid Brinkmann) ist eine Publikation des 2009 gegründeten Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der GDM. Mit dem Anspruch einer „sozialen Vernetzung“ werden in diesem Arbeitskreis vielfältige Ideen und Vorschläge zum Mathematikunterricht in kooperativer und kollegialer Form aufgenommen und diskutiert. Die Ergebnisse fließen in die Schriftenreihe ein und werden so aufbereitet, dass Lehrende sie möglichst unmittelbar und gewinnbringend in ihrem Unterricht einsetzen können. Die Schriftenreihe richtet sich in erster Linie an Mathematiklehrende und an zukünftige Mathematiklehrende der Sekundarstufen I und II.



In der Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ wird eine altbekannte und zentrale Forderung an das Lernen von Mathematik neu betrachtet: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voreinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

Inhaltlich geht es in der Schriftenreihe darum, innermathematische Beziehungen zwischen den üblicherweise zu unterrichtenden Teilgebieten aufzuzeigen und deren Vernetzungsmöglichkeiten ins Bewusstsein der Lehrenden zu rücken. Das große Ziel der Buchreihe ist es, alle Lehrenden dazu zu ermutigen und sie dabei zu unterstützen, die Vorteile vernetzenden Unterrichts für sich und ihre Schüler/innen zu entdecken bzw. besser zu nutzen.

Die Schriftenreihe unterstützt mit ihren Beiträgen auch eine eigenständige Thematisierung der Leitidee Vernetzung im Unterricht. Das betrifft sowohl Methoden zum Erkennen und Lernen von Zusammenhängen und Vernetzungen, wie Mind Mapping, Concept Mapping oder Lernlandkarten, als auch System Dynamics als Schlüssel zur Modellierung und zum Verständnis von vernetzten Problemen unserer Welt, insbesondere aus Umwelt, Natur und Ökonomie.

Band 1 der Reihe ist Anfang 2011 erschienen, Band 2 der Reihe Anfang 2012; weitere Bände folgen.

2. Innere Struktur der Bände

In die einzelnen Bände der Schriftenreihe führt jeweils ein *theoriegeleiteter Artikel* ein; der Hauptteil gliedert sich in drei Kapitel zur Unterrichtspraxis:

- *Kapitel I* stellt spezielle *Unterrichtsmethoden* für einen vernetzenden Mathematikunterricht vor.
- *Kapitel II* zeigt für einen Mathematikunterricht gewinnbringende *mögliche inhaltliche Vernetzungen* auf, insbesondere auch zwischen verschiedenen Gebieten der Schulmathematik (z. B. Algebra, Geometrie und Stochastik) und zwischen verschiedenen Repräsentationen mathematischer Objekte (z. B. graphische/bildliche und algebraische Repräsentationen).
- *Kapitel III* befasst sich mit der *Förderung vernetzten Denkens*, speziell auch mit der mathematischen Modellierung vernetzter Systeme unserer Lebensumwelt.

3. Beiträge im Band 2

Im *Einleitungsartikel* vom Band 2 diskutieren Jürgen Maaß und Michael Wildt, wie Vernetzen nachhaltiges und effizientes Lernen unterstützen kann. In dem in Dialog-Form gestalteten Artikel übernimmt Jürgen Maaß die Rolle als skeptischer Lehrer während Michael Wildt für die Vernetzung mit Berichten aus seinen Erfahrungen als Lehrer und Lehrerfortbildner argumentiert. Die zentrale These, die hier auch mit Praxisbeispielen überzeugend belegt wird, ist, dass ein vermehrt vernetzendes Unterrichten letztlich Zeit spart und den Lernerfolg erhöht.

Das *Kapitel der Unterrichtsmethoden* eröffnet Michael Wildt mit seiner Darstellung zur Förderung vernetzenden Mathematiklernens durch „nachhaltige Klassenarbeiten“. Der Beitrag skizziert, in welcher spezifischen

Weise Lernerfolgskontrollen so gestaltet werden können, dass die Schüler/innen zum nachhaltigen Lernen angeregt werden können, und liefert ein erprobtes Praxisbeispiel aus der Gesamtschule in Klasse 5.

Astrid Brinkmann und Hans-Stefan Siller zeigen auf, wie sich durch außermathematische Anwendungskontexte vertikale Vernetzungen bewerkstelligen lassen, dies in gewinnbringender Weise sowohl für den Mathematikunterricht als auch im Sinne eines Beitrags zu außermathematischer Bildung. Die vertikale Vernetzung kann dabei über Jahrgangsstufen hinweg erfolgen oder innerhalb einer Unterrichtsreihe. Konkrete Aufgabenbeispiele für den Unterricht werden geliefert.

Frauke Link und Céline Liedmann stellen den Mathekoffer als Vernetzungswerkzeug vor: Einem Übersichtsartikel von Frauke Link folgt der Beitrag von Céline Liedmann, der speziell auf die Themenbox „Funktionaler Zusammenhang" eingeht und hier Aufgabenkarten und Erfahrungen damit im Unterricht präsentiert.

Im *Kapitel zu möglichen inhaltlichen Vernetzungen* erklärt zunächst Michael Weigend Vernetzungsmöglichkeiten im Kontext der 3D-Modellierung mittels Google SketchUp. Der Beitrag skizziert einige Vorschläge für Aufgaben, bei denen Schüler/innen digitale 3D-Modelle mit SketchUp entwickeln. Alle Aktivitäten sollen mathematisches Denken fördern und gleichzeitig die Kreativität herausfordern. Die hier angesprochenen Modelle dienen unterschiedlichen Zwecken: Design eines realen oder fiktiven 3D-Objektes, Einkleidung eines mathematischen Musters, Veranschaulichung eines mathematischen Prinzips. Insbesondere Vernetzungen von Geometrie und Algebra kommen zum Tragen.

Michael Bürker greift mit der Betrachtung von Fixkurven einen weniger bekannten Zusammenhang von Geometrie, Algebra und Analysis auf, der mit dem DGS DynaGeo untersucht wird: Verallgemeinert man eine zentrische Streckung mit $x' = r{\cdot}x$ und $y' = r{\cdot}y$ ($r \neq 0$) zu einer so genannten Euleraffinität mit einer Abbildungsgleichung der Form $x' = r \cdot x$ und $y' = s \cdot y$ ($s \neq r$), so werden aus Fixgeraden Fixkurven, die sich als Schaubilder von Potenzfunktionen herausstellen. Es werden fünf Aufgaben (mit Lösungsvorschlägen) vorgestellt, in denen es um den Begriff „Fixkurve" als Verallgemeinerung von „Fixgerade" geht und in denen Ableitungen einfacher Potenzfunktionen abbildungsgeometrisch hergeleitet werden.

Renate Motzer führt die (Stochastik und Analysis verbindende) Lotto-Thematik von Matthias Brandl aus Band 1 weiter. Sie geht folgenden Fragen nach: „Wie viel gewinnt ein Lottospieler, der 6 Richtige und die Superzahl hat?", „Inwiefern ist dies abhängig von der Anzahl der Mitspieler?“, „Bei welcher Anzahl von Mitspielern ist der Gewinn für den einzelnen Gewinner am größten?“, und zeigt, dass hierbei nicht nur Überlegungen zu Wahrscheinlichkeiten und zur Extremwertberechnung vernetzt werden, sondern (da eine exakte Berechnung nicht möglich ist) außerdem die Numerik hereinspielt.

Hans Humenberger und Berthold Schuppar lösen ein innermathematisches Problem – Zerlegungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in gleichmächtige summengleiche Teilmengen – auf vernetzende Art und Weise und setzen damit die Ausführungen aus ihrem Artikel im Band 1 fort.

Das Kapitel zur *Förderung vernetzten Denkens* enthält abschließend einen ausführlichen Artikel von Willi van Lück zur dynamischen Modellierung an realen Problemen, in dem mehrere Beispiele aus der Lernumgebung „Modellieren mit Mathe“ (kostenlos im Internet) aufgegriffen und eingehend behandelt werden.

4. Ausblick

Band 3 der Schriftenreihe ist in Arbeit und wird voraussichtlich Anfang 2013 erscheinen. Ferner wird es einen Materialband zu den Bänden 1–3 mit Kopiervorlagen für den Schulunterricht geben (geplanter Erscheinungstermin ebenfalls Anfang 2013), damit die vielfältigen Ideen und Vorschläge, die in der Schriftenreihe präsentiert werden, noch einfacher und unmittelbarer im Unterricht umgesetzt werden können.

Um das Augenmerk praktizierender Lehrer/innen hinsichtlich der wichtigen Vernetzungsthematik zu erhöhen und Beiträge der Schriftenreihe einem Teil des Zielpublikums direkt zu präsentieren, bietet der GDM-Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ auf seinen Tagungen Lehrerfortbildungen an. Die erste bereits durchgeführte Lehrerfortbildung am 14.05.2011 in Berlin hat bei Mathematiklehrer/innen auf sehr großes Interesse gestoßen und äußerst positive Rückmeldungen geliefert.

Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. München: Aulis Verlag. http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Brinkmann, A., Maaß, J., Siller, H.-S. (Hrsg.) (2011): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 1. Aulis Verlag. ISBN 987-3-7614-2836-8.

Brandl, M., Brinkmann, A., Maaß, J., Siller, H.-S. (Hrsg.) (2012): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 2. Aulis Verlag. ISBN 987-3-7614-2859-7.

AK-Tagungen: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

HeuRekAP – Erste Ergebnisse der Langzeitstudie zum Problemlösen und Beweisen am Gymnasium

Nach einer Tendenz in den 70er und 80er Jahren, in der die Beweiskultur auf Grund ihres formalen Charakters in den Schulen zurückgeschraubt wurde, kam es in den 90er Jahren zu einer Gegenentwicklung. Das formelle Beweisen wurde nun als letzte Stufe einer altergemäß zu entwickelnden Argumentationskultur verstanden. Das niedersächsische Kerncurriculum nennt als mögliche Handlungen im Rahmen einer solchen Entwicklung beispielsweise das „Erkunden von Situationen, Strukturieren von Informationen, Fragen stellen, Aufstellen von Vermutungen, Angeben von Beispielen und Plausibilitätsbetrachtungen, über das schlüssige (auch mehrschrittige) Begründen bis hin zum formalen Beweisen“ (MK Nds. 2006, S. 13).
Boero (1999) unterteilt den Beweisprozess in sechs Phasen: (1) Untersuchung eines Sachverhaltes und Aufstellen einer Vermutung, (2) Formulieren einer Aussage gemäß fachlicher Konventionen, (3) Erforschen des Umfeldes der Vermutung, (4) Auswahl und Aneinanderreihung von Argumenten in eine deduktive Reihe, (5) Publizierbare Verschriftlichung dieser deduktiven Reihe und (6) Erreichen mathematischer Strenge. Alterangemessen sollen die Schülerinnen und Schüler in der ersten Phase des HeuRekAP Projektes einige dieser „Boerophasen“ durchlaufen.

Die Studie

Das HeuRekAP Projekt wird über einen Zeitraum von insgesamt zwei Schuljahren, beginnend im achten Jahrgang, in vier Klassen eines hannoveraner Gymnasiums durchgeführt. Zwei dieser Klassen werden vom Autor unterrichtet (Trainingsgruppe, N=59). Ziel des Projektes ist eine Verbesserung der Problemlöseleistung der Schülerinnen und Schüler durch ein gezieltes Heurismen- und Argumentationstraining. Die beiden anderen Klassen dienen als Vergleichsgruppe (N=59). In der ersten Projektphase, die sich etwa über die ersten sechs Wochen erstreckte, wurde eine Studie zur Entwicklung der Beweiskompetenz durchgeführt. Im Unterricht entdeckten die Schülerinnen und Schüler unter anderem gemäß Boerophase (1) den Satz des Thales an

Abbildung 1: Die Unterrichtseinheit „Winkel am Kreis“

Hand von elektronischen Arbeitsblättern (Elschenbroich & Seebach 2002) und lernten im Sinne von Boerophase (4) respektive (5) ein Schema zur Beweisdarstellung kennen, das dem Schulbuch „Neue Wege“ (Lergenmüller & Schmidt 2007, S. 72) entstammt.

Im Rahmen dieser Studie sollen nun folgende Fragen beantwortet werden:

- Hat das durchgeführte Beweistraining einen Effekt auf die Argumentationskompetenz der Schülerinnen und Schüler?
- Sind die Schülerinnen und Schüler bei Benutzung des eingeführten Beweisschemas erfolgreicher als ohne?

Methodik

Im Rahmen eines Vor- und Nachtests wurden den Schülerinnen und Schülern verschiedene Aufgaben unter anderem aus der VERA 8 Literatur gestellt, die mehrschrittige Lösungswege nebst Begründungen erforderten. In diesem Artikel werden die Bearbeitungsergebnisse je einer Aufgabe aus dem Vortest und einer aus dem Nachtest vorgestellt:

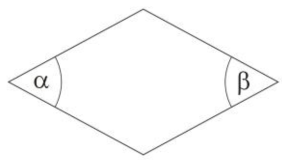
Aufgabe 2.3:
Eine Raute wird von einer seiner Diagonalen in zwei Dreiecke zerschnitten. Begründe, warum diese Dreiecke kongruent zueinander sind. Schreibe alle Überlegungen und Begründungen schrittweise auf.

Abbildung 2: Untersuchte Vortestaufgabe (vgl. Griesel, Postel & Suhr 2006, S. 27f.)

Aufgabe 4: Eine Raute wird definiert als ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten.

Voraussetzung: Gegeben sei eine Raute mit zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln α und β.|α| = |β|

Skizze:



Behauptung:

Beweis:

Beweisschritt:	**Begründung:**

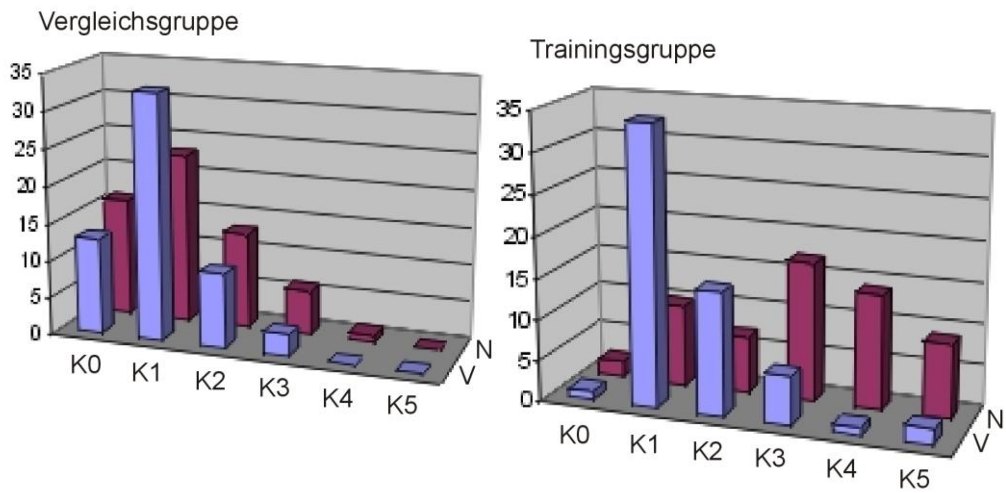
Abbildung 3: Untersuchte Nachtestaufgabe (vgl. Beuthan 2008[3], S.53)

Die Qualität der Aufgabenbearbeitungen der Schülerinnen und Schüler aus der Trainingsgruppe und aus der Vergleichsgruppe jeweils vor und nach dem Training wurden verglichen. Zu diesem Zweck erfolgte eine Einteilung der Bearbeitungen in folgende sechs Kategorien:

K0	Kein Ansatz Es findet keine Bearbeitung der Aufgabe statt bzw. es werden nur vollständig sachfremde Dinge notiert oder Teile der Aufgabenstellung wiederholt. .
K1	Fragmente Unzusammenhängend werden einzelne Hilfsmittel, Sätze, Umformungsmodalitäten notiert, von denen einige oder alle für bestimmte Schritte bei der Bearbeitung der Aufgabe hilfreich wären.
K2	Deduktive Keimzellen Es werden probate Hilfsmittel, Sätze, Umformungsmodalitäten etc. notiert, die vereinzelt auch logisch miteinander in Verbindung gebracht werden.
K3	Deduktives Skelett Die Struktur einer deduktiven Schlusskette mit dem Versuch der Hinführung zur Behauptung oder deren Widerlegung ist erkennbar, allerdings gibt es noch größere Lücken in der Kette, demzufolge das Ergebnis auch nicht korrekt sein muss.
K4	Deduktiver Torso Es liegt eine im Wesentlichen korrekte deduktive Schlusskette vor, die auf das richtige Ergebnis, also im Falle von Entscheidungsaufgaben auf die Behauptung oder deren Widerlegung, im Falle von Bestimmungsaufgaben auf die Lösung führt. Diese Kette enthält allenfalls noch vereinzelt kleinere logische Unstimmigkeiten oder Rechenfehler.
K5	Deduktiver Körper Es liegt eine vollständig korrekte deduktive Schlusskette vor, die allenfalls kleinere Rechenfehler enthält.

Erste Ergebnisse

Die Trainingsgruppe erzielte in Bezug auf die oben beschriebenen Aufgaben nach dem Training (N) wesentlich bessere Ergebnisse als vorher (V), die Vergleichsgruppe erreichte keine nennenswerte Verbesserung. Die absoluten Werte der Kategorienvergabe liefern einen ersten Eindruck:



Wilcoxon Tests bestätigen die zentrale Tendenz bei der Vergleichsgruppe, während die entsprechende Nullhypothese bei der Trainingsgruppe auf einem 1% Signifikanzniveau verworfen werden muss.

Diskussion und Ausblick

Die Durchführung der Unterrichtseinheit „Winkel am Kreis", bei der ein Schwerpunkt auf die Kompetenz des Argumentierens gelegt wurde, hat gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler auch unter Schulalltagsbedingungen durchaus in der Lage sind, vollständige Beweisprozesse im Sinn von Boero eigenständig zu durchlaufen, sofern diese Prozesse im Unterricht durch geeignete Medien (z.B. elektronische Arbeitsblätter) und Strukturierhilfen (z.B. Beweisschema aus dem Schulbuch „Neue Wege") flankiert werden.

Bezüglich der untersuchten Aufgaben zeigte sich im Gegensatz zu der Vergleichsgruppe bei der Trainingsgruppe ein signifikanter Effekt bezüglich des Zuwachses an Argumentationskompetenz. Die Auswertung weiterer Aufgaben aus dem Vor- und Nachtest muss zeigen, ob sich dieser Effekt bestätigen lässt. Insbesondere interessiert die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler die an Hand von Geometrieaufgaben erlernten Kompetenzen auf andere Bereiche der Mathematik wie beispielsweise die Algebra transferieren können. Erste Sichtungen entsprechender Aufgaben aus den Vor- und Nachtests lassen vermuten, dass dies eher nicht der Fall ist.

Ebenfalls interessant für zukünftige Auswertungen ist das Abschneiden der Schülerinnen und Schüler der Trainings- bzw. Vergleichsklassen bei der zentralen Erhebung VERA 8 vom 01.03.2012. Die dortige Aufgabe 5.3 erfordert Argumentationskompetenz im Umfeld der Algebra:

„Gegeben sind nun allgemein zwei aufeinanderfolgende Zahlen b und a mit $b = a - 1$. Begründe, dass die folgende Rechenregel immer stimmt: Die Differenz $a^2 - b^2$ ist gleich der Summe $a + b$."

Lediglich eine Schülerin und ein Schüler aus der Trainingsgruppe haben diese Aufgabe richtig gelöst, einmal mit dem Beweisschema, einmal ohne.

Literatur

Beuthan, S. (2008³): *VERA 8. Sicher in die Vergleichsarbeit. Mathematik 8. Klasse*, 3. überarbeitete Auflage, Stuttgart, 2008

Boero, P. (1999): Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematical education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Juli / August 1999*

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2002): *Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Euklid DynaGeo*, CoTec-Verlag

Griesel, H; Postel, H. & Suhr F. (Hrsg., 2006): *Elemente der Mathematik 7. Niedersachsen*, Braunschweig, Bildungshaus Schulbuchverlage

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg., 2007): *Mathematik Neue Wege 8. Arbeitsbuch für Gymnasien. Niedersachsen*, Braunschweig, Bildungshaus Schulbuchverlag

Georg BRUCKMAIER, Regensburg, Stefan KRAUSS, Regensburg, Werner BLUM, Kassel, Michael NEUBRAND, Oldenburg

Zur Auswahl und Anordnung von Mathematik-Aufgaben – Eine Untersuchung im Rahmen der COACTIV-Studie

Zusammenfassung

Aufgaben sind zentraler Bestandteil des Mathematikunterrichts. In der didaktischen Forschung wurden in der Regel bislang nur *einzelne* Aufgaben und nicht deren *Anordnung* betrachtet. In der COACTIV-Studie sollten Lehrkräfte Aufgaben auswählen, aus diesen eine „didaktisch geeignete" Reihenfolge bilden und ihre Wahl begründen. Fokus der Auswertungen war es, Kriterien für eine „didaktisch gute" Sequenz anzugeben, was sich jedoch als schwierig herausstellte. Im vorliegenden Beitrag werden Gründe für diese Schwierigkeiten diskutiert sowie erste tendenzielle Ergebnisse vorgestellt.

Die Untersuchung von Aufgaben im Rahmen der COACTIV-Studie

In der COACTIV-Studie[1] gab es zwei zentrale Paradigmen zur Untersuchung des Umgangs von Mathematiklehrkräften mit Aufgaben: Zum Einen wurden von den untersuchten Lehrkräften Aufgaben (insgesamt ca. 45.000 Exemplare) eingesammelt, die diese im Verlauf eines Schuljahres im Unterricht für Klassenarbeiten, als Aufgaben im Unterricht oder als Hausaufgaben in ihren PISA-Klassen eingesetzt hatten (z.B. Jordan et al., 2006; Neubrand et al., 2011). Es konnte mit diesem Paradigma bereits gezeigt werden, dass eine „kognitiv aktivierende" Auswahl von Aufgaben entscheidend zum Lernfortschritt von Schülern und Schülerinnen beiträgt (Baumert & Kunter, 2011). Zum Anderen – und darum geht es im vorliegenden Beitrag – wurden die Lehrkräfte im Rahmen eines computergestützten Untersuchungsparadigmas u.a. befragt, wie und warum sie *vorgegebene* Aufgaben auswählen und anordnen würden.

Theorie und Forschungsstand

Es gibt vielfältige Literatur zu Mathematikaufgaben, etwa zur Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht, zur Aufgabenkultur, zum Einfluss von Aufgaben auf den Leistungszuwachs und zu deren didaktischer Funktion etc. (vgl. z.B. Watson, Mason & Zaslavsky, 2007). Im deutlichen Gegensatz dazu gibt es nur sehr wenig Literatur über die *Anordnung* von

[1] Die COACTIV-Studie (2002-2006) wurde im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms Bildungsqualität von Schule (BIQUA) gefördert. Eine ausführlich Beschreibung der Studie findet sich in Kunter et al., 2011.

Aufgaben. Wie Aufgaben in ihrer „Orchestrierung“ und nicht nur als „einzelne Objekte“ im Unterricht eingesetzt werden, wurde unseres Wissens in einer vergleichbaren Form bislang empirisch noch nicht untersucht.

Somit ist auch noch unklar, was eine „gute“ Sequenz auszeichnet. Didaktische Prinzipien und Instruktionstheorien (vgl. z.B. Aebli, Ausubel, Griesel, Oehl, Piaget, Wagenschein, Wittmann, Zech) geben hierfür zwar durchaus zahlreiche Anhaltspunkte (z.B. „Wechsel von Mathematik und Realitätsbezug“, „Von leicht nach schwer“, „Vom Anschaulichen zum Abstrakten“). Inwiefern eine ganz konkret gewählte Sequenz in einer spezifischen Unterrichtssituation jedoch aus didaktischer Sicht besser oder schlechter als eine andere Sequenz ist, lässt sich daraus nicht unmittelbar ableiten. Bislang ist es also keineswegs klar, was eine didaktisch „gute“ von einer „weniger guten“ Sequenz unterscheidet.

Fragestellung

Aus den Rahmenbedingungen der COACTIV-Studie und der dargestellten Literaturlage ergeben sich für den vorliegenden Beitrag insbesondere folgende Fragen:

- Was charakterisiert eine „didaktisch gute“ Sequenz?
- Bilden „fachdidaktisch gute“ Lehrkräfte bessere Sequenzen?
- Begründen „fachdidaktisch gute“ Lehrkräfte ihre Sequenzen adäquater?

Methode: Instrumente und Stichprobe der COACTIV-Studie

Die befragten Lehrkräfte hatten im Rahmen des Computerfragebogens u.a. die Aufgabe, zu zwei Bereichen (Geometrie und Algebra) aus einer Sammlung von jeweils 12 vorgegebenen Aufgaben

1) 7 Aufgaben auszuwählen und diese didaktisch begründet *anzuordnen*
2) ihre Anordnung anschließend zu *begründen* (offenes Format).

Im Folgenden beschränken wir uns auf den Abschnitt zu Geometrie, bei dem die Lehrkräfte eine *Wiederholungs*sequenz zum Thema „Flächenberechnungen an ebenen Figuren“ bilden sollten. Gemäß der Instruktion sollten sich die Lehrkräfte bei der Erstellung ihrer Sequenz und der anschließenden Begründung vorstellen, sie würden mit ihrer „PISA-Klasse 9 wiederholend, vertiefend, ergänzend und zusammenhängend auf das Thema elementare eben Figuren und ihre Flächeninhalte eingehen“. Abbildung 1 zeigt in verkürzter Form die vorgegebenen Aufgaben (die eingesetzten Aufgaben stammen alle aus der PISA-Datenbank; die Aufgaben standen den Lehrkräften bei der Bearbeitung auch als Karteikärtchen zur Verfügung, wobei die Entscheidungen der Lehrkräfte in diesem Teil des COACTIV-Paradigmas vollständig computergestützt erfasst wurden).

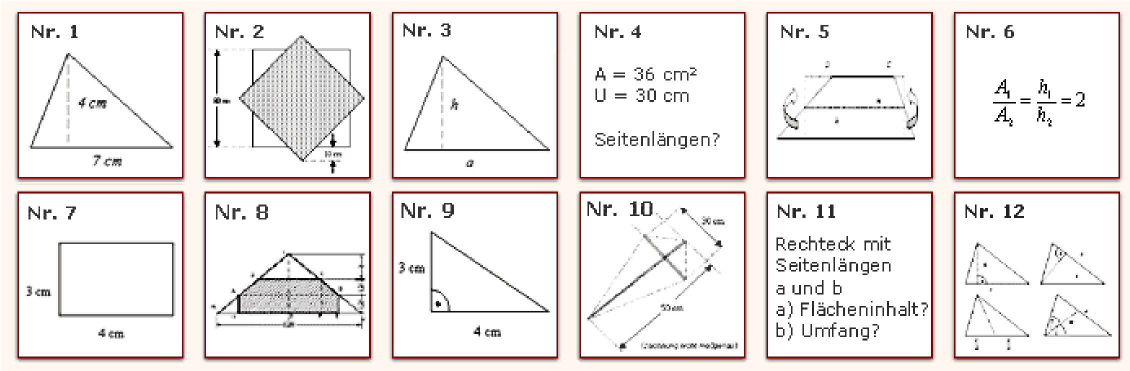


Abb. 1: Eingesetzte Aufgaben im Geometrie-Teil des Computerfragebogens (CFB) zur Bildung von Sequenzen (stark vereinfachte Darstellung der Aufgaben)

Von allen an COACTIV teilnehmenden Lehrkräften bearbeiteten 182 Personen diesen Teil des Computerfragebogens vollständig. Es handelt sich dabei um eine repräsentative Stichprobe aus Lehrkräften aller Sekundarschulformen (vgl. Kunter et al., 2011).

Ergebnisse eines Expertenratings

Weder in den Aufgabensequenzen noch in den offenen Begründungen konnten (für obiges Ziel relevante) auffällige Muster gefunden werden. Auch Verfahren der Datenreduktion bzw. der statistischen Analyse (z.B. „verbotene" Positionen bestimmter Aufgaben) führten bislang nicht zum Ziel. Da sich aus den Daten somit keine Hinweise auf Kriterien für eine „gute" Sequenz ergaben, führten wir zusätzlich im Jahr 2011 ein subjektives Rating durch Experten durch.

Zwei Experten (Mathematikdidaktik-Professoren) beurteilten die abgegebenen Sequenzen auf einer Skala von 1 (Sequenz didaktisch sehr schlecht geeignet) bis 5 (didaktisch sehr gut geeignet) sowie die Passung der Begründung zur jeweiligen Sequenz (ebenfalls von 1 bis 5). Bisher wurde etwa die Hälfte aller Sequenzen ausgewertet. Wie in nachfolgender Tabelle zu sehen ist, bilden Lehrkräfte mit hohen Werten beim fachdidaktischen Wissen (siehe dazu Krauss et al., 2011) – nach dem subjektiven Urteil von Experten – jedoch *keine* „besseren" Sequenzen (r = - .03). Daraus ergeben sich zwei mögliche Interpretationen: Möglicherweise sind fachdidaktisches Wissen und die Fähigkeit zur Anordnung von Aufgaben zwei unterschiedliche Wissensbereiche, oder aber die Urteile unserer Experten sind für die Beurteilung der Qualität nicht hinreichend valide. Klarheit dazu kann nur eine Validierung der Ratings durch weitere unabhängige Experten liefern (wird derzeit durchgeführt).

Betrachtet man die *Begründungen* der Lehrkräfte, so zeigt sich mit r = .15 zumindest ein kleiner (wenngleich nicht signifikanter) Effekt. Das bedeutet, dass Lehrkräfte mit hohem fachdidaktischen Wissen zu ihrer Sequenz eine (in den Augen der Experten) passendere Begründung angeben. Fachdidaktisch gute Lehrkräfte zeichnen sich also tendenziell dadurch aus, dass sie die Wahl ihrer Sequenz adäquat begründen können, d.h. „sie wissen, was sie tun".

Tab. 1: Zusammenhang der Qualität der Sequenz bzw. der Passung der Begründung zur Sequenz mit dem fachdidaktischen Wissen

	Fachdidaktisches Wissen
Qualität der Sequenz (N = 99)	r = -.03
Passung der Begründung (N = 92)	r = .15

Als ein erstes Ergebnis dieser Herangehensweise lässt sich also festhalten: Lehrkräfte mit hohem fachdidaktischen Wissen stellen zwar keine „besseren" Sequenzen zusammen (zumindest nicht gemäß den Experten), sie geben aber tendenziell konsistentere Begründungen für ihre Sequenzen an.

Literatur

Baumert, J., & Kunter, M. (2011): Das mathematikspezifische Wissen von Lehrkräften, kognitive Aktivierung im Unterricht und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern. In: Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Kap. 8*. Münster: Waxmann.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J. Blum, W. Neubrand, M. Löwen, K. Brunner, M. & Kunter, M. (2006): *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben*. Materialien aus der Bildungsforschung. Berlin: Max-Planck-Institut.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29* (3/4), 223-258.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Neubrand, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W. & Kunter, M. (2011): Aufgaben im COACTIV-Projekt: Einblicke in das Potential für kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In: Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Kap. 6*. Münster: Waxmann.

Watson, A., Mason, J. & Zaslavsky, O. (2007): The role of mathematical tasks in teacher education (special issue). *Journal of Mathematics Teacher Education, 10* (4-6), 201– 440.

Regina BRUDER, Darmstadt

Konsequenzen aus den Kompetenzen ?

„Kompetenzen sind die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (Weinert, 2001: 27f)

Der Weinertsche Kompetenzbegriff war zwar Grundlage für die KMK-Bildungsstandards Mathematik für die Sekundarstufe I, er ist in seiner ganzen Tragweite aber noch keineswegs in den Schulen bzw. im Unterrichtsalltag angekommen. Im Folgenden soll exemplarisch gezeigt werden, dass dieser Begriff noch viel Potenzial bietet für innovative Weiterentwicklungen des Mathematikunterrichts.

Mit dem Kompetenzbegriff aktuelles Entwicklungspotenzial aufdecken

Aus der Sicht der weiterführenden Bildungseinrichtungen wird (wieder) verstärkt Kritik an der mangelnden Verfügbarkeit von mathematischem Grundkönnen geäußert, vgl. z.B. das Projekt „Notstand Mathematik“ der IHK Braunschweig 2010[1].Vor Ort an der Schule stellt sich das Problem aber auch z.B. so dar: Eine Neuntklässlerin sagt im Interview zu Aufgaben, in denen es um den Wechsel von Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge ging: „*Eine Tabelle soll ich aufstellen? Das haben wir vielleicht mal in der 6.Klasse gemacht, das kann ich doch jetzt nicht mehr!“* Es geht noch weiter: Ein Fachlehrer wird von seinem Schulleiter darauf angesprochen, wieso er in der 10.Klasse in einer Klassenarbeit noch eine Aufgabe zu binomischen Formeln gestellt habe, das läge doch lange zurück.

Vor dem Hintergrund des Kompetenzbegriffs zeigt sich Entwicklungspotenzial für den Mathematikunterricht in zwei Richtungen:

1. Mathematisches Grundwissen, das für erfolgreiches Weiterlernen notwendig ist, muss wachgehalten werden. Dazu bedarf es geeigneter Lern- und Beurteilungsgelegenheiten im Unterricht.

Solche Methoden und Lerngelegenheiten sind in der allgemeinen Didaktik schon lange bekannt als vielfältige Formen der immanenten und permanenten Wiederholung vom Vokabeltraining oder gar -test im Sprachunterricht bis zur „täglichen Übung“ im Mathematikunterricht (vgl. Reibis, 1996). Um die Notwendigkeit von Lerngelegenheiten zum Wiederholen und ggf.

[1] http://www.braunschweig.ihk.de/kopfnavigation/linke-headernavigation/mathematik-im-fokus.html

Lückenschließen einzusehen, braucht man eigentlich keinen neuen Begriff. Aber der Kompetenzbegriff kann helfen die doch schon seit Jahren offensichtlichen Defizite ernst zu nehmen und schließlich auch zu überwinden.

2. Die auf ein aktuelles Unterrichtsthema fixierten Klassenarbeiten, für die in der Regel auch intensiv geübt wurde, bilden nicht das ab, was man sich unter „mathematisch kompetent sein“ als eine gewisse Problemlösefähigkeit und -bereitschaft in variablen Situationen vorstellt.

Beurteilungsgelegenheiten wie themenübergreifende Vergleichsarbeiten können den im Kompetenzbegriff angelegten Verfügbarkeitsanspruch bzgl. grundlegendem Fach- und Strategiewissen und der Fähigkeit zu deren Anwendung viel eher erfüllen als die bisher übliche Klassenarbeit. Allerdings werden insbesondere zentrale Vergleichsarbeiten mit durchaus kompetenzorientiertem Anspruch bisher kaum zur Bewertung von Schülerleistungen herangezogen. Damit liegt der Schluss nahe, dass die Leistungsbewertung derzeit noch am Kompetenzbegriff vorbei geht. Es scheinen einige grundsätzliche Überlegungen zur Weiterentwicklung bezugsnormorientierter Leistungsbeurteilungen notwendig zu sein (vgl. Bruder & Büchter, 2012). Hierfür benötigen wir tatsächlich den Kompetenzbegriff sowohl zur Problembeschreibung als auch zum Finden von Problemlösungen.

Was wird wann und wie über mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen gelernt?

Ein anderes Thema wird mit der Frage eröffnet, welche mathematischen Kompetenzen denn eigentlich wie und wann gelernt werden können bzw. sollten. Ein bislang allein an mathematischen Inhalten orientierter Unterricht hat sich dieser Frage nicht so direkt stellen müssen. In der Fachdidaktik wird das Reflektieren über Erkenntnisgewinnungsprozesse und auch über Übungsfortschritte schon lange propagiert. Von einer konsequenten Umsetzung im Unterricht sind wir jedoch weit entfernt. Sicher standen fundamentale Ideen der Mathematik auch Pate für die Inhaltsauswahl in den Curricula, aber wann setzt sich auch im Unterrichtsalltag die Erkenntnis durch, dass es hilfreich ist, wenn Lernende z.B. etwas zum Modellierungskreislauf erfahren, wenn sie mathematisches Modellieren lernen sollen? Oder dass es nützlich ist, logische Schlussweisen und zulässige Argumentationsbasen zu kennen, wenn man mathematisch argumentieren will – und dass es bei schwierigen mathematischen Modellierungen oder Argumentationen sehr hilfreich ist, Problemlösestrategien sowie heuristische Hilfsmittel und Prinzipien tatsächlich zu kennen, um sich daran orientieren zu können.

Häufig fehlt allerdings auch die Notwendigkeit sich mit solchem Metawissen zu beschäftigen, wenn bei konkreten Aufgaben im Kontext einer bestimmten Unterrichtsreihe doch ohnehin „klar" ist, mit welchen mathematischen Inhalten die Aufgabe vermutlich gelöst werden kann und soll. Transfersituationen im Sinne eines Problemlösens, bei dem man seine Kompetenz in variablen Situationen zeigen und gleichzeitig weiter entwickeln kann, kommen kaum vor.

Noch gibt es keine empirisch geprüften *Kompetenzentwicklungsmodelle* für das Argumentieren und das Modellieren und damit verbunden zum Problemlösen im Sinne eines individuell schwierigen Modellierens oder Argumentierens. Die didaktische Schwierigkeit des Gewinnens von *Metakompetenz* besteht darin, geeignete Lerngelegenheiten bereit zu stellen, in denen das erforderliche Metawissen generiert werden kann. Im Sinne der drei Phasen eines (auch empirisch geprüften) *Übungskonzeptes* (Bruder, 2008) würde sich nach den *ersten und vielfältigen Übungen* die 3.Phase mit den *komplexen Übungen und Anwendungen* eignen, die nicht auf das aktuelle Unterrichtsthema fixiert ist, sondern auch länger zurückliegende Themen wieder aufgreift. Das ist insbesondere für mathematische Modellierungen relevant.

Innerhalb der *komplexen Übungen und Anwendungen* bietet es sich an, noch einen Schritt weiter zu gehen und eine relativ kurze aber kompakte Lerneinheit in Form eines ***„Kompetenztrainingslagers"*** zu kreieren (ca. 2-4 Unterrichtsstunden), um durch Verallgemeinerungen aus bereits bearbeiteten Lernaufgaben zu dem gewünschten Metawissen zu gelangen. Training ist hier im besten psychologischen Sinne als Kompetenzerwerb in der Verbindung von intelligentem Wissen, Handlungs- und Metakompetenz und nicht als Drill gemeint. Besonders wichtig erscheint eine solche Lerngelegenheit für das Argumentieren- und Modellierenlernen in Verbindung mit dem Erwerb von Problemlösefähigkeiten, da hier Strategiewissen generiert werden muss.

Diese *Kompetenztrainingslager* sollte es aus theoretischen Erwägungen zum langfristigen Kompetenzaufbau (Bruder, 2006) in jeder Jahrgangsstufe mindestens einmal geben mit möglichst aufeinander aufbauender Vorstellungsbildung (vertikaler Kompetenzaufbau). Es geht aber keineswegs darum, den Mathematikunterricht jetzt in lauter kleine Kompetenzentwicklungsinseln zerfallen zu lassen – im Gegenteil: Es bedarf einer exponierten Lerngelegenheit zum gezielten Zusammenführen und Verallgemeinern von Problemlöseerfahrung in den verschiedenen Kompetenzfeldern.

Aus dieser Idee erwachsen viele neue Fragen. Offen ist zum Beispiel, ob es geschickter ist, jeweils eine Kompetenz mit entsprechendem Metawissen in den Mittelpunkt einer solchen Lernumgebung zu stellen oder ob eher mathematische Themen im Zentrum stehen sollten, die eine Vernetzung mehrerer Kompetenzen erfordern, die anschließend reflektiert werden.

Grundsätzlich sind Lernziele im Bereich von *Metakompetenz* besonders prädestiniert für eine Umsetzung in *Selbstlernumgebungen*. Deshalb bietet es sich an, *Trainingslager* zur expliziten Kompetenzförderung durch den Erwerb von Metawissen in wesentlichen Teilen auch als *Selbstlernumgebung* zu gestalten, um eigenständige Erfahrungen mit dem Lerngegenstand zu erwerben als Basis für die notwendigen Abstraktionen und Verallgemeinerungen. Auf der Lernplattform www.proLehre.de werden in einem frei zugänglichen Lehrerfortbildungsangebot erste in wissenschaftlichen Hausarbeiten von Studierenden entwickelte *Kompetenztrainingslager* in Form von *Selbstlernumgebungen* für Erprobungen bereit gestellt.
Ein Trainingslager zum Problemlösenlernen kann z.B. die erweiterten Einsatzmöglichkeiten eines heuristischen Prinzips zum Gegenstand haben, vgl. dazu auch die *Steckbriefe* zum *Systematischen Probieren und zum Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* in Bruder & Collet (2011:186 ff.). Es eignen sich dafür auch Mathematikgeschichten, die mit Knobelaufgaben angereichert sind ebenso wie die in Mathe-Welt-Heften publizierten binnendifferenzierend angelegten Lernmaterialien, z.B. von Lakenbrink & Pinkernell (2011) zum Argumentieren sowie viele weitere methodische thematische Vorschläge.

Literatur

Bruder, R. & Büchter, A. (2012): Beurteilen und Bewerten im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren 170, Friedrich Verlag, S. 2-8.

Bruder, R. (2006): Langfristiger Kompetenzaufbau. In: Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 135-151.

Bruder, R. (2008): Üben mit Konzept. In: mathematik lehren 147, Friedrich Verlag, S.4-11.

Bruder, R. & Collet, C. (2011): Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Lakenbrink, S. & Pinkernell, G. (2011): Wie wirst Du ein Pythagoräer? Mathe Welt, mathematik lehren 168. Friedrich Verlag.

Reibis, E. (1996): Individualisierte Genese elementaren Könnens im Mathematikunterricht der Sek I und II. In: RAAbits. Teil Y B. Beiträge zur Didaktik und Methodik. Berlin: Raabe.

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessung in Schulen. Weinheim, S. 17-32.

Esther BRUNNER, Kreuzlingen

Beweisen und Argumentieren auf der Sekundarstufe I

Im Zusammenhang mit Bildungsstandards und Kompetenzerwerb gewinnt Beweisen neu an Bedeutung. Dies nachdem insbesondere die Kritik am formalen Beweis und seiner Strenge für den Unterricht in der Volksschule entschärft und durch weitere Konzepte wie beispielsweise präformales (oder operatives) Beweisen ergänzt werden konnte (z.B. Krauthausen, 2001). Mit verschiedenen Zugängen und Beweistypen kann das Verstehen von Schülerinnen und Schülern in diesem anspruchsvollen Inhaltsbereich entsprechend unterschiedlich stark unterstützt werden.

In diesem Beitrag wird ein Einblick in alltägliches Beweisen einer identischen Aufgabenstellung in 32 Klassen der Sekundarstufe I gegeben.

1. Theoretische Grundlagen

Im Zusammenhang mit Beweisen im Mathematikunterricht heben verschiedene Autoren die Bedeutung hinreichender Begründungen hervor (z.B. Hanna, 1997; Jahnke, 1978). Es sollen demnach nicht nur der Beweis im mathematisch strengen Sinne, sondern auch seine handlungs- und denkpsychologischen Vorläufer zugelassen werden.

Beweise können unterschiedlich klassifiziert werden. Für die vorliegende Studie wird die Klassifizierung von Wittmann und Müller (1988) verwendet, die drei unterschiedliche Typen beschreibt: 1) Formal-deduktiver Beweis, 2) experimenteller Beweis und 3) inhaltlich-anschaulicher Beweis.

Der formal-deduktive Beweis basiert auf dem logischen Ableiten einer Aussage, die Schritt für Schritt aus einer anderen Aussage folgt. Gekoppelt ist dieser Beweis an eine Knappheit in der Formulierung, die sich in der mathematischen Formel oder der formalen Sprache manifestiert. Dadurch setzen formal-deduktive Beweise nicht nur eine bestimmte Art des Denkens, sondern auch eine bestimmte Vorgehensweise unter Berücksichtigung einer spezifischen Fachsprache voraus.

Der experimentelle Beweis führt im Gegensatz zum formal-deduktiven nicht zu einer abschliessenden Sicherheit, sondern bleibt an die durchgeführten Beispiele gebunden. Die unmittelbare Arbeit an Beispielen ist insbesondere für jüngere und weniger kompetente Lernende fruchtbar. Darüber hinaus sind experimentelle Zugänge geeignet, um ein subjektives Beweisbedürfnis zu erzeugen.

Inhaltlich-anschauliche Beweise stützen sich auf „Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze

Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen“ (Wittmann & Müller, 1988, S. 249). Inhaltlich-anschauliche Beweise müssen also vom gegebenen Fall direkt verallgemeinerbar sein und die Verallgemeinerbarkeit soll möglichst intuitiv erkennbar sein. Das geschieht durch Offenlegen der mathematischen Struktur.

Diese drei Beweistypen stellen je andere Anforderungen an die Kompetenzen der Lernenden und bieten gleichzeitig unterschiedliche Zugänge und damit spezifische, inhaltliche Unterstützung.

Ziel der vorliegenden Studie ist es, das Unterstützungsverhalten von Lehrpersonen in mathematischen Beweisphasen im Unterricht der Sekundarstufe I zu beschreiben und vergleichend zu analysieren.

Im Rahmen dieses Beitrags wird auf folgende Fragestellung fokussiert: Welche Beweistypen können in den Bearbeitungsphasen der Beweis- bzw. Begründungsaufgabe beobachtet werden?

2. Methode

Der vorliegende Beitrag bezieht sich auf den Datensatz der binationalen Studie *„Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“* (Klieme, Pauli & Reusser, 2006), die gemeinsam vom Deutschen Institut für Pädagogische Forschung DIPF und dem Institut für Erziehungswissenschaft der Universität Zürich durchgeführt wurde. Die Stichprobe besteht aus 32 Lehrpersonen und ihren Klassen. Dabei handelt es sich um Klassen des 8. bzw. 9. Schuljahres aus Gymnasien sowie aus Sekundar-/Realklassen aus Deutschland und der Schweiz.

Die Aufgabenstellung, deren Bearbeitung in allen Klassen videografiert wurde, lautet: *Die Summe 13 + 15 + 17 + 19 ist durch 8 teilbar. Gilt dies für jede Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen?*

Dieser Sachverhalt kann sowohl am Zahlenbeispiel gezeigt (experimenteller und/oder inhaltlich-anschaulicher Beweis), als auch formal-deduktiv erarbeitet werden. Die formal-deduktive Bearbeitung ist zudem für die entsprechende Altersstufe nicht allzu anspruchsvoll, sodass die Lernenden an der Beweisführung aktiv beteiligt werden können.

Um Beweisphasen differenziert beschreiben zu können, wurde in einem ersten Schritt ein fachdidaktisches Analyseinstrument entwickelt, mit welchem die 32 Fälle codiert wurden. Dieses Instrument erfasst sowohl Merkmale auf der Oberflächen- als auch der Tiefenstruktur des Unterrichts (vgl. Reusser, 2005). Einer der Bereiche des Instrumentes bezieht sich auf die inhaltliche Dimension. Diese erfasst u.a. den gewählten Beweistyp (detaillierte Angaben siehe Brunner, in Vorb.). Der vorliegende Beitrag beschränkt sich auf die Darstellung von Ergebnissen dazu.

3. Ergebnisse

In den 32 Klassen kommen sämtliche drei Beweistypen vor, allerdings in unterschiedlicher Verteilung. Der formal-deduktive Beweis wird in 65.6 % aller Fälle (21 Klassen) umgesetzt, der experimentelle in 12.5 % der Fälle (4 Klassen) und der inhaltlich-anschauliche in 37.5 % der Fälle (12 Klassen). In 9 Klassen wurde die Aufgabenstellung mit zwei unterschiedlichen Beweistypen bearbeitet. In 4 Klassen wurde hingegen überhaupt kein Beweis (zu Ende) geführt.

Es gibt keinen Zusammenhang zwischen Beweis- und Schultyp. In Gymnasien wird also beispielsweise nicht häufiger ein formal-deduktiver Beweis durchgeführt als in Sekundar-/Realklassen.

Betrachtet man die Leistungen der Schülerinnen und Schüler auf Klassenebene zeigen sich Zusammenhänge mit dem umgesetzten Beweistyp. So weisen Klassen, die formal-deduktiv arbeiten, auch tatsächlich höhere algebraische Voraussetzungen auf als dies in Klassen der Fall ist, in denen nicht formal-deduktiv gearbeitet wird ($t=2.30$; $df=29$; $p<.05$). Klassen, in denen experimentell bewiesen wird, sind hingegen deutlich weniger in der Lage, Beweise selbst aktiv zu führen ($t=2.55$; $df=30$; $p<.05$) und weisen auch eine deutlich tiefere allgemeine Leistungsfähigkeit auf ($t=2.47$; $df=29$; $p<.05$). Eine tiefere allgemeine Leistungsfähigkeit lässt sich auch in Klassen, in denen inhaltlich-anschaulich gearbeitet wird, feststellen ($t=2.07$; $df=28.37$; $p<.05$, inhomogene Varianzen korrigiert).

Auch bezüglich Überzeugungen der Lehrpersonen zeigen sich bemerkenswerte Unterschiede. So schätzen beispielsweise Lehrpersonen, in deren Klassen formal-deduktiv gearbeitet wird, in der Tendenz formale Präzision als wichtiger ein als dies Lehrpersonen von Klassen tun, die nicht formal-deduktiv arbeiten. Dieser Befund verfehlt aber knapp die erforderliche statistische Signifikanz. Lehrpersonen, die experimentell arbeiten, finden hingegen formale Eindeutigkeit weniger wichtig ($t=2.12$; $df=27$; $p<.05$).

4. Diskussion

Dass in der überwiegenden Mehrheit formal-deduktiv bewiesen wird, erstaunt wenig, weil die Strenge eines Beweises charakteristisch ist für Mathematik als Wissenschaft. Eher erstaunlich ist die Tatsache, dass der eingesetzte Beweistyps nicht vom Schultyp abhängt. Die Dominanz des formal-deduktiven Beweises in beiden Schultypen deutet auf eine Sichtweise der Lehrpersonen hin, wonach Beweisen zwingend mit einem streng formal-deduktiven Vorgehen verbunden ist. Damit bleibt das Potenzial der unterschiedlichen Beweistypen für eine spezifische, inhaltliche Unterstützung noch weitgehend ungenutzt.

Dennoch scheinen Lehrpersonen in gewisser Hinsicht durchaus eine adaptive Bearbeitung zu wählen, indem sie beispielsweise die algebraischen Voraussetzungen und/oder die allgemeine Leistungsfähigkeit der Klasse berücksichtigen und die Umsetzung eines entsprechenden Beweistyps in Abhängigkeit dazu vornehmen.

Der gewählte Beweistyp sagt per se aber noch nichts über die Qualität der Verstehensunterstützung aus, sondern beschreibt lediglich eine vorherrschende Praxis. Um die Qualität der Verstehensunterstützung und der Förderung von Argumentieren untersuchen zu können, bedarf es weiterer, tiefer gehender Analysen, die zurzeit im Gang sind. Weiter interessiert die Art und Weise der Partizipation der Lernenden beim Argumentieren und Beweisen. Auch diese Analysen werden zurzeit vorgenommen.

Literatur

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

EDK Generalsekretariat (2010). Basisstandards für die Mathematik. Unterlagen für den Anhörungsprozess. 25. Januar 2010. Bern: EDK.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *Journal für Mathematikdidaktik, 18* (2/3), 171-185.

Jahnke, H. N. (1978). Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik. Beweisen als didaktisches Problem. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik.

Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2006). *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“* (3 Bände). Materialien zur Bildungsforschung. Band 13-15. Frankfurt a.M.: dipf.

Krauthausen, G. (2001). “Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat.“ Zum Image einer fundamentalen Tätigkeit. In W. Weiser & B. Wollring, *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt*, S. 99-113. Hamburg: Dr. Kovac.

NCTM (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM (National Council of Teachers in Mathematics).

Reusser, K. (2005). Problemorientiertes Lernen – Tiefenstruktur, Gestaltungsformen, Wirkung. *Beiträge zur Lehrerbildung, 23* (2), 159-182.

Wittmann, E. C. & Müller, N. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237-258). Berlin: Cornelsen.

Katinka BRÄUNLING, Andreas EICHLER, Christoph MISCHO, Freiburg

Individuelle Curricula von Lehrkräften zur Arithmetik

Vorstellungen und Überzeugungen von Lehrkräften bedingen die Planung und Durchführung von Unterricht und beeinflussen dadurch auch die Vorstellungen der Schüler und Schülerinnen (Philipp, 2007). Untersuchungen von Eichler (2011) und Girnat und Eichler (2011) machen allerdings deutlich, dass die Vorstellungen und Überzeugungen der Lehrkräfte von den einzelnen mathematischen Teildisziplinen abhängen und nicht notwendig für die Mathematik insgesamt stehen. So gibt es nicht die subjektive Theorie zur Mathematik, sondern domänenspezifische Subjektive Theorien zu Teilbereichen wie etwa der Stochastik (Eichler, 2011), der Geometrie und der Analysis (Girnat und Erens in diesem Band) oder der Arithmetik. Auf dieser Annahme basiert das hier dargestellte Forschungsprojekt STELLA I (**S**ubjektive **The**orien von **L**ehrerinnen und Lehrern zum **L**ehren und Lernen von **A**rithmetik), das die Subjektiven Theorien von Lehrkräften im Bereich der Arithmetik der Primar- und Sekundarstufe I untersucht. Dabei steht einerseits die Untersuchung der Subjektiven Theorien im Querschnitt, andererseits die Entwicklung der Subjektiven Theorien vom Ende des Studiums bis zum Einstieg in die professionelle Lehrpraxis im Zentrum.

Theoretischer Rahmen

Grundannahme des Projekts ist es, dass Lehrkräfte die entscheidende Rolle im Transformationsprozess von staatlichen Lehrplänen bis zum Lernergebnis der Schüler und Schülerinnen spielen. Das in Abbildung 1 dargestellte Curriculums-Modell von Stein et al. (2007) beschreibt diesen Prozess.

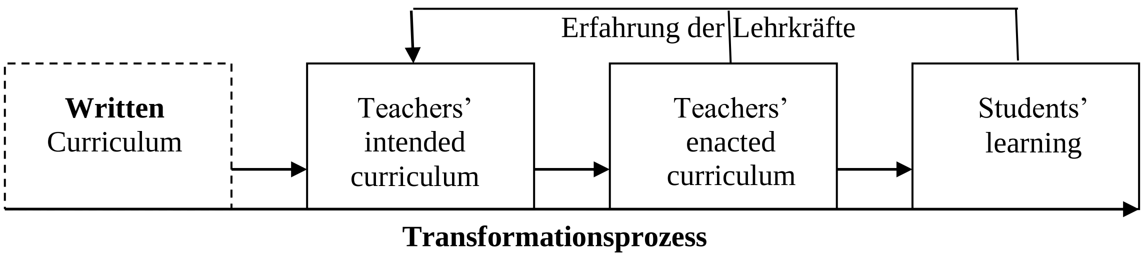


Abbildung 1: Transformationsprozess eines Curriculums

Zentral sind dabei die Transformationen des staatlichen Curriculums durch die individuelle Unterrichtsplanung (teacher's intended curriculum), sowie die Umsetzung der Planung im Unterricht als Ergebnis der Interaktion von Lehrkraft, Schülern und Stoff (teacher's enacted curriculum). Um die innere Struktur der intended curricula wie auch der enacted curricula strukturieren und begrifflich präzise darstellen zu können, werden sie hier auf der

Basis des sozialpsychologischen Konstrukts der Subjektiven Theorien (Groeben et al., 1988) beschrieben. Als zentral für die Beschreibung der Subjektiven Theorien werden insbesondere die Unterrichtsinhalte, die damit verbundenen Ziele sowie eine allgemeine Lehrorientierung innerhalb der Pole Instruktivismus und Konstruktivismus angesehen.

Methodisches Vorgehen

Grundlage der Erhebung ist eine theoretische Stichprobe von fünf Grundschul- und fünf Realschulreferendaren, die gerade ihre zweite Ausbildungsphase begonnen haben. Im weiteren Verlauf der Studie sollen diese Interviews noch zweimal wiederholt werden (Ende Referendariatszeit und erstes Jahr Berufserfahrung). Darüber hinaus werden fünf Interviews mit Grundschullehrkräften und fünf Interviews mit Realschullehrkräften, die mindestens fünf Jahre Unterrichtserfahrung haben, durchgeführt.

Die Referendare werden mit Hilfe eines halbstrukturierten Leitfadeninterviews befragt. Bei der Analyse der Interviews werden deduktive Kodes verwendet sowie induktive Kodes entwickelt (Mayring, 2003). Deduktive Kodes umfassen etwa vier Typen von Zielsetzungen für den Mathematikunterricht (Schemaaspekt, Formalismusaspekt, Prozessaspekt und Anwendungsaspekt; Grigutsch et al., 1998). Darüber hinaus werden instruktivistische, co-konstruktivistische und konstruktivistische Lehrorientierungen untersucht (Edelmann, 2009).

Bisherige Ergebnisse

Während in den Untersuchungen zu den Subjektiven Theorien von Lehrkräften der Sekundarstufe II der Schemaaspekt keine Rolle spielt (vgl. Erens oder Girnat in diesem Band), lässt sich dieser Aspekt bei den Arithmetiklehrkräften als wichtiger Bestandteil des Arithmetikunterrichts identifizieren:

> Herr z: „Was ich besonders wichtig finde ist im Grunde das Rechnen im Kopf bei den einfachen Dingen, auch einfach weil ich denke, dass da Prozesse ablaufen, die einfach so Automatismen sind, also ich schaue mir eine Aufgabe an und dann macht es im Grunde gleich klick, ich kann gleich schon im Kopf sagen, ok ungefähr das Ergebnis müsste herauskommen."

Allerdings wird die Rolle des Schemaaspekts zum Teil auch deutlich relativiert:

> Frau x: „Ich finde das schwer, da eine Ordnung rein zu kriegen. Automatisierung ist auch wichtig, aber es darf nicht ins Falsche abgleiten, es muss davor verstanden sein und dann automatisiert werden."

Die Subjektiven Theorien der Referendare unterscheiden sich auch hinsichtlich der weiteren inhaltsbezogenen Aspekte (Formalismusaspekt, Prozessaspekt und Anwendungsaspekt) und schließlich auch hinsichtlich einer allgemeinen Lehrorientierung:

> Herr z: „Ja die Erklärung dazu, dass wenn man einfach ein neues Thema anfängt, vielleicht bin ich da auch noch ein wenig von der alten Schule, ist es einfach zum einen erst mal die Aufgabe, einen Überblick zu geben, Grundlagen zu schaffen oder eben einfach die Einführung zu machen in das Thema […] Aber ich glaube in ein neues Thema einzuführen ist Mathe vielleicht das falsche Fach um da viel mit Partner- und mit Gruppenarbeit zu machen.“

Während Herr z hier eine stark instruktivistische Lehrorientierung offenbart, ist bei Frau x eher eine konstruktivistische Sichtweise zu erkennen. So beantwortet sie z.B. die Frage „Was würden Sie sich wünschen, was die Schüler erzählen, was Mathematik ist?“ mit den Worten:

> „Forschen, das wäre mein Wunsch. Ja, was sie sicher sagen ist rechnen und ich würde Sie aber gerne mehr so auf das Forschen führen.“

Ihre konstruktivistische Lehrorientierung baut Frau x über das Zitat hinaus in vielen Beispielen aus, indem sie bei Einstiegen in neue Themen die Verantwortung überwiegend ihren Schülern überträgt.

Über die Betrachtung der Lehrorientierung hinaus, ist in diesem Forschungsprojekt auch die Entwicklung der Subjektiven Theorien der Lehrkräfte von Bedeutung. Im Sinne der Konstanzer Wanne (Dann et al., 1982) wird, ausgehend von der punktuellen Analyse der Subjektiven Theorien (Herr z: instruktivistisch und schemaorientiert; Frau x: konstruktivistisch und über den Schemaaspekt hinaus orientiert), versucht, Ansatzpunkte zu identifizieren, die eine mögliche Änderung der Subjektiven Theorien im Referendariat bedingen könnten.

> Herr z: „Ich orientiere mich als allererstes immer am Schulbuch eigentlich, um zu schauen, wie führen die das ein. Ich denke, ich muss […] natürlich auch den Bildungsplan hinbeziehen, habe ich bisher noch gar nicht gemacht, weil ich denke, wenn es im Schulbuch drin ist, die bauen ja auf dem Bildungsplan auf, dann wird das auch schon so passen von den Inhalten […] Ich finde es nicht schlecht, ich weiß auch gar nicht, ob ich ein anderes großartig kennengelernt habe.“

Während in den Äußerungen von Herrn z momentan keinerlei Ansatzpunkte erkennbar sind, die eine mögliche Änderung der Subjektiven Theorien bewirken können, ist dies bei Frau x anders:

> Frau x: „Ich selber bin eigentlich niemand der stupide- also die genau nach dem Buch arbeitet, meine Mentoren aber alle. Und deswegen habe ich mich da jetzt angepasst und gehe auch Kapitel für Kapitel vor."

Tatsächlich könnte durch das Einschwenken auf eine schulinterne Norm eine Entwicklung von Frau x im Sinne der Konstanzer Wanne angestoßen werden. Allerdings zeigt Frau x ebenso Ansätze, solch eine Entwicklung zu stoppen bzw. wieder umzukehren. So rezipiert sie etwa gängige didaktische Literatur in Vorbereitung ihrer Unterrichtseinheiten oder nimmt Methoden wie das Lerntagebuch, das sie für ihre Schüler vorsieht, auch selbst als Mittel der Reflexion wahr.

Inwieweit tatsächlich eine Entwicklung von Subjektiven Theorien der Lehrkräfte im Rahmen des Referendariats festzustellen ist, können allerdings allein die Nachfolgeinterviews im Rahmen des Forschungslängsschnitts in diesem Projekt zeigen.

Literatur

Dann, Hanns-Dietrich, Humpert, Winfried, Krause, Frank & Tennstädt, Kurt-Christian (Hrsg.) (1982). *Analyse und Modifikation Subjektiver Theorien von Lehrern. Universität Konstanz, Zentrum I Bildungsforschung*, SFB 23, Forschungsbericht 43.

Edelmann, W. (2000). *Lernpsychologie*. Braunschweig: Beltz

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Hrsg.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series, Bd. 15. Heidelberg, New York: Springer (im Druck).

Girnat, B. & Eichler, A. (2011). Secondary teachers' beliefs on modelling in geometry and stochastics. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, ICTMA14 (S. 75-84). Dordrecht: Springer.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). *Einstellungen gegenüber Mathematik von Mathematiklehrern.* Journal für Mathematikdidaktik, 19(1), S.3-45

Groeben, N., Wahl, D., Scheele, B. & Schlee, J. (1988). *Forschungsprogramm Subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen: Franke.

Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim: Beltz.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (S. 257-315). Charlotte: Information Age Publishing.

Stein, M.K., Remillard, J., & Smith, M.S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Andreas BÜCHTER, Dortmund

Schülervorstellungen zum Tangentenbegriff

In den meisten Bundesländern lernen Schülerinnen und Schüler Tangenten zunächst als Kreistangenten in der euklidischen Geometrie und als Parabeltangenten in der Koordinatengeometrie kennen, bevor der Tangentenbegriff in der Differenzialrechnung verallgemeinert wird. Im Rahmen einer qualitativen Studie hat der Autor untersucht, inwieweit Schülerinnen und Schüler, die mindestens eine Einführung in die Differenzialrechnung hinter sich haben, tatsächlich über einen verallgemeinerten Tangentenbegriff verfügen. Erste Befunde werden im Folgenden im Sinne der Didaktischen Rekonstruktion (Kattmann et al., 1997; vgl. Abb. 1) mit Blick auf mögliche Konsequenzen für die Gestaltung von Lehrwerken und Unterricht diskutiert.

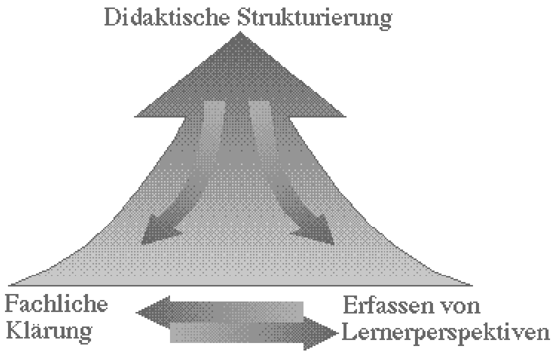


Abb. 1: Modell der Didaktischen Rekonstruktion nach Kattmann et al. (1997)

Im Rahmen der fachlichen Klärung wird zunächst dargestellt, welche Rolle Tangenten bei schultypischen Zugängen zur Differenzialrechnung spielen. Mit einer Analyse von Schülerdokumenten werden dann Lernerperspektiven erfasst. Nach dem Modell der Didaktischen Rekonstruktion werden fachlich erwünschte Vorstellungen – im Sinne von „Grundvorstellungen“ (vgl. vom Hofe, 1995) – und Lernerperspektiven systematisch aufeinander bezogen, um so zu einer angemessenen didaktischen Strukturierung von Lehr-Lernprozessen zu gelangen (vgl. Prediger, 2005).

1 Die Rolle von Tangenten im Rahmen typischer Problemstellungen bei Zugang zur Differenzialrechnung

Beim traditionellen Zugang zur Differenzialrechnung wird (1) die Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente definiert, (2) die Tangente als Grenzlage von Sekanten betrachtet und (3) ihre Steigung als Grenzwert der Sekantensteigungen algebraisch (an Spezialfällen) bestimmt – ein Zugang der erheblich didaktische Probleme mit sich bringt (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 45 ff.). Die mit diesem Zugang verbundenen Schwierigkeiten der Lernenden bei der Begriffsbildung können vermieden werden, wenn der Einstieg in die Differenzialrechnung anhand von Problemstellungen erfolgt, bei denen Änderungsraten im Vordergrund stehen (vgl. Blum & Törner, 1983, S. 91 ff; Henn, 2000; Büchter & Henn, 2010, S. 81 ff.).

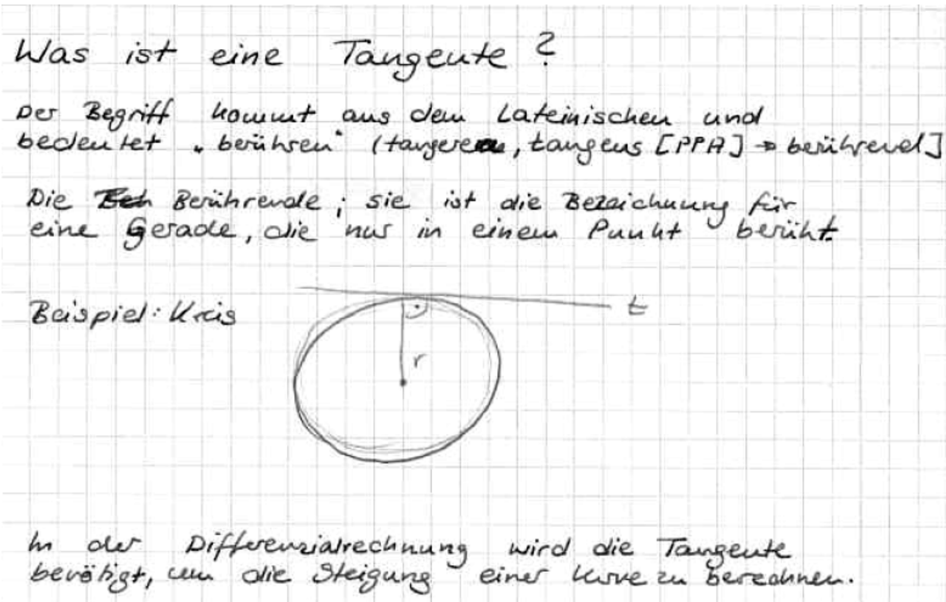
Ein paradigmatisches Beispiel hierfür liefert etwa das Geschwindigkeitsdiagramm eines ICE für die Beschleunigungsphase (vgl. Schornstein, 2003). Fragen nach der durchschnittlichen Beschleunigung in einem Zeitintervall und der momentanen Beschleunigung zu einem Zeitpunkt führen auf Betrachtungen von Differenzenquotienten und den Übergang zum Differenzialquotienten, wobei trotz der algebraischen Darstellung das algebraische Arbeiten – schon aufgrund der graphisch gegebenen Daten und der „Abwesenheit“ eines Funktionsterms – nicht dominiert. Sekanten und Tangenten dienen bei diesem Zugang der Veranschaulichung des Vorgehens, die auf die Idee des anschaulichen Grenzübergangs vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten führen kann. Bei einem solchen anschaulichen Zugang muss aber im Blick bleiben, dass die Tangente erst mithilfe der Ableitung bestimmt werden kann – und nicht umgekehrt.

Der Umstand, dass der Zugang über Änderungsraten bei der Betrachtung funktionaler Zusammenhänge didaktische Vorteile hat, sollte allerdings nicht dazu führen, dass primär geometrische Problemstellungen nicht mehr im Unterricht erscheinen; sie gehören – nicht zuletzt unter historisch-genetischer Perspektive – zu einer ausgewogenen Begriffsbildung dazu. Geometrische Fragestellungen aus dem Bereich der Optik (Reflexions- oder Brechungsgesetze) führen zur wichtigen Vorstellung der lokalen Linearität und darüber zur Bestimmung entsprechender Tangenten (als bestapproximierende Geraden), bei der dann auf die obige Idee des anschaulichen Grenzübergangs vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten zurückgegriffen werden kann.

2 Schülervorstellungen zum Tangentenbegriff nach einer Einführung in die Differenzialrechnung

Für die qualitative Studie, von der hier berichtet wird, haben die Schülerinnen und Schüler aus vier Kursen der gymnasialen Oberstufe ohne weitere Vorgaben auf die Frage „Was ist eine Tangente?“ geantwortet. Sie habe ohne zeitliche Beschränkung geantwortet und durften die Darstellung frei wählen. Bei der Analyse solcher Dokumente muss berücksichtigt werden, dass neben individuellen Vorstellungen auch Verbalisierungskompetenzen und Vorstellungen über angemessene Begriffsklärungen eingehen. Die folgende Schülerantwort (Abb. 2) steht stellvertretend für die überwiegende Mehrzahl der Bearbeitungen, bei denen vor allem die Begriffsbildung „Tangente als globale Stützgerade“ aus der euklidischen Geometrie zum

Ausdruck kommt. Dabei werden häufig Beschreibungen oder Charakterisierungen wie „in nur einem Punkt“ oder „berührt“ verwendet.



Was ist eine Tangente?

Der Begriff kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „berühren“ (tangere, tangens [PPA] → berührend]

Die ~~Beh~~ Berührende; sie ist die Bezeichnung für eine Gerade, die nur in einem Punkt berüht.

Beispiel: Kreis

In der Differenzialrechnung wird die Tangente benötigt, um die Steigung einer Kurve zu berechnen.

Abb. X: Schülerantwort auf die Frage „Was ist eine Tangente?“

Bei vielen Bearbeitungen tritt auch das Begriffspaar „Sekante – Tangente“ auf, wobei auch hier die aus der Geometrie bekannten Spezialfälle Kreis und Parabel dominant sind.

3 Erklärungsversuche und mögliche didaktische Konsequenzen

Dass wesentliche Aspekte eines verallgemeinerten Tangentenbegriffs – wie der lokale Charakter und der Aspekt der lokalen Linearität der Kurve – bei fast allen Bearbeitungen fehlen, lässt sich möglicherweise mit der vor der Differenzialrechnung stattfindenden Begriffsbildung erklären (vgl. Abb. 3).

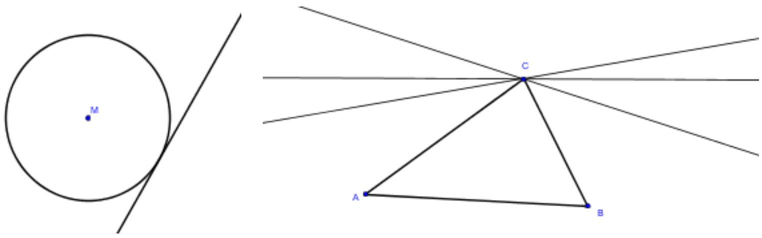


Abb. 3: Was charakterisiert eine Tangente?

In allen dem Autor bekannten Schulbüchern wird die Begriffsbildung bei Kreistangenten im Wesentlichen auf „genau einen gemeinsamen Punkt“ reduziert. Einfache kontrastierende Beispiele, wie etwa an Dreiecken, fehlen. Dabei könnten solche Beispiele von Schülerinnen und Schülern genutzt werden, um selbst die Bedeutung der lokalen Linearität zu entdecken.

Kontrastierende Beispiele sind nicht nur bei der Begriffsbildung in der Kreisgeometrie der unteren Sekundarstufe oder der Koordinatengeometrie, sondern auch bei der Verallgemeinerung des Begriffs in der Differenzialrechnung wichtig. So lassen sich einfache Beispiele angeben (Abb. 4), bei denen die lokale Linearität nicht vorliegt, eine Tangente „schneidet“, eine Tangente unendlich viele Punkte mit der Kurve gemeinsam hat oder eine Kurve sogar ihre eigene Tangente ist (vgl. Knoche & Wippermann, 1986).

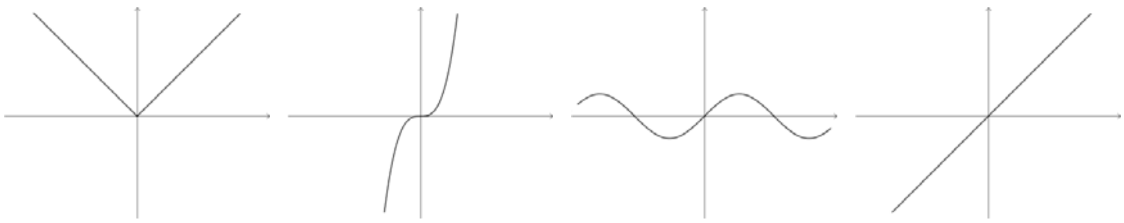


Abb. X: Kontrastierende Beispiele

Ein erstes Fazit der Untersuchung kann sein, dass einerseits die frühe geometrische Begriffsbildung „Tangente“ besser nach hinten anschlussfähig sein kann und sollte. Darüber hinaus scheint es wichtig zu sein, dass vorhandene Vorstellungen bewusst gemacht, im Unterricht erfasst und mit geeigneten Problemstellungen weiterentwickelt werden.

Literatur

Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Henn, H.-W. (2000). Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis. In F. Förster, H.-W. Henn & J. Meyer (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 6: Computer-Anwendungen* (S. 1-13). Hildesheim: Franzbecker.

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H. & Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion. Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 3(3)*, 3-18.

Knoche, N. & Wippermann, H. (1986). *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis*. Mannheim, Wien, Zürich: B.I.-Wissenschaftsverlag.

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen.“ Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica, 28 (2)*, 23-47.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schornstein, J. (2003). Simultane realitätsnahe Einführung der Differenzial- und Integralrechnung. In H.-W. Henn & K. Maaß (Hrsg.), *Materialen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 8* (S. 139-149). Hildesheim: Franzbecker.

Michael BÜRKER, Freiburg

Zur Modellierung von Spar- und Tilgungsvorgängen

1. Sparvorgänge

Finanzmathematische Begriffe wie z. B. Sparen, Schulden, Tilgen, Zinsen und Zinssätze sind kaum jemals häufiger gebraucht worden als zur Zeit, wo in vielen Medien die kritische Finanzsituation in Europa und in der Welt zur Sprache gebracht wird. Aber nicht nur in der großen Politik, sondern auch im Kleinen geht es um Geldanlagen und Schuldentilgen. Viele junge Menschen haben größere Anschaffungen oder größere Reisen vor und sparen auf diese Wünsche oder bezahlen die Anschaffungen in Raten ab.

Dies ist auch eine Chance für den Mathematikunterricht: Daher wird in diesem Beitrag die Modellierung von Spar- und Tilgungsvorgängen in den Vordergrund gerückt. Es war erstaunlich, dass nach meinem Vortrag eine ganze Reihe von Zuhörern zum Einen gemeint haben, solch eine Modellierung noch nie gesehen zu haben, zum Anderen gefordert, dass die im Vortrag präsentierten Ideen veröffentlicht werden sollten. Wir beginnen mit zwei Aufgaben, die eigentlich uralt sind, die wir aber zum Anlass für diese vorgetragenen Modellierungen nehmen, bei denen das so genannte 3-Säulen-Modell eine entscheidende Rolle spielt. Die Aufgaben und ihre Lösungen ordnen wir den literarischen Figuren Max und Moritz zu. Dabei nimmt Herr Lehrer Lämpel letztendlich eine Zusammenfassung der beiden Lösungen vor, die sowohl zu einer geschlossenen Formel für einen Sparvorgang mit regelmäßiger Sparrate als auch zu einer Formel für einen Tilgungsvorgang führt.

Aufgabe 1:

a) Max erhält einen Geldbetrag K_0 geschenkt und legt diesen auf einem Guthabenkonto mit dem Zinssatz p an. Bestimme den Endwert dieses Kapitals nach n Jahren.

b) Moritz‘ Onkel zahlt am Ende eines jeden Jahres zu Moritz‘ Gunsten die Rate r auf ein Guthabenkonto ohne Anfangskapital mit dem Zinssatz p. Bestimme den Endwert dieses Kapitals nach n Jahren.

Im Fall a) kann man eine geschlossene Formel angeben, die in der Sek. I verwendet wird: $K_n = K_0(1 + p)^n$. Wir vernetzen diese rein algebraische Formel mit geometrischen Überlegungen, die wir als 3-Säulen-Modell bezeichnen. Dabei stellt die 1. Säule (siehe Abb. 1) das Anfangskapital K_0 dar, die 2. Säule den Zins und die 3. Säule den Zinseszins, jeweils als

Rechtecke (Bausteine) dargestellt. Am Ende des ersten Jahres (n = 1) besteht der Jahreszins aus einem Rechteck (Zinsbaustein) mit dem Betrag K_0p, während die 3. Säule leer bleibt, am Ende des zweiten Jahres (n = 2) besteht die 2. Säule aus zwei Zinsbausteinen mit dem Betrag $2K_0p$ und die 3. Säule aus den Zins des 1. Zinsbausteins vom Betrag K_0p^2.

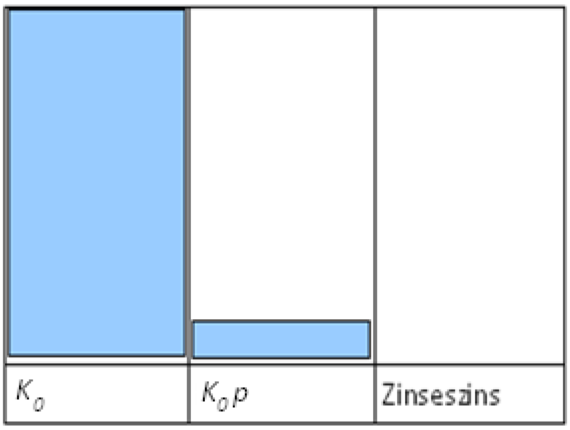


Abbildung 1: n = 1

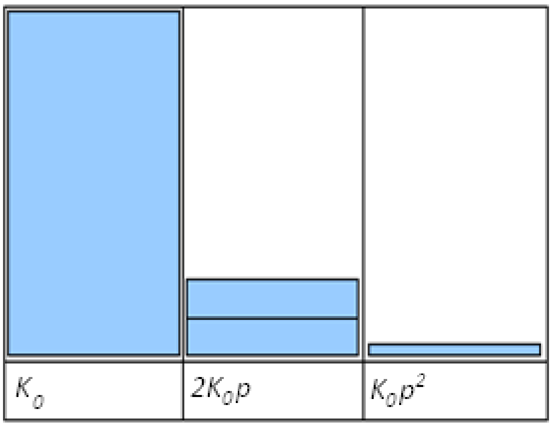


Abbildung 2: n = 2

Die Grundidee des Aufbaus der 3 Säulen liegt damit fest: Die erste Säule enthält das unveränderliche Anfangskapital, die 2. Säule den Jahreszins nach n Jahren und die 3. Säule den Zins des ein Jahr zuvor vorhandenen Kapitals der 2. Säule und des eventuell in der 3. Säule vorhandenen Kapitals.

Mit dieser Grundidee gehen wir Moritz‘ Aufgabe an:

Auf seinem Guthabenkonto geht am Ende jeden Jahres die Rate r ein. Dann bleibt für n = 1 die 1. Säule leer, weil kein Anfangsguthaben vorhanden ist. Die 2. Säule enthält die Sparrate r, während die 3. Säule wiederum leer ist. Die entscheidende Idee ist nun, die Sparrate r als Zins eines gedachten Anfangsguthabens K_g aufzufassen. Dieses gedachte Guthaben hat wegen $K_gp = r$ den Betrag r/p. In der folgenden Abbildung ist dieses gedachte Guthaben K_g nur blass gezeichnet (Abb. 3 und Abb.4):

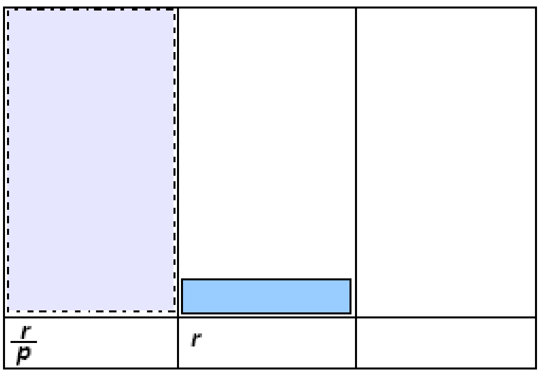


Abbildung 3: n = 1

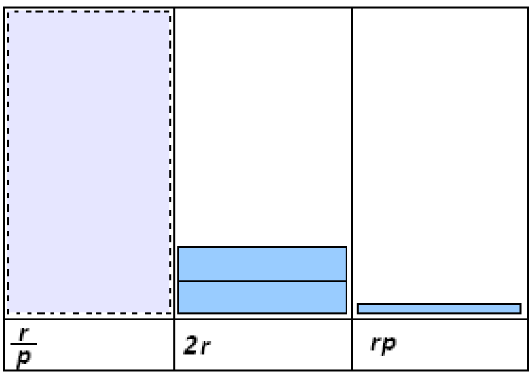


Abbildung 4: n = 2

Für $n = 2$ befinden sich in der 2. Säule 2 Sparbausteine, in der 3. Säule der Zins rp des ein Jahr zuvor vorhandenen Sparbausteins r. Wir sehen, dass sich der weitere Aufbau der 3 Säulen für $n = 3, 4, \ldots$ ganz genau so vollzieht wie im Fall des Max'schen Sparmodells mit dem einzigen Unterschied, dass das Anfangskapital im Moritz'schen Sparmodell nicht real vorhanden, sondern nur gedacht ist und den Betrag r/p hat. Wir können daher im Moritz'schen Sparmodell die Max'sche Kapitalformel verwenden, indem wir K_0 durch r/p ersetzen und am Ende noch r/p abziehen, weil das Anfangsguthaben ja nur gedacht ist:

Max: $K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$ (1)

Moritz: $K^*_n = r/p \cdot (1 + p)^n - r/p$ (2)

In der dritten Aufgabe kommt Lehrer Lämpel zum Zug:

Aufgabe 2:

Herr Lämpel hat ein Anfangsguthaben a_0 und zahlt außerdem am Ende eines jeden Jahres die Rate r auf das Guthabenkonto. Wie hoch ist der Kapitalendwert nach n Jahren beim Zinssatz p?

Jetzt müssen wir nur noch die beiden Endwerte (1) und (2) addieren.

Bezeichnen wir den Anfangswert mit a_0, den Kapitalendwert mit a_n, so ergibt sich aus (1) und (2)

$a_n = a_0(1 + p)^n + r/p(1 + p)^n - r/p$, wobei sich die rechte Seite

zusammenfassen lässt:

$a_n = (a_0 + r/p)(1 + p)^n - r/p$ (4)

Für $r = 0$ ergibt sich die Max'sche Kapitalformel.

2. Tilgungsvorgänge

Der Übergang vom Spar- zum Tilgungsvorgang ergibt sich auf verschiedene Arten, die voraussichtlich in einer im 3. Band der Vernetzungsreihe (s. Literaturangabe) erscheinenden Arbeit genauer beschrieben werden.

Wir beschränken uns hier auf folgende Überlegung:

Wir greifen auf das Max'sche und das Moritz'sche Sparmodell zurück und verwenden dies für die Tilgung eines Darlehens:

Aufgabe 3: Herr Lämpel nimmt zu Beginn eines Jahres ein Darlehen S_0 zu einem Zinssatz p auf, das er in festen Jahresraten r am Ende eines jeden Jahres zurückzahlt. Berechne die Tilgungszeit.

Wir betrachten die Darlehensaufnahme aus Sicht der Bank und aus Sicht des Darlehensnehmers: Die Bank legt den Darlehensbetrag S_0 für die Dauer der Tilgungszeit zum Zinssatz p an. Der Kapitalendwert nach n Jahren ist dann nach (1) gleich $S_0(1 + p)^n$. Der Darlehensnehmer bezahlt am Ende eines jeden Jahres den konstanten Betrag r, der Zins und Tilgung enthält. Er „spart“ damit gemäß dem Sparmodell von Moritz so lange, bis er den Kapitalendwert $S_0(1+p)^n$ des Darlehensgebers erreicht, d. h. bis die Gleichung

$$S_0(1 + p)^n = \frac{r}{p}(1 + p)^n - \frac{r}{p} \qquad (5)$$ erfüllt ist.

Diese Sichtweise nennt man das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik (siehe Tietze, Jürgen, 2009, Einführung in die Finanzmathematik, Wiesbaden, Verlag Vieweg und Teubner, S. 68). Die Leistung der Bank und die Gegenleistung des Darlehensnehmers sind äquivalent, bezogen auf den Zeitpunkt, an dem das Darlehen zurückgezahlt ist. Löst man Gl. (5) nach n auf, erhält man die Tilgungszeit des Darlehens.

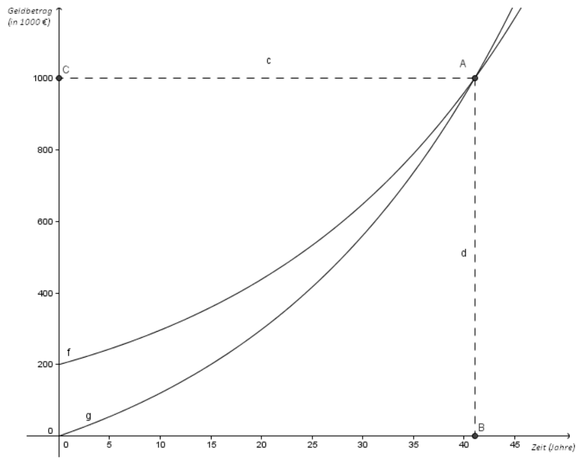


Abbildung 5

Die nebenstehende Grafik zeigt diesen Zusammenhang an Hand der beiden Funktionen

f: n $\rightarrow$ $S_0(1 + p)^n$ und

g: n $\rightarrow$ $\frac{r}{p}(1 + p)^n - \frac{r}{p}$ mit den Zahlenwerten S_0 = 200000, r = 10000 und p = 0,04. Die beiden Schaubilder schneiden sich im Punkt (41,04|1000000). Dabei entspricht 41,04 (in Jahren) der Tilgungszeit des Darlehens und 1000 000 € dem Kapitalendwert der vom Darlehensnehmer geleisteten Zahlungen. Dies ist das 5-fache des Darlehens!

Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. München: Aulis Verlag. http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Claudia BÖTTINGER, Essen

Lehren und Lernen von Mathematik – Entwicklung von Sichtweisen in Veranstaltungen des Studiengangs Grund-Haupt-Realschule

Die Leitidee für das Lehramtsstudium Grund- Haupt- Realschule an der Universität Essen lässt sich am treffendsten mit folgendem Zitat zusammen fassen „*Mathematische Lernprozesse werden zunehmend als aktive Wissenskonstruktionen der Schülerinnen und Schüler begriffen, wobei diese selbst aktiv werden, Entdeckungen vornehmen und durch gemeinsame Reflexion verallgemeinerte Einsichten gewinnen.*" (Steinbring 2003, S. 195)

Wie bei allen Aspekten, die die Lehrerausbildung betreffen, hat man es hierbei immer mit einer doppelten Anforderung zu tun: Die Studierenden sind selbst Lernende und zukünftige Lehrer. D. h. sie müssen diese Sicht im Rahmen ihrer Veranstaltungen selbst erleben und andererseits müssen sie diese Sichtweise im Hinblick auf ihren späteren Unterricht reflektieren. Auf der Basis ihrer fachlichen Ausbildung müssen sie Sie in der Lage sein, Gelegenheiten für Entdeckungen zu schaffen und müssen eine Bewusstheit für das Lernen von Kindern und für Interaktionsprozesse entwickeln. Sie müssen eine didaktische Perspektive entwickeln, die von zunächst subjektiv geprägten Sichtweisen ausgeht und sich hin zu theoriegeleiteten, distanzierten Sichtweisen weiterentwickelt. In diesem Sinn war es ein Anliegen, besser zu verstehen, wie sich das professionelle Wissen und Sichtweisen im Laufe unserer eigenen Veranstaltungen entwickeln und wie diese aufeinander bezogen sind.

1. Veranstaltungen

Zeitgleich wurde der Fragebogen in drei Veranstaltungen eingesetzt und zwar in der ersten und in der letzten Semesterwoche des WS2009/10. Arithmetik (1. Sem. Böttinger) ist eine Fachveranstaltung des 1. Semesters. Es erfolgte eine enge Orientierung an den Ideen und den Inhalten von „Arithmetik als Prozess" (Müller, Steinbring, Wittmann, 2004). Didaktik der Arithmetik (3. Sem., Böttinger) hat einen eher konstruktiven Schwerpunkt. Es geht um die Auseinandersetzung mit Sichtweisen auf Mathematik und Mathematikunterricht und die Konsequenzen für den Arithmetikunterricht der Klassen 3-6. In der Veranstaltung Mathematik lehren und lernen (5. Sem. Steinbring) geht es Besonderheiten des mathematischen Wissens und mathematischer Bedeutung sowie Formen der Interaktion.

Zum Aufbau des Fragebogens vgl. Böttinger (2011).

2. Aufbau der Fragen

Um genauere Informationen zu den Beziehungen zwischen fachlichen Anforderungen und den zugrunde liegenden Einstellungen zu erhalten, wurde ein Fragenkonstrukt gewählt, das sich in den Naturwissenschaften bewährt hat, ein sogen. „Two-tier-test“, (Treagust 2006). Am folgenden Beispiel aus dem Bereich der lernprozessbezogenen Anforderungen, an dem auch die Auswertung exemplarisch aufgezeigt werden soll, wird dieser Aufbau vorgestellt. Die Fragestellung erfolgt zweistufig. Im ersten Schritt wird eine konkrete fachliche/fachdidaktische Aufgabe gestellt:

Tim legt Plättchen mit seiner Lehrerin

L	Könnten wir denn die Plättchen noch ein bisschen anders legen, dass wir schneller elf sehen?
Tim	(*Legt ca. 15 sec seine Plättchen*). 
L	Ja. Versuch doch noch mal sie ein bisschen geschickter zu legen (*T beginnt seine Plättchen umzulegen*), dass man ganz schnell sehen kann, au, das sind elf.
Tim	(*legt ca. 45 sec seine Plättchen, fasst sich mit der rechten Hand an die Stirn*). Ach! 

Stellen Sie sich vor, dass Sie die Lehrerin sind.
Was antworten Sie Tim?

- ☐ „Das ist eine tolle Idee!“
- ☐ „Lege noch zwei Plättchen hinzu, wie viele sind es dann?“
- ☐ „Erinnere dich mal an das 20er-Feld.“
- ☐ „Erkläre bitte, warum du die Plättchen so gelegt hast!“

Die Antworten wurden so konstruiert, dass zwei explizit das mathematische Wissen ansprechen (Antwort 2 und 3) und zwei eher mathematikunspezifisch (Antwort 1 und 4) sind. Darüber zielt bei beiden Antwortarten jeweils eine explizit auf eine Handlung ab (Antwort 2 und 4), während bei den anderen beiden eine Handlung nicht automatisch mittransportiert wird (Antwort 1 und 3).

Im zweiten Schritt wird nach der Begründung für die Wahl gefragt.

Ich habe diese Antwort gewählt, weil

		trifft zu			**trifft gar nicht zu**
		1	**2**	**3**	**4**
ich so den Schülern viel mathematisches Wissen mitgebe.					
ich Orientierungen erhalte, die sich positiv auf das mathematische Lernen der Schüler auswirken.					
ich selbst erfahren habe, dass Schüler so gut Mathematik lernen.					
ich so das mathematische Denken der Schüler berücksichtige.					

Die Begründungen 1 und 3 sind eher vermittelnder und lehrerorientierter Natur während die beiden anderen (2 und 4) an den Verstehensprozessen der Kinder orientiert sind. Die Skala wurde gewählt, damit sich die Studierenden sich nicht auf eine Begründung festlegen mussten.

3. Auswertung

Zunächst werden die beiden Fragenteile unabhängig voneinander ausgewertet und anschließend ausgewählte Kombinationen näher beleuchtet.

1. Fragenteil, fachliche bzw. fachdidaktische Frage: Da der gleiche Fragebogen zu Beginn und am Ende des Semesters eingesetzt wurde, ist erklärbar, dass mindestens 40 % der Studierenden ihr Antwortverhalten vom Vor- zum Nachtest nicht ändern. Auffällig ist, dass in der Fachveranstaltung dieser Anteil mit mindestens 60 % deutlich höher liegt. Systematische Veränderungen sind eher selten. Es weist darauf hin, dass allein durch eine Fachveranstaltung kaum Änderungen auf der Ebene des professionellen Lehrerwissens zu erwarten sind. Darüber hinaus fällt bei jeder Frage eine spezielle Änderung auf. Bei der o. a. Frage ist es die Wanderung von der Antwort „Das ist eine tolle Idee“ hin zu „Erkläre bitte, warum du die Plättchen so gelegt hast.“ Überraschend ist, dass diese Änderungen bis auf ganz wenige Ausnahmen in den beiden Didaktik-Veranstaltungen vergleichbar sind. Dies deutet darauf hin, dass das Wissen um spezielle Anforderungen zwar in den Veranstaltungen aufgebaut wird, aber nicht langer Dauer ist.

2. Fragenteil, Begründung: Die Begründungen wurden daraufhin untersucht, ob die Hypothese „Mittelwerte sind im Vor- und Nachtest gleich“ verworfen werden kann. Zu jeder Frage aus dem 1. Fragenteil gibt es mindestens eine Begründung, die durch eine Mittelwertverschiebung auffällt.

Während bei den Studierenden der Veranstaltung Arithmetik – vergleichbar zum 1. Teil – praktisch keine Bewegungen nachweisbar sind, lassen sich in der Veranstaltung „Didaktik der Arithmetik“ gelegentlich Verschiebungen nachweisen. Im Unterschie dazu gibt es bei „Mathematik lehren und lernen“ es zu JEDER Frage eine Begründung, bei sich eine statistisch auffällige Verschiebung zeigt. Im o. a. Beispiel ist das die Begründung „weil ich so das mathematische Denken der Kinder berücksichtige.“ Möglicherweise werden die Studierenden in dieser Veranstaltung stärker angeregt, bewusster über ihre Entscheidungen zu reflektieren. Dies kann auch erklären, warum das in Didaktik der Arithmetik erworbene Wissen nur von so kurzer Dauer ist: Es geht zu wenig einher mit einer passenden Einstellung zum Mathematikunterricht, die nur langfristig aufgebaut werden kann.

Im zweiten Auswertungsschritt wird die Beziehung zwischen ausgewählten Antworten und Begründungen genauer untersucht. Die Auswahl fiel im obigen Beispiel auf die Antwort-Kombination „Erkläre bitte, warum du die Plättchen so gelegt hast.“ zusammen mit der Begründung „weil ich so das mathematische Denken der Kinder berücksichtige.“ Aus didaktischer Sicht ist diese Kombination nahe liegend – und zwar ohne weitere Einschränkungen. Gleichzeitig sind das die Antworten, die auch statistisch auffallen (s. o.). Hier lässt sich beobachten, dass diese Passung zwischen den beiden Antworten im Laufe der Didaktik-Veranstaltungen besser wird, in Mathematik lehren und lernen deutlicher. Es kann als Hinweis gesehen werden, dass das professionelle Wissen im Laufe des Studiums durch die Didaktik-Veranstaltungen reflektierter und bewusster eingesetzt wird.

Dies kann darüber hinaus ein Erklärungsansatz sein, warum das in Didaktik der Arithmetik erworbene Wissen (vgl. Fragenteil 1) nur von so kurzer Dauer ist: Es geht noch zu wenig einher mit einem reflektierten Verständnis des Unterrichtshandelns, was nur langfristig aufgebaut werden kann.

Literatur

Böttinger, C. (2011): Ein Fragebogen zur professionsorientierten Evaluation von mathematischen Lehramtsveranstaltungen. In: BzMU 2011, Münster: WTM-Verlag, 119-122

Müller, N., Steinbring, H. & Wittmann, E. Ch. (2004): Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung

Steinbring, H. (2003): Zur Professionalisierung des Mathematiklehrerwissens. In M. Baum, H. Wielpütz (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule – ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, 195-219

Treagust, D. (2006) Diagnostic assessment in science as a means to improving teaching, learning and retention, UniServe Science Assessment Symposium Proceedings, http://sydney.edu.au/science/uniserve_science/pubs/procs/2006/treagust.pdf [24.3.2012]

Yu-Ping CHANG, München, Kristina REISS, München, Fou-Lai LIN, Taipei

Mathematical Proof in German and Taiwanese Textbooks: A Perspective on Geometry at the Lower Secondary School

1. Introduction

Results of international evaluation studies (e.g., PISA, TIMSS) on students' mathematical achievement and/or competence show a better performance of students from some East Asian countries like Korea, Singapore, or Taiwan compared to their counterparts in some European countries or the U.S. There are a number of studies discussing these differences. For example, lessons in Germany, Japan, and the U.S. were videotaped and then analyzed with respect to the teaching style. The results suggested important differences in the active involvement of students in the classroom and their consideration of the mathematical content (Klieme & Bos, 2000).

The presentation of mathematical content in the classroom is often reflected by its presentation in textbooks. However, there are hardly any studies which take into consideration how textbooks differ under an international perspective. Therefore, we took this as the guiding idea for an international research project. Our main concern was to compare German and Taiwanese curricular material with respect to their ways of presenting mathematical content. As research provides evidence that basic features of the curriculum, as content, organization, and sequencing, impact students' conception of proof (Chazan, 1993; Harel, 2001; Healy & Hoyles, 2000; Stylianides, 2007), we chose proof in geometry as a topic for the comparison. In the following, we will present first results of this study.

2. Theoretical Background

There are some challenges for students while dealing with mathematical proof and the process of proving. For example, Alibert's study (1988) points out that even university students who learned proof at school still treat the activity of proving as an extraneous task, not as a tool for thinking more deeply about mathematics. Moreover, when proving a statement for which the proof already exists or is intuitively obvious, it often leads students to the perception that proving is a goal oriented activity and not a process of discovery (Harel & Sowder, 1998; Schoenfeld, 1994; Wheeler, 1990).

A German research study identified three general difficulties of students in proof and logical argumentation: 1) lacking *knowledge of facts*; 2) deficient *methodological knowledge* on mathematical proof; 3) difficulties in developing and implementing a *proof strategy* (Reiss, Hellmich, & Thomas, 2002; Heinze, 2004). Lin and Cheng (2003) conducted a nation-wide investigation on Taiwanese students' development of mathematical argumentation competences. In this research, they found that Taiwanese students could organize their knowledge from elementary school in order to solve difficult and unknown/new questions, but they could not retrieve a simple principle to judge and explain why a property was true.

It is well-known that the process of proving is complex and identifying the statement/proposition is a main obstacle in fulfilling the task. Duval (1998; 2002; 2007) concluded that the meaning of a proposition is determined with respect to three dimensions: 1) A semantical dimension through its content; 2) a knowledge dimension through its epistemic value; 3) a logical dimension through its truth-values. From a cognitive perspective, investigating the relationship between the last two dimensions seems to be especially difficult but essential for understanding students' knowledge of mathematical proof.

3. Research Questions

Within the framework mentioned above, we address these research questions.

- What are the differences between German and Taiwanese curriculum materials (here we focus on textbooks) with respect to mathematical argumentation and proof?
- How is a mathematical statement presented in the curriculum, and particularly in textbooks?

4. Method and First Results

In this research project, we chose the Gymnasium track in the German state ("Bundesland") of Bavaria and the junior high school in Taiwan as representatives for the school systems. In particular, only the Gymnasium track in Bavaria introduces mathematical proof. In Taiwan, there is a single school track at the lower secondary level in which proof is regularly treated. We chose textbooks from grades 7 to 9 for this comparison as they included a sufficient number of topics to be taught in both countries. Six different textbooks, approved by their respective ministries of education (Chang et al., 2011), were selected from Germany and Taiwan, three from each country. We are aware of the fact that textbooks may differ substantially within a country, which is particularly true for German textbooks.

The analysis was based on a developing analytic framework composed of several variables including how to choose the analytic units and how to discern the complicated content information of each unit, e.g., denotation, calculation, figuralization, decomposition, or mode of argumentation. We concentrated on two topics, namely the sum of interior angles of a triangle and the Pythagorean theorem.

The analysis showed important differences between the textbooks in the two countries. First, both topics were introduced in all textbooks but the methods differed between Germany and Taiwan (Chang et al., 2011). In the German arrangement, the sum of interior angles of a triangle started from introducing different angles, e.g., alternative interior angles or corresponding angles, continued with the axiom of parallels, and concluded with the generalization to the angle sum of a polygon. In the Taiwanese arrangement, the introduction started with figural operations, e.g.. paper folding in order to discover that three angles could be lined to a straight angle and accordingly an angle of 180°. The observation was then regarded as a fact and a mathematical result. The sum of exterior angles was discussed, the presentation finished as well with the generalization to the angle sum of a polygon. Regarding the Pythagorean theorem, German books used the properties of similarity to hypotenuse-leg theorem and leg-leg theorem, and then proved the Pythagorean theorem. The Pythagorean theorem in Taiwanese books is introduced with the help of examples. They show the relationship between side and area of figures in order to sustain the statement $c^2 = a^2 + b^2$ is true for all right-angled triangles. Second, we found some general differences between German and Taiwanese geometry content arrangement in textbooks: 1) German textbooks focused on building geometrical ideas hierarchically with hardly any repetitions in this introductory phase, while Taiwanese textbooks emphasized the transmission of mathematical concepts by elaboration or result-driven illustration; 2) there was no specific room for a proof in German textbooks. In Taiwanese textbooks, a formal (geometric) proof is always presented at the end of a chapter on geometry.

5. Summary and Discussion

Textual forms are diverse among textbooks from different publishers in Germany, however, they are similar among books from different publishers in Taiwan. Besides, from the analysis of introducing the statements of two topics, we found that argumentation as a mode of validation guided the presentation in German textbooks whereas taking conjectures as facts for generalization or application seemed to lead most texts in Taiwanese books.

References

Alibert, D. (1988). Towards new customs in the classroom. *For the Learning of Mathematics, 8*(2), 31-35.

Chang, Y.-P., Ufer, S., Reiss, K., & Lin, F.-L. (2011). An overview on German and Taiwanese textbooks building mathematical proof in secondary school: A geometry content analysis. In National Academy for Educational Research (Ed.), *Proc. of the Int. Conf. on Textbook Development* (pp. 161-181). Taipei: NAER.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI Study*. (pp. 142-157). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2002). The approach to conjecturing and proving: Cultural and educational choices. In F.-L. Lin (Ed.), *Proc. of the 2002 Int. Conf. on Mathematics: Understanding proving and proving to understand* (pp. 61-77). Taipei: National Science Council & National Taiwan Normal University.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorem in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp.137-161). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell & R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 185-212). NJ: Ablex Publishing Corporation.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). Proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Heinze, A. (2004). Schülerprobleme beim Lösen von geometrischen Beweisaufgaben – eine Interviewstudie. *ZDM, 36*(5), 150-161.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7-16.

Klieme, E., & Bos, W. (2000). Mathematikleistung und mathematischer Unterricht in Deutschland und Japan: Triangulation qualitativer und quantitativer Analysen am Beispiel der TIMS-Studie. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 3*, 359-379.

Lin, F.-L., & Cheng, Y.-H. (2003). The competence of geometric argument in Taiwan adolescents. Presentation in Int. Conf. on Science & Mathematics Learning, Taipei.

Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Eds.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (pp. 51-64). Weinheim: Beltz.

Stylianides, G. (2007). Investigating the guidance offered to teachers in curriculum materials: The case of proof in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*(1), 191-215.

Peter COLLIGNON, Erfurt

Analysis und mathematisches Modellieren – Normung oder Kreation?

1. Kontext

Die folgenden Überlegungen betreffen die Schnittstelle zwischen Schul- und Hochschulmathematik. Lehrveranstaltungen der „Nebenstudienrichtung Mathematik“ an der Universität Erfurt richten sich zu einem großen Teil an Studierende der „Pädagogik der Kindheit“ mit Berufsziel Grund- oder Regelschullehramt. Die „Nebenstudienrichtung“ fungiert darüber hinaus als Nebenfachangebot für Studierende anderer Studiengänge wie zum Beispiel Erziehungswissenschaften, Psychologie, und Philosophie, vereinzelt auch Ökonomie und Technik (FH). In der Orientierungsphase (erstes Studienjahr) findet eine viersemestrige Einführung in die Differential- und Integralrechnung statt; während der Qualifizierungsphase (zweites und drittes Studienjahr) müssen die Studenten eine der beiden Vorlesungen zu Volumenintegralen oder zur elementaren Differentialgeometrie besuchen.

2. Anliegen

In diesem Beitrag wird nicht die Grundsatzfrage diskutiert, inwiefern eine universitäre Aus- bzw. Weiterbildung in Analysis für eine Klientel sinnvoll ist, die dieses Fach nicht selbst unterrichten wird. Jüngere Untersuchungen bestätigen, dass eine fundierte fachwissenschaftliche Bildung positiv mit den Kompetenzen eines Grundschullehrers korreliert. Es ließen sich Argumente anführen, die in diesem Zusammenhang der Analysis eine wichtige Rolle einräumen. Hier soll ein besonderes Potenzial der Analysis hervorgehoben werden, welches über ihre innermathematische Bedeutung hinausgeht und nicht das primäre Ziel verfolgt, den in der Sekundarstufe II erworbenen Kalkül „linear“ aufzustocken: Die Analysis wird als Ideenreservoir und „Werkzeugkasten“ beim mathematischen Modellieren betrachtet. Weiterhin soll ihre Eignung, wissenschaftliche Modellierungsprozesse zu exemplifizieren und damit einen Beitrag zu einem adäquateren Wissenschaftsverständnis künftiger Lehrender zu leisten, unterstrichen werden.

Ideenreservoir – ein Widerspruch in sich? Braucht man noch eigene Ideen, wenn ein Konzept wie die über Jahrhunderte gewachsene Differential- und Integralrechnung zur Verfügung steht? Freudenthal (1983, S. 32f.) betont in didaktischen Zusammenhängen die Bedeutung des „Wieder-(Er)findens“ bereits bekannter Ideen.

Viele Studienanfänger zeigen ein naives Verständnis von Wissenschaft bzw. Wissenschaftlichkeit. Oft fehlt die Einsicht in den Modellierungscharakter exakter (oder „exakt gemachter“) Wissenschaft völlig. Mathematische Bildung sollte einen Beitrag zur Überwindung einer solchen Rezeption leisten.

3. Mathematisches Modellieren in ökonomischen Kontexten

Sozialwissenschaftliche bzw. ökonomische Motive wirken emotional in stärkerem Maße auf die Lebensrealität junger Erwachsener als etwa physikalische Phänomene. Mathematisierungen können im Sinne der Grunderfahrungen nach Heinrich Winter (1996) thematisiert werden:

- Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen;
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbole, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenlernen und begreifen;
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), erwerben.

Mit Blick auf die angesprochene Klientel bieten gerade die Sozialwissenschaften (im weiten Sinne von “social sciences“), also auch Teile der Ökonomie, in vielfacher Weise Gelegenheit, mit elementaren Mitteln mathematisches Modellieren verstehen zu lernen. Anders als in den Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, haben die Studierenden in aller Regel kaum „Standardmodellierungen“ kennengelernt. Um ein Verständnis dafür zu wecken, dass eine Formalisierung durch Quantifizierung per se eine Modellierung ist (dies beginnt bereits beim „Zählen“!), kann „Neuland“ betreten werden, um studentische Kreativität zu fördern.

Charakteristisch für mathematisches Modellieren ökonomischer Kontexte ist die Berücksichtigung subjektiver Kategorien wie Bedürfnisse und Wünsche. Ökonomisches Handeln erfordert Entscheidungen unter Unsicherheit und ist daher oft konfliktbeladen; zudem ist es in vielen Fällen gewinn- bzw. profitorientiert. Hier deutet sich bereits eine Affinität zu Optimierungsproblemen an, die im Rahmen der Analysis in eine (so genannte) Kurvendiskussion einmünden kann. Ebenso können die genannten Aspekte Anlass für stochastische Modellierungsansätze sein.

Das Fehlen „kanonischer“ Modellierungskonzepte, wie in der (Schul-) Physik vermittelt, ist für die Lernenden sowohl Herausforderung als auch Chance: Da ökonomische Gegebenheiten keine „Naturgesetze“ darstellen, fehlen zunächst „harte“ Sachverhalte, die im Falle naturwissenschaftlicher Modellierungen eine Orientierung bieten würden. Exemplarisch soll an dieser Stelle auf die Möglichkeit einer kritischen Auseinandersetzung mit der Größe „Geld“ hingewiesen werden. Die Bewertung sämtlicher Waren und Dienstleistungen auf einer gemeinsamen diskreten, eindimensionalen Skala wirft Fragen nach denkbaren Alternativen auf. Weiterhin bietet sie Anlass, die Überführung ursprünglich diskreter Größen in stetige zu diskutieren. Derartige Überlegungen eröffnen die Chance, eigene Ansätze zu finden und deren Tauglichkeit für die Modellbildung zu untersuchen. Die Tatsache, dass Absolventen allgemeinbildender Schulen ökonomische Standardmodelle kaum vertraut sind, fördert ein unbefangenes – kreatives – Vorgehen. Wird der Modellierungsprozess erst einmal in dieser Weise erlebt, relativiert sich auch die Sicht auf bisher als verbindlich verstandene mathematische Darstellungen *naturwissenschaftlicher* Phänomene. Bei geeigneter Begleitung durch den Lehrenden kann dies zu einem vertieften Verständnis von Wissenschaftlichkeit führen.

4. Verwendung analytischer Methoden

In der heutigen Analysis spielt der Funktionsbegriff eine dominierende Rolle. Dass infinitesimaler Kalkül auch ohne diesen auskommt und dass die reellen Zahlen als Fundament erst im 19. Jahrhundert eine (weitgehend) akzeptierte Definition erfuhren, sollte Lehramtsstudierenden – unabhängig vom anvisierten Schultyp – geläufig sein. Infinitesimale Aspekte sollten im Sinne einer fundamentalen Idee verstanden und der heutige Kalkül als menschliche Kulturleistung gewürdigt werden, die ihre Genese bestimmten wissenschaftshistorischen Voraussetzungen verdankt.

Die Bereitstellung eines „Werkzeugkastens“ (der Analysis), der in vielfältiger Form „genormte“ Instrumente enthält, führt – bei entsprechender Gestaltung der Lehreinheit – oft zu erstmaligen Einsichten über die speziellen wissenschaftshistorischen Entstehungsbedingungen einer wichtigen mathematischen Teildisziplin und schärft den Blick für den Modellierungscharakter analytischer Ansätze in „verfremdeten“ Kontexten wie der Ökonomie. Gewisse Grundvoraussetzungen einer analytischen Modellierung können hier bewusster als „Modellierung“ – oder eben „Kreation“ – identifiziert werden. Wie bereits oben erwähnt, hat man es häufiger mit Größen zu tun, die in der „Realität“ (tatsächlich oder normativ) diskret sind, im Modell aber als stetig angesehen werden. Dies ist häufig legitim. Die Frage ist jedoch: Welche Verfälschungen der Realität – oder besser: der ursprünglichen *Modellierungsidee* – sollten in Kauf genommen werden, um in bestimmten Phasen des Modellierungsprozesses über „genormte“ Instrumente, z.B. analytische Methoden der Extremwertbestimmung, verfügen zu können? Diskussionen mit Studierenden zu diesen und ähnlichen Fragen fließen gegenwärtig und in naher Zukunft in eine qualitative Studie zum Thema ein.

In vielen Situationen führt eine zunächst diskrete Sichtweise relevanter Größen zu der Einsicht, dass der Sachzusammenhang eine infinitesimale Behandlung nicht erzwingt, sondern anderen Motiven geschuldet sein kann. Beispiele sind die (mittlere Elastizität) als Quotient der relativen Änderung der abhängigen und der unabhängigen Variablen $(\Delta y/y)$ / $(\Delta x/x)$ und der Term der Durchschnitts(-kosten)-funktion $f(x)/x$. Im ersten Fall eröffnet die infinitesimale Variante den Zugang zum analytischen Kalkül; im zweiten erhält man durch Differentiation eine ökonomisch interpretierbare Aussage, nämlich dass bei Vorliegen eines Kostenmaximums die Ableitung der Kostenfunktion mit den Durchschnittskosten übereinstimmt.

Innermathematische Aspekte ergeben sich aus der Behandlung „neuer“ Ableitungsregeln, wie etwa der Summen- bzw. Produktregel für Elastizitäten. Studierende, die unter Anleitung derartige Regeln „entdecken“, gewinnen eine vertiefte Einsicht in den im Schulunterricht eingeübten Kalkül.

5. Resümee

Mathematisches Modellieren in ökonomischen Kontexten fördert einen selbstbestimmten Gebrauch der Mathematik sowie eine Erweiterung des Wissenschaftsverständnisses. Die Verwendung analytischer Methoden berücksichtigt alle von Danckwerts und Vogel (2006, S. 12f.) genannten fundamentalen Ideen der Analysis. Studienanfängern wird die Gelegenheit geboten, Idee und Bedeutung analytischer Ansätze einem kalkülhaften Arbeiten gegenüberzustellen (ebd. S .13). Die elementare Analysis stellt einen umfangreichen „Werkzeugkasten“ zur Verfügung, dessen Gebrauch je nach Sachzusammenhang kritisch reflektiert werden muss.

Literatur

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. München, Elsevier / Spektrum Akademischer Verlag.

Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht [et al.], D. Reidel Publishing Company.

Jahnke, H.N. [Hrsg.] (1999): Geschichte der Analysis. Heidelberg [et al.], Spektrum Akademischer Verlag.

Stachowiak, H. [Hrsg.] (1980): Modelle und Modelldenken im Unterricht. Bad Heilbrunn, Verlag Julius Klinkhardt.

Winter, H. (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 37-46.

Katja DERR, Reinhold HÜBL, Mannheim

Studienvorbereitung Mathematik Online: Ein Selbstlernangebot für Studienanfänger/-innen in technischen Studiengängen

Ausgangslage

An der Fakultät Technik der DHBW Mannheim wurde im Wintersemester 2010 mit dem Aufbau einer Online-Plattform zur Studienvorbereitung Mathematik begonnen. Der Fokus liegt auf dem mathematischen Basiswissen, das für die Durchführung eines technischen Studiengangs vorausgesetzt wird. Tests zeigen, dass nicht alle Studienanfänger/-innen diese Grundlagenkenntnisse mitbringen, und dass bestehende erhebliche Defizite parallel zu den Anforderungen eines Studiums nur noch schwer abzubauen sind. Die Mathematik, für angehende Ingenieure nicht eigentliches Studieninteresse, kann so zu einem entscheidenden Faktor für Studienerfolg werden. Eine frühzeitige Sensibilisierung der Studienanfänger/-innen für die Bedeutung dieses Fachs ist darum zentraler Aspekt des Selbstlernangebots.

Das Konzept umfasst einen Online-Eingangstest, der idealerweise mehrere Monate vor Studienbeginn durchgeführt wird. Die Testergebnisse werden zusammen mit darauf basierenden Lernempfehlungen sowie Hinweisen auf entsprechende Lernmodule verschickt. Insgesamt werden zehn Lernmodule zur Grundlagenmathematik angeboten, die in Papierform oder alternativ als interaktive Lerneinheiten durchgearbeitet werden können (bislang werden drei von zehn Lernmodulen in der interaktiven Version angeboten, die Umstellung aller Lernmodule wird sukzessive erfolgen). Zu Studienbeginn wird ein zweiter (Kontroll-)Test durchgeführt, um zu ermitteln, welche Studierenden ein studienbegleitendes Tutorium besuchen sollten.

Die Testergebnisse sowie die Nutzung der Lernplattform werden in einer Studie unter Berücksichtigung folgender Fragestellungen untersucht:

1. Lassen sich über alle Teilnehmer/innen hinweg bzw. in bestimmten Teilnehmergruppen Defizite in bestimmten mathematischen Gebieten feststellen, die dann dementsprechend stärker in den Lernmaterialien berücksichtigt werden sollten?

2. Lassen sich zwischen den Testergebnissen und den statistischen Angaben der Teilnehmer/-innen Beziehungen herstellen, z.B. in Hinblick auf Schulform, Mathematik-Schulnote oder Bundesland?

3. Können die Nutzer/-innen des Selbstlernangebots ihr Testergebnis im Kontrolltest verbessern?

4. Gibt es Personengruppen, die von dem Selbstlernangebot stärker / weniger stark / gar nicht profitieren? Welche Faktoren sind förderlich bzw. hinderlich?

1. Ergebnisse in den mathematischen Gebieten

Die Testergebnisse im Eingangstest stimmen in weiten Teilen mit ähnlichen Untersuchungen überein, wie z.B. den an der Fachhochschule Aachen durchgeführten Eingangstests (vgl. Henn, Polaczek, 2007), und bestätigten die eigenen Ergebnisse des Vorjahres. So wurden in der Kategorie ‚Arithmetik und Elementares Rechnen' Aufgaben zur Prozentrechnung von einem Großteil der Teilnehmer richtig gelöst, während komplexere Termumformungen nur selten korrekt durchgeführt wurden.

Recht gute Ergebnisse ergaben sich für den Bereich der linearen und quadratischen ‚Gleichungen' (76,6% richtige Antworten), auch in den Kategorien ‚Funktionen' und ‚Potenzen, Wurzeln, Logarithmen' lagen die Werte über 60%.

In den Kategorien ‚Geometrie' und ‚Trigonometrie' waren die Ergebnisse weniger einheitlich: Während etwa Grundkenntnisse in der Dreiecksgeometrie bei einem Großteil der angehenden Studierenden vorhanden sind, wurden Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen von vielen Testteilnehmern nicht gelöst. So ergaben sich für diese Kategorien Durchschnittsergebnisse von ca. 45%. Neben der Trigonometrie kann offenbar auch das Themengebiet Vektorrechnung nicht als Grundlagenwissen vorausgesetzt werden: Hier wurden nur 36,4% erreicht.

2. Statistische Einflussfaktoren

Um unterschiedliche Gruppen und ihre Entwicklung zwischen Eingangs- und Kontrolltest besser vergleichen zu können, wurden beide Tests so normiert, dass die Mittelwerte jeweils bei 100 Punkten lagen. Bei den meisten der untersuchten statistischen Einflussfaktoren wie Geschlecht, Bundesland, Studiengang, G8 oder G9, konnte kein statistisch signifikanter Zusammenhang mit den Testergebnissen festgestellt werden. Relativ deutlich war der Zusammenhang mit der Mathematiknote: Teilnehmer, die angegeben hatten in Mathematik überwiegend sehr gute Noten zu haben, erreichten höhere Testergebnisse und konnten sich zwischen Eingangs- und Kontrolltest am deutlichsten verbessern (Eingangstest: 113,75; Kontrolltest: 119,91 Punkte). Teilnehmer mit guten bzw. befriedigenden Mathematiknoten haben in beiden Tests etwas schlechter abgeschnitten und die Verbesserung von Eingangstest zu Kontrolltest war weniger stark.

Statistisch signifikant war auch der Zusammenhang zwischen Testergebnis und Art der Hochschulzugangsberechtigung: Im Vergleich zu den Teilnehmern mit allgemeiner Hochschulreife (n=457), die im Eingangstest 101,94 und im Kontrolltest 106,92 Punkte erreichten, erzielte die Gruppe der Teilnehmer mit Fachhochschulreife (n=46) im Eingangstest einen Durchschnittswert von 81,80 und im Kontrolltest 78,85. Auch wenn diese Gruppe zahlenmäßig sehr klein ist, kann von einem stabilen Zusammenhang ausgegangen werden, da in 2010 ähnliche Ergebnisse erzielt wurden.

3. Effekt des Selbstlernangebots

524 der 724 Studienanfänger/-innen nahmen am Online-Eingangstest teil, nach Durchführung bearbeiteten nach eigener Auskunft fast 90% der Eingangstest-Teilnehmer ein oder mehrere der insgesamt zehn verfügbaren Lernmodule. Am Kontrolltest nahmen dann 718 Teilnehmer teil (wobei 90 Teilnehmer weder den Eingangstest durchgeführt noch Lernmodule bearbeitet haben). Die 506 Teilnehmer, die beide Tests durchgeführt haben, verbesserten sich von 99,96 Punkten im Eingangstest auf durchschnittlich 104,18 Punkte im Kontrolltest. Im Vergleich dazu erreichten die Teilnehmer, die nur den Kontrolltest durchgeführt haben und auch keine Lernmodule bearbeiteten, mit 88,99 einen deutlich geringeren Mittelwert.

Studienanfänger/-innen, die mindestens ein Lernmodul bearbeitet haben, erzielten im Eingangstest durchschnittlich 99,87, im Kontrolltest 104,31 Punkte. Testteilnehmer/-innen, die keine Lernmodule bearbeitet haben (n=37) verbesserten sich weniger stark von 102,36 im Eingangstest auf 103,25 Punkte im Kontrolltest, die Unterschiede sind allerdings statistisch nicht signifikant.

Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Lernmodul-Bearbeitung und Kontrolltestergebnis lässt sich also trotz der durchschnittlichen Ergebnis-Verbesserung nicht für alle Teilnehmergruppen und auch nicht für alle Lernmodule gleichermaßen nachweisen.

4. Adressatengruppen

Die stärkste Verbesserung zwischen Eingangstest und Kontrolltest ist bei Teilnehmern zu beobachten, die ein weniger gutes Eingangstestergebnis hatten und dementsprechend viele Lernempfehlungen erhalten haben. In dieser Gruppe haben Studienanfänger/-innen mit guten Mathematik-Noten (n=141) am meisten von der Nutzung der Lernmodule profitiert und sich stärker verbessert als die Teilnehmer dieser Gruppe, die keine Lernmodule bearbeitet haben. Dies gilt besonders für die mathematischen Kategorien ‚Arithmetik', ‚Logik und Kombinatorik', ‚Potenzen, Wurzeln Logarithmen' sowie ,Funktionen'. Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass das Angebot in der jetzigen Form vor allem Studienanfänger/-innen mit bestehendem Grundwissen erreicht, die es nutzen um vorhandene Kenntnisse aufzufrischen. Das Schließen großer Wissenslücken bzw. die Erarbeitung komplett neuer Lerninhalte kann hingegen nicht erwartet werden. So konnten in Kategorien, in denen die Studienanfänger/-innen laut Selbstauskunft wenig bis keine Vorkenntnisse mitbringen, wie z.B. Trigonometrie oder Vektorrechnung, nur geringe Verbesserungen erreicht werden. Insbesondere gelang es nicht, den Rückstand der Teilnehmer mit Fachhochschulreife bzw. beruflicher Qualifizierung zu verringern, auch ein zusätzlich für diese Gruppe durchgeführtes Präsenzseminar wirkte sich kaum auf die Testergebnisse aus.

5. Fazit

Das Selbstlernangebot wurde von der Mehrzahl der angehenden Studierenden als Hilfe zur Studienvorbereitung begrüßt und genutzt. Eine mit 503 Teilnehmern durchgeführte Evaluation ergab, dass sich viele Teilnehmer allerdings mehr Übungsaufgaben wünschen, sowie mehr Erklärungen zu Notationen und Formeln.

Im weiteren Projektverlauf soll genauer untersucht werden, welche Gründe bei den angehenden Studierenden bestehen, Lernhandlungen aufzunehmen, fortzuführen bzw. abzubrechen. Um die anfänglich recht hohe Motivation aufrecht zu erhalten, sollen verstärkt anwendungsbezogene Beispiele zum Einsatz kommen, die in Kooperation mit den Partnerunternehmen der DHBW Mannheim entwickelt werden. Über mathematische Anwendungen aus der täglichen Ingenieurspraxis soll die Motivation zur Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen erhöht werden und die Bedeutung der Mathematik für das angestrebte Studium unterstrichen werden.

Hinweis: Bei Interesse kann ein Zugang zum Portal eingerichtet werden, es genügt eine formlose E-Mail an: zemath@dhbw-mannheim.de

Literatur

Henn, Gudrun; Polaczek, Christa (2007). Studienerfolg in den Ingenieurwissenschaften. Das Hochschulwesen 55 (5), S. 144–147. http://www.fb6.fh-aachen.de/fileadmin/user_upload/Pdf/Presse/2007/0705xx_Studienerfolg.pdf [12.11.11]

Jordan, Sally (2007). The mathematical misconceptions of adult distance-learning science students. Physics Innovations Centre for Excellence in Teaching and Learning, Open University. http://www.open.ac.uk/cetl-workspace/cetlcontent/documents/

4738784f2e8a8.pdf [04.09.2010]

Opfermann, M., & Wirth, J. (2008). Self-regulated learning with multimedia. International Journal of Psychology, 43(2-3), S. 39

Martin DEXHEIMER, Landau

Strahlensätze im Mathematik-Labor – Ergebnisse einer Pilotstudie

Der außerschulische Lernort „Mathematik-Labor“ ist, wie viele andere Lernumgebungen auch, mit der Erwartung eines sich daraus ergebenden mathematikdidaktischen Mehrwerts verbunden (vgl. Vollrath, Roth 2012, 148-150). Durch die eigenständige Beschäftigung und den aktiv-experimentellen Umgang mit gegenständlichen Modellen sowie die Nutzung von Simulationen zur Erschließung mathematischer Sachverhalte soll eine positive Wirkung auf die Motivation von Schülerinnen und Schülern (im Folgenden Schüler genannt) für die Beschäftigung mit mathematischen Phänomenen und einen Kompetenzzuwachs beim mathematischen Argumentieren und Begründen erreicht werden. Ziel des Mathematik-Labors ist, dass Schüler wirklich „Mathematik treiben“ und nicht vorgegebene Schemata bzw. Algorithmen abarbeiten.

Doch lässt sich dieser mathematikdidaktische Mehrwert empirisch belegen? Dieser Frage wird seit dem Wintersemester 2011/12 im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ (www.mathe-labor.de) der Universität Koblenz-Landau am Campus Landau unter der Leitung von Jürgen Roth nachgegangen. Erste Ergebnisse einer Pilotstudie werden in diesem Beitrag vorgestellt.

1. Forschungsfragen

Die Untersuchungen, die im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ geplant sind, verfolgen im Wesentlichen sechs zentrale Forschungsfragen (vgl. auch: Appell, Roth, Weigand 2008)

1) Lassen sich durch die Beschäftigung der Schüler im Mathematik-Labor mathematische Inhalte „vermitteln“? Lässt sich ein mathematischer Wissenszuwachs bei den Schülern feststellen?
2) Werden die für die Mathematik unerlässlichen Kompetenzen des Argumentierens und mathematischen Begründens ausgebaut? Haben die Schülern wirklich „Mathematik betrieben“?
3) Die Schüler erleben die Mathematik beim Arbeiten im Mathematik-Labor als nützliches Werkzeug zum Lösen von Problemen in unserer Umwelt. Verändert sich dadurch die Wahrnehmung von bzw. die Einstellung zur Mathematik?
4) Kann durch den aktiv-experimentellen Umgang mit gegenständlichen Modellen ein Interesse für die Beschäftigung mit mathemati-

schen Phänomenen geweckt und damit die Motivation für eine Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten gesteigert werden?

5) Wie können Laborstationen als Lernumgebung optimiert werden, um den didaktischen Mehrwert möglichst zu maximieren?

6) Wie kann das Mathematik-Labor als außerschulischer Lernort sinnvoll und effektiv an den regulären Schulunterricht angebunden werden? Wie sollte eine ideale Schnittstelle zwischen Schule und Mathematik-Labor gestaltet sein?

Um diesen Fragen nachzugehen soll in Zukunft eine Reihe von Erhebungsinstrumenten genutzt werden, darunter ein Online-Vor- und -Nachtest für Schüler, die Untersuchung der Arbeit an den Laborstationen mit Hilfe von Videoaufzeichnungen, die Analyse der Laborprotokolle (Arbeitshefte) sowie Lehrerinterviews im Anschluss an die Laborerkundung.

2. Untersuchungsdesign der vorgestellten Pilotstudie

Im Rahmen einer ersten Pilotstudie wurde die Erkundung der Laborstation „Strahlensätze“ (vgl. Roth 2012a und Roth 2012b) mit einem Online-Vor- und -Nachtest evaluiert. Dabei lag der Fokus bei den Fragen der Optimierung (vgl. Forschungsfragen 5 und 6). Im Rahmen der Pilotstudie ging es auch um die Passung des konzipierten Untersuchungsdesigns im Hinblick auf die Beantwortung der Forschungsfragen.

Im Zeitraum Oktober 2011 bis Januar 2012 haben insgesamt vier neunte Klassen einer rheinland-pfälzischen Realschule sowie drei neunte Klassen eines rheinland-pfälzischen Gymnasiums am jeweils 20-minütigen Vor- und Nachtest teilgenommen.

Im Vortest wurde insbesondere das für die Laborstation nötige Vorwissen (Ähnlichkeit, zentrische Streckung, Verhältnisgleichungen) untersucht.

Während die vier Klassen der Realschule die Laborstation „Strahlensätze“ in drei aufeinanderfolgenden Wochen insgesamt sechs Unterrichtsstunden lang erkundete, wurden die drei Klassen des Gymnasiums als Kontrollklassen in gewohnter Weise in ihrer Klasse zum Thema Strahlensätze unterrichtet.

Im Anschluss daran wurden im Nachtest sowohl identische Items zum Vorwissen aus dem Vortest als auch Aufgaben zum neu behandelten Inhalt bearbeitet. Die Schüler der Realschule wurden außerdem dazu befragt, wie sie die Arbeit im Mathematik-Labor erlebt haben, was ihnen gut bzw. weniger gut gefallen hat sowie welche Verbesserungsvorschläge sie haben.

Die Auswertung der Items erfolgte dichotom, das heißt, nur wenn bei einer Multiple-Choice-Frage alle korrekten Auswahlmöglichkeiten und keine falsche ausgewählt wurde, wurde der Wert 1 vergeben, ansonsten 0. Aufgrund des Ergebnisses im Vortest (Mittelwert über die Auswertung der drei Item-Gruppen zum Vorwissen) wurden „mached samples“ gebildet, also Schülerpaare, die jeweils aus einem Schüler der Laborklasse und einem der Kontrollklasse bestehen, die das gleiche Vortest-Ergebnis aufweisen. Daraus konnte eine Laborgruppe und eine Kontrollgruppe gebildet werden, die aus je 53 Schülern bestehen. Durch das Matching sollten Störvariablen reduziert und parallelisierte Untersuchungsgruppen geschaffen werden.

3. Ergebnisse

Die Auswertung der Items zum Thema „Strahlensätze“ zeigte, dass die Kontrollgruppe mit einem Mittelwert von 0,53 trotz der Parallelisierung deutlich besser abschnitt als die Laborgruppe (Mittelwert: 0,29). Allerdings ist dieses Ergebnis mit deutlicher Vorsicht zu betrachten, da die Untersuchung von zwei bedeutenden Schwierigkeiten geprägt war:

- Die Klassen der Realschule wiesen enorme Lücken im Vorwissen auf, das unabdingbar für die erfolgreiche Bearbeitung der Laborstation war. Rund die Hälfte (48,6%) ihrer Schüler konnte keine einzige Frage zum Vorwissen korrekt beantworten, während sich die Leistungsverteilung bei den Kontrollklassen als relativ gleichmäßig erwies.
- Während in der Laborgruppe in den Unterrichtsstunden außerhalb des Labors keine Sicherungs- und Übungsphase stattfand, ist davon auszugehen, dass diese in den Kontrollklassen vorhanden waren. (Der Unterricht der Kontrollklassen wurde nicht erfasst.)

Sehr aufschlussreich war die Untersuchung insbesondere im Bereich der Optimierung der Laborstation und der Schnittstelle zwischen Unterricht und Mathematik-Labor (n=108):

- 48 der Schüler gaben an, dass sie die Gruppenarbeit als bereichernd empfanden, 43 fanden den Praxisanteil (Messung mit dem Jakobsstab) und 24 die Nutzung verschiedener Medien (insb. Simulationen) gut.
- Bei den Verbesserungsvorschlägen äußerten 20 Personen, dass sie mehr Unterstützung durch persönliche Ansprache sowie ein Feedback zu ihren Lösungen gut fänden, 9 wünschten sich eine frühere Einbindung von gegenständlichen Modellen in die Laborarbeit.

4. Fazit und Ausblick

In der Pilotstudie hat sich gezeigt, dass die Art der Leistungsmessung optimiert werden muss, um Aussagen zur Wirksamkeit der Laborstation treffen zu können. Unter anderem müsste der Vorwissenstest mehr Items aufweisen und der Nachtest insbesondere auch Aufgaben beinhalten, die mathematisches Argumentieren und Begründen erfordern. Außerdem sollten die Labor- und Kontrollgruppen möglichst von derselben Schule oder zumindest Schulform stammen.

Im Hinblick auf die Fragen der Optimierung war die Pilotstudie sehr aufschlussreich und gab damit bedeutsame Impulse für die zukünftige Entwicklung des Mathematik-Labors: Die Laborstationen sollten so gestaltet sein, dass sie den Schülerinnen und Schülern die nötige Unterstützung (etwa durch Checkups/Selbstlernkontrollen sowie kurze Zusammenfassungen) bieten als auch den möglichst frühzeitigen Umgang mit den Modellen ermöglichen. Auch die Schnittstelle zwischen Schulunterricht und Laborarbeit sollte dahingehend optimiert werden, dass auch bei den Laborgruppen Festigungs- und Übungsphase Einzug in den Unterricht finden und Lehrerinnen und Lehrern Unterstützung bei der Vor- und Nachbereitung des Laborbesuchs geboten wird.

Mit dieser Weiterentwicklung des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr" am Campus Landau wird ein wichtiger Schritt begangen, um dem mit ihm intendierten didaktischen Mehrwert ein bedeutendes Stück näher zu kommen.

Literatur

Appell, K.; Roth, J.; Weigand, H.-G. (2008): Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren − Konzeption eines Mathematik-Labors. In: Vásárhelyi, Eva (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Münster: WTM-Verlag, 25-28.

Roth, Jürgen (2012a): Ähnlichkeit verstehen – Den Jakobsstab nutzen. In: Mathematik lehren, Heft 173, August 2012. Verfügbar unter: http://www.dms.uni-landau.de/roth/veroeffentlichungen/2012/roth_aehnlichkeit_verstehen_jakobsstab_nutzen.pdf, 19.03.2012)

Roth, Jürgen (2012b): Geometrie selbstständig erarbeiten – Das Beispiel Strahlensätze. In: Kleine, M.; Ludwig, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM-Verlag.

Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. 2.Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Sebastian DIEHL, Saarbrücken

Normativer Modellierungskreislauf am Beispiel von verschiedenen Sparprodukten

In unserer heutigen Konsumgesellschaft spielt der Umgang mit Geld eine wichtige Rolle. Mediale, gesellschaftliche und private Einflüsse erfordern individuelle finanzielle Entscheidungen, die wegen der mangelnden finanziellen Bildung nie selten in Schulden enden. Maaß sieht den aktuellen Mathematikunterricht als Möglichkeit zur Beantwortung der allgemeinbildenden Frage: „Wie gehe ich verantwortungsvoll mit meinen Finanzen um?“ (Maaß 2007). In diesem Beitrag werden erste Beobachtungen und Ergebnisse einer empirischen Studie vorgestellt, wobei gebräuchliche finanzmathematische Sparprodukte mit Hilfe eines normativen Modellierungskreislaufs in den Klassenstufen 7 und 8 thematisiert wurden.

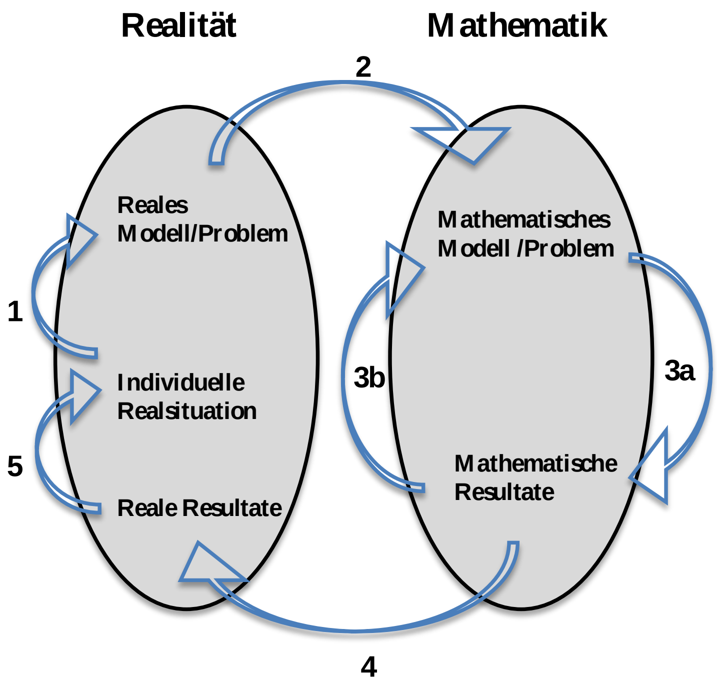
1. Zu heutigen Sparprodukten

In Deutschland sind das Tagesgeld- und das Festgeldkonto die gängigsten „nicht stochastischen[1]“ Sparprodukte, die durch ihre Merkmale[2] charakterisiert werden. Da viele Schüler ein Sparbuch besitzen, bietet sich die Chance, diese Sparmöglichkeit mit dem viel effizienterem Tagesgeldkonto im Unterricht zu vergleichen und zu beurteilen. Bei der mathematischen Bearbeitung[3] des Tagesgeldkontos genügt die Zinsformel $Z = K \times p\%$, die je nach Zinsperiode (vierteljährlich oder monatlich) noch mit einem Faktor $\left(\frac{1}{4} \text{ oder } \frac{1}{12}\right)$ ergänzt werden muss. Die Zinsen werden nach Ablauf einer Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen (Zinseszinseffekt; exponentielles Wachstum). Bei der mathematischen Bearbeitung des Festgeldkontos genügt die allgemeine Zinsformel $Z = K \times p\% \times t$. Die Zinsen werden erst nach Ablauf der Laufzeit (oder jährlich) ausgezahlt (lineares Wachstum). Im Unterricht ist es von großem Vorteil, die Sparmodelle des Tagesgeldkontos mit Hilfe des Tabellenkalkulationsprogramms Excel zu programmieren. Dadurch können u.a. größere Zeiträume betrachtet, die Verdopplungszeit bestimmt und das schnelle Wachstum visualisiert werden. Somit steht nicht nur das mathematische Kalkül, sondern auch die Interpretation der mathematischen Ergebnisse zur Realität im Vordergrund.

[1] Stochastische Sparprodukte wie z.B. Investmentfonds und Aktien.
[2] Charakteristische Merkmale sind u.a. Mindesteinlage, Zinsperiode, Kapitalisierung, Jahreszinssatz. Siehe auch www.tagesgeldvergleich.net.
[3] Eine genaue mathematische Bearbeitung findet man z.B. in Tietze, J. (2004): Einführung in die Finanzmathematik. Vieweg.

2. Normativer Modellierungskreislauf

Marxer (2009) unterscheidet deskriptive und normative Modelle (vgl. Blum 1996). Bei der deskriptiven Modellierung wird versucht die Realität mit bekannten mathematischen Werkzeugen möglichst genau abzubilden (z.B. klassische physikalische Modellbildung, Bakterienwachstum), wobei normative Modelle den Alltag bzw. das Leben eines Bürgers erst in einer bestimmten Weise gestalten. Beispiele für solche normativen Modelle sind u.a. Kreditprodukte, Sparprodukte, die Sitzverteilung bei Wahlen und Preisgestaltung. Befindet man sich in der Realsituation „ich will Geld anlegen“, so steht man vor einer großen Auswahl verschiedener Sparprodukte, die allesamt verglichen und beurteilt werden müssen, um das individuell beste Angebot zu selektieren. Marxer/Wittmann (2009, S. 13) verwenden für ihr normatives Modell den Modellierungskreislauf nach Blum (1996), der für viele deskriptive Modelle angewendet wird (siehe z.B. Maaß 2004, Daume 2009). Da es sich bei Finanzprodukte um normative Modelle handelt, die durch die Bank vorgegeben werden, eignet sich für die Umsetzung innerhalb des Unterrichts ein speziell dafür entwickelter normativer Modellierungskreislauf:



1	(finanzielle) Situation erfassen/ Fragen stellen
2	Sparmodelle suchen/ Kombinationen bilden
3a + 3b	Alle Sparmodelle/ Kombinationen mathematisch bearbeiten
4	Ergebnisse vorstellen
5	Die Entscheidung

Der Modellierungskreislauf beginnt mit einer **individuellen Realsituation** (z.B. „ich will Geld anlegen“). Im ersten Schritt **(1)** wird diese individuelle Situation finanziell erfasst, um konkrete Informationen über das Sparvorhaben zu erhalten. Dabei sind folgende Fragen möglich: Wie viel Geld kann ich anlegen? Wie lange kann ich mein Geld anlegen? Kann ich während der Laufzeit auf das Geld verzichten oder muss ich finanziell liquide sein? Auf der Basis der Antworten wird ein **reales Modell** erstellt. Nun werden **Sparmodelle (mathematische Modelle)** gesucht **(2)** die auf dieses reale Modell angewendet werden können. Nachdem ein Finanzprodukt gefunden wurde, wird mit ihm **gearbeitet (3a)**. Passen noch weitere Sparprodukte auf das reale Modell, so muss die mathematische Bearbeitung wiederholt werden **(3b)**, um weitere **mathematische Resultate** (mathematische Größen) zu erhalten, die dann unter Berücksichtigung der Merkmale der einzelnen Sparmodelle in **reale Resultate** bezogen auf die Realität **zurückübersetzt** werden. Bei der **Entscheidung** für ein Finanzprodukt wird überprüft, welches dieser Modelle individuell finanziell tragbar ist. Ist keins tragbar, so muss entweder die individuelle Realsituation verändert oder ein noch unbekanntes Sparprodukt gesucht werden. Somit beginnt der Kreislauf von vorne.

3. Beobachtungen und Ergebnisse einer empirischen Studie

Um die Realisierbarkeit der Unterrichtsreihe zu überprüfen, fand an zwei saarländischen Gesamtschulen eine Untersuchung statt. Beide Klassen (Klassenstufe 7 und 8) zeichnen sich dadurch aus, dass sie binnendifferenziert unterrichtet werden. In diesen leistungsheterogenen Gruppen befinden sich unter anderem auch Förderschüler mit Förderbedarf im Bereich Lernen. Insgesamt konnten in beiden Klassen **während** der Unterrichtsphase folgende **allgemeine Beobachtungen** gemacht werden:

- Fast alle Schüler haben interessiert und engagiert mitgearbeitet. Die Unterrichtseinheit hat sie motiviert.
- Die Arbeit am Computer wurde positiv angenommen und motivierte zusätzlich (insbesondere die leistungsschwächeren Schüler).
- Der reale Kontakt mit einer Bank machte die Mathematik alltagsbezogen und „handgreiflich“ und motivierte die Schüler zusätzlich.
- Die Schüler mit Förderbedarf im Bereich Lernen waren sichtlich überfordert. Sie haben allerdings motiviert mit den Sparmodellen am PC gearbeitet, um bei gegebenen Größen (Zinssatz, Laufzeit, Kapitalisierung) die Zinsen oder die Verdopplungszeit zu bestimmen.

Im Folgenden sind die Beobachtungen aufgezählt, die **während** der **Modellierungphase** gemacht wurden.

- Nach einer Einarbeitungsphase waren die Schüler in der Lage ähnliche Aufgaben nach dem Modellierungskreislauf zu bearbeiten.
- Ein Teil der Interpretation kam bei „Sparmodelle suchen“ vor, so dass sich die Schüler zu früh für genau ein Sparmodell entschieden haben ohne die anderen möglichen Modell zu beachten und zu bearbeiten.

- Ein Teil der Schüler konnte unbekannte Aufgaben autonom nach dem Modellierungskreislauf bearbeiten. Sie modellierten das reale Modell, indem Sparprodukte miteinander kombiniert wurden. Bei der mathematischen Bearbeitung von Modellkombinationen traten jedoch Fehler auf.

Allgemeine Ergebnisse der Unterrichtsreihe:

- Die Unterrichtsreihe lässt sich gut in den bestehenden Lehrplan integrieren, indem die „klassischen" Inhalte der Zinsrechnung ergänzt werden.
- Die Unterrichtsreihe bietet durch ihre Alltagsbezogenheit nicht nur die Möglichkeit für einen realitätsbezogenen und interessanten Mathematikunterricht, sondern fördert auch im Sinne von Reifner (2003) die finanzielle Allgemeinbildung.
- Durch die Verwendung von Computern wird die Medienkompetenz gefördert und dadurch die Motivation der Schüler gesteigert.
- Die in der Unterrichtsreihe verwendeten Modelle konnten unverändert von der Realität schülergerecht im Unterricht integriert werden. Es besteht die Möglichkeit die Unterrichtsreihe durch nicht stochastische Modelle (z.B. Bundeswertpapiere, Ratensparen) zu erweitern.

Die Unterrichtsreihe bietet unter anderem die Möglichkeit zur Binnendifferenzierung. So können z.B. leistungsstarke Schüler Sparpläne mit Hilfe von Excel programmieren, die dann von leistungsschwächeren Schülern als mathematisches Werkzeug genutzt werden. Ein Schwerpunkt liegt somit auf der Interpretation der mathematischen Ergebnisse zur Realität.

Literatur

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht. In: Trends und Perspektiven – Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik in Klagenfurt. Höldner-Pichler-Tempsky, S.195-232.

Daume, P. (2009): Finanzmathematik im Unterricht. Vieweg+Teubner Verlag.

Maaß, K. (2004): Mathematisches Modellieren im Mathematikunterricht: Ergebnisse einer empirischen Studie. Verlag Franzbecker.

Maaß, K. (2007): Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I. Cornelson Scriptor, Berlin, S.7.

Marxer, M., Wittmann, G. (2009): Normative Modellierung. In: Mathematik lehren 153.

Marxer, M. (2009): Normative Modelle. Mit Mathematik Realität(en) gestalten. Workshop ISTRON-Tagung 2009.

Reifner, U. (2003): Finanzielle Allgemeinbildung – Bildung als Mittel der Armutsprävention in der Kreditgesellschaft. Nomos Verlagsgesellschaft, S.24.

Hans M. DIETZ, Paderborn, Janna ROHDE, Paderborn

Studienmethodische Unterstützung für Erstsemester im Mathematikservice

In den Erstsemesterveranstaltungen zur „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ an der Universität Paderborn wird seit 2010 unter dem Logo „CAT“ ein neuartiges Konzept verfolgt, um die Entwicklung einer angemessenen Studien- und Arbeitsmethodik der Studierenden zu fördern. Parallel dazu wird die Wirksamkeit dieses Konzeptes in dem hochschuldidaktischen Forschungsprojekt „ECOStud“ analysiert. Unser Beitrag gibt einen Einblick in erste Erkenntnisse aus den laufenden Arbeiten.

1. Ausgangspunkt

Die genannten Veranstaltungen zählen zu den größten der Universität Paderborn. Bis zu 1500 VorlesungsteilnehmerInnen, die in bis zu 45 Kleingruppen-Übungen betreut werden, stellen das Lehrpersonal hinsichtlich Heterogenität ihrer Voraussetzungen und Fähigkeiten vor größte Herausforderungen. Häufig war zu beobachten, dass Studierende trotz deutlicher Anstrengungen und trotz eines umfangreichen Betreuungs- und Unterstützungsangebotes nur enttäuschende Studienleistungen erzielten. Als Ursache hierfür erwies sich immer wieder eine unangemessene Studien- und Arbeitsmethodik. Zur Überwindung dieser Situation wurde CAT konzipiert.

2. CAT

steht für eine möglichst durchgängige, explizite Thematisierung wesentlicher Elemente einer zielführenden Studien- und Arbeitsmethodik innerhalb der „regulären“ Lehre. Das Logo CAT erinnert dabei an „Checklisten, Ampel & Toolbox“, methodische Instrumente, die darauf zielen, wesentliche methodische Abläufe so zu prozeduralisieren, dass sie von allen Studierenden auch *ohne* besondere mathematische Befähigung beherrscht und automatisiert werden können. Aufgabe der *Checklisten* ist es dabei, die Studierenden nachdrücklich an regelmäßig wiederkehrende Abläufe zu erinnern. Die *Ampel* dient der Verständnis-Selbstkontrolle, während die *Toolbox* die Sammlung passender Werkzeuge zur Problemlösung unterstützt. Für die Memorisierung des Fachvokabulars spielt die Erstellung einer *Vokabelliste* eine entscheidende Rolle.

Diese Instrumente werden sowohl in speziellen Lehrmaterialien als auch an geeigneten Stellen der Vorlesungen ausführlich erläutert und beispielhaft in ihrer Wirkung vorgeführt. Im Idealfall sollen sie sich dann wie ein roter Faden durch alle Kleingruppenveranstaltungen (Übungen, Mentoring) ziehen. Da die notwendigen Erläuterungen umfangreich sind, streifen wir hier nur die „Checkliste `Begriffe'“. Ihre Funktion ist paradigmatisch, weil die Erarbeitung der notwendigen Begriffe fundamental für jeden Verständnisprozess ist. Diese Checkliste setzt bei der Wahrnehmung neuer Begriffe ein und endet idealerweise bei einem so weit entwickelten Begriffsverständnis, welches einen Kurzvortrag über den Begriff ermöglicht. Daher sieht sie die folgenden Arbeitsschritte vor: ©1 *erkennen*, ©2 *lesen*, ©3 *wiedergeben*, ©4 *beleben*, ©5 *illustrieren*, ©6 *vortragen* (je mit Ampel-Check).

Unter ©1 erhalten die Studierenden u.a. gezielte Hinweise darauf, woran man neue Begriffe erkennen kann, denn viele von ihnen sind ohne Unterstützung nicht in der Lage, neue Begriffe als solche zu erkennen. Besondere Schwierigkeiten treten dann auf, wenn aus der Umgangssprache entlehnte Wörter wie z.B „wachsend“ mit neuen fachlichen Begriffsinhalten belegt werden („wachsende Funktion“). Der Punkt ©2 „*lesen*“ ist sehr wesentlich, da die Erfahrung zeigt, dass Studierende bereits mit einfachsten Formulierungen in mathematischer Symbolsprache große Schwierigkeiten haben. Diese Schwierigkeiten wurzeln in der Unfähigkeit, einzelnen mathematischen Zeichen, Symbolen oder auch Wörtern ihre (wohlbekannte) adäquate Bedeutung zuzuordnen. Als Hilfestellung schlägt ©1 eine Lesetechnik vor, die es erlaubt, neue Begriffe zunächst einmal gemäß dem Slogan „Zeichen für Zeichen, Wort für Wort“ „vorzulesen“. Die Aufgabe besteht darin, die Bedeutung bzw. Rolle jedes Zeichens, Wortes - oder ggf. Gruppen davon - zu klären, wobei diese Bedeutung aus der Vokabelliste oder auch aus einem wohlumrissenen Kontext importiert wird. In ähnlicher Weise wird die Erarbeitung des eigentlichen Begriffsinhaltes in den nächsten Schritten der Checkliste bewerkstelligt.

3. Das ECOStud-Projekt

wurde ins Leben gerufen, um die Wirksamkeit gezielten methodischen Trainings zu analysieren, Verständnishemmnisse besser zu verstehen, CAT weiterzuentwickeln sowie auch die Akzeptanz unseres Methodenkonzeptes zu verbessern. Dazu wurde erstmals im WS 2010/11 eine Projektgruppe aus 29 Studierenden und beiden Autoren gebildet. Da alle Studierenden des Jahrgangs die Möglichkeit hatten, sich zur freiwilligen Teilnahme an ECOStud zu bewerben, entschied letztendlich das Los.

Die Arbeit der Projektgruppe wurde in einem zeitlichen Wechsel aus Analyse- und Trainingsphasen organisiert. In den Analysephasen (zu Beginn und Ende des Semesters) führte J. Rohde Einzel-Interviews mit allen ProjektteilnehmerInnen, während die Trainingsphasen als zweistündige wöchentliche Gruppentrainings unter Leitung der Autoren stattfanden.

Bei den Einzel-Interviews handelte es sich um komplexe Kombinationen aus Beobachtungen und retrospektiven klinischen Interviews (vgl. Piaget zit. nach Opper, 1977). Im Sinne eines zeitlichen Längsschnittes sollten sie qualitative Antworten auf folgende Hauptfragen liefern: Wie arbeitet der/die Studierende methodisch? Welche kognitiven Prozesse sind für das Selbststudium charakteristisch? Insbesondere war von Interesse, wie neue bzw. bekannte Begriffe verarbeitet und zur Problemlösung herangezogen werden; ferner, welche Fehler dabei auftreten.

Zur Klärung dieser Fragen wurden für die Interviews komplexe Szenarien erarbeitet. Zunächst wurde angenommen, der/die Studierende befinde sich in der Phase zwischen dem Ende der wöchentlichen Vorlesungen und dem Beginn der darauf folgenden Präsenzübungen, in der normalerweise die Vorlesungsnacharbeit sowie die Vorbereitung der Präsenzübung zu absolvieren ist. Hierfür standen den Studierenden sämtliche Vorlesungsmitschriften, das kursbegleitende Lehrbuch sowie Tafelfotos aller Vorlesungen zur Verfügung. Weiterhin erhielten sie aufeinanderfolgend bis zu sechs Übungsaufgaben zur Bearbeitung. Die Interviewerin beobachtete nun die Arbeitsweise und die verwendete Methodik und stand zugleich auch als Dozentin bzw. Mentorin für Rückfragen zur „Vorlesung“ bzw. „Übung“ zur Verfügung („universal agent“). Das anschließende retrospektive klinische Interview begann jeweils mit einer Ergebnispräsentation der StudentIn und mündete in ein Gespräch über die Lösung bzw. die Lösungsprozesse.

Die Gruppentrainings widmeten sich typischerweise der Bearbeitung eines Arbeitsblattes, bestehend aus einem Mini-Vorlesungsskript, in dem meist ein oder zwei neue Begriffe eingeführt wurden, gefolgt von Bemerkungen, Beispielen oder auch Aufgaben. Aufgabe der Betreuer war es hierbei, zunächst die unbefangene Arbeitsweise der Studierenden zu beobachten und anschließend im Sinne gezielter Methodennutzung trainierend zu intervenieren.

4. Zwischenbilanz der Pilotphase 2010/11

Die Pilotphase des ECOStud-Projektes erbrachte einerseits deutliche Hinweise darauf, dass durch gezieltes Training Fortschritte in der Methodenbeherrschung und -anwendung sowie (als These) dadurch ein besseres fachliches Verständnis erreicht werden können. Weiterhin wurden sinkende Fehlerraten, ein besseres Studienklima im gesamten Jahrgang und ein gutes Feedback der Studierenden verzeichnet. In der Abschlussklausur erzielten die ECOStud-Teilnehmer durchschnittlich 28,61 Punkte gegenüber einem Durchschnitt von 20,6 Punkten von allen Klausurteilnehmern sowie einem Durchschnitt von 21,97 Punkten in der Vergleichsgruppe der im Losverfahren abgelehnten ECOStud-Bewerberinnen. *Negativ* war jedoch anzumerken, dass viele Studierende CAT als sehr zeitaufwendig einschätzten, in der Anwendung von CAT inkonsequent blieben sowie immer wieder in alte Arbeitsmuster flüchteten. Die Breitenakzeptanz des Methodenkonzeptes konnte noch nicht befriedigen.

Inhaltlich hat sich die mathematische Lesestrategie als absolut zentrales Element erwiesen, da bei vielen Studierenden eine grundlegende fachsprachliche Leseschwäche zu konstatieren ist. Oft ist diese mit einem gravierenden logischen Unverständnis gepaart, ebenso mit der Neigung, in unscharfen Begriffen zu arbeiten (vgl. Tall & Vinner 1981). Als besonders problematisch erwiesen sich die geringe Fähigkeit und Bereitschaft der Studierenden, einmal bearbeiteten Stoff im Gedächtnis verfügbar zu halten.

5. Aktuelle Projekte und Ausblick

Als Konsequenz dieser Situation wurde im laufenden Studienjahr eine noch weiterreichende Integration von CAT in die Lehre angestrebt. ECOStud wurde mit verfeinerten Frage- und Aufgabenstellungen und einer neu gebildeten Projektgruppe fortgesetzt. Zusätzlich wurde eine quantitative Erhebung zur Akzeptanz und Nutzung von CAT in der gesamten Hörerschaft durchgeführt. Darüber hinaus ist die Auswertung umfangreicher Daten aus studentischen Veranstaltungskritiken, Klausurergebnissen, Online-Befragungen etc. geplant. Aufgrund einer stichprobenartigen Analyse zeichnen sich jedoch folgende Tendenzen ab:

Erstens wird CAT zwar von einem Teil der Studierenden gut angenommen und als effektiv empfunden; viele Studierende stehen CAT jedoch neutral bis ablehnend gegenüber, und zwar hauptsächlich wegen des von ihnen als zu hoch empfundenen Aufwandes. Zweitens sind trotz beobachtbarer Fortschritte bei einzelnen methodischen Schritten (z.B. beim Lesen) immer noch große inhaltliche Verständnisschwierigkeiten zu verzeichnen, durchgängige Leistungsverbesserungen noch nicht sichtbar. Das ist teils auf weiterhin bestehende Mängel in der Arbeitstechnik (hartnäckige Lesefehler, mangelnde Persistenz des Vokabulars) zurückzuführen. Diese Mängel durch noch wirksamere Vermittlung von CAT und stärkere Integration in den Übungsbetrieb zu überwinden sehen wir als künftige Aufgabe an.

Literatur

Opper, Sylvia (1977): Piaget's clinical method. In: The Journal of children`s Mathematical Behavior 1, 90-107

Tall, David & Vinner, Shlomo (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.

Anika DREHER, Ludwigsburg

Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Nutzen vielfältiger Darstellungen im Mathematikunterricht

Im Mathematikunterricht spielen vielfältige Darstellungen häufig eine zentrale Rolle für den Erkenntnisgewinn. Diese Untersuchung fokussiert daher auf Sichtweisen und Kompetenzen von Lehramtsstudierenden, die anhand selbstgewählter Beispiele erläutern, worin der Mehrwert vielfältiger mathematischer Darstellungen besteht. Die Antworten geben Aufschluss über wahrgenommene Gründe und die Kompetenz der Studierenden, diese übergreifenden Sichtweisen durch konkrete Beispiele zu stützen.

Theoretischer Hintergrund

Darstellungen spielen in der Mathematik eine besondere Rolle: Da mathematische Objekte nicht direkt zugänglich sind, bleibt sowohl Experten als auch Lernenden nichts anderes übrig als Repräsentationen bzw. Darstellungen für sie zu verwenden, um sich mit ihnen zu befassen (Duval, 2006). Die Begriffe „Darstellung" und „Repräsentation" werden hier synonym verwendet und seien verstanden als „etwas, das für etwas anderes steht" (Goldin & Shteingold, 2001). Da eine einzelne Darstellung immer nur einen Teil der Eigenschaften des dahinterstehenden mathematischen Objekts direkt sichtbar machen kann, werden in der Regel mehrere Repräsentationen benötigt, die sich gegenseitig ergänzen, um ein möglichst vollständiges Bild zu erhalten und ein tragfähiges Verständnis zu entwickeln (Gagatsis & Shiakalli, 2004). Repräsentationen bieten also wichtige Zugänge zu mathematischen Objekten und sind dabei Werkzeuge für mathematisches Denken und Kommunizieren. Dieses Wesensmerkmal der Mathematik als Disziplin bringt eine Reihe möglicher Probleme für Lernende mit sich. Besonders das Wechseln von einer Darstellungsform in eine andere stellt häufig eine Verständnishürde dar. Gleichzeitig haben aber schon einige Studien gezeigt, dass die Fähigkeit, ein mathematisches Objekt hinter seinen unterschiedlichen Repräsentationen zu erkennen und flexibel mit ihnen umgehen zu können, ein Schlüssel für erfolgreiches mathematisches Denken und Problemlösen ist (z.B. Lesh, Post, & Behr, 1987; Gagatsis, & Shiakalli, 2004). Die konsequente Folgerung, dass das Fördern von Kompetenzen im Umgang mit vielfältigen Darstellungen eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht einnehmen sollte, wird auch in den KMK-Bildungsstandards zum Ausdruck gebracht (KMK, 2003).

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, über welches Wissen und über welche Vorstellungen Lehrkräfte bezüglich dieser speziellen Rolle von Repräsentationen in der Mathematik und im Mathematikunterricht verfügen. Um diesbezüglich erste Anhaltspunkte zu erhalten, wird in dieser Untersuchung der Frage nachgegangen, welche Gründe für den Einsatz vielfältiger Darstellungen von Lehramtsstudierenden wahrgenommen werden und wie gut es ihnen gelingt, ihre globalen Sichtweisen anhand konkreter Beispiele zu stützen.

Stichprobe und Methode

Es wurden Lösungen von Lehramtsstudierenden (hauptsächlich für die Grundschule und im Mittel im 2. Semester) im Rahmen einer Klausur zu einer Einführungsveranstaltung in einer Bottom-up-Analyse qualitativ untersucht, die sich auf die folgende Aufgabe bezogen:

> „Erläutern Sie anhand von zwei Beispielen aus unterschiedlichen mathematischen Inhaltsbereichen, worin der Mehrwert des Nutzens vielfältiger Darstellungen besteht. Geben Sie dabei mindestens zwei jeweils deutlich voneinander verschiedene Darstellungen des gleichen Begriffs oder Sachverhalts an.“

Es ist zu beachten, dass in der vorangegangenen Vorlesung das Nutzen vielfältiger Darstellungen als inhaltsübergreifende Idee thematisiert worden war, weshalb davon auszugehen ist, dass bereits eine gewisse Auseinandersetzung mit der Thematik stattgefunden hat und der Wissensaufbau der Studierenden u.a. durch die in der Vorlesung und im Skript gegebenen Gründe für das Nutzen vielfältiger Darstellungen im Mathematikunterricht beeinflusst worden ist. Insofern zeigen die Befunde eine Momentaufnahme im voranschreitenden Prozess des Aufbaus professionellen Wissens.

Ausgewählte Ergebnisse

Entsprechend der Forschungsfrage wurde zunächst analysiert, welche Gründe für das Nutzen vielfältiger Darstellungen im Mathematikunterricht von den Studierenden genannt wurden. Anschließend wurde jeweils untersucht, ob die selbstgewählten Beispiele diese Gründe widerspiegeln und ob die Verknüpfung der Gründe mit der Beispielebene geleistet wurde. Hinsichtlich der Frage nach den Gründen, die genannt wurden, lässt sich beobachten, dass sich die überwiegende Mehrheit der Studierenden darauf beschränkt hat, die im Vorlesungsskript genannten Gründe für das Nutzen vielfältiger Darstellungen im Mathematikunterricht zumindest teilweise wiederzugeben. Vor dem Hintergrund der Forschungsfrage ist es jedoch besonders interessant, diejenigen Gründe in den Blick zu nehmen, die nicht in der Vorlesung thematisiert wurden. Unter diesen Gründen waren auffallend häufig Argumentationen zu finden, die auf das Potenzial vielfältiger Darstellungen abzielten, individuelle Lerntypen bzw. Eingangskanäle zu berücksichtigen. Als typisch für diese Art von Argumentation kann die folgende Aussage gesehen werden: „Man sollte möglichst vielfältige Darstellungen nutzen, damit jeder Schüler auf irgendeine Art und Weise den Inhalt versteht. Denn wie man weiß, lernen manche Schüler eher durch das Hören, andere wiederum durch das Sehen.“. In Einzelfällen wurden außerdem die Unterstützung des Einprägens mathematischer Sachverhalte bzw. ein weniger langweiliger Unterricht als Gründe angeführt.

Im Analyseprozess zur zweiten Forschungsfrage wurde besonders deutlich, dass es den Studierenden in den meisten Fällen nicht gelungen ist, ihre genannten Gründe für das Nutzen vielfältiger Darstellungen im Mathematikunterricht an einem selbstgewählten Beispiel zu verdeutlichen. Dies gilt sowohl für diejenigen Studierenden, die in der Vorlesung thematisierte Gründe wiedergegeben haben, als auch für jene, die individuelle Unterschiede der Lernenden als Begründung anführten. Für beide Fälle zeigt

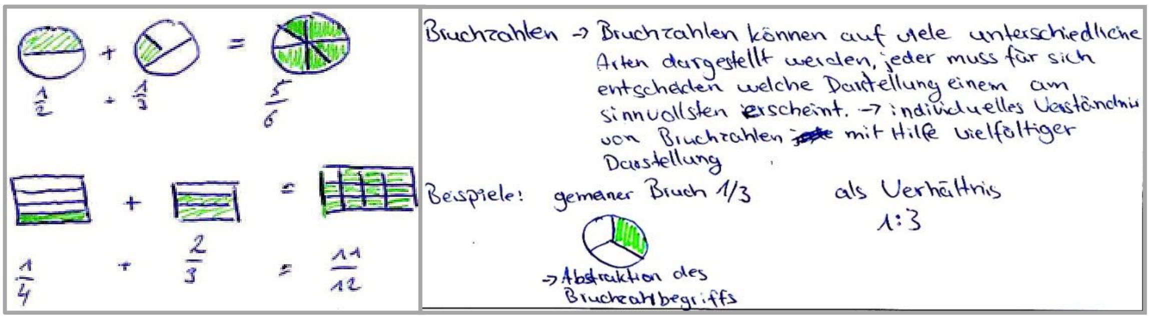


Abbildung 1: Lösungen von Studierenden

Abbildung 1 je ein Beispiel, das diese Beobachtung illustriert. Das Beispiel links wurde von einer Studentin angeführt, um den folgenden Mehrwert vielfältiger Darstellungen zu demonstrieren: „Man kann mathematische Probleme unterschiedlich präsentieren. Man erhält verschiedene Zugänge und kann so ein Problem eventuell besser lösen. Erkennt die Zusammenhänge besser. Man versteht die Aufgaben besser, wenn sie nicht nur formal, sondern auch bildlich dargestellt werden können.“. Insbesondere zum letztgenannten Aspekt steht das abbildete Beispiel jedoch offenbar in einem Widerspruch. Die Antwort rechts in der Abbildung steht beispielhaft für den Fall, dass der Versuch den Mehrwert „Berücksichtigung individueller Unterschiede von Lernenden“ an einem konkreten Inhaltsbereich zu verdeutlichen scheitert, da dieser stattdessen vielmehr zeigt, dass eine einzelne individuell bevorzugte Repräsentation - losgelöst von den jeweils anderen - dem dahinterstehenden mathematischen Objekt nicht gerecht werden kann.

Weiterhin war zu beobachten, dass selbst in denjenigen Fällen, in denen es gelang, ein adäquates Beispiel zu geben, in der Regel die argumentative Verknüpfung der global gesehenen Gründe mit dem gewählten konkreten Bespiel fehlte.

Diskussion

In den untersuchten Antworten zeigt sich, dass es vielen Studierenden schwer fiel, anhand eines konkreten Beispiels den Mehrwert vielfältiger Darstellungen aufzuzeigen. Das heißt, der Übertrag vom allgemeinen Kontext, in dem diese Gründe in der Regel angesiedelt werden, auf einen konkreten Inhaltsbereich gelang meist nur unzureichend. Dies kann als Zeichen dafür gedeutet werden, dass es sich bei den angegebenen Gründen auf globaler Ebene - die häufig dem Vorlesungsskript entnommen waren - eher um ein oberflächliches Wissen handelt. Aufgrund der Tatsache, dass die analysierten Antworten in einer Prüfungssituation gegeben wurden, sollten diese Ergebnisse allerdings mit Vorsicht interpretiert werden. Hinsichtlich der von den Studierenden wahrgenommen Gründe stellt sich die Frage, ob ohne die Beeinflussung durch die Vorlesung möglicherweise solche Gründe, die nicht spezifisch für die Mathematik sind, wie z.B. die Unterstützung des Einprägens, der abwechslungsreichere Unterricht oder die Berücksichtigung unterschiedlicher Lerntypen und Eingangskanäle, stärker im Vordergrund gestanden hätten. Erste Ergebnisse einer derzeit durchgeführten Studie mit angehenden und praktizierenden Lehrkräften bekräftigen diese Vermutung (Dreher, Kuntze & Lerman, eingereicht). Die Ergebnisse dieser Untersuchung werfen daher eine Reihe von Anschlussfragen auf, wie beispielsweise, wie Wissenskomponenten und Sichtweisen zu Gründen zusammenhängen und über welches Wissen und welche Vorstellungen zum Umgang mit vielfältigen Darstellungen praktizierende Lehrkräfte verfügen.

Literatur

Dreher, A., Kuntze, S. & Lerman, S. (eingereicht). Pre-service teachers‘ views on using multiple representations in mathematics classrooms – an inter-cultural study. PME.

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61, 103-131.

Gagatsis, A., &Shiakalli, M. (2004). Translation ability from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. Educational Psychology, 24(5), 645-657.

Goldin, G., &Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco& F. R. Curcio (Eds.), The role of representation in school mathematics (pp. 1-23). Boston, Virginia: NCTM.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. [http://www.kmk.org/].

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving.In C.Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33–40). Hillsdale: L. Erlbaum.

Christina DRÜKE-NOE, Kassel

Basiskompetenzen – Was sollte jeder am Ende der allgemeinen Schulpflicht in Mathematik können?

Zunächst wird kurz dargelegt, was zur Gründung einer Arbeitsgruppe[1] führte, die aus empirischer *und* normativer Perspektive Basiskompetenzen definierte. Das Vorgehen bei der Erarbeitung, sowie Konzeption, einige exemplarische Basiskompetenzen und einzelne illustrierende Aufgaben werden vorgestellt. Abschließend werden ausgewählte offene Fragen benannt und weiterer Handlungsbedarf wird aufgezeigt.

1. Ausgangssituation und Vorgehensweise

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildeten die umfassende empirische Befundlage über leistungsschwache Schülerinnen und Schüler (vgl. Überblick u. a. in Klieme et al., 2003; Klieme et al., 2010) sowie die im Kompetenzstufenmodell für den Mittleren Schulabschluss (2008) rein empirisch definierten Mindeststandards. Diese über das Erreichen der in Kompetenzstufe 1 beschriebenen Fähigkeiten festzulegen, erschien der Arbeitsgruppe nicht ausschöpfend, um diejenigen Anforderungen zu beschreiben, die alle Schülerinnen und Schüler bewältigen können sollten. Aus einer normativen Perspektive fehlten in diesem Aufgabenpool inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen, die zu einem adäquaten Mathematikbild gehören bzw. Anforderungen an Schule, Ausbildung und Gesellschaft hinreichend beschreiben. Zudem erschienen nicht alle der durch empirisch einfache Aufgaben abgebildeten Anforderungen aus normativer Sicht notwendig.

Ziel der Arbeitsgruppe war es daher, Basiskompetenzen zu beschreiben, die das rein empirische Konstrukt der Mindeststandards weiter konkretisieren, aus normativer Sicht bestehende Lücken beheben und dabei inhalts- mit prozessbezogene Kompetenzen stärker verzahnen. Basiskompetenzen sind damit nicht allein auf Rechenfertigkeiten bzw. auf die Arithmetik beschränkt.

Absichtlich wurde ein zwar fachbezogener, jedoch später auf andere Fächer erweiterbarer Ansatz und zudem der Begriff „Basiskompetenzen“ anstelle von „Mindeststandards“ gewählt, um den eigenen normativ-empirischen Ansatz bewusst gegenüber einem rein empirischen abzugrenzen.

Ein weiteres Anliegen war es, die Überlegungen nicht nur im Kreise der Fachdidaktik zu diskutieren. In einer dreijährigen Arbeitsphase wurde die

[1] Zu dieser Arbeitsgruppe gehören Christina Drüke-Noe, Gerd Müller, Andreas Pallack, Siegbert Schmidt, Ursula Schmidt, Norbert Sommer und Alexander Wynands.

zugrunde gelegte Arbeitsdefinition für Basiskompetenzen, zusammen mit den zugehörigen Kompetenzbeschreibungen und den illustrierenden Aufgaben, wiederholt in Arbeitskreisen der GDM sowie mit Vertretern der Wirtschaft diskutiert. Die Ergebnisse einer umfassenden Onlinebefragung bei Vertretern aus Fachdidaktik und Schule sowie bei für die Ausbildung Verantwortlichen der Industrie- und Handelskammern (IHK, DIHK) zeigten sehr weitgehende Zustimmung und mündeten in eine abschließende Überarbeitung der Basiskompetenzen sowie der illustrierenden Aufgaben und auch der Definition von Basiskompetenzen, die auf Schulform- und Abschlussbezug verzichtet, und nun lautet:

„Als Basiskompetenzen in Mathematik bezeichnen wir die mathematischen Kompetenzen, über die ***alle*** *Schülerinnen und Schüler* ***aller*** *Bildungsgänge am Ende der Pflichtschulzeit mindestens und dauerhaft verfügen müssen. Sie sind Voraussetzung für eine eigenständige Bewältigung von Alltagssituationen und die aktive Teilhabe als mündige Bürgerinnen und Bürger am gesellschaftlichen und kulturellen Leben. Sie sind ebenso Voraussetzung für einen Erfolg versprechenden Beginn einer Berufsausbildung und die Ausübung beruflicher Tätigkeiten.*

Wer nicht über die Basiskompetenzen verfügt, wird vermutlich nicht hinreichend in der Lage sein, in jenen Situationen ohne Hilfe zurechtzukommen. Diese Schülerinnen und Schüler müssen rechtzeitig besonders intensiv gefördert werden.“ (Drüke-Noe et al., 2011, S. 8)

2. Basiskompetenzen – Struktur und Beispiele

Um mit dem gewählten Ansatz an das empirische Konstrukt der Mindeststandards, welches über das Kompetenzstufenmodell definiert und ebenfalls über Leitideen strukturiert ist, anschlussfähig zu sein, wurden die wie vorstehend definierten Basiskompetenzen entlang der fünf in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik formulierten Leitideen *Zahl*, *Messen*, *Raum und Form*, *Funktionaler Zusammenhang* sowie *Daten und Zufall* ausgearbeitet. Innerhalb jeder Leitidee wurden wesentliche Bereiche ausgewiesen, in denen Basiskompetenzen eine Rolle spielen, die dann weiter durch die Beschreibung von Kompetenzerwartungen konkretisiert und mittels Aufgaben illustriert wurden. Dies wird im Folgenden exemplarisch für die zwei Leitideen *Zahl* und *Daten und Zufall* aufgezeigt.

Wesentliche Bereiche innerhalb der Leitidee *Zahl* sind Größenvorstellungen und der Vergleich von Zahlen, Rechenoperationen sowie das Umgehen mit Sachsituationen. Einige der Basiskompetenzen im letztgenannten Bereich sind:

- „einfache Sachsituationen mit Zahltermen beschreiben,

- Rechenergebnisse zu einfachen Sachsituationen ermitteln, interpretieren und auf Sachangemessenheit hin überprüfen (validieren),
- Brüche in Sachsituationen deuten (z. B. als relative Häufigkeiten),
- Grundaufgaben zur Prozent- und Zinsrechnung lösen." (ebd., S. 11)

Bekanntlich gelingt das rein technische Lösen einer Aufgabe oft noch, bei der Angabe eines „Ergebnisses" gerät der eigentliche Sachkontext dann jedoch häufig außer Acht. Dies zeigt die folgende Aufgabe, die exemplarisch die Basiskompetenz, Rechenergebnisse auf Sachangemessenheit hin zu überprüfen, illustriert:

„Ein Verein mit 36 Mitgliedern will einen Ausflug machen und mit Kleinbussen fahren. In einen Kleinbus passen acht Fahrgäste. Martin rechnet 36:8 und ermittelt 4,5 Busse. Was meinst du zu diesem Ergebnis?" (ebd., S. 15).

Als zweites wird hier die Leitidee *Daten und Zufall* vorgestellt, die besonders gut das Spannungsfeld zwischen empirischer und normativer Sichtweise bei der Formulierung von Basiskompetenzen deutlich macht. Während einerseits das Erheben von Daten und deren Analyse eine wichtige und gesellschaftlich relevante Argumentationsbasis bildet und ein sicherer Umgang mit Wahrscheinlichkeiten besser dazu befähigt, Chancen und Risiken unter Unsicherheit abzuschätzen, ist diese Leitidee im Unterricht noch nicht so umfassend verankert ist wie die übrigen. Daher haben entsprechende Aufgaben in Leistungstests vielfach nur geringe Lösungsquoten und werden auf höheren Kompetenzstufen verortet. Als wesentliche Bereiche innerhalb der Leitidee *Daten und Zufall* formulierte die Arbeitsgruppe das Ordnen und Darstellen von Daten, das Reduzieren von Daten, die Interpretation und Bewertung der Ergebnisse einer Datenanalyse und schließlich das Erkennen und Beschreiben zufälliger Phänomene.

Die nächste Aufgabe illustriert die beiden Basiskompetenzen „einen Datensatz nach einem gegebenen Merkmal in Klassen einteilen (…)" und „das arithmetische Mittel und den Median (…) bestimmen" (ebd., S. 32). Sie zeigt, dass die Einteilung eines Datensatzes mitnichten auf festen Regeln beruht, und dass die „Mitte" eines Datensatzes je nach Intention des Auswertenden unterschiedliche Deutungen und Argumentationen zulässt:

„Frau Schulte fährt mit dem Zug zur Arbeit. Sie hat sich einen Monat lang aufgeschrieben, wie viel Minuten Verspätung der Zug auf der Hinfahrt hatte: 10, 2, 0, 15, 1, 3, 0, 5, 1, 25, 4, 0, 3, 0, 1, 8, 5, 1, 2, 0, 11, 1, 7.

a) Teile diese Daten ein in: pünktlich, fast pünktlich, verspätet, stark verspätet.

b) Gib für die Verspätungen den Median und das arithmetische Mittel an. (…) Welcher Wert ist für Frau Schulte vermutlich interessanter? Begründe deine Meinung.“ (ebd., S. 34f)

4. Offene Fragen und Ausblick

Von zahlreichen Fragen, die auch nach Abschluss des Erarbeitungsprozesses der Basiskompetenzen am Ende der Pflichtschulzeit noch offen blieben, seien hier ausgewählte benannt. So ist empirisch noch ungeklärt, ob die so formulierten Basiskompetenzen tatsächlich das beschreiben, was Schülerinnen und Schüler zumindest aus der Sicht des Faches Mathematik benötigen, um gemäß der dargelegten Definition zurechtzukommen und ob sie ohne diese Basiskompetenzen tatsächlich nicht hinreichend in der Lage sind, in den beschriebenen Situationen ohne Hilfe zurechtzukommen. Offen blieb auch die Frage, ob Basiskompetenzen ggfs. noch stärker prozessbezogen zu formulieren sind.

In jedem Falle darf eine Diskussion um Basiskompetenzen und Mindeststandards nicht bei definitorischen Fragen stehenbleiben, sondern muss durch Diagnosehilfen und ein Differenzierungsmodell ergänzt werden, das aufzeigt, wie im Unterricht mit besonders förderungsbedürftigen Schülerinnen und Schüler umzugehen ist, und wie ein Unterricht gestaltet werden kann, der konkrete Förderaktivitäten umsetzt und eine Verbesserung der Unterrichtssituation der betroffenen Schülerinnen und Schüler bietet, mit Aktivitäten, die insbesondere dann einsetzen, wenn das Ziel der Erreichung der Basiskompetenzen im Regelunterricht gefährdet erscheint. Da ein Umgehen mit diesen Desiderata umfassende Aktivitäten erfordert, richten sich die so formulierten Basiskompetenzen an alle an der Bildung und Ausbildung Beteiligten, d. h. an Lehrkräfte, Schülerinnen und Schüler, Eltern, Ausbildende und nicht zuletzt an politisch Verantwortliche.

Literatur

Drüke-Noe, C., Möller, G., Pallack, A., Schmidt, S., Schmidt, U., Sommer, N., & Wynands, A. (2011). Basiskompetenzen Mathematik für den Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht. Berlin: Cornelsen Verlag.

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., et al. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards - Eine Expertise. Berlin: BMBF Referat Publikationen.

Klieme, E., Artelt, C., Hartig, J., Jude, N., Köller, O., Prenzel, M., et al. (Hrsg.). (2010). PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt. Münster: Waxmann.

Kultusministerkonferenz. (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Darmstadt: Luchterhand.

Kultusministerkonferenz. (2008). Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.

Christina DRÜKE-NOE, Kassel

Wer Kalküle kann, schafft eine Klassenarbeit. Stimmt das?

Nach einem kurzen Literaturüberblick über das Thema Kalküle wird dargelegt, wie diese hier mithilfe der mathematischen Tätigkeit *Technisches Arbeiten* untersucht werden. Anschließend wird die Rolle von Kalkülen anhand der Klassenarbeitsaufgaben aus dem COACTIV-Projekt untersucht.

1. Kalküle – Ein kurzer Literaturüberblick

Das Thema Kalküle wird in der Literatur vorwiegend aus zwei Perspektiven diskutiert. Eine erste ist eine kognitionstheoretische Perspektive. So leistet u. a. die Anzahl erforderlicher Zwischenrechnungen einen Beitrag zur Erklärung von Aufgabenschwierigkeiten (vgl. Neubrand et al., 2002); zudem steigt die kognitive Komplexität von Aufgaben mit einer zunehmenden Anzahl von Denkvorgängen, zu denen auch das Umgehen mit Kalkülen gehört (vgl. Sjuts, 2003). Wichtiger noch ist die zweite Perspektive, nämlich jene vielfach zu lesende Behauptung, Aufgaben im Mathematikunterricht seien kalkülgeprägt. Dies stellen u. a. Bromme et al. (1990) sowie Henn & Kaiser (2001) fest, aber auch Schupp (2002), der schreibt, besonders in der Algebra sei die Aufgabenkultur „logisch-kalkülhaft". Ein empirischer Beleg findet sich bei Kunter & Baumert (2011), die die im COACTIV-Projekt untersuchten Unterrichtsaufgaben als „kognitiv eher anregungsarm" bezeichnen. Auch von Klassenarbeitsaufgaben stellen viele fest, diese seien kalkülorientiert. So beklagt etwa Althoff (2001) den besonders hohen Anteil formaler Berechnungsaufgaben, Bruder & Weigand (2001) fehlen Anwendungs- und Begründungsaufgaben, Leuders (2004) kritisiert die große Zahl geschlossener Aufgaben, die primär mechanisch lernbare Kenntnisse und Fertigkeiten erfordern.

Es sei hier lediglich angemerkt, dass Kalküle durchaus ihre berechtigte Funktion haben (vgl. Sjuts, 2007; Hefendehl-Hebeker, 2004).

Die meisten Autoren lassen nicht immer genau erkennen, was sie unter Kalkülen verstehen bzw. geben – Kunter & Baumert bilden eine Ausnahme – meist keine empirischen Belege für eine festgestellte Kalkülorientierung. Hier setzt der vorliegende Artikel an. Im Folgenden wird ausgeführt, was unter Kalkülen verstanden und wie deren Vorkommen untersucht wird.

2. Kalküle und die mathematische Tätigkeit Technisches Arbeiten

Im COACTIV-Projekt umfasst der kognitive Blick auf Aufgaben u. a. das Stoffgebiet, die Aufgabenklasse und die vier Tätigkeiten *Inner-* und *Außermathematisches Modellieren*, *Argumentieren* und *Gebrauch mathemati-*

scher Darstellungen (auf je vier Niveaus mit 0: nicht, 1: niedrig, 2: mittel, 3: hoch). Dem Bearbeitungsprozess von Modellierungsaufgaben (in einem weiten Sinne gemeint) liegt in COACTIV ein vierschrittiges Prozessschema zugrunde, wobei der Teilschritt des „Verarbeitens“ vom Modell zum Resultat führt (vgl. auch Jordan et al., 2006). Dabei erfordert dieses „Verarbeiten“ bei zahlreichen Aufgaben auch den Umgang mit Kalkülen, weshalb neben den vier genannten eine weitere Tätigkeit fehlt, die niveaubezogen das Umgehen mit Kalkülen beim Aufgabenlösen erfasst.

Zur Analyse des vorstehend benannten Teils des Verarbeitens wurde die mathematische Tätigkeit *Technisches Arbeiten* gewählt, die ausschließlich das Umgehen mit der technischen Komplexität einer Aufgabe und ihrer zugrundeliegenden Verfahren erfassen und dabei u.a. das Zusammenspiel der verschiedenen Rechenarten und die Anwendung von Vorrangregeln berücksichtigen sollte. Diese neue Kategorie sollte in ihren Ausprägungen weitgehend überschneidungsfrei mit den übrigen Tätigkeiten sein, mit ihren vier Niveaus an jene in COACTIV anschließen, diese Niveaus sollten schulform- und klassenstufenunabhängig erreichbar und auf alle Stoffgebiete sowie alle Aufgabenklassen anwendbar sein. Mit diesen Setzungen wurde das *Technische Arbeiten* durch Analyse von Aufgabenmerkmalen und ergänzende systematische Aufgabenvariation operationalisiert, was zu nachstehendem Kategorienschema führte. Offenkundig ist, dass erfolgreiches *Technisches Arbeiten* zunächst die Kenntnis und anschließend die bewusste Auswahl und korrekte Durchführung eines Verfahrens voraussetzt.

Kategorie	***Stoffgebiet***	***Bedeutung der Ausprägungen (Niveaus)***
Technisches Arbeiten	**Arithmetik**	0= Nicht benötigt; 1= nur Punkt- oder nur Strichrechnen, einfache Potenzen; 2= einfache hierarchische Techniken (Punkt- vor Strich, Potenz vor Punkt), Potenzen multiplizieren/ dividieren, Wurzel aus Zahl; 3= komplexe hierarchische Techniken (Potenz- mit Punkt- *und* Strichrechnung kombiniert)
	Algebra	0= Nicht benötigt; 1= mit einer linearen Gleichung rechnen; 2= hierarchische Techniken mit mehreren linearen Gleichungen (Punkt- vor Strich), rein-quadrat. Gleichungen, Summe quadrier./ faktorisieren; 3= komplexe hierarchische Techniken (Potenz- mit Punkt- und Strichrechnung kombiniert), bel. gemischt-quadratische Gleichungen
	Geometrie	0= Nicht benötigt; 1= nur Punkt- oder nur Strichrechnen, *z. B. sin α errechnen*; 2= einfache hierarchische Techniken (Potenz vor Punkt), *z. B. Größen mit Strahlensatz errechnen, Winkel mit Sinussatz errechnen*; 3= komplexe hierarchische Techniken (Potenz- mit Punkt- und Strichrechnung kombiniert)
	Stochastik	0= Nicht benötigt, *z. B. alle Kombinationen notieren*; 1= nur Punktrechnen; 2= zweistufig/ mehrstufige hierarchische Techniken (Punkt vor Strich, auch Potenz vor Punkt), Summen aus Produkten, *z. B. arithmet. Mittel*; 3= komplexe hierarchische Techniken (Potenz- mit Punkt- und Strichrechnung kombiniert), *z. B. Bernoulliketten*

3. Auswertungen

Die jahrgangs- und schulformbezogenen (gymnasial/ nicht-gymnasial) Auswertungen zum *Technischen Arbeiten* erfolgen am repräsentativen Datensatz der im COACTIV-Projekt in 2003 und 2004 eingesammelten Klassenarbeitsaufgaben (Klasse 9: 14744 Aufgaben, davon 25 % in Gymnasialklassen; Klasse 10: 10863 Aufgaben, davon 36 % in Gymnasialklassen).

Die Auswertungen zeigen, dass in allen vier Teilgruppen jenseits des *Technischen Arbeitens* kaum weitere mathematische Tätigkeiten zur Aufgabenbearbeitung erforderlich sind (z. B. erfordern in nicht-gymnasialen 9. Klassen 66 % der Aufgaben kein *Innermathematisches Modellieren* und sogar 98 % der Aufgaben kein *Argumentieren*). Hingegen ist in allen Teilgruppen *Technisches Arbeiten* nahezu immer erforderlich, weshalb nachfolgend die Niveaus dieser Tätigkeit genauer analysiert werden (vgl. Tabelle):

	Jeweils dominierendes Niveau beim Technischen Arbeiten (Anteile in Prozent)			
	9 Gym	***10 Gym***	***9 Nicht-Gym***	***10 Nicht-Gym***
Techn. Aufgaben	**N3: 53 %**	**N3: 70 %**	N2: 39 % (N1: 37 %, N3: 20 %)	**N3: 54 %** (N1: 22 %, N2: 27 %)
Rechner. Aufgaben	**N3: 51 %**	**N3: 61 %**	N1: 47 % (N3: 35 %)	**N3: 42 %**
Begriffl. Aufgaben	**N3: 37 %**	**N3: 67 %**	N1: 32 % (N2: 24 %, N3: 28%)	**N3: 52 %**
Arithmetik	**N3: 41 %** (N2: 33 %)	**N3: 64 %** (N2: 27 %)	N1: 52 % (N2: 31 %)	**N3: 36 %** (N1: 32 %, N2: 30 %)
Algebra	**N3: 60 %**	**N3: 82 %**	N2: 47 %	**N3: 70 %**
Geometrie	N1: 44 % (N3: 40 %)	**N3: 51 %** (N2: 27 %)	**N3: 50 %** (N1: 35 %)	**N3: 43 %** (N2: 35 %)

Die vorstehende Tabelle zeigt, dass in beiden Schulformen und Klassen (mit Ausnahme der neunten nicht-gymnasialen Klassen) in nahezu allen Stoffgebieten und Aufgabenklassen das höchste Komplexitätsniveau des *Technischen Arbeitens* dominiert. Ein Vergleich der Schulformen zeigt, dass die Anteile des höchsten Niveaus in den gymnasialen Klassen höher sind als in den nicht-gymnasialen; dies wird besonders im Stoffgebiet Algebra deutlich und passt zu Schupps Einschätzung (vgl. Abschnitt 1). Schulformübergreifend ist erkennbar, dass die technische Komplexität von Klasse 9 nach Klasse 10 sogar noch ansteigt, was zumindest in den nicht-gymnasialen Klassen sicherlich mit dem Wegfall der Hauptschulklassen erklärbar ist. Bedenkt man schließlich, dass deutlich mehr als die Hälfte aller Aufgaben ohnehin technische Aufgaben sind (mit Anteilen zwischen 53 % und 64 %, je nach Teilgruppe), wird deutlich, welche hohe Bedeutung das *Technische Arbeiten*, insbesondere auf hohem Niveau, hat.

4. Fazit und Ausblick

Die hier gezeigte Relevanz des *Technischen Arbeitens* bestätigt die in der Literatur beschriebene Kalkülorientierung und bestätigt auch, dass das Beherrschen von Kalkülen eine nahezu unabdingbare – bisweilen die alleinige – Voraussetzung für die Bearbeitung von Klassenarbeitsaufgaben ist. Es erscheint jedoch wünschenswert, dass dort viel mehr Tätigkeiten als fast ausschließlich *Technisches Arbeiten* berücksichtigt würden und der Grad an kognitiver Aktivierung, der sich auch in Klassenarbeiten zeigen soll, sich nicht vorwiegend über ein hohes Niveau dieser Tätigkeit definiert.

Literatur

Althoff, H. (2001). Prüfungsaufgaben - Analysieren, Interpretieren und Argumentieren *mathematik lehren, 107,* 47-51.

Bromme, R., Seeger, F., Steinbring, H. (1990). Aufgaben, Fehler und Aufgabensysteme. In: *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (Vol. 14, S. 1-30). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Bruder, R., & Weigand, H.-G. (2001). Leistungen bewerten - natürlich! Aber wie? *mathematik lehren, 107,* 4-8.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). *Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht.* Duisburg: Universität Duisburg-Essen.

Henn, H.-W., & Kaiser, G. (2001). Mathematik - Ein polarisierendes Schulfach *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 4*(3), 359-380.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., et al. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben* (1. Auflage). Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung

Kunter, M., & Baumert, J. (2011). Das COACTIV-Forschungsprogramm zur Unterstützung professioneller Kompetenz von Lehrkräften - Zusammenfassung und Diskussion. In: M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 345-366). Münster: Waxmann.

Leuders, T. (2004). Selbstständiges Lernen und Leistungsbewertung. *Der Mathematikunterricht, 3*, 63-79.

Neubrand, M., Klieme, E., Lüdtke, O., & Neubrand, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung *Unterrichtswissenschaft, 30*(1), 100-119.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht* (1. Auflage). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Sjuts, J. (2003). Formalisierung von Wissen - ein probates Werkzeug zur Bewältigung komplexer Anforderungen. *mathematica didactica, 26*(2), 73-90.

Sjuts, J. (2007). Kompetenzdiagnostik im Lernprozess - auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung kommt es an. *mathematica didactica, 30*(2), 33-52.

Willi DÖRFLER, Klagenfurt

Was und wie wird in der Mathematik konstruiert?

In der Mathematik wird an vielen Stellen von Konstruktionen und vom Konstruieren gesprochen und je nach Kontext hat das sehr unterschiedliche Bedeutung und verschiedenen Charakter. Manchmal geht es um die Berechnung eines zunächst unbekannten mathematischen Objekts, dann wieder um den Entwurf ganz neuer Objektbereiche (wie etwa bei der „konstruktiven“ Einführung der hyperreellen Zahlen). Die Redewendung „Wir bilden …“ gehört auch zu diesem offensichtlich sehr inhomogenen und diffusen Sprachgebrauch. Ohne den Anspruch, damit allen Varianten des Konstruierens in der Mathematik gerecht zu werden, werde ich hier drei verschiedene Typen skizzieren, die sich hinsichtlich des Gebrauchs von Zeichen und Diagrammen (vgl. Dörfler, 2006) beim Konstruieren unterscheiden lassen.

Meine Grundposition hier ist, dass Mathematik als Tätigkeit und Gegenstand von Menschen gemacht wird und diese dabei Zeichen (im Sinne von Peirce) als Mittel der Tätigkeit benutzen und damit wieder Zeichen (meistens Diagramme) produzieren. Damit grenze ich mich ab von Sichtweisen (etwa bei Piaget, Brouwer, aber auch Glasersfeld), in denen die Mathematik auf geistigen/mentalen aber zeichenfreien Konstruktionen beruht, die im Individuum zu kognitiven Strukturen führen. Diese benötigen die Zeichen nur zur Darstellung, Beschreibung und Kommunikation (mathematische Objekte sind also demnach primär mentale Objekte). Ebenfalls primär deskriptive Qualität haben Zeichen und Zeichenkonstruktionen in realistischen/platonistischen Philosophien, in denen Zeichen Beschreibungen der von ihnen kategorisch verschiedenen Objekte sind. Es kann dann auch kein Objekt konstruiert werden, wir konstruieren nur deren Darstellungen (die dann allerdings auch unzutreffend sein können). Ich halte es hier mit Wittgenstein, dass mathematische Zeichen nicht deskriptiv sind und ihre Bedeutung im Gebrauch liegt (vgl. Mühlholzer, 2008). Ferner schließe ich aus, dass mathematische Konstruktionen über die Zeichen hinaus etwas bewirken: Das Schreiben von Strichlisten erschafft keine (abstrakten) natürlichen Zahlen. Wenn also mathematische Zeichen auf etwas referieren, dann sind dies wieder mathematische Zeichen.

Sehr häufig findet man in der Mathematik die Situation, dass innerhalb eines gegebenen Zeichensystems (z.B. Dezimalzahlen; elementare Algebra) nach den Regeln des Systems aus gegebenen Zeichen (Symbolen, Diagrammen) ein gesuchtes Zeichen ermittelt, also in gewissem Sinne konstruiert wird. Jede gewöhnliche Rechnung ist von dieser Art, ebenso das Lösen von Gleichungen. Eine übliche Redeweise dazu ist, dass das gesuchte mathematische Objekt bereits existiert und es eben nur mehr berechnet werden muss. Es entstehen dabei zwar neue Zeichen, die aber strukturell und vom Typ her bereits im Zeichensystem angelegt sind. Man bestimmt nur das spezielle Zeichen, das durch die gesetzten Bedingungen (etwa eine Gleichung) und die Regeln des Zeichensystems (Rechenregeln) festgelegt wird. Geometrische Konstruktionen gehören auch in diese Kategorie der „systemimmanenten" Konstruktionen.

Das Interesse in diesem Beitrag liegt demgegenüber auf Konstruktionen „neuer" mathematischer Gegenstandsbereiche. Neu bezieht sich dabei nicht vorrangig auf den historischen Prozess der Entwicklung von Mathematik, sondern darauf, wie Mathematik präsentiert und vermittelt wird, also durchaus eine didaktische Sicht. Metaphorisch ausgedrückt: wie lernen Lernende „mathematische Objekte" kennen, was erfahren sie wodurch über diese. Natürlich stehen dahinter auch allgemeine epistemologische Fragen, etwa: wie „verweisen" Zeichen /Diagramme in der Mathematik, wie gewinnen sie Bedeutung etwa im Lernprozess, vgl. dazu auch Dörfler (2011). Wie schon erwähnt, entsteht Neues (insbesondere für Lernende) in der Mathematik vorwiegend in der Form neuer Zeichen/Diagramme. Die folgende Unterscheidung richtet sich nach der Verwendungsform dieser Diagramme.

Die erste Art von Konstruktion (Diagramme als Objekte) ist dadurch charakterisiert, dass ein Diagrammsystem entworfen wird zusammen mit Regeln, nach denen mit den Diagrammen operiert (gerechnet) werden soll. Die neuen mathematischen Objekte treten als eine Art von Schreibfiguren auf, denen auch eine wahrnehmbare Struktur zukommt: so sollen wir schreiben und rechnen. Meist verwenden solche Entwürfe bereits konstruierte Diagrammsysteme, auf deren Objekte mittels Indizes verwiesen wird. Dabei kann es sich um ein umfangreiches Diagrammsystem (Schreibfiguren eines gewissen Typs) oder um einzelne Diagramme (meist als Formeln) handeln innerhalb eines umfassenderen Diagrammsystems. Für den ersten Fall sind reelle Matrizen ein illustratives Beispiel: eine Klasse von Schreibfiguren (Inskriptionen) mit verschiedensten "Rechenoperationen" (vgl. Dörfler, 2007), durch die erstere zu mathematischen Objekten werden, deren Eigenschaften und Beziehungen innerhalb dieses Diagrammsystems „Matrizen" untersucht werden (stets durch Operationen mit den Diagrammen/Schreibfiguren). Hier wird besonders deutlich, dass keine Veranlassung besteht, den mathematischen Diagrammen eine deskriptive Funktion durch Referenz zuzuschreiben. Die Bedeutung ist intern gegeben durch die Struktur der Schreibfiguren und die auf sie anwendbaren/vereinbarten Operationen. Deskriptive Verwendungen finden Matrizen (oder Diagramme als mathematische Objekte ganz allgemein) in den Anwendungen. Diagramme als mathematische Objekte beschreiben (nur) sich selbst. Andere Beispiele für diesen Typ von Konstruktionen sind: komplexe Zahlen, Dezimalzahlen, Quaternionen, Polynome, n-tupel aller Art (etwa auch endliche Körper), negative Zahlen, Polyominoes (siehe Golomb, 1994), lateinische Quadrate, (Beispiele für) endliche Geometrien, figurative Zahlen, didaktische Mittel wie Zahlenmauern. Obwohl hier die mathematischen Objekte gewissermaßen wahrnehmbar, mitteilbar und mit materieller Existenz versehen sind, ist die Nachkonstruktion durch Lernende ein aufwendiger Lern-, Übungs- und Gewöhnungsprozess, der (emotionale und intellektuelle) Zustimmung und Akzeptanz erfordert. Motivation und Legitimation können über Anwendungen entstehen, aber auch aus der Einladung zu einem komplexen Spiel mit den Diagrammen und Regeln zur Erforschung von Konsequenzen aus diesen. Das gilt auch für den anderen Fall, wo einzelne mathematische Objekte durch ein Diagramm (meist in einem System) konstruiert/entworfen werden. Ein Beispiel dafür ist die Definition der Exponentialfunktion (oder von sin, cos, etc.) als unendliche Reihe (reell oder komplex). Mit Diagrammen als Schreibfiguren (reguliert durch konsistente Operationsregeln) können also Typen von mathematischen Objekten (Matrizen, Quaternionen) oder einzelne Objekte (exp) konstruiert werden. Diese diagrammatische Konstruktion dominiert in der Schulmathematik.

Bei der zweiten Art der Konstruktion (Diagramme als Eigenschaften) mathematischer Objekte werden diese nicht als manipulierbare Diagramme sondern durch Eigenschaften festgelegt, wobei letztere in der Form manipulierbarer Diagramme vereinbart werden. In dieser wird auf die Objekte durch Indizes verwiesen (vgl. Dörfler, 2011). Beispiele sind die Definitionen für Stetigkeit oder Differenzierbarkeit (reeller) Funktionen. Mit stetigen Funktionen wird darin und auch in anschließenden Sätzen und Beweisen nicht direkt operiert, sondern es werden mittels der Diagramme Beziehungen zwischen den jeweiligen Eigenschaften hergestellt (etwa: aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit). Die Objekte selbst sind also nicht mehr „sichtbar“. Im Unterschied etwa zu den komplexen Zahlen gibt es kein Diagramm für den Objekttypus „stetige Funktion“. Wir können nur Beispiele angeben, an denen aber die jeweilige Eigenschaft nicht „wahrnehmbar“ ist, sondern durch Rechnung überprüft werden muss. Es zeigt sich hier ein qualitativer, kategorischer Unterschied, der sicher auch für Lernprozesse von Relevanz ist (Schlagworte: Unanschaulichkeit, Abstraktion; anschaulich sind nur mehr die Diagramme für die Eigenschaften): Die Objekte selbst bekommt man nicht mehr „in den Griff“. Andere Beispiele: konvergente Folge; Festlegung von „neutrales Element“ oder „inverses Element“ in der

Algebra; (formale) Axiomensysteme (etwa: Halbgruppe, Gruppe, Vektorraum).

Bei der dritten Konstruktionsart (narrative Konstruktion) geht es typischerweise um die Bildung/Konstruktion neuer mathematischer Objekte durch die Zusammenfassung von bereits auf einem der skizzierten Wege konstruierten Objekten eines bestimmten Typs. Dies ist der Fall, wenn wir von allen natürlichen, ganzen, reellen, komplexen Zahlen sprechen, also von den Objekten N, Z, R, C. Diese „Konstruktionen“ erfolgen nun in keiner Weise mehr durch Diagramme sondern in rein sprachlicher Form nach einem Muster, das man als Sprechakt auffassen kann. Das sind (nach Austin oder Searle) sprachliche Handlungen, die nicht deklarativ sind (keine Aussagen machen), sondern soziale Vereinbarungen bewirken und damit eine soziale Wirklichkeit schaffen (für die, die ihnen zustimmen; Beispiele sind Versprechen und Verträge). Die Bedeutung von Zustimmung und Akzeptanz auf Seiten der Lernenden gewinnt daher hier dramatische Bedeutung. Wichtige Beispiele sind alle Konstruktionen durch Äquivalenzklassenbildung, wie etwa der rationalen Zahlen, der reellen Zahlen, oder extrem der hyperreellen Zahlen. Aber auch schon die „Bildung“ der Kongruenzklassen in der Zahlentheorie oder allgemeiner von Quotientenstrukturen in der Algebra beruht auf Zusammenfassungen durch Sprechakte. Diese bezeichne ich als narrativ, weil sie gleichzeitig eine „Geschichte“ erzählen, eine (nützliche) Fiktion begründen (wie etwa viele abstrakte Räume).

Literatur

Austin, J.L.(1972): Zur Theorie der Sprechakte. Stuttgart: Reclam.

Dörfler, W. (2007): Matrizenrechnung: Denken als symbolisches Handwerk. In: Barzel, B. u.a. (Hrsg.), Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker, 53-60. Hildesheim: Franzbecker

Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. In: JMD 27, 200-219

Dörfler, W. (2011): Formen der Referenz in der Mathematik. In: BzMU 2011, 203-206. Münster: WTM Verlag.

Golomb, S.W. (1994): Polyominoes. Princeton Univ. Press, Princeton.

Mühlhölzer, F. (2008): Wittgenstein und der Formalismus. In: M. Kroß (Hrsg.), Ein Netz von Normen. Berlin: Parerga.

Searle, J.R. (1982): Sprechakte. Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft. Frankfurt .

Carola EHRET, Freiburg

Lernausgangslage und Rahmenbedingungen zum Schreiben im Mathematikunterricht der Eingangsstufe der Hauptschule

In der Regel gehen Studien zum Mathematischen Schreiben von der Annahme aus, dass die Lernenden das Schreiben selbst bereits beherrschen und es entsprechend als Werkzeug im Lernprozess nutzen können. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass das Mathematische Schreiben zunächst eine zusätzliche Lernanforderung ist und wie andere komplexe Fähigkeiten nach und nach erworben werden muss.

1. Modell Mathematische Schreibkompetenz

In einem Modell zur Mathematischen Schreibkompetenz werden die einzelnen Teilbereiche aufgeschlüsselt. Zum Einen ist das Modell zentral für die Einschätzung und Einordnung angemessener Schreibmethoden und Schreibanlässe. Dabei werden sowohl die Inhaltliche Reflexion (mathematical writing) als auch die Persönliche Reflexion des Lernprozesses (commentary writing) berücksichtigt (Hofman/Powell 1989). Zum Anderen ist ein tragfähiges Modell die Grundlage für die Auswertung der schriftlichen Eigenproduktionen der Lernenden. Dazu gehören verschiedene Aspekte. Zunächst ist der Schreibprozess zu nennen, dessen Analyse vor allem in sprachdidaktischen Ansätzen zum Schreiben eine wesentliche Rolle spielt (z.B. Fetzer 2007). Er wird maßgeblich beeinflusst durch die metakognitiven Strategien, über die die Lernenden verfügen (Winter 1992). Ein zentraler Indikator für die Mathematische Schreibkompetenz sind die Schreibprodukte. Die sprachliche Gestaltung kann als Indiz für das Verständnis des Schreibgegenstands dienen (z.B. Waywood 1092). Nicht zuletzt ist der mathematische Gehalt, der sich in den Schreibprodukten spiegelt, von Bedeutung (z.B. Hußmann 2002).

Um das mathematische Schreiben als Werkzeug im Lernprozess nutzen zu können benötigen die Lernenden Kompetenzen in drei unterschiedlichen Bereichen: Sprache, Mathematik und Metakognition. Die Beherrschung alle drei Kompetenzbereiche ist sowohl Voraussetzung als auch Ziel des Mathematischen Schreibens. Desweiteren weisen sie enge Bezüge zu den in den Bildungsstandards als wesentlicher Grundlage für das Mathematiklernen ausgewiesenen Prozesskompetenzen auf (KMK 2004).

Metakognitive Strategien, der Blick auf das eigene Tun, sind unverzichtbar für ein verstehensorientiertes Lernen. Die Notwendigkeit zu reflektieren zieht sich entsprechend als roter Faden durch die mathematischen Prozesskompetenzen. Das Verständnis für den eigenen Lernprozess und damit verbundene Fragen und Schwierigkeiten steht noch vor dem eigentlichen inhaltlichen Verständnis und ist eine zentrale Grundlage zur Verbalisierung sowohl mathematischer als auch persönlicher Reflexionen.

Die sprachliche Kompetenz ist ebenfalls eine Grundvoraussetzung zum Schreiben. Die Prozesskompetenz des Kommunizierens ist ohne Sprache nicht realisierbar. Dabei steht die Verständlichkeit als Kriterium im Vordergrund, die durch Nutzung der Umgangssprache (Sprache der Verstehens, Wagenschein) unterstützt werden kann. Reflexionsvermögen hilft beim Perspektivwechsel der Basis für eine adressatenbezogene Kommunikation ist.

Die mathematische Kompetenz spielt insbesondere im Bereich der inhaltlichen Reflexion (mathematical writing) eine wichtige Rolle. Das Argumentieren bezieht sich explizit auf mathematische Inhalte und wird durch die Fachsprache (Sprache des Verstandenen, Wagenschein) unterstützt. Während es beim Reflektieren zunächst vor allem um die persönliche Authentizität geht steht beim Argumentieren die mathematische Korrektheit als Kriterium im Fokus.

Schreiben findet im Spannungsfeld zwischen metakognitiver Reflexion, sprachlicher Kommunikation und fachlicher Auseinandersetzung statt. Dieses Spannungsfeld muss entsprechend bei der Anleitung und Auswertung mathematischen Schreibens berücksichtigt werden.

2. Forschungsinteresse und Design

Im Rahmen der laufenden Studie wurde zunächst das vorliegende Modell zum Mathematischen Schreiben entwickelt. Durch die Zusammenschau der bereits vorliegenden Arbeiten zum Schreiben im Mathematikunterricht werden die verschiedenen Teilkompetenzen herausgearbeitet sowie eine Auswertungsgrundlage für schriftliche Eigenproduktionen im Mathematikunterricht geschaffen.

Neben der theoretischen Sicht wird das Schreiben aus der Perspektive der Schulpraxis betrachtet. Auf Grundlage des Modells werden Aufgaben und Methoden aus dem Lehrwerk Mathewerkstatt (Barzel/Hußmann/Leuders/Prediger 2012) auf ihre Eignung zur Förderung des Mathematischen Schreibens hin analysiert.

Die dritte Perspektive ist die der Lernenden selbst. Mittels Expertenbefragung und Interviews wurde die Frage verfolgt, was Lernende am Schreiben hindert und wo genau ihre Schwierigkeiten liegen (Ehret 2011). In einer ausführlichen Diagnostik zu Beginn des Projekts wurden die Lernvoraussetzungen erhoben. Dies dient als Grundlage zur Beobachtung der Entwicklung von Schülern mit unterschiedlichen Leistungsprofilen.

Die Studie läuft im Schuljahr 2011/12 an drei Werkrealschulen in je zwei fünften Klassen. In der Eingangsdiagnostik wurden zu Schuljahresbeginn die mathematischen Basiskompetenzen (HRT), das elementare Sprachverständnis (Elfe) sowie stellvertretend für die metakognitiven Kompetenzen die Lern- und Leistungsmotivation (Sellmo) erhoben. In einem Pre-Post-Design werden die Fortschritte bezüglich der metakognitiven Kompetenzen sowie der mathematischen Schreibkompetenz erhoben. Auf dieser Ebene sind ebenfalls drei Kontrollklassen beteiligt, die die natürlichen, entwicklungsbedingten Fortschritte in den genannten Bereichen sichtbar machen sollen. Als Instrumente zur Erhebung der Entwicklungsverläufe dienen ein Aufgabensatz mit mathematischen Schreibanlässen (Ankeraufgaben), Schülerprodukte aus dem laufenden Unterricht, Lerntagebucheinträge sowie ein Testinstrument zur Erfassung metakognitiver Strategien bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben und exemplarische Leitfadeninterviews.

3. Diagnostik der Lernvoraussetzungen

Im Rahmen der Eingangsdiagnostik wurden die mathematischen Basiskompetenzen sowie das elementare Sprachverständnis als Moderatoren für die Entwicklung der Mathematischen Schreibkompetenz betrachtet. Wie bei der Zielgruppe der Werkrealschule zu erwarten bewegte sich etwa die Hälfte der Erhebungsstichprobe im Vergleich zur Norm im unteren Leistungsviertel. Das gilt sowohl für den mathematischen als auch für den sprachlichen Bereich. Dabei unterscheiden sich die einzelnen Klassen in ihren Profilen sehr deutlich. Während bezüglich der mathematischen Basiskompetenzen in den beiden schwächsten Klassen maximal ein Viertel der Lernende durchschnittliche Leistungen erbringt, befinden sich in den beiden stärksten Klassen dreiviertel der Lernenden im Durchschnittsbereich. Ähnliche Unterschiede lassen sich im sprachlichen Bereich auffinden. Dabei gibt es sowohl Lerngruppen, die in beiden Bereichen insgesamt sehr stark beziehungsweise sehr schwach abgeschnitten haben als auch solche, die eine eindeutige Leistungspräferenz im mathematischen oder sprachlichen Bereich erkennen lassen.

Diese Profile lassen sich auch auf der Ebene der einzelnen Lernenden wiederfinden. Im Verlauf der Studie soll im Rahmen qualitativer Fallstudien geklärt werden, inwiefern diese Leistungsprofile mit der Entwicklung der mathematischen Schreibkompetenz in Verbindung gebracht werden können. Bereits zu Beginn der Studie wurden exemplarisch einzelne Schülerinnen und Schüler ausgewählt, deren Schreibprodukte vor dem Hintergrund ihres Leistungsprofils betrachtet werden konnten. Dabei gibt es erste Hinweise, dass die Qualität der Texte in vielen Fällen durchaus Parallelen zum Leistungsprofil aufweist. Die Beurteilungskriterien basieren auf dem oben beschriebenen Modell zum Mathematischen Schreiben. Sowohl sprachliche als auch inhaltliche Merkmale finden Eingang. Die metakognitiven Aspekte werden hauptsächlich bei reflexiven Schreibaufgaben deutlich. Ausgangshypothese ist die Annahme, dass gerade Lernende, die im mathematischen Bereich Schwierigkeiten haben, von der Verlangsamung und Reflexion während des Schreibprozesses profitieren können. Insbesondere Lernende, deren Präferenzen eher im sprachlichen Bereich liegen, könnten diese Stärke gezielt als Werkzeug beim mathematischen Lernen nutzen.

Die systematische Analyse von Schülerprodukten zur Klärung der genannten Fragen ist Ziel des Projekts.

Literatur

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo;Prediger, Susanne(2012): Mathewerkstatt. Berlin: Cornelsen

Ehret, Carola (2011): Kompetenzen und Hürden beim Schreibenlernen im Mathematikunterricht – Pilotstudie im Rahmen des Projekts Kosima. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011.

Fetzer, Marei (2007): Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule. Bad Heilbrunn: Klinkhardt (Klinkhardt Forschung).

Haffner,J.; Baro, K.; Parzer, P.; Resch, F. (2005): HRT 1-4, Heidelberger Rechentest, Erfassung mathematischer Basiskompetenzen im Grundschulalter. Göttingen: Hogrefe Verlag

Hoffman, M. R. & Powell, A. B. (1989): Mathematical and commentary writing: Vehicles for student reflection and empowerment. In: Mathematics Teaching, H. 126, S. 55–57.

Hußmann, Stephan (2002): Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen. Mathematik unterrichten in einer offenen Lernumgebung. Hildesheim: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 15).

Lenhard, W.; Schneider, W. (2006): ELFE 1-6, Ein Leseverständnistest für Erst- bis Sechstklässler. Göttingen: Hogrefe Verlag.

Spinath, B.; Stiensmeier-Pelster, J.; Schöne, C.; Dickhäuser, O. (2002): SELLMO, Skalen zur Erfassung der Lern- und Leistungsmotivation. Göttingen, Hogrefe Verlag.

Waywood, Andrew (1992): Journal Writing and Learning Mathematics. In: For the Learning of Mathematics, H. 12 (2) June, S. 34–43.

Winter, Alexander (1992): Metakognition beim Textproduzieren. Tübingen: Gunter Narr Verlag.

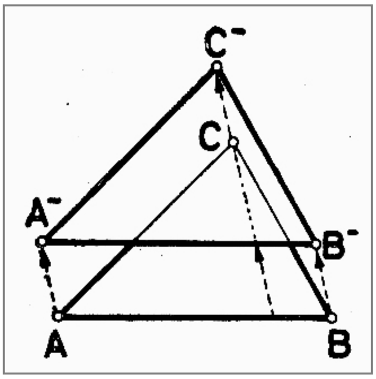
Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Düsseldorf

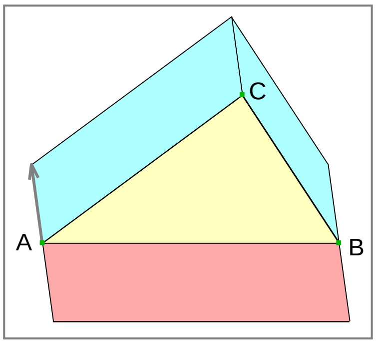
Wie Pappos seinen Satz gefunden haben könnte – und Schüler ihn heute finden können

Der Flächensatz des Pappos ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras. Die Verallgemeinerung erfolgt zweifach: für beliebige statt rechtwinklige Dreiecke und für Parallelogramme statt Quadrate. Schaut man sich den Satz in der heutigen Formulierung[1] an, so sieht man, dass er ohne eine Figur kaum zu formulieren ist und man kommt zu dem Schluss, dass er in dieser Form heute nicht (mehr) unterrichtet werden kann.

Mir stellten sich die Fragen: Wie konnte Pappos damals diesen Satz *gefunden* haben? Und wie könnte man ihn heute schülerorientiert *unterrichten*? Den Satz zu *beweisen, wenn man ihn kennt*, ist analog zum euklidischen Pythagoras-Scherungsbeweis kein Problem. Es ist aber zu vermuten[2], dass Pappos so nicht zum Satz gefunden hat. Der hier vorgestellte Weg ist keine historische Rekonstruktion, sondern eine genetische Rekonstruktion (Führer), die heuristische Anstöße geben soll, wie dieser Satz heute mit modernen Werkzeugen gelehrt und gelernt werden könnte.

1. Die zündende Idee





Nach einigen Frustrationserlebnissen in der Literaturrecherche bin ich auf ein Schulbuch der 50-er Jahre[3] gestoßen, in dem ich eine geeignete Figur[4] und eine überzeugende einfache Bewegungsidee fand: Wird ein Dreieck ABC verschoben, so überstreicht die Strecke AB dabei ein Parallelogramm und der Streckenzug ACB zwei zusammenhängende Parallelogramme, ein Doppelparallelogramm. Verschiebt man diese Parallelogramme geeignet, ergibt sich nebenstehendes Bild. Der Flächensatz besagt hier anschaulich, dass die durch die Verschiebung überstrichenen Parallelogramme über den kürzeren Seiten zusammen so groß sind wie das Parallelogramm über der längeren Seite.

[1] Siehe Anhang

[2] Clairaut in der Übersetzung von Bierling: „Ich habe bey mir gedacht, es müsse doch diese Wissenschaft, wie alle andere, nach und nach entstanden seyn … und es könne dieser erste Fortgang unmöglich über den Verstand der Anfänger seyn, weil es ja Anfänger waren, welche ihn machten.“

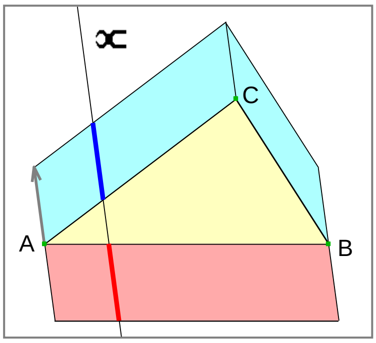
[3] Botsch, S. 108

[4] Die gleiche Figur mit etwas anderer Bewegungsidee fand ich dann auch bei Henrici/ Treutlein, S. 278

2. Ein visuell-dynamischer Beweis

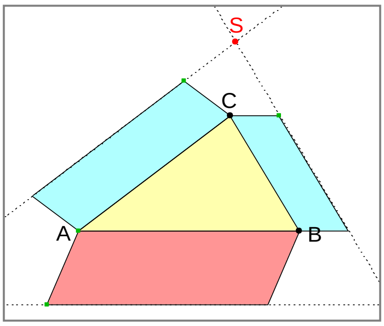
Ein eher statischer Beweis ist mit der bekannten Flächenformel für Parallelogramme möglich, wobei als ‚Grundseite' der Verschiebungsvektor genommen wird und als ‚Höhe' die Strecke AB.

Viel überzeugender und intuitiver finde ich eine Cavalieri-Bewegungsargumentation, die auf Botsch zurückgeht. Während Botsch mit einer Parallelen*schar* argumentierte, so kann man heute mit DGS *eine* zum Verschiebungsvektor parallele Gerade über die Figur wandern lassen. Sie schneidet dabei aus den Parallelogrammen gleichlange Strecken aus. Damit ist der Flächensatz des Pappus in einem Spezialfall visuell-dynamisch hergeleitet.



3. Der allgemeine Satz

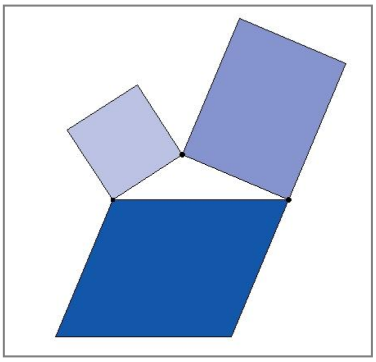
Die drei Parallelogramme können entlang von Geraden durch die ‚äußeren' Seiten durch Scherung in flächengleiche Parallelogramme verwandelt werden. Das Doppelparallelogramm wird dabei in zwei einzelne Parallelogramme aufgeteilt. Der Schnittpunkt S dieser Geraden entspricht dem verschobenen Punkt C' und spielt eine wichtige Rolle. Man erhält so die allgemeine Pappos-Figur und gleichzeitig die Schopenhauer erfreuende „Einsicht in den Grund des Seyns". Dass die Gerade SC aus dem Parallelogramm über c eine Strecke ausschneidet, die zur Strecke SC gleichlang und parallel ist, fällt jetzt nicht vom Himmel, sondern ergibt sich genetisch.



Aus diesem Ansatz lassen sich dann leicht zahlreiche weitere Pappos-Figuren (‚Pappographien') erzeugen.

In einem Sonderfall, der an den Pythagoras-Satz anklingt, sind die Parallelogramme alle rechteckig. Dies findet man noch gelegentlich als Aufgabe in Schulbüchern der 70-er Jahre.

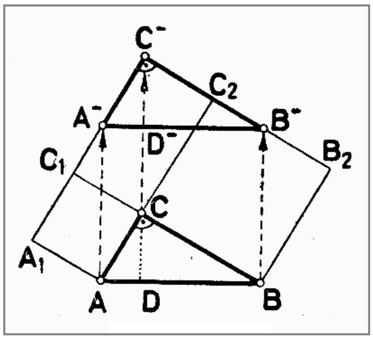
Ein weiterer reizvoller Sonderfall liegt vor, wenn über den Seiten ein Quadrat, ein Rechteck und ein Parallelogramm gebildet werden und wenn die Figur bei B ‚keinen Knick' hat, also y-förmig ist.



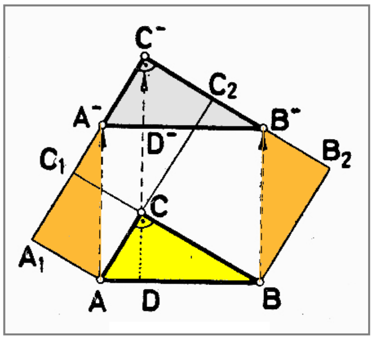
Daraus entstand das Markenzeichen des hannoveraner HeuRekAP-Projekts.

4. Und am Ende: Pythagoras

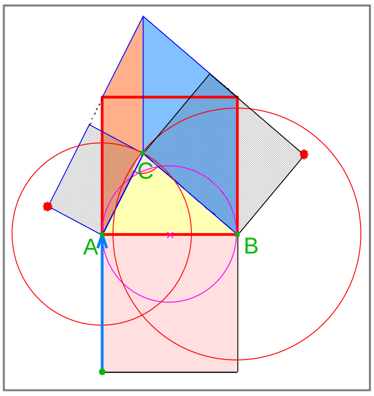
Der Satz des Pythagoras wird üblicherweise so formuliert und bewiesen, dass aus den beiden Kathetenquadraten ein Hypotenusenquadrat entsteht (‚aus zwei mach eins'). Der Pappos-Ansatz von Botsch war genau umgekehrt (‚aus eins mach zwei').



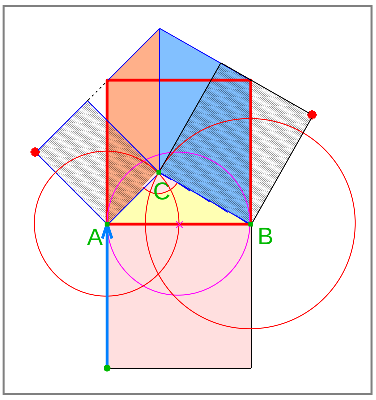
In diesem Fall muss der Verschiebungsvektor auf AB senkrecht stehen und die gleiche Länge haben. Dann wird das Parallelogramm über c zum Hypotenusenquadrat. Die Parallelogramme über a und b können zu Rechtecken geschert werden. Es bleibt zu klären: Sind diese Rechtecke auch quadratisch?



Botsch drehte dazu das Dreieck ABC um A um 90°nach links und um B um 90° nach rechts. Damit erhält man insgesamt vier kongruente rechtwinklige Dreiecke, die sich um das Quadrat über AB gruppieren. Dies ist ein vergleichsweise statischer Kongruenzbeweis.



DGS bietet heute neue Möglichkeiten für einen visuell-dynamischen Beweis: Dynamisiert man die gesamte Figur, indem man C vom Thaleskreis über AB löst sowie Kreise um A durch C bzw. um B durch C zeichnet, so ist zu erkennen, dass die Rechtecke über a und b ersichtlich ‚zu lang' sind, wenn man C in den Thaleskreis hinein zieht und der Winkel bei C größer als 90° wird. Zieht man C aus dem Thaleskreis hinaus, wird der Winkel bei C kleiner als 90° und die Rechtecke über a und b werden ersichtlich ‚zu kurz'. Im Grenzfall liegt C auf dem Thaleskreis, der Winkel bei C ist 90°, und die rot markierten Eckpunkte der Rechtecke über a und b liegen genau auf den Kreisen. Das bedeutet, dass die Rechtecke dann jeweils gleichlange Seiten haben, also Quadrate sind.



Natürlich stellt sich hier die Frage, ob diese dynamische Argumentation zulässig ist. Der Geometer an der Hochschule wird das möglicherweise anders beantworten als der Lehrer an der Schule.

5. Fazit

Es wurde eine genetische Rekonstruktion entwickelt (die keinen historischen Anspruch erhebt), die ein historisches Problem ausgehend von einem einfachen Verschieben eines Dreiecks so aufbereitet, dass Schüler diesen Satz (und den Satz des Pythagoras) mit einfachen Flächenverwandlungen Schritt für Schritt entdecken und begründen können. Dynamische Geometrie-Software als Werkzeug und dynamische Arbeitsblätter[5] als Lernumgebung sind für eine schülerorientierte Umsetzung unverzichtbar geworden. Auch wenn der Flächensatz des Pappos dadurch nicht zum Standardstoff der Klassen 9 werden dürfte, bietet dieser Ansatz doch eine schöne Möglichkeit für innere Differenzierung und für eine heuristisch ausgerichtete Behandlung des Beweisens.

Literatur

Baptist, P. (1997): PYTHAGORAS und kein Ende? Ernst Klett

Botsch, O. (1956): Bewegungsgeometrie. Reinhardt-Zeisberg, Band 4b. Moritz Diesterweg

Clairaut, A. C. (1741): Élémens de Géomètrie. In der Übersetzung von Bierling (1773): Des Herrn Clairaut Anfangsgründe der Geometrie. http://books.google.de/books

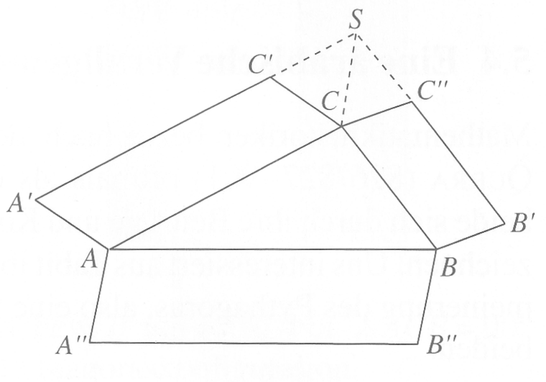
Elschenbroich, H.-J. (2003): Visuell-dynamisches Beweisen. In: mathematik lehren Heft 110.

Führer, L. (2011): Wege zum Pythagoras-Satz. http://www.math.uni-sb.de/ag-lambert/AKMUI11/Pyth_Vortrag_Soest

Henrici, J; Treutlein, P. (1881): Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Erster Teil. B.G. Teubner

Anhang

ABC ist ein beliebiges Dreieck und ACC'A' bzw. BB'C"C sind beliebige Parallelogramme über den Seiten [AC] bzw. [BC]. Die Geraden A'C' und B'C" schneiden sich in S. Wir zeichnen [AA"] und [BB"] parallel zu [SC] und gleich lang wie [SC]. Dann ist die Fläche des Parallelogramms AA"B"B gleich der Summe der Flächen der Parallelogramme ACC'A' und BB'C"C.



Baptist, S. 137

5 Die DynaGeo-Dateien finden Sie zum Download auf http://www.dynamische-geometrie.de/vortraege.htm .

Ralf ERENS, Freiburg

Curriculare Überzeugungen von Lehrkräften zum Analysisunterricht

1. Einleitung

Im Prozess des Lehrens und Lernens nehmen die Lehrkräfte eine zentrale Rolle bei der Planung und Durchführung des Unterrichts ein (Eichler, 2011). Erhebungen zu curricularen Überzeugungen der Lehrkräfte haben etwa gezeigt, dass diese wesentlich die Planung und Durchführung des Mathematikunterrichts beeinflussen (Philipp, 2007). Mittelbar können diese über die Unterrichtspraxis auch einen Einfluss auf die mathematikbezogenen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern haben (Hiebert & Grouws, 2007). Untersuchungen zu Vorstellungen und Überzeugungen von Lehrkräften sind meist auf die Mathematik oder den Mathematikunterricht allgemein bezogen. Jedoch geben die Studien von Eichler (2011) und Girnat und Eichler (2011) Hinweise darauf, dass diese Überzeugungen von Mathematiklehrkräften von den einzelnen mathematischen Teildisziplinen abhängen. In diesem Beitrag sollen daher diese Auffassungen von Lehrkräften bezogen auf die Subdomäne Analysis als einem zentralen Thema des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe II dargestellt werden.

2. Theoretischer Rahmen und methodisches Vorgehen

In dem hier vorgestellten Projekt sollen die Überzeugungen von Lehrkräften hinsichtlich des Lehrens und Lernens von Analysis – bezogen auf inhaltliche und prozessbezogene Ziele und die Handlungsrelevanz dieser Ziele im Unterricht – im Übergang vom Ende der Universitätsausbildung bis zur professionellen Schulpraxis untersucht werden. Dies geschieht unter der Grundannahme, dass sich die Überzeugungen und Vorstellungen und deren Handlungsrelevanz insbesondere im Referendariat ändern und nach einer Phase der Konsolidierung im Lehrerberuf weitgehend stabil bleiben (vgl. auch Philipp, 2007).

Um die Vorstellungen (international *beliefs* bzw. *belief systems*; Philipp 2007) der Lehrkräfte strukturieren und begrifflich präzise fassen zu können, werden subjektive Annahmen, Überzeugungen und Zielsetzungen der Lehrkräfte unter das sozialpsychologische Konstrukt der Subjektiven Theorien (Groeben et al. 1988) subsumiert.

Als zentrale Bestandteile der Subjektiven Theorien von Lehrkräften zur Planung von Mathematikunterricht werden einerseits die von den Lehrkräften intendierten Inhalte sowie die damit verbundenen Ziele im Hinblick auf den Analysisunterricht aufgefasst.

Als Grundlage zur Beschreibung des Transformationsprozesses von Lehrplanvorgaben (*written curriculum*) über die Unterrichtsplanung (*teacher´s intended curriculum*) und die tatsächliche Unterrichtspraxis (*teacher´s enacted curriculum*) bis hin zum Lernen der Schüler dient das (erweiterte) Curriculumsmodell nach Stein et al. (2007), welches in Abbildung 1 verdeutlicht wird (vgl. Eichler, 2011).

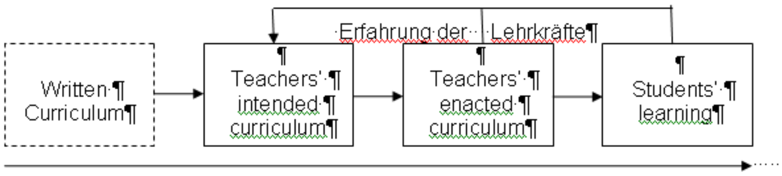


Abb.1

Wesentliches Ziel des Projekts ist es, die beiden zentralen, auf die Lehrkräfte bezogenen Aspekte, das *teacher's intended curriculum* und das *teacher's enacted curriculum*, zu untersuchen.

Der Untersuchung liegt eine theoretisch gewonnene Stichprobe zugrunde (Glaser & Strauss, 2010). Als Fälle werden zehn Referendare des Lehramts Gymnasium (Mathematik) im zweiten Ausbildungsjahr, zehn Absolventen, die am Beginn der zweiten Phase der Lehramtsausbildung Mathematik stehen sowie zehn Lehrkräfte des Gymnasiums mit mindestens fünf Jahren Unterrichtserfahrung untersucht.

Die Erhebung der Subjektiven Theorien zum Analysisunterricht basiert auf halbstrukturierten Leitfadeninterviews, in denen die Lehrkräfte zu den Aspekten Unterrichtsinhalte, Ziele des Analysiscurriculums, Materialien und (institutionelle) Rahmenbedingungen befragt werden. Die Fragen des Interviews werden vertieft durch die Einforderung von konkreten Beispielen, insbesondere Einstiege für neu zu erarbeitende Begriffe und Ideen.

3. Erste Ergebnisse

Um die Unterschiede der Subjektiven Theorien der Lehrkräfte hinsichtlich der Planung von Analysisunterricht mittels qualitativer Inhaltsanalyse zu kategorisieren, wurden die Aspekte Formalismus, Anwendung, Problemlösen und Schemaorientierung gewählt, die sich in bisherigen Studien als Kernkomponenten der Subjektiven Theorien von Lehrkräften herauskristallisiert haben (z.B. Eichler, 2011). Hier werden nur wenige Aspekte skizziert.

***Anwendung*:**

Ein wichtiges Ziel für einige der befragten Referendare ist die Einbeziehung von realitätsorientierten Beispielen und Fragestellungen:

> Herr S: „Positiv finde ich die Hervorhebung des Anwendungsbezugs. Das ist sicherlich ein Punkt für die Schüler, um sie zu motivieren aber nichtsdestotrotz

> sollte man die eigentliche Analysis bzw. den Analysisunterricht nicht nur darauf reduzieren.“
>
> Herr T: „Da eignen sich dann gut Anwendungsbeispiele und ich meine bei Anwendung geht es immer um eine echte Modellierung, […] dadurch dass man anwendungsbezogene Aufgaben doch vermehrt einbringt in den Unterricht, bleibt die Erkenntnis beim ein oder anderen ja doch hängen.“

Vorrangiges Ziel der „Anwender“ ist es, elementare Begriffe und Methoden der Analysis anhand von realen Problemen einzuführen und erfahrbar zu machen, dass die Methoden der Analysis einen (allerdings begrenzten) Nutzen haben können. Modellbildende Aktivitäten haben nach Einschätzung der Lehrkräfte auch das Potential, die Schülerinnen und Schüler mit der allfälligen Sinnfrage des Mathematikunterrichts zu versöhnen. Jedoch zeigt sich in den beiden obigen Äußerungen ein wesentlicher Unterschied: Herr S. sieht den Anwendungsbezug als Motivation für die Schüler und somit als Lernprinzip während Herr T. im Unterricht eine „echte Modellierung“ favorisiert und diese als Lernziel realisieren möchte (vgl. Förster, 2011).

***Schema- und Prozessorientierung*:**

Die Überzeugung, dass die Analysis und der Analysisunterricht aus einer Sammlung von Verfahren und Regeln bestehen, ist allein mit Bezug auf das Üben zum Abitur in einigen Äußerungen der Lehrkräfte sichtbar.

Für die deutliche Mehrheit der interviewten Lehrkräfte ist dagegen der Analysisunterricht ein problembezogener Erkenntnis- und Verstehensprozess, in den von Seiten der Schüler eigene Ideen eingebracht werden sollen. Zur entsprechenden Umsetzung im tatsächlichen Unterricht ist auch von der Lehrkraft eine entsprechende Kreativität gefordert, um die etablierten Elemente (z.B. Funktionsuntersuchung) durch die stärkere Betonung qualitativer Elemente in der Analysis zu bereichern, z.B. durch eine veränderte Aufgabenkultur. Das folgende Zitat belegt diese Sichtweise:

> Herr G.: „Wichtig ist mir im Analysisunterricht, dass die Schüler vornehmlich Ideen, Konzepte selbst entwickeln. […], dass es jetzt nicht sturer Frontalunterricht wird, wo man den Schülern erklärt und beibringt, wie was geht und was der richtige Weg ist, sondern, dass die halt selbst entwickeln und vielleicht eben entdecken“.

Zum momentanen Stand der Untersuchung scheint auch die sinnvolle Nutzung neuer Technologien (z.B. CAS-Taschenrechner) durch „Wege der Öffnung“ (Danckwerts & Vogel 2006, S. 147) eine Prozessorientierung zu fördern.

4. Diskussion

„Unbestritten – Analysis zu unterrichten ist ein schwieriges Geschäft." (Danckwerts & Vogel 2006, S. IX)

In welcher Form dieses „schwierige Geschäft" in der Praxis tatsächlich vollzogen wird, dazu hat die mathematikdidaktische Forschung bisher kaum Ergebnisse erbringen können. Die ersten Ergebnisse zu den Subjektiven Theorien von Lehrkräften zur Analysis lassen erahnen, dass die mitunter geäußerte Vermutung einer einseitigen Kalkülorientierung im Rahmen der Funktionsuntersuchung (Tietze et al., 2000) nicht in vollem Maße Geltung hat. Die Auswertung der Interviews hat dagegen ergeben, dass bezüglich der Lehrkräfte die tatsächliche Situation weitaus reichhaltiger ist und dass die empirische Untersuchung der Vorstellungen und Überzeugungen der Lehrkräfte (sowohl für die Lehreraus- als auch Fortbildung) lohnenswert ist.

Literatur

Danckwerts, R., Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten, München, Spektrum.

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. In C. Batanero, G. Burril & C. Reading, (Hrsg.), Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. New ICMI Study Series, Bd. 15. Heidelberg, New York: Springer.

Girnat, B., Eichler, A. (2011). Secondary teachers´ beliefs on modelling in geometry and stochastics. In: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman, (Hrsg.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer Dordrecht.

Förster, F. (2011): Secondary teachers' beliefs on teaching applications - Design and selected results of a qualitative case study. In: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman, (Hrsg.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer Dordrecht.

Glaser, B., Strauss, A. (2010). *Grounded Theory. Strategien qualitativer Forschung*. Bern, Huber.

Groeben, N., Wahl, D., Scheele, B. & Schlee, J. (1988). *Forschungsprogramm Subjektive Theorien. Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen: Franke.

Hiebert, G.D., & Grouws, J. (2007). The effect of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 371-404). Charlotte: Information Age Publishing.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 257-315). Charlotte: Information Age Publishing.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*. Wiesbaden, Vieweg.

Dominik FAAS, Landau

Schülerwettbewerbe beim Tag der Mathematik – Einblicke in Aufgaben und Schülerlösungen

Initiiert und koordiniert vom *Zentrum für Mathematik* findet seit 1992 jährlich der *Tag der Mathematik* statt. Dabei nehmen Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 11 und 12 an mathematischen Wettbewerben teil. Zu den verschiedenen Standorten gehörte im Jahr 2011 erstmals auch der Campus Landau der Universität Koblenz-Landau.

In diesem Beitrag soll zunächst auf die Ziele von Schülerwettbewerben im Fach Mathematik eingegangen werden. Eine besondere Rolle beim Erreichen dieser Ziele spielt die Auswahl der Aufgaben. Wir beschäftigen uns daher mit den Besonderheiten von (guten) Wettbewerbsaufgaben und stellen typische Aufgaben vom Tag der Mathematik 2011 vor. Schließlich untersuchen wir Auffälligkeiten bei den Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler. Daraus ergeben sich Hinweise auf Strategien und Schwierigkeiten mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler beim Problemlösen.

Ziele von Schülerwettbewerben

H. Langmann formuliert in Bezug auf den Bundeswettbewerb Mathematik einige Ziele, die auch für andere Schülerwettbewerbe Gültigkeit besitzen. Er schreibt unter anderem: „Der Wettbewerb möchte bei Schülerinnen und Schülern das Interesse für Mathematik wecken und sie zu intensiver Beschäftigung mit mathematischen Problemen anregen. Mathematisch Interessierten soll die Möglichkeit gegeben werden, an anspruchsvollen Aufgaben ihre Fähigkeiten zu erproben und weiterzuentwickeln. Außerdem möchte man mit einem Wettbewerb mathematisch besonders befähigte Schülerinnen und Schüler finden und fördern.“

Ein Mathematik-Wettbewerb bietet also für interessierte Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, Spaß und Freude bei der Beschäftigung mit Mathematik zu entwickeln und sich mit Problemstellungen auseinanderzusetzen, die über das hinausgehen, was im täglichen Unterricht üblicherweise behandelt wird. Auch kann im Rahmen eines Wettbewerbs eine Kontaktherstellung zwischen begabten Jugendlichen erfolgen und durch Teambildung die Kommunikation über Mathematik gefördert werden.

Der Tag der Mathematik

Der Tag der Mathematik richtet sich an die mathematisch begabten Schülerinnen und Schüler, jedoch nicht nur an die Spitzenbegabten. Beim Gruppenwettbewerb und den sogenannten *Mathematischen Hürden* (dabei wird das Lösen mathematischer Aufgaben mit einem Bewegungselement verbunden) nehmen Teams mit jeweils 3-5 Schülerinnen und Schülern teil, zusätzlich gibt es noch einen Einzelwettbewerb.

Aufgaben von Schülerwettbewerben

Beim Erreichen der genannten Ziele ist sind die Aufgaben des Wettbewerbs ein entscheidender Faktor. P. Jainta nennt im Zusammenhang mit der Fürther Mathematik-Olympiade unter anderem die folgenden Kriterien:

- „Lehrplankonformität“: Damit die Schülerinnen und Schüler grundsätzlich die Möglichkeit haben, eine Aufgabe zu lösen, muss diese mit schulischen Mitteln zu bewältigen sein. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Inhalte der Aufgaben dem „aktuellen Lernstoff“ entsprechen müssen, wodurch die Wahl geeigneter Lösungsmethoden zumindest teilweise vorgegeben wäre.
- „Non-Standard“: Die Wettbewerbsaufgaben weichen hinsichtlich der Art der Fragestellung von den im Unterricht üblicherweise gestellten Aufgaben ab. Eine Lösung erfordert daher „Fantasie, Kreativität und Ausdauer“.
- „Offene Aufgaben“: „Dosiert“ eingesetzt sind offene Aufgaben für einen Mathematik-Wettbewerb gut geeignet.

Ein Wettbewerb sollte somit (zumindest teilweise) aus Aufgaben bestehen, die das Problemlösen in den Vordergrund stellen. Zur Lösung sind dabei heuristische Strategien und Hilfsmittel (z.B. Probieren, Rückwärtsarbeiten, Einsatz bekannter Methoden, Tricks, usw.) hilfreich oder erforderlich. Zudem sollte es verschiedene Lösungswege geben, so dass die Wahl der einzusetzenden Methoden den Schülerinnen und Schülern überlassen wird. Dabei kann es auch erforderlich sein, Bekanntes in ungewohnten Situationen einzusetzen (Transfer).

Beispielaufgaben vom Tag der Mathematik 2011

Die folgenden Aufgaben sind Teil der Wettbewerbe vom Tag der Mathematik 2011. Sie wurden von einem Aufgabenausschuss des Zentrums für Mathematik unter Leitung von Prof. Dr. G. Stein und Alfred Böhm erstellt.

Wir betrachten zunächst die folgende Aufgabe, die als Einstiegsaufgabe in den Hürdenwettbewerb unter Einsatz der binomischen Formeln nicht allzu schwierig zu lösen ist. Die Formulierung der Aufgabe ist jedoch ungewohnt und das Ergebnis (x=2011) ist ein wenig unerwartet.

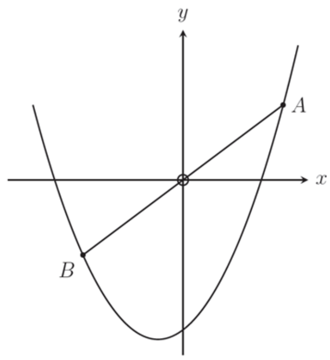
$$\boxed{\text{Für welches } x \text{ gilt } (10^{2009}+25)^2-(10^{2009}-25)^2=10^x \text{ ?}}$$

Bei der folgenden Aufgabe aus dem Einzelwettbewerb kann man sich der Lösung durch Probieren nähern. Alternativ kann diese aber auch vollständig systematisch mittels Schlussfolgerungen im Rahmen der Teilbarkeitslehre gefunden werden.

> Die fünfstellige Zahl $a679b$ ist durch 72 teilbar.
>
> Bestimmen Sie die Ziffern a und b.

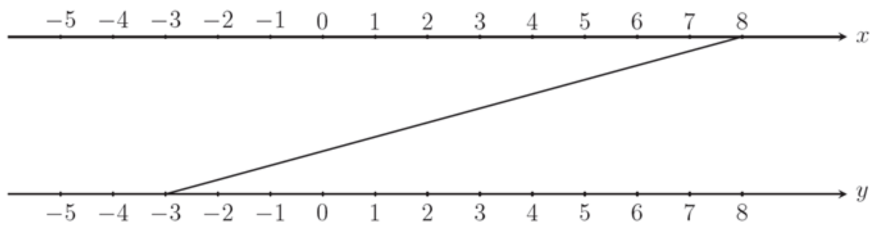
Bereits etwas schwieriger ist diese Aufgabe (aus dem Einzelwettbewerb). Eine geometrische Bedingung muss dabei in einer ungewohnten Situation (Parabeln, Analysis) in verwertbare Gleichungen umgesetzt werden.

> Die Punkte A und B liegen auf der Parabel $y = 4x^2 + 7x - 1$.
>
> Der Koordinatenursprung O ist Mittelpunkt der Strecke AB.
>
> Berechnen Sie die Länge von AB.



Schließlich liegt bei der folgenden offenen Aufgabe aus dem Gruppenwettbewerb, bei der auch ein Beweis zu führen ist, eine für Schülerinnen und Schüler ungewohnte Situation vor, da hier x- und y-Achse parallel zueinander verlaufen. Nachdem man zunächst (durch Probieren und Experimentieren) festgestellt hat, dass sich alle „Lösungsstrecken" in einem Punkt schneiden, ist eine Begründung dafür zunächst keinesfalls naheliegend. Es können dabei jedoch vielfältige Methoden aus unterschiedlichen Bereichen (Geometrie, Analysis, Vektorrechnung, …) zum Einsatz kommen.

> Eine Lösung der Gleichung $3x + 4y = 12$ ist $x = 8$ und $y = -3$.
>
> Man kann diese Lösung auf zwei parallelen Achsen eintragen und durch eine sogenannte Lösungsstrecke miteinander verbinden:



> Bestimmen Sie weitere Lösungen der Gleichung $3x + 4y = 12$, tragen diese auf den parallelen x- und y- Achsen ein und verbinden diese Lösungspunkte mit einer Strecke.
>
> Welche Eigenschaft haben diese Lösungsstrecken?
>
> Begründen Sie diese Eigenschaft.

Ein Blick auf die Schülerlösungen (Landau, 2011)

Bei der (nicht empirischen) Untersuchung der Lösungen der Schülerinnen und Schüler zu den Wettbewerbsaufgaben 2011 in Landau konnten die folgenden Aspekte festgestellt werden:

- Bei der oben vorgestellten Aufgabe zur Teilbarkeit („Für welche Ziffern a, b ist a679b durch 72 teilbar?“) nutzten viele der Schülerinnen und Schüler ein Wechselspiel zwischen Probieren und dem Einsatz hilfreicher Schlussfolgerungen (wie beispielsweise der Erkenntnis, dass b gerade sein muss), um zur Lösung zu kommen. Dies entspricht einer Strategie des „halbsystematischen Probierens“.
- Beim Umsetzen von (ungewohnten) geometrischen Bedingungen in algebraische Gleichungen traten oft Schwierigkeiten auf. War dies gefordert kamen viele Schülerinnen und Schüler nicht weiter oder nutzten einen fehlerbehafteten oder sogar völlig unsinnigen Schluss.
- Dennoch gab es – hinsichtlich des Schwierigkeitsgrads der Aufgaben und der begrenzten zur Verfügung stehenden Zeit – auch einige bemerkenswert geschickte Lösungen oder Lösungsansätze. Dabei wurden bekannte Methoden kreativ und zielführend eingesetzt.

Eine abschließende Frage

Nachdem wir in diesem Beitrag Kriterien für Aufgaben von mathematischen Schülerwettbewerben untersucht und einige dieser Aufgaben vorgestellt haben, soll die Frage aufgeworfen werden, ob es sinnvoll ist, mehr solcher Aufgaben auch im (täglichen) Mathematik-Unterricht zu behandeln. Es handelt sich dabei um Non-Standard-Aufgaben, bei denen Probleme gelöst werden, die den Einsatz verschiedener heuristischer Strategien und Methoden in unbekannten Situationen erfordern. Diese Frage soll aber hier nicht beantwortet werden.

Literatur

Langmann,H. (1997): Bundeswettbewerb Mathematik. In:Der Mathematikunterricht, 43(6), 23– 32.

Jainta,P. (2005): Gedanken zur Förderung mathematisch interessierter Schüler: am Beispiel der Fürther Mathematik-Olympiade. In:Der Mathematikunterricht, 51(5), 55-59.

Fegert,K. (2005): Bundeswettbewerb Mathematik. Gedanken zu Anforderungen und Aufgabenstellung. In:Der Mathematikunterricht, 51(5), 37-43.

Christian FAHSE, Landau

Division durch Null

In diesem Artikel wird eine Einteilung der (Fehl-)Vorstellungen zur Division durch Null vorgestellt, die sich aus einer fragebogenbasierten Studie ergeben hat.

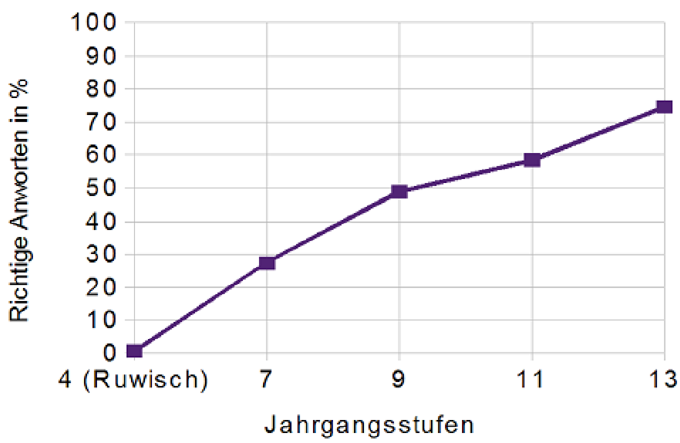
Die deskriptiv angelegte Studie umfasst 311 Schülerinnen und Schüler aus vier Jahrgangsstufen eines rheinland-pfälzischen Gymnasiums. Von diesen gehörten 73 der siebten, 86 der neunten, 89 der elften und 63 der dreizehnten Jahrgangsstufe an. Aus organisatorischen Gründen fand die Befragung der elften Jahrgangsstufe zu Beginn der Jahrgangsstufe 12 statt. Die Befragten äußerten sich schriftlich zu

- „Was ist das Ergebnis der Aufgabe 7:0?“
- „Begründe Deine Meinung so, dass jemand, der die Antwort nicht kennt, es versteht.“

Darüber hinaus wurde u. a. gefragt, woher das Ergebnis bekannt war. Neben einer Sichtung der Vorstellungen zur Null und zur Division in diesem Kontext interessierte zunächst, wie viele Befragte im Verlauf der Schulzeit eine richtige Antwort nennen. Da die Studie noch nicht abgeschlossen ist, sind alle Befunde als vorläufig zu betrachten.

Ergebnisse der Befragung

Das Untersuchungsdesign hat quasi-längsschnittlichen Charakter: Unter der Annahme, dass sich die Jahrgangsstufen in ihrer Entwicklung nicht wesentlich unterscheiden, gewinnt man einen Eindruck, wie sich die Schülervorstellungen mit der Zeit verändern. Der rein deskriptive Befund hat dabei bereits eine hohe Praxisrelevanz, da die Division durch Null in so gut wie jedem Gymnasialjahr angesprochen wird. Während am Ende der Grundschule fast niemand die richtige Antwort nennt, wie eine Studie von Ruwisch (2008) zeigt, sind es in der siebten Jahrgangsstufe etwa ein Viertel, in der neunten die Hälfte und selbst im Abschlussjahrgang nur drei Viertel.



Das Thema Division durch Null findet sich weder im gültigen Lehrplan noch in den Bildungsstandards für die Grundschule. Bei Sichtung eines Querschnittes an aktuellen Grundschullehrwerken fanden sich nur bei einem ein Merksatz und wenige Übungen zur Division durch Null. Es ist deshalb plausibel, dass das Thema in der Grundschule meist nur nebenbei oder gar nicht behandelt wird. Daher erstaunt die fehlende Kenntnis am Ende der vierten Klasse nicht.

Im Gegensatz dazu wirft die weitere Entwicklung Fragen auf: Ab der fünften Jahrgangsstufe wurde das Thema nachweislich in den untersuchten Klassen behandelt und dennoch setzt sich die richtige Antwort nur langsam durch. Die Behandlung im Unterricht hat offensichtlich keine einschneidende Wirkung, die sich im Graphen in einer deutlichen Stufe mit nachfolgendem Verbleib auf etwa gleichem Niveau zeigen würde. Hingegen wächst der Anteil der richtigen Antworten langsam, aber recht stetig. Dieser graduelle Zuwachs könnte ein Indiz dafür sein, dass das Gelernte in Konflikt mit aus Schülersicht bewährten Konzepten tritt, von denen sich die Lernenden nur langsam lösen.

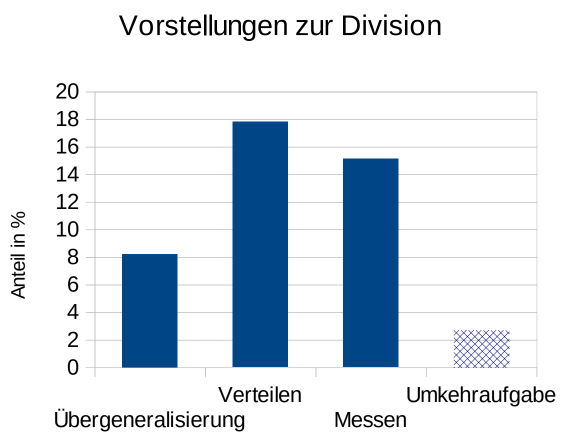
Zu dieser Vermutung könnte auch der Befund passen, dass etwa 40% der Befragten meinen, das von ihnen genannte Ergebnis aus der Grundschule zu wissen. Zunächst scheint dieser Befund im Widerspruch zu der oben ausgeführten geringen oder fehlenden Behandlung des Themas in der Primarstufe zu stehen. Allerdings ist der Anteil derer, die ein falsches Ergebnis nennen, bei denen, die sich auf die Grundschule beziehen, signifikant höher als bei denen, die dies nicht tun ($t(71)=3.149$, $p=.001$ in der 7. Jahrgangsstufe, $t(87)=2.020$, $p=.023$ in der 11. Jahrgangsstufe). Folgende Erklärung bietet sich an: Das Thema wurde tatsächlich nur marginal in der Grundschule behandelt. Aber insbesondere die falschen Ergebnisse 0 und 7 lassen sich mit konkreten Verteilungsvorstellungen begründen (s. unten), wodurch möglicherweise die Assoziation der Grundschule nahe gelegt wird.

Vorstellungen zur Null und zur Division

Was sind typische (Fehl-)Vorstellungen, die man bei Befragten der 7. Klasse findet und deren Entstehung in die Grundschule zurückreicht? Relevant sind hier die Vorstellungen zur Null und zur Division. Zunächst wird eine Dreiteilung der Vorstellungen zur Null in kardinal – operational – codierend vorgeschlagen, die einerseits die vielfältige Literatur zu dem Thema (u. a. Hefendehl-Hebeker 1981, 1982; Padberg 2005) zu systematisieren hilft, also stoffdidaktisch orientiert ist, und andererseits durch die Sichtung der Schülerantworten angeregt wurde.

- Eine **kardinale** Auffassung liegt vor, wenn bei Null an eine Situation gedacht wird, in der man grundsätzlich zählen könnte, in welcher die Zählhandlung aber mangels Objekten nicht startet, z. B. „die Anzahl der Pralinen in einer leeren Schachtel".
- Eine **operationale** Auffassung betont, dass nichts getan wird. Dies ist z. B. der Fall, wenn an das Nicht-Hinlegen eines Siebenerpäckchens in $0 \cdot 7$ oder abstrakter, wenn an die Neutralität der Null bei der Addition als Verknüpfung gedacht wird.
- Die **codierende** Auffassung nimmt die Null als Zeichen für das Fehlen oder die Sinnlosigkeit eines Ergebnisses. Hier liegt die Betonung weniger auf dem „Nicht-Handeln" als auf dem „Es kommt nichts heraus", wobei das Wort „nichts" die Codierung eines fehlgeschlagenen Prozesses mit 0 nahelegt.

In den Begründungen der Schülerinnen und Schüler fanden sich vor allem zwei Vorstellungen zur Division: das Verteilen und das Aufteilen/Messen im Sinne von „die 0 passt unendlich mal in die 7". Nur wenige Befragte sahen die Division als Umkehraufgabe zur Multiplikation an, wie es fachlich in diesem Fall, z. B. als Probe, am ergiebigsten wäre. Die Übergeneralisierung, dass alle Rechnungen mit 0 auf das Ergebnis 0 führen, überlagerte bei einigen die Vorstellungen zur Division.



Relative Häufigkeiten dieser Vorstellungen in der Jahrgangsstufe 7 finden sich in der nebenstehenden Abbildung, wobei zu beachten ist, dass die des Verteilens sich nur auf diejenigen Befragten bezieht, die einen konkreten Sachzusammenhang nannten. Die Häufigkeit der Verteilungsvorstellung wird also eher unterschätzt.

Die Vorstellungen zur Division sind nun mit denen zur Null zusammenzubringen. Dabei ergeben sich typische Argumentationsmuster, die alle nachgewiesen werden konnten. Wer im Zusammenhang des Verteilens kardinal „denkt", stellt fest, dass es keine Personen gibt, auf die man z. B. 7 Äpfel aufteilt und erachtet die Aufgabe als unsinnig. Beim „Hineinpassen" wird man, je nachdem wie man das Auftreten des unvermeidlichen Restes beurteilt, zu den Ergebnissen „geht nicht" oder „unendlich" kommen. Bei der operationalen Auffassung gibt es zwei interessante Fälle: Liegt das Augenmerk auf dem Verteilenden, der ja gar nicht verteilt, also 7 Äpfel behalten kann, oder eher auf dem, was verteilt wird, nämlich nichts? Beide Sichtweisen, vor allem aber die kardinale, kommen auch in Verbindung mit der codierenden vor: Es wird die Krux der Aufgabe erkannt und mit dem Ergebnis 0 beschrieben.

Aspekt	**Null als Zahl**	**Null als Divisor (7:0)**	**Ergebnis**
Kardinal	Zählvorgang prinzipiell möglich - keine Objekte	Verteilen: mangels Personen sinnlos	Geht nicht
		Messen: die 0 passt unendlich oft in die 7 und es bleibt noch ein Rest	Unendlich/ geht nicht
operational	Handlung prinzipiell möglich - Anweisung, nichts zu tun	Teile die 7 nicht, behalte 7 (Perspektive des Verteilenden)	7
		Es wird nichts verteilt. (Perspektive der Empfangenden)	0
Codierend	Zeichen für einen Prozess ohne Ergebnis	Die Division ist nicht ausführbar.	0

Konsequenzen für die Unterrichtspraxis

Mangels natürlicher Sachprobleme, die auf eine Division durch Null führen, ist eine Behandlung dieses Themas in der Primarstufe nicht zu empfehlen und auch nicht notwendig. Wichtig ist aber, die Vorstellungen zur Null und zur Division sorgfältig anzubahnen. Bei der Null sollte man den kardinalen Aspekt abgrenzend betonen, auch wenn alle drei Auffassungen ihre Berechtigung haben, da sie im Alltag zu finden sind. Bei der Division ist eine Verengung der Vorstellungen auf das Verteilen zu vermeiden, indem man die auch im Hinblick auf Einheiten und Bruchzahlen wichtigen Aspekte Aufteilen/Messen und Umkehraufgabe gleichberechtigt neben das Verteilen stellt. In der Sekundarstufe sollte man vorbereitet sein, einer Reihe von hartnäckigen Fehlvorstellungen zu begegnen. Dies kann man jedoch auch als Chance nutzen: Das Thema bietet eine hervorragende Gelegenheit zur Stärkung der Argumentationskompetenz, da durch die Vielfalt der Schülervorstellungen die Diskussion über dieses scheinbar einfache Thema von Anfang an kontrovers und damit intensiv verläuft.

Literatur

Hefendehl-Hebeker, L. (1981): Zur Behandlung der Zahl Null im Unterricht, besonders in der Primarstufe. In: mathematica didactica 4, S. 239-252.

Hefendehl-Hebeker, L. (1982): Die Zahl Null im Bewußtsein von Schülern. Eine Fallstudie. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 2, Heft 1, S. 47-65.

Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg, Spektrum Akad. Verlag.

Maria FAST, Wien

Wie Kinder addieren und subtrahieren. Längsschnittliche Analysen von Klasse 2 bis Klasse 4

Die vorgestellte Studie zielt darauf ab, Entwicklungen im additiven Rechnen von der zweiten bis zur vierten Schulstufe nachzuzeichnen. Insbesondere wird der Frage nachgegangen, welche Lösungsmethoden die Kinder jeweils praktizieren.

Theoretischer Hintergrund und empirische Evidenz

Um zwei- bzw. dreistellige Zahlen addieren und subtrahieren zu können, bedarf es zweier grundlegender tragfähiger Konzepte, nämlich ein Wissen über das Addieren und Subtrahieren von (einstelligen) Zahlen und der dabei geltenden (Rechen-)Gesetze sowie ein Verständnis von Stellenwert (Verschaffel, Greer & De Corte 2007, S. 566).

Kinder ermitteln die Ergebnisse beim Rechnen sowohl zählend als auch rechnerisch (über den Einsatz von Ableitungsstrategien) oder sie rufen automatisiertes Wissen ab, indem sie auf Basisfakten zurückgreifen. Bei der Entwicklung des Rechnens im Zahlenraum bis 20 kann eine gewisse Reihenfolge vom Zählen über den Einsatz von Ableitungsstrategien zum automatisierten Wissen angenommen werden (Gaidoschik 2011).

Bei Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 100 ist es nicht mehr möglich, direkt über automatisiertes Wissen die Lösung abzurufen. Hier steht das Wissen geeigneter Methoden/Strategien im Mittelpunkt, um die Zahlen, meist zerlegt in ihre Stellenwerte, zu verknüpfen.

Universelle Lösungsmethoden, die bei jeder Addition und Subtraktion grundsätzlich möglich sind, sind *Rechnen in den Stellenwerten* und *schrittweises Rechnen*:

- Beim *schrittweisen Rechnen* wird nur eine Zahl zerlegt. Schrittweises Rechnen hat den Vorteil, dass immer mit dem bei der Teiloperation erhaltenen Ergebnis weiter gerechnet wird und beim letzten Rechenschritt direkt das Endergebnis präsent ist.
- Beim *Rechnen in den Stellenwerten* werden jeweils beide Zahlen in ihre Stellenwerte zerlegt. Dies kann erfolgen, indem in Zahlganzheiten oder nur mit den Ziffern in den Stellenwerten gerechnet wird. Generell erfordert das Rechnen in den Stellenwerten größere Gedächtnisleistungen, weil die Zwischenergebnisse, die sich in den einzelnen Stellen ergeben, nachfolgend verknüpft werden müssen. Stellenweises

Rechnen steht in sehr engem Zusammenhang mit den schriftlichen Rechenverfahren.

Die beiden *Lösungsmethoden* treten auch *kombiniert* auf, in dem z. B. mit stellenweisem Rechnen begonnen und dann mit schrittweisem Rechnen fortgesetzt wird.

Nicht universelle Methoden, wie z. B. *Ergänzen, Nutzen einer Hilfsaufgabe* und *Gegen- bzw. gleichsinniges Verändern* bieten sich nur dann an, wenn die verknüpfenden Zahlen besondere Eigenschaften aufweisen.

Der Einfluss des Stellenwertverständnisses auf das Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben zeigt sich unterschiedlich. Schülerinnen und Schüler mit guten Kenntnissen des Dezimalsystems machen weniger Fehler und verwenden vielfältigere Lösungsmethoden als Schülerinnen und Schüler mit schlechteren Kenntnissen des Dezimalsystems (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema & Empson 1997). Thompson und Bramald (2002) analysierten hingegen, dass Schülerinnen und Schüler mit hoher Lösungsquote nicht zwingend gute Kenntnisse des dekadischen Systems aufweisen. Nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren überwiegt das dadurch implizierte Verständnis des dekadischen Systems, indem das Rechnen in den Stellenwerten betont wird (Selter 2000).

Methodisches Vorgehen – Design der Studie

Die vorliegende Längsschnittstudie (Panelstudie) in zwei Klassen (N = 44) geht mit sechs Erhebungszeitpunkten von der zweiten bis zur vierten Schulstufe in einem qualitativen Forschungsdesign der Frage nach, welche typischen Entwicklungsverläufe sich auf der Basis üblichen Mathematikunterrichts in Österreich ergeben. Da immer wieder dieselben Aufgaben eingesetzt und gelöst werden, kann die Entwicklung in Bezug auf das Ausführen der Rechenoperationen und die Konzepte von Stellenwertverständnis verfolgt werden. Die ausgewählten Rechnungen können zum Großteil im Kopf gelöst werden, insbesondere erleichtern nicht universelle Lösungsmethoden den Lösungsvorgang.

Die Auswertung erfolgt über die eingesetzten Lösungsmethoden und über die Lösungsquote. Ziel ist, durch Fallvergleich und Fallkontrastierung einen Überblick über Ähnlichkeiten und Unterschiede im Datenmaterial zu erhalten und daraus Typen abzuleiten (Kelle & Kluge 2010).

Die Typenbildung ist derzeit noch nicht abgeschlossen. Bereits identifiziert werden konnten drei Typen, die sich als konsistent in Bezug auf die Lösungsmethoden sowohl innerhalb einer Erhebung zu einem bestimmten Messzeitpunkt als auch über die Messzeitpunkte hinweg erweisen. Weitere, noch nicht ausgeführte Typisierungen ergeben sich vermutlich aus den Kindern, deren Lösungsmethoden von Erhebungszeitpunkt zu Erhebungszeitpunkt wechseln.

Erste Ergebnisse

Charakterisiert werden in Gestalt von drei Typen diejenigen Kinder, die in Bezug auf die Lösungsmethoden überwiegend konsistent vorgehen. Ihr Lösungsweg wird jeweils prototypisch am Beispiel der Aufgabe 784 – 199 beschrieben.

Typus 1: *Stellenwertrechner/innen mit hoher Lösungsquote*

> 784 – 199: „4 – 9 geht nicht, aber 14 – 9 = 5. Hinten schreibe ich **5** hin. 8 – 9 geht auch nicht, aber 18 – 9 geht, das ist 9. 1 muss von 9 abgezogen werden, weil der Zehner überschritten wurde, das ist **8**. 7 – 1 = 6 und 1 muss von 6 wieder wegen der Überschreitung abgezogen werden, das ist dann **5**." (Ergebnis: 585)

Kinder dieses Typus rechnen von Beginn der zweiten Schulstufe weg fast nur in den einzelnen Stellenwerten, die sie entsprechend der gültigen Rechengesetze verknüpfen. Sie wissen um die Bedeutung von Zehnern und Einern, bündeln bzw. entbündeln und haben durchgehend ein Verständnis von Stellenwert. Sie rechnen weniger mit den Zahlganzheiten, sondern nur mit den Ziffern in den Stellenwerten und setzen auch schriftliche Rechenverfahren ein. Ableitungsstrategien bzw. vorteilhaftes Rechnen werden nie eingesetzt. Wenngleich im Unterricht nicht thematisiert, weil in Österreich der Lehrplan *Ergänzen mit Erweitern* als Normalverfahren vorschreibt, wird bei der Subtraktion häufig *Entbündeln mit Abziehen* praktiziert. Die Kinder erreichen eine hohe Lösungsquote und sind auf ihre Art flexibel, allerdings nur innerhalb der einzelnen Stellenwerte, die sie entsprechend bündeln bzw. entbündeln.

Typus 2: *Stellenwertrechner/innen mit niedriger Lösungsquote*

> 784 – 199: „9 – 4 = 5; 9 – 8 = 1; 7 – 1 = 6; daher 615"

Kinder dieses Typus unterscheiden zu Beginn der zweiten Schulstufe nicht zwischen Zehnern und Einern und können daher Rechnungen mit zweistelligen Zahlen nicht lösen. Sie rechnen durchgehend fast nur stellenweise. Zu Beginn der dritten Schulstufe zeigen sich vielversprechende Ansätze zum Rechnen mit Zahlganzheiten, vorwiegend *kombinierte Lösungsmethoden*, die jedoch nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren Mitte der dritten Schulstufe gänzlich verschwinden. Die Kinder verwenden bis zum Ende der vierten Schulstufe bei den angebotenen Aufgaben kaum die im Unterricht angebotenen algorithmischen Verfahren, sondern rechnen mit den Ziffern in den Stellenwerten, die sie speziell bei der Subtraktion streng separat verknüpfen. Im Unterschied zum Typus 1, den *Stellenwertrech-*

ner/innen mit hoher Lösungsquote, bündeln bzw. entbündeln sie nicht. Die Kinder tauschen bei der Subtraktion Minuend und Subtrahend, um innerhalb eines Zehners die Ziffern verknüpfen zu können. Bei der Addition wird der Übertrag im nächsthöheren Stellenwert oft nicht mitgenommen. Verlässliche hohe Lösungsquoten ergeben sich erst, wenn schriftliche Rechenverfahren vorschriftsmäßig verwendet werden. Diese Kinder setzen nie *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* ein.

Typus 3: *Zahlenrechner/innen mit hoher Lösungsquote*

784 – 199: „199 + 1 = 200; 200 + 584 = 784; + 1 noch dazu, ergibt 585“

Kinder dieses Typus setzen ab Ende der zweiten Schulstufe vorwiegend *schrittweises Rechnen* und *kombinierte Lösungsmethoden* ein. Die in der Untersuchung eingesetzten Rechnungen lösen sie, wie fachdidaktisch erwünscht, durch Kopfrechnen, ohne schriftliche Rechenverfahren. Wenn sie schriftliche Rechenverfahren benützen, dann werden sie normgerecht durchgeführt. Sie setzen auch nicht universelle Lösungsmethoden, wie *Ergänzen* bzw. *Strategien zur Veränderung und Kompensation* ein, dies besonders am Ende der vierten Schulstufe. Sie können als flexible, weniger als adaptive Rechner/innen charakterisiert werden.

In dieser Kategorisierung fehlen die *Zahlenrechner/innen mit niedriger Lösungsquote*. Diese kommen in dieser Untersuchung/Stichprobe nicht vor.

Literatur

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1997): A Longitudinal Study of Invention and Understanding in Children's Multidigit Addition and Subtraction. Journal for Research in Mathematics Education 29 (1), 3–20

Gaidoschik, M. (2010): Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt/Main et al.: Peter Lang

Kelle, U. & Kluge, S. (2010): Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung (2. überarb. Auflage). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaftten

Selter, C. (2000): Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. Journal für Mathematik-Didaktik, 21 (3–4), 227–258

Thompson, I. & Bramald, R. (2002): An investigation of the relationship between young children´s understanding of the concept of place value and their competence at mental addition (Report for the Nuffield Foundation). Newcastle upon Tyne: University of Newcastle upon Tyne.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007): Whole Number Concepts and Operations. In Lester, F. K. Jr. (Hrsg.): Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (557–628). Charlotte, NC: Information Age Pub

Anne FELLMANN, Frankfurt

Umsetzung von Implementationsversuchen in den einzelnen Phasen der Lehrerbildung –untersucht an der Implementation von Formen Wechselseitigen Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht der Grundschule (IPhaMat)

1. Forschungsinteresse und konzeptionelle Überlegungen

In der Mathematikdidaktik herrschen zwei Paradigmen in Bezug auf die Ermöglichung bzw. Durchsetzung von Unterrichtsinnovationen vor: das Interpretative Paradigma und das Instruktionistische Paradigma. Forschungen unter beiden Paradigmen konnte man bisher nur bedingt umfassende Veränderungen der mathematischen Unterrichtskultur nachweisen.

In dem Projekt soll langfristig zum einen der Weg zu einer wirksamen Unterrichtsveränderung angeregt werden, zum anderen werden die beiden bisher zumeist unvereinten Paradigmen berücksichtigt.

Es wird untersucht, wie Lehrkräfte der Mathematik in der Grundschule in den drei Phasen ihrer professionellen Laufbahn, Studium – Referendariat - Einstellung, ein innovatives Unterrichtskonzept zum kooperativen Lernen aufgreifen und umsetzen. Längerfristiges Ziel ist die Weiterentwicklung von Diagnose- und Handlungskompetenz. In der Weiterentwicklung dieser Kompetenz sehen wir aus interpretativer Sicht den Schlüssel zur erfolgreichen Umsetzung von innovativen Unterrichtskonzepten. Aus instruktioneller Sicht wird das weitgehend ausgearbeitete Unterrichtskonzept des „Wechselseitigen Lehrens und Lernens“ (WeLL) nach Wahl verwendet.

Konkret wird hierzu ein spezifisches Design einer phasenübergreifenden Veranstaltung in der Lehrerbildung für Studierende. LiV und Lehrkräfte mit einem innovativen Konzept kooperativen Lernens verknüpft, in welchem Unterricht mittels Formen wechselseitigen Lehrens und Lernens von Studierenden/LiV/Lehrkräften geplant und im Unterricht erprobt wird. Dieses Vorgehen soll ermöglichen, dass zum einen Handlungsanleitungen (ausgearbeitete und erprobte Anweisungen und Instruktionen) bereit gestellt werden und zum anderen professionelle Handlungsautonomie gefördert wird.

Der Fokus der Analysen richtet sich vor allem auf die Rekonstruktion der unterschiedlichen Perspektiven, Deutungsmuster und Umsetzungsweisen, welche die beteiligten Personen aus den drei Phasen der Lehrerbildung in ihrem Unterricht hervorbringen.

2. Methodische Überlegungen

Zur Datengenerierung werden zwei verschiedene Erhebungsverfahren eingesetzt: Gruppendiskussionen und Experteninterviews.

Hinsichtlich der eingesetzten Analyseverfahren wird auf die „Dokumentarische Methode der Interpretation“ nach Bohnsack zurückgegriffen.

Mittels der Dokumentarischen Methode der Interpretation können konjunktive Handlungsorientierungen zum Umgang einer Gruppe mit dem Konzept des WeLL rekonstruiert und typisiert werden, welche sich in der jeweiligen Praxis dokumentieren. Dadurch kann ein Zugang zu den Handlungspraxen der genannten drei Professionsgruppen eröffnet werden. Darüber hinaus können mittels der Experteninterviews individuelle Erfahrungen bzw. Handlungspraxen zur Umsetzung des Konzepts herausgearbeitet werden.

Die Untersuchungsergebnisse werden aus einer Triangulation von Gruppendiskussionen und Experteninterviews der beteiligten Lehrenden evaluiert. Ziel ist es, die sich zeigenden Ausprägungen (Orientierungsfiguren) der Gruppendiskussionen mit Hilfe der Experteninterviews individuell zu begründen.

Mittels der Komparativen Analyse wird die Rekonstruktion einer (mehrdimensionalen) Typenbildung von Erfahrung im Umgang mit bzw. bei der Umsetzung des WeLL in Bezug auf die drei Professionsgruppen angestrebt. Bei der „Sinngenetische Typenbildung“ werden zunächst zentrale Orientierungsrahmen im fallübergreifenden wie fallinternen Vergleich in ihrer Unterschiedlichkeit von den spezifischen Fällen abgelöst und auf diese Weise abstrahiert. Es werden unterscheidbare Typen identifiziert.

Bei der darauf aufbauenden „Soziogenetischen Typenbildung“ wird nicht nur ein Orientierungsrahmen rekonstruiert, sondern mittels komparativer Analyse ein Zusammenhang zwischen Orientierungsrahmen und Sozialdimension (bspw. generations-, milieu- oder geschlechtsspezifisch) bestimmt.

3. Erste Datenanalyse

Die Datenerhebung ist abgeschlossen.

In den ersten Analysen der Gruppendiskussionen zeigen sich deutliche, noch als vorläufig einzuschätzende Unterschiede in den Deutungsmusters unter den drei Professionsgruppen. Hier zeigt sich z.B., dass die Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst in ihrem professionellen Selbstverständnis weiterhin daran orientiert sind, dass Unterricht trotz Umsetzung einer konstruktivistischen Lehr-Lernmethode planbar ist. Ein Unterricht, der so verläuft wie geplant, steht bei ihnen im deutlichen positiven Horizont. Je mehr die Gestaltung der Lernprozesse allerdings –wie beim Konzept des WeLL- in der Autonomie der Lernenden selbst liegt und damit von der jeweiligen Gruppe und von den einzelnen Individuen abhängt, umso mehr würde sich professionelles Handeln der Lehrkraft dadurch auszeichnen, sich flexibel auf Störungen, Umwege und divergente Lernstrategien einzulassen und sie zu begleiten (reflexiver Umgang mit Ungewissheit als pädagogische Kernkompetenz). Spontan und flexibel reagieren zu müssen, steht bei den Lehrkräften allerdings im deutlich negativen Horizont und bedeutet für sie, dass die Lehrkraft noch mehr denken und Vorarbeit leisten muss.

Eine weitere Orientierung dokumentiert sich in einer Studierendengruppe, bei der das Funktionieren der Methode als Methode (dies steht im positiven Horizont des Orientierungsrahmens) oberste Priorität hat. Die Lehrkraft hat hier zunächst die Verantwortung für das Funktionieren. Diese alleinige Verantwortung der Lehrkraft wird im weiteren Diskurs aufgeweicht und nun die Schülerinnen und Schüler für das Misslingen der Methode implizit verantwortlich gemacht, da diese leicht ablenkbar seien und entsprechende Kompetenzen noch nicht mitbringen würden.

Auf der einen Seite wollen die Studierenden die Schülerinnen und Schüler mittels WeLL zu Selbstbildungsprozessen anregen, auf der anderen Seite fällt es ihnen schwer, die Kontrolle abzugeben. Dies müsste allerdings umso mehr geschehen, je mehr die Lehrkraft den Unterricht nicht frontal und instruktiv-leitend gestaltet, sondern den Schülerinnen und Schülern mehr Freiraum gibt. In dieser Gruppe wird an einem tradierten Rollenverständnis der Lehrkraft festgehalten.

4. Ausblick

Die gewonnenen Erfahrungen sollen dann im Sinne der Professionalisierung im Rahmen der Lehrerbildung fruchtbar genutzt werden und in entsprechenden Maßnahmen der Lehreraus- und Weiterbildung münden.

Langfristig könnte z.B. angestrebt werden, zeitlich längerfristige Angebote zur Professionalisierung von (angehenden) Lehrkräften zu initiieren, z.B. in Form eines begleitenden Interventionsangebotes über Studium und Referendariat hinaus bis hin zu den ersten 3-4 Berufsjahren oder sogar darüber hinaus, um so Kernkompetenzen wie Diagnose- und Handlungskompetenz weiter zu entwickeln.

Literatur

Bohnsack, R. (1991): Rekonstruktive Sozialforschung. Einführung in Methodologie und Praxis qualitativer empirischer Forschung. 6. durchgesehene und aktualisierte Auflage. Opladen und Farmington Hills : Leske+Budrich

Bohnsack, R., Nentwig-Gesemann, I., Nohl, A. (Hrsg.) (2007): Die dokumentarische Methode und ihre Forschungspraxis. Grundlagen qualitativer Sozialforschung. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften

Combe, A./Helsper, W. (Hrsg.).(1996): Pädagogische Professionalität: Untersuchungen zum Typus pädagogischen Handelns. Frankfurt am Main: Suhrkamp Taschenbuch Verlag

Kelle, U./Kluge, S. (1999) Vom Einzelfall zum Typus. Opladen.:Leske+Budrich

Krummheuer, G: Wie kann man Unterricht verändern? Innovation von Unterricht aus Sicht eines Ansatzes der Interpretativen Unterrichtsforschung. In: JMD 25 (2004) Heft 2. 112-129

Nohl, A. M. (2006): Interview und dokumentarische Methode. Anleitungen für die Forschungspraxis. Wiesbaden. Verlag für Sozialwissenschaften

Wahl, D. (2006): Lernumgebungen erfolgreich gestalten. Vom trägen Wissen zum kompetenten Handeln. 2. erw. Auflage. Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt

Marei FETZER, Frankfurt

Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht?

Das Argumentieren gehört zum Mathematikunterricht. Als eine der allgemeinen mathematischen Kompetenzen hat es seinen festen Platz in den Bildungsstandards (KMK 2005). Aber wie argumentieren Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule? Welche Praxis des Argumentierens finden wir im Unterrichtsalltag vor? Was wird von den Beteiligten als angemessene Form des Argumentierens akzeptiert? Toulmins argumentationstheoretischer Ansatz bietet die Möglichkeit, das Argumentieren von Grundschulkindern theoretisch zu fassen.

In seinem Werk ‚The Uses of Argument' (2003) geht Toulmin in allgemeiner Weise der Frage nach, wie Argumente eingesetzt werden, um andere zu überzeugen. Dabei stellt er heraus, dass Argumentationen eine bestimmte Grundstruktur aufweisen. Zentrale Elemente einer Argumentation sind Datum, Konklusion und Garant. Diese funktionalen Argumentationskategorien hat Toulmin grafisch in einem Layout wiedergegeben (Abbildung 1):

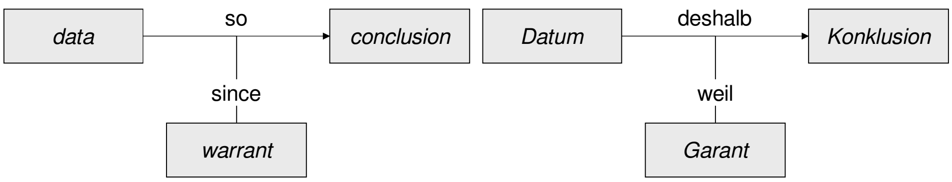


Abbildung 1: Toulmin-Layout, Grundstruktur von Argumentationen

Die Konklusion ist die Aussage, die belegt werden soll. Das Datum ist eine unbestrittene Tatsache, ein Sachverhalt bzw. eine Information, auf die verwiesen werden kann als Antwort auf die Frage: „Was nimmst du als gegeben?" Die kürzest denkbare Argumentation würde folglich lauten: Datum, deswegen Konklusion. Garanten sind allgemeine, hypothetische Aussagen, die als Brücken dienen können und die Schlüsse vom Datum auf die Konklusion legitimieren. Sie entsprechen laut Toulmin einer erweiterten Möglichkeit zu argumentieren und können als Antwort auf die Frage „Wie kommst du dahin?" gedacht werden. Diese drei Elemente bilden den Kern einer Argumentation: Aus dem Gegebenen (Datum) lässt sich die Konklusion ziehen, weil der Garant diesen Schluss erlaubt.

Auf der Grundlage von Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz wird es möglich zu rekonstruieren, welche *Funktion* einzelne Handlungen oder Äußerungen innerhalb einer Argumentation haben. Fungiert eine Äußerung als Datum, oder dient sie als Garant der Argumentation?

Die empirische Basis für meine Untersuchungen zum Argumentieren bildet zum Einen der Datencorpus einer Langzeitstudie zu Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule (Fetzer 2007). Zum Anderen werden zahlreiche Datensätze, die aus Seminaraktivitäten hervorgegangen sind, hinzugezogen.

Die auf Basis zahlreicher Analysen und Komparationen entwickelten Forschungsergebnisse werden nachfolgend zusammenfassend vorgestellt. Argumentationen von Grundschulkindern zeichnen sich aus durch

- einfache Schlüsse,
- substanzielle Argumentationen,
- geringe Explizität und
- verbales und non-verbales Argumentieren.

Auf jeden dieser vier Aspekte wird im Folgenden kurz eingegangen. (Für eine ausführliche Version vgl. Fetzer 2011).

Einfache Schlüsse

Vieles, was wir im Mathematikunterricht der Grundschule beobachten, würden wir auf den ersten Blick nicht als Argumentation auffassen. Unter argumentationstheoretischer Perspektive jedoch lassen sich etliche der kurzen Bemerkungen und Einwort-Antworten, die im Mathematikunterricht der Grundschule von den Kindern hervorgebracht werden, als Argumentationen verstehen. Es sind einfache Schlüsse, bestehend aus Datum und Konklusion. Garanten, welche diese Schlüsse legitimieren könnten, werden nicht angeführt. Manchmal sind die kurzen Einwürfe auch lediglich Beiträge zu einem einfachen Schluss. „14“ beispielsweise mag die Konklusion zum Datum „Suche das Doppelte von 7“ sein. Solche einfachen Schlüsse lassen sich im Mathematikunterricht der Grundschule oft beobachten und sind nach Toulmin Argumentationen.

Substanzielle Argumentationen

„Das Messergebnis ist richtig, weil ich das gleiche habe wie Sonja.“ Substanzielle Argumentationen sind nach Toulmin Argumentationen, bei denen eine gewisse Unsicherheit über die Zulässigkeit des Schlusses bleibt. Der angeführte Garant transportiert nicht alle Informationen, die für den Schluss vom Datum zur Konklusion benötigt werden. Dabei wird die Vagheit im Schluss durch eine Pointierung der Formulierung deutlich: „Das Messergebnis ist richtig, weil ich das gleiche wie Sonja gemessen habe, *es sein denn*, wir haben uns beide vermessen.“ Anstelle des hier angeführten Garanten wären auch Alternativen denkbar, z.B. „„…, weil ich ganz genau gemessen habe.“ Substanzielle Argumentationen lassen sich im Datenmaterial häufig beobachten. Argumentationstheoretisch betrachtet sind sie zwar vage, können aber dennoch eine hohe Überzeugungskraft haben. Sie sind sozial nicht nur akzeptiert, sondern werden im Unterricht auch gelehrt. „Vergleiche mit deinem Nachbarn“, „Rechne noch einmal genau nach“, „Wie habe ich es dir denn erklärt?“ sind ‚gängige‘ Aufforderungen von Lehrkräften, welche in Argumentationen als Garanten fungieren.

Geringe Explizität

Argumentationen, die in der Grundschule von Kindern hervorgebracht werden, sind häufig wenig explizit. Dabei lassen sich zwei Varianten geringer Explizität rekonstruieren. Zum Einen verbleiben einzelne Elemente einer Argumentation implizit. Meist sind dies das Datum oder Garanten. Es wird also entweder nicht deutlich gemacht, wovon ausgegangen wird, oder aber es bleibt unklar, warum ein Schluss gelten soll. Zum Anderen sind die Funktionszuschreibungen innerhalb einer Argumentation bisweilen diffus. Insbesondere bei einfachen Schlüssen ist nicht immer zweifelsfrei zu klären, ob ein Schülereinwurf als Datum oder als Konklusion zu deuten ist. Bei komplexen Argumentationen dagegen sind Datum und Garant zum Teil schwer unterscheidbar. Diese argumentationstheoretische Mehrdeutigkeit ist jedoch kein Spezifikum von Argumentationen im Mathematikunterricht der Grundschule, sondern typisch für Argumentationen in unterschiedlichen Kontexten (Toulmin 2003, S. 91f.). Weisen Argumentationen nur einen geringen Grad an Explizität auf, erschwert das grundsätzlich deren Nachvollziehbarkeit. Wenn unklar ist, ‚was gerade Sache ist‘, können Schülerinnen und Schüler nur bedingt in den Argumentationsprozess eingreifen, mitdiskutieren und Fragen stellen. Auch ein gezieltes Nachhaken durch die Lehrperson wird problematisch. Somit verschlechtern sich die Lernbedingungen für alle Beteiligten.

Verbales und non-verbales Argumentieren

Unter Rückgriff auf Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz lässt sich rekonstruieren, dass Kinder nicht nur verbale, sondern auch non-verbale Formen des Argumentierens nutzen. Sie zeigen oder verweisen auf etwas, was sie als gegeben annehmen, und machen so ihr Datum non-verbal explizit. („Schau, hier steht es.“) Sie verdeutlichen Garanten durch Handlugen wie Verschieben, Klappen oder Umordnen. („Das ist symmetrisch, sieh her, wie ich es klappe kann.“) Durch die Möglichkeit, nicht nur verbal, sondern auch non-verbal zu argumentieren, verdoppeln die Kinder ihre Chance auf Explizität der Argumentation. Gleichzeitig bedeutet das non-verbale Argumentieren eine Entlastung auf sprachlicher Ebene.

Perspektiven

Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? Auf der Grundlage von Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz lässt sich rekonstruieren, wie Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule Argumentieren.

Oft bringen sie einfache Schlüsse hervor. Auch wenn diese Beiträge weit entfernt sind von einer Kompetenz, wie sie in den Bildungsstandards festgehalten ist, so stellen sie doch die Basis des Argumentierens dar. Lehrpersonen sind gefordert, gezielt nach Garanten zu fragen und so erste Schritte der Entwicklung einer Argumentationskompetenz anbahnen.

Die Unsicherheit substanzieller Schlüsse bietet meines Erachtens nach eine besondere Chance für das mathematische Lernen der Kinder. Gerade die prinzipielle Offenheit substanzieller Argumentationen bietet den nötigen Raum für Weiterentwicklungen. Nachfragen werden möglich, Mitschüler werden zum Mitdiskutieren ‚eingeladen'. Die Lernbedingungen sind für alle Beteiligten günstig.

Voraussetzung für eine aktive Teilnahme an einem kollektiven Argumentationsprozess ist eine gewisse Explizität der Argumentation. Diese ist in vielen Fällen jedoch kaum gewährleistet und muss von Lehrpersonen, Mitschülerinnen und Mitschülern eingefordert werden. ‚Wovon gehst du aus?' ‚Warum gilt das?' ‚Wie kommst du da drauf?'

Es besteht ein großer Konsens darüber, dass der Einsatz von Arbeitsmitteln und Materialien im Mathematikunterricht der Grundschule lernförderlich sein kann. Die empirischen Forschungsergebnisse der Untersuchungen zum Argumenteiern helfen bei der Erklärung, *warum* das so ist. Materialien unterstützen die Möglichkeiten non-verbaler Argumentationsformen und erhöhen somit die Chance auf Explizität von Argumentationen.

Literatur

Fetzer, M. (2011): Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32 (1), 27–51.

Fetzer, M. (2007): Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag.

Toulmin, S. (2003): The Uses of Argument. Updated Edition. Cambridge: University Press.

Astrid FISCHER, Oldenburg; Johann SJUTS, Leer

Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz in Mathematik – ein Modellprojekt zur Verzahnung der Lehrerausbildungsphasen

1. Diagnostische Kompetenz für Lehrkräfte

Das vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft prämierte Modellvorhaben *Lehrerausbildung im Verbundprojekt OLAW*, das die Universität Oldenburg in Verbindung mit vier Studienseminaren und neun Kooperationsschulen durchführt, trägt zum Aufbau professioneller Fähigkeiten angehender Lehrerinnen und Lehrer insbesondere durch die Gestaltung und den Einsatz von Aufgaben zum fachbezogenen Diagnostizieren und Fördern bei (Sjuts 2010). Dabei ermutigt es die Beobachtung und Auswertung von Lehr-Lern-Prozessen unter einer Forschungsperspektive (Kiper & Komorek & Sjuts 2010).

Mittlerweile haben sich Verbundveranstaltungen etabliert, die von Lehrenden der Universität und der Studienseminare in Teams gestaltet und von Studierenden und Referendarinnen und Referendaren besucht werden. Die Bestandteile diagnostischer Kompetenz, auf die sich das Projekt konzentriert, sind Leistungsfeststellung, Lernprozessanalyse und Förderdiagnostik (Fischer & Sjuts 2011). Der Aufbau dieser Kompetenzen wird in den Verbundveranstaltungen durch Erörterung aus theoretischer Perspektive und Erprobung in der Praxis von Unterricht angestrebt.

2. Verbundveranstaltung „Diagnostikseminar Mathematik“

Das Diagnostikseminar im Fach Mathematik besteht aus drei Schwerpunkten. Es beinhaltet zunächst Theorie und Übung zum Erstellen von schriftlich zu bearbeitenden Diagnoseaufgaben, zum Analysieren von Schülerbearbeitungen solcher Aufgaben und zum Schließen von Analyseergebnissen auf weitergehende individuelle Förderung. Dieser Teil der Veranstaltung stellt Hintergrundwissen für die Studierenden bereit.

Parallel zu den Seminarveranstaltungen führen die Studierenden in Lernendentandems zusammen mit Referendarinnen und Referendaren jeweils ein kleines Diagnoseprojekt in einer Schulklasse zu dem dort aktuellen mathematischen Thema durch. Dafür wählen sie ein Diagnoseanliegen, entwerfen eine passende Diagnoseaufgabe, analysieren die Antworten ihrer Schülerinnen und Schüler, und ziehen unterrichtsrelevante Schlussfolgerungen. Diese können Fördermaßnahmen für einzelne Schüler, Pläne für die weitere Unterrichtsgestaltung oder auch Vorschläge für eine andere Schwerpunktsetzung in der Gestaltung des vorangegangenen Unterrichts sein.

In den letzten Sitzungen des Seminars stellen die Tandems ihre Projekte in Kurzvorträgen zur Diskussion. Hier nehmen sowohl Studierende als auch Referendarinnen und Referendare teil.

3. Design einer Begleituntersuchung zum Diagnostikseminar

Eine Evaluation des Seminars im vergangenen Jahr konzentrierte sich auf den Zuwachs an diagnostischer Kompetenz bei den Studierenden. Jeweils zu Beginn und am Ende des Semesters erhielten sie mathematische Aufgaben mit Schülerbearbeitungen und bekamen dazu Aufträge folgender Art:

(a) Die Begründung des Schülers ist ☐ richtig ☐ falsch.

(b) Förderbedarf sehe ich bei dem Schüler vor allem im

☐ Beweisverständnis ☐ Darstellen,

denn …

(c) Ich würde dem Schüler folgende Antworten und Anregungen zum Weiterdenken geben:

(d) Wie würde der Schüler die folgende Aufgabe lösen?

Während (a) auf das Beurteilen von Leistung abhebt, werden in (b) und (d) Diagnosen von kognitiven Vorgängen verlangt, im ersten Fall explizit, im zweiten Fall implizit. (c) fragt nach einer individuellen Förderung, die unmittelbar auf die gestellte Schüleraufgabe und Antwort bezogen ist.

Um auszuschließen, dass Unterschiede im diagnostischen Verhalten in der Vor- und Nachuntersuchung auf eine vertiefte Beschäftigung mit einem bestimmten mathematischen Inhalt in der Veranstaltung zurückzuführen sind, wurden die Inhalte der mathematischen Aufgaben in der Nachuntersuchung sehr verschieden von denen in der Voruntersuchung und in den im Seminar diskutierten Mathematikaufgaben gewählt.

Die inhaltliche Verschiedenheit der Aufgaben hatte zur Konsequenz, dass eine Auswertung des Studierendenverhaltens Kriterien verwenden musste, die von den jeweiligen mathematischen Inhalten unabhängig waren. Die Auswertung geschah in zwei Schritten: Die Studierendendokumente wurden zunächst einer qualitativen Analyse unterzogen, welche nach einleuchtenden Rekonstruktionen der Gedankengänge der Studierenden suchte. Anschließend wurden die Dokumente hinsichtlich drei Dimensionen beurteilt, die unter folgenden Kriterien betrachtet wurden:

(1) Beurteilen von Leistung:

Korrektheit der Beurteilung.

(2) Qualität der Analyse und Deutung von Schülerdarstellungen:

Genauigkeit der Analyse, Erklärungsversuche des Schülerverhaltens und Transfer der Charakteristika von Schülerverhalten auf eine andere Aufgabe.

(3) Qualität der Fördervorschläge:

Passung des Schwerpunkts der Förderung zur eigenen Diagnose und zum Schülerproblem und Klarheit und Angemessenheit des Schwierigkeitsgrads der Förderaufgabe.

4. Ergebnisse der Begleituntersuchung

Fünf Studierende nahmen sowohl an der Vor- als auch an der Nachuntersuchung teil. Diese geringe Zahl erlaubte eine ausführliche Interpretation der einzelnen Studierendendokumente (vgl. Fischer & Sjuts 2011b). Ein Vergleich der Analyseergebnisse zeigte: Der Grad der Erfüllung der Kriterien unterschied sich nicht nur in der Vor- und Nachuntersuchung, sondern auch innerhalb einer Untersuchung nach der mathematischen Aufgabe und hier nochmals nach den einzelnen Schüleransätzen zu dieser Aufgabe. Eine grobe Übersicht gibt die folgende Tabelle. Die Probanden sind mit Großbuchstaben bezeichnet und aufgeführt bei den Kriterien, die sie in einer Untersuchung weitgehend über alle Aufgaben hinweg erfüllen. Ein Eintrag in Klammern bedeutet, dass ein Kriterium nur gelegentlich erfüllt wird.

	Voruntersuchung	Nachuntersuchung
(1) Beurteilen von Leistung		
Korrektheit	(A) (B) (C) - -	(A) - C D E
(2) Qualität der Analyse und Deutung		
Genauigkeit der Analyse	(A) B C (D) (E)	(A) (B) C D E
Erklärungsversuche	(A) - C - (E)	(A) (B) C D E
Transfer der Charakteristika	(A) - (C) - (E)	(A) B C D (E)
(3) Qualität der Fördervorschläge		
Passung zur eigenen Diagnose	(A) - C D (E)	A (B) C D (E)
Passung zum Schülerproblem	(A) - (C) - -	(A) (B) C D (E)
Aufgabenstellung	(A) - (C) - -	- (B) (C) (D) (E)

Das Muster in der Tabelle lässt einen graduellen Zuwachs an diagnostischen Kompetenzen erkennen. Nimmt man ein weiteres Kriterium hinzu, das bei der Analyse der Aufgaben auffiel, so wird dies noch deutlicher: Es ist die Ausführlichkeit, mit der Begründungen für Entscheidungen gegeben und alternative Deutungen von Schülerdarstellungen abgewogen wurden.

	Voruntersuchung	Nachuntersuchung
Ausführlichkeit	- - - - -	A - C D E

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Studierenden in dem Diagnostikseminar ein Bewusstsein und einen geschärften Blick für individuelle Denkwege und Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern gewonnen haben, das in der Nachuntersuchung in dem Bemühen um mögliche Rekonstruktionen dieser Gedankengänge und um gezielte Förderung Ausdruck findet.

Als Grenzen der Diagnosekompetenz der Studierenden erweisen sich in den Untersuchungen vor allem mathematische Herausforderungen, die in den Aufgabenstellungen für die Schülerinnen und Schüler oder in deren Antworten stecken. Hier sind grundsätzliche Probleme feststellbar, die mit spezifischen Veranstaltungen zur Diagnostik allein nicht zu bewältigen sind, sondern in anderen Teilen der Ausbildung angegangen werden müssen.

Literatur

Fischer, A. & Sjuts, J. (2011a): Diagnostische Kompetenz und die Schwierigkeit der Überprüfung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, S. 259 – 262.

Fischer, A. & Sjuts, J. (2011b): Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz im Fach Mathematik – Ergebnisse eines Modellprojekts zur Verzahnung der Lehrerausbildungsphasen. In: SEMINAR – Lehrerbildung und Schule. Heft 4, 2011, S. 31 – 47.

Kiper, H. & Komorek, M. & Sjuts, J. (2010): Modellvorhaben Nordwest: Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz im Unterricht und in Lehr-Lern-Laboren. Verbundprojekt zur Verzahnung der Phasen in der Lehrerausbildung – prämiert vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. In: SEMINAR – Lehrerbildung und Schule, Heft 2, 2010, S. 115 – 122.

Sjuts, J. (2010): Aufgabenkompetenz erwerben – ein modellhafter Berufsfeldbezug in der Lehrerausbildung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, S. 807 – 810.

Daniel FRISCHEMEIER, Rolf BIEHLER, Paderborn

„Statistisch denken und forschen lernen" mit der Software TinkerPlots

Einleitung

TinkerPlots 2.0™ (Konold & Miller, 2011) ist eine in den USA entwickelte, dynamische Datenanalyse- und Simulationssoftware, die für den Stochastikunterricht in den Klassen 3-8 vorgesehen ist. Im Folgenden wird das Design und die sukzessive Erprobung und Weiterentwicklung einer universitären Lehrveranstaltung zur Datenanalyse mit dieser Software vorgestellt. Grundlegende Ideen dieser Lehrveranstaltung für Studierende des Lehramtes Mathematik GHRGe waren das Durchlaufen des kompletten PPDAC-Zyklus (Wild & Pfannkuch, 1999) und Exploration der Daten mithilfe der Software TinkerPlots. Zunächst werden wir dabei auf eine vorausgegangene Lehrveranstaltung mit anschließender Vorstudie (Frischemeier & Biehler, 2011) eingehen und dann ausführlich das Design der weiterentwickelten Lehrveranstaltung beschreiben.

Fachliche Ausbildung von Mathematik GHRGe-Studenten an der UPB

Als Pflichtveranstaltung im Grundstudium belegen die Studierenden des GHRGe Lehramtes Mathematik an der Universität Paderborn unter anderem die Veranstaltung „Elemente der Stochastik". Dort lernen sie neben den Grundbegriffen der beschreibenden Statistik auch den Vergleich von Verteilungen mithilfe der Software Fathom (Biehler et al., 2011). Eine Vertiefung der Inhalte kann durch Angebote in Form von Seminaren, wie im Folgenden durch das Seminar „Leitidee DuZ in Klasse 3-8" und „Statistisch denken und forschen lernen" geleistet werden.

Das Seminar „Leitidee Daten und Zufall in Klasse 3-8"

In diesem Seminar wurden vom ersten Autor unter anderem drei Sitzungen zur Datenanalyse mit der Software TinkerPlots angeboten. Diese sahen unter anderem auch das Anfertigen einer statistischen „Mini"-Projektarbeit in Partnerarbeit seitens der Teilnehmer vor. Die Partnerarbeiten der Teilnehmer beim Anfertigen der statistischen „Mini"-Projektarbeit wurden mit Camtasia videographiert. Auffällige Ergebnisse (siehe auch Frischemeier & Biehler, 2011) waren, dass vor allem die Konstruktion und das Erstellen von Graphiken im Vordergrund stand, die Beschreibung und Interpretation dieser aber zu kurz kam. Besonders häufig war bei den Teilnehmern ein „Rückfall auf Mittelwerte" zu beobachten: hier berechnen die Teilnehmer die entsprechenden Kennzahlen, argumentieren aber nicht mit der Verteilung als solche. In der am Ende des Seminars durchgeführten Ausgangsbefragung bemängelten die Teilnehmer, dass es zu wenige Rückmeldungen und zu wenig Zeit bei ihren Bearbeitungen gab.

Das Seminar „Statistisch denken und forschen lernen mit TP"

In der Zeit von März bis September 2011 wurde das Seminarkonzept grundlegend überarbeitet. Die zentrale Idee dieser Veranstaltung war, dass die Teilnehmer selbst statistisch Arbeiten lernen sollen, indem sie den kompletten Datenanalyse-Zyklus (Wild & Pfannkuch, 1999) durchlaufen und damit unter anderem selbst statistische Fragestellungen und Hypothesen generieren, eine Befragung planen, Instrumente für die Datenerhebung (z.B. einen Fragebogen konstruieren) erstellen und dann im weiteren die Daten mit der Software TinkerPlots explorieren und ihre Schlüsse in einem Report festhalten. Die genauen Inhalte können der Abbildung 1 entnommen werden. Insgesamt umfasste das Seminar, das im Wintersemester 2011/2012 vom ersten und zweiten Vortragenden gehalten wurde, 14 Sitzungen (à 90 Minuten). 22 Lehramtsstudenten (davon 14 weiblich und 8 männlich), von denen 21 die Pflichtveranstaltung „Elemente der Stochastik" erfolgreich absolviert hatten, nahmen an dem Seminar teil. Bis auf eine Ausnahme waren alle im 3. bis 6. Semester. Die einzelnen Seminarsitzungen hatten eine feste Struktur. Sie begannen mit einer Einführung durch den ersten Autor, gefolgt von einer Arbeitsphase und einer Feedbackphase, in der beide Autoren die Teilnehmer bei Fragen und Problemen unterstützten. Am Ende einer jeden Sitzung fand dann eine Ergebnissicherung (manchmal auch in Form von Hausaufgaben) statt. Aufgaben wie Hausaufgaben sowie Präsenzaufgaben in den Arbeitsphasen der Sitzungen wurden in festen Zweierteams bearbeitet. In den Aufgaben sollten die Teilnehmer jeweils eine Datenanalyse vornehmen, indem sie zunächst stat. Fragestellungen und Hypothesen generierten, die Daten dann mit der Software TinkerPlots analysierten und ihre Ergebnisse schlussendlich in einem stat. Report festhielten. Zentrale Elemente im gesamten Seminar waren neben dem Erheben von Daten (Befragung der Studienanfänger WS11/12) und dem Arbeiten mit authentischen Daten wie den Datensatz KinderUni und Muffins-Daten (Biehler et al., 2003) auch das Verfassen eines schriftlichen Reports als Auseinandersetzung mit den statistischen Entdeckungen. Die Vorstudie (Frischemeier & Biehler, 2011),

Sitzung	Inhalte
1	Organisatorisches, Eingangstest, Eingangsbefragung
2-3	Planung einer Datenerhebung, Statistische Fragestellungen generieren, Einführung in die Konstruktion von Fragebögen, Erhebung der Daten in der Veranstaltung „KdM"
4-6	Einführung in die Software TinkerPlots, Erste Graphiken mit TinkerPlots erstellen, Informelles Schließen I
7	Auswertung von kategorialen Variablen: Mehrfeldertafeln in TinkerPlots
8-10	Verteilungen eines numerischen Merkmals, Vergleich zweier Verteilungen eines numerischen Merkmals (Gruppenvergleich) mit TinkerPlots
11-12	Untersuchung des Zusammenhangs zweier numerischer Variablen mit TinkerPlots
13-14	Informelles Schließen II: Randomierungstests und p-Wert, Ausgangstest, Ausgangsbefragung

Abbildung1: Inhalte des Seminars

Biehler (2007) und auch Franzis (2005), zeigen, dass das Verfassen eines statistischen Reports ebenso geübt werden muss, wie das Vergleichen von Verteilungen (Biehler, 2001). Aufgrund dessen wurden die von den Teilnehmern verfassten Reports durch Peer- und Expertenfeedback und speziellen Lernumgebungen sukzessive weiterentwickelt. Im Folgenden wird dieser Prozess der Überarbeitung beschrieben, indem wir vorstellen, wie die Reports der teilnehmenden Zweierteams in den einzelnen Sitzungen sukzessive verbessert wurden: In der Sitzung vom 8.11. wurden die Teilnehmer erstmals mit der Software konfrontiert. Wie bei Ben-Zvi et al. (2007) wurde den Teilnehmern die Software ohne große Einführung zur Verfügung gestellt: mit einem ersten Datenanalyse-Auftrag sollten die Teilnehmer die Software selbst erkunden und simultan mit dem Datenanalyseprozess erlernen.

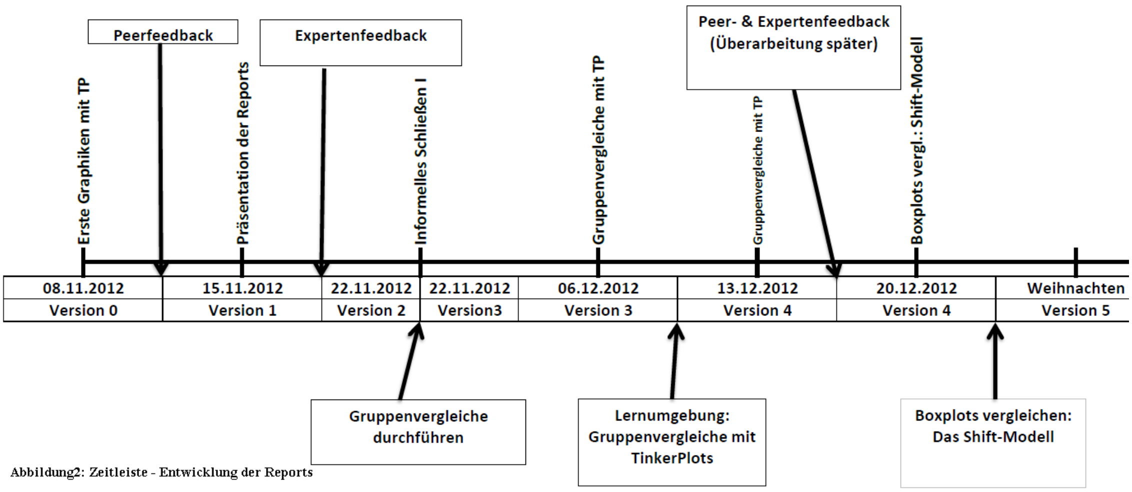


Abbildung2: Zeitleiste - Entwicklung der Reports

Die Erkenntnisse wurden in einem ersten stat. Report (Version 0) festgehalten, dieser wurde, wie man der Zeitleiste in Abbildung 2 entnehmen kann, sukzessive in den darauffolgenden Sitzungen verbessert, indem u.a. als anschließende Hausaufgabe eine Peerfeedbackphase, sowie ein Expertenfeedback in der nächsten Sitzung folgte. Insgesamt sollte durch Peer- und Expertenfeedback zum einen und Implementierung von speziellen Lernumgebungen, wie den Gruppenvergleich mit TinkerPlots oder dem Shift-Modell beim Vergleichen von Boxplots, zum anderen die Datenanalysekompetenz und die Kompetenz zum Schreiben eines stat. Reports verbessert werden. Ein Schwerpunkt in der 2. Phase des Seminars waren neben der Untersuchung eines Zusammenhangs zweier num. Merkmale informelle Schlussfolgerungen in Form von Randomisierungstests (Rossman, 2008). TinkerPlots stellt zur Simulation solcher Situationen ein besonders mächtiges Werkzeug bereit: den Sampler. Mit diesem haben die Teilnehmer dann ihre Befunde untersucht, so z.B. ob die im entsprechenden Datensatz herausgefundenen Unterschiede (z.B. bezgl. der Lesezeit zwischen den Jungen und Mädchen im Muffins-Datensatz) tatsächlich signifikant sind. Der Abschluss des Seminars bildete das Verfassen einer umfangreichen stat. Projektarbeit, sozusagen als „Gesellenstück“ der statistischen Ausbildung. Die Teilnehmer durften sich hier in den gewohnten Zweierteams zum Datensatz vorgegebene Themen aussuchen und einen Untersuchungsplan dazu erstellen, der in Absprache mit dem ersten Autor modifiziert wurde, um dann als Abschluss die Projektarbeit anzufertigen.

Ausblick und weiteres Vorgehen

Im SoSe 2012 wird eine Interviewstudie mit ausgewählten Teilnehmerpaaren durchgeführt und das Design des Seminars weiter überarbeitet.

Literatur

Ben-Zvi, D., Gil, E. & Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Helping young students to reason and argue about some wider universe. In D. Pratt & J. Ainley (Eds.), Reasoning about IIR: A collection of current research studies. Proceedings of SRTL-5. University of Warwick, UK, August 11-17, 2007.

Biehler, R. (2001). Statistische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern - Konzepte und Ergebnisse empirischer Studien am Beispiel des Vergleichens empirischer Verteilungen. In M. Borovcnik, J. Engel & D. Wickmann (Hrsg.), Anregungen zum Stochastikunterricht (S. 97 – 114). Hildesheim: Franzbecker.

Biehler, R., Kombrink, K., & Schweynoch, S. (2003). MUFFINS – Statistik mit komplexen Datensätzen – Freizeitgestaltung und Mediennutzung von Jugendlichen. Stochastik in der Schule, 23(1), 11-25.

Biehler, R. (2007). Assessing students' statistical competence by means of written reports and project work. In B. Chance & B. Philipps (Hrsg.), Proceedings of the IASE Satellite Conference on Assessing Student Learning in Statistics, Guimaraes, Portugal, August 2007.

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C., & Prömmel, A. (2011). Daten und Zufall mit Fathom - Unterrichtsideen für die SI und SII mit Software-Einführung. Braunschweig: Schroedel.

Franzis, G. (2005). An Approach to Report writing in statistics courses. In B. Chance & B. Philipps (Hrsg.), Proceedings of the IASE/ISI Satellite Conference on Statistics Education, 4-5 April 2005, Sydney, New South Wales, Australia.

Frischemeier, D. & Biehler, R.(2011). Spielerisches Erlernen von Datenanalyse mit der Software TinkerPlots - Ergebnisse einer Pilotstudie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, WTM: Münster, S. 275 - 278.

Rossman, A. (2008). "Reasoning about Informal Statistical Inference: A Statistician´s View." Statistics Education Research Journal 7(2): 5-19.

Wild, C. J. and M. Pfannkuch (1999). "Statistical Thinking in Empirical Enquiry." International Statistical Review 67(3): 223-265.

Torsten FRITZLAR, Nadja KARPINSKI-SIEBOLD, Halle an der Saale

Algebraisches Denken und mathematische Begabungen im Grundschulalter

Mit diesem Beitrag soll ein knapper Einblick ermöglicht werden in ein aktuelles Forschungsprojekt, das zwei Themenbereiche verknüpft. Zum einen geht es uns um die Erkundung algebraischer Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Grundschulalter, die insbesondere dann bedeutsam werden, wenn man im Sinne der international vielfach diskutierten Early-Algebra-Ansätze an einer Verbindung (und gegenseitigen Stützung) arithmetischer und algebraischer Inhalte im Mathematikunterricht interessiert ist. Zum anderen ist es unser Ziel, zu einer weiteren Explikation des Konstrukts mathematische Begabungen beizutragen. Konkret soll es darum gehen, algebraisches Denken im Grundschulalter zu beschreiben, entsprechende Fähigkeiten bei Lernenden des vierten Grundschuljahrgangs ohne vorherige spezifische Unterrichtsprogramme zu erfassen und mögliche Zusammenhänge zwischen *algebraischem Denken* und *mathematischer Begabung* zu erkunden.

Zum algebraischen Denken

Im Sinne einer vorläufigen Arbeitsdefinition wollen wir algebraisches Denken durch die folgenden Komponenten umreißen: *Umgehen mit Operationen als Objekten und ihren Umkehrungen; Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen (relationales Denken); Verallgemeinern; Umgehen mit Unbekannten; Umgehen mit Veränderungen; Nutzen von (symbolischen) Repräsentationen.*[1]

Die beschriebenen Komponenten sind selbstverständlich nicht auf Algebra beschränkt, sie erfahren in algebraischen Konstellationen allerdings eine spezifische Ausprägung. Mit ihnen erscheint algebraisches Denken als ein sehr reichhaltiges, mehrdimensionales Konstrukt, wobei nicht alle Komponenten unabhängig voneinander sind.

Da sich die Komponenten algebraischen Denkens nicht nur auf Fähigkeiten, sondern auch auf zugrunde liegendes Wissen und Vorstellungen beziehen, kommen sie Weinerts engerem Kompetenzbegriff nahe, der kontextspezifische kognitive, erlern- bzw. vermittelbare Leistungsdispositionen umfasst (Klieme & Leutner, 2006).

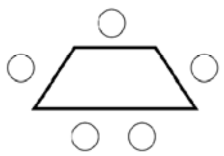
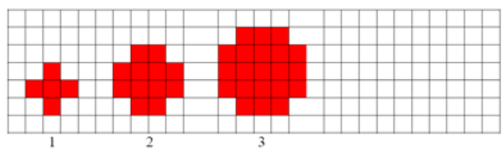
[1] Für nähere Ausführungen Fritzlar (2011).

Eine Vorstudie

Im Frühsommer 2011 konnte eine Vorstudie realisiert werden, in deren Rahmen jeweils ca. 45-minütige diagnostische Einzelinterviews mit 44 Viertklässlern aus der Region Halle durchgeführt und videografiert wurden. An dieser Studie nahmen zum einen zwölf mathematisch sehr leistungsstarke und interessierte Schülerinnen und Schüler teil (Teilgruppe A), die aus den besten zehn Prozent der etwa 250 Kandidaten eines Aufnahmetests für ein mathematisch-naturwissenschaftliches Spezialgymnasium ausgewählt wurden. Zum anderen wurden aus den Schulklassen dieser Teilnehmer jeweils drei weitere Schülerinnen und Schüler in die Untersuchung einbezogen, die nach Einschätzung der jeweiligen Mathematiklehrerin sehr gute bis gute, durchschnittliche und unterdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik erreichten und die damit das Leistungsspektrum der Lerngruppe repräsentieren sollten (Teilgruppen B, C, D). Durch diese Konstruktion der Untersuchungsgruppe konnten mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler einbezogen werden, gleichzeitig sollten die beteiligten Kinder über jeweils vergleichbare Unterrichtserfahrungen verfügen.

Ausgewählte Ergebnisse

Aus Platzgründen kann an dieser Stelle lediglich auf ausgewählte Aspekte zu zwei Problemen zum *Verallgemeinern* eingegangen werden, die sehr ähnlich aufgebaut sind:

Tischreihen	*Plättchenmuster*
An dem abgebildeten viereckigen Tisch können 5 Personen sitzen.  Wie viele Personen können an einer Reihe aus 2 oder 3 Tischen sitzen? 	In der Abbildung siehst du Figuren, die aus kleinen roten Plättchen zusammengesetzt sind. 
a) Wie viele Personen können an einer Reihe aus 4 Tischen sitzen?	a) Wie viele Plättchen werden für die 4. Figur gebraucht?
b) Wie viele Personen können an einer Reihe aus 100 (10) Tischen sitzen?	b) Wie viele Plättchen werden für die 10. Figur gebraucht?
c) Wie viele Personen können an einer Reihe aus *n* Tischen sitzen?	c) Wie viele Plättchen werden für die Figur mit der Nummer *n* gebraucht?

Teil a) ist ein *near generalisation–Problem*, Teil b) ein *far generalisation–Problem* sensu Stacey (1989), der sehr anspruchsvolle letzte Teil gibt Gelegenheit, eine explizite Vorschrift für die gesuchte Anzahl, also eine *algebraic generalisation* im Sinne Radfords (2006) zu formulieren. Allerdings führt das erste Problem auf ein lineares Muster (z. B. $3n+2$), während das zweite (z. B. $(n+2)^2-4$) zunächst schwieriger erscheint.

Aus quantitativer Perspektive lässt sich zunächst nach den Lösungsraten fragen. Tabelle 1 zeigt für das Teilproblem b), dass die als mathematisch begabt identifizierten Schüler bei beiden Problemen erwartungsgemäß die höchste Lösungsrate erreichten. Auch zwischen den anderen Schülergruppen deuteten sich die erwarteten Unterschiede an. Allerdings war das nichtlineare Plättchenmuster-Problem für viele Schüler einfacher als das lineare Tischreihen-Problem und bei ersterem unterschieden sich die Lösungsraten der Gruppen A und B nur wenig.

Schülergruppe	Anzahl der Lösungen und Lösungsrate	
	Tischreihen	Plättchenmuster
A	5 of 12 (41,7 %)	9 of 12 (75 %)
B	2 of 11 (18,2 %)	7 of 11 (63,6 %)
C	3 of 10 (30 %)	2 of 10 (20 %)
D	1 of 11 (9,1 %)	1 of 11 (9,1 %)

Tabelle 1: Anzahl der Lösungen und Lösungsrate zu Teil b)

Neben den Lösungsraten interessieren aus qualitativer Perspektive die Vorgehensweisen, die die Schüler für die Bearbeitung der Teilprobleme a) and b) nutzten. In Anlehnung an Stacey (1989) und Lannin et al. (2006) kann dabei zwischen den Strategietypen *explicit*, *recursive*, *unitising* und *counting* unterschieden werden. Deren Nutzung durch die verschiedenen Schülergruppen bei Teilproblem b) zeigt Abbildung 1.

Es wird erkennbar, dass insbesondere Schüler aus Teilgruppe A, beim Plättchenmuster-Problem aus den Teilgruppen A und B nach einer expliziten Vorschrift für die gefragten Anzahlen suchten. Darüber hinaus scheint das Tischreihen-Problem mit seinem modularen, sich in eine Richtung vergrößernden geometrischen Muster zu Strategien vom Typ *unitising* zu „verführen“, die auf Proportionalitätsvorstellungen beruhen und ohne Korrektur zu einem falschen Ergebnis führen.[2]

Die teilweise geringen Unterschiede zwischen den Teilgruppen A und B, die im Rahmen der Vorstudie auch bei vielen weiteren Problemstellungen deutlich wurden, könnten einerseits durch eine zu geringe Trennschärfe bei

[2] Für eine ausführlichere Darstellung der Ergebnisse vgl. Fritzlar & Karpinski-Siebold (2012).

der Samplekonstruktion verursacht worden sein. Zum anderen könnten sie aber auch darauf hindeuten, dass mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler und solche mit guten bis sehr guten Noten im Schulfach Mathematik zumindest auf dem in dieser Untersuchung betrachteten mathematischen Anspruchsniveau über ähnliche Potenziale zum algebraischen Denken verfügen. Diesbezüglich scheinen weitere Forschungsbemühungen notwendig.

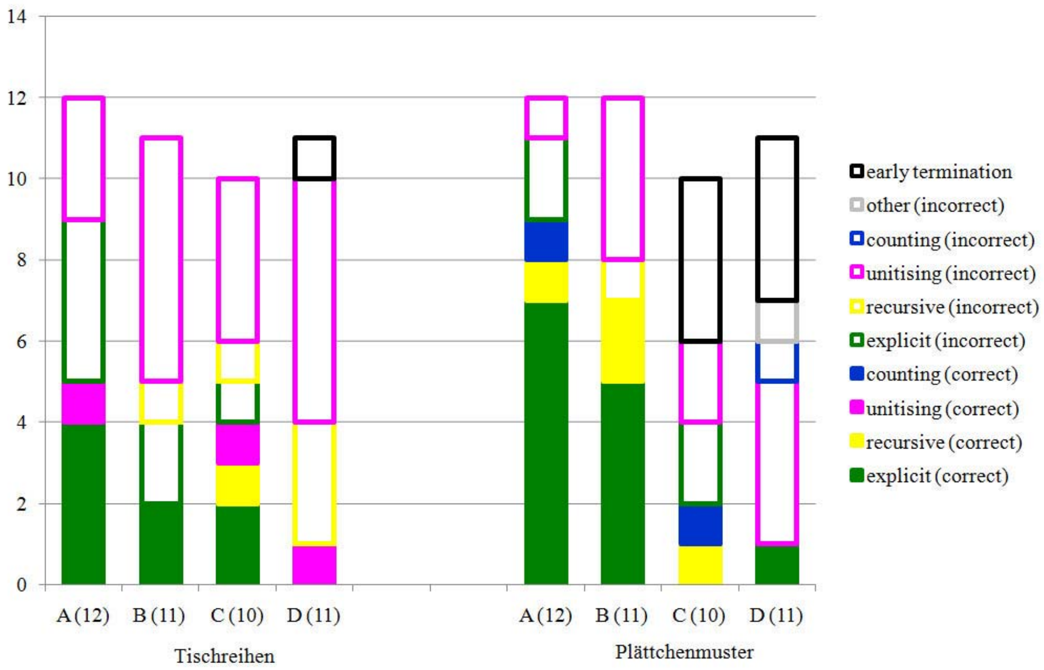


Abbildung 1: Strategietypen bei Teilproblem b)

Literatur

Fritzlar, T. (2011). Algebraic thinking of primary students – what is it and how can it be investigated? In K. Szücs (Ed.), *Problem solving in mathematics education* (pp. 32–47). Münster: WTM.

Fritzlar, T., & Karpinski-Siebold, N. (2012). *Continuing patterns as a component of algebraic thinking – an interview study with primary students.* 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul.

Klieme, E., & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. *Zeitschrift für Pädagogik, 52* (6), 876–903.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *MERJ, 18* (3), 3–28.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the NA-PME* (pp. 2–21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

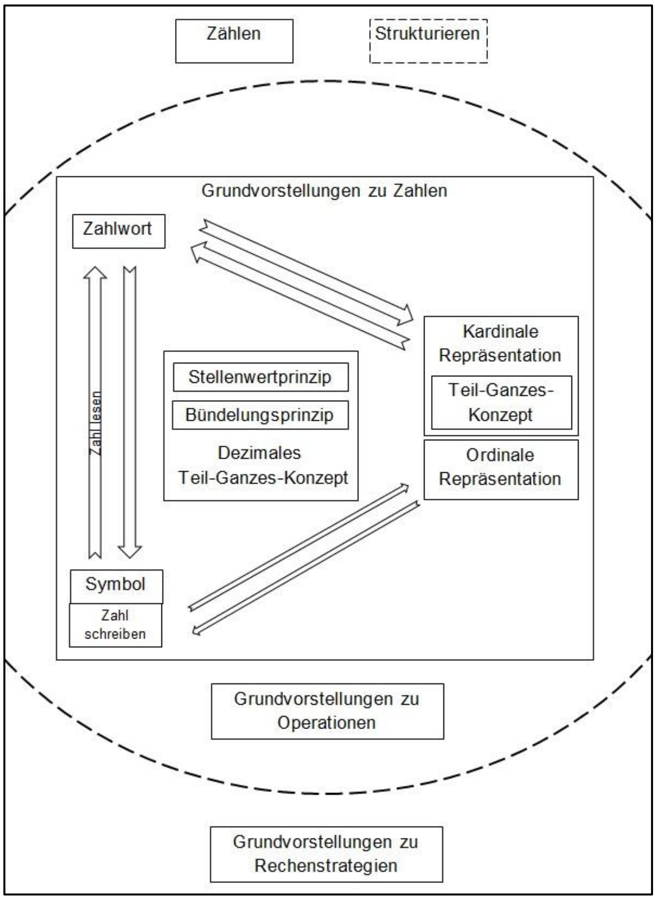
Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147–164.

Marina FROMME, Karlsruhe

Zur Bedeutung eines Stellenwertverständnisses beim Bearbeiten arithmetischer Aufgaben

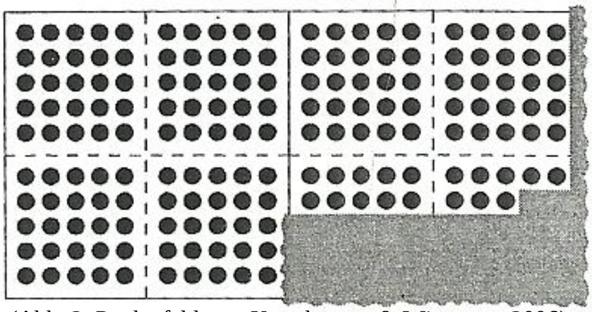
In der mathematikdidaktischen Literatur herrscht international Konsens darüber, dem Stellenwertverständnis eine hohe Bedeutung für die Entwicklung eines umfassenden Zahlbegriffs und von flexiblen Rechenstrategien beizumessen (vgl. Thompson & Bramald 2002; Schipper 2009). Ein mangelndes Stellenwertverständnis gilt auch als ein Hauptsymptom sogenannter Rechenstörungen. Während im englischsprachigen Raum bereits eine Vielzahl von Studien durchgeführt wurde (vgl. Fuson et al. 1997; Ross 1989; Hiebert & Wearne 1992; Pixner et al. 2011), gibt es im deutschsprachigen Raum wenige Studien, die Voraussetzungen und Anwendungen des dezimalen Stellenwertsystems systematisch untersuchen.

Aus der vorliegenden nationalen und internationalen Literatur können Voraussetzungen, Teilkompetenzen, Einflussfaktoren und auch Auswirkungen von Stellenwertverständnis identifiziert und zueinander in Beziehung gesetzt werden (vgl. Abb. 1). Des Weiteren kann abgeleitet werden, dass Wechselwirkungen zwischen Einflussfaktoren bestehen. Die **arithmetischen Kompetenzen**, die häufig durch flexibles Rechnen im Zahlenraum bis 100 operationalisiert werden und unter der Nutzung von Eigenschaften des Stellenwertsystems charakterisiert werden, stehen in Beziehung zu **Voraussetzungen** für Stellenwertverständnis. Diese Beziehungen sollen exemplarisch am Zusammenhang zwischen der Nutzung von Analogien im Stellenwertsystem beim additiven und subtraktiven Rechnen und der Strukturierungsfähigkeit untersucht werden.



(Abb. 1: Voraussetzungen, Teilkompetenzen und Auswirkungen von Stellenwertverständnis)

In der Pilotierung eines Testinstrumentes zur Untersuchung von Stellenwertverständnis wurden 6 Kinder interviewt, davon fünf (2. Jgst.) einer Regelschule und ein Kind (5. Jgst.) einer Förderschule. In der Aufgabe zum Strukturieren wurde den Kindern die Darstellung in Abb. 2 (vgl. Krauthausen & Wittmann, 2006) vorgelegt und nach der Anzahl der Punkte gefragt.



(Abb. 2: Punktefeld aus: Krauthausen & Wittmann, 2006)

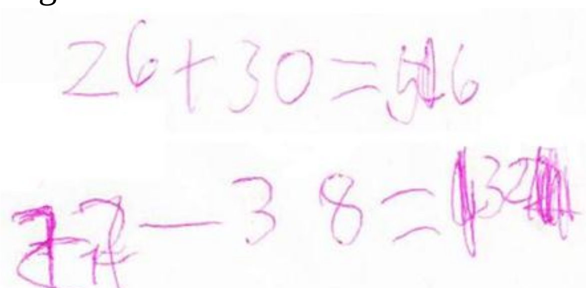
Zur Auswertung der Bearbeitungswege der Kinder wurden Kategorien erstellt, die Entwicklung, Art der Struktur, Häufigkeit der Verwendung und Häufigkeit der Weiterverwendung einer bereits erschlossenen Struktur in andere Bereiche des Punktefeldes beschreiben sollen. Hierzu wird nach dekadischen **(**D_{10}, D_{100}**)** und nicht-dekadischen **(**N_5, N_{25}, N_{50}**)** Strukturen differenziert. Falls keine Struktur genutzt und die Anzahl durch einen Zählprozess ermittelt wird, wird ein „Z" im Pfad vermerkt. Um den Bearbeitungsweg besser nachvollziehen zu können, werden die Zwischenergebnisse der Kinder in Klammern notiert.

Zur Vorgehensweise der Kinder bei der o.g. Aufgabenstellung werden nun beispielhaft zwei Bearbeitungswege beschrieben. Steffi (5. Klasse) beginnt im linken oberen Feld vertikal die Anzahl der Punkte bis zur gestrichelten Linie zählend zu bestimmen und sagt, dass es fünf sind. Dieses Wissen (N_5) nutzt sie dann um die Anzahl der Punkte in einer Spalte zu bestimmen und bestimmt additiv das Ergebnis zehn (+ (10)). Das linke Hunderterfeld bestimmt sie durch spaltenweises Zählen in Zehnerschritten und nutzt damit die erschlossene Zehnerstruktur (D_{10}). Diese Strategie kann sie im rechten Feld aufgrund der abgedeckten unteren Zeilen nicht weiter verwenden. Aus diesem Grund entscheidet sie sich für ein Zählen in Einerschritten (Z) und bricht nach längerem Zählen den Bearbeitungsprozess ab.

Leon (2. Klasse) beginnt ebenfalls im oberen linken Feld und zählt vertikal und horizontal jeweils fünf Punkte ab. Er erklärt, dass fünfmal fünf (N_5) fünfundzwanzig ergeben (• (25)). Diese erschlossene Struktur (N_{25}) nutzt er um die Anzahl der Punkte im linken halben Hunderterfeld zu bestimmen und legt die fünfzig fest (+ (50)). Diese neu erschlossene Struktur wendet er für die Anzahlbestimmung im gesamten linken Feld an und bestimmt die 100 (N_{50} + (100)). Im rechten Punktefeld kann Leon die Fünfzigerstruktur weiternutzen, die er im linken erschlossen hat und beschreibt den Bereich bis zur gestrichelten Linie im rechten Feld insgesamt als 150 (N_{50} + (150)). Im unterer linken Bereich des rechten Feldes nutzt Leon ebenfalls eine bereits erschlossene Struktur, um zu bestimmen, dass zehn dazu kommen, sodass das neue Zwischenergebnis bei 160 liegt (N_5 + (10) + (160)). Abschließend nutzt er wieder eine bereits bekannte Struktur und kommt zu dem Gesamtergebnis von 168 (N_5 + (8) + (168)).

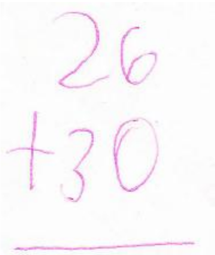
Als Zwischenfazit lässt sich festhalten, dass Steffi zwei Strukturen genutzt, einmal die Struktur gewechselt und keine Weiternutzungen verwendet hat. Leon hat insgesamt drei Strukturen genutzt, dreimal die Struktur gewechselt und auch dreimal eine bereits erschlossene Struktur auf einen anderen Bereich angewendet.

Im Aufgabenblock zur Strategiewahl werden exemplarisch zwei Aufgaben beschrieben. Die Rechenaufgaben werden mündlich gestellt und die Kinder werden angehalten diese im Kopf auszurechnen. Bei der Aufgabe 26 + 30 nennt Leon spontan das Ergebnis 56. Auf Nachfrage beschreibt er seinen Rechenweg: „20 plus 30 ist 50 und die 6 bleibt.“ Bei der Aufgabe 72 – 38 beginnt er Stellenweise und endet Schrittweise. „70 minus 30 sind 42 und 42 minus 8 sind 34.“



(Abb. 3: Schülerlösung)

Steffi bittet direkt nach der Formulierung der Aufgabe nach einem Blatt Papier und schreibt die Aufgabe nebeneinander auf. Sie beschreibt, dass null und sechs zusammen sechs ergäben und beginnt die Zahl zu notieren, unterbricht dann und schreibt die sechs weiter nach links. Sie erklärt dann, dass zwei und drei zusammen fünf ergäben und schreibt die Ziffer links neben die sechs. Nach Beendigung der Aufgabe erklärt Steffi, dass sie sich solche Aufgaben manchmal auch anders vorstelle und notiert die Zahlen zur Demonstration untereinander (vgl. Abb. 4). Bei der Aufgabe 72 – 38 macht sie bei der Notation einen Zahlendreher, den sie aber selbst bemerkt und korrigiert. Sie beginnt im Kopf zu rechnen und sagt, dass man von der acht zur zehn zwei brauche, die sie auch aufschreibt. Ihren Übertrag notiert sie im Minuenden zwischen Zehner und Einer. Sie rechnet noch einmal nach und streicht die zwei durch, notiert sie aber sofort wieder. Ihren nächsten Schritt beschreibt sie mit „Von der drei bis zur sieben“. Sie schreibt die vier, streicht diese sofort wieder mit der Begründung des Übersehens des Übertrags und notiert abschließend die drei links neben der zwei. (vgl. Abb. 3)



(Abb. 4: Schülerlösung)

Leon rechet deutlich flexibler und nutzt bestehende Analogien im Stellenwertsystem. Steffi verrechnet zwar die Ziffern in den Stellenwerten, geht hierbei allerdings eher rezeptartig vor.

Zu beobachten ist an dieser Stelle, dass obwohl Steffi beim Strukturieren dekadische Strukturen nutzt und auch beim Rechnen mit den Stellenwerten arbeitet, sie große Schwierigkeiten hat die Aufgaben zu lösen. Leon hingegen strukturiert sehr flexibel, nutzt nicht-dekadische Strukturen und verwendet Analogien des Stellenwertsystems beim Berechnen von Aufgaben. Es kann folgende Hypothese generiert und in weiteren Untersuchungen weiter analysiert werden. Je flexibler ein Kind dekadische Strukturen bei Anzahlauffassung nutzt, desto flexibler werden Analogien im Stellenwertsystem genutzt. Die bisherigen Auswertungen zeigen, dass nicht ausschließlich die Nutzung der *dekadischen* Struktur als eine Voraussetzung für Stellenwertverständnis erfolgversprechend ist, sondern eher eine Nutzung unterschiedlicher (dekadischer und nicht-dekadischer) Strukturen, die flexibel verwendet werden können.

Weiterführende Fragen

Es bleibt offen inwieweit Materialkenntnis und dessen Einführung im Unterricht die Strukturnutzung beeinflussen. Bei der Wahl zur Rechenstrategie gibt es weitere Einflussfaktoren, wie die Bauart der Zahlen, die Art der Darstellung, das Zahlverständnis und die Kenntnis der schriftlichen Algorithmen.

Literatur

Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A., Carpenter, T., & Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130-162.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1992). Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 98-122.

Krauthausen, G. & Wittmann, E. C. (2006). Blitzrechnen 2. Basiskurs Zahlen. Karteikarten. Leipzig: Klett.

Pixner, S., Moeller, K., Hermanova, V., Nuerk, H.-C. & Kaufmann, L. (2011). Whorf reloaded: Language effects on nonverbal number processing in first grade—A trilingual study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 108(2), 371–382.

Ross, S. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *Arithmetic Teacher*, 36, 47–51.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel Verlag.

Thompson, I. & Bramald, R. (2002). *An investigation of the relationship between young children´s understanding of the concept of place value and their competence at mental addition*. Verfügbar unter http://www.ianthompson.pi.dsl.pipex.com [23.03.2012]

Karl Josef FUCHS, Christian KRALER, Universität Innsbruck

Wozu braucht man das? – Sinnstiftender Mathematikunterricht als Thema der universitären Lehrer(innen)ausbildung

1. Motivation

Lehrer(innen) nehmen als Vermittler des Faches im unterrichtlichen Aneignungsprozess insbesondere komplexer mathematischer Inhalte eine zentrale Stellung ein. Wenn Lehramtsstudierende gefragt werden, warum sie selbst Mathematik studieren, bekommt man überwiegend Antworten der Art „weil es mir Spaß macht“, „weil es mich interessiert/fasziniert“ bzw. Verweise auf die grundlegende Bedeutung und Wichtigkeit des Faches. Diese intrinsischen Eigenmotivationen sind für eine erfolgreiche Studienkarriere mit ihren Höhen und Tiefen von wesentlicher Bedeutung. Da personale, sinnstiftende Prozesse für die nachhaltige professionsspezifische Aneignung fachlicher Inhalte und insbesondere Verständnisprozesse jedoch von zentraler Bedeutung sind (vgl. Combe, Gebhard 2007), müssten sie im Rahmen der fachdidaktischen Ausbildung metakognitiv verankert sein.

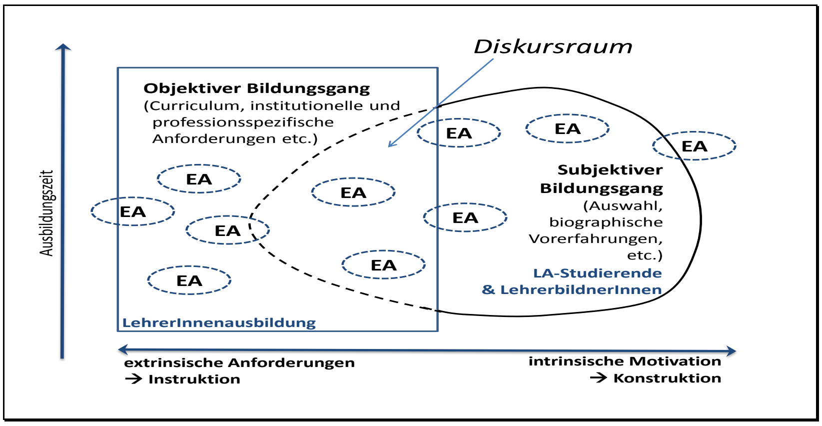
In der universitären Lehrer(innen)ausbildung machen wir seit vielen Jahren die Erfahrung, dass Sinnfragen im traditionellen Curriculum für die Ausbildung von Mathematiklehrer(innen) keine Rolle spielen. Das ist als eine mögliche Ursache für den oft konstatierten mangelnden Bezug der Studierenden zum Fach (über den Schulstoff hinaus) zu sehen.

Die beiden Autoren haben daher als hochschuldidaktische Antwort auf dieses Phänomen das im Beitrag vorgestellte Seminarkonzept zu „Sinnstiftendem Mathematikunterricht“ erarbeitet und inzwischen mehrfach an den Universitäten Innsbruck und Salzburg für höhersemestrige Studierende angeboten. Die Struktur der Lehrveranstaltung ist wesentlich von der Integration fachdidaktischer und schulpädagogischer Konzepte und Methoden geprägt (vgl. Kraler 2008).

2. Objektiver und subjektiver Bildungsgang

Das Seminarkonzept basiert auf folgenden Überlegungen: Schulisches und fachliches Lernen können mit dem klassischen didaktischen Dreieck (Schüler(in), Lehrer(in), Inhalte) beschrieben werden. Dass curriculare Inhalte und Wissen von Schüler(innen) und Studierenden keine Bijektion darstellen, ist bekannt (Krainer, Dörfler et al 2002). In der Bildungsgangforschung unterscheidet man den objektiven, curricular vorgegebenen, vom subjektiven (individuell realisierten) Bildungsgang. Idee des Seminarkonzepts ist, in sogenannte Entwicklungsaufgaben übersetzte curriculare Inhalte in hochschul- und fachdidaktisch adäquaten Settings zu bearbeiten.

Im Mittelpunkt der methodischen Gestaltung der Lehrveranstaltung stehen die Personen mit ihrer jeweils eigenen Bildungsbiografie (Personalisierung). Damit sollen die sinnstiftenden Begründungen für das spätere Handeln von Lehrer(inne)n bei den Studierenden aus den individuellen Kompetenzen heraus entwickelt und die zentralen fachdidaktischen Inhalte nachhaltig verankert werden. Die nachfolgende Grafik verdeutlicht diesen wesentlichen Anteil des subjektiven Bildungsgangs an einer umfassenden Lehrer(innen)bildung.



3. Aufbau des Seminars

Um das Potenzial stets biographisch verankerter sinnstiftender Lernprozesse im Unterricht nutzen zu können, hat sich im Rahmen der hochschuldidaktischen Bearbeitung dieses Themas ein gestuftes Vorgehen bewährt.

(a) Im ersten Schritt gilt es, latente Sinn-, Deutungs- und Begründungsmuster auf individueller Ebene zu thematisieren. Die Studierenden können hierbei ihre je eigenen Zugänge zum Fach Mathematik lernbiografisch (Schule, Studium) inhaltlich explizieren, mit dem Ziel, die individuelle Attraktivität von Mathematik(lehren) auszumachen („Weil ich gerne knifflige Aufgaben löse“, „weil mir das systematische Nachdenken gefällt“, „weil ich immer gut war“).

(b) Im nächsten Schritt gilt es, diese individuellen Affinitäten zur Mathematik bildungsbiografisch genauer zu hinterfragen (eigene Lehrer(innen), schulische Kontexte) und mit curricularen Inhalten abzugleichen (u.a. welche Stoffgebiete warum besondere Attraktivität besitzen).

(c) Nach dieser lernbiografischen und inhaltlichen Reflexion und Explikation auf Individualebene geht es darum, die Personalisierung dieser Momente zugänglich zu machen. Dies erfolgt über Beschreibungen mittels Klassen etwa bezogen auf Alltagsrelevanz (Fuchs, Blum 2008), fachliches oder interpersonelles Sprachniveau als Ergebnis der Reflexion der unterschiedlichen Zugänge.

(d) Im nächsten Schritt werden die gewonnenen Erkenntnisse mit fachdidaktischen Konzepten zur Sequenzierung von Unterricht sowie zur Strukturierung des Lehrstoffs nach grundlegenden Techniken und Strategien (Schweiger 2010) abgeglichen. Im Seminar erleben wir, dass das Interesse hierfür erheblich ist. Dies zeigt sich u.a. am Niveau der seminarbegleitenden schriftlichen und mündlichen thematischen Auseinandersetzungen.

(e) Mit den gewonnenen inter- und intrapersonalen Erkenntnissen und damit verknüpftem fachdidaktischen Wissen begeben sich die Studierenden im nächsten Schritt ins Feld und machen eine kleine qualitative Studie. Sie befragen Schüler(innen) zu deren Mathematikbild. Die Ergebnisse werden mit einem rasch erlernbaren Verfahren systematisch ausgewertet (Jaeggi et al. 1998), analysiert und aufgearbeitet. Der Abgleich eigener Vorstellungen mit einer Gruppe des Berufsfeldes führt unserer Seminarerfahrung nach teilweise zu Ernüchterungen und insbesondere Revision des eigenen Fachlehrer(innen)bildes. Die Ergebnisse der Befragung zeigten bisher in allen Gruppen, dass Schüler(innen) dem Fach nicht dieselbe bzw. eine andere Relevanz zuschreiben. Dies kollidiert häufig mit den eigenen Vorstellungen der Studierenden und führt zu grundsätzlichen Diskussionen über die Relevanz des Faches und seine Bedeutung und Funktion im Curriculum (vgl. Heymann 1996).

(f) Abschließend werden die gewonnenen Erkenntnisse fachdidaktisch je nach Kenntnisstand der Studierenden verankert.

4. Die Verortung der Inhalte in den Lehrplänen

Die praktische und berufsbezogene Determinante in der Lehrveranstaltung wird durch die Beschäftigung mit den österreichischen Lehrplänen für die Sekundarstufen I und II sowie mit der weiteren Auseinandersetzung mit fachdidaktischen Prinzipen im Wittmannschen Sinne einer starken *Praxisbezogenheit* (Wittmann 2002, S. 3) gesichert. Zusätzlich werden Beurteilungsfragen (Anderson, Krathwohl 2001) thematisiert. Die Studierenden sind dazu aufgefordert, die in den Lehrplänen formulierten allgemeinen Bildungsziele, didaktischen Grundsätze und Lehrstoffe nach den Kategorien, die in Abschnitt 3 (c) durch Klassenbildung gewonnen wurden, zu bewerten und in einer Tabelle aufzuschlüsseln.

Für den positiven Abschluss der Lehrveranstaltung müssen/mussten die Studierenden eine schriftliche Seminararbeit abgeben, wobei auf die Dokumentation der individuellen Genese der einzelnen Studierenden besonderer Wert gelegt wird/wurde.

5. Zusammenschau

Individuelle schulische und universitäre Erfahrungen ebenso wie prototypische Berufsbilder von Mathematiklehrer(inne)n stehen im Mittelpunkt der skizzierten Lehrveranstaltung. Geleitet wird das Konstrukt von zwei Hypothesen. Zum einen von der Wirksamkeit des klassischen Konzepts eines *Lernens am Modell* (Kolodziej 2009), zum anderen von der Vermutung, dass die individuelle, personalisierte Auseinandersetzung mit schulischen und universitären Erfahrungen *nachhaltige* Kenntnisse und methodische Fertigkeiten bei den Studierenden ‚generiert'.

Literatur

Anderson, L. W. and David R. Krathwohl, D. R., et al (Eds.) (2001) *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives.* Boston, MA:Allyn & Bacon (Pearson Education Group).

Combe, A., Gebhard, U. (2007). *Sinn und Erfahrung: Zum Verständnis fachlicher Lernprozesse in der Schule.* Opladen: Barbara Budrich.

Fuchs, K.J., Blum, W. (2008). Selbständiges Lernen im Mathematikunterricht mit ‚beziehungsreichen' Aufgaben. In: Thonhauser, J. (Hrsg.): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen*. Münster: Waxmann, S. 135-148.

Heymann, H.W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim, Basel: Beltz.

Jaeggi, E., Faas, A., Mruck, K. (1998). *Denkverbote gibt es nicht!* Vorschlag zur interpretativen Auswertung kommunikativ gewonnener Daten. Forschungsbericht, Nr. 2-98. TU Berlin.

Kolodziej, L. (2009). *Lernen am Modell: Die sozial-kognitive Lerntheorie nach Bandura und ihre sozialpsychologische Bedeutung für Schule und Unterricht*. München: GRIN.

Kraler, Ch. (2008). Auf der Suche nach dem Sinn: fachdidaktische und allgemeindidaktische Forschung im Dialog. In: Resinger, P., Schratz, M. (Hrsg.): *Schule im Umbruch*. Innsbruck: iup, S. 135-164.

Krainer, K., Dörfler, W., Jungwirth, H., Kühnelt, H., Rauch, F., Stern, T. (Hrsg.) (2002). *Lernen im Aufbruch: Mathematik und Naturwissenschaften.* Pilotprojekt IMST². Innsbruck: Studienverlag.

Schweiger, F. (2010). *Fundamentale Ideen*. Schriften zur Didaktik der Mathematik und Informatik an der Universität Salzburg (Fuchs, K.J. Hrsg.), Aachen:Shaker Verlag.

Wittmann, E. Ch. (2002). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6. Auflage, Braunschweig/ Wiesbaden:Vieweg.

Klaus-Tycho FÖRSTER, Hildesheim/Zürich

Raumgeometrie mit Minecraft: Raumvorstellung und kreative Kooperation zu Beginn der Sekundarstufe I

Ziel dieses Artikels ist ein erster Bericht über aktuelle Unterrichtsversuche mit der geometrisch orientierten Software *Minecraft*. Im Zentrum der Unterrichtsversuche steht zum einen die Schulung der Raumvorstellung der Schüler, zum anderen die durch *Minecraft* gegebene Möglichkeit, kreative mathematische Zusammenarbeit in großen Gruppen durchzuführen. Diese Unterrichtsversuche sind in Kooperation mit der von Frau Prof. Dr. B. Schmidt-Thieme geleiteten Abteilung „Mathematik Lehren und Lernen" der Universität Hildesheim und einer zugehörigen Partnerschule, dem Ratsgymnasium Wolfsburg, entstanden.

1. Raumvorstellung in der Sekundarstufe I – zu wenig Beachtung?

Raumgeometrie ist bekannter Weise in der Primarstufe wie auch in der Sekundarstufe II ein Schwerpunkt des mathematischen Unterrichts. In der Sekundarstufe I tritt die Raumgeometrie dagegen häufig weniger prägnant in Erscheinung bzw. wird „*gerne vernachlässigt*" (vergl. Kadunz/Sträßer 2009). Auch wird die Raumvorstellung nicht immer ausreichend gewürdigt: „*Stattdessen wird in der Sekundarstufe I die Raumgeometrie vorwiegend als Inhaltslehre betrieben, es werden Formeln für Inhalt und Oberfläche entwickelt und hauptsächlich damit wieder gerechnet.[…] In der Unterrichtspraxis wird dem Aspekt Raumanschauung […] aber bislang viel zu wenig Beachtung geschenkt.*" (Elschenbroich 2003). Auch Ludwig/Weigand 2009 weisen darauf hin, dass die Raumgeometrie in der Sek I vielfach zu einer „*Rechengeometrie*" geworden ist, „*bei der es nur um das Berechnen von Längen, Winkelgrößen, Raum und Oberflächeninhalten geht*".

2. Den Anschluss an die Grundschule wahren?

Nach Andelfinger 1988 steigt ab einem Alter von ca. 12 Jahren die Zugänglichkeit für Raumgeometrie signifikant. Auch Elschenbroich 2003 führt aus, dass eine tiefergehende Erkundung des Raumes nicht bis zum Ende der Sek I aufgeschoben werden sollte. Die Schüler sind hierauf gut vorbereitet, da sie aus den Grundschulen und aus dem täglichen Leben viele Erfahrungen zur Raumgeometrie mitbringen (vergl. Ludwig 2007). Da die Anschaffung bzw. die Anfertigung von Modellen jedoch kosten- bzw. zeitintensiv ist, kann die Verwendung von Geometriesoftware hier einen wesentlichen Beitrag leisten (vergl. Luig/Sträßer 2009). Analog zu dem Konzept von „*Kopf, Herz und Hand*" nach Pestalozzi schlägt Ludwig 2001 daher den Übergang zum Lernen mit „*Kopf, Herz, Hand und Maus*“ vor. Auch Ludwig/Weigand 2009 formulieren die „*Hoffnung*“, dass durch den Einsatz von Software die „*Körperlehre [...] mehr Bedeutung im Geometrieunterricht gewinnt*“ und somit neue Technologien Chancen für die bessere Erreichung traditioneller Lernziele eröffnen (vergl. Weigand/Weth 2002).

3. Raumgeometrie-Software im Unterricht

Insbesondere für die Sek II existiert schon eine große Anzahl von Raumgeometrie-Software, etwa *Archimedes Geo3D, Cabri3D, GAM3D, VEKTOR* oder *Descartes3D*. Für den Einsatz in der Sek I ergibt sich jedoch die Schwierigkeit der Positionierung im Raum: Nach Kadunz/Sträßer 2009 geht hier die intuitive Leichtigkeit aus der ebenen Geometrie verloren und die Schüler müssen sich wegen der Koordinaten sogar ein numerisches Bild erarbeiten.

Elementarere unterrichtsgeeignete Programme sind jedoch Mangelware (vergl. z.B. Elschenbroich 2003), eine erste Ausnahme bildet das auf die Grundschule ausgerichtete Programm *BAU WAS*. Hierbei können in einem 3D-Gitter der Größe bis zu 10x10x10 Würfel aus verschiedenen Perspektiven positioniert bzw. entfernt werden.

Ein bewährter Ansatz für die Sek I ist das Programm *Körpergeometrie* mit einer Vielzahl von Funktionen, das sich eher an die Klassenstufen 7-10 wendet. Schumann 2001 nennt als komplexere Einsatzbeispiele etwa Rotationskörper, das Prinzip von Cavalieri oder raumgeometrische Extremwertaufgaben. Ein weiteres bekanntes Beispiel ist *POV-Ray* mit dem geometrische Objekte mit Lichtquellen gerendert werden können. Allerdings erfordert das Programm textbasierte Programmiertätigkeit. Daher wird es im Regelfall erst ab Klassenstufe 8 eingesetzt, z.T. findet es auch im Informatikunterricht Verwendung. *POV-Ray* hat jedoch nach Leuders 2005 insbesondere den Vorteil, dass man hier den „*individuellen kreativen Ideen der Schülerinnen und Schülern freien Lauf lassen kann*“ und die individuellen Arbeiten verschiedener Gruppen zu einem Gesamtprodukt zusammenführen kann, wodurch die Kooperation untereinander gefördert wird.

4. Minecraft: Raumgeometrie-Software für die Klassenstufen 5/6?

Raumgeometrie-Software für die Klassen 5/6 ist kaum verbreitet. Dabei wäre eine Anknüpfung an Raumgeometrie-Software aus der Grundschule (z.B. an *BAU WAS*) sicherlich wünschenswert. Im gegenwärtigen Curriculum ist jedoch dazu kaum Zeit vorhanden: Gesucht ist eine (möglichst kostenlose) Software, die die Schüler auch in ihrer Freizeit gerne weiterbenutzen. Dabei wäre es nach Franke 2007 wünschenswert, wenn die Schüler nicht nur alleine, sondern in Partner- oder Gruppenarbeit vorgehen könnten. Sie führt weiter aus, dass diese Produkte auch nicht benotet werden müssen, da man sie sonst zum Bestandteil der Mathematikzensur machen würde.

Für diese Lücke bietet sich *Minecraft* an: Es führt die Idee von *BAU WAS* weiter, indem man diverse Würfel in einem 3D-Gitter entfernen bzw. platzieren kann, jedoch ohne eine Beschränkung auf 10^3 Blöcke. Des Weiteren wird in *Minecraft* aus der Ich-Perspektive eines Avatars konstruiert, also auf einem höheren Abstraktionsniveau der räumlichen Orientierung, da der Standpunkt (anders als sonst) innerhalb der Aufgabenstellung liegt. Auch kann eine ganze Schulklasse an einem geometrischen Gebilde über das lokale Netzwerk oder das Internet zusammenarbeiten. Eine kostenlose Version für Web-Browser (Windows/OS X/Linux) ist unter minecraft.net erhältlich, weitere Informationen finden sich unter minecraftschule.de.

5. Schulversuch: Erprobung im Unterricht

Minecraft ist an deutschen Schulen scheinbar kaum bekannt, sicherlich bedingt durch das kürzliche Erscheinungsdatum vom Nov. 2011. Uns interessierte vor allem, ob für die Schüler die gegebenen räumlichen Orientierungen geeignet sind, sie ihre Pläne in Konstruktionen umsetzen können („*Transfer zwischen Raum und Ebene*“, siehe Schmidt-Thieme/Weigand 2009), ob sie frei kreativ bauen würden und insbesondere, ob eine Kooperation in Klassenstärke möglich ist. Dazu wurde *Minecraft* in zwei Doppelstunden bei 69 Schülerinnen und Schülern (Mathematikunterricht in Klasse 5&6 und mit einer MINT-Mädchen-AG der Klassenstufe 5) erprobt.

Zuerst sollten die Schüler einzeln *Minecraft* benutzen, danach in Gruppenarbeit ein Konstruktionsprojekt planen und umsetzen, sowie sich abschließend Regeln und Ziele für ein Klassenprojekt überlegen, welches in der zweiten Doppelstunde umgesetzt würde.

Die Bedienung von *Minecraft* und die räumliche Orientierung in der Aufgabenstellung wurde nach anfänglicher Erprobung von den Schülerinnen und Schülern sehr gut umgesetzt. Gemeinsam geplante Projekte in der Welt von *Minecraft* wurden mit Begeisterung konstruiert. Besonders faszinierte die Beteiligten die gemeinsame Bau-Umgebung, in welcher in der zweiten Doppelstunde als Klasse gemeinsam ein größeres Projekt (Kino, Burg bzw. Park) realisiert wurde. In ihrer Freizeit führten danach über 80% der Schüler gemeinsam Bauprojekte in von uns bereitgestellten (und damit durch uns kontrollierbaren) geometrischen Computer-Welten fort, davon mehr als die Hälfte in einem Gesamtzeitrahmen von über sechs Stunden. Dabei animierte gerade eine leere Welt ohne Aufgaben zum kreativen Bauen, wobei die Schüler auch ohne Lehrer-Kontrolle gemeinsame Regeln einhielten (insbesondere, dass man Konstruktionen anderer nicht beschädigt). Die beteiligten Schülerinnen und Schüler wie auch die Lehrkräfte waren fasziniert und begeistert von der ungewohnten Möglichkeit, in einer sehr großen Gruppe sich in individueller Teamarbeit mit einem gemeinsamen mathematischen Objekt zu beschäftigen.

Nach unserer Erfahrung und Einschätzung eignet sich *Minecraft* daher sehr gut als kurzer Einschub zur Förderung raumgeometrischer Kompetenz in das enge Curriculum der Klassenstufen 5/6. Ein Einsatz in einer Projektwoche oder einer AG wäre sicherlich auch empfehlenswert. Ein Nebeneffekt ist die wichtige (spielerische) Schulung algorithmischen Denkens und Planens (zur Bedeutung einer möglichst frühen Vertrautheit mit algorithmischem Denken vergl. auch Schmidt-Thieme 2005).

Literatur

Andelfinger, B. (1988): Geometrie. Soest: Landesinst. für Schule u. Weiterbildung

Elschenbroich, H.-J. (2003): Unterrichtsgestaltung mit Computerunterstützung. In: Leuders, T. (Hrsg.): Mathematik-Didaktik. Berlin: Cornelsen, 212–233.

Franke, M. (2007): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Heidelberg: Spektrum

Kadunz, G., Sträßer, R. (2009): Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Leuders, T. (2005): Mit Animationssoftware kreativ konstruieren – Geometrische Bilder als Anlass zum Problemlösen. In: Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. (Hrsg.): Computer, Internet &Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen, 199-207

Luig, K., Sträßer, R. (2009): Förderung ausgewählter Aspekte der Raumvorstellung mit dynamischer Geometriesoftware. BzMU 2009, 301-304.

Ludwig, M. (2001): Raumgeometrie mit Kopf, Herz, Hand und Maus. BzMU 2001

Ludwig, M. (2007): Didaktik der Geometrie: Propädeutische Geometrie in Klasse 5 und 6. http://www.webcitation.org/66Nx6cjTD. Zuletzt abgerufen am 23.03.2012

Ludwig, M., Weigand, H.-G. (2009): Konstruieren. In: Weigand, H.-G. et. al. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum, 55-80

Schmidt-Thieme, B. (2005): Algorithmen – fächerübergreifend und alltagsrelevant? In: Engel, Joachim u. a. (Hrsg.): Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatorischer Aktivitäten. Hildesheim, 177-188.

Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (2009): Symmetrie und Kongruenz. In: Weigand, H.-G. et. al. (Hrsg.): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum, 187-214

Schumann, H. (2001): Raumgeometrie. Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen

Weigand, H.-G., Weth, T. (2002): Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg Berlin: Spektrum Verlag

Christina GASSNER & Markus HOHENWARTER, Linz

GeoGebraTube & GeoGebraWeb

In diesem Beitrag werden neue Möglichkeiten des Austauschs freier Unterrichtsmaterialien rund um die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra auf der online Plattform GeoGebraTube (www.geogebratube.org) sowie deren nunmehrige Verwendbarkeit auf Tablet Computern und Smartphones im Zuge des GeoGebraWeb Projekts vorgestellt.

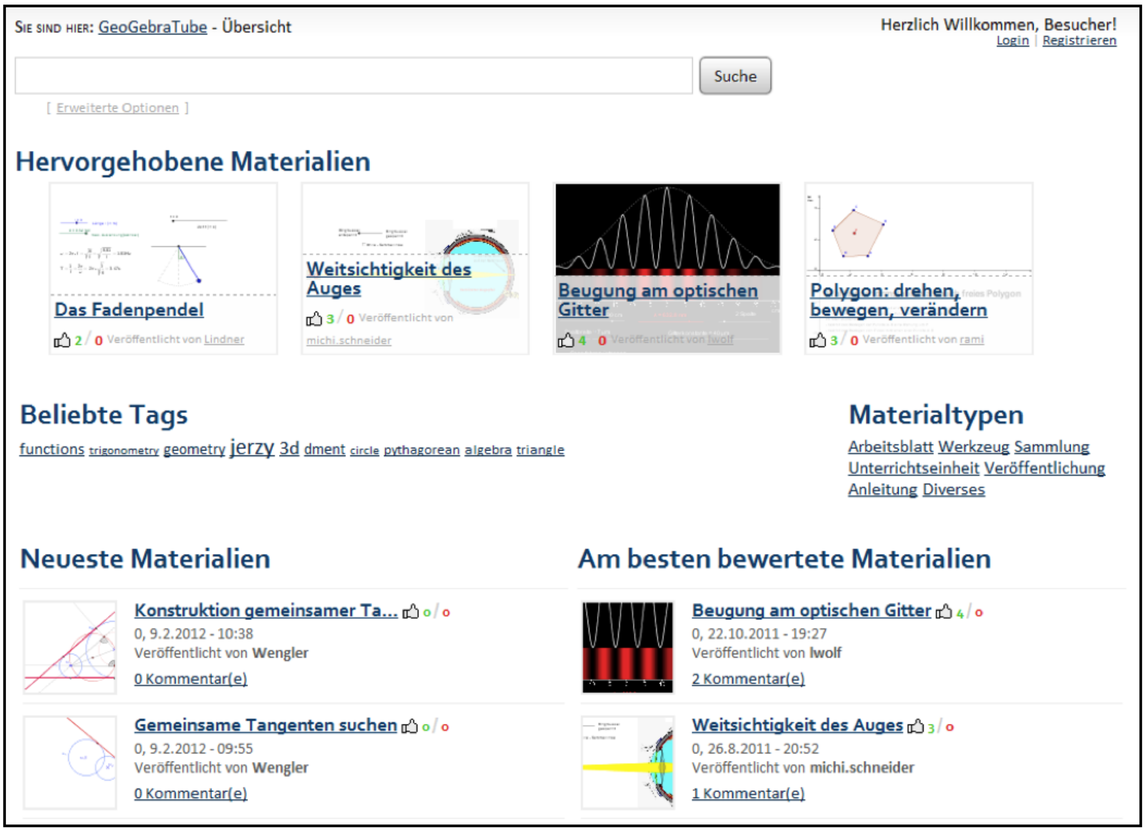
GeoGebraWiki von 2005 bis 2011

Das GeoGebraWiki enstand 2005 als Plattform für den Austausch von Unterrichtsmaterialien rund um die dynamische Mathematiksoftware GeoGebra. Dieses MediaWiki, das im Prinzip wie das bekannte Online-Lexikon Wikipedia funktionierte, entstand auf Wunsch vieler Lehrer, die eine Möglichkeit suchten, ihre mit GeoGebra erstellten dynamischen Arbeitsblätter miteinander auszutauschen. Jeder Nutzer konnte eigene Materialien beisteuern, indem er diese mit dem GeoGebra Upload Manager (GUM) hochlud und anschließend auf der entsprechenden Seite im GeoGebraWiki verlinkte. Insgesamt wurden so bis 2011 ca. 20.000 interaktive Arbeitsblätter frei zugänglich gemacht.

Neben der Tatsache, dass es mit dem GeoGebra Upload Manager und GeoGebraWiki eigentlich zwei Systeme für einen Zweck gab, brachte diese Art von Materialienaustausch einige Probleme mit sich. So mussten zum Beispiel für das Verlinken von Materialien die entsprechenden Befehle direkt in den MediaWiki Quellcode der GeoGebraWiki Seite geschrieben werden, was relativ schwierig ist. Weiters war auch die Suche nach Materialien nur sehr eingeschränkt möglich. Insgesamt war der Materialienaustausch mittels GeoGebraWiki relativ umständlich, da das Zurverfügungstellen von Materialien aus drei Schritten bestand: Erstellen der html-Seite mit GeoGebra, Hochladen dieser Datei mit dem Upload Manager und abschließend Verlinken dieser Datei im GeoGebraWiki.

GeoGebraTube seit 2011

Die Suche nach einer Alternative zum GeoGebraWiki lag also auf der Hand und führte im September 2011 zum Start von GeoGebraTube, einer neuen, zentralen Plattform für den Austausch von interaktiven GeoGebra Materialien. Die Vorteile von GeoGebraTube liegen in der Möglichkeit des direkten Hochladens von dynamischen Arbeitsblättern aus GeoGebra („Datei“, „Veröffentlichen“), einer auf Metadaten und Schlagwörtern basierenden Suchfunktion, sowie Funktionen zur Bewertung und Kommentierung von Materialien.



GeoGebraTube Webseite auf www.geogebratube.org

Die in GeoGebraTube hochgeladenen Dateien stehen sofort als interaktive online Arbeitsblätter und zum Download bereit. Beim Hochladen müssen der jeweilige Materialtyp (z.B. Arbeitsblatt, Unterrichtseinheit, Anleitung), eine kurze Beschreibung, das Alter der Zielgruppe sowie Schlagwörter angegeben werden.

Von September 2011 bis März 2012 wurden bereits über 5.000 Materialien auf GeoGebraTube online gestellt, wobei der derzeitige Zuwachs etwa 1.000 Materialien pro Monat beträgt. Die Hälfte dieser Materialien ist aktuell in englischer und etwa zehn Prozent in deutscher Sprache. Um bei dieser Fülle von Materialien „gute“ finden zu können, gibt es einerseits redaktionell ausgesuchte Materialien, die auf der Startseite unter dem Titel „Hervorgehobene Materialien“ zu finden sind. Andererseits können Nutzer auch selbst Bewertungen vornehmen, indem sie auf einen „Gefällt mir“-Button klicken, was dieses Material in den Suchergebnissen weiter nach oben bringt. Außerdem gibt es für Nutzer die Möglichkeit über Kommentare Lob, Kritik oder Verbesserungsvorschläge anzubringen.

Die Materialien von GeoGebraTube können mittels „Embed-Code“ in andere Internetseiten eingebettet werden und via Google+, Facebook, Twitter oder Email mit Schülern und Kollegen geteilt werden. Angemeldete Nutzer können „Favoriten“ anlegen, um bestimmte Materialien schnell wieder zu finden, und Materialien als „Sammlung“ selbst zusammenstellen.

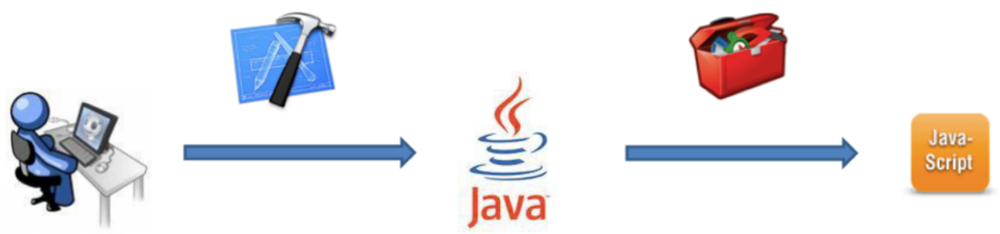
GeoGebraWeb für Tablets und Smartphones

Die im GeoGebraWiki und auf GeoGebraTube bereitgestellten interaktiven Materialien verwendeten bisher als technische Grundlage GeoGebra Java Applets und funktionieren damit nur auf Desktop und Laptop Computern mit installiertem Java Plugin. Dieses Plugin wird aber von neuen Tablet Computers und Smartphones wie iPad, iPhone, Android tablets und Telefonen nicht unterstützt, sodass auf diesen Geräten GeoGebra Arbeitsblätter bisher nicht verwendet werden konnten. Außerdem ist absehbar, dass in Zukunft Plugins wie Java, Flash und Silverlight auch von Desktop Computern verschwinden und durch den neuen interaktiven HTML5 Webseitenstandard ersetzt werden.

Aus diesen Gründen wurde 2009 das Projekt GeoGebraMobile gestartet mit dem Ziel, eine auf HTML5 und JavaScript basierende GeoGebra Version zu erstellen, die die Verwendung interaktiver GeoGebra-Arbeitsblätter auf mobilen Geräten wie Tablets und Smartphones ermöglichen sollte. Durch die Verwendung neuer Webstandards sollte es möglich werden, die selbe Software sowohl auf traditionellen Computern als auch auf neuen portablen Geräten nutzen zu können. Die Alternative der Entwicklung von speziellen Apps für mobile Betriebssysteme wie iOS (iPhone/iPad), Android oder Windows Phone wurde von vorneherein ausgeschlossen, da dies eine vielleicht sogar mehrmalige Neuprogrammierung von GeoGebra bedeutet hätte, was von einem kleinen Team von Open Source Programmierern nur schwer leistbar gewesen wäre.

Zunächst wurde versucht, die bereits bestehende Software JSXGraph von der Universtität Bayreuth zu nutzen, die auf HTML5 und JavaScript basiert und eine Möglichkeit bietet, GeoGebra Dateien als interaktive online Inhalte darzustellen. Leider stellte sich diese Lösung als unbefriedigend heraus, da damit viele Funktionen und Befehle von GeoGebra nicht unterstützt werden konnten. Schließlich konnte auf Basis des Google Web Toolkits eine Lösung gefunden werden, mit der der bestehende Java Quellcode von GeoGebra teil-automatisiert in eine JavaScript und HTML Web-Applikation übersetzt wurde. Auf diese Weise entstand 2010 ein erster Prototyp von GeoGebraMobile. Der Nachteil dieser Software war allerdings, dass alle Erweiterungen und Verbesserungen an der Java Desktop Software von GeoGebra ein weiteres Mal auch für GeoGebraMobile gemacht werden mussten. So wurde bald klar, dass beide Versionen auf lange Sicht nur mit enormem Aufwand kompatibel parallel weitergeführt werden konnten.

Daher wurde 2011 die Entscheidung getroffen, das GeoGebraMobile Projekt einzustellen und stattdessen das Nachfolgeprojekt GeoGebraWeb zu starten, bei dem der originale Java Quellcode von GeoGebra so neu organisiert werden sollte, dass daraus automatisch sowohl die aktuelle Java Software als auch eine HTML5 kompatible Web-Applikation erstellt werden kann. Konkret verwenden wir dazu das Google Web Toolkit, mit dem aus Teilen des modifizierten Java Quellcodes von GeoGebra automatisch eine für verschiedene Browser optimierte HTML5/JavaScript Web Applikation erstellt werden kann.



GeoGebra Java Code (wie bisher) Google Web Toolkit: HTML5

Dank der Vorerfahrungen aus dem GeoGebraMobile Projekt konnte mit März 2012 bereits der GeoGebraWeb Viewer fertig gestellt werden, der auch schon in GeoGebraTube integriert wurde. Damit funktionieren nun bereits alle Arbeitsblätter von GeoGebraTube, welche die Grafik Ansicht von GeoGebra verwenden, sowohl auf traditionellen Computern als auch auf iPad/iPhone und Android Geräten. Durch das Hochladen von Materialien auf GeoGebraTube können also sehr einfach alte wie neue GeoGebra Materialien auf all diesen Geräten nutzbar gemacht werden.

In den nächsten Monaten soll GeoGebraWeb um eine Nutzeroberfläche mit Werkzeugleiste und Algebra Ansicht erweitert werden, sodass GeoGebra selbst bald als HTML5 Webapplikation in jedem Browser ohne Plugin verwendet werden kann. Basierend darauf sollen bis Ende 2012 dann auch erste GeoGebra Apps für iPad/iPhone und Android zur Verfügung gestellt werden, die auch das Erstellen von Konstruktionen ermöglichen werden. Die Nuterzoberfläche soll hier natürlich auch die auf diesen Geräten zur Verfügung stehende Multi-Touch Bedienung unterstützen.

Thomas GAWLICK, Hannover

Heuristische Rekonstruktion – Heuristische Instrumentation

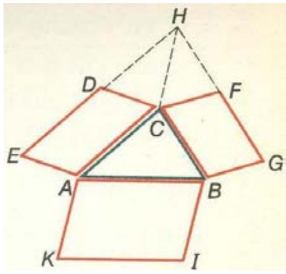
Unterrichtliche Aufbereitung von Problemaufgaben anhand einer Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes

Empirische Erfahrungen (Hölzl (1995, 1999), Brockmann-Behnsen 2010) zeigen, dass zur vollen Ausschöpfung des heuristischen Potentials von DGS die vorfindlichen Lehrkonzepte erweitert werden müssen durch:

- *Heuristische Rekonstruktion* (HR) von Problemaufgaben
- *Heuristische Instrumentation* (HI) eines sachgemäßen DGS-Einsatzes

Diese Konzepte (erläutert im Basisartikel zur Sektion) wenden wir auf folgendes Beispiel als mögliches Ziel eines längerfristigen Heuristik-Trainings (Brockmann-Behnsen in diesem Band) an: „**Papppusscher Dreieckssatz**, eine Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes: Zeichnet man über zwei Seiten eines Dreiecks ABC je ein beliebiges Parallelogramm ACDE beziehungsweise BCFG, verlängert deren Seiten DE beziehungsweise FG, bis sie sich im Punkt H schneiden, zeichnet zu HC die Parallelen durch A und B und verbindet die Punkte K und L, in denen HE und HG von den Parallelen geschnitten werden, so entsteht das Parallelogramm ABLK, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen der beiden ersten Parallelogramme ist." (Brockhaus online) Lambacher-Schweizer (1970) erweist die unterrichtliche Behandelbarkeit – aber trotz der Figur erschließen sich auch hier der Sinn des Satzes und der Zusammenhang zum Pythagoras nicht ohne Weiteres:

5. a) Beweise mittels Scherungen den Satz (Fig. 21.1): Zeichnet man über den Seiten AC und BC eines Dreiecks ABC Parallelogramme $ACDE$ und $BCFG$ und schneiden sich ED und GF in H, so ist die Summe der Parallelogramminhalte gleich dem Inhalt des Parallelogramms $ABIK$, bei welchem $\overline{AK} = \overline{CH}$ und $AK \parallel CH$ ist.

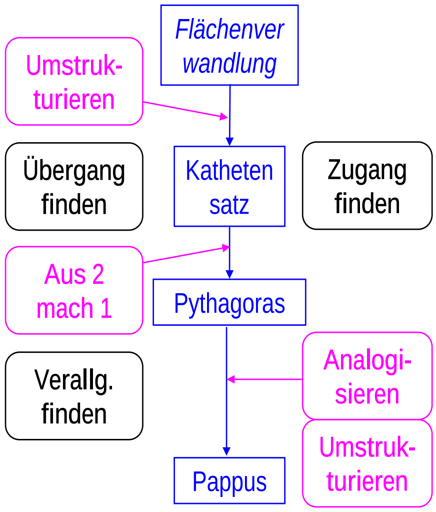


Dies ist Heuristik auf Basis-Niveau: Satz, Figur und Beweishilfsmittel sind vorgegeben. Hier setzt die Schlüsselfrage 2c. der HR an: *Was davon lässt sich von den SuS selbständig erschließen?*

Im Prozess der HR werden dabei folgende **didaktische Probleme** gelöst:

Verallgemeinerung finden: Der Pythagoras muss so behandelt werden, dass die Aussage verallgemeinert und der Beweis übertragen werden kann. Daher wird der Scherungsbeweis ausgewählt und die Scherung durch ein „operatives Vorspiel" zu einem flexiblen Beweisfindungsmittel gemacht.

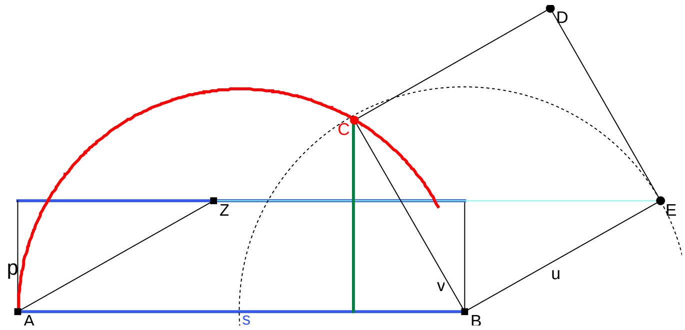
Zugang finden: Auch der Pythagoras soll möglichst eigenständig gefunden



werden. Als motivierendes Ausgangsproblem der Flächenverwandlung dient die Rechtecksquadratur – für den Kathetensatz muss allerdings die Flächenverwandlungsrichtung umgekehrt und das rechtwinklige Dreieck ABC hervorgehoben werden – die SuS lernen den Heurismus Umstrukturieren.

Übergang finden: Zum Kathetensatz kommen SuS meist nur mit Lenkung des Lehrers – daher wird hier ein geeigneter heuristischer Kontext geschaffen, indem man „die DGS über die reine Bestätigung eines geometrischen Sachverhaltes hinaus so verwenden [kann], dass dieser, eingebettet in allgemeinere oder speziellere Fragestellungen, in seiner Besonderheit erkennbar ist“ (Hölzl 1999). Dazu dient folgende *Stufung* der Hilfsaufgabe:

Gegeben ein Rechteck mit Seiten p, s, gesucht ein flächengleiches Quadrat.



RE(p,s)⟶ Q (u): Ist ein „klassisches Quadraturproblem“ , aber schwer – wie findet man u geometrisch? Dazu dient die Rückführung auf eine leichtere Aufgabe:

RE(p,s)⟶ RE(u,v): Ist leicht – im Fall p<u<s durch das Zwischenziel Parallelogramm oder das Hilfsmittel Scherung: PG(u,s) entsteht durch Scheren längs s´||s und RE(u,v) durch Scheren längs u´||u.

Dies ist der *Kontext*, in dem SuS den Spezialfall u=v in seiner Besonderheit erkennen können – und die beobachteten Eigenschaften konstruktiv nutzen (Rückwärtsarbeiten). Ziehen an Z variiert u (DGS als heuristisches Werkzeug, vgl. das elektronische Arbeitsblatt (elAB) in Anhang 1) und über die situative Heuristik des Schema zweier geometrischer *Örter* (Polya) erhält man die gesuchte Ecke C von Q(u) als Schnitt zweier Ortslinien. Durch Umstrukturieren erhält man hieraus den Kathetensatz.

Analogisieren: „Analoge Dinge *stimmen in gewissen Beziehungen* zwischen ihren entsprechenden Teilen miteinander *überein*.“ (Polya 1945, 52) Verallgemeinern ist der Übergang von einer *Satzdarstellung* S: V⟶ B mit *Beweisdarstellung*: Bew: $V = A_1 \to A_2 \ldots\to A_{n-1} \to A_n = B$ zu S´: V´⟶ B´ mit V⟶ V´, Subst(B´,V´=V) = B und *analoger* Beweisdarstellung

Bew´: $V´=A´_1 \to A´_2 \ldots\to A´_{n´} = B´$

Beim Pythagoras wählen wir dazu die Darstellung : V_1: ABC ist rechtwinkliges Dreieck, V_2: P, Q, R sind Quadrate über c, b, a. B: $|P| = |Q| + |R|$.

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, sowohl V als auch B zu modifizieren. Aber die Verallgemeinerung auf beliebige Dreiecke können SuS kaum eigenständig durchführen, denn der Kosinussatz lässt sich nicht entdecken – aber die Pappus-gemäße Modifikation von V_2?! Während man oft (wie im Schulbuch) beim Verallgemeinern mit V und B beginnt, soll hier mit Bew begonnen werden. Ausgangspunkt ist also V_1*´:* ABC ist ein Dreieck.

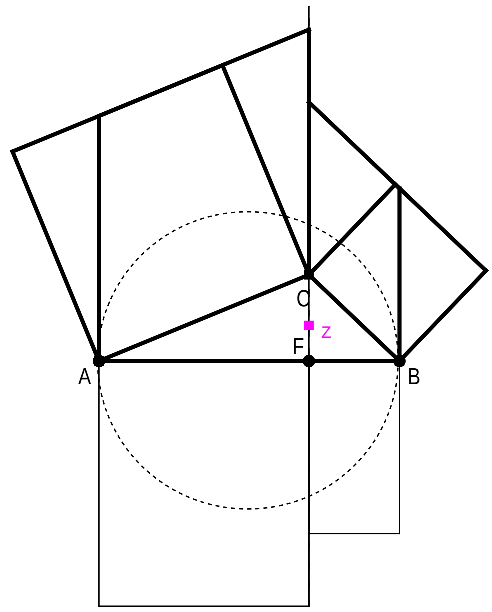
Erkundung (elAB, Anhang 2) zeigt: Ein Quadrat der Fläche |Q| + |R | hat einen Defekt (oder Überschuss) gegenüber P. (HI: Exploratives Ziehen)

Mögliche S-Idee für V2´: Q, R Quadrate über a, b, P Rechteck über c.

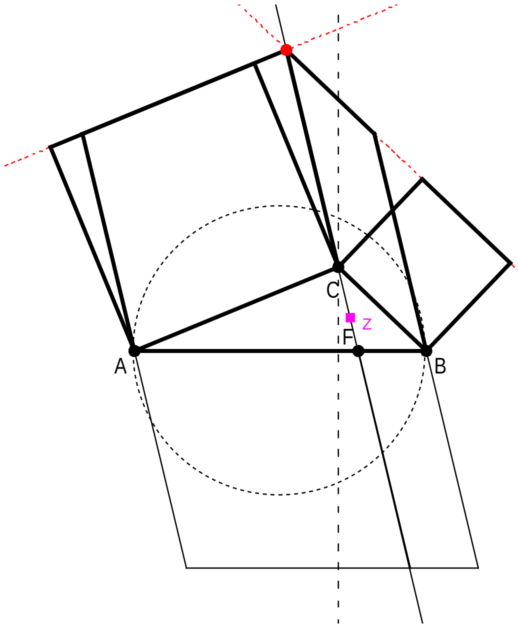
L-Impuls: „Das geht, ist aber nicht „schön“. Versucht, den Scherungsbeweis zu übertragen! Das zeigt euch, wie ihr V und B verändern müsst.“ Hierdurch lernen die SuS einen fortgeschrittenen Heurismus kennen:
Proof analysis nach Lakatos „to discover the lemma (perhaps hidden) to which the global counterexample is a local counterexample. The result of this stage is an improved conjecture featuring a *new proof-generated concept*.“ (Larsen & Zandieh 2008) Hier wird durch das elAB in Anhang 3 die im Pythagoras-Beweis verborgene Rolle des Punktes H als Schließungspunkt der Scherungsfigur explorativ verdeutlicht. Nachfolgend daraus zwei Phasen, mit sukzessive abgerufenem Anleitungs- und Hilfetext:

Erläutere den Zusammenhang zwischen blauen Vierecken in der Figur.
Löse dann die Bindung von C an den Kreis.
Was beobachtest Du?

Die hellen Vierecke sind nicht mehr flächengleich zu den schraffierten Teilflächen des dunkelblauen Vierecks.
Die gescherten Vierecke passen nicht mehr zusammen.
Man kann auch sagen: Weil das Dreieck nicht mehr rechtwinklig ist, erfüllt die Senkrechte durch C nicht mehr ihren Zweck.
Wir wollen eine andere Scherlinie finden, so dass die Flächen wieder zusammen passen.
Löse dazu die Bindung von Z an das Lot und ziehe an Z. Was beobachtest Du?



HI: Nach Lösen der Bindung variiert man nicht mehr *in* einer Konfiguration, sondern diese selbst. Die Flächenaussage geht dabei zunächst verloren, kann aber mit einer neuentdeckten Regularität wiederhergestellt werden(„descending“ bzw. „ascending control“ im Sinne von Arzarello):

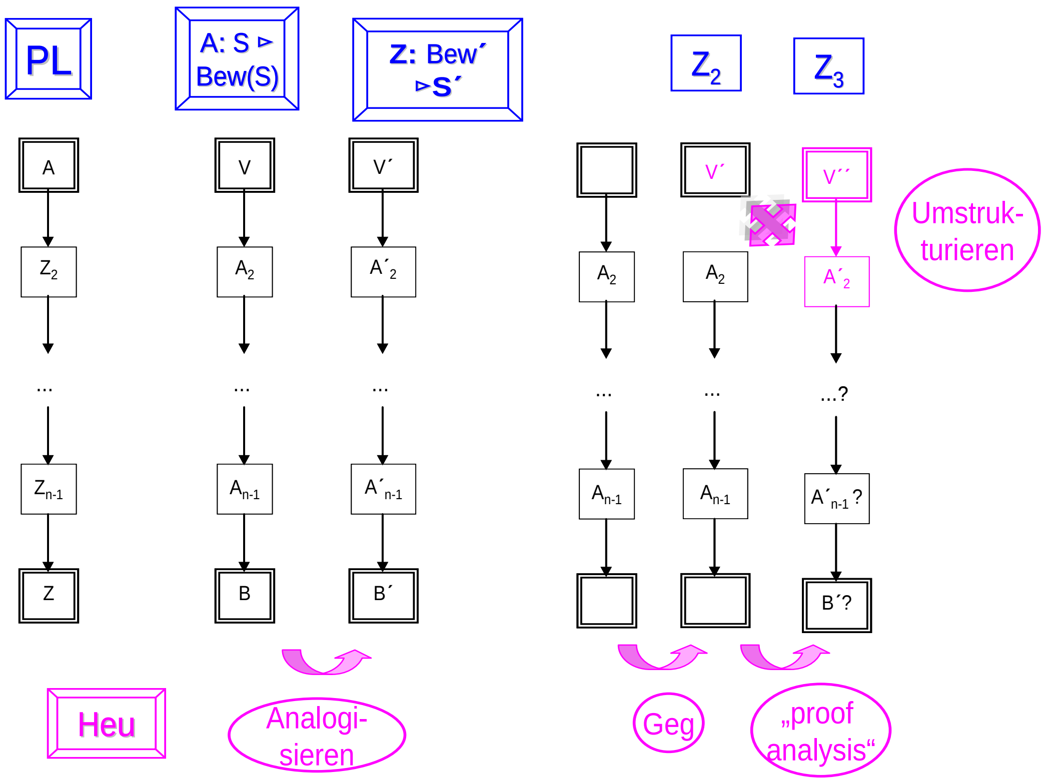


Beim Ziehen an Z wird das dunkelblaue Quadrat zu einem Parallelogramm, das immer zu g=FC parallel ist.
Man kann Z so verziehen, dass die gescherten Vierecke wieder aneinander stoßen. Dann sind sie auch wieder zu den schraffierten Teilparallelogrammen des blauen Vierecks flächengleich.
Wie finden wir F? Hierzu müssen wir umstrukturieren. Wenn g bekannt ist, finden wir F als Schnittpunkt mit AB.
Versuche daher, einen anderen Punkt von g konstruktiv zu beschreiben.

Der rote Punkt liegt auf g. Es ist der Schnittpunkt der Geraden durch die Außenkanten der hellen Quadrate

Die SuS erkennen: Scheren zur Linie CF verwandelt Q und R in ein flächengleiches Parallelogramm P. Und das geht auch, wenn Q und R ebenfalls Parallelogramme sind! Nun kann der Satz von Pappus ausgesprochen und sein explorativ gefundener Beweis ausformuliert werden – und die schrittweise gelenkte Eigenaktivität macht das den SuS sicher plausibler.

Die abschließende Prinzipdarstellung fasst Beweisen und Verallgemeinern als Spezialfall des Problemlösens auf und zeigt die dialektische Rolle der proof analysis á la Lakatos bei der Umstrukturierung von S zu S:



Maximilian GEIER, Landau

Der regelmäßige Einsatz von Problemaufgaben im Mathematikunterricht in Grundschulen

Allgemein wird davon ausgegangen, dass der regelmäßige Einsatz von Problemaufgaben im Grundschulmathematikunterricht gewinnbringend ist, da sie zur kognitiven Aktivierung beitragen und mathematische Denkprozesse auf den Weg bringen. Doch viele Fragen sind in diesem Zusammenhang noch offen: Sind z.B. diese Aufgaben nicht doch eher etwas für leistungsstarke und begabte Schüler? Tatsächlich werden sie oft als Differenzierungsaufgaben genutzt. Dieser Empfehlung begegnet man in der Literatur, und dies wurde v.a. auch in Lehrerinterviews während der Studie deutlich: Die Bedenken sind groß, dass Leistungsschwache bei der Bearbeitung solcher Aufgaben Misserfolge erleben und stark demotiviert werden. Ein besonderer Fokus dieser Untersuchung lag deshalb auf der Leistungsentwicklung Leistungsschwacher. Der Begriff Problemhaltige Textaufgabe (im Folgenden kurz Problemaufgabe) wird hier nach Heinrich Winter in Abgrenzung von Routineaufgabe definiert (ebd., 1985). Die in der Studie verwendeten Problemaufgaben stammen aus Renate Raschs 42 Denk- und Sachaufgaben (2003).

Die Untersuchung wurde im Jahr 2011 an drei Grundschulen in Rheinland-Pfalz durchgeführt. Zunächst wurde in den acht teilnehmenden dritten Klassen der Leistungsstand in zwei Variablen überprüft. Es wurde einerseits ein Test mit Problemaufgaben durchgeführt und andererseits der deutsche Mathematiktest DEMAT zur Erhebung traditioneller mathematischer Fähigkeiten (Hasselhorn u.a., 2004). Um im weiteren Verlauf die Entwicklung der Leistungsfähigkeit zu überprüfen, wurde dann einem Zweigruppenplan gefolgt, die beiden Tests wurden als Pretests genutzt, und andere Versionen davon wurden nach dem Treatment als Posttests geschrieben. Treatment- und Kontrollgruppe bestanden jeweils aus vier Schulkassen und wurden so eingeteilt, dass sie mit vergleichbaren Voraussetzungen starteten: Im Mittel hatten sie ähnliche Leistungen sowohl im DEMAT als auch im Problemaufgabentest erbracht. Außerdem wurde in Lehrerinterviews erhoben, in welchem Maße Problemaufgaben in den einzelnen Klassen eingesetzt wurden, so dass die beiden Gruppen auch eine im Mittel vergleichbare Erfahrung mit solchen Aufgaben hatten. Über einen Zeitraum von zehn Schulwochen wurden in der Treatmentgruppe nun genau eine Schulstunde pro Woche Problemaufgaben behandelt, und darüber hinaus keine weiteren Sachaufgaben. In der Kontrollgruppe wurde der gleiche zeitliche Aufwand betrieben. Es stand ebenfalls genau eine Stunde pro Woche für traditionelle Textaufgaben ohne Problemgehalt zur Verfügung.

Leistungsentwicklungen

Nun soll zwei oft geäußerten Vorbehalten gegenüber Problemaufgaben begegnet werden: einmal den erwähnten Sorgen bezüglich der Leistungsschwachen, und zweitens wird oft die Frage gestellt, ob der große Aufwand, der offensichtlich mit Problemaufgaben einhergeht, überhaupt gerechtfertigt ist. Aufgrund der Untersuchungsdesigns kann der Aufwand in beiden Gruppen als gleich groß bezeichnet werden. Die Hypothese ist diesen Sorgen entgegen ganz hoffnungsvoll formuliert: Die Schüler der Treatmentgruppe verbessern sich gegenüber der Kontrollgruppe deutlich im Problemlösen ohne eine gebremste Entwicklung bei den traditionellen fachlichen Fähigkeiten aufzuweisen.

Der erste Teil der Hypothese ist wenig überraschend, vielleicht vorhersehbar, wichtig ist deshalb der zweite Halbsatz. Wenn die regelmäßigen Problemlöser bei den traditionellen fachlichen Fähigkeiten keine gebremste Entwicklung gegenüber der Kontrollgruppe aufweisen, dann kann man das als Hinweis darauf verstehen, dass die vermeintlich zu aufwendigen Problemaufgaben den Schülern doch nicht zu viel kostbare Unterrichtszeit nehmen.

	Leistungsschwache			andere Leistungsgruppen		
	Pre	Post	Differenz	Pre	Post	Differenz
	DEMAT			DEMAT		
Treatmentgr.	39,6	51,7	12,1	69,2	78,3	9,1
Kontrollgruppe	40,6	55,1	14,5	69,4	76,4	7,0
	Problemaufgabentest			Problemaufgabentest		
Treatmentgr.	48,1	57,8	9,7	66,4	71,4	5,0
Kontrollgruppe	35,8	41,7	5,8	65,9	63,5	-2,4

Die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen in beiden Tests sind in der Tabelle angegeben (in Prozent der im jeweiligen Test erreichbaren Punkte). In den Entwicklungen der Leistungsschwachen sind in beiden Tests keine signifikanten Unterschiede zu beobachten. Das gilt auch für die Schüler anderer Leistungsgruppen im DEMAT. Einzig die Problemaufgabentestergebnisse der Leistungsstärkeren zeigen einen auffälligen Unterschied, die bessere Entwicklung der Treatmentgruppe ist statistisch signifikant. Über beide Gruppen und beide Tests hinweg zeigt der Vergleich der Entwicklungen der Leistungsschwachen mit den anderen Schülern sogar leichte Vorteile für die Leistungsschwachen.

Den genannten Befürchtungen kann und will ich damit gerne begegnen: Während Leistungsschwächere keinen messbaren Nachteil durch den regelmäßigen Problemeinsatz erfahren, gilt für die Stärkeren offensichtlich umgekehrt: Keinen Zugang zu Problemaufgaben zu erhalten schränkt die Entwicklungsmöglichkeiten sogar ein.

Zusammenhang zwischen fachlichen Leistungen und Problemlösen

Die Auswertung der Daten soll auch einen Beitrag zum Begriff der Problemlösefähigkeiten liefern. Problemfähigkeiten sind zunächst einmal die Fähigkeiten, die benötigt werden, um Probleme zu lösen. Welche Fähigkeiten das konkret sind, ist zuletzt auch deshalb schwer zu beantworten, da es bereits über den Begriff des Problemlösens selbst vielfältige Meinungen im didaktischen Diskurs gibt. Um sich konkreten Problemlösefähigkeiten zu nähern beruft man sich gern auf die vier Kategorien von Schoenfeld (1985): *Ressources, Control, Heuristics, Beliefs*. Die *Ressourcen*, auf die man beim Lösen von Problemen zurückgreift, sind einerseits das fachliche Wissen und andererseits kognitive Fähigkeiten. Als *Control* werden die metakognitiven Fähigkeiten bezeichnet. *Heurismen* bezeichnen Strategien und Techniken zum Problemlösen. Und die Bedeutung des affektiven Aspekts (*Beliefs*) wird gerade im Zusammenhang mit Problemlösen oft hervorgehoben; das Problem der Demotivation Leistungsschwacher wurde oben bereits erwähnt. Je nach Fachgebiet und Autor werden den vier Aspekten unterschiedliche Anteile an den Problemlösefähigkeiten unterstellt. Die Bedenken bezüglich der Schwächeren zum Beispiel weisen auf die Annahme hin, dass ein starker Zusammenhang zwischen den fachlichen Fähigkeiten und dem Problemlösen existiert. Neben diesem Aspekt rücken nun die Heurismen in den Vordergrund. Denn diese Untersuchung beschäftigt sich mit den aktiv entwickelbaren und trainierbaren Aspekten. Da die Daten eine Entwicklung beschreiben, kann davon ausgegangen werden, dass sie keine Aussagen zu kognitiven und metakognitiven Fähigkeiten machen. Auch die *Beliefs* werden unter der Annahme, dass sie v.a. Verstärker einer existierenden Entwicklung sind, ausgeklammert.

Die Ergebnisse der DEMAT-Tests liefern eine Aussage über die fachlichen Fähigkeiten und ihre Entwicklung. Erste Aussagen über Heurismen werden auf diesem Weg möglich gemacht: Der Korrelationswert zwischen den fachlichen Fähigkeiten (DEMAT-Pretest) und dem Erfolg im Problemlösen (Problemaufgaben-Pretest) aller teilnehmenden Schüler vor dem Treatment beträgt 0,46, es gibt einen gewissen Zusammenhang. Es stellt sich die Frage, ob und inwieweit sich die nun folgende Entwicklung der

Korrelation bei der Treatmentgruppe von der der Kontrollgruppe unterscheidet. Ausgehend von der oben beschriebenen unterschiedlichen Entwicklung darf man erwarten, dass die regelmäßigen Problemlöser einen Lernerfolg eigener Qualität haben. Das sollte sich darin zeigen, dass die Treatmentgruppe nach dem Treatment eine niedrigere Korrelation zwischen DEMAT- und Problemlösetestergebnissen aufweist. Folgt man dem Modell von Schoenfeld, bleibt nur die Heuristik als trainierbarer Aspekt, in dem dieser Lernerfolg eigener Qualität stattfinden kann. Und so wurde eine zweite Hypothese formuliert: Durch regelmäßige Beschäftigung mit Problemaufgaben werden Heurismen entwickelt, und so ist die Leistung im Problemlösen weniger von den fachlichen Fähigkeiten abhängig.

Die Entwicklungen der Korrelationswerte der beiden Gruppen sind tatsächlich auffällig unterschiedlich (TG von 0,42 im Pretest auf 0,39 im Posttest; KG von 0,52 im Pretest auf 0,63 im Posttest). Nach einem längeren Zeitraum ohne jegliche Problemaufgaben zeigt sich in der Kontrollgruppe ein deutlich höherer Korrelationswert. Die Entwicklung der Treatmentgruppe ist dagegen relativ gering, aber tatsächlich dahingehend, dass die Entwicklung im Problemlösen weniger abhängig von den traditionellen Fähigkeiten stattfindet. Die Ergebnisse lassen nachträglich folgende Überlegung zur bislang verwendeten Terminologie zu: Ist die von uns Kontrollgruppe genannte Gruppe nicht eigentlich eine zweite Treatmentgruppe? Teile der Gruppe waren einen gewissen Umgang mit Problemaufgaben gewohnt. Die Probleme wurden ihnen also entzogen. Auch dies ist ein Treatment, und sogar eines mit auffälligem Ergebnis. Und das unterstützt auch unseren Schluss aus ersten Beobachtungen der Leistungsentwicklungen: Keinen Zugang zu Problemaufgaben zu erhalten schränkt Entwicklungsmöglichkeiten ein und erhöht so die Abhängigkeit von den fachlichen Fähigkeiten. Und ob der Verzicht auf Problemaufgaben dann vorteilhaft für die Leistungsschwachen sein kann, ist zumindest zweifelhaft.

Literatur

Hasselhorn, M. u.a. (Hrsg.) (2004): DEMAT 3+. Deutscher Mathematiktest für dritte Klassen. Göttingen: Hogrefe

Rasch, R. (2003): 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren. Seelze-Velber: Kallmeyer, Klett

Schoenfeld A. H. (1985): Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press

Winter, H. (1985): Sachrechnen in der Grundschule. Frankfurt a.M.: Cornelsen Scriptor

Marion GEIGER, Ulm, Ulrike, STRADTMANN, Ulm, Markus VOGEL, Heidelberg, Tina SEUFERT, Ulm

Transformationen zwischen mathematischen Repräsentationen: Welche Fähigkeiten haben Lernende?

1. Einführung

In der Mathematik werden unterschiedliche Darstellungen, wie Diagramme, Graphen, Tabellen und Funktionsterme verwendet und in den Bildungsstandards (KMK; 2003) wird ein flexibler Umgang mit diesen Repräsentationsformen gefordert. So sollen Schülerinnen und Schüler beispielsweise „Lösungswege beschreiben und begründen" oder „unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln" können (KMK; 2003, S.10). Diese Anforderungen erfordern das Verständnis sowie das Übersetzen zwischen verschiedenen Repräsentationen. Allerdings zeigen empirische Studien, dass das Lernen mit multiplen Repräsentationen nicht einfach ist und mitunter nicht zum Erfolg führt (Ainsworth, 1999). Probleme sind insbesondere bei der Transformation von Informationen aus einer Repräsentation in eine andere dokumentiert: So wird beispielsweise vom sogenannten „Graph-als-Bild-Fehler" (Janvier, 1978; Vogel 2006) berichtet, bei dem abstrakte Informationen aus einem Graphen direkt in die reale Welt projiziert werden. Weitere bekannte Probleme sind der height-for-slope-Fehler (Clement, 1989), linearity-smooth-prototyps und andere, welche bei Hadjidemetriou und Williams (2002) nachzulesen sind. Um herauszuarbeiten, woraus diese Probleme möglicherweise resultieren könnten, werden im Folgenden zunächst die Eigenschaften unterschiedlicher Repräsentationen theoretisch betrachtet.

2. Theoretische Grundlagen

Repräsentationen können hinsichtlich der verwendeten Zeichen und deren Verbindung untereinander in Depiktionen und Deskriptionen (Schnotz, 2001) eingeteilt werden. Unter dem Begriff Deskriptionen werden Texte, algebraische Strukturen und weiteres Wortmaterial zusammengefasst, welche mit dem von ihnen repräsentierten Gegenstand über vorauszusetzende Konventionen verbunden sind (Schnotz & Bannert, 1999; Schnotz, 2010). Im Gegensatz hierzu zählen zu den Depiktionen die Repräsentationen, welche bildhafte und ikonische Zeichen verwenden und Informationen über alle einzelnen Elemente des repräsentierten Sachverhalts sowie alle Relationen zwischen diesen beinhalten (Seufert, 2003; Schnotz, 2001). Abgesehen von dieser Einteilung auf der Symbolebene, lassen sich Repräsentationen auch hinsichtlich des Informationsgehalts unterscheiden. So können

Repräsentationen einerseits rein mathematische Inhalte transportieren und andererseits neben den mathematischen Informationen zusätzlich Informationen über den Kontext und somit einen Bezug zum Alltag liefern. In der Diskussion um mathematische Modellierungsprozesse wird zwischen der mathematischen und der realen Modellebene unterschieden (Blum et al., 2004). Diese Unterscheidung erlaubt eine Einteilung hinsichtlich der Abstraktion. Gemeinsam mit der Einteilung auf der Symbolebene kann eine Differenzierung der Abstraktionsebenen in einer Modell-Repräsentationsebenen-Matrix (Vogel, 2006) zusammengeführt werden Jede Repräsentation kann in eine Zelle dieser Matrix eingeordnet werden, wie Vogel (2006) am Beispiel des Mathematisierens funktionaler Abhängigkeiten ausgeführt hat (vgl. Abb. 1).

		Symbolebene	
		Deskriptionale Repräsentationen	**Depiktionale Repräsentationen**
Abstraktionsebene	**Mathematische Modellebene**	Funktionsterm, Wertetabelle	Funktionsgraph
	Reale Modellebene	Datentabelle, Sachtext	Abbildung, Datendiagramm

Abbildung 1: Modell-Repräsentationsebenen-Matrix (Vogel, 2006)

An Hand dieser Matrix lassen sich mögliche Transformationsprozesse erläutern: Es kann sowohl auf der Abstraktionsebene von der mathematischen zur realen Modellebene und umgekehrt gewechselt werden als auch auf der Symbolebene von Deskriptionen zu Depiktionen und umgekehrt. Als Beispiel für eine Transformation auf der Abstraktionsebene, bei der die Symbolebene nicht gewechselt wird, kann folgende Aufgabe betrachtet werden: Eine alltagsnahe Situation wird auf der realen Modellebene durch einen Text (Deskription) beschrieben. Sollen die Schülerinnen und Schüler hierzu einen Funktionsterm erstellen, wechseln sie bei dieser Aufgabe die Abstraktionsebene verbleiben aber hinsichtlich der Symbolebene bei den Deskriptionen. Es ist auch der umgekehrte Prozess denkbar, bei dem die Informationen eines Funktionsterms (oder beispielsweise auch einer Wertetabelle) in einen situativen Kontext hineingelesen werden müssen. Eine solche Aufgabenstellung würde eine Transformation von der mathematischen zur realen Modellebene erfordern. Eine Aufgabe, bei der die Abstraktionsebene beibehalten wird und eine Transformation auf der Symbolebene vollzogen werden muss, wäre beispielsweise, wenn zum gegebenen Funktionsterm ein Funktionsgraph erstellt werden soll, oder umgekehrt. In diesem Fall wäre eine Deskription auf der mathematischen Modellebene gegeben und die Aufgabe besteht darin eine Depiktion auf der mathematische Modellebene zu erstellen. Über diese Aufgaben hinaus, bei denen jeweils nur eine der beiden Ebenen gewechselt werden muss, sind auch prinzipiell Aufgaben möglich, bei denen sowohl die Abstraktionsebene als auch die Symbolebene zu wechseln sind.

3. Methodik

Um zu untersuchen, welche der Transformationsprozesse für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe mit Schwierigkeiten verbunden sind, wurden 19 Aufgaben entwickelt. Inhaltlich waren diese dem Bereich der linearen Funktionen zuzuordnen, da hier bei den Schülerinnen und Schüler mit ausreichend Vorwissen zu rechnen ist. Um Informationen über verschiedene Altersstufen und Schularten zu erhalten, bezogen wir Personen mit unterschiedlichem Bildungsstand ein (Realschule n = 46 8. Klasse; Gymnasium n = 43, 9. Klasse; Studenten im 3. Semester der Universität Ulm n = 40, gesamt n = 129), welche die Aufgaben innerhalb von 90 Minuten bearbeiteten. Zusätzlich wurde das repräsentationsspezifische Vorwissen erhoben (Stradtmann, 2010).

4. Ergebnisse

Ohne an dieser Stelle auf Grund des gegebenen Rahmens auf Details eingehen zu können (ausführlicher siehe Stradtmann, 2010), lässt sich zusammenfassend sagen, dass Lernende größere Schwierigkeiten damit haben, ausgehend von einer depiktionalen Repräsentation eine deskriptionale Repräsentation zu erstellen: In dieser Studie traten insbesondere dann Probleme auf, wenn Informationen aus Depiktionen entnommen und mit eigenen Worten wiedergegeben werden sollten. Hinsichtlich des Abstraktionsebenenwechsels erwies sich die Transformation von der mathematischen zur realen Modellebene als schwierig: Die Lernenden hatten Probleme damit, rein mathematische Informationen in einen sinnvollen realen Kontext einzubetten. Die Analyse, welche Repräsentation für die Lernenden am schwierigsten zu erstellen war, ergab, dass sich die Repräsentation „Text“ als die herausforderndste darstellte.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend ergab sich aus der vorgestellten Studie, dass Lernende Schwierigkeiten damit haben, die Aussage von mathematischen Repräsentationen zu verstehen und in eigenen Worten zu erläutern. Des Weiteren gelang es ihnen kaum, diese rein mathematischen Sachverhalte in ihre alltägliche Lebenswelt zu übertragen. Daher wird in weiteren Studien zunächst der Prozess des Verbalisierens näher betrachtet und daraufhin analysiert, worauf die Defizite der Lernenden zurückzuführen sind. Im Anschluss an diese Analyse soll dann durch gezielte Förderprogramme den aufgezeigten Problemen entgegengewirkt werden, sodass diese auf längere Sicht behoben werden können.

Literatur

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education*, (33), 131–152.

Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Jordan, M., Uflig, F., & Carstensen, C. H. (2004). Mathematische Kompetenz. In M. Prenzel (Ed.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland ; Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Münster: Waxmann.

Clement, J. (1989). The concept of varation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(2), 77-87.

Hadjidemetriou, C. & William, J. (2002). Children`s graphical conceptions. *Research in Mathematics Education,* 4.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian gaphs: Studies and teaching experiments*. Nottingham: Universtity

KMK. (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Matheamti, für den Mittleren Schulabschluss: Beschluss vom 4.12.2003*. Retrieved from http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf

Schnotz, W. (2001). Wissenserwerb mit Mulitmedia. *Unterrichtswissenschaft*, (4), 292–318.

Schnotz, W., & Bannert, M. (1999). Einflüse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. *Zeitschrift für Experimentelle Psychologie*, *46*(3), 217–235.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffe, E. Corte, J. Elen, & T. Jong de (Eds.), *Use of External Representations in Reasoning and Problem Solving.* (pp. 11–35). Amsterdam: Elsevier.

Seufert, T. (2003). *Wissenserwerb mit multiplen Repräsentationen: Wirksamkeit von Kohärenzbildungshilfen* (1st ed.). Berlin: Logos Verlag Berlin.

Stradtmann, U. (2010). *Analyse der Fähigkeiten zur Überstetzung zwischen verschiedenen Darstellungsformen in der Mathematik*. Ulm.

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. *Texte zur mathematischen Forschung und Lehre: Vol. 49*. Hildesheim: Franzbecker.

Andrea GELLERT, Essen

Diskursive Aushandlung mathematischer Strittigkeiten in Kleingruppengesprächen

Das diskursive Lernen erhält in der interpretativen Unterrichtsforschung zunehmend Bedeutung für produktive mathematische Lernprozesse. Die diskursive unterrichtliche Entwicklung mathematischen Wissens erfordert ein Zusammenspiel von Diskurs*form* und Diskurs*inhalt* – der Mathematik. Das Projekt „Erprobung und Evaluation fokussierender Lehrstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule (ErfoLG)“ [seit 2009] erforscht die Funktion der speziellen Lehrerrolle für fundamentales (diskursives) Lernen. Dazu werden Szenen mit interaktiv ausgehandelten mathematischen Strittigkeiten theorie-basiert analysiert.

Diskursives Lernen

Mathematikdidaktische Forschungen nutzen verstärkt soziologische Theorien und betrachten die Interaktion als wesentlich für das Lernen. Diskursive Lernprozesse beziehen sich auf inter- und überindividuelles Lernen und auf soziale Mechanismen/Prozesse des Lernens (Miller 2006, 8). Millers These „[...] fundamentales Lernen setzt kollektive Lernprozesse voraus“ (ebd. 10) wird hier übernommen. Als »fundamentales Lernen« bezeichnet Miller Lernprozesse, die zu strukturell neuen (sozial-)kognitiven Problemlösungen und zu einer fortschreitend angemesseneren, kognitiv höherstufigen Erkenntnis der Welt der Natur, der sozialen Welt und der inneren Welt des eigenen Selbst führen (1986, 9f.). Diskursives Lernen kann auch für das Lernen von Mathematik konstitutiv sein (z.B. Steinbring 2005). Zudem ist für das Mathematiklernen der besondere epistemologische Status wesentlich, dass Mathematik keine fassbaren Dinge, sondern Muster und Strukturen repräsentieren.

Allein der Unterrichtsdiskurs kann kein fundamentales Lernen sichern, er wird gleichermaßen vom Umgang mit der Mathematik und den kindlichen Vorstellungen zur Mathematik geprägt. Ein mögliches Beispiel sind Zahlrepräsentationen. Sollen Grundschulkinder die Zahl 325 auf verschiedene Arten darstellen, so gibt es neben der Stellenwerttafel und den Mehrsystemblöcken (Dienes-Material) auch sehr individuelle Lösungen (z.B. Abb. 1). Wie kann auf eine solche Schülerlösung reagiert werden?

Abb. 1: Kinderlösung zur Darstellung der Zahl 325

Diskurs*formen*

Tradierte oder auch spontan gewachsene Interaktionsformen sind insbesondere im Fach Mathematik eher auf eindeutige, konventionelle Lesarten ausgerichtet (z.B. der Zahldarstellung). In anderen, auch alltagsbezogenen Kontexten werden dieselben Zeichen jedoch zum Teil ganz anders gebraucht. Die Interpretation der Zeichen/Symbole ist entsprechend mehrdeutig (siehe Abb. 1). Die Interaktion zeigt, dass zur Erklärung mathematischer Zeichen sehr unterschiedliche Referenzkontexte (Steinbring 2005) genutzt werden. Wichtig ist, dass »Zeichen/Symbol« und »Objekt/Referenzkontext« nicht isoliert sind, sondern in der diskursiven Aushandlung wechselweise Bedeutung erhalten. Mathematische Aussagen sind im Unterrichtsdiskurs also nicht immer potentiell unanfechtbar, wie es die fertige, abstrakte Mathematik suggeriert. In der sozialen Interaktion kann sich eine Vielfalt von mathematischen Interpretationen entwickeln, die sich zum Teil erheblich voneinander und von der curricularen, schulmathematischen Deutung des Lehrers unterscheiden (vgl. Voigt 1990).

Der offene Umgang mit Mehrdeutigkeit bietet verschiedene Möglichkeiten einer veränderten Unterrichtskultur. Gemeint ist eine Offenheit, die diese Mehrdeutigkeit und Kontraste zwischen verschiedenen Lösungen, Lesarten und Deutungen betont, statt Eindeutigkeit interaktiv im Sinne tradierter Interaktionsmuster aufzuzwingen. Voigt stellt heraus, wie wichtig das Aushalten und Austragen von Kontrasten in Mehrdeutigkeiten für die Unterrichtskultur ist (Voigt 1990, 308). Ein Lehrerhandeln, das offen für die Deutungskonstruktionen und Begründungsversuche der Kinder ist, charakterisiert Wood (1994) als »focusing pattern« und grenzt dieses vom »funnel pattern« ab: „The focusing pattern of interaction [...] is characterized by an exchange in which the teacher‘s guiding questions act to focus the joint action. […] (T)he teacher‘s intent in questioning is to focus the attention of the student to the critical aspect of a problem, - to pose a question which serves to turn the discussion back to the student leaving him/her with the responsibility for resolving the situation” (Wood 1994, 155).

Eine Unterrichtskultur, in der unterschiedliche Interpretationen der Kinder angesprochen werden statt sofort in curriculare Bahnen zu steuern, kann dazu führen, Strittigkeiten nicht vorschnell auszuräumen, sondern interaktiv unter den Beteiligten auszuhandeln. Das Auslösen struktureller Lernprozesse erfordert nicht einmal, einen Konsens über den Dissens zu erzielen. Es reicht, dass das Verfahren des gegenseitigen Verstehens von Differenzen in Gang kommt (Miller 2006, 217f.). Aber was kann eine solche mathematische Strittigkeit im Unterrichtsdiskurs sein?

Diskurs*inhalt*

So »geläufig« das dezimale Stellenwertsystem einem Erwachsenen ist, so ist es doch ein höchst abstraktes mathematisches System. Den im Unterricht verwendeten konventionellen Darstellungen haften Merkmale des jeweiligen Typs des Zahlsystems an (additiv vs. positionell). Viele Besonderheiten existieren sowohl bei der Verwendung der Stellenwerttafel als auch bei den Mehrsystemblöcken und dies ist nicht zufällig so, sondern tradiert und bewährt.

Fundamentales Lernen (Miller) bedeutet nun, im mathematischen Objekt Beziehungen und Unterschiede zu deuten und auszuhandeln, statt dass der Lehrer vermeintlich Eindeutiges und Richtiges »aufdrängt«. Solche Unterschiede in Schülerlösungen (Abb. 1) können ins Zentrum des Unterrichtsdiskurses gerückt werden. Was tatsächlich die Strittigkeit ausmacht, zeigt sich in der Interaktion selbst. Damit können Diskursform und Diskursinhalt nicht voneinander getrennt werden.

Wechselspiel zwischen Diskursform und Diskursinhalt

Die Aufgabe »Stelle 325 auf verschiedene Arten dar!« unterstützt einen Unterrichtdiskurs, der eine Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen und Symbole zulässt. Im Interaktionsverlauf wird die Nutzungsweise der Zeichen deutlich. So interpretiert Franzi Abb. 1: „Da haben wir [...] die Striche als Hunderter genommen und [...] haben drei davon [...] gemalt und zwei Plättchen als Zwanziger also Zehner und fünf [...] Plättchen für die Einer." Franzi »liest« die Darstellung dinglich-deskriptiv. Neben einer Beschreibung des Schreibakts ordnet sie jedem Symbol einen Zahlenwert zu.

Die Lehrerin fragt nun präzisier, was den Kindern besonderes auffällt. Janina sagt: „Ja, dass man das da anders gemacht hat (*zeigt auf eine andere Darstellung aus dem Unterricht, in der jeder Stellenwert durch ein anderes Zeichen repräsentiert wird*), weil hier sind ja die Zehner und die Einer beide Plättchen *(zeigt auf Abb. 1)* (...) und die Hunderter Striche." Auch Janina orientiert sich an den dinglich-konkreten Objekten, betrachtet diese aber in Beziehung zu anderen Objekten.

Sascha sagt auf die Nachfrage, woher er wisse, dass Abb. 1 dreihundertfünfzig sind: „[...] weil die Hunderter oben immer sind, die Zehner ein kleines Stück da drunter und die Einer ganz unten." Er macht partiell auf eine relationale Beziehung aufmerksam: Die *Positions*beziehung.

Alle drei Kinder lesen die Darstellung zunächst eindeutig, orientiert an Fakten im Sinne von »das ist so«. Es steht zu diesem Zeitpunkt für die Beteiligten nicht in Frage, ob so die Zahl 325 repräsentiert werden kann.

Die Lehrerin interveniert erneut: „Könnt aber auch sagen das sind [...] das könnte siebenunddreißig sein oder [...] dreihundertsiebzig.“ Dies hätte eine Strittigkeit hervorrufen können, die sich dann aber nicht entwickelt.

Kurz später entsteht eine unerwartete Strittigkeit: Janina weist auf ein konkretes Merkmal, die *Größe* der Plättchen, hin: „die Plättchen (*zeigt auf die Kreise in der mittleren Reihe*) sind ja größer als die (*zeigt auf die Kreise in der unteren Reihe*)“. Das dingliche Merkmal Größe wird mit »Zehner« identifiziert. Das rechte Plättchen der mittleren Reihe ist „ein bisschen klein“ – so Julian – daher könnte es zu den unteren „Punkten“ gehören und es wäre 316. Diese Lesart bleibt strittig, denn Sascha und Janina bleiben bei der 325 mit erneutem Verweis auf die Lagebeziehung: „Ja, aber es wurde ja untereinander die beiden geschrieben“, „Sonst wäre die Sechs ja da“ (*zeigt rechts hinter den letzten Kreis der unteren Reihe*).

Ihre fachliche Kenntnis setzt die Lehrerin nicht zu einer eindeutigen interaktiven Steuerung auf die »richtige« Lösung ein, sondern um die unterschiedlichen Zahl-Deutungen weiter auszudifferenzieren. Einige Äußerungen der Lehrperson wirken sich fokussierend aus, da sie sich auf den Vergleich verschiedener Sichtweisen der Kinder beziehen. So kommt es in der Interaktion dazu, dass unterschiedliche visuelle Darstellungen, Deutungen und Interpretationen der Kinder zum Diskursinhalt werden.

Viele visuelle Merkmale und mathematische Aspekte werden von den Beteiligten diskursiv herausgearbeitet. Die Kinder gehen in einer sensiblen Weise mit dem Diagramm um, achten mehr auf Einzelheiten. Aber wie könnte eine Fokussierung an dieser Stelle weitergehen? Die Differenzen zwischen Abb. 1 und konventionellen Zahldarstellungen könnten genauer herausgearbeitet werden. Fokussieren würde entsprechend bedeuten, nicht auf das Richtige hinzulenken und alles »Falsche« aus dem Blick zu nehmen, sondern einen Kontrast diskursiv herauszuarbeiten. Aber eine solche interaktive Umsetzung soll und darf nicht unterschätzt werden.

Literatur

Miller, M. (1986): Kollektive Lernprozesse. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Miller, M. (2006): Dissens. Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens. Bielefeld: Transcript.

Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer

Voigt, J. (1990): Mehrdeutigkeit als ein wesentliches Moment der Unterrichtskultur. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 305-308.

Wood, T. (1994): Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In: Lerman, S. (ed.): Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers, 149-168.

Boris GIRNAT, Aarau

Individuelle Curricula zur Geometrie in den Sekundarstufen: Eine Fallstudie zu einem deduktiv-axiomatischen Bild der Mathematik in Vereinbarkeit mit konstruktivistischen Lerntheorien

Der vorliegende Text stellt einen Auszug aus einer qualitativen Studie vor, die Lehreransichten über den Geometrieunterricht der Sekundarstufen I und II erhebt und die subjektive Ziel-, Inhalts- und Methodenauswahl der neun teilnehmenden Lehrkräfte als individuelle Curricula rekonstruiert (vgl. Eichler, 2007). Individuelle Curricula lassen sich in die Beliefs-Forschung einordnen (vgl. Philipp, 2007), sie beziehen sich allerdings nur auf den Teil der schulbezogenen Beliefs, der inhaltlich und strukturell auf individueller Ebene dasselbe leistet, was offizielle Curricula oder Lehrpläne auf institutioneller Eben für den Unterricht bewirken sollen: Sie verbinden die Auswahl von Inhalten und Methoden mit übergeordneten Lernzielen und geben eine Orientierung für die Planung und Durchführung des Unterrichtes (vgl. Sill, 2000).

Die hier beschriebene Studie ist eine qualitativ-interpretative Rekonstruktion der individuellen Curricula zum Geometrieunterricht in den beiden Sekundarstufen. In halbstrukturierten Leitfadeninterviews wurden neun Gymnasiallehrer zu Inhalten, Zielen und Methoden ihres Unterrichts in der Elementargeometrie und in der analytischen Geometrie befragt. Die Transkripte wurden mit einer qualitativen Methode aus der Sozialpsychologie ausgewertet, nämlich gemäß den Grundsätzen des Forschungsprogramms Subjektive Theorien (vgl. Groeben u. a., 1988). Im Vordergrund steht dabei die Ziel-Mittel-Argumentation, die eine Verbindung von Inhalten und Methoden zu den Lernzielen des Unterrichts bildet und die typische Argumentationsstruktur angesehen werden kann, die in Curricula auftritt (vgl. König, 1975).

Individuelle Curricula können zu unterschiedlichen Zwecken erhoben werden: Sie können zum Beispiel für sich genommen qualitative Fallstudien sein, das Item-Design zu großflächigen quantitativen Studien vorbereiten oder auch die Vorstrukturierung von Unterrichtsbeobachtungen oder Schülerleistungen übernehmen (vgl. Eichler, 2006). An dieser Stelle sind sie nur als Fallstudien von Interesse. In dieser Rolle leisten sie u. a. einen Beitrag dazu, didaktische Theorien mit empirisch vorkommenden Überzeugungssystemen zu vergleichen und in einen Dialog mit der Fachdidaktik zu treten.

Diese Möglichkeit soll hier anhand einer der neun Fallstudien dargestellt werden. Einer der Lehrpersonen, die an der Studie teilgenommen hat – sie wird im weiteren Herr A genannt –, zeigt in der Interpretation ihrer Aussagen curriculare Überzeugungen, die in dieser Zusammenstellung eher überraschen, sich aber trotzdem größtenteils in einen schlüssigen Argumentationszusammenhang bringen lassen. Ein Dialog mit der Fachdidaktik könnte also darin bestehen, dort im allgemeinen als kaum vereinbar gehaltene Einstellungen zu Geometrie auf ihre Kompatibilität hin zu überprüfen.

1. Herrn A's Bild der Mathematik

Ausgangspunkt der Interpretation sind Stellen des Interviews, an denen sich Herr A über seine sicht der Mathematik im allgemeinen äußerst.

> Herr A: So, wenn der normale Mensch rausgeht [aus der Schule], hat der wahrscheinlich überwiegend nur (.) – nur, was heißt nur? – unabhängig vom Stoff wieder diese Struktur, die Logik, die Schlussfolgerungen und so, die ich da anschließe, gelernt. Also, ich denke immer, (.) es ist fast egal, was wir unterrichten – Hauptsache, es ist Mathematik. Also, ich kann über all dieses (ja) Übergeordnete oder so das Wesen der Mathematik, sage ich mal, diese Stringenz und dieses (.). Wenn Schüler immer sagen „Man darf aber nicht durch Null teilen", dann sage ich immer gern „Klar darfst du das, aber du kannst es, also (.) ne (ja), es ist gar nicht möglich, du brauchst gar nicht nach dem Dürfen fragen, es geht nicht." (ja). Also dieses Unterscheiden zwischen Können und Dürfen, das in der Mathematik doch zentral. Es gibt doch eigentlich nicht, was ich nicht darf. Ich kann es, oder ich kann es nicht (ja). So, oder man kann es – das ist ja noch wichtiger. Ob ich es kann, ist ja noch eine andere Frage. Die Mathematik sagt: Man kann das tun oder nicht – und ob ich es darf, das ist doch nie die Frage. eigentlich. So, so (.), und das schwebt ja über allem, was mit Mathematik zu tun hat, steht so oben drüber. Und nun machen wir komischerweise diese drei Themen in der Schule (ja): Analysis, analytische Geometrie und Stochastik.

Wenig später ergänzt er folgendes.

> Herr A: Wissenschaftliche Strenge (. .) – ja, das ist ja eigentlich (. . .). Also sagen wir mal so: In der Analysis und noch schlimmer in der Stochastik wird man sehr viel öfter sagen: „Das ist so, das können wir aber nicht beweisen" (ja), und sehe das in der analytischen Geometrie eigentlich gar nicht [. . .] (.). Also, ich sag nur, in der Analysis muss ich irgendwelche Mittelwertsätze (ja) theoretisch machen und also (genau) (.), bis ich irgendwelche weitergehenden Aussagen be-

> weisen kann; und das ist in der [analytischen] Geometrie hier anders. Also da sehe ich eigentlich jetzt keine großen Lücken.

Fasst man diese Stellen zusammen und zieht noch einige weitere Passage zum Vergleich heran, so lassen sich Herrn A's Aussagen so interpretieren, dass er ein universitär geprägtes, eher formalistisches Bild der Mathematik mit deduktiv-axiomatischen Grundzügen verfügt und dieses auch zumindest teilweise im Unterricht erfahrbar werden lassen möchte. Grafisch könnte man diesen Argumentationsstrang im Sinne der Struktur-Lege-Technik als ein typisches Darstellungsmittel des Forschungsprogramms Subjektive Theorien (vgl. Scheele, 1992) folgendermaßen darstellen:

! Verstehen der Mathematik als objektiver Wissenschaft
(= Einsicht in die Unabhängigkeit mathematischer Erkenntnisse von persönlichen Ansichten und Fähigkeiten)

Wenn man Mathematik als deduktiv-axiomatische Wissenschaft erfährt → *versteht man Mathematik als objektive Wissenschaft*

! Erfahren der Mathematik als deduktiv-axiomatischer Wissenschaft
(= Charakterisierung der Mathematik durch die deduktiv-axiomatische Methode, nicht durch ihre Objekte, Themen und Inhalte)

Wenn man den Mathematikunterricht (wie im Interview angegeben) aufbaut → *kann man Mathematik als deduktiv-axiomatische Wissenschaft erfahren*

! Unterricht von Mathematik

Abb. 1: Bild der Mathematik von Herrn A

2. Herrn A's Unterrichtsmethodik

Ein Bild der Mathematik, das von der Axiomatik her geprägt ist und der Mathematik einen überpersönlich-objektiven Stellenwert zuordnet, scheint unwillkürlich auf einen statisch orientierten Unterricht mit darbietenden Lehrformen hinauszulaufen. Herr A favorisiert jedoch das Gegenteil:

> Herr A: Erarbeiten. Also damit meine ich: Hier ist das Problem. Löse es! (.) Das heißt also problemorientierte Aufgaben, die die Schüler in Partnerarbeit, besser noch in Gruppenarbeit (.) erarbeiten. (.) Also es gibt ja viele Möglichkeiten. Ich mache auch gern das Ich-du-wir-Prinzip nach Gallin und Ruf. (. . .) Die Schüler kennen das und lassen sich auch in der Regel darauf ein, also halten sich die erste Zeit zurück, arbeiten ganz allein an dem Problem und (.) weiten das dann halt auf den Partner und dann auf die Klasse aus. Das hängt natürlich

> sehr von den Lerngruppen ab, wie man das einsetzen kann, also wie erfolgreich die Klassen sich da auch darauf einlassen. Aber, (.) also mir ist schon die Erarbeitungsphase sehr wichtig, weil (.) da eigentlich die Mathematik in den Köpfen passieren sollte oder entstehen sollte oder zusammengerückt werden sollte.

3. Weitere Ergebnisse

Neben der Vereinbarkeit eines deduktiv-axiomatische geprägten Bildes der Mathematik mit konstruktivistischen Lernformen zeigt die Fallstudie weitere Auffälligkeiten – beispielsweise die folgenden: Herr A fordert von realitätsbezogenen Aufgaben Authentizität und Reichhaltigkeit und sieht diese Forderungen im Mathematikunterricht gerade von der Geometrie am geringsten erfüllt. Herr A sieht keinen Gegensatz zwischen explorativen, schülerzentrierten Lehrformen und routineschaffenden, einschleifende Phasen des Übens. Herr A hält es vor allem zum Problemlösen und zu erkundenden Lernformen für wichtig, dass das Curriculum aus größeren, systematisch zusammenhängenden Themenblöcken besteht, damit fachtypische mathematische Kompetenzen wie das Argumentieren und Problemlösen erworben und eingesetzt werden können. Er hält es daher eher für angebracht, bereits bestehende curriculare Themen zu erweitern, als neue Themen isoliert zur Seite zur stellen. Herrn A's Vorstellung zur Allgemeinbildung stellen die übliche Diskussion in der Bildungstheorie auf den Kopf: Es soll kein Allgemeinbildungskonzept vorab erarbeitet und anschließend zur Umsetzung auf die Schulfächer verteilt werden, sondern es wird davon ausgegangen, dass jedes Fach spezifische Fähigkeiten fördern kann, die sich im nachhinein zur Allgemeinbildung zusammensetzen.

Literatur

Eichler, A. (2006): Individual Curricula – Beliefs behind Beliefs. In A. Rossman & B. Chance (Hrsg.): *ICOTS-7 Conference Proceedings.* Salvador: IASE, CD-ROM.

Eichler, A. (2007). Individual curricula – Teachers' beliefs concerning stochastics instruction. *IEJME 2(3).* Online: http://www.iejme.com/.

König, E. (1975): *Theorie der Erziehungswissenschaft II. Normen und ihre Rechtfertigung*, München:Wilhelm Fink Verlag.

Philipp, R. (2007): Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In: Lester, F. (Hrsg.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: The Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Charlotte: Information Age Publishing, S. 257–315.

Scheele, B. (1992): *Struktur-Lege-Verfahren als Dialog-Konsens-Methodik*, Münster: Aschendorff Verlag.

Sill, H.-D. (2000). Ziele und Methoden der Curriculumsforschung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 79, S. 611–614.

Dubravka GLASNOVIĆ GRACIN, Zagreb

Mathematische Anforderungen in Schulbüchern und in der PISA Studie

Dieser Beitrag umfasst die Ergebnisse der Forschungsfragen präsentiert in Glasnović Gracin (2011) über die Rolle von Schulbüchern in der Sekundarstufe I in Kroatien:

- Was ist die Rolle von Schulbüchern in der mathematischen Ausbildung?
- Welche mathematischen Kompetenzen werden in Schulbüchern für den Mathematikunterricht angesprochen?
- In welchem Maße passen die Schulbuchanforderungen mit den Anforderungen der PISA-Tests zusammen, bzw. in welchem Maße unterscheiden sie sich?

Die Anforderungen von Mathematik-Schulbüchern und der PISA-Studie werden in weiterer Folge mit den Lehrplananforderungen verglichen. In Kroatien gilt ein einziger Lehrplan für alle 8 Jahre der Pflichtschule. Lehrer(innen) wählen die Schulbücher aus, die sie in ihrem Unterricht benutzen werden. Diese Schulbücher müssen vom Bildungsministerium zugelassen werden.

Die Rolle von Schulbüchern

Die erste Forschungsfrage bezieht sich auf die Rolle von Schulbüchern in der mathematischen Ausbildung in Kroatien. Diese Frage umfasst den Überblick über die Rolle von Schulbüchern weltweit, die Rolle von Mathematik-Schulbüchern in der Geschichte von Mathematikunterricht in Kroatien und die Umfrage über die Rolle von Schulbüchern im heutigen Mathematikunterricht. Die Ergebnisse zeigen, dass Mathematik-Schulbücher eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht spielen sowohl in Europa als auch in anderen Ländern.

Die Umfrage über die Rolle von Schulbüchern wurde im Jahr 2008 durchgeführt, ca. 1000 Mathematik-Lehrer(innen) der Sekunkdastufe I wurden befragt. Das ist ungefähr 50% der ganzen Population von Mathematik-Lehrer(innen) der Sekundarstufe I in Kroatien. Die Ergebnisse zeigen, dass Schulbücher im kroatischen Mathematikunterricht in einem hohen Ausmaß benutzt werden. Die Lehrer(innen) benutzen die Schulbücher hauptsächlich für die Unterrichtsvorbereitung und die Schüler(innen) für das Üben und die Hausaufgabe. Diese Ergebnisse verweisen darauf, dass es sinnvoll ist, gerade die Schulbuchaufgaben zu analysieren, um die Anforderungen des Mathematikunterrichts herauszufinden.

Schulbuchanalyse

Zum Zwecke der Analyse von Schulbuchaufgaben wurde ein Instrumentarium entwickelt. Die Basis für das Instrumentarium ist aus den Österreichischen Standards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe (IDM, 2007) genommen. Die Analyse umfasste die drei am häufigsten gebrauchten Mathematik-Schulbücher aus der Schulstufe 6 im Schuljahr 2005/06, aus der 7. Schulstufe im Schuljahr 2006/07 und aus der 8. Schulstufe im Schuljahr 2007/08. So wurden die Schulbuchanforderungen der „besonderen" Generation von Schüler(innen) analysiert, die 2009 an der PISA Studie teilgenommen haben.

Bei jeder Schulbuchaufgabe wurden die folgenden Fragen gestellt:

- Welche mathematischen Inhalte soll ein(e) Schüler(in) kennen, um diese Aufgabe zu lösen (Zahlen und Maße, Geometrie, Funktionen und Algebra, Beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeit)?
- Welche mathematischen Handlungen sollen bei einem/einer Schüler(in) entwickelt werden, um diese Aufgabe zu lösen (Darstellen und Modellbilden, Rechnen und Operieren, Interpretieren, Argumentieren und Begründen)?
- Auf welchem Komplexitätsniveau ist die jeweilige Aufgabe gestellt (Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten, Herstellen von Verbindungen, Einsetzen von Reflexionswissen und Reflektieren)?
- Welches Antwortformat hat die jeweilige Schulbuchaufgabe (geschlossene Antworten, offene Antworten, multiple-choice Antworten)?
- Welchen Kontext hat die jeweilige Aufgabe (authentische Kontexte, realistische Kontexte, innermathematische Kontexte)? Authentische Kontexte beziehen sich auf authentische Situationen, und realistische Kontexte imitieren die originellen authentischen Situationen mit z.B. fiktiven Schülernamen usw.

Die Analyse der Schulbuchaufgaben zeigt eine Dominanz der innermathematischen operativen Aufgaben, die die Reproduktion oder das Herstellen einfacherer Verbindungen erfordern. Die Aufgaben haben meist geschlossene Antwortformate. Das Reflektieren, Aufgaben mit offenen Antworten und Argumentation werden nicht in Schulbuchaufgaben in der 6., 7. und 8. Schulstufe gefordert. Die Ergebnisse zeigen also, dass der Mathematikunterricht in Kroatien Algorithmen und "Mathematik als

Werkzeug” (Heymann, 1996) betont. Diese Ergebnisse entsprechen Merkmalen des traditionellen Mathematikunterrichts in Kroatien; sie gehen auch großteils konform sowohl mit den curricularen Anforderungen (MZOS, 2006) als auch mit den Lehrer(innen)beliefs über Mathematik und über Mathematikunterricht (Baranović und Štibrić, 2009).

Anforderungen in der PISA Studie 2009

Die Lesekompetenz war die Hauptkompetenz in der PISA Studie 2009. Deshalb umfasste die PISA Studie 2009 einen geringeren Anteil der items aus dem Bereich mathematical literacy (35 items). Ergebnisse kroatischer Schüler(innen) in der PISA-Studie Mathematik 2009 (Durschnitt 460 PISA-Punkte) sind signifikant unter dem OECD-Durchschnitt.

Die Forschung umfasste alle 35 mathematischen PISA items nach demselben Instrumentarium der Schulbuchanalyse. Bei jeder PISA Aufgabe wurden die Fragen über Inhalte, Handlungen, Komplexität, Kontext und Antwortformate gefragt.

Die Ergebnisse zeigen, dass zwei Drittel der mathematischen PISA items sich auf Zahlen und beschreibende Statistik beziehen. Diese items sind in lebensnahe Kontexte gestellt (mit natürlichen oder Dezimalzahlen) und verlangen meistens Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten, oder einfacheres Herstellen von Verbindungen. Items über Geometrie und Statistik gemeinsam kommen in einem Drittel der items vor und verlangen meistens komplexeres Herstellen von Verbindungen oder Reflektieren. Diese Anteile entsprechen nicht den Lehrplananforderungen, wo Arithmetik (z.B. rationale Zahlen), Algebra (z.B. Gleichungen und Terme) und Ebene Geometrie traditionell eine große Rolle spielen. Die Anforderungen im Bereich Funktionen unterscheiden sich besonders von Schulbuch- und Lehrplananforderungen: die PISA items umfassen auch die nicht-linearen Funktionen mit ihren grafischen Darstellungen. Solche Inhalte sind nicht Teil des mathematischen Lehrplans in Kroatien.

Die Ergebnisse zeigen, dass sich die mathematischen Anforderungen in PISA 2009 im großen Maße von den Schulbuchanforderungen unterscheiden. Besonders unterschiedlich sind die „complex multiple choice“ PISA items, die Reflektieren und Interpretieren verlangen. Fast alle PISA items sind in Kontexte mit viel Text gestellt, was in Schulbuchaufgaben nicht der Fall ist. Solche Unterschiede sind mögliche Erklärungen für die schlechten kroatischen Resultate in der PISA Studie im Bereich der mathematical literacy.

Die Analyse hat auch gezeigt, dass es keine offenen mathematischen Antworten in PISA 2009 gibt. Dieser Befund entspricht nicht den PISA

Anforderungen aus der Definition von mathematical literacy des PISA Framework (OECD, 2003). Offene Antworten in dieser Forschung beziehen sich auf Prozess und Lösungswege vom jeweiligen Problem, während die geschlossenen Antwortformate eher das Endergebnis betonen.

Vorschläge

Motive für diese Forschung umfassen die Bestimmung von Anforderungen in Mathematik-Schulbüchern und in der PISA Studie, um die guten, interessanten und wertvollen vorliegenden Anforderungen im Mathematikunterricht beizubehalten, und für die anderen Verbesserungen vorzuschlagen. Die Analyse hat gezeigt, dass die kroatischen Mathematik-Schulbücher viele interessante geschlossene Aufgaben bieten, die nur modifiziert werden sollten (zum offenen Antwortformat) mit zusätzlichen Fragen wie z.B. "Warum? Kannst du das erklären?". Die Schulbuchaufgaben und Beispiele sollten sowohl mehr authentische Situationen bieten, als auch Kombinationen von verschiedenen mathematischen Handlungen und Komplexitätsbereichen und öfter Reflektieren, Argumentieren, Interpretieren und offene Antwortformate fördern.

Literaturverzeichnis:

Baranović, B., Štibrić, M. (2009): Math teachers' perceptions of mathematics education in elementary and secondary schools in Croatia. Results of an empirical research. In M. Pavleković (Hrsg.): Second International Scientific Colloquium "Mathematics and Children" – How to Teach and Learn Mathematics. Zagreb: Element, 96.

Glasnović Gracin, D. (2011): Requirements in Mathematics Textbooks and PISA Assessment. Doktorarbeit. Klagenfurt, Alpen-Adria-Universität.

Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim, Beltz Verlag.

IDM - Institut für Didaktik der Mathematik, Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – IFF, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (Hrsg.) (2007): Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07. Klagenfurt.

MZOS (2006): Nastavni plan i program za osnovnu školu. HNOS, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske, Zagreb.

OECD (2003): The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf (Jan 31st, 2009)

Günter GRAUMANN, Bielefeld

Entdecken symmetrischer Dreieckspyramiden - ein Problemfeld für Systematisierungsübungen und Förderung der Raumanschauung

Die Dreieckspyramiden (allgemeine Tetraeder) sind wie die Dreiecke in der Ebene die Simplexe der Raumgeometrie. Umso mehr ist es verwunderlich, dass sie im Unterricht kaum vorkommen, obgleich Kanten-, Flächen- und Vollmodelle leicht hergestellt werden können. Formbetrachtungen über unterschiedliche Dreieckspyramiden sollten deshalb in der Klassenstufe 5/6 schon stattfinden. Nach der Behandlung symmetrischer Figuren der Ebene lassen sich Symmetriebetrachtungen zu Dreieckspyramiden gut anschließen. Hierzu sollen einige Anregungen gegeben werden.

Eine Dreieckspyramide ABCD ist festgelegt durch vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, sowie den Verbindungsstrecken von je zwei dieser vier Punkte. Auf der Suche nach symmetrischen Dreieckspyramiden können wir deshalb als Erstes feststellen, dass als ***Symmetrieabbildung*** alle möglichen Permutationen der vier Punkte (mit Ausnahme der Identität) in Frage kommen. Mit Hilfe üblicher systematischer, kombinatorischer Überlegungen (alle Permutationen, bei denen A auf A bzw. B bzw. C bzw. D abgebildet wird, etc.) erhalten wir *24 mögliche Permutationen*, die durch Notation der Bildquadrupel wie folgt benannt werden können:
ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.
Als nächstes werden wir versuchen *geometrische Interpretationen* dieser 24 Permutationen zu finden. Dazu versuchen wir es mit den uns bekannten Kongruenzabbildungen im Raum: den Ebenenspiegelungen, Achsendrehungen oder Kombinationen zweier dieser beiden Typen.
Zunächst finden wir *6 mögliche Ebenenspiegelungen*, die eine Dreieckspyramide auf sich abbildet, wobei die Spiegelebene jeweils durch eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante gebildet wird. Damit eine solche Ebenenspiegelung auch wirklich eine Symmetrieabbildung der Dreieckspyramide ist, muss die gegenüberliegende Kante natürlich senkrecht zur Spiegelebene verlaufen.
Weiterhin finden wir *8 mögliche Achsendrehungen mit Drehwinkel 120° bzw. 240°*, wobei eine Drehachse jeweils durch eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite geht. Diese Seitenfläche muss dann natürlich ein gleichseitiges Dreieck sein und senkrecht auf der Drehachse stehen.

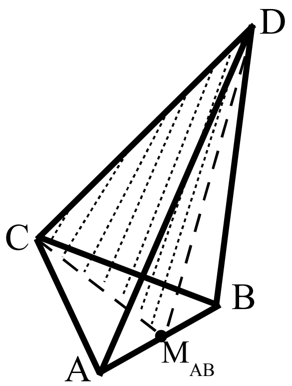
Zwischenüberlegung: Wir suchen zu den genannten 14 möglichen Abbildungen zunächst einmal die zugehörigen Permutationen und stellen dabei fest, dass bei den Ebenenspiegelungen zwei Fixpunkte vorliegen und die restlichen beiden Punkte vertauscht werden (also einen Zyklus darstellen). Bei den genannten Achsendrehungen haben wir einen Fixpunkt und die restlichen drei Punkte bilden einen Zyklus. Wenn wir drei Fixpunkte annehmen, so muss offensichtlich der vierte Punkt auch auf sich selbst abgebildet werden. Und die Abbildung mit vier Fixpunkten ist die Identität.
Bei der Erkundung weiterer möglicher Deckabbildungen der Dreieckspyramide können unter den verbleibenden Permutationen solche mit Zyklen suchen und finden zunächst solche mit zwei Zweier-Zyklen.
Wir finden auf diese Weise *3 mögliche Achsendrehungen mit Drehwinkel 180°*, wobei jeweils zwei gegenüberliegende Kanten um 180° gedreht werden. Damit es sich auch wirklich um Symmetrieabbildungen der Dreieckspyramide handelt muss die Drehachse die Verbindung der beiden Mittelpunkte der beiden gegenüberliegenden Kanten sein und sie muss senkrecht zu den beiden gegenüberliegenden Kanten sein.
Die verbleibenden *6 Permutationen* stellen sich *als Viererzyklen* heraus und haben auch keinen Fixpunkt. Wir versuchen ihre geometrische Deutung deshalb mit einer *Kombination aus Ebenenspiegelung und Achsendrehung* und stellen fest, dass dieses möglich ist, und zwar auf verschiedene Weise.

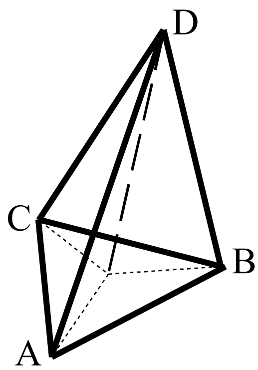
Wir haben damit alle möglichen 24 Permutationen als bekannte geometrische Abbildungen gedeutet und können auch leicht feststellen, dass sie alle Symmetrieabbildungen des regulären Tetraeders sind.

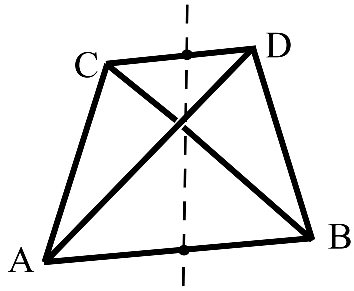
Wollen wir nun ***symmetrische Dreieckspyramiden*** finden, die nicht gleich dem regulären Tetraeder sind, so müssen wir systematisch die einzelnen obigen Typen von Abbildungen durchgehen und nach Dreieckspyramiden suchen, die jeweils die oben dazu genannten Eigenschaften erfüllen. Weiterhin müssen wir nach Dreieckspyramiden suchen, die zwei oder mehr der genannten Abbildungen als Symmetrieabbildung haben.
Wir führen zunächst Kurzbezeichnungen für die vier Typen von Symmetriebbildungen ein:
E = Ebenenspiegelung,
R = Rotation mit 120° oder 240°,
A = Achsenspiegelung (Rotation mit 180°),
K = Kombination von zwei Abbildungen zur Bildung eines Viererzyklus.

Aus den oben genannten notwendigen Eigenschaften einer Dreieckspyramide mit einer der genannten Abbildungen als Symmetrieabbildung ergeben sich leicht die folgenden *Typen von symmetrischen Dreieckspyramiden*:

E:	Dreieckspyramide mit einer Symmetrieebene
R (REEE):	Dreieckspyramide mit einer Rotation Typ R
A:	Dreieckspyramide mit einer Rotation Typ A
K (KKEEA):	Dreieckspyramide mit einer Symmetrie Typ K

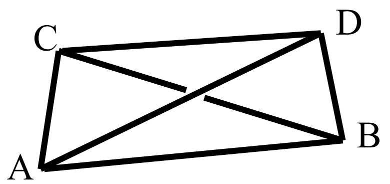






Bei der Betrachtung der Pyramide zum Typ R stellt man fest, dass die drei Ebenen durch die Rotationsachse und eine Kante, die diese Achse trifft, offensichtlich auch Symmetrieebenen sind, deshalb habe ich den Typ zusätzlich mit REEE bezeichnet.

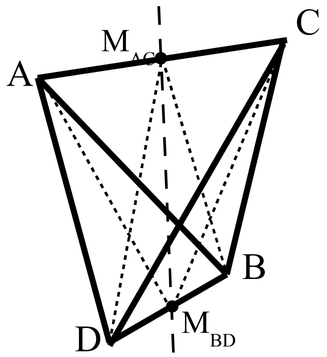
Bei der näheren Betrachtung einer Dreieckspyramide, die einen Typ K als Symmetrieabbildung hat, stellen wir fest, dass aufgrund der Längeninvarianz der Abbildung vier Kanten gleich lang sein müssen und die restlichen zwei Kanten zueinander gleichlang sind. Damit ergeben sich zwei zusätzliche Symmetrieebenen

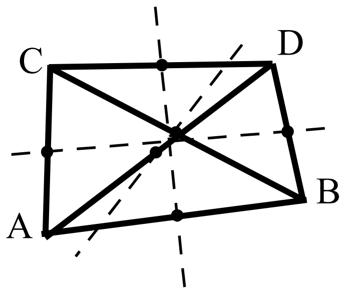


(nämlich jeweils mit einer der beiden zuletzt genannten Kanten innerhalb der Ebene). Durch wiederholte Anwendung der ursprünglichen Permutation erhält man außerdem eine Achsenspiegelung (an der Achse durch die Mitten der beiden zuletzt erwähnten Kanten) und eine weitere Symmetrieabbildung vom Typ K (nämlich die zur ursprünglichen inversen). Deshalb habe ich den Typ zusätzlich mit KKEEA bezeichnet.

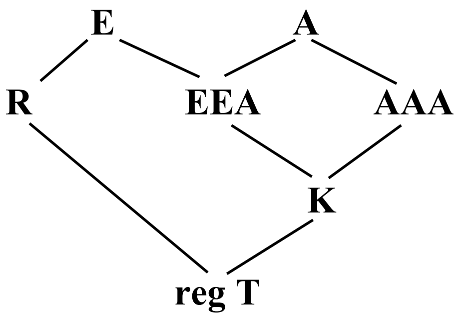
Wir untersuchen nun die Eigenschaften von Dreieckspyramiden, die *zwei Symmetrieebenen* (mit gemeinsamer Kante bzw. ohne gemeinsame Kante) oder *zwei Achsensymmetrien* oder *eine Symmetrieebene und eine Achsensymmetrie* oder *drei und mehr der obigen Symmetrien* haben. Das erfordert zwar einige Mühe, man erhält dann aber neben dem regulären Tetraeder (abgekürzt mit regT) nur noch zwei weitere symmetrische Dreieckspyramiden, nämlich die Typen

EEA:	Dreiecksp. mit zwei Ebenen- und einer Achsensymmetrie
AAA:	Dreiscksp. mit drei Achsensymmetrien.





Aufgrund der jeweils festgestellten Eigenschaften (oder auch durch Betrachtung der jeweiligen Symmetriegruppen) kann man die 7 Typen von symmetrischen Dreieckspyramiden wie folgt ordnen:



Eine sehr schöne Übung zur Vertiefung ist das Herstellen von Netzen und Modellen dieser sieben Dreieckspyramiden sowie das Suchen nach Sonderfällen bezüglich rechtwinkliger oder/und gleichschenkliger Seiten.

Literatur:

Bubeck, H. (2003). Analogisieren vom Dreieck zum Tetraeder. In: PM Prax. Math. Sch. 45, No 6, 276 – 281.

Fritsch, R. (2009). Zur Elementargeometrie des Tetraeders. In: Mathematikunterricht 55, No 1, 3 - 15.

Gossler, M. (1992). Zur Geometrie der verallgemeinerten Tetraeder. In: Prax. Math. 33(6), 261 – 262.

Graumann, G. (2011. Typen nicht-konvexer Vielecke. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 307 – 310.

Quaisser, E. (2003). Tetraeder und ihre Symmetrien. In: PM Praxis. Math. Sch. 45, No 4, 168 – 173 und No 6, 381 – 285.,

Schumann, H. (2004). Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel “Dreieck-Tetraeder". In: Math. Didact. 27, No. 1, 82 - 100.

Schumann, H. (2011). Tetraedergeometrie – eine raumgeometrische Theorieentwicklung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 791 – 794.

Schumann, H. (2011a) Elementare Tetraedergeometrie – Eine Einführung in die Raumgeometrie, Hildesheim u. Berlin: Franzbecker.

Gilbert GREEFRATH, Münster

Überzeugungen und Erfahrungen von Lernenden im Unterricht mit digitalen Werkzeugen

Im Zusammenhang mit digitalen Werkzeugen spielen Erfahrungen und Überzeugungen eine wichtige Rolle für den Unterrichtserfolg. Der Beitrag berichtet von einer empirischen Untersuchung von Lernenden, die im Rahmen des Projekts CASI über einen Zeitraum von 2 Jahren nach ihren Überzeugungen und Erfahrungen zum Einsatz von Computern im Unterricht befragt wurden.

Das Projekt CASI

Das Projekt CASI (ComputerAlgebrasystem-Einsatz in der Sekundarstufe I) untersucht den Einsatz von Grafiktaschenrechnern mit Computeralgebrasystem (CAS) in Real- und Gesamtschulen. Am Projekt haben 10 mit ClassPads ausgestattete Projektklassen und 7 Vergleichsklassen von 6 Projektschulen teilgenommen. Insgesamt sind ca. 260 Projektschülerinnen und –schüler sowie ca. 140 Lernende aus Vergleichsklassen beteiligt. Die Lehrkräfte konnten sich freiwillig für die Teilnahme melden. Es sollte aber sichergestellt sein, dass zwei Klassen derselben Schule für die Schuljahre 2009/10 und 2010/11 (Jahrgangstufen 9 und 10) am Projekt teilnehmen.

Im Verlauf des Projekts wurden Grafiktaschenrechner mit CAS dauerhaft den Lernenden der Projektklassen überlassen und fünf Unterrichtseinheiten von jeweils ca. 4-8 Wochen Dauer gemeinsam mit den Projektlehrkräften geplant. Die entwickelten Materialien wurden in allen Projekt- und Vergleichsklassen verwendet. Bei der Erstellung der Unterrichtseinheiten wurde Wert darauf gelegt, dass die digitalen Werkzeuge auf vielfältige Weise, z. B. zum Visualisieren, Experimentieren, Berechnen und Kontrollieren (Greefrath 2010), eingesetzt wurden und dass gleichzeitig rechnerfreie Fertigkeiten gefördert und geprüft wurden.

Mit Hilfe von Tests, Fragebögen und Interviews wurden außer den Kompetenzen mit und ohne digitale Werkzeuge und dem Ablauf der Stunden auch die Erfahrungen und Überzeugungen der Lernenden zur Mathematik und zu digitalen Werkzeugen im Mathematikunterricht erhoben.

Erfahrungen und Überzeugungen der Lernenden

Im Rahmen einer Fragebogenstudie wurden zu Beginn des Projekts, nach einem Jahr und am Ende des Projekts die Erfahrungen und Überzeugungen der Lernenden mit Hilfe einer 4-stufigen Lickert-Skala erhoben.

Fragebogen für Schülerinnen und Schüler im CASI-Projekt

	Schule / Code	Klasse	trifft voll und ganz zu	trifft zu	trifft weniger zu	trifft nicht zu
1	Mathematik ist für mich im späteren Leben wichtig.		☐	☐	☐	☐
2	Ich habe im Mathematikunterrich schon einmal mit einer Geometriesoftware (z. B. Euklid) gearbeitet.		☐	☐	☐	☐
3	Ich finde es leicht, mit einem Computer im Mathematikunterricht zu arbeiten.		☐	☐	☐	☐

Fragebogen für Schülerinnen und Schüler im CASI-Projekt (Ausschnitt)

Als erstes Ergebnis konnte festgestellt werden, dass einige Überzeugungen über die Projektdauer hinweg praktisch konstant bleiben. Dazu zählen die Aussagen „Mathematik ist für mich im späteren Leben wichtig“ und „Ich habe schon einmal im Mathematikunterricht etwas Neues entdeckt“.

Zu weiteren Auswertung wurde eine Faktorenanalyse des Fragebogens zu Projektbeginn durchgeführt. Es konnten 6 Faktoren mit Eigenwert größer 1 zu 18 Items extrahiert werden, die sich auch inhaltlich sinnvoll interpretieren lassen. Die erklärte Gesamtvarianz liegt bei ca. 60%. Der erste Faktor, zu dem 6 Items gehören, wird mit „Sinnvoller Computereinsatz im Mathematikunterricht bezeichnet“ und beinhaltet die folgenden Items (rotierte Faktorladungen in Klammern):

- Mit Computern lässt sich Mathematik im Unterricht besser verstehen. (0,8)
- Ich würde gern im Mathematikunterricht mit dem Computer arbeiten. (0,8)
- Den Computer braucht man im Mathematikunterricht eigentlich nicht. (-0,7)
- Ich finde es leicht, mit einem Computer im Mathematikunterricht zu arbeiten. (0,6)
- Mit einem Computer im Mathematikunterricht zu arbeiten ist schwieriger, als ohne Computer. (-0,6)
- Um Mathematik zu verstehen braucht man keinen Computer. (-0,5)

Betrachtet man diesen Faktor, stellt man fest, dass etwas mehr als die Hälfte der Lernenden zu Projektbeginn eine positive Einstellung zum Computereinsatz im Mathematikunterricht haben. Außerdem zeigt sich eine zunächst überraschende Verschlechterung der Einstellung zum Computereinsatz im Projektverlauf. Eine mögliche Erklärung ist, dass sich die Items auf den Computereinsatz allgemein beziehen und die Lernenden die verwendeten digitalen Werkzeuge nicht als Computer auffassen. Daher wurde am Ende des Projekts dieser Aspekt noch einmal separat von allen Schülerinnen und Schülern erhoben. Es stellte sich heraus, dass nur ein Teil der Lernenden im Projekt die verwendeten Werkzeuge als Computer ansehen. Beschränkt man die Auswertung auf diese Schülergruppe, dann erhält man deutlich andere Werte:

	Alle		ClassPad als Computer	
	N	Mittelwert	N	Mittelwert
Anfang	237	1,6	57	1,6
Mitte	149	-0,3	49	-0,7
Ende	140	0,1	62	3,0

Es zeigt sich also, dass die positive Einstellung zu Computern im Mathematikunterricht nach Projektstart deutlich abnimmt, während sie bei den Lernenden, die das ClassPad als Computer ansehen gegen Ende des Projekts stärker positiv verläuft. Auf der Basis einer Varianzanalyse kann davon ausgegangen werden, dass tatsächlich unterschiedliche Mittelwerte bei Projektende vorliegen. Tendenziell war dieses Antwortverhalten bei Projektschülerinnen noch ausgeprägter als bei Projektschülern.

Als weitere Trends zeigen sich mit Hilfe der anderen ermittelten Faktoren noch einige geschlechtsspezifische Unterschiede. So sehen Schülerinnen den Mathematikunterricht kreativer, haben eine geringere Computererfahrung und sehen den Nutzen von Mathematik im Beruf deutlich geringer als die Schüler. Untersucht man die Daten nach Unterschieden in Abhängigkeit der Ergebnisse des Kompetenztests zu Beginn des Projekts, so zeigt sich tendenziell, dass stärkere Lernende zwar weniger deutlich die Kreativität im Mathematikunterricht sehen, aber den Nutzen von Mathematik im Beruf deutlicher herausstellen als schwächere Schülerinnen und Schüler.

Fallstudien

Mit Hilfe von Fallstudien konnten detailliertere Einblicke in die Überzeugungen von Schülerinnen erlangt werden. Dazu wurden jeweils Schülerinnen ausgewählt, deren Einstellung zum Computereinsatz zu Beginn des Projekts deutlich negativ bzw. deutlich positiv war. Die Interviews fanden im letzten halben Jahr des Projekts statt.

Eine Schülerin, die auf der Basis der quantitativen Erhebung negative Einstellungen zum Computereinsatz und gute Leistungen in den Kompetenztests zeigt, bringt ihre anfängliche Skepsis gegenüber dem neuen Werkzeug rückblickend auch im Interview zum Ausdruck: „*Ich habe mich nicht über den Taschenrechner gefreut, denn wir hatten ja auch früher einen anderen, damit haben wir halt auch alles geschafft.*“ Als Vorteilhaft beschreibt sie, dass man mit dem neuen Werkzeug schneller arbeiten kann und „*nicht mehr so viel schreiben*“ muss. Außerdem vermutet sie bessere Noten durch das neue Werkzeug im Mathematikunterricht bekommen zu haben. Interessant ist auch, dass der Einbruch der positiven Einstellung zu Computern im Mathematikunterricht ebenfalls beschrieben wird. Einem Freund würde die Schülerin raten: *„Dass der auf jeden Fall in so eine Klasse gehen kann, dass es vielleicht am Anfang ein bisschen schwer ist, damit umgehen zu können, aber am Ende man es leichter hat.“*

Eine andere Schülerin, die Computern im Mathematikunterricht besonders positiv gegenüber steht, stellt die vermutete persönliche Leistungssteigerung heraus: *„Seitdem ich den Rechner habe, bin ich in Mathe von vorher immer 3 bis 4 auf eine lockere 2, wenn nicht auch mal ne 1 gekommen.“* Diese Leistungssteigerung konnte auch in den Kompetenztests im Projektverlauf beobachtet werden.

Diskussion

Die Ergebnisse zu Erfahrungen und Überzeugungen der Lernenden im Projekt CASI werden teilweise durch Ergebnisse anderer Studien unterstrichen. Während Barzel (2005) feststellt, dass 75% der Schülerinnen und Schüler den Gebrauch von CAS sinnvoll finden, liegt diese Quote im CASI-Projekt bei etwa 50%. Auch eine Leistungsabhängigkeit vom persönlichen Nutzen, wie bei Schmidt (2009) gesehen, kann in Ansätzen im CASI-Projekt festgestellt werden. Ellington (2003) beschreibt, dass die Einstellung zu Mathematik durch die Verwendung von digitalen Werkzeugen im Rahmen eines geeigneten langfristigen Unterrichtskonzepts verbessert werden kann. Gerade die Langfristigkeit des Projekts und die Einbindung in ein Unterrichtskonzept erscheinen nach unseren Ergebnissen auch zentral für eine positive Einstellung zu Computern im Mathematikunterricht aus Schülersicht.

Literatur

Barzel, B. (2005). "Open learning? Computeralgebra?...No time left for that...", ZDM 2005 Vol. 37 (5).

Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. Journal for Research in Mathematics Education 34(5), 433-463.

Greefrath, G. (2010): Mit dem Computer qualitativ arbeiten? Praxis der Mathematik in der Schule 52 Bd. 31, 20-24

Müller, Inga (2011): Eine Fallstudie zu Beliefs von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht mit digitalen Werkzeugen, Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung, Universität zu Köln

Schmidt, Karsten (2009): Mathematics Education with a Handheld CAS - The Students' Perspective. In: International Journal for Technology in Mathematics Education 17 (2), S. 105–110.

Birgit GRIESE, Eva GLASMACHERS, Michael KALLWEIT, Bettina ROESKEN, Ruhr-Universität Bochum

Lerntagebücher als Interventionsinstrument in der Studieneingangsphase

Das Projekt MP² (Mathe/Plus/Praxis) der Ruhr-Universität Bochum soll frühen Studienabbruch in den Ingenieurwissenschaften verhindern. Es basiert auf der Annahme, dass Studierende häufig aufgrund mangelnder Lern- und Arbeitstechniken scheitern (Mathe/Plus), oder weil sie keinen ausreichenden Praxisbezug erkennen können (Mathe/Praxis). Eine der Maßnahmen von Mathe/Plus ist das Führen eines Lerntagebuchs, das zum Nachdenken über das eigene Lernverhalten und zu dessen Regulation anregt. Die Ergebnisse der Auswertung der Lerntagebücher ermöglichen eine differenzierte Beurteilung der Einsatzmöglichkeiten.

Einleitung

Beim Übergang von der Schule zum tertiären Bildungssektor einer Hochschule stehen viele Studierende insbesondere in den MINT-Fächern vor scheinbar unüberwindbaren Hindernissen (Zucker, 1996). Die Ruhr-Universität Bochum stellt sich für die Ingenieurwissenschaften im Projekt MP² dieser Herausforderung. MP² wurde beim Wettbewerb „Nachhaltige Strategien für mehr MINT-Absolventen“ ausgezeichnet und wird vom *Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft* und der *Heinz Nixdorf Stiftung* gefördert. Die Evaluation von MP² umfasst verschiedene Gesichtspunkte, u.a. Lernstrategien (Griese, Glasmachers, Härterich, Kallweit & Roesken, 2011) und motivationale Aspekte. Im vorliegenden Artikel werden die Lerntagebücher aus dem ersten Jahr von Mathe/Plus im Hinblick auf Lernfrequenz, Lernzeit und Lerneffizienz untersucht.

Theoretischer Hintergrund

Nach Schmitz und Wiese (2006) wird die Selbstregulation in drei Phasen (präaktional, aktional und postaktional) unterteilt, die aufeinander folgen und einander beeinflussen, siehe Abbildung 1. Lerntagebücher ermutigen zur Metakognition (Flavell, 1979) mit dem Ziel, auf die äußeren Bedingungen und die eigene

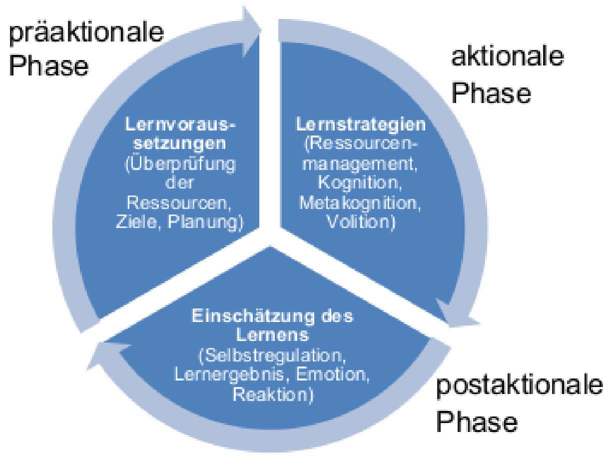


Abbildung 1

Einstellung zum Lernen aktiv und positiv einzuwirken. Unser Lerntagebuch (nach Landmann & Schmitz, 2007) war vor und nach dem Lernen auszufüllen und enthielt Fragen zur Befindlichkeit und Motivation. Wir beschränken uns hier auf die folgenden Aspekte:

- Wie häufig und wie lange wurde gelernt?
- Gibt es Zusammenhänge zu den Klausurergebnissen?
- Gibt es Unterschiede zwischen den Projektgruppen?

Maßnahmen von Mathe/Plus

In einer wöchentlichen Vorbereitungsübung wurden Lernstrategien an einer fachlichen Problemstellung vorgestellt und erprobt. In einem speziellen MP²-Helpdesk konnten die Studierenden Hilfen von studentischen Hilfskräften erhalten. Ein eLearning-Kurs bot Tests mit automatisierter Rückmeldung, Foren, Termine, Dateiablage sowie nützliche Links und Tipps. In einem Repetitorium wurden kurz vor der Klausur die relevanten Inhalte komprimiert wiederholt. Um die Wirkung der verschiedenen Maßnahmen getrennt evaluieren zu können, wurden zwei Gruppen gebildet: eine wurde semesterbegleitend persönlich in den Vorbereitungsübungen betreut (*Supported Learning Group*, SLG), die andere erst kurz vor der Klausur im Repetitorium (*Self-Directed Group*, SDG). Zusätzlich gab es eine reine Kontrollgruppe. Das Lerntagebuch wurde von den Studierenden aus SDG und SLG geführt.

Methodologie

Die Studierenden füllten die Lerntagebücher täglich aus, zum größten Teil online mit der Evaluationssoftware EvaSys. Mithilfe anonymisierter Codes konnte u.a. ermittelt werden, welche Studierenden wie oft wie lange für Mathematik gelernt hatten, und welche Ergebnisse sie mit diesem Lernverhalten bei der Klausur erzielen konnten. Die Lerntagebücher aus dem ersten Jahr von MP² lieferten eine Fülle von Daten, deren Auswertung nicht unproblematisch war. So war trotz der akzeptablen anfänglichen Gruppengröße der beiden Projektgruppen (jeweils 60) die Anzahl der ausgefüllten Lerntagebücher gering.

Ergebnisse

Der erhoffte Effekt, dass eine häufigere und längere und damit intensive und nachhaltige Beschäftigung mit dem Lernstoff zu besseren Klausurergebnissen führen würde, konnte nicht nachgewiesen werden; die Korrelationskoeffizienten von Pearson betragen 0.1005 (SDG) bzw. 0.0006 (SLG) für die einfache lineare Regression. Dies ist auch auf die kleine Anzahl derjenigen Studierenden zurückzuführen, die sowohl das Lerntagebuch konsequent ausfüllten, als auch an der Klausur teilnahmen.

Ein anderes erwartetes Ergebnis, die Studierenden aus der persönlich betreuten Gruppe würden aufgrund der in den Vorbereitungsübungen trainierten Lernstrategien ihre individuelle Lernzeit besser nutzen, konnte ansatzweise realisiert werden, wie Abbildung 2 zeigt. Hier sind die erreichten Klausurpunkte in Abhängigkeit von der individuellen Lernzeit, getrennt für die Repetitoriumsgruppe (SDG) und die wöchentlich persönlich betreute Gruppe (SLG), dargestellt. Die Verteilung der Markierungen erlaubt es zu behaupten, dass die regelmäßigen Treffen zur Erarbeitung und Erprobung von Lernstrategien den Lernerfolg erhöhen, denn diese Gruppe erreicht tendenziell mehr Klausurpunkte mit weniger Zeitaufwand.

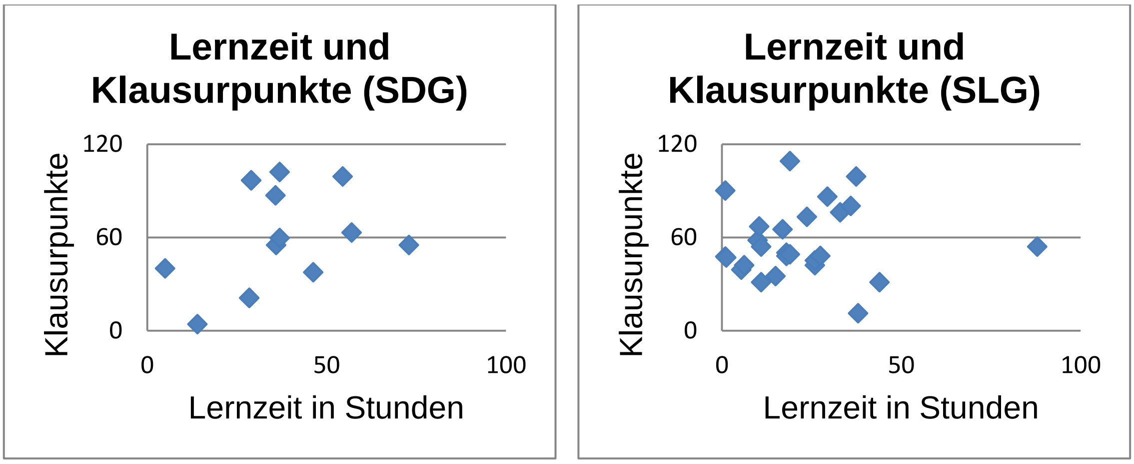


Abbildung 2: nur Klausurteilnehmer, Bestehensgrenze 60 Punkte

Alle individuellen Lernverläufe zeigen typischerweise einen Abfall der Lernzeit über Weihnachten, jedoch variiert die Länge der individuellen Pausen zum Teil erheblich, von wenigen Tagen bis zu mehr als zwei Wochen. Insgesamt lässt sich sagen, dass die Studierenden ihr Lernverhalten sehr stark an den wöchentlich abzugebenden Übungszetteln orientieren. Sobald diese Rhythmisierung wegfällt, sinkt die Lernzeit erheblich. Das gilt auch für die Gruppe, die sich intensiv mit Lernstrategien, und damit auch mit Zeitplanung und Zeiteinteilung, beschäftigte.

Schlussfolgerungen und Ausblick

Die bisherige Auswertung der vorliegenden Lerntagebücher konnte nicht die antizipierten Resultate liefern. Dies unterstützt unsere Wahrnehmung, dass die Maßnahmen von Mathe/Plus verbessert werden können. Als Konsequenz wurden im zweiten Jahr von MP² einige Veränderungen eingeführt, u.a. wurde das Lerntagebuch zum *LearningLog* komprimiert und auf wöchentliches Ausfüllen umgestellt. Diese und weitere Änderungen für den zweiten Durchlauf von MP² wurden auf der 5. DOSS (*Dortmund Spring School for Academic Staff Developers*) detailliert vorgestellt (Kallweit, Griese & Glasmachers, 2012).

Die Konzentration der Studierenden auf die wöchentlichen Übungszettel kann durch die Aussicht auf Bonuspunkte begründet werden; sie ist nicht ohne weitere Informationen eindeutig interpretierbar. Möglicherweise spielt auch die Nachhaltigkeit des Lernens für die Studierenden keine große Rolle, und sie wollen lediglich die Klausur bestehen.

Nichtsdestotrotz können die Lerntagebücher noch weitere Erkenntnisse liefern. Dazu zählt die Betrachtung der verwendeten Lernstrategien, insbesondere im Abgleich mit Fragebögen (nach Wild & Schiefele, 1994), die die Studierenden zu Beginn und am Ende des Semesters ausgefüllt haben. Auch die Daten zu Befindlichkeit und Motivationslage können Aufschluss darüber geben, was Studierende zur Beschäftigung mit dem Lernstoff ermutigt. Die Einbeziehung einer mittelfristigen Perspektive wird zeigen, ob das Projekt einen nachhaltigen Einfluss auf den Lernerfolg hatte.

Literatur

Griese, B., Glasmachers, E., Härterich, J., Kallweit, M. & Roesken, B. (2011): Engineering students and their learning of mathematics. In B. Roesken & M. Casper (Hrsg.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVII, Proceedings of the MAVI-17 Conference*. Bochum: Professional School of Education, RUB, 85-96.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist 34 (10)*, 906-911.

Kallweit, M., Griese, B. & Glasmachers, E. (2012): MathePlus – Begleitmaßnahmen für Mathematik in der Servicelehre. Praxisbericht auf der 5. Dortmund Spring School for Academic Staff Developers, DOSS, Abstract verfügbar unter http://www.hdz.tu-dortmund.de/686/

Landmann, M. & Schmitz, B. (2007): Die Kombination von Trainings mit standardisierten Tagebüchern: Angeleitete Selbstbeobachtung als Möglichkeit der Unterstützung von Trainingsmaßnahmen. In M. Landmann & B. Schmitz (Hrsg.), *Selbstregulation erfolgreich fördern. Praxisnahe Trainingsprogramme für effektives Lernen*. Stuttgart, Germany: Kohlhammer, 151-163.

Schmitz, B. & Wiese, B. S. (2006): New perspectives for the evaluation of training sessions in self-regulated learning: Time-series analysis of diary data. *Contemporary Educational Psychology, 31*, 64-96.

Wild, K.-P. & Schiefele, U. (1994): Lernstrategien im Studium. Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 15*, 185-200.

Zucker, S. (1996). Teaching at the university level. *Notices of the American Mathematical Society 43(8)*, 863-865.

Susanne GRÜNEWALD & Katrin VORHÖLTER, Hamburg

Unterrichtsaktivitäten zur Förderung von Modellierungskompetenzen im Rahmen des Projektes ERMO

1. Theoretischer Hintergrund

In der didaktischen Diskussion zur mathematischen Modellierung existieren verschiedene Ansätze zum Erwerb von Modellierungskompetenzen, die sich unterteilen lassen in eine holistische und eine atomistische Herangehensweise (Blomhøj & Jensen, 2003; Zöttl, 2010). Grundsatz des holistischen Ansatzes ist die Annahme, dass Modellierungskompetenzen vor allem durch die Bearbeitung vollständiger Modellierungsaufgaben erworben werden können, wobei die Komplexität und Schwierigkeit der verwendeten Modellierungsprobleme den Erfahrungen der Lernenden im Umgang mit derartigen Aufgaben entsprechen sollte. Ausgangspunkt des atomistischen Ansatzes ist dagegen die Annahme, dass der Kompetenzerwerb am effektivsten durch die separierte Bearbeitung von Teilprozessen mathematischer Modellierung geschieht, insbesondere bei Lernenden, die über keine oder nur geringe Modellierungskompetenzen verfügen. Im Rahmen des Projektes ERMO sollen die Effektivität des holistischen und des atomistisches Ansatzes in Bezug auf den Erwerb von Modellierungskompetenzen empirisch verglichen werden. Zentrales Ziel des Projektes ist es, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, vollständige, komplexe Modellierungsaufgaben selbstständig zu bearbeiten.

Die genaue Definition von Modellierungskompetenzen ist abhängig von der jeweils zu Grunde liegenden Auffassung von mathematischer Modellierung (Borromeo Ferri & Kaiser, 2010 Zöttl, 2010). Anerkannt ist die Auffassung, dass Modellierungskompetenzen die Fähigkeiten und die Bereitschaft umfassen, reale Problemstellungen mithilfe mathematischer Modellierung zu lösen (Maaß, 2004). In Anlehnung an Zöttl (2010) werden die Teilkompetenzen zum Modellieren, die für die Durchführung der einzelnen Phasen des Modellierungsprozesses nötig sind, zu drei Teilprozessen zusammengefasst:

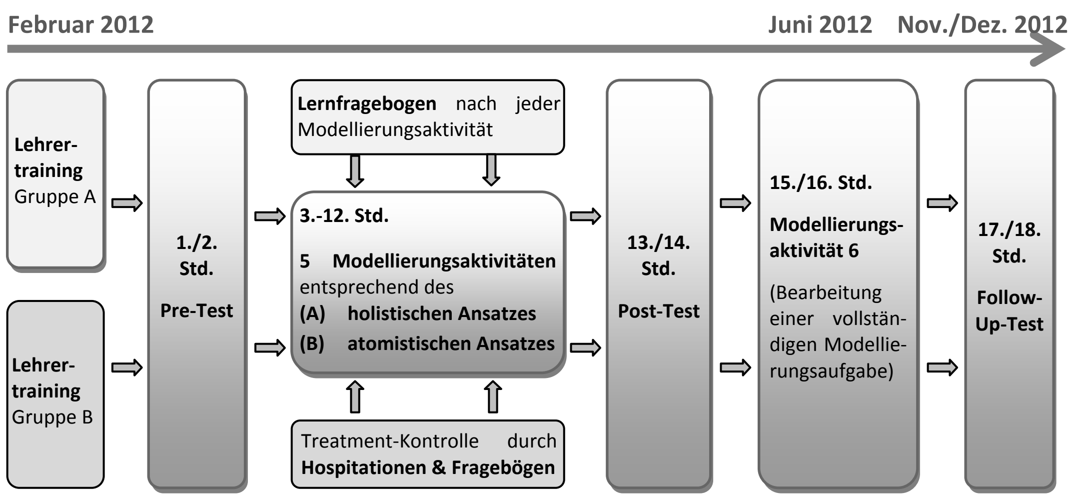
- Kompetenz zum Mathematisieren (Verstehen, Strukturieren und Vereinfachen des Problems, Erstellen des realen und des mathematischen Modells),
- Kompetenz zum mathematischen Arbeiten innerhalb des mathematischen Modells,
- Kompetenz zum Interpretieren der erhaltenen Lösung sowie zum Validieren dieser Lösung sowie des gesamten Lösungsprozesses.

Die Teilkompetenzen mathematischer Modellierung sind dementsprechend ein notwendiger Teil der Modellierungskompetenz, da sie es den Modellierenden ermöglichen, die einzelnen Schritte des Modellierungsprozesses angemessen durchzuführen. Allerdings bedeutet das Vorhandensein der entsprechenden Teilkompetenzen nicht die Existenz einer globalen Modellierungskompetenz (Zöttl, 2010). Einen wesentlichen Stellenwert bei der Modellierungskompetenz nehmen dabei metakognitive Kompetenzen ein, die sich unter anderem auf deklaratives Metawissen über den Modellierungsprozess an sich beziehen. Ein nicht vorhandenes oder nur sehr geringes Metawissen über den Modellierungsprozess kann beispielsweise beachtliche Probleme bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben nach sich ziehen, beispielsweise bei den Übergängen zwischen den einzelnen Phasen des Modellierungsprozesses sowie dem Lösen von Blockaden bei der Bearbeitung der Aufgaben (Maaß, 2006; Stillman, 2011).

2. Design des Projektes

Das Projekt ERMO basiert auf Vorarbeiten an der Universität Hamburg (Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Dr. Katrin Vorhölter, Peter Stender) und der Universität Kassel (Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri) und bezieht sich auf einschlägige Arbeiten aus beiden Arbeitsgruppen. Darüber hinaus schließt das Projekt an Modellierungsaktivitäten an, die von dem Arbeitsbereich Mathematikdidaktik der Universität Hamburg in Kooperation mit dem Department für Mathematik in den letzten Jahren mit Schülerinnen und Schülern von Hamburger Schulen durchgeführt wurden und die sich dem holistischen Ansatz zuordnen lassen (u.a. Kaiser, 2007).

Das Projekt ERMO richtet sich an Schülerinnen und Schüler des 9. Jahrgangs. Insgesamt haben sich neun Hamburger Gymnasien und Stadtteilschulen mit 28 Klassen zu dem Projekt angemeldet. Dem Projekt liegt das folgende Design zugrunde:



Die an dem Projekt teilnehmenden Klassen der 9. Jahrgangsstufe werden in zwei Gruppen unterteilt: eine Gruppe führt während des Projektes Modellierungsaktivitäten entsprechend des holistischen Ansatzes durch, die andere Gruppe Modellierungsaktivitäten entsprechend des atomistischen Ansatzes. Die Interventionsphase umfasst die zweite Hälfte des Schuljahres 2011/12 und hat im Februar 2012 mit Lehrertrainings für die teilnehmenden Lehrkräfte begonnen. Die Lehrkräfte jeweils einer Gruppe (holistisch / atomistisch) wurden im Rahmen einer dreistündigen Veranstaltung gemeinsam auf die Durchführung der Modellierungsaktivitäten vorbereitet. Während der Projektphase führen die teilnehmenden Lehrkräfte in ihren Klassen jeweils sechs Modellierungsaktivitäten im Umfang von jeweils einer Doppelstunde durch. Die ersten fünf Modellierungsaktivitäten wurden dabei entsprechend des jeweiligen Ansatzes entwickelt und sind durch klare Vorgaben in den Leitfäden für die Lehrkräfte weitgehend festgelegt. Der Fokus der atomistischen Gruppe liegt dabei auf den Übergängen Realität → Mathematik und Mathematik → Realität. In der sechsten Modellierungsaktivität bearbeiten alle Schülerinnen und Schüler eine vollständige Modellierungsaufgabe, wobei die Lösungen auf Unterschiede zwischen den Gruppen analysiert werden sollen. Da im DISUM-Projekt eine leichte Überlegenheit eines selbstständigkeitsorientierten Unterrichts im Vergleich zu einem direktiven Unterricht nachgewiesen werden konnte (Blum, 2011), sind in Anlehnung an diese Ergebnisse die Modellierungsaktivitäten im Rahmen des Projektes ERMO ebenfalls selbstständigkeitsorientiert angelegt. Besonderer Wert wird bei der Durchführung der Modellierungsaktivitäten auf die Reflexion des Bearbeitungsprozesses und die Vermittlung von Metawissen über den Modellierungsprozess gelegt, beispielsweise durch den Einsatz des Modellierungskreislaufes.

3. Evaluation der Modellierungsaktivitäten

Die Evaluation des Projektes umfasst auf Schülerebene schriftliche Tests im Pre-, Post- und Follow-Up-Design im zeitlichen Umfang von jeweils einer Doppelstunde sowie Lernfragebögen im Anschluss an jede Modellierungsaktivität. Zur Sicherung der Vergleichbarkeit der durchgeführten Modellierungsaktivitäten werden von den Lehrkräften im Anschluss an jede Modellierungsaktivität Kurzfragebögen ausgefüllt, des Weiteren werden die Modellierungsaktivitäten hospitiert.

Der Schwerpunkt der Tests liegt auf der Erhebung der Teilkompetenzen mathematischer Modellierung der Schülerinnen und Schüler sowie ihrer Kompetenz, vollständige Aufgaben zu bearbeiten und Lösungsschritte einer Aufgabe den verschiedenen Phasen des Modellierungskreislaufes zuzuordnen.

4. Abschließende Bemerkung

Die Durchführung der Modellierungsaktivitäten in den beiden Gruppen wird Mitte 2012 abgeschlossen sein. Die Evaluation des Projektes soll einen Beitrag zu der Frage leisten, auf welche Art und Weise die Kompetenz des mathematischen Modellierens im Mathematikunterricht am besten gefördert werden kann und wie die Schülerinnen und Schüler dabei insbesondere auch metakognitive Modellierungskompetenzen erwerben können. Es wird davon ausgegangen, dass die holistischen bzw. atomistischen Modellierungsaktivitäten unterschiedliche Aspekte der Modellierungskompetenzen fördern. Langfristig wird es dementsprechend darum gehen, die Vorteile beider Ansätze optimal zu kombinieren.

5. Literatur

Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning, *Teaching Mathematics and its applications* 22 (3), 123-139.

Blum, Werner (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (S. 15-30). New York: Springer.

Borromeo Ferri, R. & Kaiser, G. (2010). Aktuelle Ansätze und Perspektiven zum Modellieren in der nationalen und internationalen Diskussion. In A. Eichler & F. Förster (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (S. 1-10). Istron-Reihe. Hildesheim: Franzbecker.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 143-162.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C.P. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (S. 110-119). Chichester: Horwood Publishing.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Maaß, Katja (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, *38*(2), 113-142.

Stillman, G. (2011). Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and Modelling Tasks at Secondary School. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA14* (S. 165-180). New York: Springer.

Zöttl, L. (2010). *Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Lösungsbeispielen*. Hildesheim: Franzbecker.

Roland GUNESCH, Darmstadt

Differential Geometry explained easily: A new teaching concept

Abstract

This article describes a new method to teach differential geometry in a way which is more intuitive, more appealing to students, and which can help students to understand crucial concepts of differential geometry better.

Introduction

Differential geometry (DG) is a topic which is popular among mathematics students, including those studying mathematics education. However, until now, it was commonly thought that DG is suitable only for those students who are well advanced in their studies, and too difficult for others. This is because the traditional way of teaching DG requires several semesters of analysis and linear algebra. This discourages students who are less strong in these subjects from taking a DG course. Also, some students who are interested in DG might not be able to attend all of the required prerequisite courses; e.g., this regularly applies to students who are not studying mathematics as their main major.

Here I propose a new method of teaching DG which uses fewer prerequisites but nonetheless allows to teach several crucial and interesting topics. In particular, the following concepts can easily be taught this way: geodesics, curvature, and the Gauss-Bonnet theorem.

Note that the method proposed here does not merely help struggling students succeed in learning some DG concepts (although the method does accomplish that), but it is also a method which is valuable for stronger students since it illustrates some important and useful aspects of geometry which remain hidden in standard DG courses.

The method contains the following elements: visual demonstrations; metric geometry; curvature bounds; applications (including the Gauss-Bonnet theorem); and several standard topics of curves and surfaces.

Thoughts on visual demonstrations in differential geometry

DG is highly suitable for dealing with shapes that can actually be seen, and the author strongly believes that a course on DG should contain many visual demonstrations of such shapes. Computer software is available that allows to show and interactively manipulate curves and surfaces and will provide the course with interesting visual experiments in the classroom. These should be part of the course.

A note for readers of this article who are about to write a book or course notes on DG: a book should also contain high-quality graphics of the presented material wherever possible. Sadly, in the past it was common to limit book illustrations to the occasional sketch. Nowadays, easy-to-use software is available for making high-quality illustrations. Books and classes have slightly different requirements on software (classroom teaching requires interaction and quick response, whereas for a picture in a book, fine resolution is important), but software available for both tasks.

Teaching differential geometry via metric geometry

Metric geometry is an easy but powerful method to understand concepts from DG. It was developed at the St. Petersburg school of mathematics by A. D. Alexandrov. Metric geometry uses just the notion of *metric space* (i.e., distance function); this is an easy definition in a few lines. From this, various mathematical concepts can be derived. However, it does not use the properties of the underlying space unless derived from the axioms of the distance function. This is important: E.g. when studying Euclidean geometry, it is customary to formulate Euclid's axioms and derive properties from those. This can be a bit tedious. The axioms of a metric space are probably an easier set of axioms to work with.

Geodesics

Geodesics are the most important type of curves in DG. In Euclidean space, they are straight lines. On a sphere, geodesics are *great circles*. On a (smooth) curved surface, they are curves which are "as straight as possible". They also have something to do with minimizing length (more precisely, are shortest connections between points on them, as long as those points are close together). However, even the precise definition of this (intuitive) concept of "as straight as possible" is cumbersome in traditional DG, because the traditional definition requires the *covariant derivative*, which in turn requires the *Levi-Civita connection*, which requires very good knowledge of differentiation. This makes the classical definition appear rather late in DG textbooks, and this hinders students from understanding this important class of curves in the beginning of the course.

On the other hand, defining a geodesic with metric geometry is very easy. The aforementioned notion of minimizing length between (nearby) points on a curve is easily defined; all that is required is to define the length of a curve via distance of its points (and a limit). This allows the topic of geodesics to be introduced early in the DG course.

Curvature

Curvature is one of the most important concepts in DG. Unfortunately, the curvature of a manifold is usually defined in a technical way which makes it extremely difficult for students to grasp its meaning. In Riemannian geometry, first a *curvature tensor* is defined. This is problematic for students who do not yet have a thorough understanding of linear algebra. Moreover, this tensor has many components, and only a few of them are understood. To get from this tensor to more meaningful concepts of curvature, such as actual numbers, another nontrivial method is needed to derive the *sectional curvature(s)*. As a result, even on very simple surfaces it is not easy to figure out even very basic properties of the curvature, such as its sign. From a teaching perspective, this is very problematic.

For (2-dimensional) surfaces embedded in 3-dimensional Euclidean space, there is an easier method to define curvature, namely via *principal curvatures*. This approach is already noticeably more intuitive. However, to understand this definition still requires good knowledge of linear algebra.

The author has studied which method of explaining curvature to students works best and has found that yet another method works much better in a classroom setting. The method deals with curvature bounds in metric spaces. This is explained in the following.

Using just the definition of distances, it is possible to derive angles of (some) intersecting curves. Neither tangent vectors nor differentiation is required.

Next, for any interior metric space, it is possible to compare each triangle (i.e. 3 points and the geodesics joining them) to a triangle in the Euclidean plane with the same side lengths. If the angles of the triangle in the metric space all have angles not bigger than those of the *comparison triangle*, then the former is defined to be of non-positive curvature. Similarly, if (in small triangles) all angles are not smaller, then the curvature is defined to be non-negative. This is a very short and intuitive definition.

If in the preceding paragraph the Euclidean space is replaced by a sphere, then the aforementioned upper or lower curvature bound is not zero but the curvature of the sphere. And if it is replaced by hyperbolic space, then the curvature bound is a negative number. By changing the radius of the sphere, its curvature can be made any positive number (it is actually the inverse of the radius). Students do not have to be able to compute the curvatures of spheres; all that is required is to understand that increasing the radius will decrease the curvature. Something similar applies to hyperbolic space, hence providing the concept of arbitrary curvature bounds.

Introducing hyperbolic space is more difficult that defining the sphere. The author found that the intuitive geometric approach with the *Poincare disc* (and its isometries) works well in a classroom setting.

The Gauss-Bonnet theorem

One of the most advanced topics covered in one semester of DG is the theorem of Gauss-Bonnet. It is a theorem about (2-dimensional) surfaces which nicely connects the concepts of geodesics, angles, and curvature. With the methods described here, it is possible to cover this theorem (including proof) in a DG course where the students are not necessarily strong when dealing with analysis or linear algebra. This can be done with the following procedure:

- Prove the Gauss-Bonnet theorem on the sphere (of radius 1). There is a nice intuitive proof for that which is very visual and very short. Students like it. Then explain how the quantities curvature, area, length, and angle change when the radius of the sphere varies. This is easy.

- Prove the Gauss-Bonnet theorem in hyperbolic space. This can be done with intuitive (although not at all trivial) observations of properties of hyperbolic isometries. Then, just as for the sphere, explain how quantities change when the geometry is rescaled.

- This proves the theorem for constant curvature surfaces. It is not just as abstract proof, but students will really understand it.

- Using integration, the theorem can be derived for surfaces with variable curvature.

Note

This method is not intended to do away with classical DG. All topics traditionally taught can still be taught after using this method, and at that point students will benefit from the insight gained.

References

Burago, D., Burago, Y., Ivanov, S. (2001): A Course in Metric Geometry. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics.

Bär, Ch. (2010): Elementare Differentialgeometrie. Walter de Gruyter.

Stefan GÖTZ, Franz HOFBAUER, Wien

Geraden, Kreise und Dreiecke: Vorschläge zur Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft

Einleitung

Häufig fehlen in der analytischen Geometrie der Sekundarstufe II geeignete herausfordernde und interessante Probleme. In diesem Beitrag wird durch die Verbindung von analytischer Geometrie mit elementargeometrischen Problemen ein Vorschlag dazu gemacht, der darüber hinaus eine innermathematische Vernetzung mit sich bringt. Der österreichische Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe weist sogar mit dem Unterpunkt „Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie" (bm:ukk 2004, S. 4) direkt auf diese Möglichkeit hin.

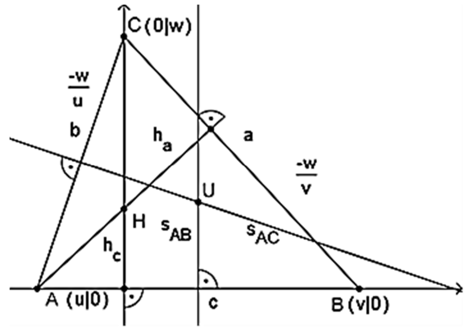
Es werden motivierende Fragestellungen den einzelnen Resultaten vorangestellt, die dann mittels dynamischer Geometriesoftware (DGS) erkundet werden. Die im Beitrag verwendeten Beispiele ermöglichen es den Schülerinnen und Schülern Hypothesen aufzustellen und zu begründen. In Holland (1988, S. 51) finden wir zum Beweisen im Geometrieunterricht, dass geometrische Sätze „einsichtig und beziehungsreich gelernt werden" müssen. Das bedeutet, „daß

- die Allgemeingültigkeit des zu lernenden Satzes eingesehen wird;
- Beziehungen zu solchen Sätzen hergestellt werden, welche die Allgemeingültigkeit des Satzes begründen." (ebd.).

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie durch die geschickte Wahl der (allgemeinen) Lage eines ebenen Dreiecks in einem Koordinatensystem eine sehr leistungsfähige algebraische Beschreibung gelingt.

Die Ausgangssituation und ein erstes Ergebnis

Ein beliebiges Dreieck *ABC* können wir so in ein Koordinatensystem legen, dass der Eckpunkt *A* die Koordinaten (u|0), der Eckpunkt *B* die Koordinaten (v|0) und der Eckpunkt *C* die Koordinaten (0|w) hat. Die Eckpunkte *A* und *B* liegen auf der x-Achse und der Eckpunkt *C* liegt auf der y-Achse. Damit *A* links von *B* liegt, nehmen wir immer $u<v$ an. Außerdem können wir $w>0$ annehmen.



Wir setzen $a = \sqrt{v^2 + w^2}$, $b = \sqrt{u^2 + w^2}$ und $c = v - u$, das sind die Längen der drei Seiten des Dreiecks.

Wo liegen in einem solchen Dreieck Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt? Die Gleichung der Trägergeraden der Höhe h_a durch den Eckpunkt *A* ist $-(x-u)v + yw = 0$. Dazu finden wir die Steigung der Trägergeraden der Seite *a* als $-\frac{w}{v}$, was einen Normalvektor $\begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$ auf h_a impliziert. Die Höhe durch den Eckpunkt *C* liegt auf der *y*-Achse, die zugehörige Trägergerade hat daher die Gleichung *x*=0. Der Schnittpunkt ist $(0|-\frac{uv}{w})$, womit der Höhenschnittpunkt *H* gefunden ist.

Die Mittelsenkrechte s_{AB} der Seite *AB* hat die Gleichung $x = \frac{u+v}{2}$. Die Mittelsenkrechte s_{AC} der Seite AC hat einen Normalvektor $\begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$ wegen der Steigung $-\frac{w}{u}$ der Trägergeraden von *b*. Die Gleichung der zugehörigen Trägergeraden ist dann $-\left(x - \frac{u}{2}\right)u + \left(y - \frac{w}{2}\right)w = 0$. Der Schnittpunkt von s_{AB} und s_{AC} ist $(\frac{u+v}{2}|\frac{w}{2} + \frac{uv}{2w})$, der Umkreismittelpunkt *U*.

Der quadrierte Abstand von *U* zum Eckpunkt *C* ist $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2} - \frac{uv}{2w}\right)^2 = \frac{u^2w^2+v^2w^2+w^4+u^2v^2}{4w^2} = \frac{a^2b^2}{4w^2}$. [Ein Computeralgebrasystem (CAS) liefert zumindest $\frac{(u^2+w^2)\cdot(v^2+w^2)}{4\cdot w^2}$.] Die Wurzel daraus ist der Umkreisradius *r*.

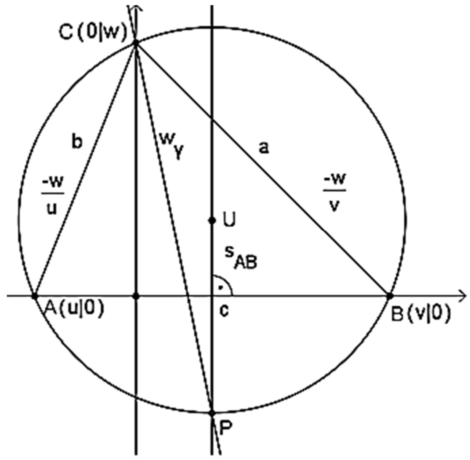
Der gespiegelte Höhenschnittpunkt

Spiegle den Höhenschnittpunkt von verschiedenen Dreiecken an den (Trägergeraden der) Seiten! Was fällt Dir auf? Wo liegen diese Punkte, egal, ob das Dreieck spitz- oder stumpfwinkelig ist? Was passiert, wenn das Dreieck rechtwinkelig ist? – Wir erkennen: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den Seiten des Dreiecks, dann liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.

Es genügt, dies für die Seite des Dreiecks zu begründen, die auf der *x*-Achse liegt. Wir können das ja für jede der drei Dreiecksseiten erreichen, indem wir das Dreieck in geeigneter Weise ins Koordinatensystem legen. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt *H* um die Seite *AB*, dann erhält man $(0|\frac{uv}{w})$. Der quadrierte Abstand dieses Punktes zum Umkreismittelpunkt *U* ist $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2} - \frac{uv}{2w}\right)^2$. Die Wurzel daraus ist der Umkreisradius *r*, wie bereits in der obigen Rechnung gezeigt worden ist. Somit liegt der gespiegelte Höhenschnittpunkt auf dem Umkreis.

Der Schnittpunkt von Mittelsenkrechte und Winkelhalbierender

Konstruiere die Winkelhalbierenden eines Dreiecks und schneide diese mit dem Umkreis des Dreiecks! Betrachte die Schnittpunkte ungleich den Ecken bei verschiedenen Dreiecken und miss ihre Entfernungen von den Ecken! Was fällt Dir dabei auf? – Wir vermuten: Sei P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch den Eckpunkt C mit der Mittelsenkrechten der Seite AB. Dann liegt P auf dem Umkreis.



Zur Begründung dieser Vermutung rechnen wir die geometrische Konstruktion nach. Allerdings verlangen die dabei auftretenden algebraischen Umformungen und Substitutionen eine gewisse Übersicht, die durch ein CAS wirkungsvoll unterstützt werden kann. Wir werden zuerst die in Rede stehenden Geraden schneiden und dann erst beweisen, dass der Schnittpunkt auf dem Umkreis liegt.

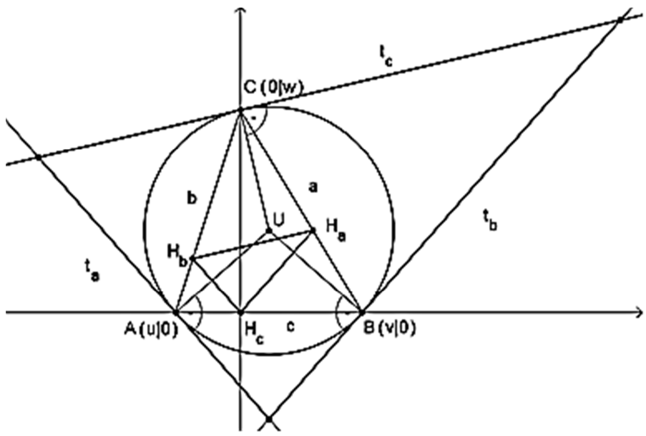
Die Einheitsvektoren in Richtung der Seiten AC und BC sind $\frac{1}{b}\begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{a}\begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$. Ihre Summe $\frac{1}{b}\begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix} + \frac{1}{a}\begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden durch den Eckpunkt C. Die Gleichung der Winkelhalbierenden w_γ ist daher $x\left(\frac{w}{b}+\frac{w}{a}\right)+(y-w)\left(\frac{u}{b}+\frac{v}{a}\right)=0$. Die Mittelsenkrechte s_{AB} der Seite AB hat die Gleichung $x=\frac{u+v}{2}$. Der Schnittpunkt P dieser beiden Geraden ist $(\frac{u+v}{2}|w-\frac{u+v}{2}\cdot\frac{wa+wb}{ua+vb})$.

Da P und der Umkreismittelpunkt U dieselbe x-Koordinate haben (sie liegen beide auf der Mittelsenkrechten s_{AB}, die parallel zur y-Achse verläuft), ist der Abstand von P zu U gleich $\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w}-w+\frac{u+v}{2}\cdot\frac{wa+wb}{ua+vb}$. Um zu zeigen, dass das gleich dem Umkreisradius r ist, ist ein wenig Rechnerei (mit einem CAS) erforderlich.

Es gilt $\frac{uv}{2w}+\frac{u+v}{2}\cdot\frac{wa+wb}{ua+vb}=\frac{u^2va+uv^2b+uw^2a+uw^2b+vw^2a+vw^2b}{2w(ua+vb)}=\frac{vab^2+ua^2b+uw^2a+vw^2b}{2w(ua+vb)}=\frac{ab+w^2}{2w}$, wobei bei der zweiten Gleichung $b^2=u^2+w^2$ und $a^2=v^2+w^2$ verwendet worden ist. Der Abstand von P zu U ist somit $-\frac{w}{2}+\frac{ab+w^2}{2w}=\frac{ab}{2w}$, also gleich dem Umkreisradius r.

Höhenfußpunkt- und Tangentendreieck

Zeichne die drei Höhenfußpunkte eines beliebigen Dreiecks und verbinde sie! Das so erhaltene Dreieck heißt Höhenfußpunktdreieck. Das Dreieck selbst ist Tangentendreieck an seinen Inkreis. Konstruiere nun ein Tangentendreieck, dessen Seiten durch die Ecken des Dreiecks verlaufen! Welche Beziehung scheint zwischen dem Höhenfußpunkt- und diesem Tangentendreieck zu bestehen? – Wir vermuten: Die Seiten des Höhenfußpunktdreiecks liegen parallel zu den Seiten des Tangentendreiecks.



Dazu geben wir eine Projektionsformel an: Projiziert man den Punkt $(p|q)$ auf die Gerade g mit der Gleichung $y=kx+d$, dann erhält man $\left(\frac{kq+p-dk}{k^2+1} \,\middle|\, \frac{k^2q+kp+d}{k^2+1}\right)$. Mit dieser können wir die Koordinaten der Höhenfußpunkte angeben: $H_a\left(\frac{uv^2+vw^2}{v^2+w^2} \,\middle|\, \frac{v^2w-uvw}{v^2+w^2}\right)$, $H_b\left(\frac{u^2v+uw^2}{u^2+w^2} \,\middle|\, \frac{u^2w-uvw}{u^2+w^2}\right)$ und $H_c(0|0)$.

Der Vektor $\overrightarrow{UA}$ ist $-\frac{1}{2w}\begin{pmatrix} vw-uw \\ w^2+uv \end{pmatrix}$. Ein Richtungsvektor der Tangente t_a an den Umkreis im Eckpunkt A ist daher $\begin{pmatrix} w^2+uv \\ uw-vw \end{pmatrix}$. Aus den Koordinaten der Höhenfußpunkte folgt, dass der Vektor $\overrightarrow{H_cH_b}$ gleich $\frac{u}{u^2+w^2}\begin{pmatrix} uv+w^2 \\ uw-vw \end{pmatrix}$ ist. Man sieht, dass er parallel zur Tangente liegt.

Ein kurzes Resümee und ein Hinweis

Es ist deutlich erkennbar, wie mächtig die analytische Geometrie als Werkzeug zum Begründen sein kann. In PM, Heft 44, **54.** Jahrgang, 2012, S. 36–40, erscheint eine ausführliche Darstellung dieser Thematik (mit GeoGebra-Dateien und elementargeometrischen Beweisen im online-Anhang).

Literatur

bm:ukk (2004): Lehrplan für den Pflichtgegenstand Mathematik an der Oberstufe der AHS in Österreich. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/ 11859/lp_neu_ahs_07.pdf, 27.9.2011.

Holland, G. (1988): Geometrie in der Sekundarstufe. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 9. Mannheim/Wien/Zürich, BI Wissenschaftsverlag.

Maike HAGENA, Kassel

Wie beeinflussen sich Größenvorstellung und Modellierungskompetenz von Lernenden? – Vorstellung einer Interventionsstudie

Neben der Modellierungskompetenz von Lernenden ist auch deren Größenvorstellung ein zentraler Aspekt in der mathematikdidaktischen Diskussion. Inwiefern sich diese beiden Aspekte gegenseitig beeinflussen, wurde bislang nicht untersucht, obwohl ein Zusammenhang offensichtlich erscheint. Um dieses Forschungsdesiderat schließen zu können, ist eine Interventionsstudie geplant, deren Design sowie Instrumente im folgenden Beitrag vorgestellt werden. Zudem wird der theoretische Hintergrund erläutert sowie von ersten Arbeitsschritten beziehungsweise den Ergebnissen einer Pilotierung berichtet.

Größenvorstellungen und mathematisches Modellieren

Größen treten als Mittler zwischen Realität und Mathematik auf. Sie sind nicht nur Objekte aus dem Mathematikunterricht, sondern begegnen dem Schüler auch vielfach im Alltag (Grund, 1992). Eine Aufgabe des Mathematikunterrichts sollte es deshalb sein, die Größenvorstellungen von Lernenden auszubilden (Peter-Koop, 2001). Das bedeutet, dafür zu sorgen, dass im Bewusstsein der Lernenden adäquate Bilder von Repräsentanten entstehen, die je nach Bedürfnis von den Lernenden reproduziert und gedanklich weiterverarbeitet werden. Das impliziert, dass Lernende Größenarten erkennen und unterscheiden können. Ferner sollten Lernende für die einzelnen Größenbereiche Repräsentanten wichtiger Größenangaben kennen, Fähigkeiten im Messen, Schätzen und Überschlagen besitzen, Überlegungen zu sinnvollen Resultaten anstellen sowie Größenangaben umrechnen und natürlich messen können, wofür auch Zahlvorstellungen notwendig sind (Grund, 1992). Da Größenvorstellungen eine wichtige Voraussetzung darstellen, um Zahlangaben bei der Bearbeitung von Sachaufgaben und eben auch im Alltag überprüfen zu können (Franke & Ruwisch, 2010), sollten Lernende also nicht nur formal mit Größen operieren können, sondern ein fundiertes Verständnis von Namen und Symbolen aufbauen sowie auf ihren Erfahrungsbereich bezogene Vergleichsgrößen erwerben. Verschiedene Studien zeigen jedoch, dass dies bislang nicht gelingt, sondern dass das Arbeiten mit Größen eines der Themen mit den größten Lehr-, Lernschwierigkeiten darstellt (Emmrich, 2004; Thompson & Preston, 2004). Ein Forschungsergebnis, das auch für die Analyse von Lehr- bzw. Lernproblemen beim mathematischen Modellieren relevant ist.

Beim mathematischen Modellieren bearbeiten Lernende realitätsbezogene Aufgaben, die das wiederholte Übersetzen zwischen Realität und Mathematik fordern. Bei der Bearbeitung einer Modellierungsaufgabe werden von den Lernenden idealtypischerweise verschiedene Schritte durchlaufen, die neben mathematischen Fertigkeiten auch die Nutzung von außermathematischem Wissen erfordern. Die gegebene, reale Situation muss, bevor sie mathematisiert wird, zunächst einmal verstanden und vereinfacht/ strukturiert werden (Blum & Leiss, 2005). Dieser Schritt erfordert das Treffen von Annahmen, für das Lernende ihr außermathematisches Wissen nutzen bzw. benötigte Angaben schätzen müssen (Maaß, 2006). Es lässt sich vermuten, dass Lernende insbesondere auch für diesen Modellierungsschritt Größenvorstellungen benötigen.

Fragestellungen

Da Lernende beim mathematischen Modellieren mit Größen in Sachsituationen umgehen müssen, ergeben sich folgende Forschungsfrage:

- Fördert eine verbesserte Größenvorstellung die Modellierungskompetenz von Lernenden?

Andererseits ist aber auch bekannt, dass sich realistische Größenvorstellungen insbesondere über Sach- und Anwendungssituationen gewinnen lassen und Lernende sinnvolle Messerfahrungen benötigen. Von daher ist es ebenso gut denkbar, dass die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben zu einer verbesserten Größenvorstellung von Lernenden beiträgt. Hieraus leitet sich die zweite Forschungsfrage ab:

- Können mit Hilfe von Modellierungsaufgaben die Größenvorstellungen von Lernenden gefördert werden?

Studie

Zur Untersuchung beider Fragestellungen ist eine Interventionsstudie mit Lernenden der Jahrgangsstufe 6 geplant. Mit Hilfe eines Leistungstests sollen zunächst die Größenvorstellungen sowie die Modellierungskompetenz der Lernenden zu den Größenbereichen Längen und Flächen erhoben werden. Es sind drei Experimentalgruppen geplant. Die Auswirkungen der verschiedenen Interventionen auf die Größenvorstellungen sowie die Modellierungskompetenz der Lernenden werden abschließend erneut durch einen Test erhoben. Damit beurteilt werden kann, inwieweit sich Größenvorstellungen der Lernenden durch die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben fördern lassen (und umgekehrt), sollen die Lernzuwächse in einzelnen Experimentalgruppen gezielt miteinander verglichen werden.

Erste Pilotierung

Einer der ersten Arbeitsschritte galt der Entwicklung und Erprobung von Testinstrumenten zur Erfassung von Größenvorstellungen und Modellierungskompetenz. Es wurde ein Test zu den Größenbereichen Flächeninhalte und Volumina konzipiert, der neben Modellierungsaufgaben verschiedene Items zu einzelnen Komponenten von Größenvorstellungen beinhaltete. Die Größenvorstellungen wurden dreidimensional operationalisiert. Während die erste Dimension Items zum Umrechnen von Größenangaben und die zweite Dimension Items zum Schätzen und Überschlagen von Größen enthielt, erfasste die dritte Dimension die Komponente Repräsentanten wichtiger Größenangaben kennen. Der Test wurde an 87 Studierenden des Grundschullehramts am Ende des 3. Semesters pilotiert. Die Studierenden hatten über den Verlauf eines Semesters sowohl Wissen über Größen erlangt, als auch mathematisch modelliert.

„Stimmt's?“

Entscheiden Sie für jedes Objekt, ob das angegebene **Volumina** realistisch ist oder nicht.

Das Volumen…	**Beträgt ungefähr…**	**Viel zu wenig…**	**Stimmt…**	**Viel zu viel…**
Eines Hallenbades	10001	☐	☐	☐

Abbildung 1: Beispielitem zum Schätzen und Überschlagen von Größen

Fragenstellungen/ Ergebnisse

Die Grundlage für die Pilotierung stellten folgende Forschungsfragen dar:

- Lassen sich Größenvorstellungen reliabel erfassen?
- Gibt es Zusammenhänge zwischen Flächeninhalten und Volumina bezüglich der einzelnen Skalen?
- Wie bringen Studierende beim Modellieren ihre Größenvorstellungen ein? Welche Fehler treten auf?

Während die Reliabilitäten der Subskalen sehr unterschiedlich ausgefallen sind, liefern die Gesamtskalen „Größenvorstellungen zu Flächeninhalten“ (17 Items, α=.76) und „Größenvorstellungen zu Volumina“ (21 Items, α=.78) ein befriedigendes Ergebnis. Es ist also weitestgehend gelungen, dass Konstrukt Größenvorstellungen in Form von Items zu erfassen. Weitere Subskalen in Form von „Größenarten kennen und unterscheiden“ sowie „Grundvorstellungen zu Rechenoperationen mit Größen besitzen“ müssen jedoch noch ergänzt werden.

Bezüglich der Zusammenhänge lässt sich feststellen, dass sowohl die Subskalen zu Flächeninhalten als auch die Subskalen zu Volumina nicht signifikant miteinander korrelieren. Eine signifikante Korrelation ist hingegen zwischen den Größenvorstellungen zu Flächeninhalten und den Größenvorstellungen zu Volumina festzustellen ($r=.58$, $p<.01$). Das bedeutet, dass Studierende, die über ausgeprägte Vorstellungen zu Flächeninhalten verfügen, wahrscheinlich auch ausgeprägte Vorstellungen zu Volumina besitzen und umgekehrt. Ein Ergebnis, das insofern nicht verwunderlich ist, da sowohl Flächeninhalte als auch Volumina abgeleitete Größen von Längen sind.

Bei der qualitativen Auswertung der Modellierungsaufgaben hat sich gezeigt, dass Studierende sowohl für das Verstehen und Vereinfachen der realen Situation, als auch für das Mathematisieren und mathematische Arbeiten sowie für das Validieren Größenvorstellungen benötigen.

Zusammenfassend können folgende Ergebnisse zum jetzigen Zeitpunkt festgehalten werden:

- Größenvorstellungen lassen sich reliabel erfassen.
- Vermutlich sollten im Unterricht alle drei Teilkomponenten („Größen umrechnen", „Repräsentanten wichtiger Größen nennen" sowie „Größen zu überschlagen und zu schätzen") gefördert werden.
- Modellierungsaufgaben erfordern inhaltsreiche Vorstellungen über Größen. Lernende müssen Größen unterscheiden, schätzen und mit ihnen mathematisch arbeiten können.

Literatur

Blum, W., Leiss, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. In: mathematik lehren, 128, 18-21.

Emmrich, A. (2004): Die Größe Gewicht – eine spezielle Problematik oder „Man kann sich nicht jedes Gefühl für jeden einzelnen Gegenstand merken" (Jakob 4. Schuljahr). In P. Scherer & D. Bönig (Hrsg.): Mathematik für Kinder. Mathematik von Kindern. Grundschulverband. Arbeitskreis Grundschule (Band 117). Hemsbach: Beltz, 50-62.

Franke, M., Ruwisch, S. (2010): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Heidelberg, Spektrum.

Grund, K.-H. (1992): Größenvorstellungen – eine wesentliche Voraussetzung beim Anwenden von Mathematik. In: Grundschule, 12, 42-44.

Maaß, K. (2007): Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I. Berlin, Cornlesen Scriptor.

Peter-Koop, A. (2001): Authentische Zugänge zum Umgang mit Größen. In: Die Grundschulzeitschrift, 14, 6-11.

Thompson, T., Preston, R. V. (2004): Measurement in the Middle Grades. Insights from NAEP and TIMSS. In: Mathematics teaching in the Middle School, 9, 514-519.

Heike HAHN, Erfurt, Stefanie JANOTT, Erfurt

„Wie bearbeiten Grundschüler Problemaufgaben? – Präsentation verschiedener Bearbeitungsweisen-“

Problemlösefähigkeiten bzw. heuristisches Arbeiten auch schon bei Grundschülern zu fördern, ist nicht erst seit der Veröffentlichung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich im Jahre 2004 (KMK 2005, S. 7) eine der zentralen Aufgaben des Mathematikunterrichtes. Vielmehr war und ist das Problemlösen schon immer ein zentrales Bildungsziel im Mathematikunterricht (Winter 1997); mit den Bildungsstandards wurde der Entwicklung dieser allgemeinen mathematischen Kompetenz nochmals Nachdruck verliehen. Die Entwicklung und Förderung von Problemlösefähigkeiten stellen also ein bedeutendes Charakteristikum eines kompetenzorientierten Unterrichts dar.

Um Grundschüler an heuristisches Arbeiten heranzuführen, braucht es ein geeignetes Unterrichtskonzept und entsprechend gestaltete problemhafte Aufgaben. In Anlehnung an bereits bestehende Arbeiten (u.a. von Bruder 2003, Rasch 2001) ist ein Unterrichtskonzept entwickelt worden, in dessen Rahmen sich Schüler aus dritten und vierten Klassen regelmäßig mit problemhaltigen Aufgaben auseinandergesetzt haben.

1. Unterrichtskonzept und Aufgabenformat

Das benannte Unterrichtskonzept gliedert sich in drei Unterrichtsphasen: In Phase 1 wird den Schülern innerhalb einer kurzen Geschichte ein Problem eröffnet. Notwendige Vorkenntnisse zur Lösung des Problems werden - wenn nötig - aktiviert. Es folgt eine zweite Phase, in der die Schüler in Einzelarbeit und unter Nutzung von Materialen das Problem individuell bearbeiten. Parallel zur Problembearbeitung werden sie von der Lehrperson dazu angehalten, nicht nur die von ihnen eventuell gefundene Problemlösung, sondern auch ihr Vorgehen zu verschriftlichen. Die dazu notwendige Reflexion des eigenen Vorgehens soll dabei zu einer verstärkten Bewusstheit über den abgelaufenen Problemlöseprozess führen. Dies wiederum fundiert den produktiven Austausch in der folgenden Phase und fördert langfristig die Entwicklung metakognitiver Fähigkeiten (Hasselhorn 1994). Während der abschließenden gemeinsamen Reflexion (dritte Phase) werden die verschiedenen Lösungswege miteinander verglichen, Vorgehensweisen - wenn möglich als Lösungsstrategien (heuristische Strategien) - identifiziert und somit allen Schülern zugänglich gemacht.

Die gestellten Aufgaben greifen geometrische Inhalte auf (z.B. Topologie, Symmetrie, Flächeninhalt, Umfang); sie sind so konzipiert, dass sie sich stets materialgestützt bearbeiten lassen. Die Probleme können dadurch auf die Ebene der Anschauung transferiert werden. Zudem gibt es strukturgleiche Aufgaben, so dass Schüler die Möglichkeit haben, die in einer vorangegangenen Reflexion kennen gelernten Vorgehensweisen anderer Schüler, an einem ähnlichen Problem selbst auszuprobieren.

2. Zur Erfassung von Bearbeitungsweisen

Dritte und vierte Klassen aus verschiedenen Thüringer Grundschulen haben im Schuljahr 2010/11 an einer Studie zur Erprobung der Aufgaben teilgenommen. Die rund 230 Schüler haben durchschnittlich 12 Problemaufgaben bearbeitet. Diese Problembearbeitungen liegen nun u.a. zur Auswertung vor.

Die eben benannten Problembearbeitungen umfassen in der Regel folgende Bestandteile: Eine vom Schüler sichtbar dargestellte Problembearbeitung, eine schriftliche Dokumentation seiner Überlegungen hinsichtlich seines Vorgehens, seiner Erkenntnisse und Entdeckungen sowie eine vorläufige oder endgültige Lösung des Problems. Aus diesen Komponenten lässt sich im Nachhinein der stattgefundene Problembearbeitungsweg des Schülers weitgehend rekonstruieren. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Problemaufgaben, bei denen geometrische Flächen bzgl. ihres Inhaltes verglichen wurden.

3. Überblick über die verschiedenen Bearbeitungsweisen

Die Herangehensweisen bzgl. eines Flächeninhaltsvergleichs lassen sich drei übergeordneten Formen zuordnen: Schüler nehmen direkte oder indirekte Flächeninhaltsvergleiche vor oder wählen die arithmetische Ebene, in dem sie den Flächeninhalt der Figuren berechneten.

Auffällig ist, dass die Problembearbeitungen der Schüler oftmals nicht einer Bearbeitungsweise folgten, sondern verschiedene Varianten ausprobiert wurden. Nicht alle Ideen wurden vollständig ausgeführt; einzelne Wege der Problembearbeitung wurden auch abgebrochen.

Die übergeordneten Herangehensweisen des direkten und indirekten Flächeninhaltsvergleiches lassen sich weiter spezifizieren. Unter den Bearbeitungen der Schüler fanden sich Vorgehensweisen, bei denen Schüler …

- Flächen durch Übereinanderlegen vergleichen (direkt),
- vorgegebene Flächen zunächst verändern und dann vergleichen (direkt),

- Einheitsflächen einzeichnen und auszählen (indirekt),
- Flächen in verschiedene Einheiten/Flächen unterteilen und vergleichen (indirekt),
- Flächen auf Einheitsflächen (z.B. gerastertes Papier) übertragen (indirekt) oder
- einen funktionalen Zusammenhang zwischen Fläche und Zeit herstellen (indirekt).

4. Zusammenfassung

Auch wenn die schulischen Vorerfahrungen der Dritt- und Viertklässler zum Zeitpunkt der Aufgabenbearbeitung unterschiedlich waren, ist an den Problembearbeitungen zu erkennen, in welchen Klassen Flächen bspw. mit selbstgewählten Maßeinheiten oder gängigen Einheitsmaßen zum Vergleich eingeteilt oder ausgelegt worden sind. In diesem Fall konnten die Schüler von ihren Erfahrungen profitieren. Und obwohl das Berechnen von Flächeninhalten kein lehrplanrelevanter Inhalt ist, haben einige Schüler einen arithmetischen Zugang zur Problembearbeitung gewählt.

Am häufigsten traten Herangehensweisen zum indirekten Vergleichen von Flächen auf, vor allem dann, wenn Schüler bereits schulische Erfahrungen im Vergleichen von Flächen mit Einheitsflächen gemacht hatten. Daran wird deutlich, dass Bearbeitungsweisen von Vorwissen und Vorerfahrungen abhängig sind.

Direkte Vergleiche traten deutlich weniger häufig als indirekte auf; dieses Vorgehen führte die Schüler aber vermehrt zu richtigen Ergebnissen.

Im Allgemeinen ist zu beachten, dass die Generierung einer potenziell zielführenden Bearbeitungsweise durch die Schüler, nicht gleichzeitig eine vollständig richtige Problembearbeitung nach sich zog. Vor allem unzureichende Basalfähigkeiten, wie bspw. exaktes Schneiden oder genaues Zeichnen, mangelnde Fertigkeiten im Umgang mit Zeichengeräten oder Ungenauigkeiten im Übertragen bzw. Unterteilen von Flächen führten die Schüler häufig zu verfälschten Werten und in deren Folge zu falschen Problemlösungen.

Für das Lernen von Bearbeitungsweisen ist bedeutend, dass im Fokus der gemeinsamen Reflexionen (Phase 3) die verschiedenen Wege und Vorgehensweisen stehen.

Im Sinne der übergeordneten Anlage des Gesamtkonzeptes – bei der es vor allem um die Untersuchung der Frage: „Kann durch eine regelmäßige Bereitstellung von Problemaufgaben heuristisches Arbeiten entwickelt werden?“ geht, kann unter Betrachtung des bisher erfassten Anteils der Projektdaten konstatiert werden, dass Schüler Probierstrategien im Sinne der „Versuch-Irrtum“ Strategie anwenden. Der probierende Ansatz überwiegt (siehe u.a. Käpnick 1998, Fuchs 2006, Bardy 2007). Die Anwendung weiterer heuristischer Strategien, wie bspw. die des Nutzens von Analogien oder Mustern oder das Rückwärtsarbeiten, ist vereinzelt in den Problembearbeitungen erkennbar.

Literatur

Bardy, Peter (2007): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. München: Elsevier GmbH

Bruder, Regina (2003): Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Darmstadt Material im Rahmen des BLK-Programms "Sinus" zur "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Kiel: IPN.

Fuchs, Mandy (2006): Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Empirische Untersuchung zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile. Berlin: Lit Verlag

Hahn, Heike & Janott, Stefanie (2010): Heuristische Strategien durch geometrische Aufgaben fördern. Tagungsband GDM

Hahn, Heike & Janott, Stefanie (2011): Entwicklung der Problemlösefähigkeit - Heuristische Strategien durch geometrische Aufgaben fördern. Tagungsband GDM

Hasselhorn, Marcus (1994): Zur Erfassung von Metagedächtnisaspekten bei Grundschulkindern. In: Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie 1994, Band XXIV, Heft 1, S. 71-78

Käpnick, Friedhelm (1998): Mathematisch begabte Kinder: Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekt für das Grundschulalter. Frankfurt a. M.: Verlag Peter Lang

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich - Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand

Rasch, Renate (2001): Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker

Winter, Heinrich (1997): Mathematik als Schule der Anschauung oder: Allgemeinbildung im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Bielefeld: IDM Paper 163, S. 27 – 68

Heike HAHN, Regina Dorothea MÖLLER, Erfurt

Rechenkompetenz unter der Perspektive der Passung von verschiedenen Repräsentationen

1. Einleitung

In der Diskussion um die Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen wird der Begriff der Passung mit verschiedenen Perspektiven auf Schule und Unterricht verwendet. Die pädagogische Passung betrifft die notwendigen Unterstützungen für einen optimalen Schulerfolg für jeden Schüler, unabhängig von seiner Herkunft. Doch trotz des Credos für Chancengleichheit wird der Schulerfolg immer noch stark durch die Herkunft eines Schülers bestimmt. Die didaktische Passung betrifft die Lernangebote für die individuellen kognitiven Strukturen der einzelnen Schüler. Aus didaktischer Sicht geht es darum, Lernangebote zu unterbreiten, die im Schwierigkeitsgrad, in den geforderten Denkweisen sowie in den erforderlichen Kenntnissen und Fähigkeiten zum Schüler passen.
In Bezug auf die Inhalte im Mathematikunterricht rückt eine weitere Perspektive der Passung in den Fokus. Insbesondere mit Blick auf die schriftlichen Rechenverfahren ist die Passung zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen für die Lernerfolge der Schüler von erheblicher Bedeutung. In diesem Beitrag wird exemplarisch die Subtraktion vorgestellt; vergleichbare Überlegungen können auch zur Division angestellt werden.

2. Kontext

Im Prozess der Ausbildung der Rechenkompetenz als ein Ziel des arithmetischen Mathematikunterrichtes spielen verschiedene Rechenverfahren eine Rolle: das mündliche Rechnen (oder Kopfrechnen), das halbschriftliche Rechnen (oder gestützte Kopfrechnen) und das schriftliches Rechnen; jedes Rechenverfahren hat spezifische Ziele. Für die Subtraktion kann festgestellt werden, dass es sowohl beim halbschriftlichen als auch beim schriftlichen Rechnen verschiedene Vorgehensweisen gibt. Beim halbschriftlichen Rechnen ist es erklärtes Ziel, dass Schüler mehrere Rechenweisen kennen und auch nutzen. Beim schriftlichen Subtrahieren geht es darum, ein Verfahren zu beherrschen.
Allgemein können für die Erarbeitung einer Operation bestimmte fachdidaktische Prinzipien ausgemacht werden:
- die Operationen sollten aus Handlungen gewonnen werden (Operationen sind Abstraktionen von Handlungen)

- zu einer Operation gibt es verschiedene Handlungskontexte (Klassifikationstypen), die zur Operation führen (dynamische und statische)
- Unterstützung des Erarbeitungsprozesses durch Material
- Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen der Materialhandlung und der symbolischen Notation
- Kommentierung des Vorgehens beim Rechnen.

Halbschriftliche Subtraktion

Zur Erarbeitung der Vorgehensweisen bei der halbschriftlichen Subtraktion werden i.a. verschiedene Materialhandlungen unternommen, z.B. mit Rechengeld, Dienes-Material, an der Hundertertafel oder mit dem Hunderterrechenrahmen. Notiert man für eine konkrete Subtraktionsaufgabe, z.B. 53-27, die Rechnungen, die sich in Folge der Materialhandlungen ergeben, sind unterschiedliche Rechenstrategien möglich: Rechengeld oder Dienes-Material führen v.a. zum schrittweisen Rechnen. Beim Wegnehmen der Einer ist ein Geldwechsel bzw. ein Tausch der Zehnerstange erforderlich (wobei die Entbündelung als Grundhandlung des Stellenwertprinzips nicht notiert wird). Stellenweises Rechnen würde sich bei Aufgaben ohne Übertrag anbieten. Die Verwendung der Hundertertafel oder des Rechenrahmens führen v.a. zum schrittweisen Rechen, wobei die Richtung klar sein muss.

Es wird offensichtlich, dass Materialhandlungen zu bestimmten halbschriftlichen Rechenweisen führen. Fraglich ist, ob Schüler z.B. durch Handlungen zum Vereinfachen (über das gleichsinnige Verändern) kommen. Materialhandlungen führen in der Regel zum dynamischen Klassifikationstyp des Wegnehmens, zum Ergänzen würde eine Materialhandlung im Kontext des Ausgleichens führen, d.h. bei einer additiven Interpretation der Subtraktion. Statische Klassifikationstypen wie das Vergleichen legen eine Veranschaulichung mit Material kaum nahe, vielleicht sind sie deshalb für Schüler schwerer verständlich als andere Klassifikationstypen.

Ziel des halbschriftlichen Rechnens ist eine flexible Nutzung verschiedener Rechenweisen, je nach Aufgabentyp. Für den Unterrichtsprozess lassen sich nun verschiedene Positionen vertreten:

Verschiedene Strategien werden besprochen, es schließen sich Übungen zu deren bewusster Nutzung an. In weiteren Festigungsphasen geht es um die flexible Nutzung der verschiedenen Strategien, wobei dies leistungsstarken Schülern gelingt, während leistungsschwache meist eine Rechenweise kennen und nutzen (v.a. schrittweises Rechnen).

Grundsätzlich ergibt sich die Frage, ob die didaktische Position des handlungsorientierten und anschauungsgebundenen Vorgehens nur für ausgewählte Rechenstrategien gilt bzw. inwiefern die Materialhandlung mit der notierten Rechnung übereinstimmt.

Schriftliche Subtraktion

Auch für das schriftliche Verfahren der Subtraktion gibt es verschiedene Möglichkeiten des Vorgehens. Anhand beispielhafter Aufgabenkontexte wird deutlich, dass Rechenrichtungen eine Folge der Situation sind:

Aufgabe 1: Alex hat ein Sparbuch, auf das er sein Geburtstagsgeld immer eingezahlt hat. Er hat nun schon 417.- € gespart. Nun erfüllt er sich einen lange gehegten Wunsch und kauft sich ein Mountainbike für 249.- €. Wie viel Geld hat Alex nun noch auf seinem Sparbuch?

Aufgabe 2: Hannes hat ein Sparbuch, auf das er sein Geburtstagsgeld immer einzahlt. Er hatte bis jetzt schon 249.- € gespart. Auch das Geburtstagsgeld seines letzten Geburtstages zahlt er wieder ein. Nun ist auf dem Sparbuch die stolze Summe von 417.- € zu lesen. Wie viel Euro hat Hannes zu seinem letzten Geburtstag bekommen?

Die erste Aufgabe führt zum Abziehverfahren, die zweite zum Ergänzen. Aus fachlicher Perspektive ist die Passung zwischen Sachkontext und Rechenverfahren für die unterrichtliche Erarbeitung wichtig.

3. Theoretischer Bezug

In diesem Zusammenhang ist die Frage nach dem Verstehen des Rechenvorganges von Bedeutung. Zu den bekannten Merkmalen des Verstanden habens zählen die aktive, um Verständnis bemühte Person, wobei der Vorgang des Verstehens als Wechselwirkung zwischen einem zu verstehenden Sachverhalt und der Person zu begreifen ist (Aebli 1980, S. 182). Weiter erfordert Verstehen ein Anknüpfen an Vorwissen, um den zu verstehenden Sachverhalt in ein System vorhandener Bedeutungen bzw. subjektiven Wissens (Handlungs-, Begriffs- oder Prozesswissen) einzuordnen. Verstehensprozesse sind von den aufnehmenden Wissensstrukturen der Person abhängig, d.h. die „prinzipielle Vorwissenbezogenheit" ist zentral für das Verstehen (Reusser & Reusser-Weyeneth 1994, S. 17). Weiter ist Verstehen ein Prozess der Repräsentationsfindung, denn eine Erkenntnisgewinnung gleicht einem Prozess, dessen Kern im Finden oder Überwechseln zu einer geeigneten Repräsentation besteht. Das bedeutet, dass für den zu verstehenden Sachverhalt oder die Gegebenheit eine geeignete „wahrnehmungsfreundliche" Darstellung, eine kognitive Repräsentation gefunden werden muss, die es einer Person ermöglicht, den Sachverhalt oder die Gegebenheit im Kontext bekannter Wissensstrukturen zu erschließen (Reusser & Reusser-Weyeneth 1994, S. 21).

Karmiloff-Smith modelliert das Verstehen als Erwerb von Kompetenzen in einer Unterscheidung von Verstehen und Automatisierung. Verstehen und Automatisierung konstituieren einen Verstehensprozess. Nach dieser Theorie wird Verstehen durch Automatisierung und Verstehen erworben: Verstehen wird durch eine Folge repräsentationaler Umstrukturierungen von Modulen oder Prozeduren in explizit verfügbare Prinzipien gedeutet. Repräsentationale Umstrukturierungen sind inhaltsbezogene Fähigkeiten. Bezogen auf die Behandlung von Rechenweisen ist es das Ziel, ein grundsätzliches Verständnis für die Abfolge und Logik der Rechenschritte im Kontext des Wissens über unser Zahlensystem und die Rechenoperationen bei den Lernenden zu sichern.

Für das Verstehen spielen dabei die verschiedenen Repräsentationsebenen und ihre Beziehungen zueinander eine wichtige Rolle für die Ausprägung von Verständnis. Verstehen lässt sich also mit inhaltsgebundenen (im Unterschied zu Piaget) repräsentationalen Umstrukturierungen erklären. Damit die Umstrukturierungen „störungsfrei" erfolgen können, ist es für den Lehrer wichtig, auf eine Passung zwischen verschiedenen Elementen der Lernprozesses zu achten: Aufgabe und Materialhandlung, Materialhandlung und Veranschaulichung, Veranschaulichung bzw. Materialhandlung und Kommentar (Sprache) sowie die Notation mittels mathematischer Symbolik.

Es wird auch deutlich, dass Verstehen und Sprache in einem engen Wechselverhältnis stehen. Aufgabe des Unterrichts ist es, entsprechende Prozesse anzuregen, indem auf die inhaltliche Passung der Ebenen geachtet wird.

4. Schlussfolgerungen für den Unterricht

Aus den bisherigen Ausführungen lassen sich einige Empfehlungen für die Unterrichtsgestaltung ableiten. Da die Konstruktion interner Vorstellungsbilder ein individueller Vorgang ist, ergibt sich unter didaktisch-methodischer Perspektive die Notwendigkeit zu prüfen, in welchem Ausmaß in der Erarbeitungsphase der halbschriftlichen bzw. schriftlichen Rechenverfahren Aktivitäten zum Wechsel der Repräsentationsebenen nötig sind. Weiter wird ein Verständnis für die Schritte beim Rechnen unterstützt, wenn praktisch erfahrene Handlungen und wahrgenommene Veranschaulichungsformen in ihrer Beziehungshaltigkeit und Adäquatheit zur symbolischen Notation und sprachlichen Begleitung beachtet werden. Es geht um deren Passung. Schließlich sind Verständnis und Fertigkeit nicht identisch. Die Sicherung von Verständnis ist für die Phase der Erarbeitung nötig, wird jedoch kaum zur Automatisierung führen. Für die Erreichung dieses Ziels Übungsprozesse unverzichtbar.

Literatur

Aebli, H. (1980): Denken. Das Ordnen des Tuns. Bd. I: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. Stuttgart: Klett

Karmiloff-Smith, A. (1992): Beyond modularity: a development perspective on cognitive science. Cambridge u.a.: MIT Press

Reusser, K. & Reusser-Weyeneth, M. (Hrsg.) (1994): Verstehen. Psychologischer Prozess und didaktische Aufgabe. Bern u.a.: Verlag Hans Huber

Tanja HAMANN, Hildesheim

„Macht Mengenlehre krank?“ – Die Neue Mathematik am Beispiel des Schulbuchs von Neunzig / Sorger

New Math – im Deutschen *Neue* oder *Moderne Mathematik* – bezeichnet eine zunächst inhaltliche Reform des Mathematikunterrichts, im Zuge derer die Begriffe Menge und Struktur zum Leitfaden des Mathematikunterrichts in den USA und weiten Teilen Europas erhoben wurden. Besonders an deutschen Grundschulen, wo die neuen Inhalte ab 1972 verbindlich eingeführt wurden, ging dies außerdem mit zahlreichen didaktischen und methodischen Neuerungen (z. B. Lernspiele und Gruppenarbeit) einher.

Die Frage, woran die Reform des Primarschulunterrichts in Deutschland, die besonders unter dem Schlagwort „Mengenlehre“ von weiten Teilen der Bevölkerung abgelehnt wurde (vgl. Der Spiegel (1974)), gescheitert ist, führt auf eine Kombination verschiedener Ursachen. Es lassen sich dabei drei übergeordnete Problembereiche[1] identifizieren, die jeweils mit einer Gruppe an den Ereignissen Beteiligter in besonderem Zusammenhang stehen. Zunächst sind hier inhaltliche Probleme zu nennen, also all jene, die sich aus der didaktischen Aufbereitung und Vermittlung der konkreten Inhalte ergeben; Betroffene dahingehender Schwierigkeiten waren vorwiegend Schülerinnen und Schüler. Weiterhin zeichnet sich der Bereich der organisatorischen Probleme ab, der für die Umsetzung der Reform ungünstige äußere Bedingungen (Klassengröße, Verfügbarkeit von Unterrichtsmaterialien, Ausbildung der Lehrkräfte) umfasst und damit besonders die Lehrerinnen und Lehrer betrifft. Erhebliches Gewicht bei der Rücknahme der Reform kommt auch den gesellschaftlichen bzw. politischen Problemen zu. Es ist davon auszugehen, dass die öffentlichen Proteste – deren Ursachen z. T. als unabhängig von den konkreten Inhalten der Reform gesehen werden müssen (vgl. Hamann (2011), S. 349 f.) – letztlich zur Neugestaltung der Lehrpläne durch politische Institutionen geführt haben; hier waren vor allem die Eltern schulpflichtiger Kinder beteiligt.

Um die Frage nach den Gründen für das Scheitern der Reform differenzierter beantworten zu können, gilt es nun, die Problemebenen gegeneinander abzuwägen. Dieses Ziel wird im Folgenden exemplarisch an der für alle Problembereiche wie beteiligten Gruppierungen relevanten Quellenform Schulbuch verfolgt. Speziell werden an dieser Stelle die beiden unterschiedlichen Auflagen des Lehrwerks *Wir lernen Mathematik I* von Walter

[1] Als „Problem“ sollen hier alle von Beteiligten formulierten (mögliche) Einwände verstanden werden; die Problembereiche sind natürlich nicht trennscharf zueinander.

Neunzig und Peter Sorger – die erste Auflage von 1968, die zweite, veränderte von 1971 – im Hinblick darauf, welche der Problembereiche in den mit der Neubearbeitung vorgenommenen Änderungen nachgewiesen werden können, verglichen und beispielhafte Ergebnisse aus dieser Untersuchung vorgestellt.

Beide Auflagen umfassen in kurzen Kapiteln die Themen Mengen (Mengen allgemein, Teilmengen, Mengenoperationen), Zahlen (dabei werden die Zahlen 1-10 als Eigenschaft von Mengen eingeführt, die Zahlen 11-20 als Längen), Rechnen sowie die Relationen „<“ und „>“. Die neue Auflage geht noch näher auf allgemeinere Relationen ein (in Form von Pfeildiagrammen), dafür wird die Restmenge nicht mehr als eigenständige Mengenoperation behandelt, inhaltlich unterscheiden sich die beiden Ausgaben also im Wesentlichen nicht. Bezüglich des Aufbaus ist festzustellen, dass sich am Ende des Bandes der ersten Auflage ein Inhaltsverzeichnis befindet; in der zweiten Auflage wird darauf verzichtet.

Weitere Unterschiede im Aufbau werden bei der Reihenfolge der Kapitel sichtbar. Die alte Auflage (vgl. Neunzig & Sorger (c1968a)) beginnt mit dem großen Block „Mengen“ (beginnend mit Mengen allgemein, fortgeführt mit dem Begriff der Teilmenge und den Mengenoperationen sowie der Mengengleichheit), der mit einer Wiederholungsseite abgeschlossen wird. Im Anschluss folgt der Block „Zahlen 1-10“, hier werden zunächst die Zahlen eingeführt, dann das Rechnen (Addition und Subtraktion) mit diesen. Eine weitere Wiederholungsseite fasst das in dem Block Erlernte zusammen, bevor die Zahlen 11-20 als Längen und schlussendlich mit der „<“-/ „>“-Beziehung Relationen eingeführt werden. Die neue Auflage (vgl. Neunzig & Sorger (c1971a)) beginnt ebenso und behandelt die Themen aus dem Block „Mengen“ in der gleichen Reihenfolge, führt allerdings nach der Teilmenge die Zahlen 2,4,3,1 und 5 ein, nach der Schnittmenge die 6, 7, 8 und nach der Vereinigungsmenge die 9 und die 10. Hiernach folgen die Relationen „<“, „>“ und „=“. Das Rechnen wird anschließend zunächst an Mengen (in Form von Mengenoperationen) gezeigt, dann auf Zahlen übertragen, bevor auch hier die Zahlen 11-20 eingeführt werden. Der Schülerband endet mit weiteren Relationen. Die Wiederholungsseiten, in der alten Auflage ein zusätzliches Strukturelement, fallen der neuen Anordnung der Inhalte zum Opfer. Insgesamt scheint die klare Struktur der ersten Auflage durch die über den Band gestreute Einführung der Zahlen 1-10 aufgebrochen, und es muss die Frage gestellt werden, ob der – zumindest dem ersten Eindruck nach – weniger schlüssige Aufbau nicht eine Nutzung des Buches in der Praxis erschwert hat.

Der Grund für die Umstrukturierung liegt hier ganz offensichtlich in einer früheren Einführung der Zahlen. Dies mag Ausdruck einer didaktischen Problematik der früheren Auflage sein (es war ein häufiges Argument gegen die Mengenlehre, dass Kinder zu Schulbeginn bereits Zahlen kennen, diese also frühzeitig behandelt werden sollten), die mit der neuen Auflage nun weniger relevant war. Dass die zweite Auflage des Lehrwerks in Bayern genehmigt wurde, die erste aber nicht, was mit großer Wahrscheinlichkeit in genau dieser Frage begründet liegt, lässt allerdings darauf schließen, dass es sich bei dem veränderten Aufbau um das Symptom einer Problematik handelt, die dem politischen Bereich zugeordnet werden muss. Es muss also in Erwägung gezogen werden, dass hier politische Gründe zu einer negativen Veränderung im Hinblick auf Übersichtlichkeit und Nutzbarkeit des Schülerbuchs geführt haben.

Eine ähnlich veränderte Anordnung findet sich auf kleinerer Ebene in den Abschnitten zu „Mengen", hier die jeweils betrachtete Grundmenge betreffend. Die erste Auflage trennt strikt zwischen unstrukturiertem (dem Anschauungsbereich der Kinder entstammenden) und strukturiertem (*Logische Blöcke*) Lernmaterial, während sich in der zweiten Auflage Doppelseiten zu unstrukturiertem mit solchen zu strukturiertem Material abwechseln. Neunzig & Sorger beziehen sich in ihrer Lehreranleitung klar auf das Dienes'sche Prinzip der *Variation der Veranschaulichung*, wonach das Kind einen Begriff erwirbt, indem ihm „die gleiche begriffliche Struktur […] in vielerlei Gestalten beim Spiel und im Umgang mit anderen Materialien [entgegentritt]" (Neunzig & Sorger (c1968b), S. 6; dies. (c1971b), S. 6). Eine strikte Trennung der verwendeten Materialien scheint diesem Prinzip eher abträglich, so dass die geschilderte Umordnung im Zuge der Neubearbeitung als Reaktion auf eine Problematik aus dem didaktischen Bereich zu interpretieren ist. Dahingehende Schwierigkeiten sollten bei der Arbeit mit dem neuen Buch nicht mehr bestanden haben.

Andererseits nehmen die *Logischen Blöcke* in der Neuauflage insgesamt einen erhöhten Stellenwert ein und werden früher eingeführt. Hierin spiegelt sich vermutlich die Tatsache wider, dass diese in der Zwischenzeit in verschiedenen Ausgaben erschienen sind und durch weitere Materialen (Merkmalkärtchen und Spielpläne, Neunzig & Sorger (c1971b), S. 17 f.) ergänzt wurden, sodass von einem vermehrten Einsatz im Unterricht auszugehen ist. Möglicherweise findet sich hier eine Reaktion auf den Wunsch von Lehrkräften nach mehr geeignetem Unterrichtsmaterial, also nach der Lösung eines organisatorischen Problems.

Der Vergleich der Einführungen in den zum Lehrwerk gehörenden Lehreranleitungen zeigt eine weitere Schwierigkeit auf. Bezüglich der Methode

Gruppenarbeit „sollten […] die Klassen nicht mehr als 32 Kinder umfassen […]. Wird diese Zahl überschritten, so sollte die Klasse in Mathematik in zwei Abteilungen aufgeteilt werden." (Neunzig & Sorger (c1968b), S. 9) Gemäß der neueren Auflage „ist anzustreben, daß die Klassen […] nicht mehr als 36 Kinder umfassen […]. Wird diese Zahl überschritten, so ist zu überlegen, ob die Klasse in einigen Mathematikstunden nicht in zwei Abteilungen aufgeteilt werden kann." (Neunzig & Sorger (c1971b), S. 8) Die veränderte Formulierung ist offensichtlich Ausdruck ganz praktischer organisatorischer Schwierigkeiten der Lehrerschaft bei der Umsetzung der methodischen Ebene der Reform. Die Klassengröße, die die Autoren sich wünschen, entspricht schlicht nicht der Realität, eine grundsätzliche Aufteilung der Klasse im Mathematikunterricht wird als nicht durchführbar empfunden. Dass hier nicht nur die methodische, sondern auch die inhaltliche Umsetzung unter den gegebenen äußeren Bedingungen auf viel Widerstand stieß, macht der folgende Nachsatz deutlich, der sich nur in der zweiten Auflage findet: „Grundsätzlich muß jedoch betont werden, daß die Durchführung des Mathematikunterrichts in der Grundschule durch zu hohe Klassenfrequenzen nicht in Frage gestellt wird […]." (ebd.)

Bereits an diesen Beispielen wird die Vielfalt der Kritikpunkte, die maßgeblich für das Scheitern der Unterrichtsreform gewesen sein könnten, deutlich. Eine Gewichtung der Problemebenen kann an dieser Stelle selbstverständlich nicht vorgenommen werden, festzuhalten ist aber, dass alle drei im Vorfeld identifizierten Problembereiche auch beim Vergleich der beiden Auflagen sichtbar werden und dass es darüber hinaus nicht möglich ist, die Bücher eindeutig – und schon gar nicht einheitlich – zu bewerten. Vielmehr finden sich in beiden Ausgaben Aspekte, die zu Problemen bei den Beteiligten geführt haben dürften, z. T. hat dabei die Behebung der einen Problematik sogar die Entstehung neuer Schwierigkeiten bedingt.

Literatur

Hamann, Tanja (2011): „Macht Mengenlehre krank?" – Die Neue Mathematik in der Schule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM, 347-350.

Neunzig, Walter & Sorger, Peter (c1968a): Wir lernen Mathematik I : Erstes Schuljahr. (3. Aufl.). Freiburg: Herder.

Dies. (c1968b): Wir lernen Mathematik I : Erstes Schuljahr ; Lehreranleitung. Freiburg [u. a.]: Herder.

Dies. (c1971a): Wir lernen Mathematik I : Erstes Schuljahr ; mit Hinweisen für Lehrer und Eltern. (8. Aufl.). Freiburg: Herder.

Dies. (c1971b): Wir lernen Mathematik I : Erstes Schuljahr ; Lehreranleitung. (8., völlig neu bearb. Aufl.). Freiburg [u. a.]: Herder.

Der Spiegel (1974), 28, 13.

Mathias HATTERMANN, Bielefeld

Individuelle Erklärungsmodelle zu Rechenoperationen mit ganzen Zahlen

Ausgehend von den natürlichen Zahlen bildet der Übergang zu den ganzen Zahlen und den Bruchzahlen den ersten bzw. zweiten Schritt der Zahlbereichserweiterungen in der Sekundarstufe I. Im Unterricht der allgemeinbildenden Schulen werden überwiegend anschauliche Konzepte zur Behandlung der negativen Zahlen eingesetzt. Hierbei existiert eine Vielzahl von didaktischen Modellen und Spielen (vgl. Malle & vom Hofe 2007), deren Struktur seit längerer Zeit bekannt ist und die sich im Vergleich zu früheren Vorschlägen lediglich in ansprechenderen Aufmachungen unterscheiden. Jedoch ist kaum eines dieser Modelle geeignet, tatsächlich alle Rechenoperationen im konkreten Handlungszusammenhang zu veranschaulichen. *„The difficulty of accepting the negative numbers as meaningful mathematical entities derives from the difficulty of identifying a good intuitive, familiar model which would consistently satisfy all the algebraic properties of these numbers, says Glaeser. As a matter of fact, such a model does not exist. One may create some models, but only by using a system of artificial conventions"* (vgl. Fischbein 1987, S. 100 und Glaeser 1981).

Dieser Problematik widmet sich ein Projekt der Universität Bielefeld in Zusammenarbeit mit der Laborschule Bielefeld, über dessen theoretische Hintergründe und Konzeption im Folgenden berichtet wird.

Theoretischer Rahmen

Die Theorie der ‚Grundvorstellungen' nach vom Hofe (1995) liefert eine theoretische Basis, anhand derer die Problematik bei der Behandlung der ganzen Zahlen im Vergleich zur Bruchrechnung aufgezeigt werden kann. Grundvorstellungen sind individuelle Vorstellungen, die den Zusammenhang von realer Welt, Mathematik und Individuum herstellen und einem Entwicklungsprozess unterworfen sind. Man unterscheidet ‚primäre Grundvorstellungen', welche am konkreten Handlungskontext anbinden von ‚sekundären Grundvorstellungen', die sich bereits auf mathematische Darstellungen wie Formeln, Graphen oder bekannte Zusammenhänge stützen. Im Gegensatz zu positiven Bruchzahlen ist die Thematisierung primärer Grundvorstellungen, die einen direkten Alltagsbezug besitzen und aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler stammen, bei negativen Zahlen deutlich schwieriger und besonders im Bereich der Multiplikation nicht direkt möglich. Mag dies in ausgesuchten Fällen bei der Addition mithilfe geeigneter didaktischer Modelle noch gelingen, so ist die Deutung der Operationen $(–a)\cdot b = -a\cdot b$ und $(–a)\cdot(-b) = a\cdot b$ für natürliche Zahlen a und b nicht mehr mit primären Grundvorstellungen in Verbindung zu bringen. Solche Einsichten können auf sekundären Grundvorstellungen aufbauen, welche jedoch innermathematisch gebildet werden und nicht mehr direkt an alltägliche Erfahrungen anknüpfen. Aufgrund dieser mangelnden Alltagsnähe erweist sich die Behandlung aller Rechenoperationen an einem Modell als kaum zu überwindende Schwierigkeit, was bereits Freudenthal implizit bemerkt: „*Man muß sich klar machen, daß die Schwierigkeiten mit den negativen Zahlen nicht in ihrer Einführung liegen, auch nicht in Ausdrucksweisen wie 3-7, 7+(-3), (-7)+3, 2· (-5), sondern in 3- (-7), 10- (-7), (-3)+(-7),(-3)-(-7),(-2)·(-5). Wenn einer eine neue Didaktik der negativen Zahlen vorführt, muß man darauf achten, welche Aufgaben er behandelt und welche er unterschlägt […]*“ (Freudenthal 1973, S. 251).

Entscheidet man sich als Lehrender für die Verwendung eines didaktischen Modells oder einer Metapher (im Sinne von Lakoff & Nuñez 1997, 2001), weil damit eine bestimmte Aufgabe gut veranschaulicht werden kann, so ist eine Detailanalyse hinsichtlich der Gesamtheit der Operationen erforderlich, um die Tragfähigkeit adäquat einschätzen zu können und um der von Sfard angesprochenen Problematik zu entgehen: „*Metaphors are often like Trojan horses that enter discourses with hidden armies of unhelpful entainments*“ (Sfard, 2008, S. 35). Ausgehend von diesem Problemfeld der unterschiedlichen didaktischen Modelle und Erklärungsmetaphern bietet die nationale mathematikdidaktische Forschung wenig aktuelle Publikationen zum Thema. Auf internationaler Ebene kann jedoch an aktuelle Forschungsdesiderata angebunden werden, welche ein fruchtbares Forschungsfeld aufzeigen. Die Ergebnisse von Kilhamn (2008) legen nahe, die Suche nach dem perfekten Modell aufzugeben und nach geeigneten Kombinationen von Modellen zu suchen und deren Potential sowie deren Einschränkungen zu explizieren: *“As a contribution to the research society these results suggest that the debate should not concern which model to use and why one model is better than another but rather what are the consequences of our use of metaphors and how do we deal with these consequences”* (Kilhamn 2008, S. 10). In der gleichen Untersuchung bestätigt Kilhamn die Ergebnisse von Chiu (2001), sodass von der Tatsache ausgegangen werden kann, dass Experten bei der Erklärung von Rechenoperationen sich wesentlich seltener auf die Verwendung von Metaphern stützen als Anfänger. Weiterhin zeichnen sich in der Studie von Kilhamn (2008) die erfolgreichsten Probanden durch eine Kombination von formalen und inhaltlichen Begründungen für die Durchführung von Rechenoperationen aus. Demgegenüber erweisen sich die Ergebnisse der Probanden, die rein inhaltliche Begründungen am Modell bevorzugen als durchgehend fehlerhaft. In Anlehnung an diese und weitere Ergebnisse der internationalen Forschung sind die Konzepte des geplanten Projekts erstellt.

Projekt mit der Laborschule Bielefeld

Die Laborschule ist eine staatliche Versuchsschule des Bundeslandes Nordrhein-Westfalen, deren wissenschaftliche Einrichtung an die Universität Bielefeld angegliedert ist. In Kooperation mit der Laborschule sollen u.a. die folgenden Forschungsfragen beantwortet werden:

– Welche Kompetenzen und typischen Lernhürden zeigen sich bei individuellen Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit negativen Zahlen?

– Welche (Kombinationen) von/der didaktischen Modelle erweisen sich als besonders tragfähig zur inhaltlichen Deutung negativer Zahlen? Welche konstruktiven Hinweise können auf Materialebene zur Modifikation bzw. Neukonzeption gewonnen werden, um die Tragfähigkeit dieser Modelle bzw. Modellkombinationen zu verbessern?

Das Forschungsdesign sieht die Durchführung einer Feldstudie vor, in der den Schülerinnen und Schülern in einem normierten und zu videographierenden Unterricht über den Zeitraum von ca. 3 Wochen mehrere didaktische Modelle zur Behandlung negativer Zahlen angeboten werden. Im Anschluss sollen die Schülerinnen und Schüler einem fiktiven Mitschüler in schriftlicher Form Aufgaben erklären, wobei sie sich für ein Modell ihrer Wahl entscheiden können. Mithilfe dieser schriftlichen Schülerprodukte können quantitative Daten hinsichtlich der benutzten Modelle und qualitative Daten bezogen auf individuelle Lernhürden und Verständnisschwierigkeiten gewonnen werden. Im Anschluss sollen die aufgedeckten Problemfelder durch halbstandardisierte Interviews mit ausgewählten Lernenden detaillierter untersucht und expliziert werden. Im Anschluss können gewonnene Forschungsresultate anhand des Videomaterials an der tatsächlichen Unterrichtsdurchführung kritisch reflektiert werden. Das gesamte Vorhaben ist in die international bewährte und ursprünglich in Japan entwickelte Methode der ‚Lesson Studies‘ zur Lehrer-Praxisforschung und Lehrerprofessionalisierung eingebettet (vgl. Lewis et al. 2009; White et al. 2008 und Kullmann (im Erscheinen). Bei diesem Ansatz arbeiten Lehrer und Forschergruppen eng zusammen und durchlaufen die vier Phasen der Untersuchung des Gegenstands, der Unterrichtsplanung, Unterrichtsdurchführung und deren Reflexion immer gemeinsam, wobei der Gesamtablauf zur gleichen Unterrichtseinheit mehrmals mit weiteren Klassen durchlaufen wird. Aufgrund dieser Konzeption können gewonnene Erkenntnisse in die weiteren Abläufe integriert und angepasst werden, sodass die Bereitstellung konstruktiver Hinweise zur Behandlung der ganzen Zahlen als Ziel des Forschungsprojektes verfolgt wird.

Literatur

Chiu, M. (2001). Using metaphors to understand and solve arithmetic problems: Novices and experts working with negative numbers. Mathematical thinking and learning, 3(2-3), 93–124.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe (1.Aufl., Vol. 1). Stuttgart: Ernst Klett.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathematiques, 2(3), 303–346.

Hefendehl-Hebeker, L.(Hg.) (1989). Minuszahlen; mathematik lehren, (35).

Hofe, R. v. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Hofe, R. v., & Malle, G. (Hg.) (2007). Auf dem Weg zu neuen Zahlen. mathematik lehren, 142. Seelze: Friedrich-Verlag.

Kilhamn, C. (2008). Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning. MADIF - 6 The sixth Swedish Mathematics Education Research Seminar. Retrieved November 25, 2011, from http://www.mai.liu.se/SMDF/madif6/Kilhamn.pdf.

Kullmann, H. (im Erscheinen). Lesson Studies – eine konsequente Form unterrichtsbezogener Lehrerkooperation. In: S.G. Huber & F. Ahlgrimm (Hrsg.): Kooperation in der Schule. Münster: Waxmann.

Lakoff, G., & Nuñez, R. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a minded-based mathematics. In L. D. English (Ed.), Mathematical reasoning, analogies, metaphors and images (pp. 21–89). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2001). Where mathematics come from: How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

Lewis, C. C., Perry, R. R. & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: a theoretical model and North American case. Journal of Mathematics Teacher Education, 12(4), 285–304.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating. New York: Cambridge University Press.

White, A. L., & Lim, C. S. (2008). Lesson study in Asia Pacific classrooms: local responses to a global movement. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40(6), 915–925.

Reinhold HAUG, Freiburg, Timo LEUDERS, Freiburg

Lernstrategien für das Arbeiten mit dynamischen Werkzeugen – am Beispiel Dynamischer Geometriesysteme (DGS)

Das Lernen mit Computerunterstützung ist Gegenstand intensiver Forschungsbemühungen in der Mediendidaktik (als einen Zweig der pädagogischen Psychologie). Zugleich interessieren sich die Fachdidaktiken für das computergestützte Lernen aus ihrer jeweiligen fachspezifischen Perspektive. Forschungsstände und Theorierahmen sind hierbei vergleichsweise wenig vernetzt (eine der wenigen Ausnahmen im deutschsprachigen Raum ist Hischer, 2002). Der vorliegende Beitrag soll einige Brückenschläge zwischen Forschung zum Lernen mit computergestützten Lernumgebungen zwischen Mathematikdidaktik und Mediendidaktik andeuten. Diese Überlegungen explorieren die Situation ausgehend vom Bereich des Lernens mit Dynamischen Geometriesystemen.

1. Fachbezogene Forschung zum Lernen mit DGS

Seit über zehn Jahren wird das Lehren und Lernen mit DGS untersucht. Versucht man einen Gesamteindruck zu skizzieren, so findet man themenspezifische Fallstudien (vgl. Furinghetti & Paola, 2003; Hölzl, 1994 & 1999; Marradas & Gutierrez, 2000), Vergleichsstudien mit und ohne DGS (vgl. Gawlick, 2001), Evaluationsstudien zur Optimierung von Lernumgebungen (Laborde, 2005; Mariotti & Bussi, 1998) und Wirksamkeitsstudien zum Lernen mit Computerunterstützung (vgl. Haug, 2012). Zusammenfassen kann man die Befunde in etwa folgendermaßen: Ein hohes Maß an dynamischen Elementen im DGS bedeutet zunächst nicht eine höhere Effizienz bezüglich der Vermittlung von mathematischen Inhalten. Positive Voraussetzungen für Lernerfolg sind Vorwissen der Lernenden im Umgang mit DGS, eine Entschleunigung der Lernprozesse, klare und transparente Arbeitsziele sowie Anregung zur Dokumentation und Reflexion.

2. Bezüge zur Mediendidaktik

Die Lehr-Lernforschung zu computergestützten Lernumgebungen ist vielfältig, z.T. ist das computerbasierte Lernen Gegenstand, z.T. haben computergestützte Lernszenarien forschungsmethodische Gründe. Unter den vielen Forschungsbereichen seien nur genannt: Das Arbeiten in kollaborativen Lernumgebungen (Scardamaglia & Bereiter, 1994), das Lernen mit Hypertext und Hypermedia (Issing & Klimsa, 2002), das Lernen in Medienverbünden, also z.B. mit Text-Bild-Kombinationen (Mayer, 1999; Schnotz, W., & Bannert, 2003), intelligente tutorielle Systeme (Ritter et al, 2007) oder gar hochintegrierte „Powerful Learning Environments (DeCorte et al, 2003), die u.a. metakognitive Lernwerkzeuge anbieten. Zur Vereinfachung der Analyse fokussieren wir zunächst das individuelle Lernen ohne adaptive Elemente und orientieren uns an einer Typologie der Medien(verbünde), die den Grad der Interaktion widerspiegeln (Plötzner, Leuders & Wichert, 2009): (1) Texte, (2) Text-Bild-Kombinationen, (3) Animationen, (4) Simulationen, (5) Modellierungsumgebungen. Nachfolgend wird angedeutet, wie sich DGS-Forschung hier (ab Ebene (3)) einordnen kann (vgl. auch Haug & Leuders, 2009).

Das DGS als Animation

In der Mediendidaktik wird der Vorteil des Lernens mit Animationen vor allem beim Verständnis von Prozessen mit kontinuierlichen Veränderungen gesehen (Bétrancourt, 2005). Die Befunde hierzu sind tendenziell positiv aber nicht einheitlich (Höffler & Leutner, 2007). Dynamische Geometriesysteme erlauben eine solche kontinuierliche Darstellung von Prozessen und können - so die Sicht der Mathematikdidaktik - das „funktionalen Denken“ fördern (vgl. Klein & Schimmack, 1905). Entsprechende Lernumgebungen, bei denen das DGS als Animation eingesetzt wird (z.B. Miller & Ulm, 2006) wurden bislang allerdings weder mit explizitem Bezug zu mediendidaktischen Befunden konstruiert, noch fachspezifisch untersucht. Hier böten sich Gelegenheiten zur Verwendung von Erkenntnissen zur Mediengestaltung (principled design, z.B. Clark & Mayer, 2008). Neu ist der Ansatz von Kombartzky el at. (2009), die die Möglichkeit der Förderung von Strategien beim Lernen mit Animationen untersuchen (v.a. durch eine fokussierte Verarbeitung einzelner Einzelbilder aus einer Animation).

Das DGS als Simulation

Offener als Animationen sind Simulationen, die sich in der Mediendidaktik durch ein komplexes Wirkungsgefüge von Variablen, eine hohe Interaktivität und einen modellierenden Bezug zu realen Systemen (vgl. De Jong & van Joolingen, 1998) auszeichnen. In der Mathematikdidaktik findet man solche Lernumgebungen beispielsweise im Rahmen so genannter „black-boxes“ (Knipping & Reid, 2005; Haug, 2010). Hier müssen Lernende Zusammenhänge zwischen verschiedenen unabhängigen (manipulierbaren) und abhängigen (zu beobachtenden) Variablen untersuchen und zu Vermutungen bzw. neuen Konzepten gelangen. Der Unterschied zwischen Animationen und Simulationen liegt – mathematisch ausgedrückt - also gewissermaßen in der Dimensionalität des zu erkundenden Parameterraumes. Der modellierende Charakter ist speziell beim DGS weniger ausgeprägt. Man kann sich auf den ontologischen Standpunkt stellen, dass die im DGS konstruierten Objekte in einer platonischen Realität existieren, für die Epistemologie der kognitiven Prozesse im Umgang mit DGS spielt das allerdings keine Rolle. Für eine engere Verbindung zwischen Lehr-Lernforschung und mathematikdidaktischer Forschung könnte sich eine Untersuchung der selbstregulativen Prozesse als bedeutsam erweisen (Wirth & Leutner, 2006), oder auch eine Untersuchung der Förderung von Strategien, z.B. der Variablenkontrollstrategie (Klahr & Dunbar, 1988).

Das DGS als (dynamisches)Werkzeug

Die Möglichkeiten eines DGS gehen typischerweise über die Exploration von Animationen und Simulationen hinaus: Lernende können die Situation, die sie explorieren, mithilfe unterschiedlicher Werkzeuge selbst erstellen. Das DGS ist gewissermaßen ein Werkzeug zur Konstruktion von Simulationen. Diese wohl anspruchsvollste Ebene in der Arbeit mit DGS bedarf auf Seiten der Lernenden eine Vielzahl von Strategien und es verwundert nicht, dass die mathematikdidaktischen Befunde zur Effektivität dieser Lernformen am wenigsten überzeugen. An dieser Stelle soll die Diskussion wiederum auf die Frage eingeengt werden, *welche* Strategien Lernenden hier helfen können.

Grundsätzlich benötigt werden Lernstrategien (Friedrich, 2000): Kognitive Strategien (Memorieren / Selektion / Elaboration / Transformation), Metakognitive Strategien (Planung / Überwachung / Regulation) und Stützstrategien (Motivation / Selbstmanagement). Sofern die Aufgabenstellung Problemlösecharakter besitzt, treten fachspezifische Problemlösestrategien (à la Polya) hinzu. Diese lassen sich z.T. auch als Beweisstrategien (z.B. Hilfslinien) verwenden und werden benötigt, wenn das DGS als Beweisfindungswerkzeug eingesetzt wird. Gerade für Lernende, die das DGS erstmals als offenes Werkzeug einsetzen, liegt es näher, zunächst einmal Erkundungsstrategien, also Strategien zum Auffinden und Prüfen von Zusammenhängen zu fördern. Nachfolgend soll dargestellt werden, wie diese Überlegungen zu einem konkreten Ansatz zur Förderung von Strategien mit dem DGS als dynamisches Werkzeug gefördert werden können.

3. Ein Modell der Strategieförderung

Wenn bei Lernenden Erkundungsstrategien wie z.B. das Verwenden von Hilfslinien, das Entdecken von Invarianten oder das Aufstellen von Vermutungen gefördert werden sollen, so kann dies durch eine direkte oder indirekte Förderung geschehen. Bei einer direkten Förderung üben Lernende zum Beispiel das „Entdecken von Invarianten“ mit Hilfe eines speziellen Trainingsprogramms. Dieses Training - so die Annahme - bietet die Voraussetzung, dass die Lernenden zu einem späteren Zeitpunkt beim Arbeiten mit einem DGS in der Lage sind, ihre erlernten Strategien wieder abzurufen. Bei einer indirekten Förderung werden Erkundungsstrategien im Arbeitsprozess z.B. durch Prompts angeregt. Ein solches Strategietraining wurde zur DGS-gestützten Erarbeitung des Themas „Spiegelsymmetrie" entwickelt.

In einer empirischen Interventionsstudie in der Hauptschule wurde ein Kontrollgruppendesign mit n=120 Schülerinnen und Schülern eingesetzt und in einem Pre-Post-Follow-up-Design die Entwicklung von Erkundungsstrategien (Invarianten erkennen / Hilfslinien verwenden / Vermutungen aufstellen) untersucht. Die Interventionsgruppe bearbeitete vorstrukturierte Leitfragen (z.B. „Ziehe an Punkt A und beobachte was passiert" / „Beschreibe mindestens drei Fälle, bei denen etwas Besonderes passiert") sowie Satzanfänge als Hilfestellung zur Dokumentation ihrer Lernprozesse innerhalb schriftlicher Lernprotokolle (vgl. Scaffolding- und Fadingprozesse, vgl. Rosenshine, Meister & Chapman, 1996). Die Lernenden arbeiteten dabei in Lernteams um Argumentations-, Diskussions- und Kooperationsprozesse anzustoßen.

Die Ergebnisse zwischen den einzelnen Messzeitpunkten zeigten bei allen drei Erkundungsstrategien einen signifikanten Haupteffekt. So konnten in fast allen getesteten Bereichen signifikante Lernzuwächse hinsichtlich der Erkundungsstrategien festgestellt werden. Bemerkenswert ist auch, dass diese Lernzuwächse nach sechs Monaten im Follow-up-Test bestehen blieben (Haug & Leuders, 2009; Haug, 2012). Die Studie konnte aufzeigen, dass die Förderung von Erkundungsstrategien ein wirksames Modell für das Lernen mit offenen Werkzeugen wie dem DGS darstellt. Beachtenswert ist hier, dass sich solche Effekte auch in Hauptschulklassen entfalten. Offensichtlich profitieren auch Lernende, die in der Regel Defizite bei der metakognitiven Steuerung von Lernprozessen haben, von einer solchen indirekten Förderung, die zudem den Vorteil hat, dass sie in die reguläre Erarbeitung von curricularen Inhalten eingebunden ist. Künftige Studien sollten weiteren Aufschluss geben, welche Varianten der Förderung (z.B. Einbeziehen auch der technischen Bedienung, komplexere Strategien usw.) ein erfolgreiches Lernen mit DGS ermöglichen.

Anmerkungen

Die empirische Arbeit, über die abschließend berichtet wird, fand im Rahmen des Forschungs- und Nachwuchskollegs „Lernen in digitalen Medienverbünden" statt.

Literatur

Literatur zum Beitrag in der Langfassung Haug & Leuders (2012) unter http://home.ph-freiburg.de/leudersfr/publikationen.htm

Gottfried HEERBECK, Lüneburg

Üben im Mathematikunterricht - "Lange Aufgaben" in den Klassen 5 bis 7

Vorbemerkung: http://www.heerbeck.de/uebenimmathunterricht.html: Auf dieser Seite sind alle Unterrichtsbeispiele dieses Beitrags als Link online zur Verfügung gestellt. Zusätzlich sind diese Unterrichtsvorschläge im dortigen Text an der entsprechenden Textstelle als Link direkt zu finden.

In langer Schulpraxis hat sich bei mir ein Unterrichtsweg entwickelt, Mathematik mit „langen Aufgaben" zu unterrichten. Mathematische Begriffe und Verfahren müssen im Unterricht eingeführt und geübt werden. Am Ende des Lernprozesses soll eine messbare und möglichst gute Schülerleistung stehen, erkennbar in einem Test oder in einer Klassenarbeit. Diesem Ziel kann man sich durch „Üben mit langen Aufgaben" nähern, und diesen Gedanken möchte ich Ihnen hier vorstellen.

Schon das Aussprechen des Wortes „Üben" führt schnell zu Unwilligkeitsreaktionen der Schüler und zu abfälligen Lehrerkommentaren. Die Aufgaben des Mathematikbuches werden (meist zu Recht) als langweilig empfunden, ausgeteilte Übungsblätter „motivieren" durch Comics oder angeblich spaßige Texte. Wird der Computer eingesetzt, sind Animationen unabdingbar. Bei beidem wird der Denkhorizont der Erwachsenen projiziert in die Gedankenwelt der Schüler und als motivierendes Beiwerk hinzugefügt. Motivation der Schüler wird nicht erreicht.

Das „Üben mit langen Aufgaben" passt nicht in das zurzeit propagierte Konzept „Methodentraining", das inhaltsunabhängig als Selbstzweck forciert wird. „Kugellager", „Schreibkonferenz", „Stationenlernen" u. a. als Unterrichtsinhalt finden Beifall. Kritische Rückfragen werden übergangen und führen zu Absonderungsreaktionen unter den Lehrern bzw. zur Schulhierarchie. Dabei eröffnen Internet und Computer als zeitgerechte Unterrichtsmittel durchaus auch solide Möglichkeiten zum Üben.

Das hier vorgestellte „Üben mit langen Aufgaben" bezieht sich direkt auf Inhalte des Lehrplans; es kann u.v.a. bedeuten: Ein inhaltliches Umfeld herstellen (1) – Lange Aufgabenreihen (2) – Ganzsachen als Aufgabenstellung (3) – Fleißkontrollen (4). Diese vier für mich wichtigsten Aspekte werde ich im Folgenden beispielhaft vorstellen. Alle Vorschläge enthalten arbeitstechnisch einen Aufforderungscharakter und einen „moralischen Zwang" zum Arbeiten und Weiterarbeiten; sie erzeugen „Verbindlichkeit": Aufhören geht nicht, wenn man erst einmal angefangen hat! Der Augenschein in meiner Klasse kann das bestätigen. Eine Erklärung dafür könnte in den möglichen Wirkungen des „Übens mit langen Aufgaben“ liegen, von denen ich folgende nennen möchte: Die Schüler können sich

in Ruhe – konzentriert – langsam in die Aufgabenstellung hineinwachsend – mit leichten/ schweren/ nichtlösbaren Aufgaben in unregelmäßiger Reihenfolge – über Zeiträume kontrolliert – mathematische Begriffsbildungen entwickelnd – abwechslungsreich - mit Freude

mit dem jeweiligen Thema intensiv lernend auseinandersetzen. Im Unterrichtsgespräch bei der immer notwendigen Auswertung kann dann die pädagogische Rolle des Lehrers zum Tragen kommen: *als Lobender/ Verbessernder/ Nachfragender/ Unterrichtsdynamik Anstoßender/ Werte Setzender/ Vorbild.* Auch die mündliche Leistung der Schüler kann in diesen Klassengesprächen beurteilt werden – dieser Leistungsbereich ist bei Tests gar nicht und bei den „Methoden“ höchstens wenig erfassbar.

Die im Folgenden vorgestellten Übungsblätter werden den Schülern als Papier gegeben - mit dem zusätzlichen Angebot, die Blätter aus dem Internet herunter zu laden, neu auszudrucken und die ggf. enthaltenen Links zum Üben zu nutzen.

1. Inhaltliches Umfeld herstellen

Beispiel 1.1: „Runden natürlicher Zahlen“ (Einwohnerzahlen der Stadt Lüneburg; dieses Arbeitsblatt finden Sie hier: Einwohner Lüneburg)

Beispiel 1.2: Rechteckflächenberechnung; hier kann man üben und inhaltlich anbinden an die Flächen verschiedener Sportspielplätze bzw. die Flächen verschiedener berühmter Plätze der Welt.

Weitere Beispiele für mögliches Anbinden an ein inhaltliches Umfeld sind: Hausbauplanung, Monatsbudget einer Familie (Addition und Subtraktion); Römische Zahlen an öffentlichen Gebäuden und Kirchen; Flugzeiten und Geldtausch im Urlaub (Schlussrechnung); Schattenwürfe von Obelisken und Hochhäusern der Welt in Screenshots aus Googleearth bzw. Fotos, Hebekran für Großbauten (Pythagoras) u.v.a. (mit weiterführenden Fragen)

2. „Lange Aufgabenreihen“

Beispiel 2.1: Übungsblatt zum Quadratzahl-Lernen, darin direkt: Powerpoint-Präsentation – direkt weiter zu: Youtube-Kontrolle (mit der zusätzlichen Übungsmöglichkeit am Schluss: Basis finden). Hier habe ich meinen Schülern mit erstaunlich geringem Aufwand eine erstaunlich erfolgreiche Übungsmöglichkeit eröffnet. (Überflüssiger Hinweis: Keine Animationen, ausschließlich Sachmotivation und evtl. zusätzlich technische Motivation) Nach einer ersten Kontrolle kann der Schüler hier in langen (senkrechten)

Aufgabenreihen mit einfachen Mitteln *allein* üben, *selbstständig* kontrollieren und seine Lernfortschritte selbst feststellen. Es ist vorbereitet, durch wiederholtes Umknicken des Blattes die bereits verglichenen Aufgaben nochmals zu lösen – die Schüler können bei einer so gestalteten Struktur des Arbeitsblattes die Anzahl der Übungsdurchgänge eigenverantwortlich festlegen, sowohl durch Weglassen, aber auch durch zusätzliches Lernen durch Überdecken bereits gelöster Aufgabenspalten. (Internet vorhanden!)

Beispiel 2.2: Bruchsack EINHALB: Auch für die Schüler erkennbar ist dieses Blatt trotz mehrerer Fragestellungen eine(!) lange Aufgabe: Bei abwechslungsreichem Arbeiten werden schrittweise verschiedene Aspekte des Bruchbegriffs bearbeitet, „lang" in der Bedeutung von Aufgabenzahl und zusätzlich Begriffsweite.

Weitere Beispiele für lange Aufgabenreihen: Brüche auf dem Zahlenstrahl; Langes Dividieren; ggT/kgV; Teilbarkeit von 20 aufeinanderfolgenden Zahlen in einer Tabelle: Speziell hier kann man als gewollten Nebeneffekt das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten in einer solchen Aufgabenreihe erreichen. Als Nebeneffekt ist immer dabei: Kopfrechnen trainieren!

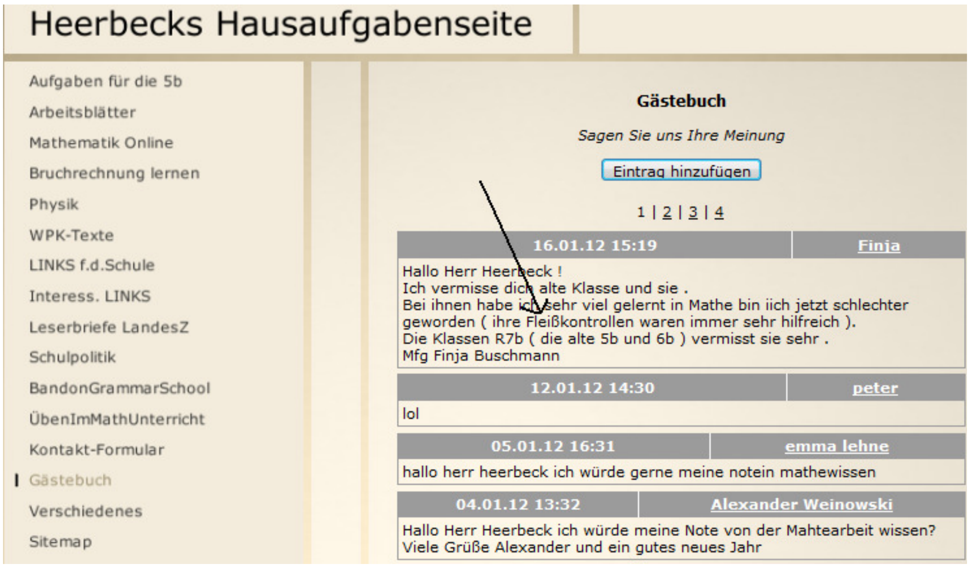
3. Ganzsachen als Aufgabenstellung (ein inhaltliches Umfeld klären)

Beispiel 3.1: Autokauf (Rechnen mit Dezimalzahlen): An einem Werbeblatt für verschiedene Modelle einer Automarke können Kosten für die Gesamtzahl der Raten für die Autofinanzierung berechnet und verglichen werden; Nebeneffekte: Informationen bewerten, auswählen, verarbeiten.

Weitere Beispiele für Ganzsachen: IntercityFaltblatt Hamburg - München; Fahrplan für Wattfahrten (Gezeiten in Cuxhaven)

4. „Fleißkontrollen"

Die Fleißkontrolle als vierte Art des langen Übens ist nicht speziell auf den Mathematikunterricht bezogen, vielmehr ist sie auf jedes Fach übertragbar und ist ein pädagogischer Akt zur Herstellung von Verbindlichkeit im Interesse des Übens und Lernens: Vom Beginn eines Themas bis zur zu schreibenden Klassenarbeit sind die Schüler für ein Blatt „Fleißkontrolle" mit *Pflichtaufgaben* verantwortlich. Die Schüler erhalten für dieses Blatt mehrere Aufgaben, die nach der Erarbeitung im Unterricht *mit Lösungen ins Heft* und *ohne Lösung auf das Fleißkontrollblatt* eingetragen werden. Während der Arbeit sollen diese selbst eingetragenen, wochenlang bekannten und zum Üben gegebenen Kernaufgaben gekonnt und gelöst werden. Im Laufe dieser ungefähr 4 Wochen bis zur Arbeit erfolgt dann auf diesem Blatt in einer gegliederten Lehrer-Schüler-Kommunikation ein Bericht über die Vorbereitung der Arbeit, das Ergebnis der Arbeit bis zu einem Vermerk über die pünktliche Rückgabe der Arbeit mit Unterschrift der Eltern am Ende des Blattes. Ich verfolge damit das Ziel, das Üben von Kernaufgaben sicher zu stellen, die Eltern einzubinden und dadurch die Ergebnisse zu verbessern. Für Schüler und Eltern entsteht dabei die angestrebte Verbindlichkeit. (Kritische Betrachter könnten dieses Vorgehen als „Druck“ bezeichnen; im Interesse der Schüler sollte man sich jedoch dazu bekennen.) Unabhängig von diesen beiden möglichen Sichtweisen deutet die folgende Schülerrückmeldung jedoch auf die Sinnhaftigkeit dieses Weges hin:



Zusammenfassung:

Die öffentliche Meinung schwankt zwischen Aussagen über schulische Überforderung einerseits und mangelnde Leistungsbereitschaft der Schüler andererseits. Die vielen positiven Rückmeldungen von Schülern und Eltern meiner Klassen speziell zum „Üben mit langen Aufgaben“ gaben mir den Anstoß, diese Art des Arbeitens in der Schule hier vorzustellen.

Wenn man von der Sinnhaftigkeit dieses Übens und Lernens überzeugt ist, müsste eine leicht zugängliche, öffentliche Plattform zu allen Themen des Mathematikunterrichts entstehen: Gegliedert nach Schuljahr und Themenbereich; mit entsprechend gestalteten Aufgaben in etwa wie oben beschrieben; motivierend, bereichernd; ästhetisch anzusehen; im WORD-Format. Ich glaube, dass sich dieser Weg im Unterricht in meiner Klasse bewährt. Meine Erfahrungen haben mich zu der Überzeugung gebracht, dass dadurch Lernfreude bei **allen** Schülern entstehen kann und dass sich dadurch letztendlich die Mathematikleistungen verbessern können.

Literatur

Heerbeck, G.: Lern- und Übungsheft Bruchrechnung, VERLAG GESUCHT!

Heerbeck, G.: Methodik des Mathematikunterrichts in den Klassen 5-7, in Arbeit

Frank HEINRICH, Braunschweig

Fehler in eigenen Problembearbeitungsprozessen erkennen

Die Förderung der Problemlösefähigkeit gilt seit längerem als ein wichtiges Ziel von Mathematikunterricht. Zu seiner Ansteuerung werden verschiedene Maßnahmen vorgeschlagen. Unter anderem wird einem geeigneten Umgang mit Fehlern ein hoher Stellenwert eingeräumt. Ziel eines solchen Umgangs mit Fehlern besteht insbesondere darin, dass Lernende negatives Wissen (OSER u.a. 1999) im Hinblick auf das Lösen mathematischer Probleme erwerben. Darunter sei Wissen über mögliche Fehler und über mögliche lösungshemmende Verhaltensweisen beim Bearbeiten mathematischer Probleme verstanden. Mit dem Erwerb solchen Wissens ist die Erwartung verbunden, dass bestimmte Fehler oder defizitäre Verhaltensweisen zukünftig vermieden werden können. Zudem wird erwartet, dass durch den Erwerb negativen Wissens das Wissen um das Richtige verstärkt wird. Der Aufbau von negativem Wissen erfolgt u.a. über einen konstruktiven Umgang mit Fehlern (vgl. z.B. HEINZE 2010). Dazu gehört, dass Lernende den Fehler erkennen, ihn analysieren können und Möglichkeiten haben, ihn zu korrigieren (vgl. z.B. OSER u.a. 1999, PREDIGER & WITTMANN 2009). Es bedarf Lernangebote, die diese Tätigkeiten anregen und fördern. Dabei ist es möglich, dass sich Lernende sowohl mit eigenen als auch mit fremden Fehlern auseinandersetzen. Die Beschäftigung mit eigenen Fehlern kann entweder nur durch die betreffende Person selbst, also eigenständig erfolgen oder unter Beteiligung weiterer Personen wie Lehrer(in) oder Mitschüler. Im Folgenden geht es um die eigenständige Beschäftigung mit eigenen Fehlern.

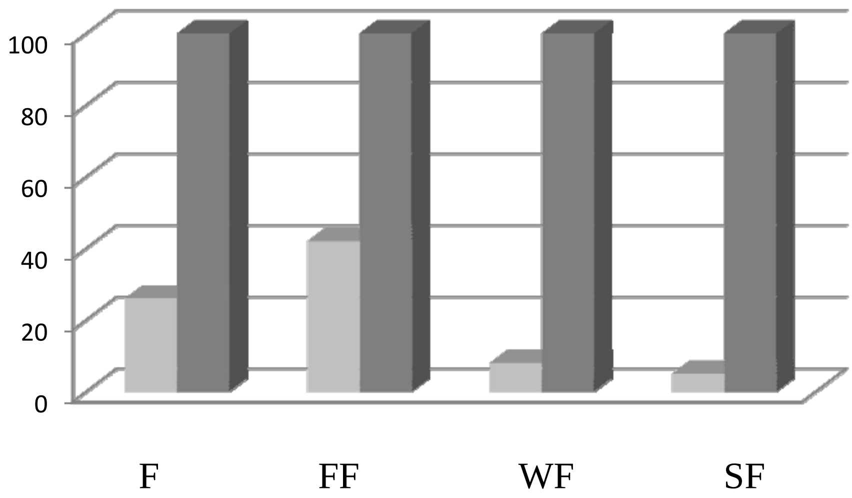
Es ist ein pädagogischer Grundsatz, dass didaktische Maßnahmen dort ansetzen sollen, wo sich Lernende in ihrer Entwicklung gerade befinden. Im Hinblick auf die Ausbildung negativen Wissens im Kontext der Förderung der Problemlösefähigkeit ist es daher wichtig zu erforschen, was Lernende im Erkennen eigener Fehler selbstständig zu leisten vermögen. Entsprechende Befunde geben Hinweise, wo und wie weitere (lehrerseitig inszenierte) Ausbildungsmaßnahmen ansetzen können und welcher Art sie sein sollten. Im Rahmen einer darauf bezogenen empirischen Erkundungsstudie wurde und wird (anknüpfend an frühere eigene Untersuchungen) folgenden Fragen nachgegangen:

1. Welche eigenen Fehler werden von Lernenden in welchem Ausmaß selbst erkannt, a) im realen Handlungsvollzug, also während der Arbeit am Problem und b) retrospektiv, also in nachträglicher Auseinandersetzung mit den Spuren des Getanen?

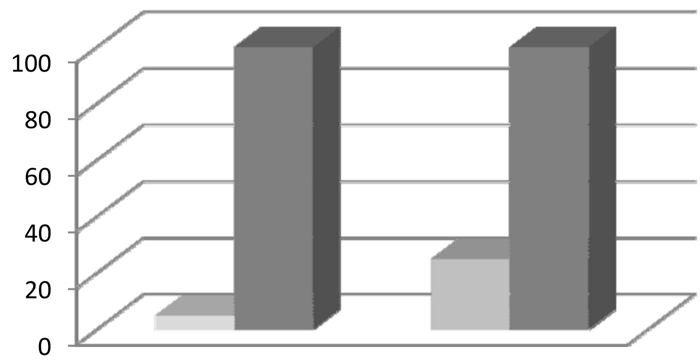
2. Welche Anregungen liefern die erhaltenen Befunde für das Lernen aus Fehlern und damit für die Ausbildung negativen Wissens im Hinblick auf die Förderung der Problemlösefähigkeit?

Als Probanden agierten Studierende für ein Lehramt Mathematik an der TU Braunschweig sowie Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 11/12 aus Gymnasien in der Region Braunschweig. Es handelte sich um explizit untrainierte Personen in puncto Heuristik und zugleich um mathematisch leistungsfähige Personen aus der jeweiligen Population. Sie hatten geometrische Beweisprobleme zu bearbeiten und waren dabei angehalten, (in einer abgeschwächten Form) laut zu denken. Der jeweilige Bearbeitungsgang wurde auf Video aufgezeichnet. Die Bearbeitungszeit für ein Problem betrug ca. 60 Minuten. Die Analyse der Rohmaterialien und Folgedokumente erfolgte in mehreren Bearbeitungsstufen in einem kleinen Expertenteam nach der Methode der konsensuellen Validierung (MAIER 1991). Das Analyseteam hat nach Fehlern (F) gefahndet und sich an einer Fehlereinteilung von GEERING (1995) orientiert. Dabei wurde zwischen Fertigkeitsfehlern (FF), Wissensfehlern (WF) und „Strategiefehlern" (SF) unterschieden. Von Fertigkeitsfehlern ist die Rede, wenn bekannte grundlegende und weitgehend automatisierte mathematische Tätigkeiten wie z.B. elementare Termumformungen nicht korrekt ausgeführt werden. Wissensfehler liegen dann vor, wenn (in der Regel bekannte) mathematische Wissenselemente nicht oder nicht korrekt eingesetzt werden. Strategiefehler meinen ungeeignete Vorgehensweisen oder logische Fehler bei der Lösungssuche. Es handelt sich dabei um defizitäre bzw. problematische Verhaltensweisen im strategischen Vorgehen, also um Vorgehensweisen, die das Finden einer Lösung be- oder verhindern. Derartige Fehler sind bezogen auf Evaluatoren im hohen Maße von deren subjektiven Annahmen abhängig.

Es wird hier ein Zwischenstandbericht gegeben, in dem 23 Problembearbeitungsprozesse (davon 5 von Studierenden und 18 von Schülerinnen und Schülern) mit 143 vom Expertenteam identifizierten Fehlern die empirische Basis bilden. In der folgenden Darstellung ist zu erkennen, dass im realen Handlungsvollzug die Probanden vor allem Fertigkeitsfehler aus eigener Kraft aufspürten, Wissens- und insbesondere Strategiefehler hingegen kaum eigenständig erkannt wurden. Die jeweils links angeordnete (hellgrau eingefärbte) Säule weist den prozentualen Anteil der erkannten Fehler(art) aus. Im Weiteren geht es um die selbst erkannten Strategiefehler. Für den eher geringen Anteil (5%) sind verschiedene Erklärungen möglich. Unter anderem kann man vermuten, dass es den Probanden während der angestrengten Arbeit am Problem kaum möglich war, ihre Aufmerksamkeit zugleich noch prüfend auf das strategische Vorgehen zu richten.



Eine Auseinandersetzung mit dem Getanen aus einer gewissen Distanz heraus könnte dazu führen, dass mehr ungeeignete strategische Vorgehensweisen identifiziert werden als während der Arbeit am Problem, da der Druck, eine Lösung zu finden, entfällt und der schon abgeschlossene Bearbeitungsprozess nunmehr mit anderen Augen gesehen werden kann. Von dieser Annahme geleitet, kam es bei der Durchführung der Studie zu folgender Maßnahme. Unmittelbar nach Beendigung der Problemlösebemühungen sieht sich der jeweilige Proband die Aufzeichnung von seiner Arbeit am Problem an und ist dabei angehalten, zu sagen, was ihm beim Betrachten durch den Kopf geht. Mit dieser Maßnahme war die Hoffnung verbunden, dass die Probanden aus eigener Kraft weitere strategische Defizite bemerken würden.



In der in der Abbildung links stehenden Säulenreihe ist nochmals der prozentuale Anteil der im realen Handlungsvollzug selbst erkannten Strategiefehler dargestellt. Der rechts stehenden Säulenreihe ist zu entnehmen, wie hoch der Anteil dieser selbst erkannten Fehler nach der retrospektiven Auseinandersetzung insgesamt ausfiel. Probanden haben erwartungsgemäß weitere strategische Defizite bemerkt, und zwar mehr als im realen Handlungsvollzug. Trotzdem fällt die Gesamtausbeute an erkannten Strategiedefiziten vor dem Hintergrund der besonderen Bedeutung eines geeigneten strategischen Vorgehens beim Bearbeiten mathematischer Probleme doch eher niedrig aus. Zudem war festzustellen, dass diejenigen defizitären Verhaltensweisen im strategischen Bereich, die vom Expertenteam als besonders beachtenswert herausgestellt wurden, von den Probanden zumeist nicht oder nur ansatzweise selbst erkannt worden sind. Darüber hinaus haben Versuchspersonen hin und wieder (angebliche) Fehler ihres Lösungsvorgehens angesprochen, die aber keine waren bzw. sind.

Sollten die vorläufigen Befunde in einem größeren Rahmen Bestätigung erfahren, kann gefolgert werden, dass eine in der beschrieben Weise angeregte retrospektive Auseinandersetzung mit dem Getanen zumindest ansatzweise Potenzial birgt, aus eigener Kraft auf strategische Defizite aufmerksam zu werden. Da aber gerade relevante Strategiefehler kaum als solche selbst erkannt worden sind, bedarf es zusätzlicher Lernangebote, die darauf gerichtet sind, Lernenden diese Strategiefehler mit ihren möglichen Auswirkungen auf den Bearbeitungsgang erleben lassen. Und natürlich muss es im Rahmen entsprechender Angebote auch darum gehen, Fehlvorstellungen über mögliche lösungshinderliche Verhaltensweisen auszuräumen. Eine Maßnahme zur Ansteuerung dieser Ziele ist eine videobasierte Expertensitzung. Dabei gibt ein Experte der bzw. dem Lernenden beim gemeinsamen Betrachten der Videoaufzeichnung Erläuterungen zum Lösungsverhalten und Ratschläge zu dessen Verbesserung. Eine solche Expertensitzung wurde (aus organisatorischen Gründen nur) mit fünf Studierenden durchgeführt und erbrachte durchweg positive Rückmeldungen seitens der Versuchspersonen. Es wurde von ihnen zum Ausdruck gebracht, dass man auf diese Weise hilfreiche Rückmeldungen erhält, u.a. zu Handlungen, die man zukünftig vermeiden sollte.

Literatur

Geering, P. (1995): Aus Fehlern lernen im Mathematikunterricht. In: E. Beck, T. Guldimann & M. Zutavern (Hrsg.): Eigenständig lernen. Kollegium 2, S. 59 – 70, St. Gallen: UVG Konstanz

Heinze, A. (2010): Muss man das Lernen aus Fehlern lernen? PPP-Dokument anlässlich eines Vortrags auf der Landesfachtagung Mathematik in Plön

Maier, H. (1991): Interpretative Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1991, S. 97 – 107. Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999): Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In: W. Althof (Hrsg.): Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern, S. 11 – 41. Opladen: Leske +Budrich

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009): Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? In: PM, Heft 27, S. 1 – 8

Johanna HEITZER, RWTH Aachen

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$?! — Ein Schauderfehler als Ausgangspunkt für strukturmathematische Entdeckungen

Umformungen wie diese kommen in den besten Kursen vor, spätestens indirekt bei verführerischen Termen wie $\sqrt{9\mathrm{x}^2 - 25\mathrm{y}^4}$ oder $\sqrt{1+f'^2(x)}$. Die Unterstellung linearen Verhaltens ist einer der hartnäckigsten Fehler der Schulmathematik. Danckwerts hat 1988 gezeigt, wie dies auf strukturelle Erkenntnisse im Eindimensionalen führen kann. Auch hier geht es um mathematische Struktur, allerdings mit Blick auf mehr Dimensionen bzw. andere mathematische Objekte. „Ja, stimmt das denn nie?“, fragte zum oben genannten Fehler noch kurz vor dem Abitur ein Schüler meines Leistungskurses in gespielter Verzweiflung. Das gab Anlass zu einem Exkurs, dessen fachlicher Kern hier stichpunktartig wiedergegeben wird.

Ausgangsfrage: Seien Δ und $\square$ zwei Zahlen oder andere mathematische Objekte. Kann die Umformung $(\Delta+\square)^2 = \Delta^2 + \square^2$ unter irgendwelchen Umständen richtig sein?

Zahlen, Binome, Nullteilerfreiheit und Pythagoras

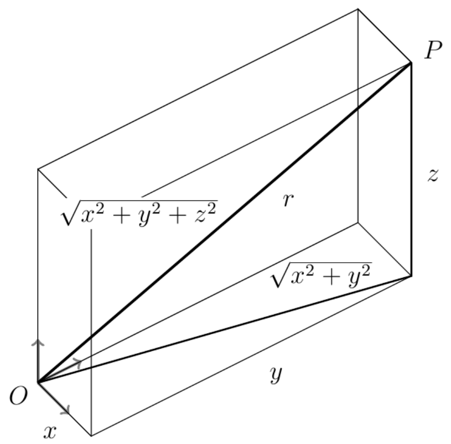
Wenn man mit $\Delta, \square$ und den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wie gewohnt rechnen darf, das heißt wenn Kommutativ- und Distributivgesetz gelten, gilt $(\Delta+\square)^2 = \Delta^2 + 2\cdot\Delta\cdot\square + \square^2$. Ergo: $(\Delta+\square)^2 = \Delta^2 + \square^2 \Leftrightarrow \Delta\cdot\square = 0$
Sind Δ und $\square$ Zahlen (aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), so gilt dies wegen der Nullteilerfreiheit nur im trivialen Fall: $(\Delta+\square)^2 = \Delta^2 + \square^2 \Leftrightarrow \Delta = 0 \vee \square = 0$
Möglicherweise erinnert die linke Gleichung vage an das $c^2 = a^2 + b^2$ im Satz des Pythagoras. Aber im rechtwinkligen Dreieck ist ja nie $c = a + b$.

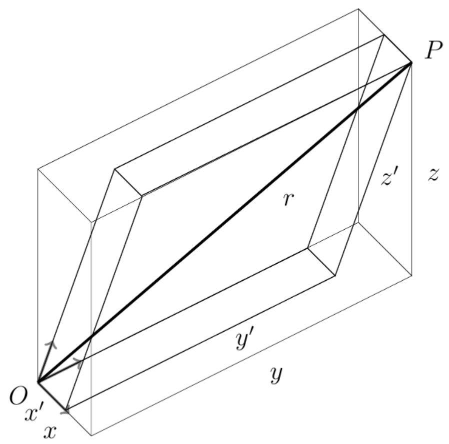
Vektoren, Skalarprodukte und mehr Pythagoras

Vektoriell betrachtet ist im Dreieck sehr wohl $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, und es gilt

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad * \quad ,$$

sofern der Malpunkt bzw. $(..)^2$ für das Skalarprodukt stehen. Dann nämlich ist $\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2 = a^2$ das Quadrat der Seitenlänge und * die vektorielle Form des Satzes von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \angle(a,b) = 90°$





Die Abbildungen zur Längenberechnung von Raumdiagonalen führen auf den Fall der vektoriellen Summe dreier Vektoren. Es gilt

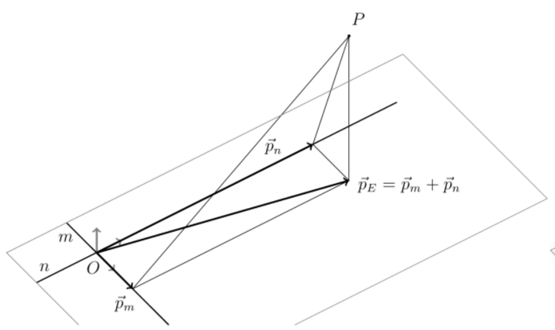
$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2 \Leftarrow \vec{a}\perp\vec{b} \wedge \vec{a}\perp\vec{c} \wedge \vec{b}\perp\vec{c} \quad ,$$

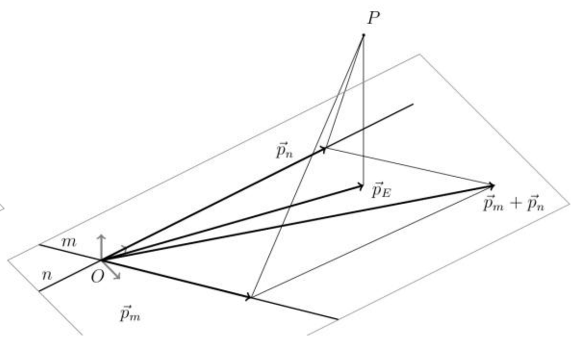
wobei diskutiert werden sollte, warum jetzt nur noch die eine Richtung gilt: Woran scheitert die Umkehrung? Wer findet ein Gegenbeispiel?

Orthogonalität: Etwas ganz Besonderes!

Der Ansatz $(\Delta+\square)^2 = \Delta^2+\square^2$ führt im Fall von Vektoren auf den Sonderfall der Orthogonalität. Tatsächlich haben Systeme paarweise orthogonaler Vektoren eine ganze Reihe außergewöhnlicher Vorteile:

- Das Längenquadrat des Ganzen kann als Summe der Längenquadrate der einzelnen Teile berechnet werden (Pythagoras).
- Lineare Unabhängigkeit des Gesamtsystems ist (anders als bei paarweiser linearer Unabhängigkeit) automatisch mit garantiert.
- Die Orthogonalprojektion auf das Ganze kann als vektorielle Summe der Orthogonalprojektionen auf eindimensionale Teile berechnet werden. Die Projektionskoeffizienten sind voneinander unabhängig.





Die letzte Aussage ist in den Abbildungen veranschaulicht. Alles zusammen bündeln wir in der Form: Orthogonalität ist „totale Unabhängigkeit“.

Orthogonalität in euklidischen Vektorräumen

Exkurs für Experten: Von Orthogonalität spricht man in allen euklidischen Vektorräumen, d.h. in Vektorräumen mit Skalarprodukt. Koppelt man an das Skalarprodukt analog zum geometrischen Raum einen Orthogonalitäts- und einen „Längen“- oder Normbegriff, so gelten auch sonst alle aus dem anschaulichen Raum bekannten Verfahren und Zusammenhänge weiter.

> Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein Skalarprodukt ist eine bilineare, symmetrische und positiv definite Abbildung von $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ nach $\mathbb{R}$. In Vektorräumen mit Skalarprodukt sind Orthogonalität und Norm wie folgt definiert:
> $$\langle \ldots, \ldots \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R} \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

Orthogonalität und „unabhängige Typen“

Für die Schule bietet sich eine erste Verallgemeinerung des Orthogonalitätsbegriffs an, wie sie in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften tatsächlich zur Klassifikation durch geordnete Zahlenlisten beschriebener Objekte benutzt wird: Beurteilt jeder der Reihe nach auf einer Skala von 0 bis 10, wie sehr er Fußball, Mode, Bier, HighTech, Gespräche und VIP-News mag, so nennt man zwei Personen orthogonal oder „total unabhängig“, wenn bei ihnen die Summe der Produkte zusammengehöriger Werte Null ist. Was heißt das? Was steckt hinter Orthogonalität, wenn man z.B. stark polarisierende Speisen oder Stars auf Skalen von –5 bis +5 beurteilt.

Matrizen: wieder anders und doch vergleichbar

Am Ende der Oberstufe kennen Lernende neben Vektoren auch Matrizen. Wie ist es damit? Kann für Matrizen die Titelgleichung gelten, auch wenn keine Nullmatrix dabei ist? Hier müssen wir in drei Fällen antworten.

<u>Fall 1 zur Klärung vorab</u>: Eine Matrix A heißt orthogonal, wenn Ihre Einträge spaltenweise zu einem Orthogonalsystem von Vektoren gehören. In diesem Fall gilt $A^{-1} = A^T$ und zugehörige Gleichungssysteme sind entsprechend einfach zu lösen. Das hat nicht unmittelbar mit unserer Frage zu tun.

<u>Fall 2 als aufschlussreiche Rechenübung</u>: Stehen Δ und $\square$ für quadratische Matrizen und der Malpunkt bzw. $(..)^2$ für die Matrizenmultiplikation, dann gilt $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + \Delta \cdot \square + \square \cdot \Delta + \square^2$. Paare von Matrizen zu suchen, für die $\Delta \cdot \square = -\square \cdot \Delta$ und damit unsere Gleichung gilt, ist eine intelligente Übung zur Matrizenmultiplikation. Allerdings ist diese beileibe kein Skalarprodukt (nicht symmetrisch und vor allem keine Abbildung nach $\mathbb{R}$).

Dritter Fall für Experten: Die Menge aller 2×2-Matrizen bildet mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation sowie dem (Hilbert-Schmidt-) Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = Spur(A \cdot B)$ einen euklidischen Vektorraum, in dem $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ eine Orthogonalbasis ist. Letztere spielt in der Bildkompression eine Rolle (z.B. Heitzer 2010).

Ereignisse und Zufallsvariablen

Offenbar hat Orthogonalität mit Unabhängigkeit zu tun. Von Unabhängigkeit hören Schüler auch bei stochastischen Ereignissen. Tatsächlich besteht ein Zusammenhang, in dessen Nähe man im Unterricht gelangt: Im Ereignisraum eines Zufallsexperimentes ist die Kovarianz von zugehörigen Zufallsvariablen ein Skalarprodukt. Mit $E(..)$ für den Erwartungswert gilt:

$$Cov(X, Y) = E\left(\left(X - E(X)\right) \cdot \left(Y - E(Y)\right)\right) \quad Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Zwei Zufallsvariablen sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn ihre Kovarianz Null ist, und $\|X\| = \sqrt{Var(X)}$ ist ein Maß für die tatsächliche Zufallsabhängigkeit von X. Der Zusammenhang mit $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + \square^2$ liegt, da die Varianz bereits so etwas wie ein Quadrat ist, in:

$$Var(X + Y) = Cov(X + Y, X + Y) = Var(X) + 2 \cdot Cov(X, Y) + Var(Y)$$

Ergo: $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) \Leftrightarrow X, Y$ stochastisch unabhängig

Kleines Fazit

Für Vektoren, Matrizen und (in gewissem Sinne) Zufallsvariablen kann die im Titel genannte Gleichung sehr wohl gelten. Sie führt dort auf den weiten Begriff der Orthogonalität und alle mit ihm verbundenen Besonderheiten. Das zeigt beispielhaft, wie Fehler als Lernchancen genutzt werden können (u.a. Leuders 2003), und wie sich der Prozess des Begriffslernens über viele Jahre erstrecken kann (Vollrath, 1987).

Literatur

Alexits, G. (1971): Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonlität. Band 92 der Mitteilungen aus dem Mathematischen Seminar in Gießen.

Danckwerts, R. (1988): Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. In: Didaktik der Mathematik, 2, 149-160.

Heitzer, J. (2010): Orthogonalität und Beste Approximation. Hochschulschriftenreihe, RWTH Aachen. (online-veröffentlicht unter http://darwin.bth.rwth-aachen.de/opus3/volltexte/ 2010/3404/, ab Herbst bei Springer)

Markus HELMERICH, Siegen

Spannungsfelder der Mathematikdidaktik in der Lehrer(innen)bildung

Ausgehend von einer Befragung von Studienanfänger(inne)n möchte ich in meinem Beitrag wichtige Spannungsfelder beim Lehren und Lernen von Mathematik aufzeigen. Die Balance in diesen Spannungsfeldern zu halten, kennzeichnet das Leitbild für den Bildungsrahmen der Lehrer(innen)-bildung. Abschließend werden Spannungsfelder und Bildungsrahmen am Beispiel der Vorbereitung einer Lehrveranstaltung inhaltlich orientierend wirksam gemacht.

Forschungsanliegen

Aus der Erfahrung universitärer Lehre und Schulpraxis heraus, dass viele Konzepte und Erkenntnisse der Mathematikdidaktik nicht so wie gewünscht in den Mathematikunterricht einfließen, werden in der Didaktik-Gruppe an der Universität Siegen in einem gemeinsamen Forschungsprojekt zur Wirksamkeit von Lehrer(innen)bildung die Gründe und Wirkprozesse dafür untersucht. Daraus resultieren Leitbild und Rahmen für ein Bildungskonzept für die Lehrer(innen)bildung, das die Einschätzungen über die Relevanz mathematikdidaktischer Konzepte aus Befragungen der Studierenden aufgreift und so Lehre und Studium verbessern und „wirksamer“ werden lassen möchte.

Spannungsfelder beim Lernen und Lehren von Mathematik

In den Einschätzungen von Studienanfänger(inne)n zu Erfahrungen mit Mathematik und ihren Erwartungen an das Mathematikstudium, die im Rahmen einer Befragung von 165 Studierenden des Lehramts für Grund-, Haupt- und Realschulen an der Universität Siegen im Oktober 2011 erhoben wurden, zeigt sich deutlich, dass Mathematiklehren und -lernen für die Studierenden geprägt ist von sich scheinbar widerstrebenden Zielen und Wesenszügen der Mathematik.

Aus diesem Stimmungsbild der Studierenden zeichnen sich interessante Überzeugungen und erfahrene Widersprüche ab. So lassen die Äußerungen der Studierenden darauf schließen, dass sie ein sehr geschlossenes Bild von Mathematik und Unterricht mitbringen. Es ist geprägt ist von „Königswegen“ und feststehenden Theorien, festen Regeln und systematischem, gleichschrittigem und reguliertem Arbeiten und Lernen. Zu inneren Spannungen führen die gleichermaßen geäußerten Wünsche nach Alltags- und Anwendungsbedeutung, Verstehensorientierung und Anschaulichkeit, Austausch über verschiedene Strategien und eigene Wege im Mathematikunterricht und grundsätzlich einer stärkeren Öffnung des Unterrichts, um auch voneinander lernen zu können.

Diese inneren Spannungen, denen sich Studierende im Studium oder Lehrer(innen) im späteren Beruf ausgesetzt sehen, wurden im weiteren Forschungsprozess des Siegener Projekts zu fünf Spannungsfeldern gebündelt, die in der Mathematikdidaktik zentral erscheinen:

- Form und Inhalt
- Strenge und Anschaulichkeit
- Offenheit und Geschlossenheit beim Lehren und Lernen
- Produkt und Prozess
- Singuläres und Reguläres

Ähnliche Zugänge findet man auch in der fachdidaktischen Literatur, wie zum Beispiel bei Krauthausen/Scherer (2007), die „zunächst unvereinbaren Gegensätze“ (ebd., S. 299). Allerdings werden dort auch viele unterrichtsmethodische Spannungen wie Schülerorientierung und Fachorientierung oder Heterogenität und selbstverantwortetes Lernen aufgeführt, die nicht fachspezifisch im Mathematikunterricht auftreten oder vor allem als Spannungen in der Praxis auftreten. Mit den Gegensätzen Anwendungs- und Strukturorientierung, Schülerorientierung und Fachorientierung, eigene Wege und Konventionen, offene und geschlossene Aufgaben werden bei Krauthausen/Scherer Spannungen identifiziert, die sich gut in die Spannungsfelder der Siegener Forschungsgruppe einpassen und auch die Erfahrungen und Ergebnisse aus der Befragung widerspiegeln.

Auch in der aktuellen Diskussion um Kompetenzen und Professionswissen von Lehrkräften und zahlreichen Studien werden immer wieder Spannungen als Belastungen für Lehrkräfte beschrieben. So benennt Helsper (1996, 2004) „konstitutive professionelle Antinomien des Lehrerhandelns“, „die sich um die Unsicherheit stellvertretender Deutung und die Simultanität von Distanz und Nähe gruppieren“ (Baumert/Kunter 2006, S. 471).

„Nimmt man die Rede von der antinomischen Struktur des Lehrerhandelns ernst, bedeutet dies, dass Lehrkräfte im Handlungsvollzug notwendigerweise Entscheidungen zu treffen haben, die den widerstreitenden Geltungsansprüchen nicht gleichzeitig entsprechen können. Erträglich und produktiv zu wenden ist diese Situation nur, wenn in einem freiwilligen Arbeitsbündnis die Ansprüche der Sache und der Person wechselseitig in der Hoffnung auf Lernen und Entwicklung ‚lebenspraktischer Autonomie‘ anerkannt werden.“ (Baumert/Kunter 2006, S. 471)

Spannungsfelder als fundamentale Ideen der Lehrerbildung

Bei der Entwicklung eines Bildungskonzepts für die Lehrer(innen)bildung kommt es darauf an, Spannungen nicht als Konflikte zu begreifen, sondern als Pole eines Handlungsstrangs, der in der aktiven Auseinandersetzung mit den Spannungen den Lehr-Lern-Prozess in Schwung hält, immer wieder neuen Antrieb gibt, zu Diskurs herausfordert und das Reflektieren anregt und stärkt. Daraus lässt sich als Leitidee für die Bildung im Lehramtsstudium ableiten, Lehrpersonen zu einer reflektierten Handlungsfähigkeit innerhalb der Spannungsfelder des Lehrens von Mathematik zu befähigen.

Diese Handlungsfähigkeit bzw. die Performanz beruht auf einem umfassenden mathematischen Repertoire und der passenden Haltung gegenüber dem Wissen und Können. Dies muss sich sowohl in der Fachmathematik und ihrer Didaktik als auch im praktischen Handeln im Mathematikunterricht bewähren, wie es der Bildungsrahmen in Helmerich (2011) zusammenfasst.

Spannungsfelder in der Lehre aktivieren

Die Spannungsfelder können als Legitimation für konkrete Inhalte und inhaltsbestimmende Wegweiser für die Planung und Strukturierung von Lehrveranstaltungen verwendet werden, um so die Leitidee der Lehrer(innen)bildung fruchtbar werden zu lassen.

Am Beispiel einer Lehrveranstaltung zur Geometrie wurden in der Siegener Forschungsgruppe die Spannungsfelder anhand möglicher Erfahrungen im Umgang mit dem Lerninhalt „Platonische Körper“ konkretisiert und anschließend zur Bestimmung von Repertoire, Haltung und angestrebter Performanz auf fachmathematischer Ebene verwendet.

In der Lehrveranstaltung soll Raum für eigene Zugänge der Studierenden zu geometrischen Körpern sein. Es soll experimentiert und entdeckt, aber auch „Sackgassen“ als Lernanlässe begriffen werden. Die weitere systematische Bearbeitung von geometrischen regulären Körpern sollen mathematische Beschreibungen der Körper gefunden werden (Spannungsfeld „Singuläres und Reguläres“ und „Offenheit und Geschlossenheit“). Die Arbeit an anschaulichen Modellen und die Frage nach der Tragweite von Anschauung gegenüber der Überzeugungskraft von „strengen“ mathematischen Argumenten (Spannungsfeld „Anschaulichkeit und Strenge“) soll ebenso erlebt werden, wie die Entdeckung von geometrischen Formen in der Welt z.B. in Kristallstrukturen und der formalen Darstellung der platonischen Körper (Spannungsfeld „Inhalt und Form“).

Um diese Erfahrungen in Spannungsfeldern zu ermöglichen, wurde in der Lehrveranstaltung darauf abgezielt, im Repertoire-Bereich die Kenntnis der fünf Platonischen Körper und ihre mathematische Beschreibungen und Eigenschaften, ihre Zusammenhänge und Dualitäten zu vermitteln. Bei der Haltung wurde Wert darauf gelegt, dass die Studieren verschiedene Sichtweisen auf die Mathematik als für sich selbst gewinnbringend erfahren. Geometrie kann einerseits als deduktiv geordnetes Teilgebiet der Mathematik begriffen werden, in dem Antworten auf die Frage nach dem Warum gefunden werden können. Andererseits kann die Geometrie aber auch helfen, Phänomene in der Welt in einer spezifischen Art wahrzunehmen und so zu neuen Einsichten zu gelangen. Auf der Performanzebene soll sich diese Haltung gegenüber dem Repertoire schließlich darin ausdrücken, dass die Studierenden mit den Platonischen Körpern sachkundig und flexibel umgehen können. Dazu wurden Übungsaufgaben entwickelt, die zur Produktion von Körpern aus regulären n-Ecken anregen, zum Finden von (anschaulichen) Begründungen für die begrenzte Anzahl von regulären Körpern auffordern und die Dualität der Platonischen Körper darstellen, erklären und praktisch nutzen lassen.

Ausblick

In der Forschungsgruppe wurden die Spannungsfelder nicht nur für die fachmathematischen, sondern auch die fachdidaktischen Aspekte wirksam gemacht. Es soll nun untersucht werden, wie sich Haltungen von Studierenden über das aufs Reflektieren ausgerichtete und Balance in Spannungsfeldern suchende Bildungskonzept ändern und aufbauen lassen.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M. (2006): Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaften, 9. Jahrg., Heft 4/2006, S. 469-520.

Helmerich, Markus (2011): Fachmathematische Aspekte eines Bildungsrahmens für die Mathematiklehrer(innen)bildung. In: Haug, R., Holzäpfel, L. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag, S. 363-366.

Helsper, W. (1996): Antinomien des Lehrerhandelns in modernisierten pädagogischen Kulturen. In: Combe, A., Helsper, W. (Hrsg.): Pädagogische Professionalität. Untersuchungen zum Typus pädagogischen Handelns. Frankfurt am Main: Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft.

Helsper, W. (2004): Antinomien, Widersprüche, Paradoxien: Lehrerarbeit - ein unmögliches Geschäft? Eine strukturtheoretisch-rekonstruktive Perspektive auf das Lehrerhandeln. In: Kolbe u.a. (Hrsg.): Grundlagenforschung und mikrodidaktische Reformansätze zur Lehrerbildung. Bad Heilbronn: Klinkhardt, 49-99.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. 3. Aufl. München: Elsevier.

Martin HENNECKE, Würzburg

LEGO® MINDSTORMS®: Eine informatische Erweiterung des mathematischen Schülerlabors

1. Einführung

An der Universität Würzburg ist seit 2009 mit dem M!ND-Center ein interdisziplinäres Didaktikzentrum im Aufbau. An ihm sind die Fachdidaktiken der Mathematik, der Informatik und der Naturwissenschaften Biologie, Chemie, Geographie und Physik beteiligt. Gemeinsamer Kern sind Lehr-Lern-Labore, in denen Schülerinnen und Schüler, Lehramtsstudierende, Referendarinnen und Referendare und Lehrerinnen und Lehrer gemeinsam von- und miteinander lernen sollen.

Das Mathematik-Labor folgt dabei den Phasen Experimentieren, Mathematisieren und Simulieren. Beim Experimentieren arbeiten die Schülerinnen und Schüler mit Realmodellen und sammeln Erfahrungen, die die Mathematisierung vorbereiten. In der zweiten Phase findet eine Mathematisierung statt. Insbesondere werden funktionale Zusammenhänge erarbeitet. Anhand von Simulation überprüfen die Schülerinnen und Schüler schließlich ihre Modellierung und finden ergänzende Einsichten. Weitere Informationen finden sich z. B. bei Appell, Roth und Weigand (2008) oder in diesem Band bei Baum (2012).

Bei einigen Aufgaben des Mathematik-Labors bietet sich die thematische Fortsetzung im Rahmen des Informatik-Labors an. Beispielsweise berechnen die Schülerinnen und Schüler im Labor „Bagger“ die Bewegungsmöglichkeiten eines Baggerarms (vgl. Roth 2010) und können aufbauend auf diesem Wissen Assistentssysteme, die z. B. die Schaufel senkrecht heben, mit LEGO® MINDSTORMS® umsetzen. Nachfolgend soll eine derartige Fortsetzung am Beispiel des Labors „Einparken“ (vgl. Roth 2008a, 2008b) dargestellt werden. Ergänzende Hinweise zur Modellierung finden sich z. B. auch bei Herrmann (2007).

2. „Einparken“ im Mathematik- und im Informatik-Labor

Die zurzeit eingesetzte Version des Mathematik-Labors „Einparken“ fokussiert darauf, dass die Schülerinnen und Schüler den Wendekreis als eine der zentralen Größen beim Einparken erkennen und für das Paralleleinparken die S-Kurve als Einparklinie entwickeln. Hierfür berechnen sie die minimale Lückengröße. Ein anschließendes Informatik-Labor kann diese Vorkenntnisse nutzen, um mit einem autonom fahrenden LEGO® Modell an möglichen Parklücken vorbeizufahren, deren Länge auszumessen und ggf. auf der im Mathematik-Labor gefundenen S-Kurve einzuparken.

Als LEGO® Modell kommt im Informatik-Labor das LEGO® Technic Modell 8081 (Extreme Cruiser) zum Einsatz. Um autonom fahren zu können wurde es mit LEGO® MINDSTORMS® Komponenten aufgerüstet. Wie beim richtigen Auto gehören hierzu Ultraschallsensoren vorn und hinten sowie ein seitlicher Entfernungssensor zur Ausmessung der Parklücke.

Eine erste wichtige Vorübung für die Schülerinnen und Schüler ist das Kennenlernen der Fahrzeugsteuerung und deren Programmierung. Im Rahmen dieser Vorübung sind insbesondere Fahrversuche zu unternehmen, mit denen der funktionale Zusammenhang der Motorumdrehungen und der zurückgelegten Strecke bestimmt wird. Das empirische Vorgehen ist hier notwendig, da die rechnerische Bestimmung anhand des Reifendurchmessers deutlich fehlerhaft wäre (Antriebsverluste).

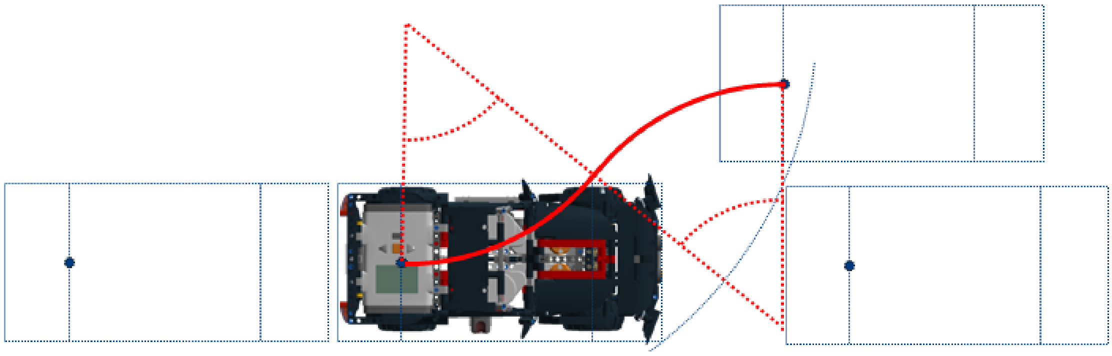
Im Rahmen der Fahrversuche lernen die Schülerinnen und Schüler auch viele der technischen Komponenten (z. B. den im LEGO® NXT Motor verbauten Drehsensor) sowie alle relevanten Sprachkonzepte kennen (z. B. wie eine Schleife zu programmieren ist, die abbricht, wenn eine bestimmte Umdrehungszahl erreicht ist). Um bei den Fahrversuchen möglichst gerade Linien zu fahren, wird das LEGO® Modell durch einen Lichtsensor entlang einer schwarzen Linie geführt und durch einen PID-Regler gesteuert. Auf den PID-Regler kann als fertiger Block zugegriffen werden.

Nun können die Schülerinnen und Schüler den Wendekreis des LEGO® Modells bestimmen. Dies kann durch Abfahren eines Halbkreises unter Umstellung bekannter Formeln vergleichsweise einfach erfolgen. Nebenbei bemerken die Schülerinnen und Schüler, dass die Antriebsverluste bei Kurvenfahren etwas größer als bei Geradeausfahren sind.

Die minimale Lückengröße für das LEGO® Modell ist mit dem mathematischen Modell bestimmbar. Fährt das Modellauto an einer möglichen Parklücke vorbei, kann es diese mit dem seitlichen Entfernungssensor erkennen und deren Länge bestimmen. Die Umrechnung der Motorumdrehungen in Zentimeter erfolgt mit der bereits empirisch bestimmten Formel.

Die Schülerinnen und Schüler werden im weiteren Verlauf bemerken, dass das im Mathematik-Labor bestimmte mathematische Modell zur Bestimmung der minimalen Lückengröße insofern zu einem guten Ergebnis führt, als dass es dem programmierten Modell in der Tat gelegentlich gelingt, erfolgreich einzuparken. Viel zu oft stößt das Modell jedoch beim Einparken vorn rechts oder hinten an. Diese Beobachtung steht nicht im Widerspruch zur mathematischen Modellierung, da im Mathematik-Labor lediglich die minimale Lückengröße berechnet wurde. Beim realen Einparken notwendige Sicherheitsabstände vorn und hinten wurden dabei nicht modelliert.

Das eigentliche Einparken erfolgt nun rückwärts entlang einer S-Kurve. Im Mathematik-Labor wird die Startposition dieser S-Kurve aus Zeitgründen lediglich zeichnerisch bestimmt. Dabei konstruieren die Schülerinnen und Schüler ausgehend von der Endposition eine S-Kurve, für deren Umlenkpunkt sie einen Winkel von rund 40° nutzen.



Um dem mathematischen Modell geeignete Werte für das Einparken mit dem LEGO® Fahrzeug entnehmen zu können, fehlen damit wichtige Informationen. Die Berechnung des Umlenkpunkts wäre, wie z. B. Roth (2008) oder Herrmann (2007) zeigen, leicht im bestehenden mathematischen Modell möglich. Abhängig vom seitlichen Sicherheitsabstand dürfte er beim eingesetzten LEGO® Fahrzeug bei ca. 50° liegen. Zudem wäre der im Modell fehlende Sicherheitsabstand vorn und hinten bei der Berechnung der optimalen Startposition zu berücksichtigen (siehe oben).

Ausgehend von den im Mathematik-Labor gemachten Beobachtungen (Winkel um 40° und Startposition beim Lückenende) lassen sich die Werte für Umlenkwinkel und Startposition jedoch auch experimentell mit geringem Aufwand nachoptimieren. Dies mag mathematisch nicht elegant sein, berücksichtigt aber zusätzlich nicht modellierte Faktoren wie Lenkungs- oder Antriebsunregelmäßigkeiten. Aus Sicht eines Informatik-Labor ist systematisches Testen sicherlich auch nicht nur verwerflich.

Nachdem das Modellfahrzeug nun auf den berechneten Bahnen autonom einparkt, bleibt aus informatischer Sicht sicherlich noch einiges Feintuning. So lässt sich der bisher nicht genutzte vordere und hintere Ultraschallsensor einsetzen um beim autonomen Fahren vor plötzlich auftretenden Hindernissen (z. B. auf die Fahrbahn laufende Personen) automatisch zu halten. Für den Fall, dass sich während der autonomen Rückwärtsfahrt irgendwelche physikalischen Probleme aufsummieren kann der rückwärtige Ultraschallsensor ein Anstoßen an der hinteren Lückenbegrenzung verhindern. Auch könnte das Fahrzeug so programmiert werden, dass es sich unter Nutzung beider Ultraschallsensoren mittig in der Parklücke positioniert.

3. Fazit und Ausblick

Das Informatik-Labor „Einparken“ ist bisher nur teilweise mit Schülern der 7. bis 9. Schuljahrgangsstufe erprobt. Diese brachten bereits Vorkenntnisse in der Programmierung von LEGO® MINDSTORMS® Roboter mit. Insofern ist es zu früh in einem ersten, vorläufigen Fazit über Erfahrungen im Einsatz des Labors zu schreiben.

Was bleibt, ist ein Fazit aufgrund der Konzeption des Labors. So sollte der Nutzen der mathematischen Modellierung für die technische Umsetzung sehr schön deutlich werden. Insbesondere müssen alle im Mathematik-Labor experimentell gewonnenen Erfahrungen zum Einparkvorgang, die bestimmten Formeln oder die im Rahmen der Konstruktion des S-Kurve gewonnen Einsichten zur Startposition bei der informatischen Umsetzung genutzt werden. Selbst dort, wo die Grenzen oder Lücken der bestehenden mathematischen Modellierung sichtbar werden, reicht das mathematische Modell aus, um experimentell zügig zu guten Lösungen zu kommen.

Auch aus informatischer Sicht stellt sich die Kombination beider Labore als sehr interessant dar. Sie ermöglicht eine Konzentration auf informatische Fragestellungen und verbessert die Realisierbarkeit eines derartigen Projekts damit essentiell. Zudem dürfte die Bedeutung einer guten Modellierung sichtbar werden. Dies ist auch aus Sicht der Informatikdidaktik sehr wünschenswert.

Es bleibt vor allem die weitere Erprobung des Informatik-Labors und die Analyse, welche weiteren Mathematik-Labore sich ggf. für eine derartige Kombination eignen würden. Um sinnvolle Gruppengrößen bedienen zu können, bedarf es sicherlich noch zwei oder drei weiterer Aufgaben. Mit dem Bagger (s.o.) bietet sich die erste dazu regelrecht an.

Literatur

Appell, K., Roth, J. & Weigand, H.-G. (2008): Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren – Konzeption eines MATHEMATIK-Labors. In E. Vásárhelyi (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2008, 25-28.

Baum, S. (2012): Das Mathematik-Labor und seine Verzahnung mit dem Schulunterricht. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.

Herrmann (2007): Mathematik ist überall. 3. Auflage, München: Oldenbourg.

Roth, J. (2008a): Experimentelle Geometrie und Projektarbeit am Beispiel „Einparken“. In: R. Oldenburg & M. Ludwig (Hrsg.): Experimentelle Geometrie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Roth, J. (2008b): Wie parkt man richtig ein? In: Mathematik lehren, Heft 149, 8, 46-51.

Roth, J. (2010): Baggerarmsteuerung – Zusammenhänge rekonstruieren und Problemlösungen erarbeiten. In: Der Mathematikunterricht, 5 (56).

Angela HERRMANN, Essen

Beweisstrategien in der Linearen Algebra – eine Fallstudie zum Thema Unterraum

1. Einleitung

Immer wieder lässt sich beobachten, dass Studienanfänger in der Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra Schwierigkeiten haben, selbst vermeintlich leichte Beweisaufgaben zu lösen. Ein möglicher Grund dafür könnte fehlendes Wissen über Strategien zum Lösen von „Standardbeweisaufgaben“ sein.

Um die tatsächlichen Ursachen für das Scheitern zu untersuchen, wurde eine Pilotstudie an der Universität Duisburg-Essen durchgeführt. In Interviews wurden Studierende am Ende des ersten Semesters gebeten, Aufgaben zum Thema Unterraum zu lösen und dabei ihre Vorgehensweise zu erläutern. Unter den Aufgaben befand sich auch folgende:

> $V := \mathbf{R}^3$ ist ein $\mathbf{R}$-Vektorraum.
>
> Zeige: Die Menge $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \mid 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$ ist ein Unterraum von V.

Im Artikel wird zunächst eine mögliche Beweisstrategie erörtert und anschließend eine Anforderungsanalyse durchgeführt. Eine Fallstudie soll zeigen, in welcher Weise diese Strategie und die in der Aufgabe steckenden Anforderungen Auslöser für Fehler in studentischen Bearbeitungen sein können.

2. Beweisstrategie und Anforderungsanalyse

Aus Platzgründen muss hier auf die Angabe einer Musterlösung verzichtet werden. Eine Lösung zu einer ähnlichen Aufgabe im $\mathbf{R}^n$ findet sich in Ableitinger & Herrmann (2011, S. 229).

Strategie: Eine mögliche Vorgehensweise beim Bearbeiten dieser Aufgabe wäre, das Unterraumkriterium anzuwenden. Dabei geht man in drei Schritten vor, die durch die Teilkriterien des Unterraumkriteriums bestimmt sind. Im ersten Schritt muss man beweisen, dass U nicht die leere Menge ist. Dafür weist man nach, dass der Nullvektor von V die definierende Eigenschaft von U (hier: $2x_1+x_2=0$) erfüllt und somit in U enthalten ist.

Im zweiten und dritten Schritt nimmt man sich zwei beliebige Vektoren u_1, u_2 aus der Teilmenge U bzw. einen beliebigen Vektor u aus der Teilmenge und ein beliebiges Skalar λ aus dem Körper **R** und zeigt, dass dann auch $u_1 + u_2$ bzw. λu in U enthalten ist. Hierfür weist man wiederum nach, dass $u_1 + u_2$ bzw. λu die definierende Eigenschaft von U erfüllt. Dazu nutzt man die auf V definierte Addition bzw. skalare Multiplikation und die definierende Eigenschaft von U aus, die u_1 und u_2 bzw. u bereits erfüllen.

Anforderungen: Zum Bearbeiten der Aufgabe muss man sich zunächst mit der vorliegenden Situation vertraut machen. Dazu sollte man beispielsweise die Aussage „$u \in U$“ entsprechend der Mengenbeschreibung umformulieren können. Für eine solche *Interpretation der Mengenbeschreibung* braucht man „symbol sense“ und dabei vor allem den Teilaspekt des „reading through symbols“ (nach Arcavi 1994). Ein nächster Schritt beim Bearbeiten ist das *Erkennen einer geeigneten Beweismethode* (hier: Verwendung des Unterraumkriteriums) und damit zusammenhängend auch das *Herausfiltern von und das Unterscheiden zwischen Voraussetzung und Behauptung* (hier: sowohl im übergeordneten Beweis als auch in den Teilbeweisen des Unterraumkriteriums). Bei der eigentlichen Durchführung muss dann noch *exakt formuliert* sowie die vorliegende Situation *zielgerichtet uminterpretiert* werden und es müssen Terme z*ielgerichtet umgeformt* werden. Zum Uminterpretieren gehört beispielsweise das Zugänglichmachen der $\forall$-Aussage durch die Wahl beliebiger Elemente und die Umformulierung der Behauptung „$\lambda u + \mu v \in U$“. Um die definierende Eigenschaft für $\lambda u + \mu v$ zu überprüfen, muss man im vorliegenden Fall zielgerichtet umformen, wofür man Struktursinn (nach Hoch & Dreyfus 2010) braucht.

3. Fallstudie Nina

Im Interview erläuterte Nina zunächst allgemein ihre Vorgehensweise beim Beweisen der Aussage, dass es sich bei einer gegebenen Teilmenge U eines Vektorraums V um einen Unterraum handelt. Danach sollte sie u. a. obig abgedruckte Aufgabe bearbeiten. Wir wollen hier einige ausgewählte schriftliche Ergebnisse und zugehörige mündliche Erläuterungen analysieren und Fehlerquellen bei Ninas Bearbeitung identifizieren.

In Abb. 1 ist zu sehen, was Nina zur Einstiegsfrage nach der allgemeinen Vorgehensweise notiert. Sie gibt das Unterraumkriterium nur unvollständig wieder. Der logische Zusammenhang zwischen den beiden Teilen $u_1, u_2 \in U$ und $u_1 + u_2 \in U$ wird von ihr nicht dargestellt. Die Tatsache, dass es sich hier um eine $\forall$-Aussage handelt, wird bei Nina nicht deutlich. Diese unpräzise Formulierung der Strategie führt im späteren Beweis der Aufgabe auch zu einer fehlerhaften Lösung (Abb. 2).

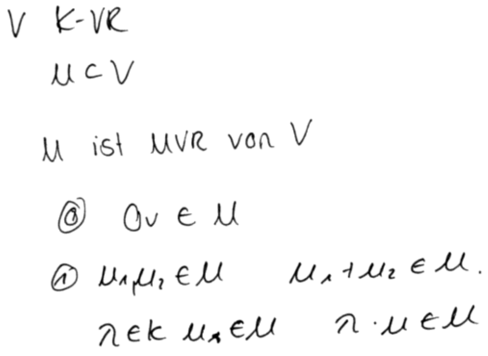


Abb.1: Unterraumkriterium (Nina)

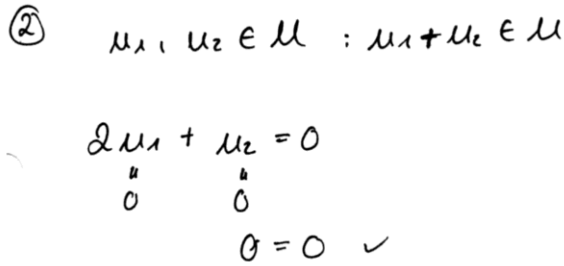


Abb. 2: Ausschnitt aus Ninas Bearbeitung

Statt u_1 und u_2 beliebig zu wählen, setzt sie für u_1 und u_2 jeweils den Nullvektor ein. Dies erkennt man auch an Ninas Erläuterungen zur Bearbeitung dieses Aufgabenteils:

> „Also es muss ja jetzt wieder die Addition, die Abgeschlossenheit der Addition gelten. Und naja, da hab' ich zwei Elemente also u_1 und u_2 ne, und die hab' ich für x_1 und x_2 eingesetzt. Und da ich ja schon weiß, dass das Nullelement enthalten ist, hab' ich u_1 und u_2 als Null gewählt. Zweimal Null plus Null ist gleich Null. Also ist das enthalten."

Hier wird auch ihre Strategie deutlich: Nina hält den Beweis für beendet, sobald sie eine wahre Aussage erhält. Ihre falsche Vorgehensweise, für u_1 und u_2 den Nullvektor einzusetzen, stellt sie dabei nicht in Frage.

Neben der *fehlerhaften Strategie* steckt noch ein weiterer Fehler in ihrer Bearbeitung. Sie will zeigen, dass $2u_1 + u_2 = 0$ gilt. Dies muss aber für $u_1 + u_2 \in U$ nicht bewiesen werden. Dieser Fehler kommt durch eine *falsche Interpretation der Menge* zustande. Nina erfasst den Zusammenhang zwischen dem Vektor (x_1 x_2 x_3) und der Bedingung $2x_1+x_2=0$ aus der Mengenbeschreibung nicht. Für sie ist sowohl (x_1 x_2 x_3) ein Vektor als auch x_1 und x_2 in der Bedingung. Dies wird zu Beginn der Bearbeitung der Aufgabe deutlich, als sie versucht, die Bedingung mit dem Vektor (x_1 x_2 x_3) in Verbindung zu bringen:

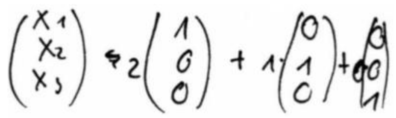


Abb. 3: Ninas Interpretation der Mengenbeschreibung

Sie setzt hier für x_1, x_2, x_3 die Standardbasisvektoren ein und interpretiert dabei das Nichtauftreten von x_3 in der Bedingung als „$0 \cdot x_3$".

4. Konsequenzen

Es wurden zwei Hauptursachen für Ninas Probleme herausgearbeitet – die fehlerhafte Strategie und die Fehlinterpretation der Mengenbeschreibung. Es stellt sich nun die Frage, welche Hilfestellungen man Studierenden mit solchen Schwierigkeiten anbieten kann. Strategien zu typischen Beweisen werden in den Vorlesungen und Übungen meist nur verbal vermittelt. Da das Tempo dieser Mathematikveranstaltungen häufig recht hoch ist, nehmen viele Studierende diese nützlichen Hinweise oft nicht wahr. Eine Möglichkeit, diesem Problem Abhilfe zu schaffen, wäre das schriftliche Formulieren solcher Strategien. Im Projekt *Mathematik besser verstehen* der Universität Duisburg-Essen wird dies mit ausführlichen Musterlösungen versucht (vgl. Ableitinger & Herrmann 2011).

Ninas zweite Fehlerquelle ließe sich eventuell durch ein abgewandeltes Aufgabenformat abmildern. Beweisaufgaben in der Mathematik sind meist prägnant formuliert und liefern nur selten Hinweise für eine geeignete Herangehensweise. Experten machen sich mit solchen Beweisen vertraut, indem sie sich anschauen, welche Art von Objekten durch die Symbole dargestellt werden. Außerdem erinnern sie sich häufig auch an ähnliche Situationen, in denen in spezieller Art und Weise mit diesen Objekten umgegangen wurde. Diese (oft unterbewusst) ablaufenden Prozesse helfen den Experten, ein Gespür für die Situation zu entwickeln. Viele Studierende dagegen gehen an solche Aufgaben heran, ohne sich vorher mit den Objekten zu beschäftigen. Um diese Arbeitshaltung zu ändern, könnte man Teilaufgaben formulieren, die genau dies fordern. Diese könnten zum Beispiel eine Verbalisierung der Mengenbeschreibung, die Angabe von Beispielelementen aus der Menge, das Überprüfen gegebener Elemente auf Enthaltensein in der Menge, etc. verlangen.

Es erscheint meines Erachtens lohnenswert zu sein, weitere Fehlerquellen beim Bearbeiten solcher Beweisaufgaben zu lokalisieren, um Studierenden geeignete Unterstützungen anzubieten.

Literatur

Ableitinger, Ch., Herrmann, A. (2011): Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Ein Arbeits- und Übungsbuch. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

Arcavi, A. (1994): Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. In: For the Learning of Mathematics 14, Issue 3, 24-35.

Hoch, M., Dreyfus, T. (2010): Nicht nur umformen, auch Strukturen erkennen und identifizieren. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 52, Heft 33, 25-29.

Manuela HILLJE, Oldenburg

Fachdidaktisches Wissen von Lehrerinnen und Lehrern bei der didaktischen Strukturierung von Mathematikunterricht im Vergleich mit COACTIV-Testergebnissen

In den letzten Jahren wurde unter anderem in den Studien COACTIV, TEDS-M und in den Studien der Michigan Group das fachdidaktische Wissen von (angehenden) Lehrerinnen und Lehrern mithilfe von Tests erhoben. Die Aufgaben im COACTIV-Test haben beispielsweise ein offenes Aufgabenformat und sind in fiktive Unterrichtsszenarien eingebettet. Allerdings konnten sich die Lehrpersonen für die Bearbeitung der Aufgaben so viel Zeit nehmen, wie sie wollen und waren auf einen Aspekt fokussiert, während sie in ihrem eigenen Unterricht häufig unter Zeitdruck stehen und viele Entscheidungen gleichzeitig treffen müssen.

Es stellt sich daher die Frage, wie Lehrerinnen und Lehrer ihr fachdidaktisches Wissen für die didaktische Strukturierung, also die Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht, nutzen. Zur Beantwortung dieser Frage wurde ein Kategoriensystem entwickelt, welches vor allem auf den Konzeptionen des fachdidaktischen Wissens der oben erwähnten großen Studien aufbaut (Kunter et al., 2011; Blömeke et al., 2010; Ball & Bass, 2009). In allen Konzeptionen zeigt sich analog zum didaktischen Dreieck eine Aufteilung des fachdidaktischen Wissens in Kategorien zu Schülerkognitionen, zum Lehrerhandeln und zu den Inhalten (siehe Tab. 1).

Schülerkognitionen	Lehrerhandeln	Inhalte
Vorhersage/Reflexion von, bzw. Reaktion auf: – Konzepten/Strategien – möglichen Schülerlösungen – (typischen) Fehlern/ Fehlkonzepten – Probleme/Schwierigkeiten – Schwierigkeitsgrad	Auswahl/Verwendung: – Multipler Repräsentationsformen – geeigneter Beispiele – Vereinfachungen der Inhalte – Erklärungsmöglichkeiten – mathematischer Begriffe	– curriculare Anordnung von Stoffen (Reihenfolge und Zusammenhänge) – Erkennen/Umsetzung des Potenzials von Aufgaben (Wissensvoraussetzungen, kognitive Anforderungen) – Wissen über Bildungsstandards/Ziele

Tab. 1: Kategorien zum fachdidaktischen Wissen

Der Übergang vom Wissen zum Handeln ist aber nicht unproblematisch. Insbesondere wird das Wissen beim Handeln nur implizit verwendet, weshalb es für den außenstehenden Forscher nur schwer zugänglich ist (z.B. Neuweg, 2011). Die Qualität der Nutzung des fachdidaktischen Wissens bei der Unterrichtsdurchführung lässt sich aber über die Unterrichtsqualität beurteilen.

In der TIMSS-Video-Studie wurden drei Dimensionen von Unterrichtsqualität herausgearbeitet (Klieme, et al., 2006), von denen aus Sicht der Mathematikdidaktik vor allem die Dimension der kognitiven Aktivierung von Bedeutung ist. Deshalb wurde das Kategoriensystem um Kategorien zur kognitiven Aktivierung ergänzt, denen ebenfalls verschiedene Konzeptionen von kognitiver Aktivierung zugrunde liegen, die einerseits das kognitive Aktivierungspotenzial der Aufgaben und andererseits die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler im Unterricht in den Blick nehmen (Kunter, et al., 2011, Hugener, et al., 2007; siehe Tab. 2).

– die Lernenden arbeiten kognitiv selbstständig – eigene Vorgehensweisen/ unterschiedlicher Lösungswege werden erklärt – die Gültigkeit der Lösungsvorschläge wird selbstständig überprüft – stoffliche Verbindungen werden zur inhaltlichen Vernetzung des Unterrichts hergestellt – früher Gelerntes wird zum kumulativen Wissensaufbau herangezogen – außer- oder innermathematische Modellierungen werden durchgeführt – Argumentationen und Darstellungen werden verwendet – verschiedene Repräsentationsformen treten auf – es wird über mathematisches Denken reflektiert – die drei Typen mathematischer Denkweisen (prozedural-algorithmisch, begrifflich und technisch) treten im gesamten Aufgabenbestand ausgewogen auf

Tab. 2: Kategorien zur kognitiven Aktivierung

Mithilfe des Kategoriensystems wurden die schriftliche Unterrichtsvorbereitung, der realisierte Unterricht sowie ein anschließendes leitfadengestützte Interview von bisher drei völlig unterschiedlichen Lehrpersonen ausgewertet. Beteiligt waren eine fachfremd unterrichtende Hauptschullehrerin mit 9 Jahren Berufserfahrung (●), ein Quereinsteiger, der erst seit 1,5 Jahren am gymnasialen Zweig einer kooperativen Gesamtschule unterrichtet (♦), sowie ein erfahrender Mathelehrer mit traditioneller Lehramtsausbildung, die allerdings schon 20 Jahre zurückliegt (■). Der Fokus der Auswertung lag auf den Aufgaben, die zunächst unabhängig vom Unterricht auf ihr Potenzial hin analysiert wurden, welches dann mit dem Einsatz der Aufgaben im Unterricht und den Äußerungen der Lehrerinnen und Lehrer in der Planung und im Interview verglichen wurde. Es zeigten sich große Unterschiede in der Qualität der didaktischen Strukturierung:

Die Hauptschullehrerin zeigte deutlich weniger fachdidaktisches Wissen als der Quereinsteiger und dieser scheint über etwas weniger fachdidaktisches Wissen zu verfügen als der erfahrene Mathelehrer. Dies zeigt sich beispielsweise am Erkennen und Umsetzen des Potenzials der eingesetzten

Aufgaben. Die Hauptschullehrerin (●) erkannte zwar teilweise das kognitive Aktivierungspotenzial der Aufgaben, sie setzte dies aber nicht im Unterricht um. So wurden Aufgaben, die eher begriffliches Denken erfordern (z.B. die Zimmermann-Aufgabe aus der PISA-Studie), auf rein prozedurale Ebene bearbeitet, was von der Lehrerin insbesondere durch die Vorgabe eines 5-Punkte Schemas (Figuren, Formeln, Maße, Rechnung, Kostenberechnung) gefördert wurde. Dagegen nutzte der Quereinsteiger (♦) das Potenzial der zentralen Aufgaben gut aus, indem er über mehrere inhaltlich aufeinander aufbauende Aufgaben hinweg die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises von den Lernenden selbst erarbeiten ließ. Allerdings wurde bei einigen kurzen Wiederholungsaufgaben das von ihm benannte Potenzial im Unterricht nicht ausgeschöpft. Der erfahrene Mathelehrer (■) ließ unter anderem verschiedene Beweisideen des Satzes des Pythagoras in Gruppenarbeit erarbeiten. Das Potenzial der Beweise vor allem zum mathematischen Argumentieren erkannte der Lehrer zwar und erläuterte es ausführlich in der Planung und im Interview, er nutzte es aber bewusst nicht aus, da er dies als zu schwierig für die eher leistungsschwache Klasse erachtete.

Ergänzend zu diesen qualitativen Analysen bearbeiteten die Lehrerinnen und Lehrer auch den COACTIV-Fragebogen zum fachdidaktischen Wissen und zum mathematischen Fachwissen (siehe Abb. 1). Hier erreichten alle drei Lehrpersonen nahezu die gleiche Punktzahl im fachdidaktischen Wissenstest, sie unterscheiden sich aber deutlich in den erreichten Punktzahlen im Fachwissenstest. Während die Hauptschullehrerin 0 Punkte erzielte[1], erreichte der erfahrene Mathelehrer fast volle Punktzahl, der Quereinsteiger liegt im oberen Drittel.

Die Ergebnisse lassen sich auf unterschiedliche Art deuten. Zum einen scheint das mathematische Fachwissen einen großen Einfluss auf die didaktische Strukturierung des Unterrichts zu haben, da die hier erzielten Punktzahlen den Eindruck der qualitativen Analysen sehr gut wiederspiegeln. Desweiteren scheint der Übergang vom Wissen zum Handeln den Lehrpersonen unterschiedlich gut zu gelingen. Es scheint sich aber auch zu zeigen, dass das fachdidaktische Wissen, so wie es im COACTIV-Test konzipiert wurde, allein noch nicht dem Wissen entspricht, welches in der Unterrichtsrealität benötigt wird.

Es gilt diese Zusammenhänge näher zu untersuchen und daraus Konsequenzen für die Lehrerbildung zu ziehen.

[1] Der COACTIV-Test wurde nicht für Hauptschullehrer konzipiert, da diese Lehrergruppe an der COACTIV-Studie nicht teilnahm. Die Hauptschullehrerin ist trotzdem am ehesten mit der Gruppe der icht-gymnasialen Lehrer (Abb. 1) vergleichbar, da in vielen Bundesländern nicht oder kaum zwischen der Haupt- und Realschullehrerausbildung unterschieden wird.

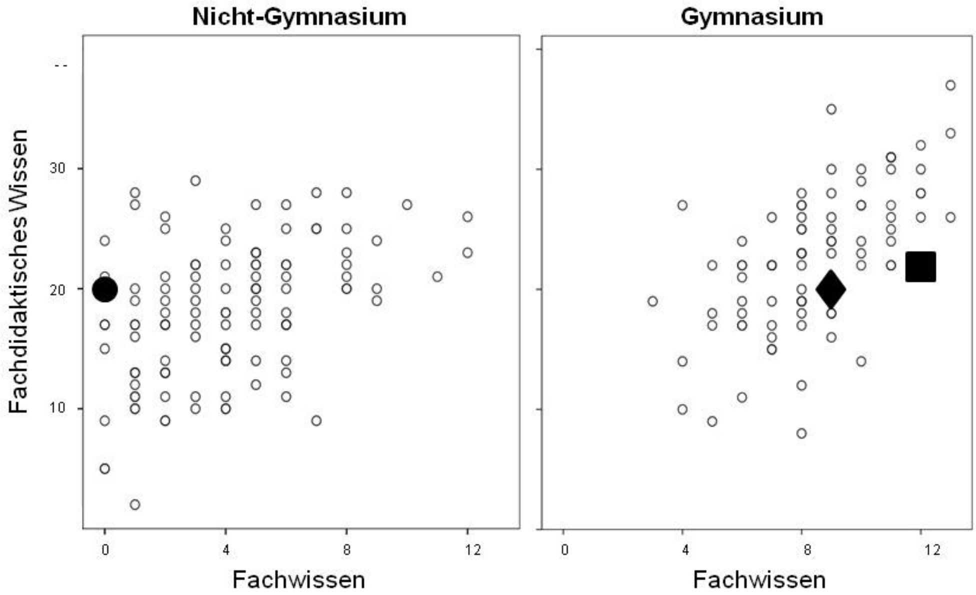


Abb.1: COACTIV-Ergebnisse der drei Lehrpersonen im Vergleich zu den Ergebnissen der COACTIV-Studie (nach Krauss, et al., 2008)

Literatur

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizion: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. In M. Neubrand (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2010c). TEDS-M 2008: Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster (u.a.): Waxmann

Hugener, I., Pauli, C., & Reusser, K. (2007). Inszenierungsmuster, kognitive Aktivierung und Leistung im Mathematikunterricht. Analysen aus der schweizerisch-deutschen Videostudie. In M. Lemmermöhle, M. Rothgangel, S. Bögenholz, M. Hasselhorn & R. Watermann (Eds.), *Professionell Lehren-Erfolgreich Lernen* (pp. 109-121). Münster: Waxmann.

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K., & Ratzka, N. (2006). Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule - Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (pp. 127-146). Münster: Waxmann.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M., & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(3/4), 223–258.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften:Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Neuweg, G. H. (2011). Das Wissen der Wissensvermittler. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Eds.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (pp. 451-477). Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Eva HOFFART, Siegen

Aufgaben im Spannungsfeld von Diagnose und Leistungserhebung

Aufgaben werden einvernehmlich als zentrale Elemente des Mathematikunterrichts bezeichnet und sind somit auch Instrumente vergleichender Leistungserhebungen. Speziell in der Primarstufenzeit durchlaufen die Kinder vielfältige Lern- und Entwicklungsprozesse, so dass häufig eine entwicklungsdiagnostische Nutzung der Ergebnisse vergleichender Leistungserhebungen in der Grundschule gefordert wird. Es stellt sich jedoch die Frage, ob dieser diagnostische Anspruch mit den Anforderungen einer Leistungserhebung vereinbar ist.

Mein abgeschlossenes Dissertationsprojekt hat sich dem Spannungsfeld Diagnose und Leistungserhebung gewidmet (vgl. Hoffart 2011). In diesem Beitrag werden zwei Schwerpunkte der Untersuchung skizziert: Die Entwicklung eines multiperspektivischen Modells zur Aufgabenanalyse sowie seine Anwendung auf ausgewählte Aufgaben einer offiziellen Leistungserhebung für dritte Klassen.

Neben einer theoretischen, möglichst objektiven, Analyse der Aufgaben ist die Einbeziehung des realen Umgangs der Schüler mit den in dieser schriftlichen Prüfung gestellten Aufgaben unerlässlich. Um eine profunde Analyse der Aufgaben und ebenso eine Analyse der Aufgabenbearbeitungen umsetzen zu können, erfolgte die Entwicklung einer Aufgabenanalyse als zweistufige Untersuchung. Das Modell der Aufgabenanalyse umfasst letztlich vier Komponenten (siehe Abbildung 1): Eine kritische Untersuchung der Aufgaben selbst, die Konstruktion eines theoretischen Kategoriensystems möglicher Aufgabenbearbeitungen, die Analyse der realen Aufgabenbearbeitungen sowie eine Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Bearbeitungen innerhalb einer Aufgabe.

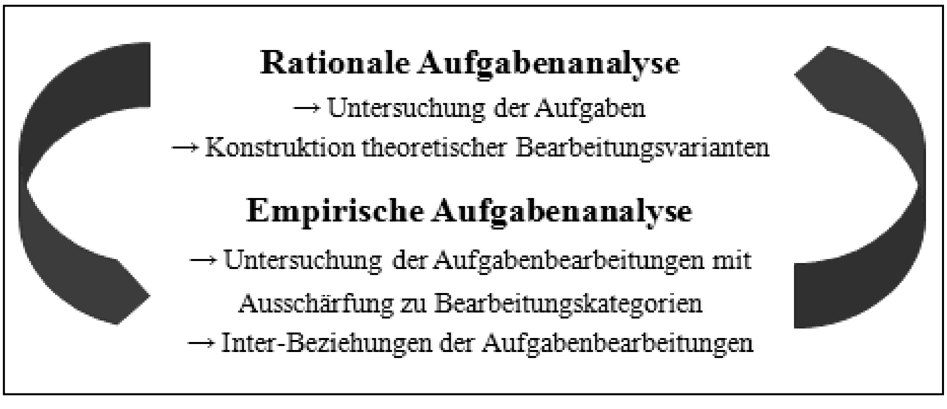


Abbildung 1: Das Modell der Aufgabenanalyse

Die Rationale Aufgabenanalyse

Die *Rationale Aufgabenanalyse* diente einer ersten Identifikation aufgabenspezifischer Merkmale, die anschließend eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Aufgaben ermöglichte. Hervorzuheben ist hierbei der unvoreingenommene Blick auf die zu analysierende Aufgabe. Eine Zuordnung bereits im Vorfeld definierter Ausprägungsgrade fand nicht statt. Bei den Analysen wurde die Intention der Aufgabenautoren laut den offiziellen Aufgabenkommentaren stets im Blick behalten, um spezifische Besonderheiten der jeweiligen Aufgabe konträr zu diesen Absichten aufdecken zu können.

Um die Aufgaben der Leistungserhebung diskutieren zu können, wurde in einer ersten Untersuchungskomponente ein theorie- und literaturbasierte Modell entwickelt. Dieses umfasst die folgenden fünf Analyseperspektiven mit insgesamt 27 untergeordneten Analyseaspekten (vgl. Hoffart 2011, Hoffart 2008): Zielperspektive Diagnose, Zielperspektive Leistungserhebung, Formale Perspektive, Inhaltliche Perspektive und Kognitive Perspektive. In der Anwendung auf die exemplarischen Aufgaben der Untersuchung zeigte sich, dass sich diese Struktur sehr gut zu einer detaillierten theoretischen Analyse jeder Aufgabe eignet.

Auf der Grundlage dieser a priori Analyse wurden anschließend mögliche Bearbeitungen der Drittklässler erarbeitet. Unabhängig von der ursprünglichen Aufgabenintention und der offiziell existierenden Musterlösung der untersuchten Aufgaben fand eine Zusammenstellung theoretisch möglicher Bearbeitungswege statt, die jeweils anhand exemplarischer Beispiele illustriert wurden. Hierbei wurden korrekte Bearbeitungen ebenso wie mögliche Fehllösungen bedacht, um Besonderheiten der Aufgabe zu identifizieren oder eingeschränkte Aufgabenintentionen aufzudecken. In diesem Schritt entstanden zu jeder (Teil)Aufgabe Kategoriensysteme, in denen neben den erarbeiteten Bearbeitungskonzepten theoretische Bearbeitungsvarianten und prototypische Notationsformen beschrieben werden.

Die Empirische Aufgabenanalyse

In der zweiten Stufe der Aufgabenanalyse wurden nun auch die realen Schülerbearbeitungen einbezogen. Der Anspruch der *Empirischen Aufgabenanalyse* in der Forschungsarbeit lag in einer detaillierten Analyse der Aufgabenlösungen anhand der umfangreichen empirischen Schriftdaten. Auch das Datenmaterial der ergänzend durchgeführten Interviewstudie floss in diese Stufe der Untersuchung ein. Es erfolgte eine inhaltliche und qualitativ orientierte Analyse, wobei die Größe der Datenbasis quantitative Ergänzungen zuließ.

Die theoretischen Kategoriensysteme der Bearbeitungskonzepte und -varianten boten einen geeigneten Orientierungsrahmen für die folgende dritte Untersuchungskomponente. Im Zuge der Empirischen Aufgabenanalyse wurden jeweils über 2000 Bearbeitungen der zuvor theoretisch analysierten Aufgaben untersucht. Die realen Schülerlösungen wurden als Reaktionen der Drittklässler auf die Aufgaben interpretiert und mit den theoretischen Ergebnissen der Rationalen Aufgabenanalyse verknüpft. Unter der Bedingung des kategorienorientierten Arbeitens gelang es, die realen Bearbeitungen zu jeder der untersuchten Aufgaben inhaltlich zu strukturieren. Die Aufgabenbearbeitungen der Schriftdaten wurden den theoretischen Bearbeitungskonzepten und -kategorien zugeordnet. Empiriegestützte Modifikationen, also Differenzierungen, Zusammenfassungen oder auch Neueröffnungen von Bearbeitungskategorien, waren in dieser Untersuchungskomponente bewusst intendiert. Die Interviewdaten ermöglichten komplementäre Einsichten und dienten der Illustration von Ergebnissen. Alle entstandenen Kategoriensysteme erfüllen die Bedingungen qualitativer Merkmale. Die Indikatoren für die Kategorisierung sind präzise formuliert (Genauigkeit) und jede Bearbeitung wird genau einer Bearbeitungskategorie zugeordnet (Exklusivität). Dabei ist jedes Kategoriensystem derart erschöpfend, dass jeder Datensatz auch einer Bearbeitungskategorie zugeordnet werden kann (Exhaustivität). Zudem wurde die Reliabilität der Kategoriensysteme anhand der Kodiererübereinstimmung Cohens κ überprüft.

Ergänzend zu den detaillierten Untersuchungen der einzelnen Teilaufgaben sind Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den Aufgabenbearbeitungen der Teilaufgaben einer Aufgabe von Interesse. Diese wurden in einer vierten Untersuchungskomponente analysiert. Dazu wurden die Informationen aller zugehörigen Teilaufgaben in Kontingenztafeln abgebildet und mithilfe des Kontingenzkoeffizient C interpretiert. Verknüpft mit den Ergebnissen der anderen Untersuchungskomponenten konnte für jede der analysierten Aufgaben eine ausführliche Kennzeichnung formuliert werden.

Zusammenschau

Die erarbeitete Aufgabenanalyse mit zwei Stufen und vier Komponenten ermöglicht eine detaillierte Analyse von Aufgaben und ihren Bearbeitungen. Die Rationale Aufgabenanalyse mit 5 Analyseperspektiven und 27 untergeordneten Analyseaspekten dient der theoretischen Analyse jeder (Teil)Aufgabe. Aus diesen Ergebnissen gelingt es, umfassende theoretische Bearbeitungsvarianten zu konstruieren. Die Empirische Aufgabenanalyse strukturiert die realen Aufgabenbearbeitungen auf Grundlage der theoretischen Kategoriensysteme trennscharf mit qualitativem Blick. Die vorliegenden Teilaufgaben werden zunächst separat betrachtet. Erst im Anschluss werden Zusammenhänge der Bearbeitungen innerhalb einer Aufgabe identifiziert.

Die Verzahnung theoretischer Analysen mit der Untersuchung empirischer Daten wird als sinnvoll und notwendig herausgestellt, ihr Erkenntnisgewinn ist zu betonen. Jedes der theoretischen Kategoriensysteme war prinzipiell unvollständig, wurde aufgrund der empirischen Daten modifiziert und gewann so an Qualität sowie Aussagekraft.

Die Rationalen und Empirischen Aufgabenanalysen konzentrierten sich zunächst auf aufgabeninterne Untersuchungen, bevor in einer weiterführenden Untersuchungsphase Zusammenhänge zwischen den Bearbeitungen aller untersuchten Teilaufgaben in den Fokus genommen wurden. Die Konstruktion einer Bearbeitungstypologie wurde mit Hilfe einer computergestützten Clusteranalyse umgesetzt, um Beziehungen zwischen den Aufgabenbearbeitungen weiterführend zu untersuchen (vgl. Hoffart 2011, Kapitel 10).

Literatur

Hoffart, Eva (2011): Mathematische Vergleichsarbeiten in der Grundschule – Zum diagnostischen Potential von Aufgaben und deren Bearbeitungen einer landesweiten Vergleichsarbeit für dritte Klassen (Dissertation) , Giessener Elektronische Bibliothek, Download unter: http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2011/8522/pdf/HoffartEva_2011_10_05.pdf

Hoffart, Eva (2008): Analysen zu den Aufgaben der Orientierungsarbeit in Hessen 2005. In: Vásárhelyi Éva (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2008, Münster, WTM-Verlag, S. 286-289

Andrea HOFFKAMP, Berlin und Ludwigsburg

Zentrale Anliegen von Hochschullehrenden – Erfahrungen und Ergebnisse aus Workshops zur Hochschul-Mathematikdidaktik

Im Rahmen des vom BMBF geförderten Projektes Semi-automatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik (SAiL-M) innerhalb des Förderprogramms „Hochschulforschung als Beitrag zur Professionalisierung der Hochschullehre – Zukunftswerkstatt Hochschullehre" werden Fortbildungen in Form von Workshops für Hochschuldozentinnen und -dozenten sowie Tutorinnen und Tutoren der Mathematik konzipiert und durchgeführt. In diesem Beitrag werden die Konzeption der Dozentenworkshops sowie Erfahrungen und Ergebnisse aus den Durchführungen dargestellt. Ziel der Fortbildungen war die Weitergabe und Verbreitung eines Veranstaltungskonzeptes für Mathematikveranstaltungen an Hochschulen, welches in den letzten drei Jahren am Standort PH Ludwigsburg entwickelt, umgesetzt und evaluiert wurde. Das Veranstaltungskonzept ist unter anderem durch ein vielfältiges Maßnahmenbündel charakterisiert, welches in seiner Komplexität und theoretischen Verankerung in verschiedenen Artikeln publiziert wurde: Bescherer, Spannagel & Müller 2008, Bescherer & Spannagel 2009, Zimmermann & Bescherer 2010.

In seiner Grundphilosophie beruht das Veranstaltungskonzept auf der Selbstbestimmungstheorie der Motivation von Deci & Ryan (1993). Grundlage der Theorie ist die Annahme, dass der Motor für die menschliche Weiterentwicklung das Bedürfnis des Menschen nach Autonomie, Kompetenz und sozialer Eingebundenheit ist. Daraus leiten sich Anregungen zur Herstellung aktiven, selbstbestimmten und motivierten Lernens ab. In den Mathematikveranstaltungen werden deswegen möglichst viele Gelegenheiten zur aktiven Auseinandersetzung mit der Mathematik gegeben, um insbesondere die Selbstwirksamkeitserwartung (Bandura 1997) der Lernenden zu erhöhen.

Die Fortbildungskonzeption

In der Konzeption der Workshops wird die eben umrissene Grundphilosophie auf die Fortbildungen angewandt. Anstelle der Vermittlung eines Maßnahmenkatalogs werden die Fortbildungen im Sinne des Veranstaltungskonzeptes durchgeführt. Die Workshops sind dementsprechend von der Aktivität der Teilnehmenden und Prozessbegleitung seitens der Workshopleitung geprägt. Die Teilnehmenden werden als Experten für ihre Probleme und Lösungen erachtet und wie in einem Coachingprozess von einer Mathematikdidaktikerin und einem Systemcoach auf dem Weg zur individuellen Lösung unterstützt und begleitet. Die Kombination aus Mathematikdidaktik und systemischem Coaching vereint die Spezifität des Faches Mathematik in der Lehre mit allgemeinen Coachingprinzipien. Insbesondere erlaubt solch ein Vorgehen eine Anpassung an verschiedene Hochschularten und strukturelle Gegebenheiten einzelner Standorte.

Ein Workshop ist in zwei Sitzungen gegliedert: Im ersten Teil findet eine *Bestandsaufnahme* statt. Dabei werden Grundphilosophie und Konzeption des Workshops vorgestellt, die drängensten Anliegen der Teilnehmenden erhoben und eine Zielbestimmung vorgenommen. Zwischen der ersten und zweiten Sitzung findet eine Dokumentation in einem WIKI statt, wobei Themenschwerpunkte für die zweite Sitzung herausgearbeitet und passende Materialien bereitgestellt werden. In der zweiten Sitzung werden möglichst passgenaue Impulse in Form von BestPractice-Beispielen aus dem Projekt SAiL-M und darüber hinaus zu den von den Teilnehmenden gewünschten Themenschwerpunkten gegeben. Nach einer vertieften Diskussion der Themen anhand von Diskussionsfragen, sind die Teilnehmenden aufgefordert einen Schritt in den „Mikrokosmos“ ihrer Veranstaltungen zu gehen und sogenannte *Standardsituationen* innerhalb der Veranstaltungen zu beschreiben, um dafür möglichst vielseitige Handlungsalternativen zu entwickeln. Alle Ergebnisse und erarbeiteten Lösungen werden wiederum im Workshop-WIKI für die Teilnehmenden bereitgestellt. Die entstandenen WIKIs bilden jetzt schon einen Pool sehr konkreter Ansätze und Lösungsvorschläge, die aufgegriffen und gegebenenfalls individuell angepasst und eingesetzt werden.

Anliegen und Wünsche von Hochschul-Mathematikdozenten

Die Workshops eröffneten einen Einblick in die drängendsten Anliegen der Hochschullehre in der Mathematik. Folgende Themenkreise standen dabei besonders im Interesse der Lehrenden: *Vorlesungskultur und Umgang, Motivation und Haltung der Studierenden, Kommunikationskultur und Dialog, Lernprozessbegleitung und Individualität, Ressourcen optimal einsetzen und nutzen, Feedback-/Fragen-/Fehlerkultur, (Inter-)aktivität und Abwechslung*. Die Diskussion zweier Themenkreise wird im Folgenden exemplarisch für die anderen genauer dargestellt.

Ressourcen optimal einsetzen und nutzen: Bei diesem Themenkreis wurden u.a. die Ressourcen der Studierenden und Lehrenden auf fachlicher *und* menschlicher Ebene diskutiert. Insbesondere wurde die Diversität der Studierenden nicht mehr nur als hinderlich, sondern auch als förderlich im Hinblick auf ihre Nutzung in einem differenzierten Lernprozess gesehen.

Eine hierzu passende Methode ist die des *Peer-Feedback im Seminar*, bei der zu Beginn Regeln für Präsentation und Feedback festgelegt werden und alle Studierenden aufgefordert sind, den Vortragenden am Ende konstruktives Feedback zu geben. Weiterhin wurden Ressourcen im Kollegium, in der Hochschule und externe Ressourcen wie Literatur, Internetseiten und Web 2.0-Anwendungen angesprochen. Ein besonders diskutiertes Thema war die *Vorlesung als Ressource.* Lehrende zeigen i.a. wenig Bereitschaft, von der Sozialform „Vorlesung" abzurücken. Daher wurden die didaktischen Funktionen von Vorlesungen diskutiert. Insbesondere wurde die Bedeutung der Vorlesung, welche zunächst instruktionsorientiert ist, für die Vorbereitung auf selbstständiges und selbstbestimmtes Lernen und Forschen erörtert. Viele wunderbare Anregungen hierzu findet man auch bei Gudjons 2011. Wichtig war zu jedem Zeitpunkt die Berücksichtigung der spezifischen Eigenheiten des Faches Mathematik. Beispielweise war man sich einig, dass Mathematik am besten gelernt wird, indem man sie selbst betreibt. Durch bessere Verstrickung der Vorlesungs- und Übungsaktivitäten können die Ressourcen hier besser ausgeschöpft werden (z.B. Übung als Vor- *und* Nachbereitung wie in SAiL-M).

Feedback-, Fragen- und Fehlerkultur: Hier wurde deutlich, dass Lehrende sich häufig mehr Feedback von den Studierenden wünschen, um die Veranstaltungen besser auf deren Bedürfnisse abzustimmen. Deswegen ist die Etablierung von Feedbackroutinen in Vorlesung und Übung bedeutend. Insbesondere wurde die Rolle von Fragen in jedem Workshop ausgiebig diskutiert. Lehrende wünschen sich neugierige Studierende, die unentwegt Fragen stellen und von Beginn an Forscherdrang zeigen. Tatsächlich bestand aber Diskussionsbedarf darüber, welche Funktion die Fragen in den Veranstaltungen haben (sollen). Die Spannbreite reicht hier von „Interaktivität durch Fragen" über „Fragen zur Überwindung von Verständnishürden" bis zu „Generierung neuer Fragestellungen". Letztlich zeigte sich der Bedarf nach einem methodischen Vorgehen, das das Fragen Stellen, Generieren und Bewerten selbst zum Thema macht. Angelehnt an Schupp (2002) „Thema mit Variationen" wurde hier der Impuls gegeben, die Studierenden zur Variation aufzufordern, indem zu jedem Parameter eines „Themas" (z.B. einer Definition oder Voraussetzung eines Satzes) die Grundfrage „What, if not?" gestellt wird. Automatisch gelangt man so zu typischen mathematischen Strategien wie Analogisieren („Wie sieht das in $\mathbb{C}$ aus?") oder Verallgemeinern („Gilt das für alle natürlichen Zahlen?"). Mit dieser Methode können beispielsweise Begriffe wie die ε-δ-Definition von Stetigkeit hinterfragt und exploriert werden, indem man z.B. Quantoren tauscht, nach dem Gegenteil fragt oder geringfügig durch Ändern der $<$-Zeichen in $\leq$-Zeichen „wackelt" und jede dieser Variationen bewertet.

Standardsituationen - Erarbeitete Lösungen und Methoden

„Thema mit Variationen“ wurde dann auch auf sogenannte Standardsituationen angewandt, um vielfältige Handlungsalternativen zu generieren. Zwei typische Standardsituationen sind: *Schweigen in der Fragezeit: Haben Sie hierzu noch Fragen?* und *Wenn der Dozent Fragen stellt, kommen keine Antworten*. Hier einige generierte Handlungsalternativen:

Neben einer *guten vertrauensvollen Vorbereitung der Fragerunde* kann man die *Rolle von Fragen in der Mathematik* thematisieren: Ohne Fragestellungen gäbe es keine Mathematik. Fragen sind geradezu ein Wesensmerkmal des Faches und die Fähigkeit (gute) Fragen zu stellen ein Lernziel. Desweiteren kann man *anonyme Fragen* ermöglichen (Fragenotizen), die man direkt, in der Übung oder der Folgeveranstaltung einbringt. Es können auch Tutoren als *Stellvertreter* Fragen stellen (Modellwirkung). Wichtig ist es, *echte Fragen* zu stellen, sprich solche, auf die man die Antwort nicht schon kennt und die möglichst alle Hörer aufnehmen können: Statt *Wie lautet die Definition von Stetigkeit?* fragt man *Sage Du mir, wie Du deinem Kommilitonen den Begriff Stetigkeit erklären würdest!*

Ausblick

Das Projekt SAiL-M endete im Februar 2012. Die Workshops werden aber weiterhin angefragt und durchgeführt. Weitere Informationen und Ergebnisse der Workshops findet man unter „Fortbildungen“ auf der Internetpräsenz des Projektes unter http://www.sail-m.de.

Literatur

Bandura, A. (1997): Self-efficacy. The exercise of control. New York: Freeman.

Bescherer, C., Spannagel, C. & Müller, W. (2008): Activating students in introductorymathematics tutorials. In: Proceedings of EuroPLOP 2008.

Bescherer, C., Spannagel, C. (2009): Didaktische Entwurfsmuster für technologieunterstützte Übungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, WTM Verlag.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993): Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, 39(2), 223–238.

Gudjons, H. (2011): Frontalunterricht – neu entdeckt. Integration in offene Unterrichtsformen. 3. Auflage, Klinkhardt, Bad Heilbrunn.

Schupp, H. (2002): Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim.

Zimmermann, M., Bescherer, C. (2010): Lernen 2030 – Möglichkeiten in der Lehramtsausbildung. Erscheint in: Bericht über die 28. Jahrestagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“, Franzbecker.

Axel HOPPENBROCK, Rolf BIEHLER, Paderborn

Fachdidaktischer Einsatz eines elektronischen Votingsystems zur Aktivierung von Mathematikstudierenden in Erstsemestervorlesungen

Das Kompetenzzentrum Hoschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) hat sich zum Ziel gesetzt, in verschiedenen Teilprojekten die Schwierigkeiten von Studenten mit Mathematik zu analysieren und Lehrinnovationen zur Reduktion dieser Schwierigkeiten zu erproben und zu evaluieren. Im folgenden Artikel wird eine Vorstudie beschrieben, die das Ziel hat, die Lehrinnovation „Votingfragen in Mathematikvorlesungen“ exemplarisch anhand der Analysis I Vorlesung zu untersuchen.

Einleitung

In den meisten Mathematikvorlesungen präsentiert der Dozent die Sätze und Beweise an der Tafel. Die Aktivität der Studenten ist auf das Zuhören und Abschreiben beschränkt.

Eines der Probleme bei dieser Art der Wissensvermittlung ist die schwindende Aufmerksamkeit. Nach Untersuchungen von Maddox und Hoole (1975) nimmt diese nach ca. 20 Minuten ab**.** Auch neuere Untersuchungen von Irene Gerbig-Calcagnis (2009) bestätigen dieses. Entsprechend ihrer Untersuchung sind nur wenige Studenten in der Lage, länger als 20 Minuten am Stück aufmerksam zu sein. Aus diesem Grunde empfehlen eine Reihe von Autoren aktivierende Elemente in die Vorlesung aufzunehmen (Brown/Tomlinsen 1979, Gerbing-Calcagnis 2009).

Der Einsatz von Votingfragen und Clicker ist solch ein aktivierendes Element. Beim „Clickern“ werden in der Vorlesung z. B. Multiple-Choice-Fragen[1] gestellt. Jeder Student erhält ein elektronisches Gerät, mit dem er zwischen den Antwortmöglichkeiten auswählen kann. Das Abstimmungsergebnis wird dann über einen Server an den Rechner des Dozenten übermittelt und kann mit Hilfe einer PowerPoint Folie präsentiert werden.

Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten mit dem Abstimmungsergebnis umzugehen. In unserem Versuch forderten wir die Studenten auf, noch einmal über die Lösung der Fragen mit den benachbarten Kommilitonen zu diskutieren. Diese Diskussion dauerte im Schnitt 4 Minuten. Im Anschluss daran stimmten die Studenten erneut ab und das 2. Abstimmungsergebnis wurde präsentiert. Danach erläuterte der Dozent im Gespräch mit den Studenten die richtige Antwort.

[1] Es gibt auch die Möglichkeit offene Fragen zu stellen, aber diese Variante wird hier nicht diskutiert.

Das Ziel der Diskussion zwischen den beiden Abstimmungen ist die vertiefte Verarbeitung der Inhalte sowie eine, entsprechend der konstruktivistischen Theorie, stärker individualisierte und eigenaktive Erarbeitung der Inhalte.

Theoretischer Hintergrund

Die Integration von Votingfragen in Vorlesungen - im Folgenden wird von „Clicker“-Vorlesungen gesprochen - wurde Anfang der 1990er vom Havard Physikdozenten Mazur entwickelt und hat sich seitdem weit in den USA und darüber hinaus verbreitet (Pilzer 2007, S. 187). Daher gibt es auch im englischsprachigen Bereich viele Untersuchungen zum Einsatz von Votingfragen in Vorlesungen. Die Untersuchungen reichen von der Akzeptanz der Studenten bis hin zum Vergleich des Lernerfolgs zwischen einer normalen Vorlesung und einer „Clicker“-Vorlesung.

Richard Hake (1997) hat den Lernfortschritt von über 6000 Studenten und Schülern an Colleges, Universitäten und Highschools untersucht, die mit und ohne Clickerkonzept unterrichtet wurden. Das Ergebnis für die Universitäten zeigt die Grafik rechts. Mit einem Vor- und Nachtest wurde der Lernzuwachs ermittelt. Die interaktiven Lehrmethoden liegen größtenteils über der Geraden mit der Steigung -0,3, während die traditionellen Lehrformen alle darunter liegen.

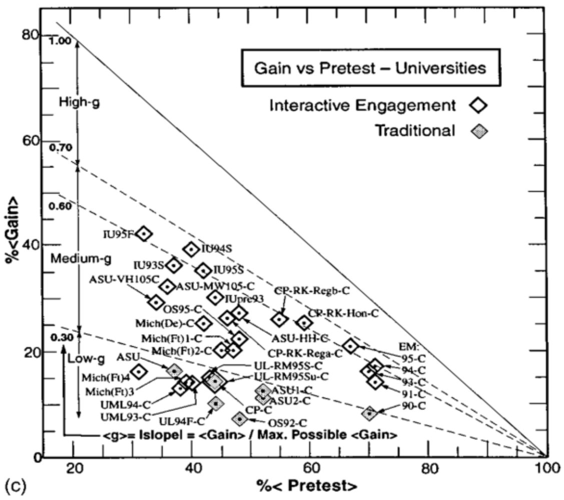


Abb.1: Lernzuwachs vor und nach der Unterrichtseinheit mit und ohne Votingfragen im Vergleich (aus Hake (1997, S. 67)

Deslauries, Schelew und Wiemann (2011) kommen in ihrer Studie ebenfalls zu dem Ergebnis, dass Studenten in „Clicker“-Vorlesungen mehr lernen als in traditionellen. Zudem stellten sie fest, dass die Anwesenheit der Studenten und das Engagement in der Vorlesung deutlich zunahmen. Besonders erwähnenswert ist diese Studie, weil die Studenten, ähnlich wie in vielen Mathematikveranstaltungen, neben der Vorlesung im Hörsaal wöchentlich Hausaufgaben abzugeben und Tutorien zu besuchen hatten.

Forschungsfragen und Design der Studie

Bisher gibt es keine Studie, die den Einsatz von Clicker in reinen Mathematikvorlesungen untersucht. Allenfalls liegen Untersuchungen in den englischen „Calculus“ Vorlesungen oder Mathematikvorlesungen im Service vor. Diese haben aber andere Ziele und sind anders gestaltet als typische Analysis I Vorlesungen. Daher wurden im Rahmen unserer Studie Votingfragen entwickelt, die verschiedene Kriterien zu erfüllen hatten. Die Probleme sollten sich, aufgrund der Ausrichtung der Veranstaltung, mit rein innermathematischen Themen befassen, eine spontane Antwort ermöglichen und in einer etwa 5minütigen Diskussionen zu lösen sein.

Hinsichtlich der Evaluation stellten sich folgende Forschungsfragen:

- Wie kann man am besten Votingfragen in Analysis I Vorlesung integrieren?
- Welche Folgen hat die Umgestaltung auf die Motivation, das Lernverhalten sowie auf die Aufmerksamkeit?
- Was sind beispielhafte gute Votingfragen bzw. welches sind Kriterien für gute Votingfragen?

Das Design der Integration der Votingfragen war folgendes: Für den Zeitraum von 3 Vorlesungen à 90 Minuten wurden 8 Votingfragen in etwa gleichverteilt in die „normale“ Vorlesung integriert. Nach ungefähr 30 Minuten „normaler“ Vorlesung – der Dozent trug während dieser Zeit die Inhalte an der Tafel vor - folgte eine Dauer von 6 bis 8 Minuten, in der die Studenten sich mit den Fragen beschäftigten.

Für unsere Forschung zeichneten wir die Diskussion zwischen den beiden Abstimmungen von jeweils 6 Diskussionsgruppen auf. Darüber hinaus entwickelten wir einen Fragenbogen, um die Studenten hinsichtlich ihrer Zufriedenheit mit der Intervention, ihrem Lernverhalten, ihrer Motivation und Aufmerksamkeit in einer „normalen“ und in einer „Clicker“- Vorlesung zu befragen. Der Fragebogen wurde ca. 4 Wochen nach der Intervention an die Studenten ausgegeben.

In einer Fokusgruppe à 5 Studenten wurden die 8 Votingfragen besprochen und bewertet. Ein Interview mit dem Dozenten rundete das Forschungsdesign ab.

Forschungsergebnisse

Erste Daten aus dem Fragebogen liegen vor. Bei den beiden Items „Die Art und Weise wie die Inhalte in einer „normalen“ Vorlesung dargeboten werden, finde ich gut“ bzw. „Die Art und Weise wie die Inhalte in einer „Clicker“- Vorlesung dargeboten werden, finde ich gut“ ergeben sich keine wesentlichen Unterschiede.

Hinsichtlich der Aufmerksamkeit ergibt sich ein anderes Bild. Die Abb. 2 zeigt das Ergebnis zu den beiden Items: „Gegen Ende einer „normalen“

Vorlesung fällt es mir immer schwerer, dem Dozenten zu folgen“ (dunkler Balken in der Abbildung) und „Gegen Ende einer Clicker-Vorlesung fällt es mir immer schwerer, dem Dozenten zu folgen“ (heller Balken in der Abbildung). Hier zeigt sich eine deutliche Verschiebung des Mittelwertes von 2,64 (SD: 1,3) auf 3,14 (SD: 1,27) hin zu einem geringeren Aufmerksamkeitsverlust bei „Clicker“-Vorlesungen. Das Kontroll-Item „Durch die Clickerfragen fällt es mir leichter, mich während der 90 Minuten zu konzentrieren“ bestätigt dieses Ergebnis. 36 Prozent der Studenten kreuzten „stimmt genau“ oder „stimmt“ an (6er Likertskala).

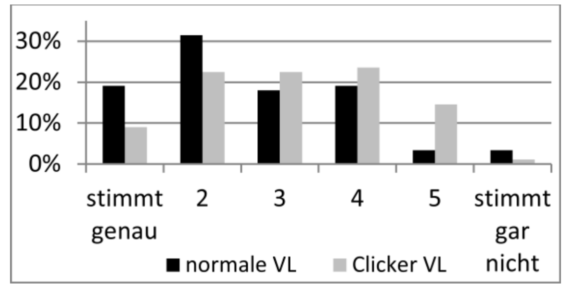


Abb. 2: Aufmerksamkeitverlust in „normalen“ und „Clicker“-Vorlesungen im Vergleich

Diskussion

Vielen Studenten fällt es schwer, sich über die ganze Zeit einer Vorlesung zu konzentrieren. Das zeigen unsere Forschungsergebnisse als auch die oben genannten Untersuchungen von Maddox und Hoole sowie Gerbig-Calcagni. Hier kann der Einbau von Votingfragen zu einer Verbesserung führen. Es stellt sich die Frage, ob die Aufmerksamkeit durch mehr Votingfragen pro Vorlesung z.B. nach jeweils 20 Minuten eine, noch gesteigert werden kann. Weiterhin ist noch offen, ob der Einschub von Votingfragen allen Studenten hilft oder eher den Leistungsstärkeren oder den Schwächeren.

Die Hauptstudie, die im Wintersemester 2012/13 folgt, wird die Fragen und Ergebnisse der Vorstudie aufgreifen.

Literatur

Brown, George/ Tomlinson, David (1979): How to... Improve lecturing. In: Medical Teacher, Vol 1, No 3, 1979

Deslauries, L., Schelew, E., Wieman, C. (2011): Improved Learning in a Large-Enrollment Physics Class, In: Sciencemag, Vol. 332, S. 862-864

Hake, Richard R. (1997): Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses, In: American Journal of Physics Teachers. Vol. 66. S64-74

Gerbig-Calcagni, Irene (2009): Wie aufmerksam sind Studierende in Vorlesungen und wie viel können sie behalten?. Dissertation. Weingarten

Maddox, H., Hoole, E. (1975): Performance decrement in the lecture. Educational Review, 28, 17-30.

Pilzer, Scott (2007): Peer Instruction in Physics and Mathematics. In: PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 11:2, 185-192

Martin Erik HORN, Frankfurt/Main

Die Geometrische Algebra der (3 x 3)-Matrizen

Mit der Algebra der (2 x 2)- bzw. (4 x 4)-Matrizen schuf Cartan, aufbauend auf Ideen von Graßmann, Clifford, Pauli und Dirac, eine geometrisch fundierte Algebra, die von David Hestenes (z.B. in Hestenes 2002 & 2003) und anderen Autoren (z.B. in Parra Serra 2009) didaktisch aus- und aufgearbeitet wurde. Sowohl in der hochschulischen Lehre wie auch im Bereich schulischen Unterrichtens hat sich der Einsatz der Geometrischen Algebra als ein Instrument zur Modellierung physikalischer Sachverhalte (siehe z.B. in Horn 2010 & 2011) wie auch originär mathematischer Bezüge bewährt.

Eines der zentralen didaktischen Motive für die Wirksamkeit der Geometrischen Algebra ist die konzeptuelle Eingänglichkeit dieses Ansatzes: Operatoren und Operanden werden durch gleichartige mathematische Objekte erfasst. So werden Pauli-Matrizen nicht nur als Basisvektoren des dreidimensionalen Euklidischen Raumes (und damit als Operanden, auf die eingewirkt wird) interpretiert, sondern sie stellen gleichzeitig Basis-Reflexionen (und damit Operatoren, die auf Operanden einwirken) dar. In gänzlich analoger Weise werden Dirac-Matrizen als Basisvektoren und zugleich als Basis-Reflexionen vier- oder fünfdimensionaler Raumzeiten genutzt.

Nun sind Pauli- und Dirac-Matrizen geradzahlig quadratische Matrizen. In der Physik spielen jedoch in wesentlichen Bereichen auch ungeradzahlige Matrizen eine wichtige Rolle. So sind beispielsweise die zur Beschreibung von Quarks wichtigen Gell-Mann-Matrizen (3 x 3)-Matrizen. Deshalb wird im Folgenden versucht, den didaktischen Ansatz, dass Operatoren und Operanten gleichartig zu denken sind, auf (3 x 3)-Matrizen zu übertragen.

1. Basisgrößen der Geometrischen (3 x 3)-Algebra

Erkenntnistheoretisch folgt dieser Ansatz dem Diktum, dass auf negative Zahlen verzichtet werden kann, da diese ebenfalls einer operationellen Deutung unterworfen werden. Deshalb werden die S_3-Permuationsmatrizen

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hier als räumliche Einheitsvektoren interpretiert. Das Quadrat der Vektoren

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_0$$

entspricht der Einheitsmatrix, was die vorgeschlagene Interpretation stützt, denn die Einheitsmatrix entspricht im Kontext der Geometrischen Algebra einem Basisskalar. Die Zahl sieben wird so beispielsweise durch $7e_0$ dargestellt. Ein Vektor in der Geometrischen (3 x 3)-Algebra ist wie üblich eine Linearkombination der drei Einheitsvektoren:

$$r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$

Jetzt können die möglichen Produkte zweier Einheitsvektoren berechnet werden. Es zeigt sich, dass nur zwei verschiedene Produkte existieren:

$$e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 e_1 = e_3 e_2 = e_1 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Reflexionen in der Geometrischen (3 x 3)-Algebra

In der Geometrischen Algebra werden Reflexionen durch Dreifachprodukte generiert. Die räumliche Reflexion des Vektors r_1 an einer Achse in Richtung eines Einheitsvektors $\hat{r}_2$ wird durch die simple Multiplikation $r_1' = \hat{r}_2 r_1 \hat{r}_2$ beschrieben. In Analogie dazu können die möglichen Reflexionen aller Einheitsvektoren aufgefunden werden:

$$\begin{array}{lll} e_1 e_1 e_1 = e_1 & e_2 e_1 e_2 = e_3 & e_3 e_1 e_3 = e_2 \\ e_1 e_2 e_1 = e_3 & e_2 e_2 e_2 = e_2 & e_3 e_2 e_3 = e_1 \\ e_1 e_3 e_1 = e_2 & e_2 e_3 e_2 = e_1 & e_3 e_3 e_3 = e_3 \end{array}$$

Diese Reflexionsgleichungen sind nur zu erfüllen, wenn die drei Einheitsvektoren e_1, e_2 und e_3 in einer Ebene liegen und jeweils einen Winkel von

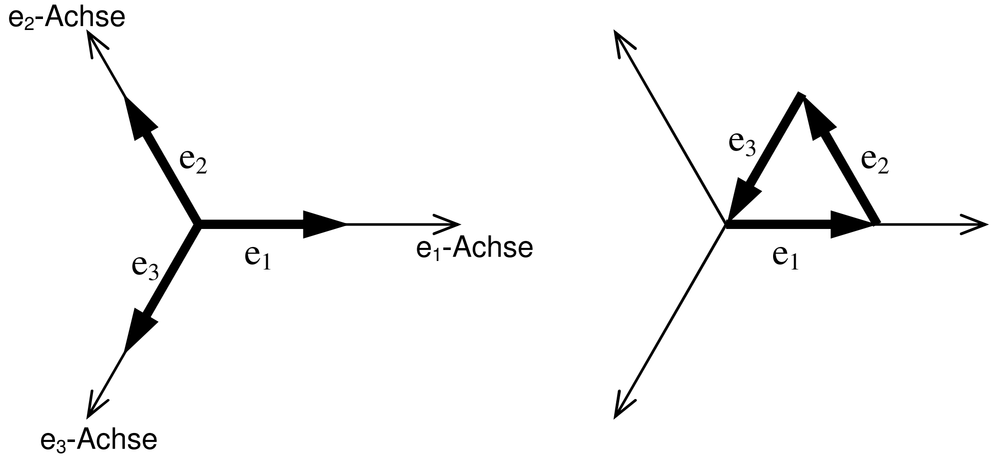


Abb. 1: Geometrische Lage der Einheitsvektoren (links) und alternative Repräsentation von Null (rechts).

120° einschließen (siehe Abb. 1). Dies hat Konsequenzen für die Darstellung der Größe Null. Üblicherweise wird die (3 x 3)-Matrix, deren Elemente durchgängig Null sind, mit dem neutralen Element der Addition identifiziert. Wir verharren auf der gleichen Stelle, wenn wir keinen Schritt gehen.

In Abb. 1 ist rechts jedoch eine alternative Darstellung der Größe Null angedeutet. Gehen wir einen Schritt in e_1-Richtung, sodann einen Schritt in e_2-Richtung und abschließend einen Schritt in e_3-Richtung, erreichen wir unsere ursprüngliche Position wieder und haben in der Summe eine Strecke der Länge Null zurückgelegt. Deshalb macht es Sinn, die an jeder Position mit der Zahl eins belegte (3 x 3)-Matrix

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$$

mit der Nullmatrix zu identifizieren. Es existieren somit unendlich viele mögliche Repräsentationen der Größe Null, was der Situation bei den reellen Zahlen entspricht. Nur bewegen wir uns bei den reellen Zahlen auf Achsen, die im Winkel von 180° zueinander stehen, wenn wir Größen wie $4 + (-4)$ oder $17 + (-17)$ als identisch auffassen.

3. Alternative Darstellungen von Minus Eins

Die Addition aller drei Einheitsvektoren e_1, e_2 und e_3 liefert das gleiche Resultat wie die Addition der beiden Produkte e_1e_2 und e_2e_1 mit der Einheitsmatrix e_0. Da die Einheitsmatrix als Skalar der Bedeutung von „plus eins“ interpretiert werden kann, hat dieser Sachverhalt konzeptuell einschneidende Konsequenzen. Die Summe $(e_1e_2 + e_2e_1)$ und eine Größe, die die Zahl eins repräsentiert, ergibt eine Größe, die Null repräsentiert. Deshalb ist es nur konsequent, den Ausdruck $(e_1e_2 + e_2e_1)$ als eine Größe, die die Zahl „minus eins“ repräsentiert, zu deuten.

Negative Zahlen sind nur im algebraischen Sinne negativ. Im geometrischen Sinn entstehen sie durch eine Richtungsumkehr. Liegt eine eineindeutige Verknüpfung geometrischer und algebraischer Strukturen vor, wie dies in der Geometrischen Algebra der Fall ist, kann die algebraische Negativität durch die geometrische Operation ersetzt werden. Wir benötigen dann keine negativen Zahlen mehr. Der Ausdruck $(e_1e_2 + e_2e_1)$ liefert diese Richtungsumkehr. Beispielsweise gilt wie erwartet: $(e_1e_2 + e_2e_1)\, e_2 = e_1 + e_3$

4. Eine Welt ohne negative Zahlen

In der Einleitung wurde die strukturelle Gleichartigkeit von Objekten, die Operatoren und Operanden repräsentieren, als eines der wesentlichen didaktischen Motive für die Wirksamkeit der Geometrischen Algebra diskutiert. Hinter diesem didaktischen Motiv steht ein tieferes Grundmuster, das in das Wesen der Geometrischen Algebra weist: die unumschränkte Verknüpfung algebraischer und geometrischer Beziehungen. „Geometrie ohne Algebra ist stumm – Algebra ohne Geometrie ist blind“, lautet das Diktum von Hestenes und Sobczyk (Gull et al. 1993), das diesen Sachverhalt treffend charakterisiert.

Auch bei der konzeptionellen Beschreibung negativer Größen kommt dieses strukturelle Muster zum Tragen. Es wird jedoch nicht sichtbar, wenn man die Negativität durch Zugrundelegen orthogonaler Koordinatenachsen verschleiert. Deshalb hat die Geometrisch (3 x 3)-Algebra auch eine erkenntnistheoretisch wichtige Funktion. Wir haben hier eine voll funktionsfähige Welt, die ohne negative Zahlen auskommt!

5. Ceterum Censeo

„In Anlehnung an den historischen Ausspruch spricht man heute von einem *Ceterum censeo*, wenn eine Forderung beharrlich wiederholt wird“ (Wikipedia 2012). Ebenso wie in meinen bisherigen Arbeiten zur Geometrischen Algebra möchte ich abschließend darauf hinweisen, dass die Lineare Algebra sowohl im schulischen wie im hochschulischen Kontext durch die Geometrische Algebra ersetzt werden sollte. Die Geometrische Algebra ist nicht nur in der klassischen Form der Pauli- und Dirac-Algebra weit wirkungsmächtiger und didaktisch einsichtiger als die bisher praktizierte Lineare Algebra. Sie bietet in der hier vorgestellten Form unter Nutzung von S_3-Permutationsmatrizen auch erkenntnistheoretisch tragfähige Vorzüge.

Literatur

Gull, S., Lasenby, A. & Doran, C. (1993). Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, 1175-1201.

Hestenes, D. (2002): New Foundations for Classical Mechanics. New York: Kluwer.

Hestenes, D. (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, 104-121.

Horn, M. E. (2010): Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen – Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, Münster: WTM-Verlag, 417-420.

Horn, M. E. (2011): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom. In: H.-J. Petsche & al. (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context. Graßmann Bicentennial Conference. Basel: Birkhäuser-Verlag, 435-450.

Parra Serra, J. M. (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3-4, 819-834.

Wikipedia (2012): Ceterum censeo Carthaginem esse delendam (23.03.2012, 19:00).

Hans HUMENBERGER, Wien, Berthold SCHUPPAR, Dortmund

Problemlösen und Vernetzungen bei Zerlegungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ in gleichmächtige summengleiche Teilmengen[1]

In Lehrplänen bzw. zugehörigen Präambeln und von Fachdidaktiker/innen wird immer wieder betont, dass *Vernetzen von Wissen* eine wichtige Forderung an nachhaltigen Unterricht ist; es sollen nicht nur kleinschrittige Häppchen linear nacheinander behandelt werden. Um dieser Forderung gerecht zu werden, eignen sich einerseits oft außermathematische Probleme („Realitätsbezüge"), andererseits aber auch rein innermathematische – wie das folgende. Beim *Problemlösen* und bei *heuristischen Vorgehensweisen* müssen allgemein implizit viele Vernetzungen geleistet werden, weil hier nicht nur nach einem vorher eintrainierten Schema gearbeitet wird, sondern Schüler/innen selbstständig einen bestimmten Problemkreis untersuchen (die Situation explorieren) und ihr bisheriges Wissen und Können vernetzend einbringen müssen. Hier bei unserem Thema, das auf ganz verschiedenen Klassenstufen behandelt werden kann (von der Grundschule bis Klasse 10 und sogar in der Lehramtsausbildung an der Universität), können diese Vernetzungen an zahlreichen Stellen explizit gemacht werden.

Das Einstiegsproblem: zwei gleichmächtige summengleiche Teilmengen

Unser Thema ist nicht realitätsbezogen, sondern primär innermathematisch. Schüler/innen verschiedenster Altersstufen können *selbständig* eine Situation explorieren, zu Vermutungen kommen, durch Probieren nebenbei viel rechnen und üben, nach Begründungen fragen und nach solchen suchen, d. h. im wahrsten Sinne des Wortes Mathematik *betreiben*. Das übergeordnete Lehrziel bei dieser Aufgabe ist also, *Mathematik als Prozess* wahrzunehmen – eine schon lange bestehende Forderung der modernen Mathematikdidaktik.

Problem: Für welche Werte von n kann man die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in *zwei* summengleiche Teilmengen mit gleich vielen Elementen aufteilen?

[1] Eine ausführlichere Fassung ist erschienen (gemeinsam mit B. Schuppar) in: Brinkmann, A. u. a. (Hrsg., 2012): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, Band 2, S. 115 – 125, Aulis Verlag.

Es ist klar, dass dies für $n = 1, 2, 3$ nicht klappt, erstmals funktioniert es bei $n = 4$: $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\}$; hier haben die Teilmengen je zwei Elemente und die Summe ist jeweils 5. Bei $n = 5$ und $n = 7$ kann es natürlich nicht klappen, denn n muss ja mit Sicherheit gerade sein, wenn wir *zwei Teilmengen mit gleich vielen Elementen* fordern („Gleichmächtigkeit"). Bei $n = 6$ kann es auch nicht klappen, denn die Summe $1 + \ldots + 6 = 21$ ist nicht gerade. Bei zwei *summengleichen* Teilmengen müsste die „Gesamtsumme" aber gerade sein. Bei $n = 8$ funktioniert es wieder, z. B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 7, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 4, 5, 8\} \cup \{2, 3, 6, 7\}$. Es gäbe noch andere Möglichkeiten der Zerlegung, aber diese sind besonders einfach und nahe liegend, weil man analog zu oben summengleiche Pärchen von außen nach innen bildet. Die Situation ist praktisch nur „verdoppelt", wobei diese „Verdopplung" auf zwei verschiedene Weisen passieren kann (siehe Abbildung 2):

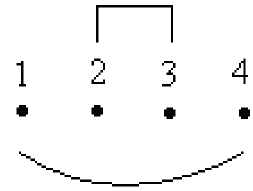


Abbildung 1 Pärchen

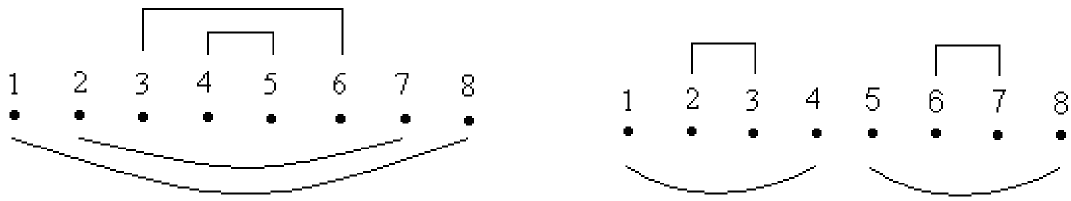


Abbildung 2 Pärchenbildungen bei $n = 8$

Hier sollte die Verallgemeinerungsfähigkeit der Idee bzw. des Musters „Pärchenbildung" betont werden, wobei *arithmetische* und *geometrische* Aspekte eine wichtige *Vernetzung* finden. Mathematik als die Wissenschaft von Mustern kann somit in einem sehr elementaren und frühen Stadium prozesshaft erfahren werden.

Diese Idee der *Pärchenbildung* kann man auch anders sehr illustrativ darstellen: Wir stellen die Zahlen $\{1, 2, \ . \ . \ . \ , \ n\}$ mittels einer „Zahlentreppe" („Stäbe", Vernetzung zu geometrischen Repräsentationen von natürlichen Zahlen, vgl. Abb. 3) dar und sehen auch in dieser Darstellungsform: Bei den Vielfachen von 4 kann man volle Viererblöcke (Vierertreppen) bilden und aus jeder Vierertreppe durch passendes Umlegen der ersten beiden Stäbe auf die zweiten beiden ein *Rechteck* mit Breite 2 machen. Alle diese Rechtecke lassen sich in der Mitte teilen: mit den jeweils linken Hälften bildet man die eine, mit den jeweils rechten die andere Teilmenge, die dann natürlich sowohl gleichmächtig als auch summengleich sind.

Bei $n = 9, 10, 11$ kann es wieder nicht klappen, bei $n = 12$ findet man dagegen leicht eine Zerlegung.

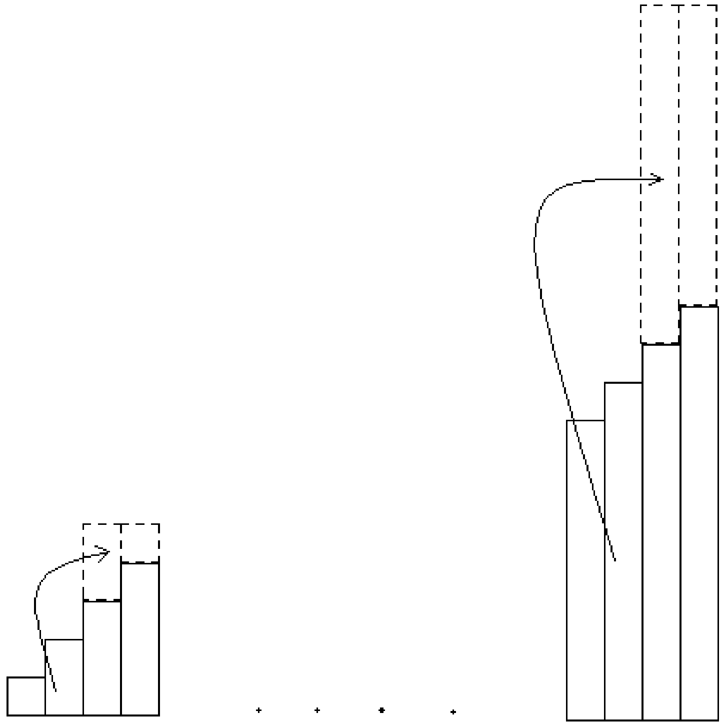


Abbildung 3 Zahlentreppe

Schüler/innen – auch schon sehr junge! – können ganz selbständig durch Probieren auf die **Vermutung** kommen: Beginnend mit $n = 4$ wird es vermutlich bei jedem vierten Wert von n klappen, d. h. bei $n = 4, 8, 12, 16, ...$ (das sind die *Vielfachen von 4*) und bei den anderen nicht. Auf ganz natürliche Weise ergibt sich aus dem *Prozess* quasi von selbst ein *Begründungsbedürfnis* für diese Vermutung – ohne dass die Lehrkraft das von sich aus ins Spiel bringen müsste. Eine Begründung ist leicht möglich.

Begründung:

Bei den Vielfachen von 4 ($n = 4k$) funktioniert es mit den summengleichen Pärchen von außen nach innen, die Situation von $n = 4$ ist da nur „ver-k-facht" (auf eine der beiden in Abb. 2 dargestellten Arten). Die ungeraden Zahlen ($4k + 1$ und $4k + 3$) kommen für n nicht in Frage, da man dann $\{1, 2, ..., n\}$ nicht in zwei *gleichmächtige* Teilmengen aufteilen kann. $n = 4k + 2$ kommt ebenfalls nicht in Frage, weil die Summe $1 + 2 +…+ n$ ungerade wäre (dann könnte man nicht zwei *gleiche Teilsummen* erreichen). Für diese Erkenntnis ist die Summenformel für $1 + 2 +…+ n$ noch gar nicht nötig: Die Summe $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ist gerade; mit 5 ist die Summe sicher ungerade, mit der 6 aber weiterhin ungerade; mit der 7 dann gerade und mit der 8 wieder gerade; dies geht nach der 8 natürlich in diesem 4-Rhythmus weiter, so dass man sagen kann, dass die Summe von 1 bis 6 (10, 14, 18, …, $4k + 2$, …) sicher immer ungerade ist. So eine Begründung ist schon in der Grundschule denkbar. In Klasse 10 kann natürlich mit der Summenformel gearbeitet werden.

Bemerkungen:

- Schon ganz junge Schüler/innen – Klasse 5 und auch Grundschule – können sich mit vielfältigen Aktivitäten (Probieren, Strategien) einbringen, auch wenn entsprechende Begründungen noch nicht immer erfolgen werden. Allein die Fragestellung gibt zu „übendem Entdecken" bzw. „entdeckendem Üben" (wie es H. Winter einmal treffend genannt hat) reichlich Anlass, wobei zwangsläufig auch jede Menge Vernetzungen passieren, auch wenn sie nur implizit ablaufen. Dieses Thema eignet sich sicher auch für differenzierenden Unterricht: Während schwächere Schüler/innen vielleicht nur rechnen, probieren und üben, erkennen andere vielleicht selbständig entsprechende Muster und noch andere evtl. sogar Begründungen; es müssen nicht alle Lernenden gleich mit dem Thema umgehen und gleich weit kommen!
- Ein wichtiger Aspekt ist hier auch der Unterschied notwendige – hinreichende Bedingungen. Genauer: Es ist zu zeigen, dass die obigen *notwendigen* Bedingungen („n muss gerade sein" und „die Summe $1 + … + n$ muss gerade sein") auch *hinreichend* dafür sind, dass es eine gewünschte Zerlegung gibt. Selbst wenn man in der Grundschule nach keiner zugehörigen „Begründung" Ausschau hält, sondern nur das Muster entdeckt („Es klappt für $n = 4, 8, 12, ...$ und für die weiteren 16, 20, … wird es wohl auch klappen"), dann haben die Grundschulkinder schon einiges geleistet!

Die weiteren Fälle von „3 (s) summengleiche und gleichmächtige Teilmengen" und eine weiter gehende didaktische Reflexion findet man in der ausführlicheren Version (Fußnote auf der ersten Beitragsseite). In Humenberger/Schuppar 2011 wird das analoge Problem beschrieben, bei dem auf die Bedingung „gleichmächtig" verzichtet wird.

Literatur

Humenberger, H., Schuppar B. (2011): Problemlösen und Vernetzungen bei Zerlegungen von {1, 2, …, n} in summengleiche Teilmengen. In: Brinkmann, A. u. a. (Hrsg., 2011): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, Band 1, S. 82–93, Aulis Verlag.

Sabrina HUNKE, Dortmund

Informelle Überschlagsstrategien

1. Hintergrund

In der Vergangenheit wurde nicht selten kritisiert, dass das Überschlagsrechnen zu stark auf die Behandlung der Rundungsregeln beschränkt wird (vgl. z.B. Blankenagel 1999). Damit einher geht die Forderung einer Weiterentwicklung einer Didaktik des Überschlagsrechnens. Ausgehend davon ergibt sich u.a. die Auseinandersetzung mit verschiedenen Aufgabentypen zum Überschlagsrechnen. Zwei gängige Aufgabentypen für die Grundschule sind „Wie viel ungefähr?“ und „Reicht das?“, die in sogenannte *direkte* und *indirekte Überschlagsfragen* unterschieden werden können (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001, 178).

Direkte Überschlagsfragen („Wie viel ungefähr?“) zeichnen sich dadurch aus, dass eine Zahl als Ergebnis und somit eine formelle Überschlagsstrategie (z.B. Runden) benötigt wird. *Indirekte* Überschlagsfragen („Reicht das?“) hingegen können auch globaler (*informell*) gelöst werden, eine Zahl als Ergebnis ist nicht zwingend erforderlich (vgl. ebd.). Van den Heuvel-Panhuizen (2001) sieht deshalb in indirekten Überschlagsfragen den geeigneteren Aufgabentyp zum Einstieg ins Überschlagsrechnen.

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, wie solch ein globaleres Vorgehen aussieht. Vorhandene Studien zu Überschlagsstrategien (z.B. Reys et al. 1982; Lemaire & Lecacheur 2002; Star et al. 2009) stellen bisweilen formelle Überschlagsstrategien wie das Runden und das Abbruchverfahren in den Fokus. Einen empirischen Nachweis oder eine qualitative Beschreibung für besondere, informelle Strategien zur Lösung von indirekten Überschlagsfragen wie „Reicht das?“ gibt es bisher nicht. Dieser und weiteren Fragen wurde deshalb in der folgenden Untersuchung nachgegangen (vgl. Hunke 2012).

Im Rahmen der Untersuchung wurden 42 Kindern des vierten Schuljahres im klinischen Interview am Beispiel der Addition und Multiplikation je zwölf Aufgaben des Typs „Reicht das Geld?“ oder „Wie viel ungefähr?“ vorgelegt. Neben den Vorgehensweisen der Kinder beim Überschlagsrechnen wurde das Lösungsverhalten außerdem in den Bereichen Flexibilität, Interpretation von Überschlagsergebnissen und Fehler untersucht.

2. Untersuchungsergebnisse

Bei der qualitativen Analyse der Interviews ließen sich Strategien herausstellen, die sich weder typischen formellen Überschlagsstrategien noch genauen Rechnungen zuordnen ließen. Diese *informellen Überschlagsstrategien* traten fast ausschließlich bei den indirekten „Reicht das Geld?"-Aufgaben auf, wo sie einen hohen Stellenwert eingenommen haben. Insgesamt ließen sich diese Strategien bei zwölf Kindern beobachten, sodass mehr als die Hälfte aller Kinder, die die „Reicht das?"-Aufgaben gelöst haben, mindestens einmal auf eine informelle Strategie zurückgegriffen haben. Bei der Multiplikation stellten sie sogar die Hauptstrategie dar.

Gemeinsam ist den informellen Strategien, dass anders als bei den formellen Überschlagsstrategien keine (vollständige) Rechnung durchgeführt wurde. Insgesamt konnten sechs Substrategien ausgemacht werden:

1. *Genaue Rechnung wird abgebrochen, keine Zahl als Ergebnis*
2. *Genaue Rechnung wird abgebrochen, Zahl als Ergebnis*
3. *Genaue Rechnung wird abgebrochen, Restbetrag mit Differenz verglichen, keine Zahl als Ergebnis*
4. *Rechnung mit teilweise gerundeten Werten wird abgebrochen, keine Zahl als Ergebnis*
5. *Rechnung mit teilweise gerundeten Werten, Zahl als Ergebnis*
6. *Schätzen*

Am häufigsten ließ sich die erstgenannte Strategie beobachten. Deshalb sollen die informellen Überschlagsstrategien im Folgenden am Beispiel dieser Hauptstrategie illustriert werden. So löst Mira (siehe Transkript) die Aufgabe 274 € + 68 € (Budget 350 €), indem sie zunächst mit einer Rechnung beginnt, die der halbschriftlichen Strategie „schrittweise" sehr nahe kommt. Den zweiten Summanden zerlegt sie dabei geschickt in 30 + 38, sodass ihre letzte Teilrechnung 304 + 38 wäre. An dieser Rechnung „sieht" sie jedoch schon, dass das Budget von 350 € nicht mehr überschritten werden kann („[…] und das hat gepasst"). Sie hat somit eine genaue Rechnung abgebrochen, beim letzten Rechenschritt geschätzt und „Zahlensinn" bewiesen.

Andere Kinder benutzen in diesem Zusammenhang Formulierungen wie „und dann kann man das schon sehen" oder „und dann noch das Kleingedruckte". Gerade solche Ausdrücke liefern Hinweise darauf, dass die Kinder hier auf ihr Alltagswissen zurückgreifen und die Aufgabe auf ‚natürliche' Weise und nicht nach vorgefertigten und ggf. unverstandenen Regeln lösen.

A 1.2a)	Du hast 350 €. Du kaufst eine Spielekonsole für 274 € und ein Spiel dazu für 68 €. Reicht das Geld?
Miras Rechnung:	274 + 60 = 274 + 30 + 30; 274 + 30 = 304; + 38 (verbalisiert als 83) → passt

M: (liest leise die Aufgabe, nach 25 Sekunden) Passt.

I: Erklär mal.

M: Als erstes hab ich 274 plus 60 gerechnet, das waren, also eher gesagt, ich hab von der 60 30 abgezogen, hab die dann zu den 70 gepackt und das wären dann 304. (…) Und dann hab ich die restlichen 83 dazugerechnet **und das hat gepasst**.

I: Ein anderes Kind hat die Aufgabe gerechnet und gesagt, dass es nicht reicht. Kannst du dir vorstellen, wie das Kind vorgegangen ist?

M: Ich glaub**, das hat nicht in Schritten gerechnet**, vielleicht.

I: Aber man muss ja auch nicht ganz genau rechnen.

M: Mhm. Vielleicht den Überschlag falsch gemacht.

I: Ja und wie hast du das dann da gemacht?

M: Ich rechne das… **ich rechne das immer in Schritten**.

I: Kannst du es denn auch mit Überschlag machen?

M: Ja… Also beide Zahlen mit Überschlag, das wären dann… das wären 370

Insbesondere deuten solche Ausdrücke auch darauf hin, dass die Kinder bewusst auf ein genaues Ergebnis verzichten und sie somit wissen, was *ungefähr* bedeutet. Bei den Kindern, die einen formellen Überschlag mithilfe der Rundungsregeln durchgeführt haben, war dies nicht immer der Fall (vgl. z.B. Hunke 2012, 265f.).

Am Beispiel von Mira wird weiterhin deutlich, dass sie ihr Vorgehen von einem (schulisch erlernten) Überschlag abgrenzt, da sie diesen als alternativen Lösungsweg vorschlägt („Ich glaub, das [andere Kind,] hat nicht in Schritten gerechnet […]. Vielleicht den Überschlag falsch gemacht“).

3. Fazit und Konsequenzen für den Unterricht

Für die informellen Überschlagsstrategien lässt sich festhalten, dass der Lösungsweg zu Beginn der Lösung noch nicht zwingend feststeht, diese Strategien Momente des Schätzens enthalten, die Kinder die Ungenauigkeit aushalten und somit die Bedeutung des Begriffs „ungefähr“ verinnerlicht haben. Weiterhin sind diese Strategien zumeist weder schulisch erlernt noch regelgeleitet, sondern alltagsnah.

Somit erfüllen informelle Überschlagsstrategien wesentliche Eigenschaften, die einem Zahlensinn zugeschrieben werden (vgl. Lorenz 1998, 12), und sie liefern Hinweise auf flexible Rechenkompetenzen der Kinder im

Sinne des Emergenzansatzes (vgl. Rathgeb-Schnierer 2006) sowie Anknüpfungspunkte zum Konzept des Zahlenblicks (‚Rechnen ohne zu rechnen') (ebd.).

Daraus ergibt sich die Forderung, Lehrkräfte für diese Strategien zu sensibilisieren, damit im Unterricht angemessen auf diese reagiert und daran angeknüpft werden kann. So können diese Strategien aufgegriffen werden, um die Bedeutung von Ungenauigkeit zu thematisieren, ohne sofort auf einen regelgeleiteten formellen Überschlag zurückzugreifen. Damit unterstützt die vorliegende Untersuchung die These, dass sich indirekte Überschlagsfragen besonders zum Einstieg ins Überschlagsrechnen eignen (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001). Darüber hinaus können sie als besonders substanziell erachtet werden, da sie anders als die direkten „Wie viel ungefähr?"-Aufgaben dazu führen, dass sich Kinder von den Rundungsregeln lösen. Für weitere Analysen der Vorzüge von „Reicht das Geld?"-Aufgaben sei auf Hunke (2011, 2012) verwiesen.

Literatur

Blankenagel, J. (1999): Vereinfachen von Zahlen. In: mathematik lehren - Ganz genau und ungefähr. 93, 10-14.

Hunke, S. (2011): „Reicht das Geld?" - wie Viertklässler Überschlagsergebnisse interpretieren. In: R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM, 415-418.

Hunke, S. (2012): Überschlagsrechnen in der Grundschule - Lösungsverhalten von Kindern des vierten Schuljahres bei direkten und indirekten Überschlagsfragen. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Lemaire, P. & Lecacheur, M. (2002): Children's strategies in computational estimation. In: Journal of experimental child psychology, 82, 281-304.

Lorenz, J. H. (1998): „Rechenstrategien und Zahlensinn". In: Grundschulunterricht, 6, 11-13.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006): Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Reys, R.E., Rybolt, J.F., Bestgen, B.J. & Wyatt, J. W. (1982): Processes used by good computational estimators. In: Journal for Research in Mathematics Education, 13 (3), 183-201.

Star, J., Rittle-Johnson, B., Lynch, K. & Perova (2009): The Role of Prior Knowledge in the Development of Strategy Flexibility: The Case of Computational Estimation. In: ZDM- The International Journal on Mathematics, 41 (5), 569-579.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001): Children learn Mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Utrecht: Freudenthal Institut.

Uta HAESEL-WEIDE, Dortmund

Ablösung vom zählenden Rechnen: Struktur-fokussierende Deutungen

Dass mathematische Muster und Strukturen zum (flexiblen) Rechnen genutzt werden, gilt als Konsens in der Mathematikdidaktik. Gleichermaßen ist bekannt, dass Kinder, die verfestigt zählend rechnen, keine Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen sehen und nutzen. Bei der Ablösung vom zählenden Rechnen ist deshalb ein zentrales Ziel, mathematische Strukturen zu erkennen, zu konstruieren und zu nutzen. Im Rahmen des ZebrA-Projekts (Zusammenhänge erkennen und besprechen – Rechnen ohne Abzählen) wurden unterrichtsintegrierte Förderbausteine entwickelt, um Kinder gezielt anzuregen, verschiedene strukturelle Deutungen als Alternative zum zählenden Rechnen zu entwickeln und untereinander zu diskutieren.

Eine mathematische Struktur kann auf zweierlei Weisen in den Blick genommen werden. Strukturen, als „Beziehungen zwischen den Bestandteilen eines Musters“ (Lüken, 2010, S. 573) können beschrieben, fortgesetzt oder mit der Struktur eines anderen Musters verglichen werden. Erkannte Strukturen können bei der Lösung von Aufgaben eines Musters genutzt werden, z.B. wird das Ergebnis von 17-7=10 genutzt, um das Ergebnis der Aufgabe 17-8= __ zu ermitteln. Dabei sind die Strukturen nicht empirisch greifbar und sichtbar, sondern müssen von jedem Individuum in die Zeichen hineingedeutet werden (vgl. Steinbring, 2000). Es geht also darum, in bzw. zwischen den Zeichen eines Musters Strukturen zu erkennen bzw. zu konstruieren. Dies ist für zählend rechnende Kinder eine Herausforderung, da verfestigt zählendes Rechnen dadurch charakterisiert wird, dass eben kein Zusammenhang zwischen Aufgaben hergestellt wird, sondern Aufgaben isoliert voneinander betrachtet und bearbeitet werden. Zur Ablösung vom zählenden Rechnen ist es jedoch notwendig, Beziehungen zwischen Zahlen und Operationen zu erkennen und zu nutzen, da jedes andere Vorgehen beziehungsreiches Handeln erfordert.

Während in einer quantitativen Studie die Wirksamkeit der Förderung untersucht wird (vgl. Wittich, Nührenbörger & Moser Opitz, 2010), stellt die hier vorgestellte qualitative Studie die Art und Weise der Auseinandersetzung der zählend rechnenden Kinder mit den Bausteinen dar. Dazu wird ein Spektrum an verfestigt zählenden Rechnern ausgewählt, deren Deutungen bei der Arbeit an den Förderbausteinen analysiert wird. Um vielfältige Deutungsprozesse anzuregen, arbeiten die Kinder in einem kooperativen Setting in einem heterogen zusammengesetzten Partnerteam und werden durch das methodische Design immer wieder zum Austausch über die Aufgaben angeregt. Diskursive Aufgaben und die möglicherweise unterschiedlichen Deutungen der Kinder haben das Ziel, die zählend rechnenden Kinder zu einer Sicht auf Strukturen anzuregen und ihre Deutungen zu erweitern. Aus Sicht der qualitativen Studie interessiert, welche Deutungen die Kinder vornehmen: Inwiefern fokussieren sie auf Zählaktivitäten während der Deutung der Aufgabe oder (und wenn ja, wie) sind sie in der Lage, mathematische Strukturen zu erkennen und zu nutzen? Welche Zahl- oder Aufgabenbeziehungen werden von ihnen auf welche Weise gesehen?

Einblick in den Baustein: Verwandte Subtraktionsaufgaben

In der Fördereinheit „Verwandte Subtraktionsaufgaben“ beschäftigen sich die Kinder mit Aufgabenpaaren, die sie zunächst für sich allein lösen bzw. zu einer vorgegebenen Aufgabe selbst entwickeln sollen (vgl. Abb. 1). In einem zweiten Schritt werden strukturell parallele Aufgabenpaare miteinander verglichen (vgl. Abb. 2). Über die zu findenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede soll ein Blick über die einzelnen Zahlen und Aufgaben hinaus auf die mathematische Struktur gerichtet werden.

Erster Schritt: Aufgabenpaare lösen

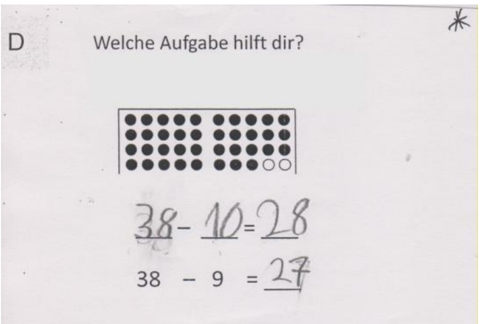


Abb. 1: Bearbeitung von Mary

Die Schülerin Mary findet zur vorgegebenen Aufgabe 38-9=__ eine passende einfache Aufgabe. Diese löst sie auch zuerst, allerdings zählt sie dabei an den Fingern rückwärts. Anschließend schaut sie auf die gegebene Aufgabe, sagt: „Das ist dann einer weniger“ und notiert 27 als Ergebnis von 38-9. Mary sieht also an dieser Stelle eine Struktur in den Zeichen. Sie betrachtet die Zahlbeziehungen von 10 und 9 und überträgt diese Beziehung auf die Ergebnisse. Dass die Verringerung des Subtrahenden zu einer Erhöhung der Differenzen führt, beachtet sie nicht. Die Szene zeigt zweierlei:

(1) Mary leitet aus dem Ergebnis einer zählend ermittelten Aufgabe das Ergebnis der Nachbaraufgabe ab. Obwohl sie das Ergebnis der aus mathematikdidaktischer Sicht „einfachen“ Aufgabe 38-10 nicht abrufen kann, scheint sie in der Lage zu sein, Strukturen zu erkennen und ist motiviert, diese auch zu nutzen.

(2) Ferner reicht das Erkennen von Zahlbeziehungen bei den Nachbaraufgaben zur Subtraktion nicht aus, um Aufgabenbeziehungen zu

konstruieren. Dies ist nur möglich, wenn die Beziehungen unter Berücksichtigung der Operationen betrachtet werden.

Zweiter Schritt: Aufgabenpaare vergleichen

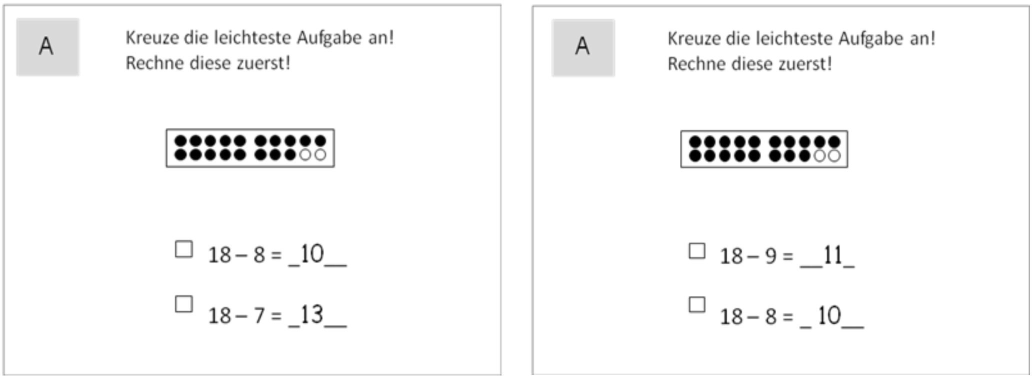


Abb. 2a & 2b: Karte von Thomas Karte von Max

Dem Schülerpaar Thomas und Max aus einer zweiten Klasse mit Gemeinsamen Unterricht liegen folgende bearbeitete Karten vor (vgl. Abb. 2a & 2b). Die Kinder haben bereits festgestellt, dass die Aufgabe 18-8 auf beiden Karten gleich ist. Die Lehrerin kommt nun hinzu und fordert die Kinder auf auch zu betrachten, was unterschiedlich ist.

Thomas	Hey hier ist das ja neun (*zeigt auf die „9“ der Aufgabe „18 – 9 = 11“*) und da ist es acht (*zeigt auf die „8“ der Aufgabe „18 – 8 = 10“ auf seinem Arbeitsblatt*) also einer mehr ist es dann und da (*zeigt auf die „18“ der Aufgabe „18 – 7 = 13“*) ist einer weniger.
Lehrkraft	Mhm. (*7 sec. Pause*) Stimmen denn dann auch alle Ergebnisse so wie sie sind?
Thomas	Mmm nein. Da hab ich zehn (*zeigt auf die „10“ der Aufgabe „18 – 8 = 10“*) und dreizehn (*zeigt auf die „13“ der Aufgabe „18 – 7 = 13“*) und Max hat zehn (*zeigt auf die „10“ der Aufgabe „18 – 8 = 10“ auf Ms Arbeitsblatt*) und elf (*zeigt auf die „11“ der Aufgabe „18 – 9 = 11“*).

Der zählende Rechner Thomas beschreibt die Beziehungen zwischen den Subtrahenden. Er fokussiert auf das sich verändernde Zeichen in den vorgegebenen Aufgaben und betrachtet den Ausschnitt aus der Folge der natürlichen Zahlen (7, 8, 9). Dabei scheint er die Subtrahenden als Mengen zu deuten und die Veränderungen ebenfalls kardinal zu betrachten. Obwohl eine Zahlenfolge betrachtet wird, deutet Thomas diese nicht im Kontext des zählenden Rechnens, sondern zeigt eine Deutung mit Blick auf Strukturen zwischen Zahlen. Allerdings zieht er keine Folgerungen für die Aufgabenbeziehung. Weder von sich aus noch auf Nachfrage der Lehrerin scheint er die Konsequenzen aus den Beziehungen der Subtrahenden für die Ergebnisse zu betrachten. Thomas bleibt bei der Betrachtung der Zahlbeziehung und nimmt keine Aufgabenbeziehung in den Blick.

Zusammenfassende Interpretation beider Szenen

Beide Szenen zeigen Deutungen verfestigt zählend rechnender Kinder, die über den Bezug zum Zählen hinaus gehen. Es wird sichtbar, dass die Kinder die für die Aufgabenpaare zentrale Struktur der sich im Sinne der Zahlreihe verändernden Subtrahenden erkennen. Diese wird von beiden Kindern kardinal interpretiert, d.h. sie zeigen an dieser Stelle, dass sie Zahlen eine andere Bedeutung zuweisen können als die Funktion als Zählzahl. Mary nutzt die erkannte Zahlbeziehung, um die Ergebnisse in analoger Beziehung zu bestimmen. Sie hat die Motivation, das zählend ermittelte Ergebnis zu nutzen, um sich weitere langwierige Zählprozesse zu ersparen (vgl. Gaidoschik, 2010). Allerdings berücksichtigt sie die gegensinnigen Veränderungen nicht, die bei dieser Art der Verwandtschaft von Subtraktion gelten. Thomas zieht keine Folgerungen aus den erkannten Beziehungen der Subtrahenden für die Ergebnisse. Auch auf Nachfrage der Lehrerin scheint er keine Beziehungen zwischen den sich verändernden Subtrahenden und entsprechenden Differenzen zu sehen. Allerdings erkennt auch sein leistungsstärkerer Partner an dieser Stelle nicht, dass die Ergebnisse so nicht stimmen können. Beide Szenen zeigen die Komplexität, die bewältigt werden muss, um Strukturen zwischen Nachbaraufgaben bei der Subtraktion zum Ableiten von Ergebnissen zu nutzen. Aus den erkannten Zahlbeziehungen unter Berücksichtigung der Operationen Erkenntnisse für die Ergebnisse zu ziehen, scheint (nicht nur) für zählend rechnende Kinder eine große Herausforderung zu sein. Ablöseprozesse vom zählenden Rechnen bewegen sich im Spannungsfeld einer ersten Annäherung an Zahlbeziehungen bei gleichzeitiger Aufrechterhaltung von zählenden Vorgehensweisen und nur einer geringen Fokussierung auf Operationsbeziehungen. Sie sind durch einzelne Fördermaßnahmen in Bewegung zu bringen, aber nicht leicht aufzulösen.

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt a. M: Peter Lang.

Lüken, M. (2010). Ohne "Struktursinn" kein erfolgreiches Mathematiklernen - Ergebnisse einer empirischen Studie zu Bedeutung von Mustern und Strukturen am Schulanfang. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 573-576

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. In: Journal für Mathematikdidaktik, 1, 28-49.

Wittich, C.; Nührenbörger, M. & Moser Opitz, E. (2010). Ablösung vom zählenden Rechnen – Eine Interventionsstudie für die Grund- und Förderschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 935-938.

Jens HÖCHSMANN, München

Über den beruflichen Bildungsweg zum Studium Bedingungsfaktoren von gymnasialem und beruflichem Mathematikunterricht im Vergleich

Mehr als ein Drittel aller Hochschulzugangsberechtigungen werden in Bayern an einer beruflichen Schule, überwiegend Fachoberschulen und Berufsoberschulen, erworben. Der vorliegende Beitrag geht daher der Frage nach, inwiefern sich diese Schularten von allgemeinbildenden Gymnasien hinsichtlich Zusammensetzung der Schülerschaft, Behandlung mathematischer Lehrinhalte und Zusammensetzung der Lehrerschaft unterscheiden.

Berufliche Oberschulen Bayern

Fachoberschulen (FOS) und Berufsoberschulen (BOS), die in Bayern unter der Bezeichnung „Berufliche Oberschulen Bayern" (BOB) zusammengefasst werden und organisatorisch eine Einheit bilden, sind zwei- bis dreijährige Vollzeitschulen, die in den Profilen Technik, Wirtschaft, Sozialwesen, Gestaltung sowie Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie ausbilden und auf ein Studium vorbereiten sollen. Beide Schularten vermitteln zum Ende der 12. Jahrgangstufe die Fachhochschulreife, zum Ende der 13. Jahrgangsstufe die fachgebundene, bei entsprechenden Fremdsprachenkenntnissen die allgemeine Hochschulreife. Zugangsvoraussetzung ist ein mittlerer Schulabschluss, bei der BOS zusätzlich eine abgeschlossene Berufsausbildung.

Schülerschaft

Über die Zusammensetzung der Schülerschaft an den beruflichen Oberschulen Bayerns liegen keine belastbaren Studien vor. Aufgrund großer Parallelen zwischen bayrischen Fach- und Berufsoberschulen und baden-württembergischen beruflichen Gymnasien (hinsichtlich Eingangsvoraussetzungen, Abschlüssen, Schulform, Profil, Adressatenkreis) lässt sich jedoch vermuten, dass sich die Schülerinnen und Schüler dieser Schularten ähneln und daher wesentliche Ergebnisse der an baden-württembergischen Schulen durchgeführte TOSCA-Studie sich auch für einen Vergleich zwischen allgemeinbildenden Gymnasien und Fach- und Berufsoberschulen Bayerns heranziehen lassen. Aus diesem Grund sollen hier zunächst einige Resultat der TOSCA-Studie referiert werden.

TOSCA zeigt, dass die Schülerschaft an den beruflichen Gymnasien in Hinblick auf Schulbiographie und Herkunft heterogener zusammengesetzt ist als die Schülerschaft an allgemeinbildenden Gymnasien. Auch weisen

Schülerinnen und Schüler beruflicher Gymnasien häufig einen schwächeren sozioökonomischen Hintergrund und geringeres kulturelles Kapital auf als Schülerinnen und Schüler (vgl. Maaz, Chang & Köller, 2004) allgemeinbildender Gymnasien. Unterschiede sind ferner hinsichtlich der Studienneigung zu konstatieren: Wenngleich ein vergleichbarer Anteil an Schülerinnen und Schülern ein Studium anstrebt, beabsichtigen Abiturienten beruflicher Gymnasien häufiger eine Fachhochschule statt eine Universität zu besuchen (vgl. Watermann & Maaz, 2004). Bei der Betrachtung der Mathematikleistungen ist laut TOSCA zwischen verschiedenen Profilen zu unterscheiden. Während die Schüler des technischen Gymnasiums mit Schülern der allgemeinbildenden Gymnasien Schritt halten können, zeigen die Besucherinnen und Besucher der anderen Profile geringere kognitive Grundfertigkeiten, eine geringere mathematische Grundbildung sowie schwächere voruniversitäre Mathematikleistungen (dabei schneiden Schülerinnen und Schüler des Wirtschaftszweiges besser ab als Schülerinnen und Schüler der sozial-künstlerischen Profilrichtungen). Diese Unterschiede treten allerdings nur im Vergleich zu den Altersgenossen allgemeinbildender Gymnasien in Baden-Württemberg, nicht aber im Bezug zum Mittelwert aller bundesdeutschen Gymnasiasten auf (vgl. Watermann, Nagy & Köller, 2004).

Daten des bayrischen Landesamts für Statistik und die ähnlichen Ergebnisse der beiden Bundesländer in der TOSCA teilweise zugrundeliegenden TIMSS/III-Studie lassen ähnliche Unterschiede bei einem Vergleich der beiden oben genannten bayrischen Schularten plausibel erscheinen.

Mathematische Inhalte

Der Vermittlung mathematischer Inhalte wird an der FOS (BOS) mit 4 (5) Wochenstunden in den nicht-technischen Profilen und mit 6 (7) Wochenstunden im technischen Profil sowie einer für alle Schülerinnen und Schüler verpflichtenden schriftlichen Abiturprüfung große Bedeutung zugemessen. Anders als am allgemeinbildenden Gymnasium, an dem sich die Oberstufenschüler mit „komplexeren mathematischen Denkweisen“ (Bayrisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2004) befassen sollen, betonen die Input-orientierten Lehrpläne der beruflichen Oberschulen Bayerns jedoch den „grundbildenden Aspekt der Mathematik“ (Bayrisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2003) und fordern, „den Schülerinnen und Schülern in ausreichendem Maß die für Studium und Beruf notwendigen Voraussetzungen [zu] vermitteln“ (Bayrisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus, 2003). Die gehobenen mathematischen Anforderungen, die ein technisch-natur-wissenschaftliches Studium stellt, versucht die FOS/BOS durch einen deutlich umfangreicheren und anspruchsvolleren

Mathematik-Lehrplan im Profil „Technik“ Rechnung zu tragen. Dessen Stofffülle übertrifft die des Mathematik-Lehrplans am achtjährigen Gymnasium. Auch die in den nicht-technischen Profilen behandelten Themen unterscheiden sich teilweise beträchtlich von denen des Gymnasiums.

Der Vergleich von Schulbüchern für die beruflichen Oberschulen mit entsprechenden Lehrbüchern des Gymnasiums offenbart deutliche Unterschiede in der Herangehensweise an mathematische Inhalte. So kann bei einer vergleichbaren Anzahl an Übungsaufgaben bei erstgenannten Büchern häufig ein geringeres Abstraktionsniveau, weniger ausführliche Begründungen und Beweise und eine Konzentration auf „Standardfälle“ und Rechenschemata festgestellt werden. Beispielsweise tritt bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Buch von Hoffmann, Krämer und Ponnath (2011) die Behandlung des Themenfeldes „Axiomatisierung“ zu Gunsten einer Thematisierung des Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriffs und der konkreten Bestimmung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten in den Hintergrund. Im Gegensatz dazu setzt das Gymnasiallehrbuch von Schätz und Eisentraut (2009) Kenntnisse der Laplace-Wahrscheinlichkeit und der statistischen Wahrscheinlichkeit aus der Mittelstufe voraus und diskutiert Begrifflichkeiten und Folgerungen.

Lehrerschaft

Auch die Lehrerschaft an der FOS/BOS ist heterogener zusammengesetzt als das Kollegium am allgemeinbildenden Gymnasium. Während die Lehrkräfte eines Gymnasiums in aller Regel eine entsprechende universitäre Gymnasiallehrerausbildung abgeschlossen haben, besteht der Lehrkörper an beruflichen Oberschulen unter anderem aus Lehrkräften mit universitärer Ausbildung für das berufliche Lehramt, Lehrkräften mit Gymnasiallehrerausbildung und Diplom- bzw. Masterabsolventen eines berufspädagogischen (insb. wirtschaftspädagogischen) Studiengangs.

In der Ausbildung für die berufliche Bildung wird eine berufliche Fachrichtung (Bautechnik, Elektro- und Informationstechnik etc.) vertieft, sowie ein Unterrichtsfach und Erziehungswissenschaften studiert. Da die Studierenden neben einer dem Gymnasiallehramt vergleichbaren Anzahl und Dauer an Schulpraktika auch ein einjähriges Berufspraktikum oder eine abgeschlossene Berufsausbildung vorweisen müssen, lässt sich feststellen, dass im Studium besonderer Augenmerk auf die berufliche Fachrichtung gelegt wird. Die im Zweitfach Mathematik vermittelten Inhalte erreichen hingegen nicht den Umfang der im Gymnasiallehramt behandelten Stoffe und rücken den Anwendungsbezug stärker in den Fokus.

Zusammenfassung

Der Vergleich zwischen beruflichen Schulen und Gymnasien legt nahe, dass die Schülerschaft an den beruflichen Oberschulen Bayerns heterogener zusammengesetzt ist, bei nicht-technischer Ausrichtung geringere kognitive Fähigkeiten und mathematische Leistungsfähigkeit aufweist und eher zu einem Fachhochschulstudium neigt als die Schülerinnen und Schüler allgemeinbildender Gymnasien in Bayern. Auch die Lehrerschaft der FOS/BOS scheint in Hinblick auf Bildungsbiographie und außerschulische Berufserfahrung weniger homogen als das Lehrerkollegium am allgemeinbildenden Gymnasium. Bei der Vermittlung mathematischer Inhalte scheinen häufig Rechenverfahren in den Vordergrund gerückt und das Beweisen eher vernachlässigt zu werden.

Die gefundenen Unterschiede werfen die Frage auf, ob Schüler, die ihre Hochschulzugangsberechtigung an einer FOS/BOS erwerben, hinlänglich auf den Besuch einer Fachhochschule (oder einer Universität) vorbereitet werden und ob dies bei einem Studium „ihres Profils“ gegebenenfalls besser gelingt als bei Absolventen allgemeinbildender Gymnasien.

Literatur

Bayrisches Staatministerium für Unterricht und Kultus (2003): Lehrpläne für die Fachoberschule – Unterrichtsfach Mathematik vom 5.8.2003, München.

Bayrisches Staatministerium für Unterricht und Kultus (2004): Gymnasium Lehrpläne (G 8) vom 19.7.2004, München.

Hoffmann, M., Krämer N. & Ponnath, G. (2011): Mathematik für die Berufliche Oberschule – Nichttechnische Ausbildungsrichtung, Band 2. Köln, Bildungsverlag Eins.

Maaz, K., Chang, P. & Köller, O. (2004): Führt institutionelle Vielfalt zur Öffnung im Bildungssystem? Sozialer Hintergrund und kognitive Grundfähigkeit der Schülerschaft an allgemeinbildenden und beruflichen Gymnasien. In O. Köller & al. (Hrsg.): Wege zur Hochschulreife in Baden-Württemberg, TOSCA – Eine Untersuchung an allgemein bildenden und beruflichen Gymnasien, Opladen, Leske + Budrich; 153-204

Schätz, U. & Eisentraut, F. (2009): delta 11 - Mathematik für Gymnasien. Bamberg, C.C. Buchner Verlag.

Watermann, R. & Maaz, K. (2004): Studierneigung bei Absolventen allgemein bildender und beruflicher Gymnasien. In O. Köller & al. (Hrsg.): Wege zur Hochschulreife in Baden-Württemberg, TOSCA – Eine Untersuchung an allgemein bildenden und beruflichen Gymnasien, Opladen, Leske + Budrich; 403-450.

Watermann, R., Nagy, G. & Köller, O. (2004): Mathematikleistungen in allgemein bildenden und beruflichen Gymnasien. In O. Köller & al. (Hrsg.): Wege zur Hochschulreife in Baden-Württemberg, TOSCA – Eine Untersuchung an allgemein bildenden und beruflichen Gymnasien, Opladen, Leske + Budrich; 205-284

Thomas JAHNKE, Potsdam

Die Regeldetri des Mathematikunterrichts

Mathematikunterricht verschleift sich zum Ritual, in dem Mathematik nur noch begrifflich-nominal verfahrensmäßig-prozedural an- oder eher abwesend ist. Dieses Ritual hat drei regelhafte Elemente; naheliegender Weise spreche ich daher von der Regeldetri des Mathematikunterrichts. Ich gebe sie hier in der Reihenfolge wieder, in der sie sich meist nicht nur unterrichtlich sondern auch in Schulbüchern finden, wobei es zuweilen zu Variationen der Abfolge kommen mag.

Die Regeldetri des Mathematikunterrichts

- So heißt das.
- So geht das.
- So ist das.

Möglicherweise könnte man das auch erheblich elaborierter ausdrücken, aber fürs Erste und für heute will ich die Sache nicht komplizierter darstellen, als sie sich häufig selbst gibt. Ich bin auch immer wieder erschrocken, wie fest diese Ritualisierung in den Köpfen meiner Studierenden sitzt, was deutlich wird, wenn sie mit großer Selbstverständlichkeit selbst eine Mathematikstunde vorbereiten.

So heißt das: spitzer Winkel, stumpfer Winkel, rechter Winkel, gestreckter Winkel, überstumpfer Winkel, Vollwinkel; Parallele, Passante, Sekante; Minuend, Subtrahend, Divend, Divisor, Multiplikand, Multiplikator, Faktor, Produkt. Vokabeln, Vokabeln. Als Begriffe kann man sie nicht bezeichnen, weil sie nichts begreifen.

So geht das: Messen eines Winkels, Abtragen eines Winkels; Spiegeln eines Punktes; Ausmultiplizieren, Klammern Auflösen; Brüche Addieren; ggT und kgV bestimmen; die Pfadregeln anwenden; Funktionsdiskussion durchführen.

So ist das: Schon die Art und der Tenor des ‚So heißt das' und des ‚So geht das' schafft eine Faktizität, die ein Anderssein, also mögliche Alternativen gar nicht zulässt. Die Darstellung genügt sich selbst; sie macht die Gegenstände als selbstverständlich plausibel, obwohl sie das nicht sind und sie als plausible gar nicht mehr verstanden werden können. Begründungen – von Beweisen gar nicht zu sprechen – erscheinen so nur als zusätzlicher

Lernstoff für die ‚guten' Schülerinnen und Schüler und nicht etwa als etwas, was für die Sache konstitutiv und ihr inhärent wäre.

Mathematikunterricht: Ritual versus produktive/konstruktive Enkulturation

Die klassischen Schulfächer repräsentieren die verschiedenen Zugänge zur Welt. Worin liegt die Spezifik des mathematischen Zugangs, wird sie im Mathematikunterricht deutlich?

Ich meine mit dieser Spezifik nicht etwa die sich zuweilen auf Platon berufenden Allgemeinplätze über die ewige Gültigkeit der mathematischen Aussagen oder ähnliche religiös anmutende Unterstellungen. Mathematisches Denken ist historisch und gesellschaftlich geprägt und in der Zeit verwurzelt wie anderes Denken auch. Seine Formen und Ansprüche haben sich über die Jahrhunderte gewandelt und münden keineswegs in eine Esoterik des Ewig-wahren.

Auch wenn sich jedoch die Vorstellungen darüber, was ein mathematischer Beweis ist und welche mathematischen Aussagen eines Beweises bedürfen, ändern, bleibt doch festzuhalten, dass es sich bei Mathematik um eine beweisende Disziplin handelt. Mathematische Aussagen sind nicht, wie man immer hört, besonders präzise, sondern sie sind auf besondere Weise gewiss. Die Gewissheit beruht auf dem Gedanken des Beweisens. Natürlich will ich nicht einem axiomatischen Aufbau der Schulmathematik das Wort reden, aber wo jede Begründung auf welchem genetischen Niveau auch immer fehlt und auch jeder Versuch des Begründens ob bei der Einführung der schriftlichen Division, den Potenzgesetzen oder dem globalen Monotoniesatz in der Analysis, da wird Mathematikunterricht zur Mitteilungslehre, zum Lernen von mathematischen Vokabeln und von Prozeduren, was seinen rituellen Charakter nur betont.

Eine zweite Dimension, die man von einem mathematikhaltigen Mathematikunterricht erwarten wird, ist das exemplarische Arbeiten. In Zeiten der Stofffülle und deren Durcheilen versteht man unter exemplarisch wohl nur noch schlicht, dass man manches weglässt und sich auf anderes konzentriert. Das Exemplarische am Exemplarischen besteht aber nicht darin, dass man anderes weglässt, sondern dass es für anderes steht. Bei der Addition von Bruchzahlen lernt man also nicht nur diese zu addieren, sondern man erfährt auch exemplarisch etwas über Verknüpfungen und deren Definitionsmöglichkeiten, über den Umgang mit Repräsentanten, möglicherweise auch über das Permanenzprinzip usf. Mathematische Begriffe und Sätze sollten auch in der Schule nicht nur für sich selbst stehen, sondern als

Exempla mathematischen Denkens in Erscheinung treten und reflektiert werden.

Eine dritte Dimension ist das Aufwerfen von Fragen. Obgleich es etwas lapidar kling, dass der, der die Frage nicht kennt, die Antwort nicht verstehen kann, ist dieser Gedanke doch auch didaktisch richtig. Ständig werden im Mathematikunterricht Antworten unterrichtet, ohne dass die Fragen, die sie beantworten, überhaupt gestellt werden. Das Was wird gar nicht thematisiert sondern nur das prozedurale Wie, also nur wie man Dinge abwickelt und nicht wo sie eigentlich herkommen und warum man sich überhaupt mit ihnen befasst. Die durchgängige Fraglosigkeit mancher Schulbücher macht sie zu schlechten Vorlagen für einen Mathematikunterricht, in dem tatsächlich auch Mathematik betrieben wird. Wo es keine Fragen gibt, kann es auch nicht zum Dialog kommen. Es gibt dann nur eine Stimme, nämlich die Lehrmeinung, der zu lauschen ist. Schüler erfahren den ‚Sinn' einer Formel im Unterricht in zweierlei Form, zirkulär oder als fortwährende Kette der Sinnvertagung:

- Man benötigt sie, um die nachfolgenden Aufgaben zu lösen. Das führt schnell zu einem circulus vitiosus; denn warum löst man die nachfolgenden Aufgaben? Nun, um die Formel zu üben.
- Man benötigt sie, weil man sie später braucht, um weitere Formeln herzuleiten, von denen man dann auch nicht weiß, wozu sie nutze sind.

Eine weitere Dimension für einen mathematikhaltigen Unterricht ist das Befragen und Sehen von Zusammenhängen. Zusammenhänge kann man nur sehen, wenn sie auch auftreten, das heißt eine hinreichend komplexe Situation oder Sachlage untersucht wird. Wenn aber – wie es in vielen Schulbüchern geschieht – jede Komplexität im Vorhinein aus sicher wohl meinenden didaktischen Gründen in einzelne Häppchen zerlegt wird, dann kann der Lernende die Zusammenhänge nicht sehen, er kann sie aus den Häppchen auch nicht rekonstruieren. Während wir als Schulbuchautoren vielleicht meinen, wir hätten in methodisch geschickter Weise alle möglichen Fälle in ansteigendem Schwierigkeitsgrad behandelt, stellt sich diese Behandlung den Lernenden möglicherweise nur als eine schwer überschaubare Kasuistik dar, weil sie bei der sorgsamen Fallunterscheidung gar nicht dabei waren. Man hat sie ihnen vorgesetzt. Diese Filetierung im Vorhinein verhindert geradezu das Verständnis von Zusammenhängen und übrigens auch von Begriffen, die ja nur dann etwas beinhalten, wenn auch anderes da ist, was sie nicht beinhalten.

Mathematik kann man auch als das Gebiet der Abenteuer des formalen Denkens betrachten. Auch dies sollte in der Schule deutlich werden. In vielen Darstellungen scheinen die Gegenstände der Schulmathematik so abgegriffen und ausgelaugt, dass man ihnen nichts Abenteuerliches mehr abgewinnen zu können scheint. Die Abenteuer der Mathematik beginnen für uns beziehungsweise für die Lernenden aber nicht erst da, wo wir beziehungsweise sie nichts mehr verstehen. Das Suchen nach Formulierungen für elementare Definitionen und nach Sätzen und deren Begründungen kann nur spannend sein oder werden, wenn nicht schon alles als klar und gegeben und sortiert und zum Lernen gegliedert und aufbereitet ist.

Schließlich ist mathematisches Denken dadurch gekennzeichnet, dass es Theorien aufbaut. Wenn Schulunterricht ein angemessenes Bild der Mathematik geben soll, dann muss auch stellenweise ein Abglanz, eine Ahnung solcher Strukturgedanken deutlich werden. Mathematik-betreiben sollte auch in der Schule sich nicht darin erschöpfen, Aufgaben zu bearbeiten, ob nun authentische oder anwendungsorientierte oder offene oder normal-bürokratische oder Items. An der Aufgabenorientierung des Schulunterrichts kann es (auch) liegen, dass die Schülerinnen und Schüler so gar keine Vorstellung davon aufbauen können, was Mathematik nun sei und womit sie sich beschäftige. Die heute stark auf die Lernerfolge fokussierte Didaktik und Bildungspolitik misst den Mathematikunterricht ausschließlich an der Bewältigung von (Test-)Aufgaben. Dabei bleibt außer Acht, ob und wie das Wissen zur Bearbeitung derselben überhaupt zustande kommt und wie es strukturiert ist.

Bei der Forderung nach einem Widerschein des Aufbaus mathematischer Theorien im Unterricht geht es nicht darum, einen lerntheoretischen oder -praktischen Gegensatz familiarity (also Vertrautheit) versus Axiomatisches Denken aufzubauen. Freudenthal hat mit seinem Begriff des Lokalen Ordnens eine Möglichkeit aufgezeigt, sich aus diesem Gegensatz wie ein positiver Münchhausen an dem eigenen Schopf aus dem Sumpf zu ziehen.

Von einem mathematikhaltigen Mathematikunterricht wird man also erwarten und erhoffen, dass er

- Begründungen und Beweisen eine ausreichenden und konstitutiven Raum gibt,
- seine Gegenstände exemplarisch mit einem Bezug des Einzelnen zum Anderen und zum Ganzen behandelt,
- Fragen aufwirft und Entdeckungen zulässt,
- Zusammenhängen sehen und erkennen lässt,
- Abenteuer des formalen Denkens bietet und
- andeutet, dass und wie sich mathematische Theorien aufbauen.

Thomas JANSSEN, Bremen

Ausbildung algebraischen Struktursinns im alltäglichen Klassenunterricht

Schon Malle (1993) bemängelte, dass viele Schülerinnen und Schüler ausschließlich kalkülhaft mit Termen und Gleichungen umgehen, die dahinter stehenden Strukturen aber nicht erkennen. Ausdrücklich fordern Arcavi (1994, 2005) die Entwicklung eines *Symbol Sense*, Linchevski und Livneh (1999) einen stärker ausgebildeten *Structure Sense*. Diesen letztgenannten Begriff definiert schließlich Hoch (2007) als dreistufige Kompetenz. In Tests stellt sie nochmals die zuvor allgemein bemängelten Defizite fest, zeigt aber auch, dass sich durch individuelle Förderung eine nachhaltige Verbesserung erreichen lässt. Offen bleibt jedoch, wie ein solcher Lernprozess im alltäglichen Klassenunterricht stattfindet und wie er unterstützt werden kann. Gesucht sind also eine Beschreibung der Entwicklung algebraischen Struktursinns und eine Eingrenzung der relevanten Einflussfaktoren, insbesondere der Rolle des *Struktursehens* (vgl. Bikner-Ahsbahs 2005). Am Ende sollen Vorschläge für Unterricht stehen, der diesen Prozess unterstützen kann.

1. Theoretischer Hintergrund: Kulturhistorische Tätigkeitstheorie

Diese Aufgabenstellung erfordert einen theoretischen Rahmen, der eine dynamische Beschreibung zulässt. Ein solcher findet sich in der *Kulturhistorischen Tätigkeitstheorie*, wie Leontjew (1982) sie darlegt. Danach wird Tätigkeit von einem bestimmten Motiv geleitet, das sich auf einen Gegenstand bezieht. Werden dabei bestimmte Ziele verfolgt, so spricht man von Handlungen. Durch Tätigkeit entwickelt sich die Persönlichkeit des Subjekts – es findet also Lernen durch Tätigkeit und für weitere Tätigkeit statt. Roth und Radford (2011) machen diese Perspektive für die Mathematikdidaktik nutzbar. Sie beschreiben, wie sich Schülerinnen und Schüler in mathematischen Tätigkeiten Motive erschließen (Objectification) und wie sich dabei ihre Persönlichkeit entwickelt (Subjectification).

Mit dieser Basis lässt sich *Algebraischer Struktursinn* hypothetisch als die sich in Handlungen zeigende und durch Tätigkeit sich entwickelnde Persönlichkeitsstruktur beschreiben, die dem Subjekt einen bestimmten Blick auf algebraische Strukturen (Terme und Gleichungen) und den Umgang mit ihnen ermöglicht. Es geht dabei nicht in erster Linie um algorithmisches Umformen, sondern darum, besondere Eigenschaften der Struktur zu erkennen und zu nutzen.

2. Methodisches Vorgehen

Die Verschränkung von Theorie und Praxis wird in einer Designstudie erfasst. Deren Zweck ist nach Cobb et al. (2003, 9 f.) „(…) to develop a class of theories about both the process of learning and the means that are designed to support that learning. (…) The intent is to investigate the possibilities for educational improvement by bringing about new forms of learning in order to study them“.

Konkret wird im Rahmen der laufenden Studie der Mathematikunterricht einer 8. Oberschul-Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern über etwa ein halbes Jahr in den Unterrichtseinheiten begleitet, in denen algebraische Strukturen eine Rolle spielen. Die Unterrichtsplanung unterliegt insgesamt der oben beschriebenen Vorstellung des sich entwickelnden Struktursinns: Das Tätigkeitsmotiv soll in der Verfolgung von Handlungszielen angeregt werden.

Die erste abgeschlossene Unterrichtseinheit war in zwei Teile unterteilt; auf den ersten beziehen sich die hier vorgestellten Analysen. Bevor im zweiten Teil durch den aktiven Nachvollzug von Musterlösungen lineare Gleichungen als Problemlösewerkzeuge eingeführt wurden, wurde im ersten Teil viel Zeit in das Erkunden von Gleichungen investiert. Dazu wurden die linearen Gleichungen anhand von Streichholzschachtelgleichungen (vgl. Affolter et al. 2003) motiviert und anschließend formalisiert.

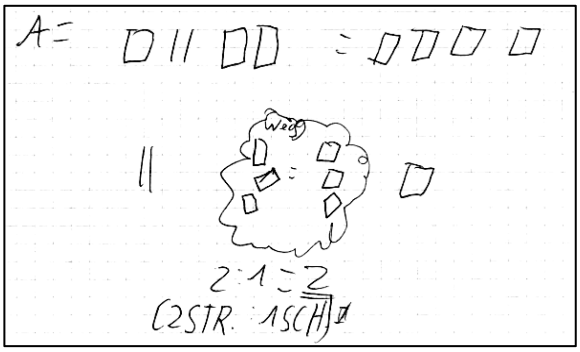
Erhoben wurden Videodaten sowie Unterrichtsdokumente: Schüleraufzeichnungen, Poster, Tafelbilder und -collagen, Klassenarbeiten. Dazu kommen Beobachtungsprotokolle sowie die Dokumentation der Unterrichtsplanung. Diese findet aufbauend auf iterativen Analysen in fortlaufenden Beratungen mit der Lehrerin statt. Dabei werden folgende Fragen zunächst anhand des schriftlich vorliegenden Materials behandelt: Wie lassen sich die Handlungen und Tätigkeiten situationsübergreifend beschreiben? Wo und in welcher Weise drückt sich (die Entwicklung von) Struktursinn aus? Welche prinzipiellen Eigenschaften des Designs und seiner Implementierung spielten dabei welche Rolle und was bedeutet das für den Fortgang der Intervention? Außerdem wurde auf klassenspezifische Aufgabenstellungen geachtet, die im weiteren Verlauf zu beachten wären, sie sind aber nicht Gegenstand dieser Darstellung.

3. Ziele und Motive in den Schüleraufzeichnungen

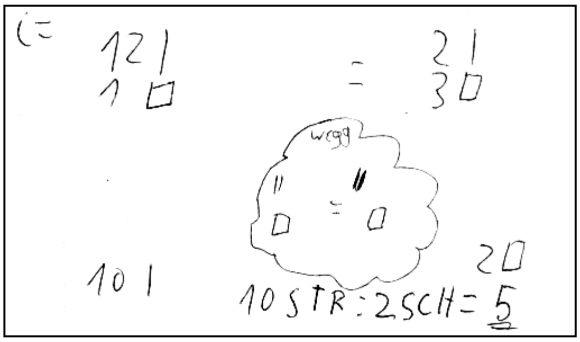
In ihren Aufzeichnungen zeigen die meisten Schülerinnen und Schüler eine ausgeprägte Zielbezogenheit im Umgang mit den (Streicholzschachtel-) gleichungen. Sie wählen zahlreiche unterschiedliche Darstellungsformen (ikonisch, symbolisch, alltagssprachlich), die deutlich in ihrer Explizitheit, Stabilität und Nachvollziehbarkeit für andere variieren.

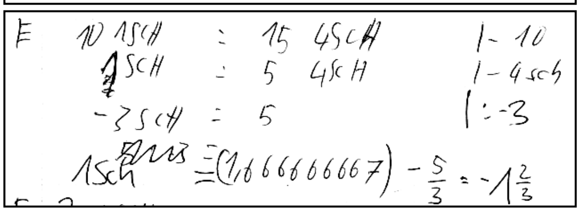
Explizit und für andere gut nachvollziehbar werden Ziele kommuniziert, wenn sie in Worten notiert werden. Dabei zeigt sich, dass bestimmte Begriffe immer wieder bei unterschiedlichen Schülerinnen und Schülern auftreten. Sie machen deutlich, dass sie „überall“ beziehungsweise präziser „auf beiden Seiten“ „gleich (viel)“ manipulieren und markieren ihre Ziele durch Schlüsselwörter wie „bis“, „damit“, „am Ende“ oder „so dass“. Teilweise wird auch rückwirkend begründet, die Schlüsselwörter lauten dann „deswegen“, „also“ oder „weil“. Eine besondere Rolle spielte das Wort „wegnehmen“. Während dies im Umgang mit den Streichhölzern tatsächlich noch die zielführende Handlung war, ist der Begriff im mathematischen Umgang mit mathematischen Gleichungen metaphorisch zu verstehen. Eine solche Metapher stützt bestimmte Vorstellungen, die sich im Handeln als zielführend erwiesen haben (vgl. Lakoff & Johnsen 2004).

In Diagrammen werden Ziele wesentlich impliziter und uneinheitlicher dargestellt. Die besonders kreative Illustration eines Schülers ist neben dem Text abgebildet. Die Streichhölzer und Schachteln, die auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens auftreten, verschwinden in einer Wolke um das Gleichheitszeichen. Der Schüler betont so das Ziel, die Gleichheit zu erhalten, indem auf beiden Seiten gleich viel weggenommen wird. Die Angabe beziehungsweise Illustration von Zielen strukturiert den Arbeitsprozess und verweist auf die strukturellen Merkmale der Situation, die genutzt werden.



Die Darstellung ist auch deshalb interessant, weil sie Ausgangspunkt zur Entwicklung eines Motivs ist, das die Tätigkeit des Umgangs mit linearen Gleichungen auszeichnet (rechts). Der Schüler fasst im weiteren Prozess Schachteln und Streichhölzer zusammen und bereitet so eine Schreibweise vor, die der historisch entwickelten, in der Algebra üblichen Notation schon sehr nahe kommt.





Die Betrachtung von Handlungszielen und der darauf aufbauenden Entwicklung eines Motivs bringt also eine zunehmende und sich festigende Aufmerksamkeit gegenüber algebraischen Strukturen zu Tage, die sich als eine Ausbildung algebraischen Struktursinns deuten lässt, auch wenn eine nähere Betrachtung der individuellen Prozesse noch aussteht.

4. Ausblick

Nach der ersten Phase der Designstudie lässt sich festhalten, dass man eine Vielfalt von möglichen Handlungszielen als Ausgangspunkte einer Entwicklung algebraischen Struktursinns zulassen sollte. Zur Vorbereitung der kulturell entwickelten algebraischen Tätigkeit ist es dabei von Vorteil, von Anfang an eine bewusste, explizite Sprache herauszufordern, insbesondere können Metaphern und Schlüsselwörter hilfreiche Handlungen festigen. Wenn es so gelingt, Prozesse wie die hier vorgestellten zu wiederholen, ist die Basis für eine eingehendere Untersuchung der Ausbildung algebraischen Struktursinns gelegt.

Literatur

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti, B. und Wieland, G. (2003). *mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I.* Bern: Schulverlag blmv & Zug: Klett und Balmer.

Arcavi, A. (1994): Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. In: For the Learning of Mathematics 14 (3), S. 24–35.

Arcavi, A. (2005): Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. In: For the Learning of Mathematics 25 (2), S. 42–47.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005): Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. und Schauble, L. (2003): Design Experiments in Educational Research. In: Educational Researcher 32 (1), S. 9-13.

Hoch, M. (2007): Structure Sense in High School Algebra. Unveröffentlichte Dissertation. Tel Aviv: Tel Aviv University.

Lakoff, G. und Johnsen, M. (2004): Leben in Metaphern. Konstruktion und Gebrauch von Sprachbildern. Heidelberg: Carl-Auer-Systeme.

Leontjew, A. N. (1982). Tätigkeit, Bewußtsein, Persönlichkeit. Köln: Pahl-Rugenstein.

Linchevski, L. und Livneh, D. (1999): Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. In: Educational Studies in Mathematics 40, S. 173–196.

Roth, W.-M. und Radford, L. (2011): A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning. Rotterdam u.a.: Sense Publishers.

Steffen JUSKOWIAK, Braunschweig

Ist Selbstreflexion beim Bearbeiten mathematischer Probleme lösungsförderlich?

Nicht erst seit der Veröffentlichung der Ergebnisse von Schulleistungsstudien wie TIMSS und PISA ist die Befähigung von SchülerInnen, mathematische Probleme zu lösen, ein wichtiges und anerkanntes Ziel von Mathematikunterricht. Mögliche Maßnahmen zur Verbesserung der Problemlösefähigkeit veröffentlichte u. a. KILPATRICK (1985). Diese legen nahe, dass Selbstreflexion (das Nachdenken über eigenes Denken und Handeln) eine geeignete Maßnahme zur Förderung der Problemlösefähigkeit sein kann. Der hier verwendete Begriff der Selbstreflexion ist aus der Denkpsychologie entlehnt und wurde dort maßgeblich durch DÖRNER (vgl. z. B. 1994) geprägt. Bisherige Studien, insbesondere zur Wirkung von Selbstreflexionen auf Problembearbeitungsprozesse, waren überwiegend präskriptiv-normativ angelegt (vgl. z. B. TISDALE 1998). Mit ihnen wurde häufig die Wirkung von extern, z. B. durch zwangsweise eingelegte Arbeitspausen und/oder vom Aufnahmeleiter gestellte Fragen, angeregten Selbstreflexionen auf die Bearbeitung außermathematischer Probleme untersucht. Auch wurden selten SchülerInnen als Probanden für diese Untersuchungen verwendet. Doch gerade Untersuchungen mit dieser Probandenpopulation wären bzgl. der geforderten Förderung der Problemlösefähigkeit notwendig.

Eigene Erkundungen und zugehörige Forschungsschwerpunkte

Um dem damit einhergehenden Mangel an deskriptiver Forschung zum Phänomen nicht extern angeregter Selbstreflexion bei SchülerInnen zu begegnen, wurde ein Forschungsprojekt im Themenbereich des mathematischen Problemlösens initiiert. Dieses hat die deskriptive Erforschung von Selbstreflexionen, die vor der Beendigung der Problemlösebemühungen auftreten, zum Ziel. Dazu war es zunächst notwendig, eine geeignete Methodik zur Identifikation von Selbstreflexionen in Problembearbeitungsprozessen zu entwerfen. Durch genaue Analyse der identifizierten Selbstreflexionen konnten anschließend solche Selbstreflexionen charakterisierende Merkmale herausgearbeitet werden und die Wirkungen der Selbstreflexionen auf den Problembearbeitungsprozess bewertet werden. Aus den bisher gesammelten und den noch zu erarbeitenden Befunden werden sich vmtl. Anregungen für das Verständnis und die evtl. mögliche Förderung der Problemlösefähigkeit durch Selbstreflexionen ergeben. Im Folgenden werden nun überblicksartig erste Befunde aus den bisherigen Forschungsaktivitäten vorgestellt.

Erläuterung der Forschungsschwerpunkte und Ausblicke auf bisherige Befunde

Den hier vorgestellten Forschungen zur Selbstreflexion liegt die Annahme zu Grunde, dass Arbeitsschritte (Träger kognitiver Verhaltensweisen) während der Problembearbeitung durch fakultativ auftretende Selbstreflexionen als Teile von Steuerungsschritten (Träger metakognitiver Verhaltensweisen) unterbrochen werden. Grundlage für diese Modellannahme ist das Steuerungsschritt-Arbeitsschritt-Modell von HEINRICH (2004).

Für die darauf aufbauenden empirischen Erkundungen wird angenommen, dass sich einige der ablaufenden Selbstreflexionen in den Verbalisationen von Menschen und damit auf der Ebene der äußeren Sprache unter Zuhilfenahme eines geeigneten Arbeitsbegriffes (s. u.) identifizieren lassen.

Zur empirischen Erkundung[i] wurden Videoaufzeichnungen von 16 ElftklässlerInnen Braunschweiger Gymnasien angefertigt, während diese individuell in fünf Sitzungen in regelmäßigen zeitlichen Abständen je ein geometrisches Beweisproblem bearbeitet haben. Die Versuchspersonen hatten dabei jeweils eine Zeitstunde zur Verfügung. Sie waren während der Aufzeichnungen aufgefordert, in einer abgeschwächten Form laut zu denken. Das so gewonnene Material wird hinsichtlich des beschrittenen Problembearbeitungsweges, der aufgetretenen Selbstreflexionen und deren Wirkung auf die Problembearbeitung mit Hilfe der Methode der konsensuellen Validierung (vgl. MAIER 1991) ausgewertet. Zur Identifizierung verbalisierter Selbstreflexionen dient folgender Arbeitsbegriff: „Selbstreflexion ist das Auseinandersetzen mit bisher selbst Getanem beim Bearbeiten mathematischer Probleme vor Abschluss der Problemlösebemühungen.“

Zur Charakterisierung von Selbstreflexionen wurde das folgende sechsgliedrige Merkmalsystem herausgearbeitet (vgl. auch JUSKOWIAK 2010):

- Was hat die Selbstreflexion ausgelöst? (*Auslöser* der Selbstreflexion)
- Welches *Ergebnis* steht am Ende der Selbstreflexion?
- Welche *Auswirkung* hat die Selbstreflexion auf den weiteren Problembearbeitungsprozess?
- Welche Aspekte mathematischen Arbeitens betrachtet die Versuchsperson während der Selbstreflexion? (*Gegenstand* der Selbstreflexion)
- Wie weit reicht die Selbstreflexion in dem Problembearbeitungsprozess zurück? (*Reichweite* der Selbstreflexion)
- Wie ist die Selbstreflexion aufgebaut? (*Aufbau* der Selbstreflexion)

Während der Auswertung der videographierten Problembearbeitungen werden, soweit möglich, jeder identifizierten Selbstreflexion die oben genannten Merkmale zugewiesen. An diese umfassende Sammlung von Informationen über einzelne Selbstreflexionen schließt sich der Versuch an, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den identifizierten Selbstreflexionen herauszuarbeiten und so übergeordnete Kategorien zu bilden. Von besonderer Bedeutung sind dabei vmtl. qualitative Aspekte wie z. B. auslösende Momente von Selbstreflexionsszenen, die darin behandelten Teilaspekte der Problembearbeitung (z. B. Rechnungen und/oder das strategische Vorgehen) und der Aufbau der Selbstreflexionen (z. B. vollständiges Rekapitulieren der Problembearbeitung im Kontrast zum schlaglichtartigen Betrachten einzelner Lösungsschritte). Die so gefundenen Kategorien werden als Erscheinungsformen von Selbstreflexionen bezeichnet. Erste Einblicke in diese Thematik liefert u. a. SANDHAUS-KHALILI (2011).

Zur Bewertung von Selbstreflexionen bzgl. ihrer Wirkung auf den Problembearbeitungsprozess mussten entsprechende Kriterien entwickelt werden. Dies ist aufbauend auf JUSKOWIAK (2011) geschehen. Zunächst kann zwischen Selbstreflexionen unterschieden werden, deren Wirkung bewertet und deren Wirkung anhand der vorliegenden Informationen nicht bewertet werden kann. Im ersten Fall ist es weiterhin möglich, zwischen lösungsförderlichen, lösungshinderlichen und bzgl. der Zielerreichung wirkungslosen Selbstreflexionen zu unterschieden. Eine Selbstreflexion wird als lösungsförderlich bewertet, wenn sich die Versuchsperson durch sie dem Ziel der Problembearbeitung weiter annähert. Als lösungshinderlich wird sie bewertet, wenn sich die Versuchsperson vom Ziel entfernt. Wird weder eine weitere Annäherung an das noch eine Entfernung vom Ziel bewirkt, wird die Selbstreflexion als wirkungslos bzgl. der Zielerreichung bewertet.

Diese Beschreibung der Bewertungsstufen suggeriert einen objektiv Entfernungsmaßstab zu Bestimmung des Abstandes der Versuchsperson vom Ziel. Ein solcher Maßstab existiert jedoch aufgrund der Nichtabgeschlossenheit des Problemraumes der hier verwendeten Probleme im Gegensatz zu dem bei denkpsychologischen Untersuchungen beliebten Problem des Turms von Hanoi (vgl. u. a. HINZ (2001)) nicht. Es handelt sich hier vielmehr um im Rahmen der konsensuellen Validierung innerhalb der Auswerterteams erhärtete subjektive Einschätzungen.

Bei der Auswertung eines Teils der Aufnahmen aus der oben beschriebenen Erkundungsstudie wurden bei der Anwendung dieses Bewertungsverfahrens die Wirkung mehrerer Selbstreflexionen gegenüber früheren Befunden (vgl. JUSKOWIAK 2011) erstmals als lösungshinderlich bewertet (vgl. auch SANDHAUS-KHALILI (2011)). Dies gibt einen weiteren Hinweis darauf, wie komplex das Phänomen der Selbstreflexion ist und macht deutlich, dass pauschale Anregungen im Sinne von „Nun reflektiert mal schön!“ zur Förderung der (mathematischen) Problemlösefähigkeit zumindest problematisch sind.

Es besteht derzeit die Vermutung, dass ein Zusammenhang zwischen den Erscheinungsformen von Selbstreflexionen und deren Wirkung auf den Problembearbeitungsprozess besteht. Unter Beachtung dieses noch herauszuarbeitenden Zusammenhanges und der weiteren erzielten Befunde ist es vmtl. möglich, darauf bezogene didaktische Anregungen für das Verständnis von und für die Förderung der Problemlösefähigkeit zu geben.

Sich darüber hinaus ergebende Anregungen, die nicht speziell auf das mathematische Problemlösen, jedoch auf das Lehren und Lernen von Mathematik allgemein bezogen sind, werden unter einer weiteren Fragestellung im Rahmen dieses Forschungsvorhabens zusammengefasst.

Literatur

Dörner, D. (1994): Selbstreflexion und Handlungsregulation: Die physischen Mechanismen und ihre Bedingungen. In: Lübbe, W.: *Kausalität und Zurechnung – über Verantwortung in komplexen kulturellen Prozessen*. Berlin: De Gruyter.

Heinrich, F. (2004). *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme*. Hamburg: Dr. Kovac.

Hinz, A. M. (2001): *Der Turm von Hanoi*. In: mathe-lmu.de, 2001, 4, S. 20 – 25.

Juskowiak, S. (2010). Zur Erkundung selbstreflektorischer Aktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Probleme. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 457 – 460). Münster: Wissenschaftliche Texte Münster.

Juskowiak, S. (2011). Zur Erkundung selbstreflektorischer Aktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Probleme – Vorläufige Befunde. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 439 – 442). Münster: Wissenschaftliche Texte Münster.

Kilpatrick, J. (1985): A Retrospective Account of the Past 25 Years on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E.A. (Ed.): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (S. 1 – 15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Maier, H. (1991). Interpretative Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1991* (S. 97 – 107). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Sandhaus-Khalili, E. (2011). *Zu selbstreflektorischen Aktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Probleme durch Schülerinnen und Schüler*. TU Braunschweig.

Tisdale, T. (1998): *Selbstreflexion, Bewusstsein und Handlungsregulation*. Weinheim: Psychologie Verlags Union.

[i] Die Durchführung dieser Erkundungen wurde in den Jahren 2010 und 2011 dankenswerterweise vom „Braunschweigischen Hochschulbund“ finanziell unterstützt.

Gert KADUNZ, Klagenfurt

Zeichen und Visualisierung

Seit mehr als 10 Jahren ist die Theorie der Zeichen nach C.S. Peirce ein Teil der theoretischen Fundierungen mathematikdidaktischer Überlegungen. Die Vielfältigkeit der Anwendungen dieser Zeichentheorie zeigt beispielhaft Sammelband des GDM Semiotik Arbeitskreises der GDM (Kadunz, 2010). Ein wesentlicher Punkt bei der Verwendung dieser Zeichentheorie ist die Konzentration auf das Sichtbare, also auf die für den Sehsinn Zeichen und die damit verbundenen Aktivitäten der Lehrenden und Lernenden. Innerhalb der Mathematikdidaktik hat die Hinwendung zum Sichtbaren und damit das vor Augen führen von Mathematik eine lange Tradition. Eine Anfrage bei der ZDM-Datenbank unter dem Stichwort „Visualisierung“ liefert mehr als 300 Treffer. In den folgenden Ausführungen werde ich auf wenige Ansätze zur Visualisierung, die aus entsprechenden Publikationen gefiltert werden können, eingehen und diesen Ansätzen die eben erwähnte Zeichentheorie zur Seite stellen. Dabei werde ich zu zeigen versuchen, dass die Zeichentheorie bei ihrer mathematikdidaktischen Verwendung (im Rahmen der Visualisierung) im Wesentlichen in der Welt des Sichtbaren bleibt und sich durch ein konsistentes Begriffssystem auszeichnet. Im Vergleich dazu sind andere Ansätze zur Beschreibung von Fragen der Visualisierung neben der visuell wahrnehmbaren Mathematik auch z.B. durch Rückgriff auf Mentales oder bestimmte Sprachfiguren mitbestimmt. Dies sehe ich nicht als Mangel, sondern als eine andere Zugangsweise, einen anderen theoretischen Ansatz um Visualisierungen von Mathematik erfolgreich beschreiben zu können.

Ein lernpsychologischer Standpunkt

Einer der zentralen lernpsychologischen Ansätze, der in der Mathematikdidaktik ab den 70er Jahren des vergangenen Jahrhunderts Verbreitung fand, war die Psychologie der Erkenntnis des Jean Piaget. Mit Piagets Ansatz verbunden sind zwei Stichworte: Operativ und Genese. In seinem Ansatz fühlt sich Piaget mit seinen Ausführungen zur Theorie der Entwicklung der menschlichen Erkenntnis der Biologie nahe. Er meint, dass die Struktur der menschlichen Intelligenz und bestimmte Formen der organischen Natur von gleicher natürlicher Herkunft sind und dabei „eine in Entwicklung begriffene Organisation des Lebendigen“ darstellen (Piaget, 1972, S. 20). Die Organisationsentwicklung, also der Treibstoff zur Entwicklung von Erkenntnis, wird von Piaget als eine Funktion der menschlichen Intelligenz gesehen. Diese Funktion ist stets um die Aufrechterhaltung eines Gleichgewichtes zwischen Individuum und Umwelt bemüht. Ich erinnere an die

Dreiteilung Adaption, Akkomodation und Assimilation. Die damit beschriebenen Anpassungsvorgänge sind durch Handlungen bzw. Operationen mitbestimmt. Die Konzentration auf Handlungen kann als „operativer Standpunkt" gesehen werden, der vom Pädagogen Hans Äbli und durch die Mathematikdidaktiker Arnold Fricke und Heinrich Besuden für das Lernen von Mathematik aufbereitet wurde. Akzeptanz in der Mathematikdidaktik erlangte dieser operative Standpunkt unter dem Titel operatives Prinzip, das vor allem mit Erich Wittmann und auch Äbli assoziiert wird. Ein Bsp., wie Wittmann seine Sicht auf das operative Prinzip verwendet, um Visualisierung von Mathematik zu interpretieren, stellt sein Beitrag „Anwendung des operativen Prinzips bei der Produktion mathematischer Filme" (Wittmann, 1987) dar. Wittmann beschreibt durch Verweis auf den Film von Nicolet Beziehungen zwischen drei Punkten und einem frei variierbaren Kreis. Die Operationen, die mit den Objekten durchgeführt werden, sind auf Operationen mit dem Kreis eingeschränkt. Die Punkte selbst bleiben fest. Jeder Punkt, der bei Variation des Kreises gefangen wird, schränkt die Freiheit des Kreises ein. Verläuft der Kreis durch einen Punkt, indizieren Kreis und Punkt, so wird der Kreis unbeweglicher. Betrachtet man die gesamte Konfiguration aus Kreisen und Punkten, so erlaubt sie bei zunehmenden Inzidenzen immer weniger Bewegungen. Gleichzeitig steigt die Anzahl der Beziehungen zwischen dem Kreis und den Punkten. Wittmann stellt fest, dass sich Operationen herausschälen, welche die Inzidenzen zwischen den Punkten und dem Kreis invariant lassen. Verläuft der Kreis durch zwei Punkte, so beobachtet man, dass sein Mittelpunkt nur mehr auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte bewegt werden kann. Die Bewegungen des Kreises und das Fangen führen Punkte und Kreis zu einem neuen Objekt zusammen. Dieses neue Objekt ist durch eine neue Beziehung (Punkt inzidiert mit Kreis) bestimmt und verliert im gleichen Augenblick an Beweglichkeit. Es entsteht ein unbeweglicher Kreis, der durch die drei Punkte bestimmt ist. Bei dessen Herstellung wechseln Variation und Inzidenzfindung solange ab, bis keine Variation mehr möglich ist. Ein neues Objekt entsteht.

Metapher und Bild

Ein alternativer Ansatz, der in Publikationen zur Mathematikdidaktik zu finden ist, kann als Bild-Metapher Ansatz beschrieben werden. Ein erläuterndes Beispiel findet sich Abraham Arcavi (2003). In „The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics" berichtet Arcavi über die Lösungsversuche eines Lernenden zu folgender Aufgabe: Gegeben sei eine arithmetische Folge mit a_{10}=20 und der Summe der ersten zehn Folgenelemente s_{10}=65. Wie lautet das Bildungsgesetz dieser Zahlenfolge?

Der Lösungsansatz des Lernenden wird wesentlich von visuellen Elementen bestimmt, die der Proband zu einer metaphorischen Beschreibung der Konfiguration verwendet, um mit deren Hilfe eine Lösungsidee zu generieren. Die Verwendung der elementaren Arithmetik, die gleichfalls Teil des Lösungsprozesses ist, dient der algorithmischen Ausführung dieses Vorschlages. Welche theoretischen Ansätze bieten sich hier an, um die Erfindung und Verwendung von Metaphern zu beschreiben? Der Lernende gewann seine metaphorische Beschreibung aus den von ihm konstruierten Inskriptionen. Er verwendete diese Inskriptionen als im Sinne des Philosophen Nelson Goodman als Bild. Diese Verwendungsweise zeichnet sich durch den Umstand aus, dass unterschiedliche Beziehungen in ein Bild hinein gesehen werden können. In einem Urlaubsfoto kann man sich auf Schönheit der Landschaft oder auf die Farben der Kleider der abgebildeten Personen konzentrieren. Es ist der Betrachter des Bildes, der selbst entscheidet (unbewusst, aufgrund von Erfahrung und Vorlieben), worauf er sich konzentriert und auch, wie er die Relation, die ihn interessiert, verwendet. Warum entscheiden wir uns für eine spezielle Sichtweise? Goodman meint, dass die Wahl wohl eine Folge einer speziellen Ähnlichkeit ist, welche uns Teile eines Bildes ähnlich zu einer uns bekannten Situation erscheinen lässt. Und diese Ähnlichkeit, die ja keine Gleichheit ist, kann Anstoß zu einer metaphorischen Beschreibung sein. Bögen sind Sprünge kann sich der Lernende gedacht haben. Es ist eine Eigenschaft von Metaphern, so welche die Verwendung eines Wortes in einen neuen Zusammenhang hinüber tragen. So enstehen neue ungewohnte Verwendungsweisen, die, wie im obigen Beispiel, durch arithmetische Operationen geprüft werden. Kurz gesprochen: Bilder (im Sinne von Goodman) sind mögliche Quellen von Metaphern – also Elementen der gesprochenen Sprache – die bekanntes Wissen (z.B. die Verwendung von Algorithmen – in neue Situationen tragen. Erinnern wir uns abschließend an die vor einigen Jahren lebhaft geführte Diskussion zum Verhältnis von Metapher und der Entwicklung mathematischen Wissens (Lakoff, 1997).

Ein semiotischer Standpunkt

Zum Abschluss meiner Ausführungen zur knappen Besprechung des Verhältnisses von Visualisierung und einer speziellen Zeichentheorie. Anders gesprochen: Welche Position nimmt ein semiotische Standpunkt zur Verwendung sichtbarer Zeichen ein? Die Semiotik (nach Peirce) konzentriert sich in mathematikdidaktischer Verwendung wesentlich auf das Sichtbare. Als Bsp. für diese Konzentration – also ohne jede „Spekulation, was im Mentalen ablaufen könnte“ verweise ich auf Christof Schreibers Untersuchung „Semiotische Prozesskarten“ (2010). Das Setting zur Datengewinnung war so bestimmt, dass ein wesentlicher Teil der Kommunikation ausschließlich per visuell sichtbaren Inskriptionen erfolgte. Die Interpretation der Daten erfolgte mit Mitteln der Semiotik. Als Zweites nenne ich das Vorliegen eines konsistenten Theoriegebäudes, das uns Peirce zur Verfügung gestellt hat. Das betrifft sowohl die Klassifikation der Zeichen z.B. in Ikon, Index und Symbol (mit den entsprechenden Unterkategorien) als auch die Beschreibung der Zeichenentwicklung insbesondere deren Verwendung bei der Erstellung neuen Wissens. Ich verweise auf den Dreischritt Abduktion, Induktion und Deduktion. Darüber hinaus bietet die Peirce'sche Theorie auch Begriffe an, um über die Qualität der Erweiterung von Erkenntnis sprechen zu können. Ich verweise auf die Unterscheidung von theorematischem und korollarischem Schließen. Beispiele und Erläuterungen findet man beispielhaft im oben angeführten Sammelband. Als Drittes sehe ich das Aufkommen der Semiotik in der Mathematikdidaktik – gerade mit Blick auf die Visualisierung – als eine (unbewusste) Reaktion auf eine Entwicklung in den Kulturwissenschaften. Dort wird auf die (epistemische) Geringschätzung der Anschauung, der Bildverwendung, die eine mögliche Ursache in der platonistischen Sicht auf Bild und Bildverwendung haben könnte, in aktiver Weise eingegangen. Neben den in den Kulturwissenschaften schon seit langer Zeit bestehenden theoretischen Kunstbetrachtung haben die Entwicklungen in den Naturwissenschaften und in der Technik zu einem verstärkten Interesse an Bildern und an bildgebenden Verfahren geführt (vgl. Heßler, 2009) In der Mathematikdidaktik kann die Theorie der Zeichen die Aufgabe der theoretischen Reflexion bei der Konzentration auf das Sichtbare – in Fragen der Visualisierung – übernehmen.

Literatur

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Heßler, M., & Mersch, D. (Hrsg.). (2009). Logik des Bildlichen. Zur Kritik der ikonischen Vernunft. Bielefeld: transcript Verlag.

Kadunz, G. (Hrsg.). (2010). *Sprache und Zeichen Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik*. Hildesheim: Franzbecker.

Lakoff, G., & Nunez, E. R. (2000). Where Mathematics Comes From. New York: Basic Books.

Schreiber, C. (2010). Semiotische Prozess-Karten - chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozesse. Münster: Waxmann.

Piaget, J. (1972). Die Entwicklung des Erkennens I, Das mathematische Denken. Stuttgart: Ernst Klett.

Wittmann, E. C. (1987). Anwendung des operativen Prinzips bei der Produktion mathematischer Filme. In Metzler., W. und Kautschitsch H. (Hrsg.), Medien zur Veranschaulichung von Mathematik. Stuttgart, Wien: B.G.Teubner, hpt.

Rainer KAENDERS, Köln

Perspektivwechsel bei der Begriffsentwicklung in der Analysis

Die modernen digitalen Möglichkeiten im Bereich der Analysis erfordern neue Antworten auf alte epistemologische Probleme. So wurde etwa die jahrzehntelang im Mathematikunterricht praktizierte Kurvendiskussion häufig dadurch motiviert, den Verlauf eines Graphen einer Funktion zu untersuchen. Für viele Mathematiklehrer bot sie außerdem eine willkommene Gelegenheit, Begriffsentwicklung im Bereich der Analysis zu initiieren und voranzutreiben. Nun, da die Motivation für diese Übung durch digitale Hilfsmittel obsolet geworden ist, benötigen wir neue Anlässe zur Entwicklung mathematischer Begrifflichkeiten, die sich an den mathematischen Objekten und nicht an deren Darstellung orientieren.

Ein Perspektivwechsel bietet die Möglichkeit, mathematische Begriffe losgelöst von der jeweiligen (graphischen) Darstellung weiter zu entwickeln.

1. Probleme der Identifikation von Funktionen mit ihren Graphen

Zum Beispiel wird ein Begriff wie *Monotonie* in den meisten Schulbüchern mit dem nach oben bzw. nach unten gerichteten Verlauf eines kartesischen Graphen assoziiert. Eine von der graphischen Darstellung unabhängige Definition kommt zusehends weniger vor. Auch eine Definition, wie etwa

<u>Defintion</u>: x_0 heißt *Maximum* einer Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in [a, b]$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$.

kommt in heutigen deutschen Schulbüchern zwar noch vor, wird jedoch nur noch selten zur Überprüfung einer entsprechenden Behauptung verwandt. Solche Definitionen werden häufig als *formal* bezeichnet, doch beschreibt dies ihren Charakter nur sehr unzureichend. Es handelt sich hier vor allem um Definitionen, die von der Funktion f selbst und nicht von der Wahl einer speziellen Darstellung dieser Funktion abhängen. Damit sind diese Definitionen auch mathematisch sehr viel tiefer und nützlicher als die Vorstellung von nach oben/unten gerichteten Graphen oder von Funktionsgraphen mit einer Art *Hügel*. Die größere Tiefe zeigt sich etwa darin, dass diese Definitionen direkt verallgemeinerbar sind, wie etwa auf allgemeine Funktionale oder auf den Begriff *Zufallsvariable*.

Die Identifikation von Funktionen mit ihren Graphen führt zu begrifflich problematischen Konstrukten, wie der Definition der Ableitung mithilfe der Tangenten und der Definition der Tangente mithilfe der Ableitung (z.B. in Elemente der Mathematik). Auch die begrifflich zentrale Rolle des Mittelwertsatzes oder die des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung kommen durch die suggestive Kraft der kartesischen Graphen nicht zu ihrem Recht.

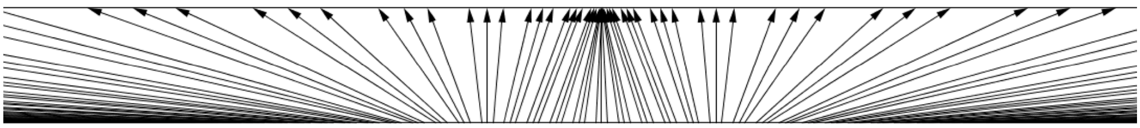
2. Perspektivwechsel durch Nomogramme

Schon Freudenthal (1978) und viele andere haben auf die Bedeutung des Perspektivwechsels für die Begriffsentwicklung hingewiesen. Sie ist fester Bestandteil jeder mathematischen Aktivität.

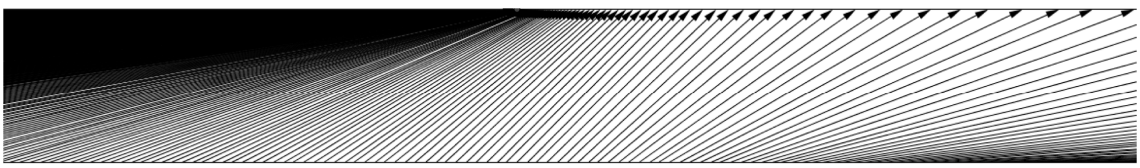
Was den Funktionsbegriff betrifft, so gab es zunächst klassische Kurven wie die Kegelschnitte, Konchoiden, Kissoiden und viele andere. Descartes hat gezeigt, wie solche Kurven Abhängigkeiten zwischen Koordinaten von Punkten bestimmen. Heute drehen wir dies um: zu einer Abhängigkeit von Koordinaten, d.h. einer Funktion, suchen wir eine entsprechende Kurve.

Nomogramme bilden eine alternative Möglichkeit, Funktionen darzustellen: Wir zeichnen zwei parallele Zahlenstrahlen in die Ebene, eine *Definitionsgerade* und eine *Wertegerade* – beide mit gleicher Skalierung, so dass sich die Nullpunkte gegenüber liegen. Nun verbinden wir einen Punkt auf der Definitionsgeraden, der durch eine Zahl x repräsentiert wird, mit dem Punkt zu $f(x)$ auf der Wertegeraden durch einen Pfeil von x nach $f(x)$. Dies tun wir für viele äquidistante Punkte x und erhalten ein *Nomogramm*. Diese einfache Idee für Nomogramme findet sich schon bei Spivak (1967) und Van Dormolen (1978) ohne, dass auf die Eigenschaften dieser Darstellung eingegangen wird. Erst seit es Software wie GeoGebra gibt, können solche Darstellungen breit und intensiv im Unterricht eingesetzt werden. Für eine ausführlichere Darstellung verweisen wir auf (Kaenders, 2011).

Zum Beispiel hat die Funktion $x \to x^3$ die Gestalt

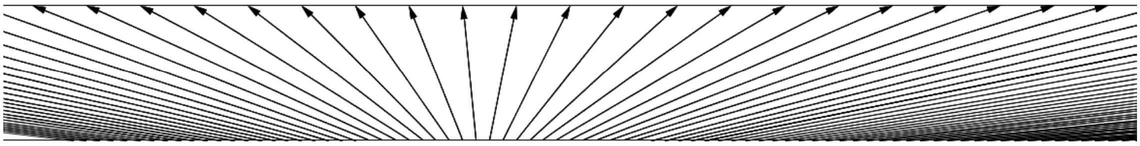


und die Funktion $x \to e^x$ hat das Nomogramm:

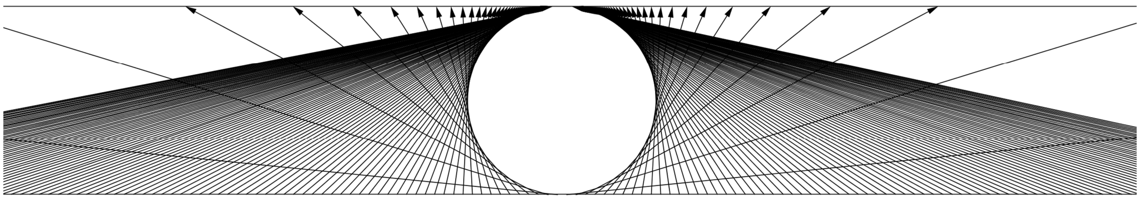


3. Eigenschaften von Nomogrammen

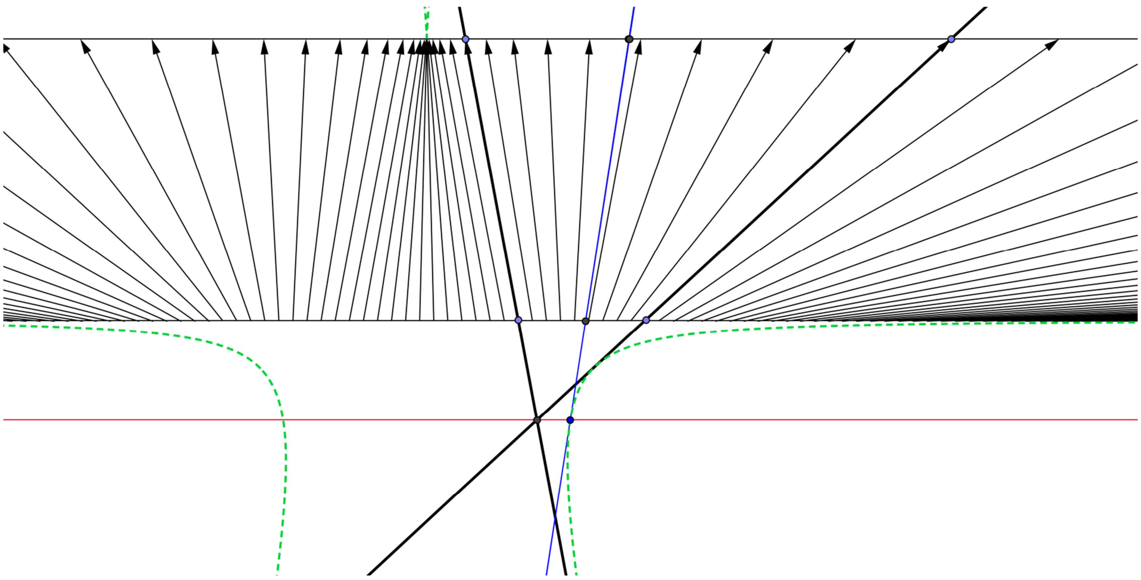
Nomogramme geben Anlass zu Perspektivwechsel: Vertraute Begriffe wie *Nullstelle, a-Stelle, Definitheit, Monotonie, Maß der Steigung, Übereinstimmung zweier Funktionen an einer Stelle*, … müssen neu interpretiert werden. Dabei gibt es viele Verbindungen zu geometrischen Fragestellungen. Eine erste natürliche Frage ist die nach der Gestalt linearer (eigentlich *affiner*) Abbildungen $y=mx+b$. Es stellt sich heraus, dass dies solche Nomogramme sind, deren verlängerte Pfeile entweder alle parallel verlaufen oder sich alle in einem Punkt schneiden. Damit wird eine lineare Abbildung durch einen einzigen Punkt in der Ebene charakterisiert.



Auf ganz natürliche Weise stellt sich nun auch die Frage der *linearen Approximation* einer Funktion dar: Betrachten wir zwei Stellen einer Funktion f, dann findet sich der charakteristische Punkt der linearen Funktion, deren Funktionswerte an den beiden Stellen mit denen von f übereinstimmen, als der Schnittpunkt der entsprechend verlängerten Pfeile an den beiden Stellen. Damit können wir Sekanten konstruieren. Die lineare Approximation der Funktion an einer Stelle finden wir nun als Grenzwert der Schnittpunkte zweier solcher Geraden. Insgesamt können wir die Hüllkurve all dieser Geraden als *Ableitungskurve* auffassen.



Oben das Nomogramm der Funktion $x \to \frac{1}{x}$, deren *Ableitung* ein Kreis ist.



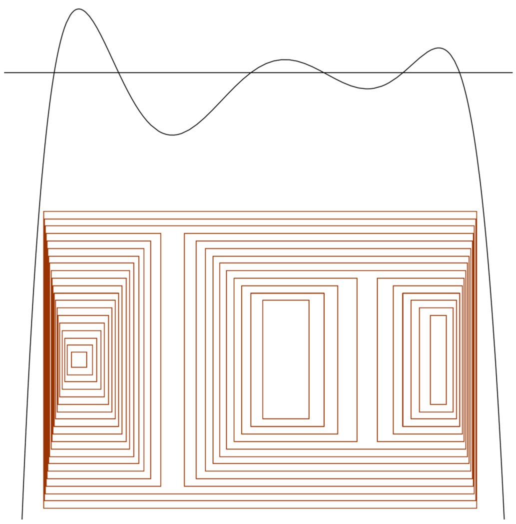
Hier oben sehen wir die typische Figur zum Mittelwertsatz als Nomogramm. Wir überlassen es dem Leser die Darstellung zu entschlüsseln.

Nomogramme erlauben es, einfache mengentheoretische Abbildungseigenschaften wie Injektivität und Surjektivität direkt zu erkennen. Des Weiteren geben sie eine einfache Visualisierung der Komposition zweier Funktionen (aufeinanderlegen und Pfeile addieren) wie auch der Darstellung der Inversen (Nomogramm umklappen). Iterationen sind durch Aufeinanderstapelungen von Nomogrammen darstellbar. Zudem können *Involutionen*, d.h. f mit $f \circ f = id$, wie $x \rightarrow \frac{1}{x}$ oder $x \rightarrow -x$ oder Projektionen, d.h. p mit $p \circ p = p$, wie $x \rightarrow \lfloor x \rfloor$ oder $x \rightarrow \mathrm{FRAC}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ leicht charakterisiert werden.

Insgesamt stellen Nomogramme einen Perspektivwechsel auf den abstrakten Funktionsbegriff dar und geben Gelegenheit zu entdeckendem Lernen. Sie ermöglichen eine Vorbereitung auf den allgemeinen Abbildungsbegriff, eine Vernetzung von Analysis und Geometrie sowie auch von Analysis und linearer Algebra und bereiten auf die alternative Darstellung von Daten vor.

4. Begriffsentwicklung durch Perspektivwechsel

Es gibt weitere Perspektivwechsel bei der Beschäftigung mit reellen Funktionen. Eine weitere Herangehensweise besteht im Einsatz von Höhenliniendiagrammen (vgl. Kaenders, 2011, S. 160 ff.). Eines der Beispiele dort sind Diagramme, wie wir sie hier rechts finden, die *Tobleronediagramm* genannt werden und deren Entschlüsselung wir ebenfalls dem Leser überlassen.



Auch kann man Funktionen in einem kartesischen Koordinatensystem mit anderen (etwa logarithmischen) Skalen, mit Hilfe von Spiralen, Maschinchen oder Pfeilketten darstellen.

Jeder dieser Perspektivwechsel trägt dazu bei, dass der mathematische Begriff der Funktion mit seinen abstrakten Eigenschaften in den Blick genommen und entwickelt werden kann.

Literatur

Freudenthal, H. (1978): Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht, Mathematik – Didaktik und Unterrichtspraxis. München, Wien: Oldenbourg.

Kaenders, R. (2011): Funktionen kann man nicht sehen. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Wiesbaden: Vieweg-Teubner.

Spivak, M. (1967): Calculus. Berkeley: Publish or Perish Inc.

Van Dormolen, J. (1978): Didaktik der Mathematik. Wiesbaden: Vieweg Verlag.

Ekaterina KAGANOVA, Universität Potsdam

Die Eigenart des schulmathematischen Wissens

Schulmathematik und Mathematik werden in unserer Gesellschaft oft synonym benutzt („In Mathe war ich immer schlecht“). Aber auch in der mathematikdidaktischen Literatur erscheint der Begriff „Schulmathematik“ selten, noch seltener wird er präzisiert, theoretisch fundiert und somit einer wissenschaftlichen Untersuchung zugänglich gemacht[1]. In diesem Artikel sollen erste Schritte gemacht werden, um nach dem Wesen der Schulmathematik (bzw. schulmathematischen Wissens) zu fragen und einen Beitrag zu einer Theorieskizze zu leisten.

Die Begrifflichkeiten „Elementarisierung, Vereinfachung, didaktische Reduktion“ der wissenschaftlichen Inhalte legt ein „Briefträgermodell“ der Didaktik (Gagel: 119) nahe, nachdem (Fach-)Didaktik die selegierten Inhalte der Mathematik in die Schule überbringt, wodurch Schulmathematik als eine elementarisierte Mathematik erscheint. Dieses Modell betont den Transfer bestimmter Inhalte aus einem gesellschaftlichen Bereich (Wissenschaft) in einer anderen (Schule). Unterschlagen wird dabei die Transformation der Inhalte und des Wissens auf diesem Weg (vgl. Höhne: 111). Durch diese Transformation auf eine spezifische Lehr- und Lernsituation erhält mathematisches Wissen jedoch eine neue, eigenständige Form. In diesem Sinne können wir von Schulmathematik als einer spezifischen gesellschaftlichen Wissensform sprechen, die sich u.a. durch eine eigene und damit typische (kommunikative) Form auszeichnet und sich von anderen mathematikbezogenen Wissensformen (Hochschulmathematik als Vermittlungswissen für Studierende, wissenschaftliche Mathematik in Zeitschriften usw.) unterscheidet.

Wir betrachten Schulmathematik also als ein überpersonales Phänomen, d.h. als einen Teil des „gesellschaftlichen Wissensvorrats“, das vom subjektiven schulmathematischen Wissen, das ein Individuum im Laufe seines Mathematikunterrichts erworben und in seinen „subjektiven Wissensvorrat“ [2] aufgenommen hat, abgegrenzt werden kann.

Skizze eines formallen Wissensbegriffs

Gesellschaftliches Wissen wird in bestimmten gesellschaftlichen *Kontexten* produziert und genutzt, d.h. es wird an bestimmten sozialen Orten durch bestimmte gesellschaftliche Akteure und zu bestimmten gesellschaftlichen

[1] Eine Ausnahme bildet S. Prediger, die eine theoretische Konzeption der Schulmathematik als spezifische Kultur versucht.
[2] Die Termini stammen aus der Wissenssoziologie.

Zwecken (re-)produziert und rezipiert. Im spezifischen Kontext erhält Wissen seine eigene *Form* (vgl. Höhne: 130). Form und Kontext sind zwei konstituierende Elemente, wodurch eine Wissensform von einer anderen unterschieden werden kann (vgl. Höhne: 156). Was heißt aber Form des Wissens? Welche Dimensionen beinhaltet sie? Was wird auf welchen Ebenen formiert? Um diese Fragen zu beantworten, muss bedacht werden, dass gesellschaftliches Wissen stets versprachlicht bzw. mit Hilfe von Zeichen oder Bildern festgehalten ist und erst durch die Kommunikation sichtbar wird. „Empirisch tritt Wissen immer in Form von Kommunikation auf" (Knoblauch: 355). Jede Wissensform hat ihren typischen medialen Ort, typische Kommunikationsmittel, ein eigenes Sprachregister, typische Themen und Thematisierungsweisen sowie typische kommunikative Handlungen. „Die Formen des Wissens sind wesentlich an die Form der Kommunikation gebunden" (Knoblauch: 366). Eine Kommunikationsform beinhaltet folgende Dimensionen: Art der Kommunikation (Buch, direktes Gespräch, Zeitung u.a.), Kommunikationsmittel (sprachliche Zeichen, mathematische Symbole, Diagramme, Bilder, Tabelle u.a.), thematisch-inhaltliche Dimension (Art der Themen, thematische Struktur, Art der Themenentfaltung und der Argumentationsweise) sowie Dimension der kommunikativen Handlung (Art der dominierenden kommunikativen Handlung, Handlungsstruktur).

Schulmathematik als eine gesellschaftliche Wissensform

Um Schulmathematik als eine spezifische Wissensform zu konzipieren, müssen die beiden konstituierenden Elemente Kontext und Kommunikationsform für schulmathematisches Wissen präzisiert werden. Schulmathematisches Wissen wird von externen Akteuren des Bildungswesens (Bildungspolitiker, Lehrervertreter, Didaktiker) zu Vermittlungszwecken selegiert und im Hinblick auf eine spezifische Lehr- und Lernsituation strukturiert**.** Dieses Vermittlungswissen, das medial für das Fach Mathematik hauptsächlich in Schulbüchern verankert ist, kann als ein gesellschaftliches Angebot an in die internen Akteure des Bildungswesens (Lehrer, Schüler) angesehen werden, das dann in Abhängigkeit von den lokalen Bedingungen genutzt wird. Dabei erfährt das schulmathematische Wissen eine erneute Transformation durch Lehrer, sie strukturieren die Inhalte erneut im Hinblick auf ihre konkreten Klassen (vgl. Fend). Auf diese Weise kann man zwei Schulmathematiken als gesellschaftliche Wissensformen unterscheiden: Schulmathematik auf der Makroebene (in den Schulbüchern verankerte gesellschaftliches Angebot an die internen Akteure des Bildungswesens) und Schulmathematik auf der Mikroebene (das von Lehrern umstrukturierte gesellschaftliche Vermittlungswissen, das meist in direktem Kontakt zwischen Lehrer und Schülern kommuniziert wird). Natürlich haben beide Wissensformen einige gemeinsame Merkmale und starke Wechselwirkungen; sie unterscheiden sich jedoch aufgrund des gesellschaftlichen Kontextes und der Kommunikationsform, wodurch eine analytische Trennung dieser beiden Wissensformen gerechtfertigt erscheint.

Die empirische mathematikdidaktische Forschung fokussiert sich auf das individuelle schulmathematische Wissen von Schülern sowie auf einzelne Aspekte des schulmathematischen Wissens auf der unterrichtlichen Ebene bzw. der Mikroebene (z.B. interpretative Unterrichtsforschung). Die Schulmathematik auf der Makroebene wird demgegenüber vernachlässigt und ist kaum systematisch erforscht. Im Folgenden soll es um Schulmathematik auf der Makroebene gehen.

Unbekannte thematische und funktionale Dimension des schulmathematischen Wissens

Schulmathematisches Wissen ist also eine spezifische gesellschaftliche Wissensform. Während mediale Ort des schulmathematischen Wissens (primär Schulbuch) sowie Kommunikationsmittel (Bilder, Grafiken, mathematische Zeichen, sprachliche Zeichen) einfach zu bestimmen und relativ eindeutig sind, ist die thematisch-funktionale Dimension der zum schulmathematischen Wissen gehörigen Kommunikationsform nicht erforscht worden. Schon 1971 lenkt Rumpf den Blick der Didaktiker auf die „unbefragte Feinstruktur von Unterrichtsinhalten“ und plädiert dafür, „das Produkt [Schulwissen in Schulbüchern] schärfer ins Auge zu fassen und seine spezifische Artikulation bewußt zu machen“ (Rumpf: 14). Dieser Aufforderung sind Mathematikdidaktiker bis heute nicht nachgekommen. Mit dem Anliegen sind solche Fragen verbunden wie: Welche sprachlichen Handlungen dominieren? D.h. wird schulmathematisches Wissen mitgeteilt, verkündet, gepredigt, vorgeschrieben? Welche Themen (nicht Inhalte) treten auf? Wie werden Themen entfaltet: argumentativ, deskriptiv oder explikativ? Welche Argumentationsweisen sind typisch? Gibt es Typiken bezüglich thematischer und funktionaler Textstruktur? Eine Möglichkeit, Antworten auf diese Fragen zu erhalten, bieten die linguistischen Methoden der Textanalyse nach K. Brinker und Th. Schröder.

Erste Untersuchungsergebnisse

An dieser Stelle können lediglich skizzenhaft ausgewählte Ergebnisse einer Textanalyse mitgeteilt werden; die ausführliche Analyse ist bei der Autorin erhältlich. Untersucht wurde ein Schulbuchtext für eine 6. Jahrgangsstufe mit inhaltlichem Schwerpunkt „Multiplikation und Division der Dezimalzahlen mit 10, 100, 1000…“ (Esper: 10). Mit dem Text wird eine Vorschrift (Texthandlung) vollzogen, die Division- und Multiplikationsaufgaben entsprechend des Vorgangs „Rücken des Kommas“ zu bearbeiten (Textthema). Die Art und Weise, wie das Komma bei der Multiplikation und Division rückt, wird als ein Vorgang dargestellt, der ohne einen Handelnden passiert. Dass das Komma in eine bestimmte Richtung um eine bestimmte Anzahl der Stellen rückt, wird im Text nur formal begründet. D.h. die Begründungen können nicht als plausibel gelten, da die meist impliziten Stützungen der Argumentation im Schulbuchtext rational nicht begründbar sind - somit erweist sich die gesamte Argumentation als nicht plausibel. Die formale Begründung dient der Legitimation der Vorschrift, die allein die Akzeptanz durch den Leser als Ziel anstrebt. Im weiteren Verlauf des Textes werden Handlungsschritte zur Bearbeitung der Multiplikations-/ Divisionsaufgaben beschrieben.

Ob Verkündung und Vorschrift typische sprachliche Handlungen, nicht mathematikhaltige Themen und deskriptive Themenentfaltungen sowie nicht plausible Argumentationen typische Merkmale der zum schulmathematischen Wissen gehörigen Kommunikationsform sind, ist weiter zu untersuchen. Derartige Vermutungen liegen jedoch nah.

Literatur

Brinker, K. (1997): Linguistische Textanalyse. Eine Einführung in Grundbegriffe und Methoden. Berlin, Erich Schmidt Verlag.

Esper, N./ Schornstein J. (2007): Fokus Mathematik. Klasse 6. Gymnasium Nordhein-Westfalen. Berlin, Cornelsen Verlag.

Fend, H. (2006): Neue Theorie der Schule. Einführung in das Verstehen von Bildungssystemen. Wiesbaden, VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Gagel, W. (1997): Wissenschaftsorientierung. In W. Sander (Hrsg.): Handbuch politische Bildung. Bonn, Wochenschau Verlag, 115-127.

Höhne, Th. (2003): Schulbuchwissen. Umrisse einer Wissens- und Medientheorie des Schulbuches. Frankfurt am Main, Fachbereich Erziehungswissenschaft der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität.

Knoblauch, H. (2010): Wissenssoziologie. Konstanz, UVK Verlagsgesellschaft.

Prediger, S.(2004): Mathematiklernen in interkultureller Perspektive. Mathematikphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen. München Wien, Profil Verlag.

Rumpf, H.(1971): Die unbefragte Feinstruktur von Unterrichtsinhalten. In H. Rumpf (Hrsg.): Schulwissen. Probleme der Analyse von Unterrichtsinhalten. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 7-21.

Schröder, Th. (2003): Die Handlungsstruktur von Texten. Ein integrativer Beitrag zur Texttheorie. Tübingen, Gunter Narr Verlag.

Toulmin, St. (1975): Der Gebrauch von Argumenten. Kronberg, Scriptor Verlag.

Romualdas KASCHUBA (KAŠUBA), Vilnius, Litauen

Wie bunt und lustig kann der Text der Aufgabe sein und wozu soll es gut sein?

Das allmächtige Leben weiß über alles Bescheid. Es bedarf eigentlich keinem Beweis, weil es wir alle nur zu gut Bescheid wissen, dass es eigentlich alles, was entsteht, im Leben verschmolzen ist. Somit erscheint das Leben sogar mächtiger als die Statistik, die nur über Vieles Bescheid weiß. Leider ist das allwissende Leben nicht etwas, dass gleich etwas andeutet oder erklärt. So müssen wir selbst viele Antworte im Kopf haben, im Leben entdecken oder aus den Büchern entnehmen.

Das ist auch gut so, allein schon aus dem Grunde, dass es uns viel über verschiedene Sachverhalte nachdenken lässt, die man mit statistischen Methoden untersuchen lassen kann. Dies alles ist nötig, um danach mit stärkerer Stimme behaupten zu können, dass meine Untersuchungen jenes zeigen und beweisen.

Zur Frage des Vortrages muss der Verfasser sehr klar sagen, dass er bis jetzt noch keine großen statistichen Untersuchungen zur Sache durchgeführt hat. Sozusagen keine globale Analyse durchgeführt hat. Aber viele kleine Untersuchungen „im Kleinen“ und viele Reflexionen sowie auch viele naheliegende Gedanken und sogar Selbstbetrachtungen hat er schon längst gemacht. Dies hat der Verfasser sogar ganz intensiv (mit)-erlebt.

Der Verfasser muss ehrlich bestehen, dass er in seiner Laufbah auch einige Büchern in drei Sprachen geschrieben und veröffentlicht hat (c.f. 3-6).

Das innere Spiegelbild, oder, ganz einfach gesagt, eine sehr kurze Beschreibung, wie man sich bei der Verfassung „der schönen Texte“ fühlen könnte, ist schon längst in der Literatur festgehalten worden. In einer einziger Strophe von Rainer Maria Rilke „Stunden Buch“ lesen wir Folgendes:

Ich lebe mein Leben in wachsenden Ringen,/ die sich ueber die Dinge ziehn./ Ich werde den letzten vielleicht nicht vollbringen, / aber versuchen will ich ihn.

Wenn wir das Gesagte weiter mit Rilkes Worten vergleichen, so muss es sehr klar gesagt werden, dass bei uns hier das „Ich“ weitaus nicht unbedingt nur den Verfasser umfasst. Nicht unbedingt nur den, der eine schöne Aufgabe zu verfassen anstrebt. Oder auch nicht nur den, der sie in die Wirklichkeit umwandelt, oder besser gesagt, wer diese zu lösen vesucht. Es ist denkbar, dass an der Stelle ein beliebiges Problem oder jede wichtige Konstellation mit dem Wirkungskreis voellig vorstellbar ist – eigentlich fast jede Sache von Format oder ueberhaupt ein Phaenomen mit Nachwirkung.

Ein Physiker würde vielleicht an der Stelle ganz klar und ohne Weiteres sagen, dass das Körper selbst natürlich wichtig ist. Der Körper ist immer auch die Ursache, aber es geschieht doch so oft auch so, das sein Schatten sogar viel wichtiger erscheint.

So geschieht es manchmal auch mit der schönen oder sozusagen mit der „gut gelungenen" Aufgabe.

Denn es ist in der Tat nicht nur wichtig, dass was die Aufgabe uns zu machen einladen versucht, aber auch – und manchmal sogar vor allem auch eigentlich die Form, wie sie es macht. Einfach gesagt, es zählt sich sehr viel, ob sie uns sehr antsprechend vorkommt.

So ist es natürlich nicht mit Aufgaben. Oder gar nicht nur mit arithmetischen Fragestellungen und mathematischen Problemen. So ist es mit allem, was uns etwas „Umwerfendes" bietet, was uns anspricht, etwas Neues zu versuchen.

Ganz so wie in der Scharade, im jedem Problem ein Moment der Bewunderung scheint immer hundertprozentig an Ort und Stelle zu sein – raten Sie mal was es nur sein könnte:

Die Erste schützt vor Frost, die letzte frist der Rost, das Ganze braucht die Post.

Manchmal nimmt es so tolle Formen an, dass es – ihr werdet es vielleicht nicht glauben – zu neuen Worte führt. Wie gesagt: toll und doch alles da:

Es hängt zwischen vier Mauern /und ruft alle Bauern.

Wie auch noch hingefügt werden könnte: klar, verständlich aber keinesfalls banal und nie trivial.

Weiter möchte der Verfasser einige, eigentlich vielleicht zwei von seinen Aufgaben präsentieren, die im Laufe des letzten Jahres entstanden sind.

Erste Aufgabe

Der Hengst in Weissen, obwohl er in der letzten Zeit weitaus seltener in der Öffentlichkeit von Tieren zu sehen war. Unabgesehen davon galt er wahrlich als treuer und ergebener Freund des Igels im Nebel. Er bevorzugte es, plötzlich und unerwartet zu erscheinen, und auch noch manche zuerst unschuldig aussehende, aber teilweise verkehrte Aufgabe mitzubringen.

Man muss klar und deutlich betonen, dass ursprünglich Igel im Nebel gar keine Lust empfunden hat, sich mit diesen Aufgaben überhaupt zu befassen. Allmählich aber fand er immer mehr Geschmack beim Lösen dieser Aufgaben. Und wenn schon, so setzte er sich dann immer sehr entschlossen zur Suche der Wahrheit. Wenn er aber gar keine, sogar geringste Fortschritte erreichen konnte, so war er manchmal sehr sauer und konnte sogar einen Wutanfall haben.

Heute ausser der üblichen Post hat der weisse Hengst auch folgendes Rätsel mitgebracht. Es sah wie immer, sehr unschuldig und zugleich ziemlich provokativ aus. Das Rätsel bestand aus 16 Stücken miteinander geklebten Zahlen und Buchstaben. Die ganze Verpackung sah wie folgt aus – gewisse Regularität da war vom Anfang an nicht zu übersehen:

a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3 und d4.

Plötzlich war es sehr leise im Walde. Aber das so durchdringende Geschrei von der Eule war überall noch zu hören.

Das war eine Einladung für alle Tiere, die hier im Walde als gut gebildet gelten möchten. In der Aufgabe war Folgendes gefragt. Gerade alle diese 16 geklebten Stücke sollten so in die 16 Feldern eines 4 x 4 Brettes eingetragen werden, sodass in jeder Reihe, wie auch in jeder Spalte alle diese vier genannte Buchstaben a, b, c, d wie auch alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4 mussten genau einmal vorkommen.

Und der Grizzlybär zeigte seine Verzweiflung, dass diese Aufgabe kaum zu meistern sei. Im Gegensatz dazu, wie immer, hat der Igel im Nebel sehr stark daran geglaubt, dass es möglich ist – wenn auch natürlich ohne jegliche wissenschaftlicher Begründung. Er drückte seine enthusiastische Haltung in folgender Art und Weise mit jenen Worten aus: Wo es alles so verlockend aussieht, dann muss es doch auch realisierbar sein.

Man bedenke nur noch – in jeder Reihe und in jeder Spalte alle vier Zahlen und alle vier Buchstaben - und alle nur einmal.

Ist diese Idee umzusetzen? Ist es möglich in die 16 Feldern eines 4 x 4 Quadraten diese 16 geklebten Stücke so hineinzutragen, dass in jeder Reihe und in jeder Spalte alle Zahle und alle Buchstaben genau einmal auftreten?

Dazu noch die zweite Aufgabe.

In der letzen Zeit hat die Eule häufiger gute Laune. Auch die arithmetischen Fantasien des weissen Hengstes waren nicht zu übersehen. Gerade wenn dies der Fall war, ganz wie es gerade jetzt der Fall ist, so folgten dann die Serien von Fragen. Eine nach der Anderen, die erste recht lächerlich und fast für Babys verständlich und dann allmählich und fast unbemerkt, immer schwieriger. Dies wussten Igel im Nebel und Grizzlybär nur zu gut. Daher blieben sie immer möglichst aufmerksam. Diesmal war diese Serie von Fragen wie folgt aus. Dabei musste man beachten, dass die Eule drängte und verlangte, dass die Antworten möglichst schnell folgten. Beide Freunde haben sich deswegen immer eifriger bemüht keine Sekunde zu verlieren, um ihr wissenschaftliches Ansehen zu stärken.

Heutige Folge hatte folgende Fragen:

(A) Gibt es da eine ganze Zahl mit einer nicht durch 6 dividierbare Quersumme? Das war die sogenannte Babyfrage.

(B) Gibt es gerade drei hintereinander folgende ganze Zahlen, dass die Quersumme von ihnen in allen drei Fällen auch nicht durch 6 dividierbar ist? Die galt als die Anfängerfrage.

(C) Kann es denn, dass sogar sechs solche hintereinanderfolgende Zahlen gibt, sodass in keinem Falle die Quersumme in allen sechs Fällen wieder nicht durch 6 dividierbar ist? Das war die Frage für Fortgeschrittene.

(D) Man finde die längste mögliche hintereinaderfolgende Reihe von solchen Zahlen. Dies war eher schon die Frage für Kenner und Experte.

An der Stelle mein allerherzlichter Dank geht an Prof. Orlando Döhring aus London, der mich mit meinen Übersetzungen immer nicht nur moralisch unterstützte und geholfen hat und ebenso auch an Prof. Bernhard Brockman, der von Augsburg aus über meine von mir aus so geliebte aber z. Z. leider recht einsam gebliebene deutsche Sprache meiner vielen GDM Veröffentlichungen sorgt. Auch Professor Lothar Profke aus Giessen hat mir seit Jahren unwahrscheinlich viel geholfen – wie gesagt: mit Rat und Tat! I wish them all the best/And GOD will add the rest!

Literatur

[1] Rainer Maria Rilke, *Poezija – Die Gedichte*, Vilnius, 1996, Paralleltexte, 413 p. ISBN 9986-413 -75 -3.

[2] *Rat zu, was zu raten ist, Rätsel und Scherzfragen aus fuenf Jahrhunderten*, Herausgegeben von Ulrich Bentzien, Hinstorff Rostock, 3 Auflage, 288 Seiten, 1980.

[3] Romualdas Kašuba, *Once upon a time I saw a puzzle*, Part I, University of Latvia, 2008, 59 p., IBSN 978-9984-45-045-2.

[4] Romualdas Kašuba, *Once upon a time I saw a puzzle*, Part II, Riga, University of Latvia 2008, 67 p., ISBN 978-9984-18-102-8.

[5] Romualdas Kašuba, *Once upon a time I saw a puzzle*, Part III, Riga, University of Latvia 2009, 88 p., IBSN 978-9984-45-133-6.

[6] Romualdas Kašuba, *Kak reshat' zadachu, kogda nie znajesh kak*, Moskva, Izdatel'stwo „Prosveschtschenije“, 2012, 174 p., ISBN 978-5-09-023583-9

Tetsushi KAWASAKI, Kyoto, Japan

Some subjects made clear by the study of modelling, on the school mathematics in Japan

Author conducted "Scatter of Data" investigation for mathematics teachers in Japan. Almost all teachers resulted in not understanding statistical modelling. Author want to get them to recognize the importance of modelling using this opportunity. But, the present condition on the mathematics education in Japan is imbalanced between "mathematical academic ability" and "the ability utilizing mathematics. Author conducted two kind skill tests for university students. Many students have resulted in not achieving standard line and have head scratcher.

1. The object of study, and one traditional usage in Japan

The purpose of research is to build the curriculum of effective mathematical modeling in university and school education. To aim children's learning effect,

(1) A teacher must deal with the solution method of the natural phenomenon or daily life by the method suitable for children's capability.

(2) Teachers should recognize children's challenge and must support them.

(3) But first, themself such as teachers must learn the method of modeling very well and must learn the skill enough.

Students want answer immediately. But, many teachers are too busy to guide some students. Instead of teachers, students should just read the polite answer book. The appearance of these exercise books looks like serving a dual purpose. But, this support seems to have lost students' mental capacity and discussion opportunity. Many teachers had been also indulged by this support when they were still students. And, they didn't study mathematical modelling at either school or university.

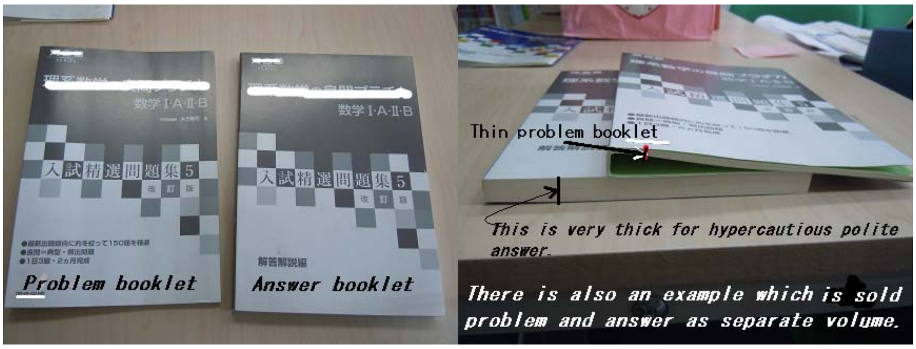
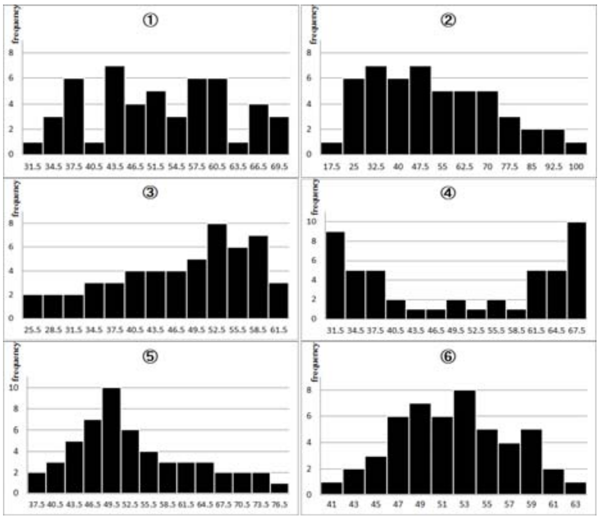


Photo.1 An example of problem booklets in JAPAN

2. Simple modelling experience to high school teachers; "*What is mathematical modelling?*"

Luckily this year, statistics will revive to high school mathematics for the first time in about twenty years. Because teachers have sense of crisis for statistics, I succeeded in teachers' modeling experience.

Check "amount of statistics" and "histogram"



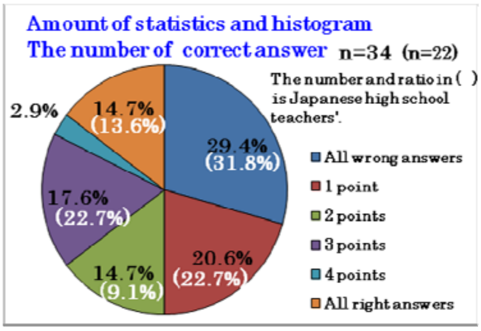
Data group	Average	Median	Standard deviation	Histogram No.
A	50	50	10	
B	50	50	15	
C	53	50	10	
D	53	50	20	
E	47	50	10	
F	50	50	5	

This is the modeling which makes a graph from numerical data.

This will be connected with F-test and t-test.

Fig.1 Summary statistic and histogram (cf. Meletiou, M ., & Lee, C., 2003)

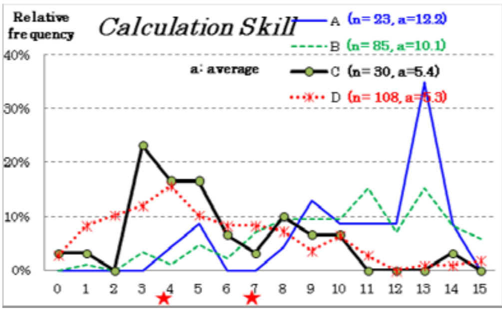
This is Statistical Modeling. Many high school teachers could not make models (Graph. 1). The scales seemed to fall from teachers' eyes. Probably, they will be to understand a little meaning of mathematical modelling.



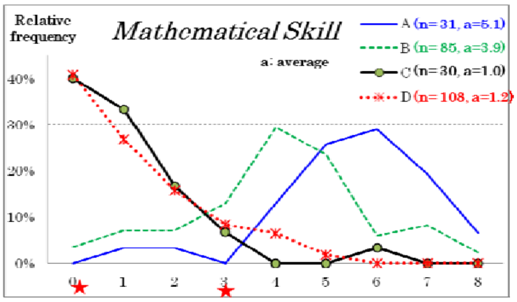
Graph.1 The result of this modelling exercise

3. Discussion for major difficulties; "*Which comes first, the chicken or the egg?* "

Children need mathematical modelling training at early stages of their growth, such as during elementary school (cf. Blum & Ließ, 2007). Mathematical modelling training needs at early stages of students' growth. But because university education and students taking teacher-training courses have major difficulties in mathematics, proper human resources may be unable to be given to the field of school education. I measured the students' academic ability. One is calculation skill problem, and another is mathematical skill problems. These levels are elementary school employment examination level and it is a tenth grade student completion level. " ─●─ ,··✱·· " lines are private university (teacher training course) students datas (Graph.2, 3). Other lines are national universities. Clearly, the national universities students are excellent. In Japan, since the number of the elementary school teacher is insufficient, many university students are employed. A red star mark "★" is the score of college seniors adopted as the elementary school teachers this spring. If other scores are high even if a mathematics score is low, they will pass examination.



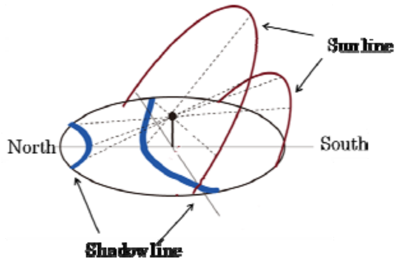
Graph.2 Academic ability university-by-university comparison (Caluculation Skill, October, 2011)



Graph.3 Academic ability university-by-university comparison (Mathematical Skill, October, 2011)

Probably, the academic mathematics ability of elementary school teachers will also expect a similar result. However, the mathematical modeling must use mathematics. Elementary school teachers will not be able to practice mathematical modelling if their mathematical academic ability is low.

Another trouble is students' daily experience unsolvable in only mathematics. For example, "A shadow becomes extended at the time of sunrise or sunset". Such a phenomenon does not seem to be their common sense (Table.1). These are the shadow motions of the summer and winter solstice, spring and autumn equinox. These motions are the hyperbola models. This graph's data is concentric circles with the constant length of shadows (Table.2). It seems that students have an image with which winter's shadow is extended rather than summer.



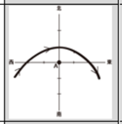
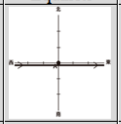
Pattern	Summer solstice	Equinox	Winter solstice
University : n=79 Highschool : n=102 Elementary : n=37			
University students	25.3%	3.8%	8.9%
High school students	20.6%	5.9%	2.0%
Elementary students	32.4%	16.2%	13.5%

Table.1 Accuracy rate (February, 2012)

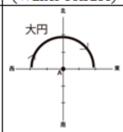
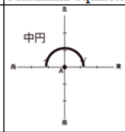
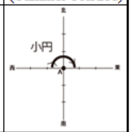
Pattern	Summer solstice (Winter solstice)	Spring equinox Autumnal equinox	Winter solstice (Summer solstice)
University : n=79 Highschool : n=102 Elementary : n=37			
University students	12.7%	17.7%	16.5%
High school students	12.7%	19.6%	14.7%
Elementary students	21.6%	18.9%	16.2%

Table.2 Wrong recognition of daily life by students (February, 2012)

Their confusion are two, "(1) Length of a radius ＝ Length of a shadow, and (2) Length of an arc ＝ Daylight hours".

Probably the recognition of many teachers may be wrong, too. Changing their recognition is above everything else, then it is necessary for teachers to change the recognition of students afterwards. Much time will need the work.

4. Conclusion and future subjects

Mere imitation form of mathematical modeling will be troubled. It is dangerous to finish with "feeling and mood of modelling-practice". I hope that university students will recognize the importance of academic ability through mathematical modelling. Such teaching materials in university education should be developed as speedily as possible.

5. Literatur

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Mathematical modelling (ICTMA12) (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood.

Meletiou, M ., & Lee, C. (2003): "Studying the Evolution of Student' Conceptions Of Variation Using the Transformative and Conjecture-Driven Research Design," in Reasoning About Variability: A Collection of Current Research Studies, ed. C. Lee, Mt. Pleasant, MI: Central Michigan University.

Katharina KLEMBALSKI, Berlin

Sogar mathematisch bewiesen? Formen mathematischen Schließens

Einleitung

Anlass für die hier vorgestellten Überlegungen ist die Beobachtung des unterschiedlichen Gebrauchs der Begriffe *sicher* bzw. *Sicherheit* in der Kryptografie. So ist die Einwegeigenschaft von in der Kryptografie eingesetzten Funktionen nicht bewiesen, die entsprechenden Verfahren sind mathematisch also nicht sicher. Dennoch werden Verfahren wie RSA täglich millionenfach eingesetzt und von Experten als sicher eingeschätzt. Das dient als Motivation, die jeweils zugrunde liegenden Schlussweisen zu charakterisieren und voneinander abzugrenzen.

Zwei Formen mathematischen Schließens - drei Beispiele

Orientiert an Pólya (1988/1975) und Blechman et al. (1984) wird im Folgenden zwischen deduktivem und plausiblem Schließen unterschieden. Um diese Formen mathematischen Schließens zu charakterisieren, werden zunächst zwei Beispiele betrachtet und in einem dritten die Frage der Sicherheit von RSA wieder aufgegriffen. Die betrachteten Charakteristika gehen zurück auf Pólya (1975, S. 172f).

Beispiel 1. Wenn p eine Primzahl und $(a, p) = 1$ ist, so ist $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ (Kleiner Fermat). Daraus folgt für $p = 147$ wegen $2^{147-1} \bmod 147 = 25$ sofort, dass 147 keine Primzahl ist.

Die einzelnen Schritte der Argumentation in Beispiel l lassen sich entsprechend den Regeln der formalen Logik nachprüfen und gelten unabhängig von der Person, die diese Prüfung durchführt. Um den Schluss zu bestätigen, wird neben den Regeln der Logik nichts über die Voraussetzungen Hinausgehendes benutzt. Da die Voraussetzungen dauerhaft sind, gilt das ebenso für den Schluss. Hier wurde *deduktiv* geschlossen, d.h. insbesondere *unpersönlich*, *in sich vollständig* und *dauerhaft* (Pólya 1975, S. 172).

Beispiel 2. Die Berechnung des Produkts $123 \cdot 11 = 1353$ soll geprüft werden. Es wird die 9er-Probe angewandt, d.h. das Produkt der Quersummen der Faktoren $(6 \cdot 2)$ mit der Quersumme des Ergebnisses (12) verglichen. Aus der Übereinstimmung lässt sich schließen, dass die Rechnung *möglicherweise* richtig ist. Das Ergebnis 1353 erscheint *plausibel*.

Die zugrunde liegende Aussage $A \rightarrow B$ ist die folgende: Wenn $123 \cdot 11 = 1353$, dann gilt für die Quersummen:
$Q(123) \cdot Q(11) \equiv Q(1353) \pmod 9$. Im Beispiel wird aus der Beobachtung

B auf die Gültigkeit von *A* geschlossen, bzw. genauer die Annahme gestärkt, dass auch *A* gilt.

Die angewandten Schlussweisen in den Beispielen l und 2 lassen sich durch folgende Schemata darstellen (Pólya, 1975, S. 15):

$$\text{Deduktives Schließen: } \frac{\begin{array}{c}\text{Aus } A \text{ folgt } B\\ B \text{ falsch}\end{array}}{A \text{ falsch}} \qquad \text{Plausibles Schließen: } \frac{\begin{array}{c}\text{Aus } A \text{ folgt } B\\ B \text{ wahr}\end{array}}{A \text{ glaubwürdiger}}$$

Der Zugewinn an Glaubwürdigkeit von *A* durch die Gültigkeit von *B* ist abhängig vom Kontext – wie in Beispiel 2 – und davon von wem der Schluss durchgeführt wird. Plausibles Schließen ist daher nicht *unpersönlich*. Das folgende Beispiel wird zusätzlich auf die Merkmale in *sich vollständig zu sein* und *dauerhaft* untersucht. Das Beispiel ist zunächst von deduktiver Gestalt, unterscheidet sich von einem mathematischen Satz wie in Beispiel 1 jedoch in den Voraussetzungen, die plausibel gewonnen werden.

Beispiel 3. Wenn (i) die Faktorisierung schwer ist und
(ii) Angriffe ohne Faktorisierung ausgeschlossen sind,
dann ist RSA sicher.

Zu (i). Ob die Faktorisierung schwer ist (also nicht in Polynomialzeit durchzuführen), ist nicht bewiesen. Die Frage verweist jedoch auf ein übergeordnetes Problem der Komplexitätstheorie, nämlich ob $P \neq NP$ ist und ist dadurch auch Gegenstand mathematischer Forschung jenseits der Kryptografie. Dass trotz intensiver Forschung aus unterschiedlichen Richtungen keine Fortschritte über Nachweis der Existenz oder sogar die Angabe eines polynomialen Algorithmus erkennbar sind, stärkt die Annahme (vgl. Buchmann 2003, S. 148).

In der Praxis werden die Laufzeiten bekannter Faktorisierungsverfahren (langsam) gegen die zur Durchführung von RSA (schnell) abgewogen und daraus Empfehlungen für die Schlüssellänge (Stellenzahl des Moduls *n*) abgeleitet, die voraussichtlich Sicherheit gewährt. Die zugrunde liegenden Annahmen zur Rechenleistung werden immer wieder neu an die tatsächlichen Gegebenheiten angepasst und schließen erfahrungsbasierte Prognosen zur zukünftigen Entwicklung mit ein.

Zu (ii). Argumentativ wird zwischen Angriffen auf die Einwegfunktion, bei RSA dem Potenzieren modulo *n*, und Angriffen auf die Implementierung unterschieden. Im ersten Fall wäre es denkbar, eine Nachricht direkt, d.h. ohne Bestimmung des geheimen Schlüssels (äquivalent zum Faktorisierungsproblem), zu entschlüsseln (vgl. Buchmann, S. 141). Ein Algorithmus, der das (in Polynomialzeit) leistet, ist aber nicht bekannt. Angriffe, die Details der Implementierung ausnutzen, beschreibt u.a. Buchmann (2003). Sie sind durch entsprechende Modifikation des Protokolls, in dem RSA verwendet wird, leicht zu vermeiden (ebd., S. 147). Aus diesem Grund sind übliche Aussagen zur Sicherheit eines kryptografischen Verfahrens immer konditionaler Natur und schließen das Protokoll ein, in dem es angewendet wird. Solche „Sicherheitsbeweise" besitzen oft folgende Form: „Unser Protokoll ist immun gegen einen Angriff der Art *X*, vorausgesetzt das mathematische Problem *Y* ist schwer berechenbar." (vgl. Koblitz 2007, S. 976) Da auf diese Weise nur die Sicherheit gegenüber bekannten Angriffen gewährleistet wird, wird die Mehrzahl moderner kryptografischer Verfahren vor ihrem Einsatz veröffentlicht. So können sie bereits vor ihrem Einsatz auf mögliche Angriffe getestet werden.

Die Argumentation für die Gültigkeit der Voraussetzungen (i) und (ii) in Beispiel 3 folgt dem angegebenen Schema plausiblen Schließens: Angenommen (i) und (ii) sind wahr, dann folgen die dargestellten Beobachtungen (keine Entdeckungen von polynomialen Algorithmen, keine alternativen Angriffe). Die Plausibilität wird durch verschiedene (und möglichst unabhängige) beobachtete Folgerungen aus den Annahmen (i) und (ii) gestärkt und dadurch insbesondere *B* ohne *A* als unwahrscheinlich charakterisiert (Pólya, 1975, S. 49f).

Damit enthält der deduktive Schluss in Beispiel 3 plausible Elemente, die gesamte Schlusskette ist „nur" plausibel. Die Verwendung des Begriffs *Sicherheit* bezogen auf RSA lässt sich nun präzisieren: Die Sicherheit von RSA lässt sich nicht (vollständig) deduktiv erschließen, sie ist jedoch plausibel. Der Schluss erfolgt auf Kosten der Eigenschaft, *in sich vollständig zu sein* (Festlegung geeigneter Schlüssellängen; Berücksichtigung der (bis dahin!) bekannten Angriffe). Die Einschätzungen zur Sicherheit von RSA (mit festgelegten Parametern) sind daher nur vorläufig, also *nicht dauerhaft*. Inwieweit eine konkrete Argumentation einschließlich Empfehlung zur Schlüssellänge als plausibel empfunden wird, ist individuell verschieden und daher *nicht unpersönlich*.

Ausblick - Plausibles Schließen und Allgemeinbildung

Missverständnisse über Mathematik bzw. zur Rolle der Mathematik in Anwendungen, die aus einer einseitigen Orientierung an den Merkmalen des Deduktiven entstehen, beschreibt Koblitz (2007, S. 977) in seinen Ausführungen zu *provable security*:

> "The first is the notion of 100% certainty. Most people not working in a given specialty regard a "theorem" that is "proved" as something that they should accept without question. The second connotation is

> of an intricate, highly technical sequence of steps. From a psychological and sociological point of view, a “proof of a theorem” is an intimidating notion: it is something that no one outside an elite of narrow specialists is likely to understand in detail or raise doubts about. That is, a “proof” is something that a non-specialist does not expect to really have to read and think about.”

Koblitz verweist insbesondere auf die Merkmale *dauerhaft* und *unpersönlich*. Diese Merkmale des Deduktiven beziehen sich jedoch auf „fertige Mathematik“, das gesicherte Wissen, das „sicher, unbestreitbar und endgültig“ erscheint. Anwendungen von Mathematik, wie die Kryptografie, sind jedoch nie vollständig deduktiv beschreibbar, was innermathematische Grenzen mit einschließt, und enthalten immer auch Elemente plausiblen Schließens. Sie sind damit „gewagt, strittig und provisorisch“ (vgl. Pólya 1988, S. 9). Die letztgenannten Eigenschaften sind nicht als Mangel, sondern als Merkmal aufzufassen, welches es beim Nachvollziehen mathematikhaltiger Argumentation zu beachten gilt (vgl. auch Führer 1988, S. 101). Ein Mittel dazu ist eine höhere Gewichtung bzw. Reflexion von Elementen plausiblen Schließens im Unterricht. Die hier vorgestellten kryptografischen Inhalte können als Ausgangspunkt derartiger Reflexionen im Unterricht dienen.

Bemerkung: Die Ausführungen sind ein verkürzter Teil des Kapitels „Allgemeinbildung und Kryptografie“ aus der Dissertation der Autorin über Kryptografie in der Schule, die nächstes Jahr erscheint.

Literatur

Blechman, I. L; Myskis, A.D.; Panovko, J. G. (1984): Angewandte Mathematik: Gegenstand, Logik, Besonderheiten. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften

Buchmann, Johannes (2003): Einführung in die Kryptografie. Berlin: Springer

Führer, Lutz (1988): Mattematik – Laterna magica der Späth-Renaissance. Staatliches Studienseminar Hameln 1978-1988, Festschrift, 1988

Koblitz, Neal (2007): The uneasy relationship between mathematics and cryptography. In: Notices of the AMS 54, Nr. 8, S. 972-979

Pólya, Georg (1975): Mathematik und plausibles Schliessen. Bd. 2. Typen und Strukturen plausibler Folgerung. Basel u.a., Birkhäuser

Pólya, Georg (1988): Mathematik und plausibles Schliessen. Bd. 1. Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel u.a., Birkhäuser

Elena KLIMOVA, Schwäbisch Gmünd

MatBoj-Wettbewerb als ein neuer fachspezifischer Wettbewerb in Mathematik zur Förderung begabter Schüler

„Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten“

Blaise Pascal

Es geht um MatBoj-Wettbewerb als eine Methode der Schüleraktivität, bei welcher große Motivation und hohe Kompetenzerwartung erreicht wird.

Was ist eigentlich ein MatBoj? MatBoj ist die zweitpopulärste Form der mathematischen intellektuellen Wettbewerbe nach den Mathematik-Olympiaden. Im Vergleich mit den Olympiaden, die mit ihren Traditionen seit den 1930er Jahren existieren, sind MatBojs relativ neu. MatBoj stammt ursprünglich aus Russland und wurde von einem Lehrer Namens I.J. Vorobejchik in Sankt-Peterburg (damals Leningrad) erfunden. Seit etwa 2000 hat sich MatBoj weit verbreitet. Im Gegensatz zu den Olympiaden ist MatBoj ein Teamwettbewerb. Er fördert die Entwicklung der Fähigkeiten der gemeinsamen Lösung der Aufgaben. Diese Fähigkeiten sind besonders wichtig in der modernen Wissenschaft und Forschung und in der Projekttätigkeit, wo sehr oft ein kompliziertes Problem von einem großen Team aus verschiedenen Wissenschaftlern gelöst wird. Das ist nur ein Grund, warum MatBoj in den letzten Jahren an Popularität gewonnen hat. MatBoj wird z. B. in Sommerschulen, bei den Treffen mathematischer Zirkel, in AGs, an Mathematik-Wochenenden, bei der Vorbereitung zu mathematischen Olympiaden usw. gespielt. Hier sind nur einige Beispiele: Mathematisches Institut Georg-August-Universität Göttingen (Treffen des Mathematischen Korrespondenzzirkels 2002), Uni Leipzig 2005, TU München (im Rahmen des TU München Mathematik Stipendium-Programms 2007), Landesgymnasium für Hochbegabte Baden-Württemberg – Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd (in Rahmen des Projektes LGH-PH SG, 2012).

Regeln eines MatBoj. Ein MatBoj hat verschiedene Phasen: Planungsphase, Teambildung, Bearbeitungsphase, Präsentationsphase, Bewertungsphase.

Planungsphase. Es werden Teilnehmer und Jury ausgewählt, mathematische Aufgaben vorbereitet, Zeit und Ort vereinbart.

Teambildung. Es werden zwei Mannschaften gebildet. Jede Mannschaft wählt einen Teamleiter (Kapitän) und –namen.

Bearbeitungsphase. Die grundsätzlichen Regeln sind, dass in der Bearbeitungsphase die Mannschaften gleichzeitig gleiche Mathematikaufgaben bekommen, die sie innerhalb des jeweiligen Teams in bestimmter Zeit zu lösen haben. Die beiden Mannschaften befassen sich selbstständig mit verschiedenen mathematischen Aufgaben, die über den Lehrplan hinaus reichen und lösen diese gemeinsam in getrennten Räumen. Der Grund liegt auf der Hand: Man will dem Gegner nicht vorzeitig - z. B. durch lautes Reden - Ergebnisse mitteilen.

Präsentationsphase. Nach der Bearbeitungsphase treffen die Mannschaften wieder aufeinander damit sie ihre mathematischen Fähigkeiten miteinander vergleichen zu können. Es beginnt der spannende Teil des MatBoj. Die Mannschaften fordern die jeweils andere Mannschaft dazu auf, eine der Aufgaben an der Tafel vorzustellen. Team A stellt einen Referenten, der seine Lösung präsentiert, Team B einen Kritiker. Der Kritiker beanstandet nach der Vorstellung der herausfordernden Mannschaft den Lösungsweg und die Beweistechnik. Er versucht, Fehler in der Argumentation seines Kontrahenten aufzudecken. Die Teams fordern sich abwechselnd gegenseitig mit den noch verbliebenen Aufgaben heraus.

Bewertungsphase. Diese Leistungen werden von einer Jury bewertet. Für beides, sowohl für das Lösen und den Lösungsweg, als auch für die Kritik bekommt man Punkte. Im Regelwerk gibt es eine genauere Beschreibung, insbesondere von Bedingungen, wer und wann vorrechnen darf.

Ein MatBoj gewinnt einen Teil seiner Spannung dadurch, dass er ein Strategiespiel mit unvollständigen Informationen ist. Damit die Teilnehmer über ihre Strategie und ihre Taktik im Voraus nachdenken können, sollten die Regeln im Detail vorweg bekannt sein. Damit man gut Schach spielen kann, reicht es auch nicht zu wissen, wie Figuren im Einzelnen ziehen dürfen.

Ziele bei der Durchführung eines MatBojs:

- Interesse an Mathematik wecken;
  Von solchen Arten der Schülerarbeit wie MatBoj kann man eine positive Reaktion der Schüler erwarten, weil man ihnen die Suche – und damit den Moment des *Findens* – sowie das Grübeln – und damit das Erlebnis des selbständigen *Verstehens* gibt.
- Förderung mathematisch interessierter Schüler;
  Die Teilnehmer erwerben Fähigkeiten des selbständigen Lösens von komplizierten, nicht typischen und herausfordernden Aufgaben.
- Entwicklung der Teamfähigkeiten:

  - Bei den Teilnehmern entwickeln sich die Fähigkeiten, die Gruppen selbst zu organisieren und Aufgaben innerhalb einer Gruppe zu verteilen; den Lösungsweg anderen Teilnehmern zu erläutern, Schwächen in der Lösung zusammen zu identifizieren und zu verbessern;
  - Die Erfahrung, im Team angenommen und gebraucht zu werden; Vertrauen und Verantwortung; Teilnehmer lernen Zeitmanagement.
- Entwicklung der Präsentationsfähigkeiten;
  Während der Präsentationen der Aufgaben verbessert sich die Kunst des Vortragens und es wird die Fähigkeit erworben, Schwächen in Vorträgen zu sehen und zu korrigieren.
- Entwicklung der kritischen und logischen Denkweise, der Argumentationsfähigkeiten.
  Im Prozess der Kritik entwickeln die Teilnehmer ihre kritische Denkweise, sie lernen korrekte mathematische Behauptungen von annehmbaren, aber falschen zu unterscheiden, und deutlich und präzise ihre Fragen zu formulieren. Dadurch werden das logische Argumentieren und die Fähigkeit, logische Konstruktionen zu bilden, geübt.

Matboj entwickelt die allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die laut Bildungsstandards der KMK ein zentraler Bestandteil mathematischer Bildung sind. Der Nutzen des MatBoj für Studierende ist der Erwerb der Kompetenzen im Lehramtsstudium - Kompetenzen, über die jeder Lehrer idealerweise verfügen sollte:

- Das Lösen von derartigen Aufgaben generell als wertvolle Erfahrung;

„Die angestrebte Form der Nutzung von Mathematik soll die regelmäßig erlebte Form des Mathematiklernens sein“ (Bildungsstandards der KMK). Wird das gemünzt auf die Arbeit mit mathematisch begabten Schülern, bedeutet das, dass angehende Lehrerinnen und Lehrer selbst derartige Aufgaben lösen sollten, die zur Förderung leistungsfähiger Schüler geeignet sind. Dadurch erwerben die Studierende zweierlei: zum Einen, Einsichten in Methoden des Aufgabenlösens, und zum Anderen, hinreichend Lösungserfahrung. Damit können sie dann die Lösungen und Lösungswege der Kinder besser bewerten und verstehen. Es reicht eben nicht aus, nur eine Fülle von Aufgaben (oft noch mit vorgegebenem Lösungsweg, die Verlage bieten davon hinreichend an) zu kennen, die man zur Förderung leistungsfähiger Kinder nutzen kann.

- Der Umgang mit begabten Schülern, in der Begegnung mit der Vielfalt und Kreativität der Lösungswege dieser Kinder;

Das eigene Erleben der Arbeitsweise, das Erleben der Lösungswege ist durch Studien in Büchern nur schwer zu ersetzen.

- In der Arbeit mit Schülerlösungen generell.

Hier wird im Wettkampf bewertet, wie gut man vorgetragene Lösungen auf der Stelle und ohne Bedenkzeit werten und korrigieren kann. Das aber ist etwas, was vom Lehrer tagein tagaus gefordert wird. Gerade originelle Lösungswege sehen zuweilen auf den ersten Blick so aus, als wären sie nicht korrekt. Hier muss nun schnell geprüft werden, ob alle Schlüsse korrekt sind.

Das Feedback der Teilnehmer des MatBoj zwischen dem Landesgymnasium für Hochbegabte Baden-Württemberg und der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd (in Rahmen des Projektes LGH-PH SG, 2012) zeigte, dass die oben genannten Ziele erreicht werden können. Hier nur einige Beispiele: „Ich kann mit anderen Leuten zusammen Aufgaben lösen, die ich alleine nicht schaffen würde und dadurch hinzulernen“ (Franz Kircher, Student der PH). „Ich habe für den Tag so viele Erfahrungen gesammelt, die man mit einem Semester des Studiums vergleichen kann“ (Marcel Homberg, Student der PH). „Es war für alle Beteiligten eine tolle Erfahrung und eine interessante Sache Mathematik in solche einem Rahmenprogramm darzustellen. Wir hoffen, dass so etwas auf jeden Fall widerholt wird“ (Daniel Truppel, Student der PH).

Zusammenfassung. MatBoj ist eine schöne Erfahrung für den Erwerb von Fähigkeiten, nicht nur hinsichtlich Aufgaben zu lösen und in einem Team zu arbeiten, sondern auch die Gedanken präzise zu formulieren, zu diskutieren, eigene und fremde Fehler zu finden und korrigieren zu können. In einem MatBoj wird im Idealfall die Wahrheit während des Streits zwischen Referent und Kritiker geboren. Beide haben die Möglichkeit, nicht nur die Macht ihrer Gedanken zu demonstrieren, sondern auch durch ihre rhetorischen Fähigkeiten zu überzeugen. Gerade diese Fähigkeiten sind wesentlich für die Entwicklung der in den Standards der KMK geforderten allgemeinen mathematischen Kompetenzen.

Das heißt, MatBoj vereint in sich die Mathematik, den Wettkampf und die Theaterhandlung. Darin besteht seine besondere Attraktivität für alle, denen die Mathematik nahe liegt, und damit die Möglichkeit, für diese Wissenschaft Werbung zu machen.

Olaf KNAPP, Konstanz

Zur Methodologie der Interaktionsforschung über die Nutzung von Computerwerkzeugen

Die Gebrauchstauglichkeit von Computerwerkzeugen im Mathematikunterricht in der Schule ist notwendige Voraussetzung für ihren didaktisch mehrwertigen Nutzen. Usability-Werkzeuge bieten zur Analyse der Mensch-Computer-Interaktion (MCI) mannigfaltige Optionen an. Es werden empirische Studien zum Vergleich Experten- versus Novizenverhalten bei der Toolnutzung vorgestellt, erhoben mittels Mauszeigerstrecke beim Mousetracking.

Die MCI beschäftigt sich mit Fragen der benutzergerechten Gestaltung von interaktiven Informatiksystemen, wie z.B. ihren Bedingungen, ihrer Umsetzung und Auswertung (http://www.sigchi.org/), welche wiederum Auswirkungen auf die Gestaltung und den didaktisch mehrwertigen Einsatz von Computerwerkzeugen im Mathematikunterricht hat.

Zur Erforschung der MCI sind vielerlei Ansätze denkbar. Exemplarisch sei hier das digitale Usability-Aufzeichnungs-Verarbeitungs-Analyse-Export-Werkzeug Morae (TechSmith Corporation 2005) genannt. Eine entsprechende Zusammenfassung wie und warum mit digitalen Dokumentations- und Analysetools die MCI (technisch) erfasst werden kann, ausgewählte Vor- und Nachteile dieser Werkzeuge sowie ihr exemplarischer Einsatz in empirischen Studien findet sich in Knapp (2010 und 2011 a).

Bei der Erforschung der MCI stellt sich zunächst die Frage, wie die Schnittstelle Mensch-Computer gestaltet ist. Für die zurzeit in allgemein bildenden Schulen in Deutschland tatsächlich vorhandenen technischen Ressourcen muss mit Wessel (2002) und Knapp (2010) konstatiert werden, dass das Graphical User Interface nach wie vor die gebräuchlichste Benutzerschnittstelle darstellt. Sollen entsprechende empirische Studien durchgeführt werden, muss dementsprechend eine Abgrenzung hinsichtlich Tablet- oder Touchscreentechnologien oder der Augmented Reality etc. erfolgen.

Da sich die Gebrauchstauglichkeit gemäß Müller et al. (2008) im Gegensatz zur Benutzbarkeit auf die Usability einer Software im konkreten Nutzungskontext bezieht, wären dies nach dem oben Ausgeführten allgemein bildende Schulen mit Schülerinnen und Schülern als Benutzer und durch Computerwerkzeuge für den Mathematikunterricht implizierten Problemen bzw. Arbeitsaufgaben. Exemplarisch wurde dies anhand des Dynamischen Raumgeometrie-Systems (DRGS) Cabri 3D (www.cabri.com) und Interaktiver Instruktionsvideos (Knapp 2010 und 2011 b) verdeutlicht.

Im Rahmen der Erforschung der MCI können bei der Aufzeichnung der Mauszeigerbewegungen, dem so genannten Mousetracking, unterschiedliche Verfahren zur Anwendung kommen. Der Autor entschied sich aus den in Knapp (2010 und 2011 a) dargelegten Gründen für Morae und zum Zwecke der Generierung der „Mauszeigerstrecken" für das Programm „MB-Ruler" (http://www.markus-bader.de/MB-Ruler).

Unter der „Mauszeigerstrecke" soll die Gesamtlänge des Weges verstanden werden, welchen der Mauszeiger bei der Bewältigung von Aufgaben auf dem Bildschirm zurücklegt. Hierbei ist eine Maßeinheit zu definieren (bspw. Pixeleinheiten bezogen auf einen 19´´- Monitor mit 4:3 Auflösung). Es ist zwischen den musterhaften Lösungen von Aufgaben durch Experten und denjenigen von Novizen/Schülern zu unterscheiden.

Empirische Studien

Die nachfolgenden Ausführungen stellen lediglich Kurzfassungen der Methodologie, Ergebnisse und Diskussionen der in Knapp (2010) detailliert beschriebenen Studien dar.

Dem Mixed-Method-Ansatz folgend wurde in qualitativen (n = 9) und quantitativen (n = 241) Studien der Einfluss der musterhaften Mauszeigerstrecke eines Experten auf die Aufgabenlösungen von Schülern erforscht.

Die Probanden wurden aus Schulklassen der achten Jahrgangsstufe an allgemein bildenden Realschulen des Landes Baden-Württemberg gewonnen. Um den Einfluss potentiell intervenierender Variablen auf die Untersuchungsergebnisse zu kontrollieren (Bortz & Döring 2006), wurden jeweils im Vorfeld der Studien entsprechende Testbatterien durchgeführt.

In der Untersuchungsschulstunde wurden die Probanden durch Interaktive Instruktionsvideos über eine Konstruktion im virtuellen Handlungsraum instruiert und sollten diese mechanisch rekonstruieren und anschließend geistig rekapitulieren. Diese können gemäß KMK (2003) den Anforderungsbereichen I bzw. II zugeordnet werden.

Methodisch wurde in der qualitativen Studie neben der oben erwähnten Erfassung und Analyse der MCI durch Morae auch das „Laute Denken der Schüler", affektive Äußerungen, etc. durch Morae erfasst und analysiert. Zudem kamen Fragebögen zum Einsatz. Die Auswertungen erfolgten gemäß dem ACM-Usability-Standard (http://www.acm.org/) und den u.a. in Cropley (2005) und Lienert & Raatz (1994) beschriebenen Vorgehensweisen.

In der quantitativen Studie mussten die Schüler ihre Konstruktionsdateien abspeichern und Fragebögen (s.o.) bearbeiten. Der Autor nahm als Versuchsleiter an der Untersuchung teil und führte wissenschaftliche Beobachtungen durch. Durch verschiedene statistische Verfahren wurden die erfassten potentiell intervenierenden Variablen herauspartialisiert.

Ergebnisse

Es existieren (signifikante) Unterschiede beim Vergleich Experte-Schüler hinsichtlich der Softwarenutzung von Tools bezüglich der Mauszeigerstrecke über die gesamte Mauszeigerstrecke, Teilbereichen der Mauszeigerstrecke, Weg und Richtung der Mauszeigerstrecke.

Die Mauszeigerstrecke lässt Rückschlüsse für individuelle Fehler beim Konstruieren zu.

Bei Schüler- vs. Expertenlösungen der beschriebenen Aufgaben aus dem AFB I und II hängen die Lerneffekte signifikant ($p_{max} < 0.04$) mit der zurückzulegenden Mauszeigerstrecke zusammen. Dabei gilt die Tendenz: „Je kürzer die Mauszeigerstrecke pro Minute, desto höhere Leistungen zeigen die Probanden bei Aufgaben aus dem AFB I und II.“

Zudem drängen sich weitere Hypothesen auf, wie jene, dass die Mauszeigerstrecke ein möglicher Indikator a) für die Aufgabenschwierigkeit (Tendenz: „Je kürzer die Mauszeigerstrecke, desto geringer die Aufgabenschwierigkeit.“), b) für den Vergleich verschiedener D(R)GS miteinander (Tendenz: „Je kürzer die Mauszeigerstrecke eines D(R)GS um eine bestimmte Zielkonfiguration zu erreichen, desto intuitiver ist das D(R)GS.“) oder c) für die Expertise eines Schülers (Tendenz: „Je geringer die Mauszeigerstreckenabweichungen eines Schülers bei einer Anzahl von Aufgaben von der Expertenlösung, desto höher der Expertengrad“) sein kann.

Fazit

Quantitative und qualitative empirische Studien mit Realschülern lassen den Schluss zu, dass die Mauszeigerstrecke ein Indikator

- zur Analyse (der „Schwierigkeit“; „Komplexität“) einer Aufgabe
- für den Vergleich verschiedener DGS/DRGS
- für die Instruktionsprozess- und -produktqualität
- für die Abweichung der Schülerlösung von der Musterlösung des Experten
- für den Experten-/Novizengrad eines Anwenders („Novizenprüfung“)
- für die Suche nach individuellen Fehlern des Schülers beim Lösen von Aufgaben

– zur (quantitativen und qualitativen) Fehleranalyse des/der Schülers/Schüler

sein kann. Diese durch die Mauszeigerstrecke implizierten Anhaltspunkte bedürfen dann weiterer Untersuchungen wie z.B. der Interpretation des Mousetrackings gemäß ACM-Usability-Standard.

Das empirisch geprüfte Konstrukt der „Mauszeigerstrecke" genügt wissenschaftlichen Gütekriterien (Qualitativ: Konsistenz, Logik und Nützlichkeit des Messverfahrens; Cropley 2005; Quantitativ: Reliabilität, Validität, Objektivität, Reproduzierbarkeit; Bortz & Döring 2006) und bietet ein operationalisiertes Analysekriterium über die Nutzung von Computerwerkzeugen im Mathematikunterricht.

Die Mauszeigerstrecke als Teil der Erfassung, Analyse und Interpretation des Mousetrackings in Verbindung mit anderen Usability-Verfahren wie z.B. dem Eye-Tracking kann der Erforschung der MCI als wissenschaftliches Kriterium zur Entwicklung, Diagnose, Erprobung, Beratung und Beurteilung von Computerwerkzeugen im Mathematikunterricht dienen und ihr so wichtige Impulse geben.

Literatur

Bortz, J. & Döring, N. (2006): Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler. 4. Auflage. Heidelberg: Springer.

Cropley, A. J. (2005): Qualitative Forschungsmethoden. Eine praxisnahe Einführung. 2. Auflage. Eschborn: Dietmar Klotz.

KMK (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (20.03.2012).

Knapp, O. (2010): Entwicklung und Evaluation interaktiver Instruktionsvideos für das geometrische Konstruieren im virtuellen Raum. Diss. Pädagogische Hochschule Weingarten. Hochschulschriften zur Mathematik-Didaktik, Band 1. Münster: WTM.

Knapp, O. (2011 a): Dokumentations- und Analysetools zur Erfassung der Mensch-Computer-Interaktion in empirischen Studien. In: Haug, R. & Holzäpfel, L. (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM, 471-474.

Knapp, O. (2011 b): Tutorial zum Lernen von Raumgeometrie. Rosenheim: co.Tec.

Lienert, G. & Raatz, U. (1994): Testaufbau und Testanalyse. 5. Auflage. Weinheim: Beltz.

Müller, C., Hurtienne, J. & Prümper, J. (2008): Standardsoftware – benutzbar und gebrauchstauglich! Computer und Arbeit. Heft 5/2008, 20-24.

TechSmith Corporation (2005): Morae. Getting Started Guide. Okemos: TechSmith Corporation.

Wessel, I. (2002): GUI-Design: Richtlinien zur Gestaltung ergonomischer Windows-Applikationen. 2. Auflage. München, Wien: Hanser.

Imke KNIEVEL, Aiso HEINZE, IPN Kiel

Erfassung der fachspezifischen professionellen Kompetenzen von Mathematiklehrkräften in der Grundschule

Die Lehrperson und insbesondere deren kognitive Ressourcen klären einen bedeutsamen Teil der Varianz der Leistungen von Schülerinnen und Schülern auf. Während bei der Erfassung der Kompetenz von Schülerinnen und Schülern auf eine jahrzehntelange Erfahrung zurückgegriffen werden kann, steht die Entwicklung standardisierter Verfahren zur Kompetenzmessung von Lehrkräften vergleichsweise noch am Anfang.

Das hier vorgestellte Projekt strebt an, die fachspezifischen professionellen Kompetenzen von Grundschullehrkräften exemplarisch für den Inhaltsbereich Zahlen und Operationen möglichst anforderungsbezogen zu erfassen. Dabei werden neben Paper-Pencil-Items auch videobasierte Items eingesetzt. In diesem Beitrag werden der theoretische Hintergrund sowie Ergebnisse der Erprobung (N = 8) des Instruments vorgestellt.

Fachspezifische professionelle Kompetenzen von Lehrkräften

Im Rahmen dieses Projekts werden Kompetenzen in Anlehnung an Koeppen, Hartig, Klieme und Leutner (2008) als erlernbare (vermittelbare) und kontextspezifische individuelle kognitive Ressourcen (Wissen, Strategien und Fähigkeiten), die für die Bewältigung von Anforderungen in konkreten Domänen erforderlich sind, aufgefasst. Durch Aufgaben- und Anforderungsanalysen des Lehrberufs wurden drei Kernaufgaben identifiziert: das Unterrichten an sich sowie die Unterrichtsvor- und -nachbereitung (Bromme, 2008). Folglich werden die fachspezifischen professionellen Kompetenzen im Rahmen dieses Projekts als erlernbare (vermittelbare) und kontextspezifische individuelle kognitive Ressourcen verstanden, die zur Bewältigung dieser drei Kernaufgaben benötigt werden. Es werden nur die fachspezifischen professionellen Kompetenzen betrachtet, d.h. allgemeine pädagogische Kompetenzen werden nicht erfasst.

Modell zur Beschreibung fachdidaktischer Kompetenz von Grundschullehrkräften

Lindmeier (2011) schlägt ein nicht hierarchisches Kompetenzstrukturmodell vor, um das domänenspezifische Wissen und die domänenspezifischen Kompetenzen von Lehrkräften anforderungsbezogen zu beschreiben. Das Modell umfasst die drei Komponenten *Basiswissen*, *reflektive Kompetenz* und *aktionsbezogene Kompetenz*. Lindmeier konnte die drei Kompetenzkomponenten in einer Machbarkeitsstudie mit Sekundarschullehrkräften

($N = 28$) und -lehramtsstudierenden ($N = 22$) empirisch bestätigen. Eine Replikation mit einer größeren Stichprobe steht noch aus. Lindmeiers Modell wird der Beschreibung der fachspezifischen professionellen Kompetenz von Grundschullehrkräften in diesem Projekt zugrunde gelegt:

Das *Basiswissen* umfasst das Fachwissen und das fachdidaktische Wissen. Diese Wissensdomänen werden aber nicht im Sinne Shulmans (1986) in fachliches und fachdidaktisches Wissen differenziert, da eine empirische Trennung schwierig ist (vgl. Hill, Ball, & Schilling, 2008; Kunter et al., 2011). Das Basiswissen umfasst im Kontext dieses Projekts die arithmetischen Basiskonzepte Zahlen, Stellenwert, Grundrechenarten, Strategien und Rechenalgorithmen und das Wissen über typische Schülervorstellungen und -fehler sowie geeignete Zugänge und Erklärungen zu bestimmten fachlichen Inhalten.

Die *reflektive Kompetenz* fasst die fachbezogenen kognitiven Fähigkeiten zusammen, die Lehrkräfte benötigen, um die Anforderungen der Unterrichtsvor- und -nachbereitung zu bewältigen. Das beinhaltet *prä-instruktionale Reflexion*, wie z. B. die didaktische Organisation von Unterricht oder die Sequenzierung von Aufgaben, und *post-instruktionale Reflexion*, wie z. B. die Evaluation von Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler anhand von schriftlichen Aufgabenbearbeitungen oder die Bewertung von Unterricht. Diese Fähigkeiten sind kontextspezifisch: Das zugrundeliegende Wissen muss in Bezug auf den jeweiligen Kontext angepasst und bewertet werden. Hierin unterscheidet sich die reflektive Kompetenz vom Basiswissen.

Zur *aktionsbezogenen Kompetenz* gehören die kognitiven Fähigkeiten, die Lehrkräfte benötigen, um in fachlich oder fachdidaktisch kritischen Situationen im Unterricht angemessen zu reagieren, wie beispielsweise Antworten oder Bearbeitungen von Schülerinnen und Schülern spontan zu evaluieren sowie bei Nachfragen fachliche Inhalte für Schülerinnen und Schüler verständlich erklären zu können. Unterrichtssituationen sind nur bis zu einem gewissen Grad vorhersehbar und erfordern spontane, angemessene und (unter Zeitdruck) schnelle Reaktionen der Lehrkräfte, so dass im Gegensatz zu den Anforderungssituationen der reflektiven Kompetenz wenig Raum für Elaborationsprozesse ist.

Ziel des Projekts ist die Entwicklung eines validen Instruments zur Erfassung der fachspezifischen Kompetenz von Grundschullehrkräften, um die folgenden Fragestellungen zu beantworten:

1. Inwieweit lassen sich das Basiswissen, die reflektive und die aktionsbezogene Kompetenz reliabel erheben und empirisch trennen?

2. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den drei Kompetenzkomponenten?

Erfassung der fachspezifischen professionellen Kompetenzen von Grundschullehrkräften

Entscheidend für die Entwicklung eines Instruments und die Beantwortung der Forschungsfragen ist v.a. die valide Erfassung der aktionsbezogenen Kompetenz. Das Basiswissen und auch Teile der reflektiven Kompetenz wurden bereits in empirischen Studien erfasst (z. B. COACTIV, TEDS-M, Studien der Michigan Group). Herausfordernd ist die adäquate Abbildung der charakteristischen Anforderungen für die aktionsbezogene Kompetenz (Lindmeier, 2011). Hierfür werden videobasierte Items eingesetzt, bei denen Lehrkräfte spontan und unter Zeitdruck auf Schülerinnen und Schüler reagieren müssen.

Insgesamt wurde ein computerbasierter Test zur Erfassung des Basiswissens (BW), der reflektiven (RK) und der aktionsbezogenen Kompetenz (AK) mit 34 Items (12 videobasierte Items, BW = 14, RK = 12, AK = 8) entwickelt. Die Inhaltsvalidität des Instruments wurde zum einen durch ein Expertenrating geprüft und zum anderen durch eine Befragung der Lehrkräfte in der Erprobung des Instruments. Die Konstruktvalidität soll im Rahmen der geplanten Haupterhebung durch zwei Kontrastgruppen (jeweils N = 30 Mathematikstudierende und Studierende des Grundschullehramts) geprüft werden.

Erprobung: Durchführung und Ergebnisse

Neben der Prüfung der Inhaltsvalidität war ein weiteres Ziel der Erprobung die Einschätzung der Schwierigkeit und Praktikabilität der Items. Die Stichprobe umfasste sieben Lehrerinnen und einen Lehrer. Fünf der Lehrkräfte hatten Mathematik als Hauptfach studiert, eine Lehrkraft als Nebenfach und drei hatten nicht Mathematik studiert.

Zur Überprüfung der Inhaltsvalidität wurden die Lehrkräfte nach der Bearbeitung jedes videobasierten Items aufgefordert anzugeben, wie realistisch sie die Klassensituation empfunden haben (1 = sehr realistisch, 2 = könnte auftreten, 3 = unrealistisch). Zwei der Videos wurden durch jeweils drei Lehrkräfte und zwei weitere Videos wurden durch jeweils eine Lehrkraft als unrealistisch eingeschätzt. Die anderen acht Videos wurden durch keine Lehrkraft als unrealistisch eingeschätzt, so dass davon auszugehen ist, dass die videobasierten Items die alltäglichen Anforderungen der Lehrkräfte repräsentieren. Weiterhin zeigte die Erprobung, dass die meisten Lehrkräfte direkt auf die Schülerinnen und Schüler reagieren, so dass durch dieses

Itemformat die charakteristischen Anforderungen der aktionsbezogenen Kompetenzen abgebildet werden.

Zur Einschätzung der Praktikabilität der Items wurden die Lehrkräfte während der Erprobung aufgefordert, Ausdrücke oder Formulierungen zu nennen, die ihnen unbekannt oder für sie unverständlich waren. Diese Aussagen wurden durch ein Diktiergerät aufgezeichnet. Zur Einschätzung der Itemschwierigkeit wurde der Parameter p_m berechnet (p_m = erreichte Punkte aller Probanden / mögliche Punkte aller Probanden). Die Itemschwierigkeiten für das Basiswissen und die reflektive Kompetenz streuen relativ breit ($p_{m(BW)} = .00 – .75$; $p_{m(RK)} = .19 – .88$), die der aktionsbezogenen Kompetenz eher gering ($p_{m(Ak)} = .25 – .50$). Beruhend auf diesen Ergebnissen wurden die Items hinsichtlich der Verständlichkeit der Formulierungen noch einmal überarbeitet. Die Itemreihenfolge wurde verändert, so dass die Items zur Erfassung der aktionsbezogenen Kompetenz nicht mehr am Ende des Tests liegen. Außerdem wurden sechs Items, die zu leicht bzw. zu schwer waren, aus dem Itempool herausgenommen.

Basierend auf der Erprobung liegt damit ein Instrument mit 28 Items (BW = 10, RK = 10, AK = 8) vor, das in der Haupterhebung zur Beantwortung der Forschungsfragen eingesetzt wird. Geplant ist eine Stichprobe von *N* = 100 sowie die Kontrastgruppenerhebung.

Literatur

Bromme, R. (2008). Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln von Lehrer/innen. In B. Rendtorff & S. Burckhart (Hrsg.), *Schule, Jugend und Gesellschaft. Ein Studienbuch zur Pädagogik der Sekundarstufe* (S. 244–256). Stuttgart: Kohlhammer.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400.

Koeppen, K., Hartig, J., Klieme, E., & Leutner, D. (2008). Current issues in competence modelling an assessment. *Journal of Psychology, 216*(2), 61–73.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV.* Münster: Waxmann.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers: A threefold Domain-Specific Structure Model for Mathematics. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik: Vol. 7.* Münster: Waxmann.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

David KOLLOSCHE, Universität Potsdam

Foucault und Mathematikdidaktik – eine fruchtbare Mischung?

Das Lebenswerk des Philosophen und Soziologen Michel Foucault ist eines der einflussreichsten in den Geisteswissenschaften des 20. Jahrhunderts. In der Mathematikdidaktik wurde es bisher jedoch kaum rezipiert. Daher sollte mein Vortrag ausgewählte Begriffe des foucaultschen Werks vorstellen und nach ihrer Bedeutung für die mathematikdidaktische Forschung fragen.

Michel Foucault wurde 1926 als Sohn eines Arztes im französischen Poitiers geboren und studierte bis 1952 Philosophie und Psychologie. Nach zahlreichen Auslandsaufenthalten und der Promotion wurde Foucault 1970 als ordentlicher Professor an das Collège de France berufen. Sein Lebenswerk umfasst einschlägige Veröffentlichungen, u. a. zum Wahnsinn, zu den Humanwissenschaften, der Epistemologie, dem Gefängnis und der Sexualität. 1984 starb Foucault in Paris an den Folgen einer AIDS-Erkrankung.

Über alle Untersuchungsgebiete hinweg interessierte sich Foucault stets für Macht, Wissen und das Subjektwerden. Sein Theorierepertoire schärfte er beständig an immer neuen Untersuchungsgebieten, so dass es keinen ‚fertigen Foucault' gibt. Durch seine analytische Verbindung von Macht, Wissen und Subjektwerdung eignet sich das foucaultsche Theorieangebot für eine politisch und gesellschaftlich kritische Untersuchung von Sozialisationsprozessen. Anders als etwa die Frankfurter Schule, fragte er in seinem wissenschaftlichen Werk jedoch nicht nach der Rechtfertigung verschiedener Formen von Macht, Wissen und Existenz, sondern nach ihren Mechanismen: *Wie wird Macht ausgeübt? Wie erlangt oder verliert Wissen seine Gültigkeit? Wie werden wir zu dem, was wir sind?* (Foucault 1994a; Foucault 1994b) Wenngleich Foucault stets auch politisch aktiv war, legen seine Kritiker die Ignoranz gegenüber Fragen der Rechtfertigung als eine unkritische Bekräftigung gegenwärtiger gesellschaftlicher Verhältnisse aus (vgl. dazu und zu Kritik an Foucault generell Lemke 1997, S. 13-40).

Macht, Wissen und Subjektwerdung im Konzept der Gouvernementalität

Foucaults Antwortversuche auf die Frage nach dem Wie der Macht führen ihn zum Begriff der *Gouvernementalität*. Darunter versteht er die Geisteshaltung (*la mentalité*) des Regierens und Beherrschens (*gouverner*). Foucaults Regierungsbegriff, welchen er später gegen den Begriff der *Führung* eintauscht, bedient sich der weitläufigen Bedeutung des Begriffs, wie er am Ende des Mittelalters gebräuchlich war. Regieren bezog sich damals nicht nur auf die Führung des Staates, sondern ebenso auf die Führung eines Klosters, eines Betriebs, einer Familie oder sogar auf die Führung der eigenen Person. Foucault unterscheidet je nachdem, auf wen die Führung abzielt, die *Führung der anderen* und die *Führung des Selbst*. Insbesondere interessiert er sich für jene Techniken zur Führung anderer, welche auf deren Selbstführung zurückgreifen, diese nutzen, einfordern und stimulieren; denn dadurch, dass der Einzelne im Zwange der ihm auferlegten Führung individuelle Selbstführungstechniken umsetzt, macht er das ihm Aufgezwungene zu seiner zweiten Natur. So wäre die Forderung nach Pünktlichkeit nicht mehr als eine bei Verstoß zu ahnende Vorschrift, wenn sich der Betroffene nicht individuelle Techniken, die es ihm erlauben, pünktlich zu sein, zu eigen machen würde. Fortan mag der Betroffene immer und überall pünktlich sein wollen und diese Pünktlichkeit sogar von anderen einfordern. Auf diese Weise setzt sich die Norm der Pünktlichkeit in der Gesellschaft fest: nicht mehr nur von oben aufgezwungen, sondern im Einzelnen verwurzelt und verfestigt. Solche Mechanismen nennt Foucault *Führung der Führungen* (Foucault 1994b; 2000). Der Frage, wie in abgegrenzten Bereichen Verhaltenscodices auf diese Art und Weise die Gesellschaft durchdringen, widmen sich im Anschluss an Foucault die besonders im angelsächsischen Raum prominenten Gouvernementalitätsstudien (*governmentality studies*, vgl. für einen deutschsprachigen Überblick Lemke 2000).

Im Rahmen der Führung der Führungen lässt sich beschreiben, was es bedeutet, *frei* oder *unterworfen* zu sein. Wenngleich der Einzelne – von anderen geführt – fremden Zwängen unterworfen sein mag, ist er doch frei in der Ausgestaltung seiner Selbstführung. So mag er zwar gezwungen sein, pünktlich zu sein; doch wie er es zu dieser Pünktlichkeit bringt, ist ihm allein überlassen. In der Art und Weise, wie sich der Einzelne den auferlegten Zwänge fügt, bringt er sich als Subjekt hervor, welches in der Ausgestaltung seiner Selbstführung unterscheidbar und einzigartig wird. Foucault spricht hier vom Sich-Unterwerfen (*subicere*), wenngleich man sich nicht einem Herrscher, sondern gesellschaftlichen Zwängen unterwirft. Der Prozess der Subjekt-Werdung beantwortet also zugleich zwei Fragen: *Wie werde ich den mir auferlegten Zwängen gerecht?* und *Wie erkenne ich mich in der Gesellschaft der Unterworfenen als jemand besonderen?*

Im Begriff der Führung lassen sich auch Foucaults frühe Untersuchungen dazu, wie Wissen Gültigkeit erlangt oder verliert (Foucault 1993c), fassen. Foucault betont, dass Führung und Wissen nicht unabhängig nebeneinanderstehen, sondern sich gegenseitig bedingen und dadurch untrennbar verwoben sind. Einerseits wird Wissen genutzt, um bestimmte Ansprüche und Techniken der Führung zu rechtfertigen; andererseits erlangt Wissen seine Gültigkeit erst durch bestimmte Führungspraktiken. Bedeutsam werden hierbei u. a. Systeme moralischer Gegensatzpaare: So positioniert sich das

Wahre gegenüber dem Falschen, das Erlaubte gegenüber dem Verbotenen und die Vernunft gegenüber dem Wahnsinn (Foucault 1993c, S. 9-17). Zum einen ermöglichen diese moralischen Gegensatzpaare Führungstechniken der Rechtfertigung oder des Ausschlusses. Zum anderen bedarf es aber erst einer Führung, um diese moralischen Gegensatzpaare im Einzelnen bedeutsam werden zu lassen. Foucaults Werk zur Geburt der Klinik (Foucault 1993b) zeigt beispielsweise auf, dass sich der Begriff des Wahnsinns gegenüber jenem der Vernunft in der Moderne erst etablierte.

Foucault fragt schließlich, wovon es abhängt, mit welcher Selbstführung ein Subjekt auf äußere Zwänge reagiert. Entscheidend sind für ihn die *Erfahrungen*, die ein Subjekt bisher gemacht hat. Dabei unterscheidet er drei Achsen der Erfahrung, nämlich Erfahrungen von relevantem Wissen, Erfahrungen von auferlegten Führungszwängen und Erfahrungen von eigenen Selbstführungstechniken (Foucault 1993a, S. 10). Die Art und Weise, wie der Einzelne Wissen und Führung erfahren und bewältigt hat, prägt daher nachhaltig die Art und Weise, wie er in Zukunft auf Führung reagieren kann.

Recht und Disziplin

Foucault wendet sich gegen eine Konzeption von Macht, welche sich in Gesetzen und Verträgen, in der Scheidung des Erlaubten vom Verbotenen manifestiert. Die Negativität dieser Vorstellung von Macht, die Beschränkung, die darin besteht, dass das *Recht* nur verbieten, verweigern, ausschließen und nein sagen kann, mag zur Beschreibung der Ausübung von Macht im Mittelalter noch genügen, für die Moderne scheint sie ihm überholt zu sein (Foucault 1992, S. 103).

Foucault identifiziert stattdessen Führungstechniken, welche anstacheln, erleichtern, mehr oder weniger wahrscheinlich machen (Foucault 1994b, S. 254f). Das Interesse an der Positivität und Ökonomie dieser produktiv wirkenden Führungstechniken führt schließlich zur Untersuchung der *Disziplin*, welche im 17. und 18. Jhd. im Umfeld des Gefängniswesens aufkommt und nach und nach die gesamte Gesellschaft durchzieht. Die Idee des modernen Gefängnisses ist es, den Delinquenten nicht nur zu bestrafen, sondern an seiner Seele zu arbeiten, ihn zu einem besseren Menschen zu erziehen. Geeignete Führungstechniken sollen seine Selbstführung in eine gewünschte Richtung lenken. Die Richtung wird dabei vorgegeben durch die Sehnsucht nach Vernunft und Seelenheil, wie sie von der Aufklärung einerseits und dem Pietismus andererseits geschürt wird. Ähnlich wie das Gefängnis funktionieren bald auch andere Institutionen, welche in räumlicher Abgeschiedenheit eine normorientierte *Erziehung* ihrer Insassen erreichen wollen: die Kaserne, das Irrenhaus und die Schule. Ihnen allen sind gewisse

Führungstechniken gemein: Neben der räumlichen Abgeschiedenheit und der überhöhten Sensibilität gegenüber Normen findet sich die hierarchische und alle überblickende Überwachung durch einen Vorgesetzen; die Sanktion, die nicht nur strafen, sondern zugleich erziehen soll, und die organisierte Prüfung des Subjekts. Zur gleichen Zeit etablieren sich die Humanwissenschaften, allen voran die Psychologie und Pädagogik, welche Disziplinartechniken bereitstellen und verbessern.

Foucaultsche Fragen an den Mathematikunterricht

Mit dem Theorieangebot Foucaults lassen sich nun Fragen an die Mathematik und den Mathematikunterricht stellen, die mir für die gesellschaftliche Bedeutung des Mathematikunterrichts bedeutsam erscheinen:

- Welche Führungstechniken ermöglicht die Mathematik und welcher Führung bedarf sie zur Erlangung ihrer Bedeutsamkeit und Gültigkeit?
- Wie werden Schüler im Mathematikunterricht geführt? Welchen Zwängen unterliegen sie und wie können sie sich als Subjekte hervorbringen?
- Welche Erfahrungen machen Schüler im Mathematikunterricht? Inwiefern bereiten diese Erfahrungen bestimmte Techniken der Selbstführung vor?
- Welcher moralischen Gegensatzpaare bedient sich der Mathematikunterricht? Produziert er Ausschluss?
- Inwieweit ist Mathematikdidaktik Disziplinarwissenschaft? Wie kann sie eine kritische Distanz zur Disziplinierungsinstitution Schule gewinnen?

Literatur

Foucault, Michel (1992). *Der Wille zum Wissen.* Suhrkamp: Frankfurt am Main.

Foucault, Michel (1993a). *Der Gebrauch der Lüste.* Suhrkamp: Frankfurt am Main.

Foucault, Michel (1993b). *Die Geburt der Klinik.* Fischer: Frankfurt am Main.

Foucault, Michel (1993c). *Die Ordnung des Diskurses.* Fischer: Frankfurt am Main.

Foucault, Michel (1994a). *Warum ich Macht untersuche.* In: Dreyfus; Rabinow (Hg.): Jenseits von Strukturalismus und Hermeneutik. Weinheim: Beltz. S. 243-250.

Foucault, Michel (1994b). *Wie wird Macht ausgeübt?* In: Dreyfus; Rabinow. S. 251-261.

Foucault, Michel (2000). *Die »Gouvernementalität«.* In: Bröckling; Krasmann; Lemke (Hg.): Gouvernementalität der Gegenwart.Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 41-67.

Lemke, Thomas (1997). *Eine Kritik der politischen Vernunft.* Argument: Berlin.

Lemke, Thomas (2000). *Neoliberalismus, Staat und Selbsttechnologien. Ein kritischer Überblick über die ›governmentality studies‹.* In: *Pol. Vierteljahresschrift* 41/1. S. 31-47.

Jörg KORTEMEYER, Paderborn, Rolf BIEHLER, Paderborn

Studienmotivation und Einstellung zur Mathematik in der Studieneingangsphase bei Ingenieurstudierenden

Im Rahmen der AG Ingenieurmathematik des khdm werden zahlreiche Aktivitäten durchgeführt. So wurden ca. 450 Ingenieurstudierende zu ihrer Motivation zur Aufnahme Ihres Studiums und zu ihrer Einstellung zur Mathematik generell und differenziert nach den behandelten Themen befragt. Ferner wurden sie nach ihren Wünschen hinsichtlich der inhaltlichen, didaktischen und organisatorischen Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung befragt. Im Vortrag werden Ergebnisse dieser Befragung vorgestellt.

1. Die khdm-Projekte in den Ingenieurwissenschaften

Im Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) gibt es in den Ingenieurwissenschaften insgesamt fünf Projekte, die nun kurz vorgestellt werden:

- „Entwicklung und Einbau von anwendungsbezogenen (Modellierungs-)Aufgaben in der „Mathematik für Maschinenbauer (Michael Dellnitz, Gudrun Oevel). Ziel: Entwicklung von Interventionselementen für die „Mathematik für Maschinenbauer“, Anpassung der benötigten Mathematik an die Technische Mechanik, Veranschaulichung der Mathematik durch Anwendungsbeispiele
- „Situierter Erwerb von mathematischen Kenntnissen in den ‚Grundlagen der Elektrotechnik A'“ (Bärbel Mertsching, Markus Hennig). Ziel: Entwicklung eines Wikis mit Verlinkungen zu den Inhalten der Vorlesung und Selbsttests zur Erfassung des Vorwissens
- „Untersuchungen zur Studienmotivation und Einstellung zur Mathematik bei Ingenieurstudierenden“ (Rolf Biehler, Gudrun Oevel, Jörg Kortemeyer, Bianca Thiere)
- Promotionsprojekt „Kompetenzen zum Integralbegriff auf der Schnittstelle Mathematik und Elektrotechnik (Jörg Kortemeyer)
- „KoM@ING: Kompetenzmodellierungen und Kompetenzentwicklung, integrierte IRT-basierte und qualitative Studien bez. Mathematik und ihren Anwendungen in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen“ (Rolf Biehler, Reinhard Hochmuth et. al.)

2. Ergebnisse aus einem Fragebogen in der „Mathematik für Maschinenbauer“ – Motivation und Relevanz der Veranstaltung

Der Fragebogen wurde von Rolf Biehler, Gudrun Oevel und Bianca Thiere im Wintersemester 2010/11 konzipiert und von Jörg Kortemeyer und Rolf Biehler ausgewertet. Dieser Fragebogen wurde im Sommersemester 2011 von Jörg Kortemeyer und den Mitarbeitern der „Mathematik für Maschinenbauer 2“ erweitert und in der Veranstaltung eingesetzt. Im Wintersemester nahmen 343 Studenten an dem Fragebogen teil, im Sommersemester waren es 274 Studenten, wobei es eine große Schnittmenge zwischen den Kohorten gibt.

Bevor auf nähere Angaben zu Motivation und Relevanz eingegangen wird, gibt es zunächst einige demographische Angaben. Die Teilnehmer der Veranstaltung haben eine durchschnittliche Abschlussnote von 2,63 bei einer Standardabweichung von 0,58 und eine durchschnittliche Mathematiknote im letzten Zeugnis von 2,39 bei einer Standardabweichung von 0,76. Circa zwei Drittel der Teilnehmer haben einen Leistungskurs in Mathematik belegt, während weniger als ein Viertel Physik als Leistungskurs belegt hatten.

Für 77% waren gute Berufsaussichten die Motivation für die Studienwahl, gefolgt von Interesse an technischen Dingen (65%) und Gehalt im späteren Beruf (48%). Ihre Studienmotivation schätzen die Studierenden anfangs sehr hoch ein (Median bei ‚sehr hoch’). Sie nimmt im Laufe des Semesters auch nur leicht ab. Bei der Entwicklung der Motivation gibt es Bewegungen in beide Richtungen, d. h. es gibt auch Studenten, deren Motivation sich im Laufe des Semesters deutlich verbessert hat. Die extrinsische Motivation (z. B. durch den Wunsch des Bestehens der Klausur oder Erlangen von Bonuspunkte) war deutlich größer als die intrinsische Motivation.

Die Relevanz der in der Veranstaltung erworbenen Kompetenzen wird für spätere Vorlesungen in den Ingenieurwissenschaften höher eingeschätzt als für die parallel stattfindenden Veranstaltungen (Technische Mechanik, Technische Darstellung). Bei der Frage nach der Anwendung der 41 Themengebiete der Mathematik-Veranstaltung in ingenieurwissenschaftlichen Veranstaltungen ergaben sich mittels einer Faktorenanalyse drei Gruppen:

- G1: theoretische mathematische Inhalte ohne Rechenmethoden, wie z. B. Beweismethoden oder Konvergenzkriterien
- G2: theoretische mathematische Inhalte mit Rechenmethoden, wie z. B. Integrationsverfahren oder Horner Schema
- G3: laufend in Technischer Mechanik angewandte mathematische Inhalte, z. B. Vektoren im zweidimensionalen Raum oder Skalarprodukt

Auf einer 6er-Likert-Skala zu dieser Frage, bei der 1 für „Anwendung unklar“ und 6 für „Anwendung klar“ stand, ergaben sich für diese drei Gruppen die Mittelwerte 3,65 (G1), 4,35 (G2) und 5,05 (G3).

3. Ansichten zur Mathematik von Maschinenbau-Studierenden im Vergleich mit Studierenden des GHR-Lehramts

Im Bereich der Einstellungen und Ansichten zum Üben und Lernen von Mathematik gab es die Möglichkeit, acht Skalen aus dem LIMA-Projekt (www.lima-pb-ks.de) der Universitäten Paderborn und Kassel zu verwenden, wobei nähere Informationen hierzu in weiteren Vorträgen der GDM 2012 zu finden sind. In diesem Projekt wurde der Fragebogen von 307 Studenten des Grund-, Haupt- und Realschullehramts in Paderborn ausgefüllt. Im Folgenden verwende ich die Abkürzung GHR für diese Studiengänge. Bei den folgenden Skalen wurde jeweils eine 6er-Likert-Skala mit 1 „stimmt gar nicht“ und 6 „stimmt genau“ verwendet. Die Abkürzung MB steht für den Studiengang Maschinenbau.

a) Einstellung zur Mathematik. Bei den folgenden vier Skalen konnten die Studierenden ihre Zustimmung zu Aussagen über Mathematik ausdrücken:

- „Mathematik als System“, Beispielitem: „Mathematisches Denken wird durch Abstraktion und Logik bestimmt“
- „Mathematik als Toolbox“, Beispielitem: „Mathematik ist das Behalten und Anwenden von Definitionen und Formeln, von mathematischen Fakten und Verfahren.“
- „Mathematik als Prozess“, Beispielitem: „Mathematik lebt von neuen Einfällen und Ideen“
- „Praktische Relevanz der Mathematik“, Beispielitem: „Mathematik hilft, alltägliche Aufgaben und Probleme zu lösen.“

	System	Toolbox	Prozess	Prakt. Rel.
MB	4,6	4,47	4,18	4,03
GHR	4,37	4,28	4,21	3,93

Die Werte unterscheiden sich nur in geringem Maße. Unsere Erwartung war, dass die Werte aufgrund der Anwendungsfächer in den Bereichen „Toolbox“ und „Praktische Relevanz“ im Maschinenbau deutlich höher wären.

b) Üben und Lernen von Mathematik. In diesem Bereich sollten sich die Studenten zu verwendeten Lernstrategien in der Mathematik äußern:

- „Memorisation“, Beispielitem: „Wenn ich für Mathematik lerne, lerne ich so viel wie möglich auswendig.“
- „Elaboration“, Beispielitem: „Ich überlege mir, wie das, was ich in Mathematik gelernt habe, im Alltag angewendet werden kann.“
- „Kontrollstrategien“, Beispiel: „Wenn ich Mathematik lerne, versuche ich herauszufinden, was ich noch nicht richtig verstanden habe.“
- „Anstrengung“, Beispielitem: „In Mathematik versuche ich, alles so gut wie möglich zu machen.“

	Memorisation	Elaboration	Kontrollstr.	Anstrengung
MB	3,47	3,48	4,7	4,78
GHR	3,96	2,94	4,61	4,78

Die erhaltenen Werte zeigen, dass MB-Studierende beim Lernen tendenziell eher Elaboration als GHR-Studierende nutzen. Im Bereich Memorisation ergibt sich das umgekehrte Bild.

4. Weitere Verbesserungswünsche an die Veranstaltung „Mathematik für Maschinenbauer“

In diesem Bereich wird eine 6er-Likert-Skala verwendet, bei der 1 für „stimmt gar nicht“ und 6 für „stimmt genau“ steht.

a) Technologieeinsatz: Die Studierenden nutzen Matlab bzw. Scilab nicht, um sich Inhalte der Veranstaltung zu verdeutlichen (Median bei 1). Auch der Wunsch, eigene Matlab-Programme zu schreiben und zu nutzen, ist relativ gering (Median bei 2).

b) Zusätzliche Angebote zu der Veranstaltung: Mögliche zusätzliche Angebote wurden in beiden Fragebögen abgefragt, wobei die Ergebnisse sehr ähnlich ausfielen. Bei den Studierenden waren themenorientierte Sonderübungen bzw. Maßnahmen direkt vor der Klausur (Repetitorium, Probeklausur) am beliebtesten. Regelmäßige Angebote wie vierstündige Übungen oder Zentralübungen wurden mehrheitlich abgelehnt.

5. Ausblick

Wir planen eine mehrdimensionale Analyse der Ergebnisse. Des Weiteren sollen die Fragebögen in einer überarbeiteten Form in weiteren Studiengängen wie „Bachelor Mathematik“ und weiteren Ingenieurwissenschaften (z. B. Elektrotechnik, Bauingenieurwesen) eingesetzt werden.

Christina M. KRAUSE, Bremen

Arten des Zeichengebrauchs und ihre Rolle im mathematischen Erkenntnisprozess

Ziel dieses Projektes ist es, Einsichten darüber zu erlangen, wie der Einsatz von Zeichen die Konstruktion mathematischen Wissens fördern kann. Einem bestehenden Modell zur Beschreibung der Wissenskonstruktion in sozialen Interaktionen soll so eine semiotische Perspektive hinzugefügt werden. Hierzu wird untersucht, wie Schüler unterschiedliche Zeichen einsetzen und wie epistemische Handlungen dadurch unterstützt werden.

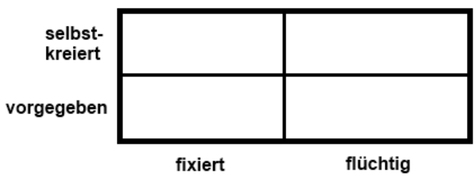
Im mathematischen Diskurs kommunizieren Schüler nicht nur durch Sprache, sondern setzen vielfältige semiotische Ressourcen ein. Basierend auf Arzarellos Modell des semiotischen Bündels (Arzarello, 2006) wird synchroner und diachroner Zeichengebrauch unterschieden, um Beziehungen zwischen Funktionen simultan gebrauchter Zeichen, wie auch Funktionen des Wechsels im Zeichengebrauch zu beschreiben. Unterstützt durch eine Kategorisierung des Gebrauchs der einzelnen Komponenten des Zeichenzusammenspiels werden so folgende Fragestellungen untersucht:

- Wie und mit welchen Funktionen werden Zeichen in Erkenntnisprozessen gebraucht?
- In welcher Weise unterstützt der Zeichengebrauch den Wissenskonstruktionsprozess?

1. Theoretischer Hintergrund

In dieser Studie betrachte ich epistemische Prozesse der Konstruktion mathematischen Wissens. Dieses kann in sozialen Interaktionen durch die drei epistemischen Handlungen des *Sammelns* kleinster mathematischer Bedeutungen, des *Verknüpfens* solcher Einheiten und des *Sehens von Strukturen*, also Regelhaftigkeiten, beschrieben werden („SVSt-Modell“: Bikner-Ahsbahs, 2005). Mithilfe einer semiotischen Perspektive soll nun der Aspekt der Ressourcen als Quelle und Mittel epistemischen Handelns integriert werden.

Nach Peirce ist ein Zeichen „etwas, dass für jemanden in gewisser Hinsicht oder Fähigkeit für etwas steht.“ (Peirce zitiert nach Nöth, 2000). Die Zugänglichkeit eines mathematischen Objektes ist daher abhängig von den zur Verfügung stehenden Darstellungen des Objektes und den Möglichkeiten, die sich für den Interpreten durch diese bieten. Diese Möglichkeiten werden nach außen im Zeichengebrauch sichtbar. Zeichengebrauch setzt sich zusammen aus einer Komposition von Zeichen und ihren situationsbezogenen Funktionen im Wissenskonstruktionsprozess. Rückschlüsse auf die Funktion des Gebrauchs eines einzelnen Zeichens können aus ihren Eigenschaften gezogen werden. Hier wird Flüchtigkeit und Selbstkreiertheit jeweils mit zwei Abstufungen unterschieden. Während *fixierte* Zeichen (beispielsweise Diagramme, Markierungen, Notizen) eine andauernde Darstellung und Kennzeichnung von Ideen zulassen, ermöglichen *flüchtig* gebrauchte Zeichen (wie Gesten oder Sprache) ein erstes Ausprobieren. Dadurch können z.B. zunächst Ansätze umrissen und ausgehandelt werden, ohne sich auf Details festzulegen. Im Grad der Selbstkreiertheit wird in Anlehnung an Wetzels, Kester und van Merriënboer (2010) zwischen *vorgegebenen* und *selbstkreierten* Zeichen unterschieden. Nach Wetzels et al. (2010) muss das Denken vorgegebenen Zeichen angepasst werden, wodurch der Umgang mit diesen eine zusätzliche Lernleistung darstellt. Selbstkreierte Zeichen hingegen können dem gedachten mathematischen Objekt oder der Idee eines Objektes angepasst werden und bieten somit eine intuitiver zugängliche Ausdrucksmöglichkeit. Unter Berücksichtigung dieser beiden Dimensionen ergeben sich nun vier mögliche Formen des Gebrauchs eines Zeichens (siehe links).



2. Methodische und methodologische Überlegungen

Datenerhebung und Wahl der Aufgabe

Verwendet werden Daten aus dem von der German-Israeli-Foundation geförderten Forschungsprojekt „Effective mathematical knowledge construction in interest-dense situations“ (Grant 946-357.4/2006). Es wurden drei Aufgaben von jeweils drei leistungsstarken Schülerpaaren der 10. Klasse bearbeitet. Diese Bearbeitungsprozesse wurden aus bis zu drei Perspektiven videografiert: erstens frontal, um die im Gestenraum (vom Hals bis zur Tischplatte im Bereich zwischen den Schultern) produzierten Gesten zu erfassen, zweitens mit Fokus auf den Schreibprozess, um das Erstellen von Inskriptionen und den Verweis auf diese beobachten zu können. Bei Einsatz dynamischer Geometrie-Software erfolgte außerdem eine Aufnahme des Monitors. Mithilfe dieser Videos wurde ein Transkript erstellt, in dem sowohl sprachliche als auch nicht-sprachliche Handlungen erfasst wurden.

Für erste Analysen fiel die Entscheidung auf die Bearbeitungen einer Aufgabe zur Parabel als geometrischem Ort, da durch die Aufgabenstellung ein semiotisch breites Spektrum von Handlungen gefordert wird (zur konkreten Aufgabenstellung siehe Krause, 2011).

Analyse und Typenbildung

Zunächst erfolgte eine Sichtung des Videomaterials auf besonders zeichenintensive Episoden. Für diese wurde der Zeichengebrauch beschrieben und nach seiner Funktion im Erkenntnisprozess kodiert. Besonders interessant sind aufeinanderfolgende Episoden, in denen der Zeichengebrauch wechselt. Hierdurch können die Vor- und Nachteile bestimmter semiotischer Kompositionen bezüglich der Erfüllung einer Funktion identifiziert werden. So kann eine Kategorisierung typischer Arten des Zeichengebrauchs und seines Wechsels in epistemischen Prozessen erfolgen. Im weiteren Verlauf werden Analysen durch die Methode des permanenten Vergleichs (Krummheuer, 2000) folgen, zunächst durch Variation der Schülerpaare, später außerdem unter Betrachtung der Bearbeitung der beiden anderen Aufgaben, die dann zur Typenbildung führen.

3. Erste Ergebnisse und Ausblick

Aus den bisherigen Analysen geht hervor, dass das Zusammenspiel von Zeichen mit bestimmten Merkmalen verstärkt beobachtbar ist, wenn gewisse Funktionen erfüllt werden sollen, um epistemisch zu handeln. So unterstützt das Zusammenspiel flüchtiger, selbstkreierter und fixierter, vorgegebener Zeichen die sprachliche Argumentation. Dies geschieht durch ein Übereinanderlegen zweier Zeichen, beispielsweise einer ikonischen Geste über eine DGS-Situation, wodurch die tatsächliche mit einer hypothetischen Situation verglichen wird und Unterschiede zwischen ihnen verdeutlicht werden. Die *sprachliche Argumentation* wird so *durch Visualisierung präzisiert*. In anderen Episoden helfen temporär fixierte Zeichen, wie eine auf dem Ausdruck festgehaltene Geste, bestimmte Aspekte einer fixierten Repräsentation zu *fokussieren* (siehe rechts). Durch die gestische Indizierung muss sprachlich nicht mehr ausformuliert werden, was genau betrachtet wird. Das „Festhalten“ des betrachteten Objektes ermöglicht ein Abwenden des Blickes von diesem, ohne es aus dem Fokus zu nehmen.

Im Wechsel des Zeichengebrauchs fiel in bisherigen Analysen vor allem der Wechsel von flüchtigen, selbstkreierten zu fixierten, selbstkreierten Zeichen auf. In der semiotischen Komposition wurden beide gemeinsam mit Sprache als weiterem flüchtig gebrauchten Zeichen verwendet. Gesten und Sprache als zwei flüchtige Zeichen wurden gemeinsam gebraucht, um erste Ansätze einer Idee spontan zu kommunizieren und somit in der sozialen Interaktion auszuprobieren. Eine Problematik zeigt sich, wenn zu viele Komponenten und Relationen zwischen diesen durch flüchtige Zeichen ausgedrückt werden sollen. Hier stößt dieser Zeichengebrauch an Grenzen, was sich in einer Brüchigkeit von Sprache und Gesten zeigt. Der Wechsel von Gesten zur Erstellung von Inskriptionen fungiert als *Auslagerungsprozess vom Gestenraum auf das Papier*. Die sukzessive Auslagerung der Komponenten nutzt Inskription als Gedächtnis, reduziert die Komplexität und führt kognitiv zu einer Entlastung. Außerdem erfordert das Erstellen eines Diagrammes ein höheres Maß an Präzisierung und sorgt deshalb für ein Ausschärfen der Idee. Die situative Funktion ist vor und nach dem Wechsel die gleiche: das Vorstellen eines Ansatzes zum Ausprobieren im gemeinsamen Ideenpool. Unterstützung im Erkenntnisprozess bringt hier der Wechsel im Zeichengebrauch durch seine auslagernde Funktion. In weiterführenden Analysen soll daher näher betrachtet werden, wie sich Wechsel im Zeichengebrauch auf den Erkenntnisprozess auswirken, wenn in der semiotischen Komposition andere Merkmale einzelner Zeichennutzungen ausgetauscht werden. Mit welcher Funktion wird beispielsweise zu einem fixierten, vorgegeben Zeichen gewechselt?

Auf eine Idealtypenbildung gewinnbringender Arten des Zeichengebrauchs folgt eine Rekontextualisierung. Durch Vergleich der Idealtypen mit den empirischen Fällen sollen im weiteren Verlauf der Studie Erklärungsansätze für gelingenden Zeichengebrauch und Hypothesen über Probleme mit diesem aufgestellt werden.

Literatur

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. Relime, Numero Especial, 267–299.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interssendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre 43. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Krause, C. (2011). Formen und Funktionen des Zeichengebrauchs im mathematischen Erkenntnisprozess. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.2. bis 25.2.2011 in Freiburg, 483-486.

Krummheuer, G, & Brandt, B. (2000): Das Prinzip der Komparation im Rahmen der Interpretativen Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. Journal für Mathematikdidaktik, 21(3/4), 193-226

Wetzels, S. A. J, Kester, L., & van Merriënboer, J. J. G (2010). Use of external representations in science: Prompting and reinforcing prior knowledge activation. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. de Jong, & J. Elen (Hrsg.). Use of representations in reasoning and problem solving: Analysis and improvement. Abingdon (pp. 225-241). London (UK): Routledge.

Günter KRAUTHAUSEN, Hamburg

Tablet-Apps – neuer Anlauf für digitale Medien in der Grundschule?

Ein neuer Hype?

Der Durchbruch zum Massenmarkt für Tablet-Computer ist inzwischen erfolgt. In den USA wünschten sich 31 % der 6-12 Jährigen zu Weihnachten 2010 unter allen elektronischen Geräten am sehnlichsten ein iPad (Bärmann 2011); Weihnachten 2011 waren es schon 44 %. Bei Jugendlichen und Erwachsenen verdrängte 2011 die Attraktivität des iPad erstmals den Computer von Platz 1. Die Verkaufszahlen explodieren bei ständig sinkenden Preisen. Prognosen über Tablet-Verkäufe sind bereits überholt, bevor das betreffende Jahr beginnt (vgl. Reisinger/ Beiersmann 2011):

2010	2011	2012	2015
17,6 Mio.	63,6 Mio.	103,5 Mio.	326,3 Mio

Folgerichtig stehen sie auch bei Walmart und Toys'R'Us in den Regalen. Dass selbst Kleinkinder offensichtlich nach kurzer autodidaktischer Erkundung das Handling eines Tablets beherrschen, reicht natürlich als didaktisches Argument nicht aus. Andererseits sind auch gewisse Vorteile zu konstatieren: handliche Größe (mobil), robust genug für den Unterrichtsalltag (strapazierfähige Cases), intuitives Handling, keine klassischen PC-Kenntnisse erforderlich, (quantitativ) boomendes Angebot an Apps für Kinder.

Wer soll das bezahlen?

Bei neuen Technologien ante portas sind finanzielle Bedenken weder neu, noch ein k.-o.-Argument. Besteht doch die Chance einer rechtzeitigen Meinungsbildung ohne akuten Handlungsdruck. Man sollte also über sachgerechte Einsatzmöglichkeiten nachdenken, auch wenn die Gerätekategorie zum aktuellen Zeitpunkt noch kein Unterrichtsalltags ist. Aber dazu muss der Blick naturgemäß immer einige Jahre nach vorne gerichtet werden, denn der Blick zurück zeigt die atemberaubend Geschwindigkeit der Entwicklung: Ein heutiger Taschenrechner kann in derselben Zeit die 4-fache Datenmenge des Apollo Mondlande-Computers von 1969 verarbeiten. 1983 wurde der Commodore C 64 als ›Revolution des Lernens‹ beworben. Umgerechnet und inflationsbereinigt kostete er mehr als 1200 Euro – das iPad je nach Modell zwischen 500 und 800 Euro, andere Anbieter noch weniger.

Qualität der Apps

Wie bei PC-Software darf man aber auch bei den Apps die Quantität des Angebots nicht mit Qualität verwechseln. Am 27.02.2012 fanden sich in Apples AppStore unter dem Suchbegriff ›Math…‹ 2682 Apps für das iPad.

Aber Art und Qualität der Angebote unterschieden sich erheblich. »Viele Apps spekulieren denn auch auf eine Kundschaft, die leicht zu begeistern ist – schnell zusammengepfuschte Billigware. […] Die Skinner-Box […] ist quasi das Urbild des Touchpad. Zweijährige nutzen es kaum anders, als auch eine Taube das täte: Sie tippen irgendwo hin, und wenn sie richtig getroffen haben, gibt es Effekte zum Lohn« (Dworschak 2011, S. 125 f.).

Kategorien

Vorschul-Programme

Apps für die rasend wachsende Gruppe der 2-6-Jährigen sind auf das unbedarfte Ausprobieren, die Zeige- und Touch-Metapher ausgelegt. Auffallend auch der Trend, Rechen*fertigkeiten* schon weit in das Vorschulalter hineinzuziehen – auf zudem didaktisch sehr fragwürdige Art und Weise.

Sammlungen, Informationssysteme, Trainer

Bei einer überproportionalen Zahl der unter der etwas hochtrabenden Kategoriebezeichnung ›Bildung‹ erschienenen Apps handelt es sich um Informationssysteme wie Datenbanken: 1000 FISCHE (alternativ: 15 andere Sammlungsinhalte) AUS ALLER WELT etc. Umfänglich ist auch die Zahl der fertigkeitsdominierten Rechentrainer, besonders in Form von Flash Cards. Andere Anwendungen zielen auf größere Ausschnitte des Mathematik-Curriculums und können gleichsam als paradigmatische Gegenbeispiele für didaktisch durchdachte Praxis gelten. Und schließlich gibt es noch jene Anwendungen, die im Stile eines ›Komplettpakets‹ suggerieren, dass alles enthalten sei, was man im Laufe eines Schuljahres in Mathematik benötigt. Deren fachdidaktische Qualitätsstandards sind aber meist ebenso dürftig wie bei ihren entsprechenden PC-Versionen (da meist Zweitverwertungen).

Denk-, Knobel- und Strategiespiele

Eine interessantere Kategorie bilden die meist aus dem Unterhaltungsbereich bekannten Denkspiele und Knobeleien wie z. B. NIM, SPIEL 24 (COMBINE 24), Tangram, Schiebepuzzles, Streichholzspiele, Memorys oder SUDOKU. Viele Vertreter dieser Kategorie beeindrucken, neben der realistischen Anmutung dank ihrer hohen Bildschirmauflösung, mit der direkten Manipulation durch Gestensteuerung: Tangramsteine, Streichhölzer, Memorykarten oder Puzzlesteine werden wie bei den klassischen Spielversionen mit dem Finger über die Fläche bewegt und platziert oder mit Hilfe zweier Finger einfach gedreht. Denkspiele wie z. B. CUT THE BLOCK oder CUT THE ROPE spielen durch die Digitalisierung ihre spezifischen medienbedingten Vorteile aus.

Arbeitsmittel

Diese Apps simulieren bekannte Werkzeuge (20er-/100er-Felder/-Tafeln, Geobrett, Rechenrahmen u. Ä.), könnten oft aber durch stärkeren Einbezug mathematikdidaktischer Expertise in ihrer Funktionalität noch verbessert werden. Als digitalisierte Arbeitsmittel erlauben sie vielfach flexiblere Aktivitäten als ihre analogen Varianten. Interessant ist die Diskussion, inwieweit hier noch der Handlungsbegriff reklamiert werden kann (vgl. Krauthausen 2012).

Simulationen

Simulationen, im Grundschulbereich traditionell kaum vorhanden (vgl. Krauthausen 1995), sind (ausschnitthafte) ›Nachbauten‹ komplexer Vorgänge mit Wechselwirkungen in Systemen mit einer begrenzten Anzahl von Parametern. Ein ebenso unterhaltsames wie lehrreiches Beispiel, was physikalische Zusammenhänge und die Anforderungen an Kombinationsfähigkeit, Raumvorstellung und Geschicklichkeit betrifft ist die (inzwischen Kult-)App CUT THE ROPE.

›Seiteinsteiger‹-Apps‹

Solche Beispiele sind nicht für Unterrichtszwecke entwickelt worden, können aber gleichwohl Elemente enthalten, die einen – punktuellen und zielgebundenen – Einsatz im Unterricht sinnvoll erscheinen lassen. Ein Beispiel ist etwa die App PAPER PLAIN PROJECT (Werksrakete 2011, Studio für angewandte Medien im Raum). Die App enthält Faltanleitungen für diverse Papierflieger. Jede Faltanleitung besteht aus zehn schematisch dargestellten Schritten. Die Faltsituation wird sowohl als Standbild als auch als Video angeboten.

Das Thema Papierfalten kann eine sinnvolle Arbeitsumgebung im Geometrieunterricht sein. Wollring (2000) etwa beschreibt vier Möglichkeiten zum Nachbau von Faltobjekten: Vormachen, Benutzen gedruckter Vorlagen, Nachbauen nach Mustervorgabe und (v. a.) das Nutzen eines Faltdokuments wie z. B. das Faltbuch oder das Faltplakat. Im PAPER PLAIN PROJECT sind nahezu alle diese Möglichkeiten repräsentiert.

Und wenn man an eine Nutzung digitaler Medien (über Tablets hinaus) denkt, die eigene Herstellung von Stop-Motion-Animationen (vgl. Linneweber-Lammerskitten 2011), dann eröffnet sich sogar die Möglichkeit, dass die Kinder auch selbst digitale Faltplakate erstellen können.

Ausblick

Insgesamt *könnten* sich – das ist die *optimistische* Sichtweise – für Tablet-Anwendungen potentiell neue Chancen abzeichnen, *wenn* man sich i. S. eines ›Weniger ist mehr‹ auf wohl-ausgewählte, spezifische Anwendungsbereiche und Features begrenzt sowie die bekannten Schwächen von ›Komplettpaketen‹ vermeidet, wie sie seit Jahrzehnten von klassischer Lernsoftware bekannt sind und wie sie aktuell bei sog. Online-Unterstützungssytemen sogar noch weiter getrieben werden, was die fragwürdigen Versprechungen betrifft. Die *realistische* Sichtweise wird es aber vermutlich weiterhin nahelegen, im ungebremst expandierenden App-Angebot die wenigen ›Gold-Nuggets‹ zu finden, die einen Einsatz fachdidaktisch wirklich legitimieren. Und dies v. a., weil durch die niedrigere technische Zugangsschwelle der Kreis potentieller Entwickler für Tablet-Apps deutlich größer geworden ist als bei klassischer Softwareentwicklung. Dadurch sind im Verhältnis auch mehr Produkte zu erwarten, die ohne die an sich gebotene, spezifisch mathematikdidaktische Expertise entwickelt werden.

Der Gang der Dinge bleibt abzuwarten – bzw. seitens der Mathematikdidaktik durch klare Positionierung und/oder exemplarische Entwicklungsarbeit mit zu *gestalten*.

Literatur

Bärmann, Ch. (2011): Die neue Bescheidenheit. In: Mac Life, 8, 130.

Dworschak, M. (2011): Das Patschpäd. In: DER SPIEGEL, 19, 124-128.

Krauthausen, G. (1995): »A pendulum is to swing …« – Ein Beitrag zu einem ›anderen‹ Software-Design für die Grundschule. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 3/4, 263-298.

Krauthausen, G. (2012): Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. Heidelberg, Springer/Spektrum Akademischer Verlag.

Linneweber-Lammerskitten, H. et al. (2011): VITAL MATHS: Visual Technology for Autonomous Learning of Mathematics. epiSTEME 4. Mumbai/India.

Reisinger, D., Beiersmann, S. (2011): Gartner – iPad-Verkaufszahlen steigen bis 2015 auf 149 Millionen. http://www.zdnet.de/news/41556643/gartner-ipad-verkaufszahlen-steigen-bis-2015-auf-149-millionen.htm. Zugriff: 14.02.2012.

Werksrakete (2011): Paper Plane Project. Apple AppStore. http://itunes.apple.com/de/app/ paper-plane- project-hd/ id422048044?mt=8

Wollring, B. (2000): Faltbilderbücher, Faltgeschichten und Faltbildkalender. Arbeitsumgebungen zur ebenen Papierfaltgeometrie für die Grundschule. In: Die Grundschulzeitschrift, 138, 26 & 43-47.

Jana KREUẞLER, Florentine BUNKE, Horst W. HAMACHER, Kaiserslautern

Motivationssteigerung im Geometrieunterricht anhand von Modellierung kompetitiver Standortplanung

„Wozu braucht man das eigentlich?" lautet eine häufig gestellte Frage im Mathematikunterricht. Insbesondere im Bereich der Geometrie gibt es eine Vielzahl wunderbarer Anwendungen aus der Wirtschaft und dem täglichen Leben, welche auch mit Methoden der Schulmathematik leicht verstanden werden können. Wenn die Schüler den Sinn und die Wichtigkeit der Mathematik in der heutigen Gesellschaft verstehen, fördert dies ihre Motivation und Aufmerksamkeit im Unterricht.

Die Konkurrenz zweier Unternehmen und ihre optimale Standortplanung zur Maximierung ihres eigenen Marktanteils ist ein geometrisches Problem, welches anhand von Schulmathematik gelöst werden kann. Im Rahmen verschiedener Modellierungstage und -projekte wurden die Schülerergebnisse untersucht und verglichen. Dieser Beitrag präsentiert sowohl die Aufgaben und Ergebnisse, als auch einen Ausblick zur Handhabung im Unterricht.

1. Das Projekt

In Form von zweitägigen Modellierungstagen oder einem einwöchigen Uniprojekt durften rheinland-pfälzische Schüler der 11.-13. Jahrgangsstufe von Gesamtschulen und (technischen) Gymnasien verschiedener Städte an einem anwendungsbezogenen, geometrischen Thema forschen.

Hierbei ging es um die Konkurrenz zweier Unternehmen A und B, welche Hamburger verkaufen und ihren eigenen Marktanteil maximieren möchten. Gegeben waren ein Ort und zwei Bedingungen über die Kunden:

- Die Kunden wählen immer die Filiale, welche näher an ihrem Standort ist.
- Bei gleicher Entfernung bevorzugen sie die Filiale, die schon länger am Markt ist.

Es wurden drei Aufgaben gestellt:

(1) Wo sollte Unternehmen A seine erste Filiale eröffnen?

(2) Nachdem A erfolgreich ist, möchte Unternehmen B nachziehen und ebenfalls eine Filiale eröffnen. Wo wäre dies am sinnvollsten?

(3) Wenn A im Vorhinein wüsste, dass B ebenfalls eine Filiale eröffnen wird, wo sollte A dann seine Filiale platzieren, um den Marktanteil von B im Voraus zu minimieren?

Diese Problemstellungen können mithilfe kompetitiver Standortplanung und mathematischer Spieltheorie modelliert und geometrisch gelöst werden. Die mathematischen Hintergründe und Algorithmen hierzu sind in der Literatur unter den Stichworten „Medianoid-" und „Centroid-Problem" zu finden (siehe Drezner, 1982; Drezner, Zemel, 1992).

2. Schülerergebnisse

Eine interessante Beobachtung ergab sich bezüglich der unterschiedlichen Titelwahl. Die Schüler, welche das Projekt unter dem Namen „Konkurrenz zwischen McDonalds und Burger King" präsentiert bekamen, hatten große Schwierigkeiten zu abstrahieren und anzunehmen, beide Ketten würden die gleichen Produkte anbieten. Sie konnten sich nicht von ihrer Meinung entfernen, dass sie die eine Burger-Kette lieber mochten als die andere, und kamen daher zu wenig geometrischen Ergebnissen.

Völlig anders sah dies jedoch bei dem Titel „Konkurrenz zwischen zwei Unternehmen" aus. Hier gelang es den Schülern geometrisch an das Problem heranzugehen. Sie entwickelten ein Konzept zur allgemeinen Lösung des Problems, welches auf jede andere Stadt angewandt werden könnte.

Aufgabe 1

Zur Platzierung der ersten Filiale (Unternehmen A) markierten die Schüler zunächst die wichtigsten Kundenstandorte $(x_i, y_i), i = 1, \dots n,$ des Ortes und ordneten diesen abhängig von ihrer Attraktivität bzw. ihrer Menge an potentiellen Kunden ein Gewicht b_i zu. Als optimalen Standort für Imbiss A definierten sie den Schwerpunkt $S = (x, y)$ mit folgenden x- und y-Koordinaten:

$$x = \frac{x_1 * b_1 + \dots + x_n * b_n}{b_1 + \dots + b_n}, \qquad y = \frac{y_1 * b_1 + \dots + y_n * b_n}{b_1 + \dots + b_n}.$$

Aufgabe 2

Die Schüler erkannten schnell, dass die Marktgebiete zweier Filialen aufgrund unserer Annahmen über das Verhalten der Kunden durch eine Mittelsenkrechte getrennt werden. Demnach wurde ebenfalls schnell klar, dass Unternehmen B die meisten Kunden für sich gewinnen kann, je näher es bei Filiale A eröffnet. Nun musste nur noch ein Verfahren gefunden werden, welches die exakte Richtung zur Maximierung des eigenen Marktanteils bestimmt.

Hierzu entwickelten die Schüler eine Strategie, welche dem Algorithmus der mathematischen Literatur (vgl. Drezner, 1982) sehr ähnelt.

Ausgehend von dem in Aufgabe 1 berechneten optimalen Standort S zeichneten sie eine Gerade senkrecht nach oben, parallel zur y-Achse und berechneten im Anschluss, für welchen Winkel (von der Gerade und Punkt S ausgehend) der erreichbare Marktanteil am größten ist (siehe Abbildung 1).

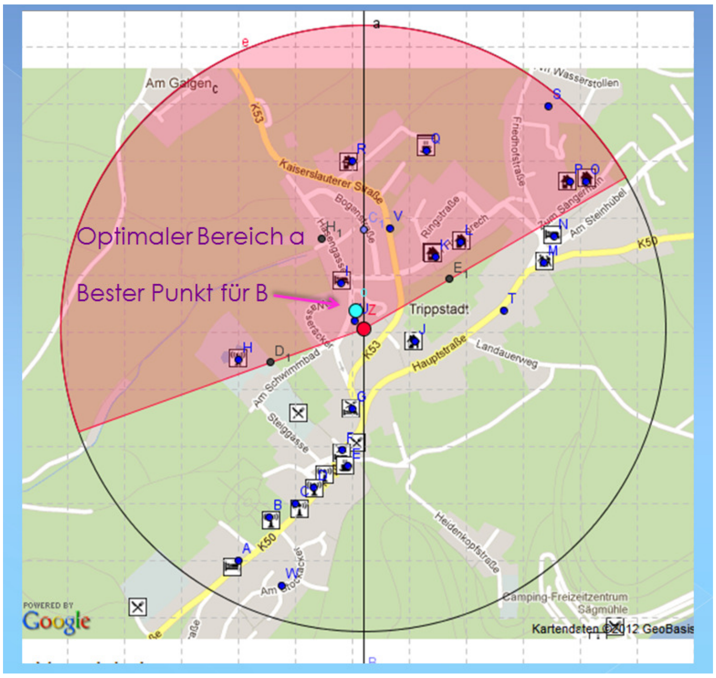


Abb. 1: Lösungsverfahren zu Aufgabe 1 am Beispiel von Trippstadt

War dieser Winkel gefunden, so platzierten sie die Filiale von B in diesem Winkel dicht bei A.

Aufgabe 3

In den meisten Fällen wurde bei dieser Aufgabenstellung von den Schülern kein der Literatur ähnlicher Algorithmus gefunden, gute geometrische Ansätze waren jedoch zu erkennen.

3. Ausblick zur Handhabung im Unterricht

Da der reguläre Schulunterricht wenig Zeit bereithält, ein Thema so intensiv bearbeiten zu können wie bei mehrtägigen Projekt- und Modellierungstagen, benötigen wir einen etwas anderen Ansatz zur Realisierung angewandter Forschungsthemen. Die Anfangsüberlegungen zu einem Thema sollten direkt vom Lehrer in die richtige Richtung geleitet werden. Dies könnte hier zum Beispiel bedeuten, dass die Schüler zunächst versuchen, das Marktgebiet zweier Imbissbuden zu entwickeln

(Mittelsenkrechte), um dies dann auf drei oder mehr Imbissbuden zu erweitern. Im Anschluss daran ist eine Aufgabenstellung mit konkreten Details und Vorgaben sinnvoll, um den Prozess der Modellbildung zu beschleunigen. Hier könnte der Lehrer im Voraus den Stadtplan der eigenen Stadt so bearbeiten, dass bereits die wichtigsten Kundenstandorte markiert und gewichtet sind. Spezielle Tipps und Hilfestellungen können die Schüler ebenfalls schneller in die richtige Richtung leiten, ihnen jedoch trotzdem die Freiheit für eigene Kreativität lassen.

4. Fazit

Die Schüler waren, egal welcher Jahrgangsstufe und Schulform, sehr motiviert und selbstständig bei der Arbeit. Sie vergaßen Pausen zu machen und arbeiteten zum Erstaunen ihrer Lehrer teilweise sogar abends zu Hause weiter. Wir beobachteten bei allen Schulen, dass auch schwächere Schüler für Mathematik zu begeistern sind, wenn sie den Sinn und ein Anwendungsgebiet erkennen können.

Geometrische Anwendungsthemen, wie das hier behandelte Projekt der kompetitiven Standortplanung, eignen sich im Schulunterricht sowohl zur Festigung bereits erworbenen geometrischen Wissens, als auch zur Erarbeitung neuer Themen. Es könnte beispielsweise die Mittelsenkrechte in ihrer Anwendung als Abgrenzung von Marktgebieten eingeführt und entwickelt werden.

Laut der von uns durchgeführten Evaluation beantworteten die Schüler die Fragen „Hat es dir gut gefallen?“ und „Konntest du Zusammenhänge zwischen Mathematik und Beruf erkennen?“ durchschnittlich mit „viel“.

Wir erkennen daher, dass Schüler motivierter an ein mathematisches Thema gehen und eher dafür zu begeistern sind, falls ein direktes und aktuelles Anwendungsbeispiel vorliegt. Dies könnte ausgenutzt werden, um zukünftig die Motivation von Schülern für den Geometrieunterricht zu steigern.

Literatur

Drezner, Z. (1982): Competitive Location Strategies for two Facilities. North-Holland, Regional Science and Urban Economics 12, 485-493.

Drezner, Z., Zemel, E. (1992): Competitive Location in the Plane. Annals of Operations Research 40, 173-193. J. C. Baltzer AG, Scientific Publishing Company.

Hamacher, H., Korn, E., Korn, R., Schwarze, S. (2004): Mathe und Ökonomie – Neue Ideen für den praxisnahen Unterricht. Universum Verlag GmbH & Co. KG.

MaMaEuSch-WiMS (Management Mathematics for European Schools – Wirtschaftsmathematik in Schulen), http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaeusch/.

André KRUG, Kassel, Stanislaw SCHUKAJLOW, Paderborn

Offene Aufgaben: Schülereinstellungen und Teilaktivitäten beim Modellieren

Im Projekt MultiMa[1] wird der Umgang von Schülern mit multiplen Lösungen beim Modellieren untersucht, Lernszenarien zur Förderung dieser Kompetenz entwickelt und im Unterricht evaluiert. Multiplen Lösungen entstehen u.a. beim Bearbeiten von offenen realitätsbezogenen Aufgaben, die im Mittelpunkt des vorliegenden Beitrags stehen. Orientiert man sich am Modellierungskreislauf (Blum & Leiß, 2005) und den sich daraus ergebenden Teilaktivitäten werden unter offenen Aufgaben traditionell realitätsbezogene Probleme verstanden, deren Bearbeitung beim Vereinfachen/ Strukturieren Mehrdeutigkeit zulässt. Es lassen sich bei der Aktivität Vereinfachen/ Strukturieren zwei Dimensionen extrahieren (Humenberger 1995, Maaß 2006):

- Auswahl relevanter Informationen
- Treffen von Annahmen

Die erste Dimension kann auch unter mathematischer Lesefähigkeit subsummiert werden. In einer Untersuchung im Rahmen des DISUM-Projekts (Leiss et. al. 2010) konnte festgestellt werden, dass mathematisches Lesen und Modellierungskompetenz mittel bis stark zusammenhängen ($r=.486$ $p<.01$). Zudem lassen sich durch die Teilaktivitäten mathematisches Lesen und mathematisches Arbeiten 29% Gesamtvarianz der Modellierungskompetenz erklären. Bis zu 29% (je nach Klasse und Aufgabentyp) von Lernenden können sowohl eine Aufgabe lösen, als auch die relevanten Angaben benennen (Linke 1991). Über die Aktivität des Vereinfachens/ Strukturierens ist bekannt, dass das Treffen von Annahmen durch Schätzen für Schüler schwerer zu sein scheint als aus einer Fülle von Angaben die notwendigen Informationen auszuwählen (Maaß 2006). Daraus ergeben sich die Fragen, welcher Zusammenhang zwischen Teilaktivitäten des Modellierens besteht und wie viel Varianz des Modellierens durch die Teilaktivitäten „Auswahl relevanter Informationen“, „Treffen von Annahmen“ und „mathematisches Arbeiten“ erklärt werden kann. Unbekannt ist zudem, welche Einstellung Schülerinnen und Schüler zu offenen Aufgaben haben und ob offene Aufgaben im Regelunterricht der Sekundarstufe I behandelt werden.

---

[1] Das Forschungsprojekt „MultiMa“ (Multiple Lösungen in einem selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht) ist von der DFG gefördert. Verantwortlich ist als Projektleiter ist S. Schukajlow und sein Mitarbeiter A. Krug.

Fragestellung

In diesem Beitrag befassen wir uns mit zwei Fragenkomplexen. Zum einen werden die Schüler-Selbstwahrnehmungen bzgl. offener Aufgaben und ihrer unterrichtlicher Behandlung untersucht. Die Forschungsfragen sind:

- Wie schätzen die Schüler „Offene Aufgaben im Unterricht“ ein und wie stark ist die „Präferenz für offene Aufgaben“ ausgeprägt?
- Bestehen Zusammenhänge zwischen den beiden Skalen?

Zum anderen wird die Rolle der Teilkompetenz Vereinfachen/ Strukturieren beim Modellieren mit folgenden Forschungsfragen untersucht:

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Teilaktivitäten Auswahl relevanter Informationen, Treffen von Annahmen, Mathematischen Arbeiten und dem gesamten Prozess des Modellierens?
- Welchen Einfluss haben die einzelnen Teilaktivitäten auf Modellierungskompetenz?

Methode

Es wurden 107 Realschüler (50,5% weiblich, im Durchschnitt 15,71 Jahre alt) aus drei Schulen untersucht. Die Testeinheit dauerte 80 Minuten. Im Leistungstest wurden Modellieren als Ganzes, mathematisches Arbeiten, Auswahl relevanter Information und das Treffen von Annahmen erhoben. Bei der vorliegenden Operationalisierung umfasst die Teilkompetenz Treffen von Annahmen z.T. auch die Identifikation wichtiger Informationen. Die verwendeten Items wurden zum Teil aus der DISUM-Studie übernommen und zum Teil neu entwickelt. Ein Beispielitem für das Konstrukt Treffen von Annahmen ist:

Maibaum

Die Aufgabe selbst sollst du nicht lösen.

Jedes Jahr findet in Bad Dinkelsdorf am 1. Mai der traditionelle Tanz um den so genannten Maibaum statt, einem ca. 8 m hohen Baumstamm. Dabei halten die Tänzer Bänder in den Händen, die an der Spitze des Maibaumes befestigt sind. Mit diesen 15 m langen Bändern tanzen sie dann so um den Maibaum, dass im Verlauf des Tanzes ein schönes Muster am Stamm entsteht (auf dem Foto ist oben am Maibaum schon so ein Muster erkennbar).

In welcher Entfernung vom Maibaum stehen die Tänzer zu Beginn des Tanzes (dabei sind die Bänder straff gespannt)?

Nenne zwei Angaben, die du schätzen musst, damit du die Aufgabe lösen kannst.

Abbildung 1: Beispielitem zur Teilkompetenz Treffen von Annahmen

Im Anschluss an den Leistungstest hat jeder Schüler einen Fragebogen ausgefüllt, in dem u.a. die Präferenz von Lernenden für offene Aufgaben und die unterrichtliche Behandlung dieser Aufgaben mit Hilfe von 5-stufigen Likert-Skalen (1: stimmt gar nicht, 5: stimmt genau) abgefragt wurde. Beispielitems sind:

- Präferenzen für offene Aufgaben: „Bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben finde ich es gut, wenn eine Aufgabe verschiedene Lösungen haben kann.“ (6 Items, α=.67)
- Offene Aufgaben im Unterricht: „In Mathematik lösen wir oft Aufgaben, bei denen verschiedene Lösungen möglich sind.“ (6 Items, α=.63)

Ergebnisse und Diskussion

Die Auswertung ergab für die Skala Präferenzen für offene Aufgaben einen Mittelwert von 3.12 (Standardabweichung 0.80). Für die Skala Offene Aufgaben im Unterricht ergab sich ein Mittelwert von 2.89 (Standardabweichung 0.61). Die Korrelation der beiden Skalen Präferenz für offene Aufgaben und Unterrichtliche Behandlung offener Aufgaben ist mit r=.27, p<.01 klein. Bei Betrachtung des Punkt-Streu-Diagramms (Abb. 2) fällt zum ersten auf, dass Schüler mit einer geringen Präferenz für offene Aufgaben die unterrichtliche Behandlung als nicht ausführlich empfinden. Zum zweiten scheint die unterrichtliche Behandlung von offenen Aufgaben aus Schülersicht in den Klassenraum Einzug gehalten zu haben. Beide Extreme – totale Zustimmung und Ablehnung – sind nicht zu verzeichnen.

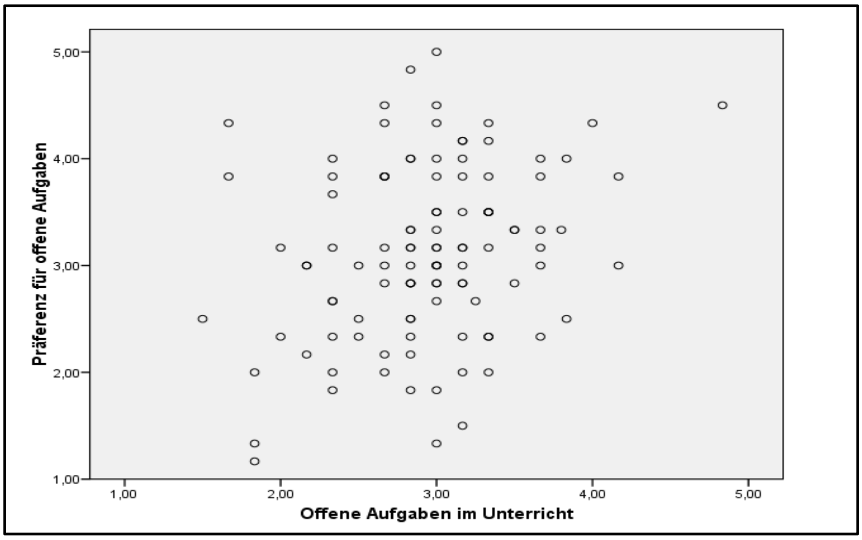


Abbildung 2: Punkt-Streu-Diagramm

Die Analyse der bivariaten Korrelationen (Tabelle 1) zeigt einen starken Zusammenhang der erhobenen Teilkompetenzen des Modellierens mit der gesamten Modellierungskompetenz. Während mathematisches Arbeiten und Treffen von Annahmen etwa gleich stark mit Modellieren korrelieren, erscheint der Zusammenhang des Modellierens und der Dimension Auswahl relevanter Informationen etwas niedriger.

	Mathematisch arbeiten	Treffen von Annahmen	Auswahl relevanter Informationen
Modellieren	.66*	.63*	.45*

*p<0.01

Tabelle 1: Bivariate Korrelationen

Um den Einfluss der Teilkompetenzen auf die Modellierungsleistung zu untersuchen, wurde eine Regressionsanalyse durchgeführt. Die Modellierungskompetenz wird hier zu 53% ($p<.01$) durch die Teilkompetenzen erklärt (standardisierter Beta Wert: β-Mathematisch arbeiten 0.39; β-Treffen von Annahmen 0.34; β-Auswahl relevanter Informationen 0.12). Der Einfluss der Teilkompetenzen Mathematischen arbeiten und Annahmen treffen auf Modellierungskompetenz ist auf dem 1% Niveau signifikant ($p<.01$) Die Wirkung der Teilaktivität Auswahl relevanter Informationen ist nun eher schwach und auf ein fast 10% Signifikanzniveau gesunken ($p<.12$). Die Ergebnisse der Regressionsanalyse sprechen somit dafür, dass die Modellierungsleistung durch die Förderung sowohl mathematischen Arbeitens als auch der Teilaktivität Treffen von Annahmen gesteigert werden kann.

Literatur

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe.

Mathematik lehren, 128, 18–21.

Humenberger, H. (1995). Über- und unterbestimmte Aufgaben im Mathematikunterricht. Praxis der Mathematik, 37, (1), 1–7.

Leiss, D.; Schukajlow S.; Blum, W.; Messner, R.; Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling - Task Analyses, Student Competencies and Teacher Interventions. Journal für Mathematik Didaktik, 31, 119–141.

Linke, H.-P. (1991). Individuelle Leistungsunterschiede von Schülern beim mathematischen Modellieren. Der Mathematikunterricht, 5, 51–58.

Maaß, K. (2006). Mathematisches Modellieren Aufgaben für die Sekundarstufe. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Katja KRÜGER, Paderborn

Die Kreisinversion in den Kreislimit-Graphiken von Escher – Verstehen durch Beweisen fördern

Zum selbstständigen Experimentieren und Erkunden fordern die Kreislimit-Graphiken von Escher in besonderer Weise heraus. Mit ihnen versuchte der Künstler, sein graphisches Werk zur regelmäßigen Flächenaufteilung (Parkettierungen) weiter zu vollenden: Wie lässt sich Unendlichkeit in Form der Wiederholung eines Motivs innerhalb einer begrenzten Fläche graphisch darstellen?

Im berühmten Holzschnitt-Druck „Himmel und Hölle“ (1960) wird im Folgenden nach dem zentralen Gestaltungsmuster gesucht. Entdeckung eines Beweismotivs und Erleben der Erklärungsfunkton von Beweisen stehen im Vordergrund. Dabei tritt ein Konstruktionsproblem auf, das sich für die Bearbeitung durch Lehramtsstudierende sehr gut eignet, weil sich das Finden einer Beweisidee, das Führen eines Beweises und dessen (hier künstlerische) Aufklärungswirkung im Zusammenhang mit eigenen Entdeckungen und Vermutungen entwickeln. Der Schlüssel ist die Kreisinversion. Sie ist – trotz weitreichender Vernetzungen – Lehramtsstudierenden gewöhnlich nicht (mehr) bekannt. So gibt es in diesem Themenbereich auch mathematisch Neues und durchaus weitreichend Anwendbares zu entdecken.

1. Untersuchung des Aufbaus der Graphik „Himmel und Hölle“

Welches Strukturmuster liegt hier zugrunde?

Schnell lassen sich drei Symmetrieachsen und im Zentrum der Graphik ein regelmäßiges Sechseck ausmachen. Die „Bausteine“ Engel und Teufel der Kreislimit-Graphik wiederholen sich und werden dabei zum Rand der kreisförmigen Begrenzung hin immer kleiner. Für genauere Untersuchungen bieten sich Experimente mit einer DGS an. Dazu wird die Graphik als Hintergrundbild geladen und ihr Aufbau mit Hilfe geometrischer Konstruktionen genauer erfasst.

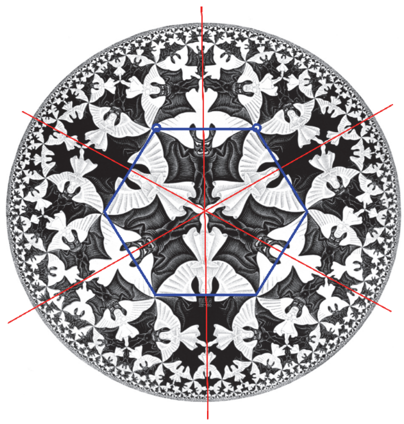


Abb. 1

Kreislimit IV

Betrachtet man etwa die Punkte, an denen sich die Flügel von Engeln und Teufeln treffen, so kann man experimentell zu der Vermutung gelangen, dass diese „Flügelpunkte“ auf Kreisbögen liegen. Eine Besonderheit dieser Kreisbögen ist es, dass sie den Kreisrand der Graphik orthogonal schneiden (vgl. Abb. 2).

Zum Verständnis des Strukturmusters helfen somit „Orthogonalkreise" weiter. Man wird die Rekonstruktion wohl am besten innen beginnen, indem man zu je zwei Flügelpunkten von Teufeln oder Engeln den Orthogonalkreis zum umgebenden Kreis(rand) der Graphik sucht.

Aber wie konstruiert man einen Orthogonalkreis k^* durch zwei Punkte A und B im Inneren eines Kreises k, der diesen orthogonal schneidet?

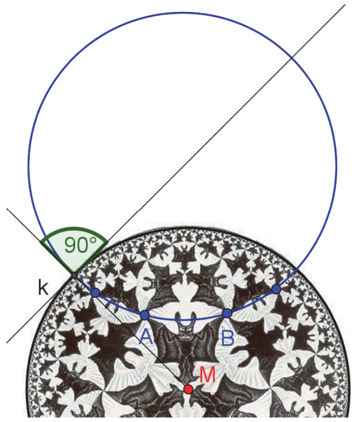


Abb. 2

2. Konstruktion von Orthogonalkreisen – experimentelle Teillösungen

Zunächst einmal muss der Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises k^* auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegen. Wo aber genau? Die Bedingung des senkrechten Schneidens der Kreise führt nicht sofort weiter. Bedienen wir uns einer oft nützlichen Strategie beim Problemlösen: das Weglassen einer Bedingung mit anschließender Variation der Teillösung. Unser Problem wird vereinfacht, indem wir nur noch einen Punkt A im Inneren eines Kreises k betrachten und nach allen Orthogonalkreisen k^* zu A und k suchen, die den Ausgangskreis k senkrecht schneiden. Um einen solchen Orthogonalkreis k^* zu finden, wähle man einen – zunächst – beliebigen Punkt S auf k und konstruiere den Orthogonalkreis k^* zu k durch A und S wie folgt: Der Mittelpunkt M^* von k^* ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m zur Strecke AB mit der Tangente t im Punkt S an k.

Anschließend lässt sich diese Einzellösung des Teilproblems mithilfe der DGS bequem verallgemeinern, indem man S auf dem Kreis variiert und die Ortslinie der Mittelpunkte M^* aller entstehenden Orthogonalkreise aufzeichnet (Abb. 3). Ziehen an S erzeugt anscheinend eine Gerade, auf der alle Mittelpunkte M^* der Orthogonalkreise k^* liegen.

Warum ist das so?

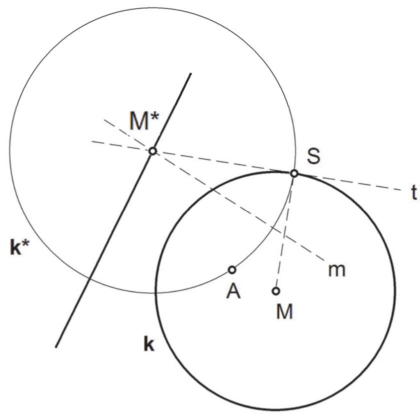


Abb. 3

3. Verstehen durch Beweisen

Um zu beweisen, dass die Ortslinie der Orthogonalkreismitten M* eine Gerade bildet, könnte man einen analytischen Beweis führen, indem man die Konstruktion aus Abb. 3 in ein geeignetes Koordinatensystem einbettet und die x- und y- Koordinaten der Mittelpunkte M* berechnet. Diese erfüllen dann eine Geradengleichung. Dieser Beweis ist ganz elementar und so „straightforward“, dass er hier nicht wiedergegeben werden muss. Mehr Einsicht bringen wohl auch die folgenden beiden elementargeometrischen Beweise, einer für „Anfänger“, der andere für „Kenner“.

Wo bekommt man eine Beweisidee? Nun, die fragliche Gerade soll ja alle Orthogonalkreise zu *A* und *k* einfangen. Zeichnen wir also ein paar davon.

In Abb. 4 fällt auf, dass die verschiedenen Orthogonalkreise anscheinend außer dem Punkt *A* noch einen weiteren Punkt *A** gemeinsam haben. Und *A** liegt offenbar auf der Geraden *g*(*M,A*). Wenn die Vermutung stimmt, dass alle Orthogonalkreise zu *k* durch *A* den Punkt *A** enthalten, dann müssen deren Mitten auf der Mittelsenkrechten von *AA** und damit auf einer Geraden liegen.

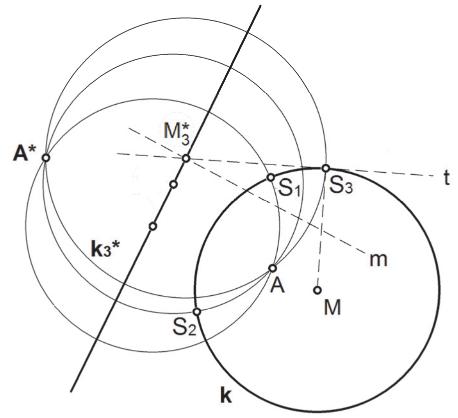


Abb. 4

Wie lässt sich nun beweisen, dass der eben entdeckte Punkt *A** tatsächlich allen Orthogonalkreisen zu *k* durch A gemein ist?

Wir nehmen dazu *A** genauer in den Blick und konstruieren ihn entsprechend unserer Beobachtung: Es wird zunächst ein beliebiger Orthogonalkreis *k** zu *k* durch *A* konstruiert. Anschließend erhält man *A** als Schnittpunkt der Geraden *g*(*M,A*) mit diesem Orthogonalkreis *k** (vgl. Abb. 5). Nun müssen wir nur noch zeigen, dass *A** gar nicht von der Wahl des Orthogonalkreises *k** abhängt. Das ist der Fall, wenn der Abstand von *A** zu *M* konstant ist.

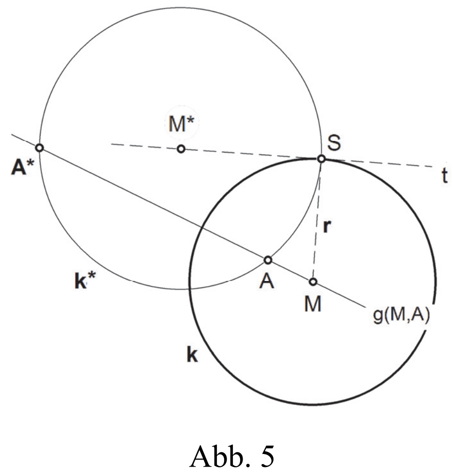


Abb. 5

Das lässt sich recht aufwändig durch mehrfache Verwendung des Satzes von Pythagoras sichern (z.B. hilft dabei die Hilfslinie *MM**). Als Ergebnis erhält man schließlich den folgenden Zusammenhang

$$\left|\overline{A^*M}\right| \cdot \left|\overline{AM}\right| = r^2 .$$

„Kennerinnen“ und „Kenner“ können diese Gleichung direkt als Umschreibung des Sehnen-Tangenten-Satzes „sehen“. Radius *r* und *AM* sind konstant. Also muss auch der Abstand von A^* zu M konstant sein. Damit ist gezeigt, dass alle Orthogonalkreise zu k und A auch A^* enthalten.

Der Beweis hat zugleich einen bemerkenswerten neuen Punkt A^* hervorgehoben, der in besonderer Weise mit dem Ausgangskreis k und dem Punkt A im Kreisinneren zusammenhängt: Man nennt A^* den Bildpunkt von A unter der Kreisinversion an k. Und mit dieser Entdeckung gelingt schließlich die Lösung unseres Ausgangsproblems. Um den Orthogonalkreis k^* durch die Punkte A und B im Inneren eines Kreises k zu konstruieren, führt man die Kreisinversion von A an k durch und erhält so den Bildpunkt A^*. Anschließend konstruiert man die Mittelsenkrechten der Strecken AA^* und AB. Deren Schnitt liefert den Mittelpunkt des gesuchten Orthogonalkreises.

4. Rückblick und Ausblick

In Eschers „Himmel und Hölle" erzeugt die Kreisinversion das Strukturmuster. In Abb. 6 ist ein Orthogonalkreis durch zwei Flügelpunkte von Teufeln konstruiert worden. Die „Bausteine" der Graphik sind durch Kreisbögen begrenzte Dreiecke, die abwechselnd Engel und Teufel enthalten und durch die Kreisinversion nach außen hin verkleinert abgebildet werden.

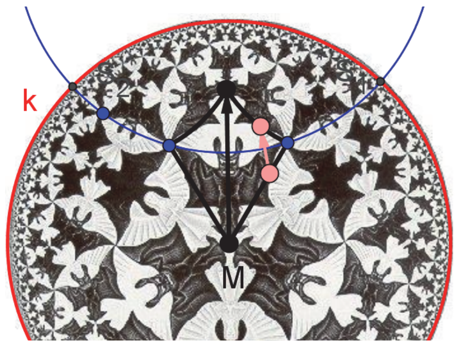


Abb. 6

Escher wurde bei der künstlerischen Umsetzung seiner Kreislimit-Graphiken von einer Abbildung zur Parkettierung der hyperbolischen Ebene im Poincare-Modell inspiriert, auf die er in einer Abhandlung des großen Geometers Harold Coxeter gestoßen war. Die Kreisinversion spielt in diesem Modell eine grundlegende Rolle. Sie sorgt für das Einfangen des „immer so weiter" im begrenzten Bildrahmen.

Zudem bietet das Thema Kreisinversion auch noch mancherlei Beziehungen zu anderen, „handfesteren" und gewichtigen Anwendungen, so dass Lehramtsstudierende zum Weiterfragen und zu eigenständigen Forschungen anregt werden können. (Vgl. etwa das Buch von Schmidt 1950)

Literatur und Bildquelle

Abb. 1, 2 und 6: M.C. Escher's „Circle Limit IV" ©2012 The M.C.Escher Company-Holland. All rights reserved. www.mcescher.com

Ernst, B. (1986): Der Zauberspiegel des M.C. Escher. Berlin, Taco Verlag, S. 102-111.

Herfort, P. (1999): The Geometry of Escher's Circle-Limit-Woodcuts, ZDM 5, 144-148

Schmidt, H. (1950): Die Inversion und ihre Anwendungen. München, Oldenbourg.

Jana KRÄMER, Kassel

„14.057, das sind 7 Einer, 50 Zehner und 14 Tausender“ – (Fehl-)Vorstellungen von Studierenden zum Bündelungsprinzip in Stellenwertsystemen

Dieser Beitrag beschreibt Fragestellung, Vorgehen und erste Erkenntnisse eines Promotionsvorhabens über die Entwicklung von Vorstellungen Studierender des Grundschullehramts bezüglich Bündelungsprozessen in Stellenwertsystemen. Das Forschungsanliegen ist eingebettet in das Projekt KLIMAGS[1] des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM) der Universitäten Kassel, Paderborn und Lüneburg.

1. Fachliche und fachdidaktische Basis

Das der Untersuchung zu Grunde liegende mathematische Gebiet sind die *Stellenwertsysteme*. Es geht hier um die Darstellung der natürlichen Zahlen durch Ziffern, die – je nach Stelle – mit verschiedenen Potenzen von Zehn (bzw. von jeder anderen Basis) multipliziert werden, wobei die entsprechende Summe dann den Wert der dargestellten Zahl wiedergibt. Mit geringfügig abweichenden Notationsweisen gehört der „Satz zur allgemeinen Zahldarstellung“ zu den grundlegenden Sätzen jedes Arithmetik-Werkes (und er wird auch in der Vorlesung, aus deren Studierenden die Stichprobe der vorliegenden Untersuchung stammt, thematisiert). Die dahinterstehende Handlungsvorstellung ist das *Bündeln*.

Die Relevanz der Behandlung des Bündelungsprinzips im Mathematikunterricht der Grundschule wird sowohl in Bildungsstandards (Walther et al., 2008) und Rahmenplänen als auch in der einschlägigen fachdidaktischen Literatur betont. Als Vorteile der Behandlung auch nichtdezimaler Stellenwertsysteme führt z.B. Padberg (2009) an, dass Bündelungen mit Bündelungszahlen ungleich Zehn hilfreich zur Erarbeitung des Grundgedankens des Bündelns sein können. Bei kleineren Basen, weil hier Bündelanzahlen und -größen leichter simultan erfassbar sind als im Dezimalsystem, bei größeren, weil hier die Bedeutung und Eindeutigkeit der Symbolik fokussiert wird. Letztlich soll erreicht werden, dass die Begriffe „Bündelung“ und „Stellenwert“ losgelöst vom Zehnersystem erfasst werden. Schließlich soll durch die Behandlung anderer Basen eine Vertiefung der Einsicht in

[1] **K**ompetenzorientierte **L**ehr**I**nnovationen für das **MA**thematikstudium **G**rund**S**chule. Projektleiter: R. Biehler, P. Bender (beide Paderborn),W. Blum (Kassel), R. Hochmuth (Lüneburg)

Grundrechenarten (z.B. stellengerechtes Zerlegen beim halbschriftlichen oder Überträge beim schriftlichen Rechnen) ermöglicht werden.

Das „Bündelungsprinzip" ist zu verorten an einer Schnittstelle zwischen Fachinhalten und veranschaulichenden Handlungsprozessen. Eine naheliegende Möglichkeit, sich diesem Phänomen zu nähern, ist das *Grundvorstellungskonzept*, wie es vom Hofe (1995) vorgestellt hat. Grundvorstellungen werden dabei als Mittler zwischen Individuum, Realität und mathematischen Inhalten angesehen, die bei der Sinnkonstituierung mathematischer Begriffe eine zentrale Rolle einnehmen. Eine wesentliche Eigenschaft, die Grundvorstellungen von Wissen unterscheidet, ist, dass sie prinzipiell kontextunabhängig sind, während Wissen i.a. situationsgebunden ist und nicht transferierbar sein muss.

2. Fragestellung und Untersuchungsdesign

Die Fragestellung entstand in einer Lehrsituation während einer Übung zur „Arithmetik in der Grundschule". Studierende, die sich fachlich bereits ausführlich mit Stellenwertsystemen und Ziffernschreibweisen beschäftigt hatten, zeigten gravierende Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen bei dem Versuch, Gegenstände zu Bündeln zusammenzufassen und auf diese Weise – hier im System zur Basis 6 – die Zifferndarstellung zu erzeugen. Mit der Begründung, dass es „die Sechs ja gar nicht gibt im 6er-System", entstand das rechtsstehende Bild.

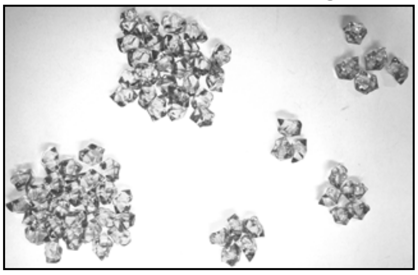


Abb. 1: Bündelungsergebnis von Studierenden im System zur Basis 6

Um ein genaueres Bild über diese offensichtlich vorhandenen (Fehl-)Vorstellungen zeichnen zu können, sollen in der Untersuchung folgende Fragestellungen verfolgt werden:

- Welche Vorstellungen zu Stellenwertsystemen und Bündelungsprinzip sind bei Lehramtsstudierenden am Studienbeginn vorhanden?
- Wie entwickeln sich diese Vorstellungen im Studium?
- Wie kann man den Entwicklungsprozess effizient unterstützen?

Damit die Ausprägungen und Entwicklungen der Vorstellungen der Studierenden erfasst werden können, bedarf es der genauen Beobachtung konkreter Durchführungen von Bündelungsprozessen sowie der begleitenden Erklärungen der handelnden Testperson (TPN). Hierzu wurde ein Interviewleitfaden entwickelt, der zu vier Zeitpunkten im Verlauf des Studiums für querschnittliche Erhebungen eingesetzt wird (in ausgewählten Fällen wird zusätzlich eine längsschnittliche Begleitung realisiert):

- T1 zu Beginn (Studienanfänger, N=15)
- T2 nach dem Besuch der Fachvorlesung zur Arithmetik (N=15)
- T3 nach Besuch der zugehörigen Didaktikveranstaltung (N=20).
- T4 am Ende (Absolventen, N=10)

2. Interviewleitfaden

Der verwendete Interviewleitfaden ist gegliedert in drei Teilbereiche. Jeder dieser Blöcke hat einen eigenen Fokus und ist an gewissen Stellen mit Abbruchkriterien versehen (siehe Tabelle 1).

Fokus	*Inhalte*
Zahldarstellung und Bündeln im Dezimalsystem	– Darstellung einer gegebenen Zahl in einer Stellenwerttafel und Erklären des Zusammenhangs mit 10er-Potenzen – Beschreiben, Durchführen und Erklären eines Bündelungsprozesses (Material: 123 Deko-Steinchen).
Zahldarstellung und Bündeln in einem nichtdezimalen System	– Transfer des Bündelungsprozesses ins 4er-Sytem: Beschreiben, Durchführen und Erklären (Material wie oben) – Ablesen der Zifferndarstellung der gebündelten Zahl – Übertragen einer Zahl aus dem 4er-System ins Dezimalsystem
Bedeutung der Bündelstruktur bei Operationen	Lösen einer schriftlichen Additionsaufgabe und Erklären der Überträge – im Dezimalsystem – im Stellenwertsystem zur Basis 4

Tabelle 1: Struktur des Interviewleitfadens

Mit diesem Leitfaden wird versucht, sowohl für das „Bündeln“ notwendige fachliche Grundlagen (z.B. Verständnis zu Potenzen) abzudecken als auch die konzeptuelle Einbettung in die Theorie der Grundvorstellungen (Übertragbarkeit in ein fremdes System) und natürlich auch in die Kontexte der Schulmathematik (Transfer auf die Operationen) herzustellen.

3. Erste Eindrücke zu Bündelungsprozessen

Zum jetzigen Zeitpunkt liegen die Interviews der ersten beiden Messzeitpunkte vor, es kann also ein Eindruck über Vorkenntnisse und Entwicklungen im Bereich der Vorstellungen zum Bündelungsprinzip während des ersten Semesters gewonnen werden. Zusammenfassend kann man die Ergebnisse als eher ernüchternd bezeichnen, da aus der Schule bekannte Stoffgebiete wie Zehnerpotenzen nur unzureichend durchdrungen sind und auch im Verlauf des Semesters häufig nur oberflächliche oder algorithmische und auf die formale Notation fixierte Kenntnisse ausgebildet wurden.

Zum Messzeitpunkt T1 gelang den meisten Studierenden die Bündelung im Zehnersystem, allerdings konnte bis auf eine Studentin keine TPN das Prinzip auf das 4er-System übertragen. Die auftretenden Schwierigkeiten lassen sich zusammenfassen als eine „Fixierung auf Dezimalzahlen", in diesem Fall das Anstreben von z.B. 100 oder auch 20 als „Zahl mit der man gut rechnen kann". Ebenfalls zeigten fast alle TPN erhebliche Schwierigkeiten beim Benennen der Zehnerpotenzen in der Stellenwerttafel.

Zum Zeitpunkt T2 erklärten die Studierenden die Bedeutung von Ziffern und Stellenwerten im Dezimalsystem souverän, beim Transfer der Bedeutungen und des konkreten Bündelungsprozesses auf das 4er-System jedoch zeigten sich diverse Fehlermuster. Zum einen gab es erneut Vermischungen mit dem Dezimalsystem, indem ab der zweiten Stufe nicht mehr vier, sondern zehn Einheiten zum nächsten Bündel zusammengefasst wurden. Zum anderen zeigten sich Schwierigkeiten bei der Bildung und Deutung von Bündeln höherer Ordnung (vier 16er zu 64er) und bei der Erzeugung der Zifferndarstellung der Zahl. Häufig kam es zu einer Verwechslung der Vier (als Bündelzahl) mit der Drei (als größter Ziffer).

In Abbildung 2 wird versucht, die beobachteten Ausprägungen und Hürden zusammenzufassen und zu ordnen. Dieses Modell soll im weiteren Verlauf der Untersuchung anhand der Daten aus T3 und T4 ausgeschärft werden, im Hinblick auf weitere Abstufungen und Fehlvorstellungen. Weitere Ziele sind es, hilfreiche Unterstützungsmöglichkeiten für die Ausbildung einer flexiblen und belastbaren Vorstellung des Bündelungsprozesses zu identifizieren (z.B. „Tacho-Modell", Mehrsystemblöcke u.v.m.) und die Transferleistungen in den Bereich der Operationen zu untersuchen.

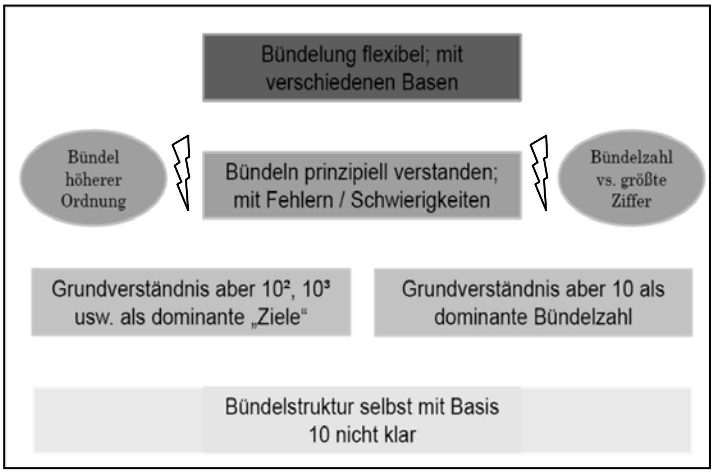


Abb. 2: Vorstellungs-Ausprägungen zum Bündelungsprinzip

Literatur

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum

Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D. & Köller, O. (2008). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Jana KRÄMER*, Luise WENDRICH*, Jürgen HAASE**, Peter BENDER**, Rolf BIEHLER**, Werner BLUM*, Reinhard HOCHMUTH***, Stanislaw SCHUKAJLOW**, (*Kassel, **Paderborn, ***Lüneburg)

Was bewirkt die Mathe-Pflichtvorlesung? Entwicklung von Arithmetik-Fachwissen und Einstellungen bei Studienanfängern des Grundschullehramts

In vielen mathematikhaltigen Studiengängen kämpft man an den Hochschulen mit Problemen wie Frustrationen auf Seiten der Studierenden und hohen Abbrecherquoten, gerade in den ersten Semestern. Im Studium für das Grundschullehramt ist durch die – in vielen Bundesländern sinnvollerweise eingeführte – Pflicht, in nicht unerheblichem Umfang Mathematik zu studieren, eine Verstärkung dieser Tatsache zu vermuten. Um den Schwierigkeiten der Studierenden begegnen zu können, werden im Projekt KLIMAGS[1] im Rahmen des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (KHDM) der Universitäten Kassel, Paderborn und Lüneburg Innovationen zur Förderung des Kompetenzerwerbs sowie der motivationalen Aspekte entworfen und entsprechende Evaluationsinstrumente zur Erfassung von Effekten der Innovationen entwickelt.

Im Fokus des Forschungsinteresses stehen die folgenden Fragestellungen:

- Welches fachbezogene Wissen bringen die Studienanfänger des Grundschullehramts von der Schule mit (…und welches nicht)?
- Wie entwickeln sich das fachbezogene Wissen (Arithmetik und Geometrie) sowie Strategien/ Einstellungen/ Überzeugungen von Grundschullehramtsstudierenden im Verlauf des ersten Studienjahres?
- Wie lässt sich der fachbezogene Kompetenzerwerb der Grundschullehramtsstudierenden effizient unterstützen?

In einem ersten Schritt wurde ein Arithmetik-Testinstrumentarium entwickelt. Hierbei wurde auf eine möglichst breite Abdeckung der von Niss (2003) und Blum et al. (2006) formulierten allgemeinen mathematischen Kompetenzen und eine Passung zu den „Standards für die Lehrerbildung" (DMV, GDM & MNU, 2008) geachtet. Mit den Tests wurden im Wintersemester 2011/12 die Leistungsentwicklungen im „traditionellen" Vorlesungsbetrieb der „Arithmetik in der Grundschule" erhoben. In der nächsten Kohorte soll die innovierte Lehrveranstaltung hierzu kontrastiert werden. Das Instrument, die ersten Ergebnisse bezüglich Leistungen und Einstel-

[1] **K**ompetenzorientierte **L**ehr**I**nnovationen für das **MA**thematikstudium **G**rund**S**chule. Projektleiter: R. Biehler, P. Bender, W. Blum, R. Hochmuth

lungen der Studierenden, sowie sich darin offenbarende „Bedarfsfelder“ für Innovationen im Lehrbetrieb sollen im Folgenden vorgestellt und diskutiert werden.

1. Versuchaufbau und Instrumente

Beide der zu kontrastierenden Kohorten (2011/12 traditionelle Vorlesung vs. 2012/13 innovierte Vorlesung) sollen an den Projektstandorten Kassel und Paderborn zu drei Messzeitpunkten (MZP) bezüglich ihres Arithmetik-Fachwissens und ihrer Einstellungen getestet werden:

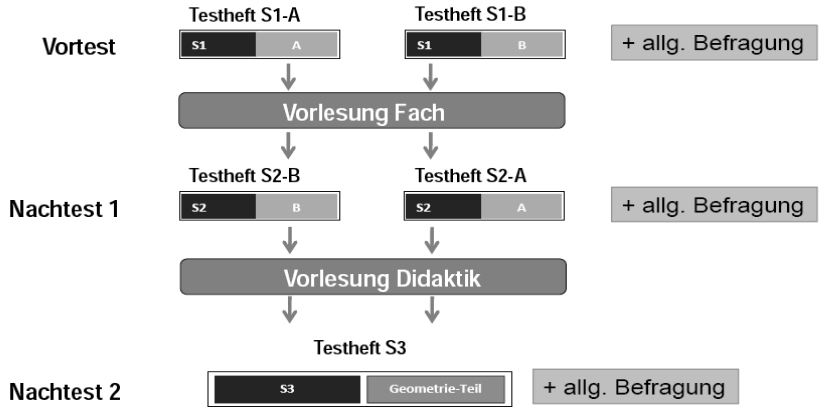


Abb. 1: Testdesign drei Messzeitpunkte

Die beiden die Fachvorlesung rahmenden Leistungstests sind in einem Rotationsdesign angelegt. Beide setzen sich zusammen aus 15 zeitpunktspezifischen Stammitems und 11 Items im Rotationsblock. Die Testreliabilität (WLE) der eindimensional raschskalierten Rohdaten aus der ersten Kohortenuntersuchung (Kohorte ohne Innovation, Standort Kassel, Stichprobengröße der Leistungstests N=68) ist mit einem Wert von 0.77 zufriedenstellend. Der Nachtest 2, der ca. ein halbes Jahr nach Abschluss der Fachvorlesung erhoben werden wird, soll 12 Items enthalten und durch identische Items in den bereits erhobenen Daten verankert werden.

In der allgemeinen Befragung wurden mit 6-stufigen Likertskalen (von 1: stimmt gar nicht bis 6: stimmt genau) neben vielem anderen die Konstrukte „Interesse an Mathematik“ (6 Items, α>.74; modifiziert nach Rheinberg & Wendland 2000), „Mathematisches Selbstkonzept“ (3 Items, α>.92; modifiziert nach Schöne et al. 2002), die Lernstrategien "Elaborieren" (5 Items, α>.76) und "Memorieren" (4 Items, α>.65; beide aus PISA 2003) sowie die Ängstlichkeit in Bezug auf Mathematik (4 Items, α>.93; modifiziert nach Pekrun et al. 2003) erhoben.

Zum jetzigen Zeitpunkt liegen Daten aus der ersten Kohorte (s.o., Stichprobengröße mit allen Daten N=58) vor. 85% sind weiblich, das Durchschnittsalter beträgt 21 Jahre (SD 3 Jahre).

2. Erste Ergebnisse in Leistungstest und allgemeiner Befragung

Die Betrachtung der Lösungshäufigkeiten im Vortest zeichnet zunächst ein sehr ernüchterndes Bild der Leistungsfähigkeit der Studierenden zum Beginn des ersten Semesters. Von den 26 im Vortest präsentierten Items – die sich alle im Bereich des Sekundarstufen-I-Stoffs bewegen oder direkt daran anschlussfähig sind – konnte jede(r) Studierende im Mittel nur neun korrekt lösen. Anhand der im Nachtest erhobenen Werte und der daraus gebildeten Leistungsparameter ist eine Leistungssteigerung im Verlauf des Semesters zu erkennen, im T-Test bestätigt sich diese mit $T(67)=10.569$, $p<0{,}001$ als signifikant. Auffällig ist, dass die Studierenden zum Teil an als „direkte Anwendung bekannter Regeln“ eingestuften Fragestellungen (Abb. 2) scheitern.

Kreuzen Sie an, ob die folgende Aussage korrekt ist oder nicht, und begründen Sie ihre Entscheidung mit Hilfe einer Teilbarkeitsregel.

743930 ist teilbar durch 4

Abb. 2: Beispielitem Anwendung von Teilbarkeitsregeln

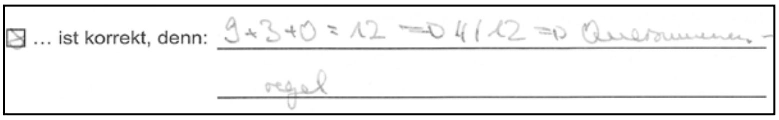


Abb. 3: Studierendenantwort 1 (Nachtest)

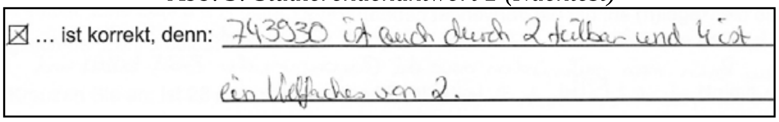


Abb. 4: Studierendenantwort 2 (Nachtest)

Abbildungen 3 und 4 zeigen exemplarisch für eine Reihe fehlerhafter Antworten die Nachtest-Lösungen zweier Studierenden. Sie verdeutlichen, dass die Anwendung eines in Vorlesung und Übung umfangreich behandelten und – im Hinblick auf die Beweisidee – geübten Themas eine große Hürde darstellt. Aufbauend hierauf muss überlegt werden, welche Konsequenzen für die Darbietung des Stoffs und für den Übungsbetrieb zu ziehen sind, ob die Thematisierung unmittelbarer Anwendungen der allgemein besprochenen (und bewiesenen) Regeln stattfinden sollte (oder gerade nicht?), und wie den – sich bereits in diesen zwei Beispielantworten andeutenden – Fehlkonzepten zu begegnen ist.

Im Bereich der allgemeinen Befragung deuten sich interessante Zusammenhänge zwischen verschiedenen Konstrukten an, die zukünftig genauer untersucht werden sollen. Dass Interesse und Leistung nicht bzw. nur gering miteinander korrelieren, deckt sich mit Ergebnissen anderer Forschungen. Starke positive Zusammenhänge zwischen Leistung, mathematischem Selbstkonzept und der Lernstrategie „Elaborieren“, und negative Korrelationen zwischen Leistung, Interesse an Mathematik, der Vorliebe für das

Memorieren und einer eher hohen Ängstlichkeit sind einerseits nicht völlig überraschend. Andererseits legen sie nahe, dass a) Lernende anhand solcher Merkmale genauer unterschieden und beschrieben werden sollten und dass b) verschiedene Bedürfnisse der Lernenden in Bezug auf ihre unterschiedlichen Einstellungen im Rahmen der Innovationen nicht außer Acht gelassen werden dürfen.

3. Folgerungen, Fazit, Ausblick

Im KLIMAGS-Projekt wurde ein umfangreiches Testinstrumentarium für das Fachwissen und zu Einstellungen von Grundschullehramtsstudierenden entwickelt. Die ersten quantitativen Ergebnisse belegen den Forschungs- und Entwicklungsbedarf in Bezug auf die universitären Lehrveranstaltungen. Doch neben der Bedeutung „guter Hochschullehre" wird auch deutlich, dass ein Problemfeld die sehr schwachen Vorleistungen der Studienanfänger sind, und dass Persönlichkeitsmerkmale der Studierenden erheblichen Einfluss auf die Leistungen haben. Somit sollten Innovationen nicht nur auf stoffdidaktische Überlegungen oder die Qualität von Lehr- und Übungsbetrieb abzielen, sondern auch auf die individuellen Strategien, Einstellungen, Ansichten und Haltungen.

Literatur

Blum, W. et al (2006). Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen Scriptor.

DMV, GDM & MNU (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Mitteilungen der DMV, 16, (149-159).

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastravridis: 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education. Athen: The Hellenic Mathematical Society, (115-124).

Pekrun, R., Julien, S., Zirngibl, A. , Blum, W. u. a. (2003). PALMA Skalenhandbuch Erhebungswelle II: Juli 2003. Universitäten München, Regensburg und Kassel (unveröffentlichter Projektantrag)

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.). (2006). PISA 2003. Dokumentation der Erhebungsinstrumente. Münster: Waxmann.

Rheinberg, F. & Wendland, M. (2000). Potsdamer-Motivations-Inventar für das Fach Mathematik. Universität Potsdam, Institut für Psychologie.

Schöne, C., Dickhäuser, O., Spinath, B. & Stiensmeier-Pelster, J. (2002). SESSKO – Skalen zur Erfassung des Schulischen Selbstkonzepts. Göttingen: Hogrefe.

Rebecca KRÖGER, Stephanie SCHULER, Gerald WITTMANN, Freiburg

Anschlussfähigkeit mathematikdidaktischer Überzeugungen von ErzieherInnen und Grundschullehrkräften

Der Elementar- und der Primarbereich werden vielfach als „zwei getrennte Welten“ (Kreid & Knoke 2011, S. 99) bezeichnet. Für die betreffenden Kinder kann dies beim Übergang zu Problemen führen (vgl. exemplarisch Faust et al. 2011), weshalb der *Anschlussfähigkeit von Kindergarten und Grundschule* besondere Bedeutung zukommt. Unterschiede zwischen den beiden Institutionen müssen gezielt gestaltet werden und sollten nicht das Ergebnis von Zufälligkeiten darstellen. Auch sollten sich die jeweiligen Professionen dieser Unterschiede bewusst sein, sie wahrnehmen und reflektieren, um die Kinder beim Übergang gezielt begleiten zu können.

Überzeugungen als Orientierungshilfen beeinflussen die Wahrnehmung und das Handeln von Erzieherinnen und Lehrkräften (Keller-Schneider 2011). Sowohl die Stabilität als auch die Inkonsistenz von Überzeugungen sind empirisch nachgewiesen (Thompson 1992).

Zur Anschlussfähigkeit der professionellen Überzeugungen von ErzieherInnen und Grundschullehrkräften gibt es bisher keine empirischen Studien aus dem deutschsprachigen Raum. Insbesondere die Erfassung mathematikbezogener professioneller Überzeugungen dieser beiden Zielgruppen stellt bis heute ein Forschungsdesiderat dar.

Forschungsvorhaben

Im Rahmen des Projektes *AnschlussM* soll die Anschlussfähigkeit der mathematikdidaktischen Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen als Bedingung der Vernetzung von Elementar- und Primarbereich untersucht werden. Dazu ist die Kombination mehrerer Perspektiven und Forschungsmethoden sowie die Verankerung im realen Alltagshandeln erforderlich.

Das Design folgt einem dreistufigen Verfahren. Methodisch wesentlich ist die Generierung der Items für die repräsentative Studie im Rahmen der Vorstudie in einem „bottom-up“-Prozess (Abb. 1).

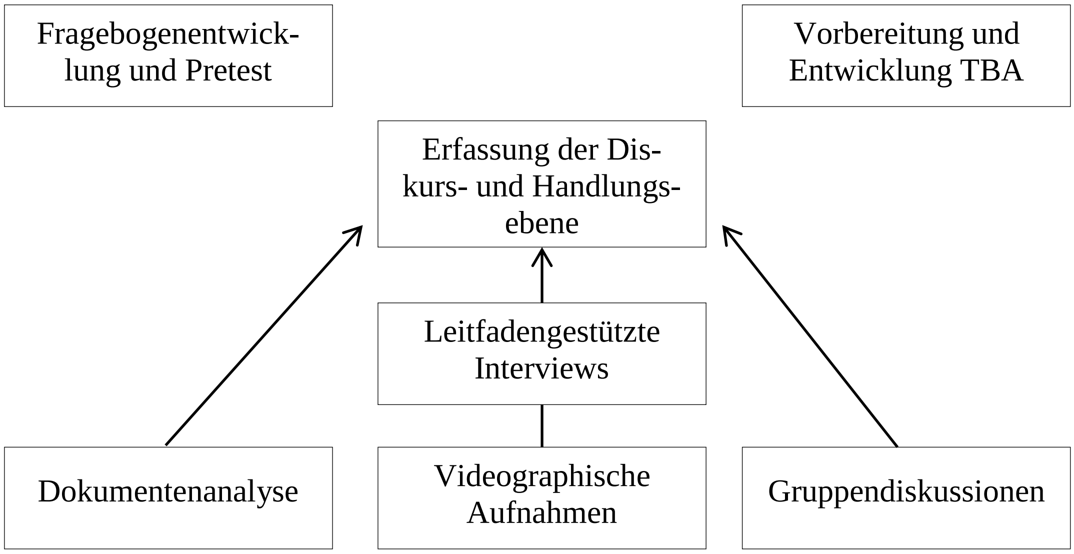


Abb. 1: Vorstudie zur Entwicklung von Skalen in einem „bottom-up"-Prozess

Vorbereitung der repräsentativen Erhebung

Die Analyse der Orientierungs- und Bildungspläne sowie der Materialien, die für Kindergärten und für den Anfangsunterricht in den Grundschulen Geltung beanspruchen bzw. eingesetzt werden, dient der Untersuchung der Anschlussfähigkeit auf curricularer Ebene.

Bisher wurden in fünf Kindergärten bzw. vier Grundschulen mathematische Angebote/Unterrichtsstunden videographiert und anschließend leitfadengestützten Interviews geführt, um fallstudienartig die Alltagspraxis zu erfassen und in den Forschungsprozess einzubringen. Die fachsprachlichen Strukturmerkmale des Alltagsdiskurses der Zielgruppe zu den fraglichen Themen, wurden in zwei Gruppendiskussionen erhoben. Die Transkripte werden jeweils inhaltsanalytisch ausgewertet.

Diese Vorstudie dient der Entwicklung zweier Befragungsinstrumente: Ein Fragbogen und einem dem TBA (Technology Based Assessment) zugeordnetem Verfahren.

Repräsentative Erhebung

Der entwickelte Fragebogen wird bei einer repräsentativen, randomisierten und nach wichtigen Merkmalsausprägungen geschichteten Stichprobe in Bremen und Baden-Württemberg eingesetzt. Die Fragebogenerhebung dient zur Entwicklung eines Kompetenzstrukturmodells. Sie erfasst unter anderem Motive, situatives Verständnis, mathematikdidaktische Überzeugungen und Praktiken sowie die Selbst- und Fremdwahrnehmung der Befragten in ihrer Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Kompetenz. Mit dem TBA können an einer repräsentativen Teilstichprobe aus der Gesamtstichprobe die zuvor per Fragebogen erhobenen mathematikdidaktischen Überzeugungen auf mathematikdidaktisch relevante und nicht relevante Situationen bezogen und ein generalisierter Handlungsbezug hergestellt werden.

Auswertung, Interpretation und kommunikative Validierung

Um die Zielstellung auch bei den theoretischen Vorarbeiten, den kategorialen und den Modell-Entwicklungen sowie bei den abschließenden Dateninterpretationen nicht aus den Augen zu verlieren, werden Vor-, Zwischen- und Endergebnisse in einem fortlaufenden Diskurs mit PädagogInnen aus dem Elementar- und Primarbereich kommunikativ validiert.

Erste Ergebnisse

Aus den Fallstudien und Gruppendiskussionen werden Ergebnisse zu exemplarisch zwei Teilfragen vorgestellt.

Was schätzen ErzieherInnen bzw. GrundschullehrerInnen für die mathematische Entwicklung der Kinder als relevant ein?

Die Aussagen der befragten ErzieherInnen bzw. LehrerInnen bezüglich wichtiger Kenntnisse für einen gelungen Start in die Schule lassen sich unterschiedlich deuten. Zum einen werden explizite Forderungen benannt, zum anderen können implizite Forderungen seitens der LehrerInnen ausgemacht werden. Die befragten LehrerInnen benennen verschiedene mathematische Kompetenzen als hilfreich, wenn diese bereits im Kindergarten vermittelt wurden. Dies sind vor allem das Zählen, Ziffernkenntnis, simultanes Anzahlerfassen von Mengen bis fünf sowie die Zuordnung von Zahlbildern und Zahlzeichen. Die befragten ErzieherInnen benennen weniger oft domänenspezifische Kompetenzen. Sie heben stärker hervor, dass sie ihre Aufgabe darin sehen, den Kindern „Spaß an den Zahlen zu vermitteln“ und „Neugierde zu wecken“ (ErzieherIn 2), welche von den LehrerInnen in der Schule weitergeführt werden sollte. Im Rahmen der Gruppendiskussionen nannten die anwesenden ErzieherInnen vielfach den Wunsch, die Schule möge das „aufgreifen, was den Kindern im Kindergarten vermittelt wurde“. Die Schule solle die Kinder nicht als tabula rasa sehen. In einem Interview wurde durch eine Lehrperson deutlich gemacht, dass die Arbeit des Kindergartens Auswirkungen auf das Handeln, die Gestaltung der ersten Schulwochen hat. Würden die Kinder in der Schule nicht zum ersten Mal mit Zahlen konfrontiert werden, so könnte man sich „den Vorspann bis Weihnachten sparen“ (LehrerIn 3).

Was tun ErzieherInnen bzw. GrundschullehrerInnen, um den Übergang vom Kindergarten in die Grundschule mathematikdidaktisch zu verbessern?

Zwischen den bisher befragten Professionen ErzieherInnen und LehrerInnen besteht Konsens hinsichtlich der Relevanz der Kooperation. Der Austausch wird jedoch durch Rahmenbedingungen erschwert, was auch auf beiden Seiten bedauert wird. Sowohl „runde Tische“, an welchen ErzieherInnen und LehrerInnen sich regelmäßig treffen, wechselseitige Hospitationen, die Ausweitung der Kooperation auf einen längeren Zeitraum der Kindergartenzeit als auch die Einbindung des gesamten Teams in die Kooperation, also die Aufhebung der Zuständigkeit auf nur die Kooperationskraft, sind Wünsche, welche die befragten Personen äußerten.

Literatur

Faust, G.; Wehner, F. & Kratzmann, J. (2011): Zum Stand der Kooperation von Kindergarten und Grundschule. Maßnahmen und Einstellungen der Beteiligten. In: Journal für Bildungsforschung Online, Jahrgang 3, Ausgabe 2, S. 38–61. Münster: Waxmann

Hacker, H. (1998): Vom Kindergarten zur Grundschule. Theorie und Praxis eines kindgerechten Übergangs. Bad Heilbrunn: Klinkhardt

Hellmich, F. (2007): Bedingungen anschlussfähiger Bildungsprozesse von Kindern beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. In: bildungsforschung, Jahrgang 4, Ausgabe 1.

Keller-Schneider, M. (2011): Lehrer/in werden – eine Entwicklungsaufgabe. Kompetenzentwicklung in der Auseinandersetzung mit Wissen und Überzeugungen. In: PADUA 6 (4), S. 6–14.

Kreid, B. & Knoke, A. (2011): Bildung gemeinsam gestalten – Kooperation von Kitas und Grundschulen begleiten und unterstützen. In: Kucharz, D.; Irion, T.; Reinhoffer, B. (Hrsg.): Grundlegende Bildung ohne Brüche. Jahrbuch Grundschulforschung Band 15, S. 99–110. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften

Thompson, A. (1992): Teachers’ Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In Grouws, D. A. (Hrsg.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, S. 127–146. New York: Macmillan

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wird mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung und des Europäischen Sozialfonds der Europäischen Union unter den Förderkennzeichen 01NV1025/1026 und 01NV1027/1028 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

Stefanie KUHLEMANN, Oldenburg

Auswirkungen mathematischer Kompetenzen von Lehramtsstudierenden auf deren Diagnose von Schülerdenkprozessen

Die Ergebnisse der COACTIV-Studie zeigen, dass es eine hohe Korrelation zwischen dem bei COACTIV erhobenen Fachwissen und dem erhobenen fachdidaktischen Wissen der Gymnasiallehrkräfte gibt und dass sich in den Analysen keinerlei positiver Zusammenhang zwischen Unterrichtserfahrung und Fachwissen bzw. fachdidaktischem Wissen ergab. Die Vermutung liegt nahe, dass dieses Fachwissen und fachdidaktische Wissen von Mathematiklehrkräften überwiegend in der Ausbildung erworben wurde (Krauss et al. 2008).

Die Standards der Lehrerbildung (KMK 2004) stellen das Diagnostizieren und Fördern als eigene Kompetenz heraus. Für zukünftige Lehrkräfte ist es bedeutend diagnostische Fähigkeiten zu erwerben, um „Schülerleistungen zu verstehen und einzuschätzen mit dem Ziel, angemessene pädagogische und didaktische Entscheidungen zu treffen.“ (Hußmann et al. 2007, S.1). Inwiefern bereitet das Mathematikstudium von Gymnasiallehrkräften auf mathematische Anforderungen in der Diagnose von Lösungsprozessen von Schülern vor?

1. Forschungsfrage

In einer qualitativen Studie mit Studierenden soll gegen Ende der ersten Phase der Lehramtsausbildung folgende Forschungsfrage untersucht werden: In welcher Beziehung stehen eigene Lösungsprozesse von Studierenden mit ihren Fähigkeiten Schülerdenkprozesse zu diagnostizieren? Die eigenen Lösungsprozesse der Studierenden werden hinsichtlich des Grundwissens und der mathematischen Tätigkeiten in Anlehnung an Lechner (2002) analysiert. Das Grundwissen beinhaltet das Wissen über mathematische Schulinhalte, welches zur Lösung der Untersuchungsaufgaben benötigt wird. Zu den mathematischen Tätigkeiten zählen heuristisch-experimentelles, darstellend-interpretatives, formal-operatives und kritisch-argumentatives Arbeiten (Lechner 2002). In der Untersuchung liegt der Fokus der Diagnose von Schülerdenkprozessen auf der Analyse von Lösungsprozessen in Schülereigenproduktionen[1].

[1] Bei den Schülereigenproduktionen handelt es sich um reale und fiktive Lösungen.

2. Untersuchungsdesign und Erhebung

Mit 19 Lehramtsstudierenden wurden leitfadengestützte Einzelinterviews durchgeführt. Bei den Studierenden handelt es sich um Gymnasiallehramtsstudierende im Fach Mathematik, die sich im Masterstudium befinden. Der Ablauf der Interviews gestaltete sich wie folgt: Zunächst sollten die Studierenden eine mathematische Aufgabe lösen, daran anschließend einen von ihnen vermuteten Gedankengang in einer Schülereigenproduktion zu der entsprechenden Aufgabe erläutern sowie den Schülern individuelle Rückmeldungen bzw. Hilfestellungen geben. Dieser Ablauf wurde insgesamt zu drei verschiedenen offenen Aufgaben, die mehrere Lösungsmöglichkeiten bieten, konzipiert. Es wird ein Aufgabenbeispiel aus der Untersuchung vorgestellt.

Aufgabe: Bestimme die Lösungsmenge von $\left|\begin{array}{rcr} x+y & = & 9 \\ x-2y & \leq & 0 \\ 10x+y & > & 9 \end{array}\right|$ *mit* $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Beschreibe dein Vorgehen und dokumentiere deine Lösung so genau wie möglich. Welche alternativen Lösungswege kennst du? Führe sie durch.

Für die Aufgabenbearbeitung werden Kenntnisse über die Bedeutung eines solchen Systems und der Lösungsmenge sowie über den Variablenbegriff benötigt. Je nach gewählter Lösungsstrategie ist weiteres Grundwissen, beispielsweise das Einsetzungsverfahren oder Kenntnisse über geometrische Veranschaulichungen, erforderlich. Ich möchte anhand der Schülereigenproduktion (s. Abb. 1) eine mögliche Lösung zu dieser Aufgabe darstellen.

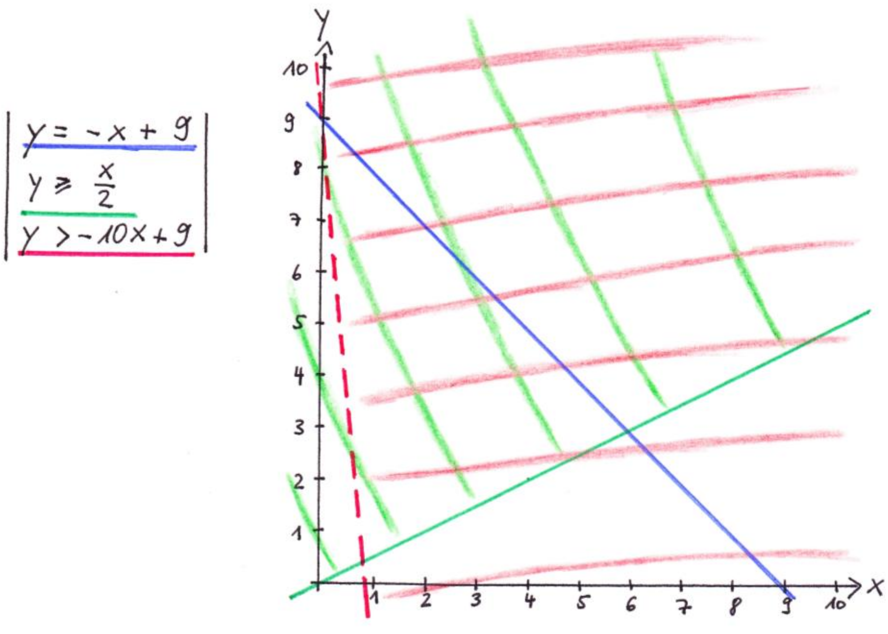


Abbildung 1: Schülereigenproduktion zur Untersuchungsaufgabe

Der Schülereigenproduktion kann entnommen werden, dass der Schüler die Ungleichungen und die Gleichung nach y richtig umgeformt hat. Im Koordinatensystem wurde graphisch dargestellt, welche Geraden und Flächen durch die einzelnen Ungleichungen sowie Gleichung beschrieben werden. Es ist wichtig zu bedenken, dass x und y aus dem Zahlenbereich der natürlichen Zahlen stammen sollen. Die Gerade $y = -10x + 9$ könnte aus dem Grund gestrichelt eingezeichnet sein, dass die Gerade nicht in dem Bereich der Menge liegt, welche zu $y > -10x + 9$ gehört. Die Lösungsmenge lässt sich anschaulich über den Schnitt der drei eingezeichneten Mengen bestimmen. Die folgenden sechs Wertepaare bilden die Lösungsmenge:

$\mathbb{L} = \{(1/8),(2/7),(3/6),(4/5),(5/4),(6/3)\}$.

3. Interpretation eines Fallbeispiels

Die schriftlichen Aufgabenbearbeitungen der Studierenden wurden hinsichtlich der mathematischen Tätigkeiten und dem aufgabenspezifischen Grundwissen sowie die schriftliche bzw. mündliche Diagnose der Schülerdenkprozesse hinsichtlich bestimmter Leitfragen analysiert. Zu den Leitfragen zählen: Welchen Gedankengang vermuten die Studierenden bei dem Schüler? Welches Verständnis haben die Studierenden von der Mathematik, die in der Schülerlösung steckt? Wie erschließen sich die Studierenden den Gedankengang? Die Leitfragen dienen dazu, der Hauptfrage nachzugehen.

Im Folgenden werden erste Ergebnisse an einem Fallbeispiel anhand dieser Leitfragen näher erläutert, indem die Ergebnisse eines Studierenden bezüglich seiner eigenen Lösung und seiner Diagnose des Schülerlösungsprozesses vorgestellt werden. Der Student hat in seiner eigenen Lösung mit dem Einsetzungsverfahren einen zielführenden Lösungsansatz gewählt. Seine Lösung deutet auf einen sicheren Umgang mit algebraischen Umformungen und im Lösen von Ungleichungen hin. In seinem Lösungsprozess zeigt er Stärken in formal-operativen Tätigkeiten. Er ermittelt zwei richtige Einschränkungen für y und für x (nämlich $0<x\leq 6$, $3\leq y<9$), allerdings benennt er die gefundenen Einschränkungen für die Variablen x und y getrennt voneinander, nicht in Kombination als Wertepaare oder mit Angabe der Bedingung $x + y = 9$. Eine Lösungsmenge kann der Student nach eigenen Angaben nicht aufschreiben.

In der Schülereigenproduktion werden die drei algebraischen Bedingungen in eine graphische Darstellung übersetzt. Zunächst gibt der Student an, die Schülereigenproduktion habe nichts mit der Lösungsmenge zu tun. In der graphischen Darstellung kann er die Lösungsidee nicht deuten. Er sucht das Problem bei sich und versucht sich den Gedankengang unter Zuhilfenahme seiner eigenen Lösung zu erschließen, jedoch scheitert er an diesem Versuch. Die Geraden und gekennzeichneten Flächen in der graphischen Darstellung der Schülereigenproduktion deutet er richtig. Seine gefundenen Bedingungen ($0<x\leq 6$, $3\leq y<9$) zeigt er in der Schülereigenproduktion auf den entsprechenden Achsen, aber er geht nicht auf eine Kombination der x- und y-Werte bezüglich der Lösungsmenge ein.

Insgesamt gelingt es ihm nicht nachzuvollziehen, wie die graphische Darstellung der Schülerin mit der Bestimmung der Lösungsmenge eines algebraischen Systems zusammenhängt und es gelingt ihm nicht die Schülereigenproduktion zu Ende zu führen. Während in seiner eigenen Lösung formal-operative Tätigkeiten dominieren und er keine weitere Lösungsmöglichkeit angeben kann, deutet er Teillösungsprozesse in der Schülereigenproduktion richtig. Den Gedankengang im Lösungsprozess des Schülers kann er sich auch unter Zuhilfenahme seiner eigenen Lösung nicht vollständig erschließen. In der Diagnose des Schülerlösungsprozesses zeigt er einen Schwachpunkt im Vernetzen, indem er die beiden Bereiche algebraisches Lösungsverfahren und graphische Bestimmung der Lösungsmenge eines algebraischen Systems nicht verknüpft.

4. Ausblick

Es lässt sich sagen, dass bei den Studierenden die Beziehungen zwischen eigenen Lösungsprozessen und ihren Fähigkeiten für die Diagnose von Schülerdenkprozessen unterschiedlich sind.

In weiteren Schritten der Auswertung der Daten aller Studierenden soll mit Hilfe einer strukturierenden Inhaltsanalyse eine Bildung von Gruppen anhand der Aufgabenbearbeitungen und der Diagnose der Schülerdenkprozesse vorgenommen werden.

Literatur

Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007): Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. In: PM Heft 15, 49. Jahrgang, S.1-8.

KMK (2004): Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. Beschluss der KMK vom 16.12.2004. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Standards-Lehrerbildung.pdf, letzter Zugriff: 24.01.2012.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M. & Kunter, M. (2008): Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und –Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. In: Journal für Mathematikdidaktik, 29 (3/4), S.223-258.

Lechner, J. (2002): Neue Perspektiven im Mathematikunterricht durch den Einsatz von Computeralgebrasystemen. Dissertation, Universität Wien.

Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Sichtweisen von Lernenden zu statistischer Variabilität – Vorstellungen von Grundschüler(inne)n, Realschüler(inne)n und Studierenden

Statistik stellt gleichsam unser Wahrnehmen unterstützende Modelle zur Verfügung, mit deren Hilfe Struktur, Information und Orientierung in Situationen gewonnen werden kann, in denen datenbasierte Beurteilungen und Entscheidungen erforderlich sind. Da solche Daten häufig von Schwankungen, zufälligen Messfehlern, Abweichungen und Unsicherheit, d.h. von statistischer Variabilität gekennzeichnet sind, kommt es bei Kompetenzen in diesem Bereich, wie sie etwa in Statistical Literacy-Ansätzen beschrieben werden, darauf an, mit statistischer Variabilität umgehen zu können (vgl. z.B. Watson & Callingham, 2003; Wild & Pfannkuch, 1999).

Hierbei dürften jenseits der Kompetenzmessung im Bereich von Statistical Literacy (Watson & Callingham, 2003; Kuntze et al., 2010) Überzeugungen und Sichtweisen von Lernenden zu statistischer Variabilität eine wesentliche Rolle spielen. So könnten „deterministische Sichtweisen" von Lernenden, wie sie etwa von Engel und Sedlmeier (2005) beobachtet wurden, vermutlich den Aufbau von Statistical Literacy behindern. Solche deterministischen Sichtweisen können darin bestehen, dass auch bei Phänomenen, die von statistischer Variabilität gekennzeichnet sind, statistische Schwankungen kaum adäquat wahrgenommen und eher nicht als zufällige Abweichungen interpretiert werden, was häufig zu wenig situationsangemessenen Erklärungen des Zustandekommens von Daten führt (vgl. Engel & Sedlmeier, 2005; Piaget & Inhelder, 1975; Green, 1990).

Sowohl in der Studie von Engel und Sedlmeier als auch in o. g. Vorgängerstudien wurden solche Sichtweisen von Lernenden vor allem auf der Basis einer einzigen Aufgabe untersucht. Diese Aufgabe (vgl. Aufgabe „Garagendach" in Abb. 1) ist an einen bestimmten Kontext gebunden, der aus einer bestimmten Perspektive betrachtet wird und bezieht sich – mathematisch gesehen – auf eine Verteilung entlang zweier kontinuierlicher Dimensionen, die durch die Einteilung in quadratische Teilfelder gewissermaßen bezüglich eines Teilaspekts der Betrachtung diskretisiert wurde. Die Sichtweisen von Lernenden, die bei der Beantwortung dieser Aufgabe in Erscheinung treten, beziehen sich also auf einen spezifischen gegebenen Aufgabenkontext. Es stellt sich daher die Frage, inwiefern die Ergebnisse dieser Studien von dieser speziellen Aufgabe abhängen. In der hier vorgestellten Studie wurde daher untersucht, welche Sichtweisen Lernende verschiedener Altersstufen in diesem Bereich haben, wobei die empirische Basis dadurch verbreitert wurde, dass die Sichtweisen von Grund- und Realschüler(inne)n sowie von Studierenden anhand mehrerer Items in ein Test- und Fragebogendesign einbezogen wurden.

Im Mittelpunkt des Untersuchungsinteresses standen daher die folgenden Fragestellungen: *Welche Sichtweisen zu statistischer Variabilität haben die befragten Schüler(innen) und Studierenden? Inwiefern sind diese Sichtweisen abhängig von verschiedenen, in Fragestellungen gegebenen Kontexten? Gibt es Unterschiede zwischen den betrachteten Sub-Stichproben?*

Die im Folgenden vorgestellten exemplarischen Ergebnisse betreffen die erste dieser Forschungsfragen.

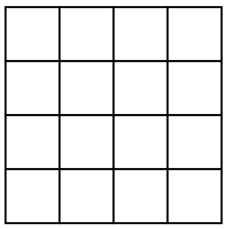
Untersuchungsdesign

Um die Forschungsfragen zu beantworten, wurden mehr als 350 Studierenden, mehr als 500 Realschüler(inne)n sowie mehr als 350 Grundschüler(inne)n ein Fragebogen vorgelegt, in dessen Rahmen vier Aufgaben zur Erhebung von Sichtweisen zu statistischer Variabilität enthalten waren. Zwei Beispielaufgaben sind in Abb. 1 wiedergegeben.

Garagendach:

Es beginnt zu regnen. 16 Regentropfen fallen auf das rechts dargestellte quadratische Flachdach aus 16 Platten.

Bitte zeichne ein, wie eine typische Verteilung der 16 Regentropfen auf dem Dach aussehen könnte.



Männer und Hüte:

An einem Regentag hat durchschnittlich jeder dritte Mann, der an einer Straßenecke vorbeiläuft, einen Hut auf. Zeichne bitte unten die Hüte ein, so wie du es in der Reihenfolge der Vorbeigelaufenen für typisch halten würdest!

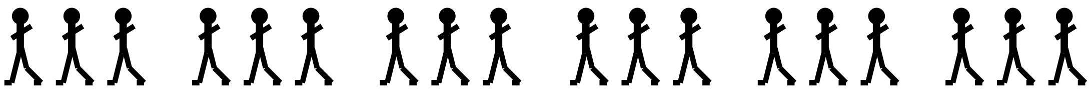


Abb. 1: Beispielaufgaben zur Erhebung von Sichtweisen zu statistischer Variabilität

Die Antworten der Befragten wurden nach drei Kategorien kodiert, um einen überblicksartigen Indikator für die Vorstellungen der Lernenden zur statistischen Variabilität zu erhalten. Diese Kategorisierung wird im nachfolgenden Abschnitt zusammen mit ausgewählten Ergebnissen vorgestellt.

Ausgewählte Ergebnisse

Da die befragten Schülerinnen und Schüler bzw. Studierenden die Fragen in einem relativ offenen Format beantworten konnten, wurden die Antworten nach einer Top-Down-Codierung bezüglich der in ihnen erkennbaren

Sichtweisen zur Variabilität einer von drei Kategorien zugeordnet. So wurden Antworten, wie sie in Abbildung 2 zusammengestellt sind, in der Kategorie „Nichtwahrnehmung von Variabilität“ zusammengefasst (Kategorie 1). Diese Antworten zeichneten sich dadurch aus, dass der Verteilung eine strenge Regelmäßigkeit oder Musterhaftigkeit zugrunde lag. So wird genau jedem dritten Mann ein Hut oder jedem Feld ein Tropfen – oft zentral – bzw. die Tropfen entsprechend eines vorbestimmten – nicht selten symmetrischen – Musters zugeordnet.

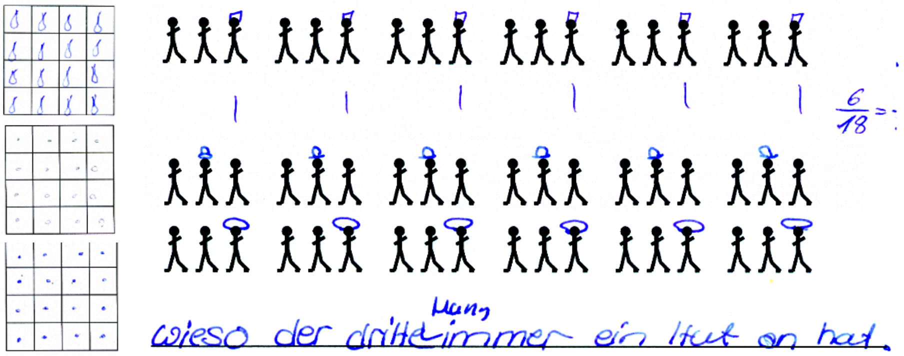


Abb. 2: Antworten von Realschüler(inne)n (9. Jahrgangsstufe) – Kategorie 1

Demgegenüber deuten die Antworten in Abbildung 3 auf eine zumindest teilweise Berücksichtigung statistischer Variabilität und entsprechende Sichtweisen hin (Kategorie 2). Bei diesen Beispielen wird statistische Variabilität dadurch zum Ausdruck gebracht, dass die Position der Tropfen innerhalb der Teilfelder variiert oder die Position des (einen) Hutes innerhalb einer Dreiergruppe einer unregelmäßigen Veränderung unterzogen wird.

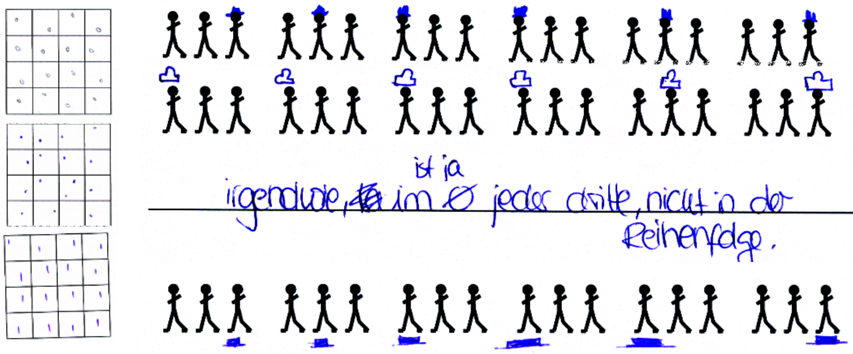


Abb. 3: Antworten von Realschüler(inne)n (9. Jahrgangsstufe) – Kategorie 2

Abb. 4 schließlich zeigt Antworten, die der Kategorie „entwickelte Sichtweisen zu statistischer Variabilität“ zugeordnet wurden. Hier wird von den Lernenden auch über Feldergrenzen oder Dreiergruppen hinweg das Phänomen der Variabilität zum Ausdruck gebracht. Dies kann auch bei teilweise symbolischen Antworten wie dem Eintragen von Zahlen in die Garagendachfelder beobachtet werden. Gelegentlich wurde die Variabilität auch einem von den Lernenden konstruierten Situationskontext zugeschrieben (z.B. „Mexikanische Band“ in Abb. 4).

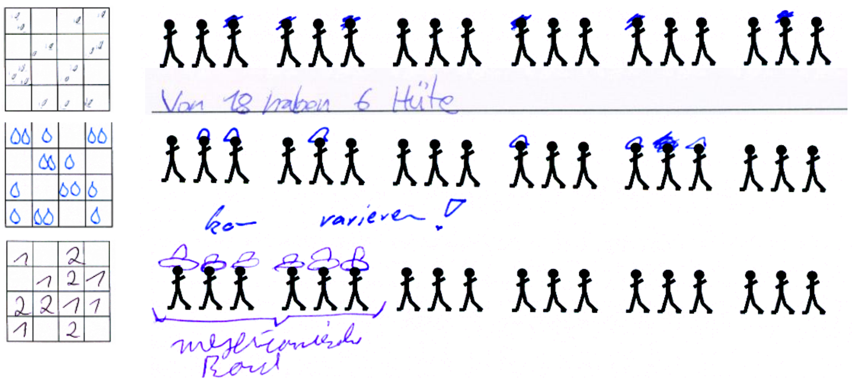


Abb. 4: Antworten von Realschüler(inne)n (9. Jahrgangsstufe) – Kategorie 3

Alle der durch die Kategorien 1 bis 3 beschriebenen Sichtweisen konnten jeweils in allen drei Substichproben beobachtet werden. Auch wenn Antworten von Schüler(inne)n in Kategorie 1 etwas häufiger vorkamen als Antworten der gleichen Kategorie bei den befragten Studierenden, waren deterministisch geprägte Antworten auch bei Studierenden nicht selten.

Diskussion

Die Ergebnisse zeigen u. a. Förderpotentiale bei der Entwicklung von Sichtweisen zu statistischer Variabilität auf. So könnten Lernanlässe, bei denen Kinder Phänomene und Situationskontexte mit Variabilität erleben und diskutieren können, bereits früh ansetzen und später wieder aufgegriffen werden. Damit verbunden werden könnte auch die Anschlussfrage nach dem Stellenwert naturwissenschaftlichen Erfahrungswissens zu Phänomenen und Experimenten, bei denen statistische Variabilität eine Rolle spielt.

Literatur

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2005). On middle-school students’ comprehension of randomness and chance variability in data. ZDM, 37(3), 168-177.

Green, D. (1990). A Longitudinal Study of Pupils’ Probability Concepts. Loughborough: Loughborough University.

Kuntze, S., Engel, J., Martignon, L. & Gundlach, M. (2010). Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – Empirical research in the project RIKO-STAT. In C. Reading (Ed.), Data and Context in Stat. Educ.: Towards an evidence-based society. Voorburg: ISI. [Refereed paper].

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). The Origin of the Idea on Chance in Children. London.

Watson, J., & Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. Statistics Education Research Journal, 2(2), 3-46.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999): Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 3, 223-266.

Grit KURTZMANN, Rostock

Entwicklung eines internetgestützten einjährigen Fortbildungskurses für MathematiklehrerInnen der Grundschule zur Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit"

Ziel des vorgestellten Projektes ist die Entwicklung eines überwiegend fachlich orientierten Fortbildungskurses für MathematiklehrerInnen der Grundschule. Dieser wird in einem Dissertationsprojekt mit der Methode der konstruktiven Entwicklungsforschung nach Zech/Wellenreuther (1992) entwickelt und erprobt. Der Fortbildungskurs wird zunächst inhaltlich erarbeitet und im Schuljahr 2012/13 erstmals mit Grundschullehrkräften erprobt.

1. Ausgangslage

Durch die extreme Heterogenität der Grundschullehrerausbildung in Deutschland mit 88 unterschiedlichen Studienmöglichkeiten erhalten nicht alle Lehrkräfte eine solide fachmathematische Ausbildung. Auch bei Studiengängen für Grundschullehrkräfte mit einer Mathematikausbildung sind vor allem fachliche Inhalte des Stoffgebietes Stochastik eher geringen bis gar nicht vertreten. Weiterhin ist festzustellen, dass die Grundschullehrer während der DDR Zeit in ihrem Studium keine Stochastik-Ausbildung erhielten. Dies ist für die Konzipierung einer Fortbildung schon relevant, wenn man bedenkt, dass das Durchschnittsalter der Lehrer zum Beispiel in Mecklenburg-Vorpommern 48 Jahre beträgt und somit die fortzubildenden Lehrkräfte ihr Studium in dieser Zeit absolvierten. Auch Beobachtungen der Mathematik-Fachberater in Mecklenburg-Vorpommern zeigten, dass dieses Stoffgebiet in der Sekundarstufe I eher eine untergeordnete Rolle hat. Manche Lehrkräfte unterrichten dieses oft am Ende eines Schuljahres oder als ein großes Gebiet in der 10. Klasse zur Vorbereitung auf die Prüfung der Mittleren Reife. Daraus ergibt sich die Vermutung, dass durch eine fachliche Unsicherheit der Lehrkräfte eine Abneigung bzw. ablehnende Haltung entstanden ist. Obwohl nach einer Studie von Martignon et.al (2005) von den befragten Lehrern eingeschätzt wurde, dass Schüler deutlich mehr Interesse, Aufmerksamkeit und Motivation zeigen als in anderen Bereichen der Mathematik, wird diese günstige Voraussetzung von Seiten der Lehrer für die Behandlung des Stoffgebietes kaum genutzt.

2. Fortbildungsmethode

Für die durchzuführende Fortbildung soll eine Methode genutzt werden, mit welcher seit 2006 erfolgreich in Mecklenburg-Vorpommern und Berlin mit Unterstützung durch das Projekt „Mathematik anders machen“ der Telekom Stiftung Lehrkräfte fortgebildet wurden. Die Lehrerfortbildung wurde für Lehrer der Orientierungsstufe konzipiert und basiert auf der an der Universität Rostock entwickelten Broschüre „Vorschläge und Erfahrungen zur Arbeit mit polyvalenten Aufgaben im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe“. Für die Fortbildung wurde die Internetplattform moodle benutzt. Innerhalb des Schuljahres fanden vier Arbeitstreffen statt. Auf diesen Präsenztreffen wurden verschiedene fachdidaktische Themen unter Einbeziehung der Einsatzmöglichkeiten der polyvalenten Aufgaben besprochen. Zwischen den Arbeitstreffen gab es drei Arbeitsphasen. In diesen Arbeitsphasen probierten die Lehrer die Aufgaben aus und diskutierten im Forum ihre Erfahrungen im Unterricht.

Für die zu entwickelnde Lehrerfortbildung soll diese sich als erfolgreich erwiesene Methode beibehalten werden. Dabei sollte das Folgende sich schon Bewährte beibehalten werden:

- ein begleitendes Material, in dem die Fortbildungsteilnehmer wichtige Inhalte nachlesen können, ohne aufwändige Literaturrecherche zu betreiben;
- die Verknüpfung fachdidaktischer Inhalte mit konkreten Unterrichtsanwendungen;
- Ausprobieren einzelner Aufgaben während der Arbeitsphasen.

Die neu zu entwickelnde Fortbildung wird überwiegend fachliche Inhalte enthalten, da damit die Voraussetzungen für eine sichere Vermittlung der Inhalte in der Schule geschaffen werden sollen. Natürlich ist es aber auch wichtig, die Umsetzung im Unterricht und damit die didaktische Reduktion zu besprechen. Aus diesem Grund wird das Material fachliche Grundlagen, Übungsaufgaben zum Festigen der Inhalte und Ideen für die didaktische Umsetzung beinhalten. In den Präsenztreffen werden fachliche Grundlagen vermittelt, die dann mit einem möglichen Unterrichtseinsatz besprochen werden. Die Lehrkräfte erhalten während der Arbeitsphasen die Möglichkeit, zum einen ihr erworbenes Wissen anhand von Übungsaufgaben zu festigen und zum anderen dieses auch in ihrer Klasse weiterzugeben. In einer Forumsdiskussion werden diese Erfahrungen miteinander diskutiert.

3. Ideen zum inhaltlichen Konzept

Für die Entwicklung des Fortbildungskonzeptes werden drei inhaltliche Ideen einfließen, die im Folgenden erklärt werden. Es sind zum Ersten die Zielkategorisierung nach dem Grad der Verfügbarkeit des Wissen und

Könnens, zum Zweiten die prototypische Betrachtungsweise und zum Dritten die Prozessbetrachtung zufälliger Erscheinungen. Zunächst muss für die Konzipierung eines Stochastiklehrgangs für Grundschullehrkräfte überlegt werden, welche fachlichen Inhalte relevant sind. Dabei sind die Empfehlungen von DMV, GDM und MNU 2008 „Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik“ und das Konzeptpapier des AK Lehrerbildung der GDM – Mindeststandards für die mathematische und mathematikdidaktische Inhalte für Grundschullehramts-Studiengänge wichtige Arbeitsgrundlagen. In dem Kurs soll das zu erwerbende Wissen der Grundschullehrer in die nach Sill kategorisieren Ziele nach Art der Ausprägung der Qualitätsparameter des Wissens und Könnens insbesondere nach Grad der Verfügbarkeit eingeteilt werden. Das sind:

- Sicheres Wissen und Können: jederzeit ohne Reaktivierung mit hoher Wahrscheinlichkeit verfügbar,
- Reaktivierbares Wissen und Können: nach Reaktivierung auf schon einmal vorhandenen Niveau verfügbar,
- Exemplarisches Wissen und Können: exemplarische Kenntnisse, Einsichten, Vorstellungen und Haltungen, die nicht immer bewusst sein müssen, aber in bestimmten Situationen im Verhalten erkennbar sind.

(vgl. Sill (2007), S. 132-133)

Hier kann schon erwähnt werden, dass die Inhalte der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich mit den fachbezogenen mathematischen Kompetenzen mit der Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit und den zur Stochastik gehörenden Inhalte der Lehrpläne des jeweiligen Bundeslandes auf jeden Fall zum Sicheren Wissen und Können der Lehrkräfte gehören muss.

Eine weitere wichtige Idee ist die prototypische Betrachtungsweise von Begriffen. Wenn für die Einführung von Begriffen besondere Erlebnisse geschaffen werden, verbleiben diese oft schneller im Gedächtnis. In Verbindung mit diesem Erlebnis kann der Begriff schneller abgerufen werden. Ein Beispiel soll mit einer diesbezüglich sehr erfolgreichen Aufgabe aus der bereits erwähnten Fortbildung gegeben werden:

Aufgabe: Bauer Piepenbrink möchte mit 16 Zaunfeldern einen neuen Hühnerhof einzäunen. Jedes Zaunfeld ist 1 m lang. Welche Form kann der Hühnerhof haben? (Hellmig et.al. (2010), S. 67)

Durch diese Aufgabe können sich die Schüler den Begriff Umfang sehr anschaulich und ohne eine Formel erarbeiten. Es ist nur die Länge des Randes einer Figur für die Umfangsbestimmung entscheidend. Der Schüler erinnert sich später an den Bauer Piepenbrink und weiß sofort, dass er für die Umfangsberechnung nur die Länge alle Seiten addieren muss.

Eine dritte und für die Gesamtkonzeption und Auswahl der Aufgaben entscheidende Rolle ist die Betrachtungsweise zufälliger Erscheinungen. Dabei geht es darum, dass nicht ausschließlich die eingetretenen oder möglicherweise eintretenden Ergebnisse betrachtet werden, sondern der Prozess untersucht wird, in dessen Resultat die Ergebnisse eintreten können. Dieser gesamte Prozess wird als zufälliger Vorgang bezeichnet. (vgl. Sill (2010), S. 8) Ziel dieser Betrachtungsweise ist es, dass der Zufallsbegriff durch eine weitere Betrachtungsweise ergänzt wird, dass Teilgebiete der Stochastik durch eine gemeinsame Begriffsbildung und Betrachtungsweise enger miteinander verbunden und das der enge Zusammenhang von stochastischen Betrachtungen zu naturwissenschaftlichen Untersuchungen verdeutlicht wird. Für den Einsatz dieser Betrachtungsweise gerade für die Fortbildung der Grundschullehrkräfte spricht, dass hier auch in Hinblick auf die weitere Vermittlung im Unterricht reale Erscheinungen in der Umwelt in den Vordergrund gerückt werden. Die Beschränkung auf Glücksräder und Würfeln im Unterricht wird durchbrochen. Die Lehrkräfte können zufällige Erscheinungen auf dem täglichen Leben der Kinder für den Einsatz im Unterricht nutzen.

Literatur

DMV, GDM und MNU (2008): Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik.

Hellmig, L., Hoffmann, S., Kleinschmidt, E., Kowaleczko, E., Kurtzmann, G., Leye, D., Lindstädt, M., Roscher, M., Sill, H.-D. (2010): Vorschläge und Erfahrungen zur Arbeit mit polyvalenten Aufgaben im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe,; Institut für Qualitätsentwicklung Mecklenburg-Vorpommern, (3. Auflage).

KMK (Hrsg) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich: Luchter-hand.

Martignon, L.; Wassner, C. (2005): Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 8 (2), S. 202-222.

Sill, H. D.; Sikora, C. (2007): Leistungserhebungen im Mathematikunterricht-Theoretische und empirische Studien. In: Hildesheim: Franzbecker.

Sill, H. D.: Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen. In: Stochastik in der Schule 30 2010 (Heft 3), S. 2-13.

Zech, F.; Wellenreuther, M. (1992): Konstruktive Entwicklungsforschung. eine zentrale Aufgabe der Mathematikdidaktik. In: J. Math.-Didakt 13 (2), S. 143-198.