Beiträge zum Mathematikunterricht 2012

VORTRÄGE AUF DER 46. TAGUNG FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
VOM 05.03.2012 BIS 09.03.2012
IN WEINGARTEN

FÜR DIE GDM HERAUSGEGEBEN VON
MATTHIAS LUDWIG UND MICHAEL KLEINE

BAND 2

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

ISBN 978-3-942197-18-2 (Band 2 von 2)

Inhaltsverzeichnis – Band 2: S. 513 - 1026

Teil 4: Poster

Teil 5: Arbeitskreise der GDM

Teil 6: Sektionsbeschreibungen

Inhaltsverzeichnis – Band 1: S. 1 - 512

Teil 1: Einführungen und Hauptvorträge

Teil 2: Förderpreis-Vortrag

Teil 3: Einzelbeiträge

Ana KUZLE, Paderborn

Preservice Teachers' Patterns of Metacognitive Behavior During Mathematics Problem Solving in a Dynamic Geometry Environment

1. Introduction

The educational community holds a general acceptance of the important role metacognition and technology play in problem solving. Even though a plethora of research reported on the role of metacognition in problem solving (e.g., Garofalo & Lester, 1985; Schoenfeld, 1981, 1985) and on the importance of technology as a tool for mathematics problem solving (e.g., Fey, Hollenbeck, & Wray, 2010; NCTM, 2005; J. W. Wilson, Fernandez, & Hadaway, 1993), no study addressed the impact of working in dynamic geometry environments, such as the Geometer's Sketchpad, on student mathematics problem solving. New technological tools are becoming available and continually transform mathematical classrooms (Fey et al., 2010; NCTM, 2005), however, little is known about students' mathematical achievement with dynamic technology tools, problem solving schemas and mental models when solving nonroutine geometry problems.

In this paper I examined the metacognitive processes of two preservice teachers when solving nonroutine geometry problems in a dynamic geometry environment, namely the Geometer's Sketchpad. The main purpose of the study was to uncover and investigate patterns of metacognitive processes two preservice teachers exhibited and to understand how and why observed metacognitive processes emerged when problem solving in dynamic geometry environment. Moreover, this study sought to understand student perceptions about the importance of the Geometer's Sketchpad when faced with nonroutine geometry problems.

2. Theoretical Framework

For the purpose of uncovering and investigating patterns of metacognitive processes two preservice teachers exhibited when problem solving, a problem solving model adapted from Pólya (1945/1973), and Schoenfeld (1981, 1985) was used. In order to better understand the nature and interplay of the cognitive and metacognitive processes within each of the episodes, the nature of participants' answers with respect to their metacognitive awareness, metacognitive evaluation and metacognitive regulation (J. Wilson & Clarke, 2004) was taken into account. The resulting model was characterized by the following episodes: reading the problem, understanding the problem, analyzing what needs to be done, exploring different possibilities, planning the best solution, implementing the plan, and verifying the answer is a solution, together with junctions between episodes (transition). Artigue's (2002) instrumental approach was used to uncover what circumstances, interactions and situations promoted metacognitive behaviors when problem solving using the Geometer's Sketchpad; together describing the effects of tool use on the participant's activity (instrumentation) and transformation of the tool to fit participant's activity (instrumentalisation).

3. Methodology

Case studies were conducted of two mathematics education preservice teachers, from the mathematics education program at a large southeastern university in the United States, who had previously completed a semester of college geometry and had prior experience working in Geometer's Sketchpad. Data sources for this study consisted of different verbal reports (think aloud protocol, concurrent verbalization methods, such as prompts and probing), individual interviews after each problem-solving session, students' written solutions, researcher's observation notes, video files of problem solving sessions and a final interview. Each participant solved individually one nonroutine geometry problem per problem solving session. Three types of problems were used for this study: construction, applied, and exploration problem; that allowed exhibiting different mathematical thinking processes, both cognitive and metacognitive, multiple solution paths, the use of different strategies and different uses of the Geometer's Sketchpad using a variety of available functions. All collected data was analyzed using constant comparative method for both the within- and cross-case analysis.

4. Findings of the Study

Problem solving of the two participants was described through identifying the metacognitive processes within each problem-solving episode, and associating them with the Geometer's Sketchpad use. During the reading, understanding, and analysis episodes, the participants engaged in monitoring behaviors such as sense making, drawing a diagram, and allocating potential resources and approaches that helped make productive decisions. During the exploring, planning, implementation, and verification episodes, the participants made decisions to access and consider knowledge and strategies, make and test conjectures, monitor the progress, and assess the productivity of activities and strategies and the correctness of an answer. With respect to metacognitive processes within each of the episodes, it was evident that awareness of one's knowledge triggered selective attention, evaluation of one's thinking helped better planning for effective solution approaches, and regulation of one's thinking helped monitor progress, select appropriate problem solving strategies, and regulate missteps. Geometer's Sketchpad played an important role in supporting these metacognitive processes; it appeared to be integrated into the problem solving processes and strategies (trial-and-error, bottom-up) used by the participants. Both participants shared belief that Geometer's Sketchpad was important and useful tool during problem solving centering around these qualities: problem solving activities and processes, visualization, speed, and accuracy. For instance, it helped explore, gather information, experiment, conjecture, better understand the problem, relearn mathematical concepts, aided attaining accurate visual input and "fitting" all the pieces together, and triggered possible solution possibilities. Hence, Geometer's Sketchpad proved to be an important resource when working on nonroutine problems supporting flexibility in thinking, transfer of mathematical knowledge to unfamiliar situations and extension of previous knowledge.

The findings furthermore showed that substantial mathematical knowledge, prior problem solving experience, reliance on the use of technology, use of metacognitive questions, and affective behaviors, such as perseverance and frustration were related to participants' success when problem solving. The findings of this study suggest that effective management of negative affective behaviors and the presence of positive affective behaviors, such as perseverance were important factors contributing to successful problem solving.

In summary, the effectiveness of solution approaches was dependent on the presence of managerial decisions. Cognitive problem-solving actions not accompanied by appropriate metacognitive monitoring actions appeared to lead to unproductive efforts. Redirection and reorganizing of thinking in productive directions occurred when metacognitive actions guided the thinking and when affective behaviors were controlled. Hence, productive problem solving in a technology environment depends on factors, such as well-connected mathematical knowledge, metacognitive and reflective processes, generative knowledge of a DGE, and regulation of affective behaviors.

5. Implications

The findings of this study may be applied to the development of teaching materials for methods and problem solving courses to help consolidate preservice teachers' problem solving abilities and skills and to facilitate an understanding of their students' metacognitive activity. On the other hand, taking into consideration the influence of an increasingly global and technological society on teaching practices, teachers need to become aware of the pedagogical and cognitive implications of technology and be able to take advantage of technology as a powerful and engaging teaching tool. The opportunity to experience genuine problem solving, reflect on their metacognitive behaviors that are consistent with the use of the Geometer's Sketchpad, discuss curricular, pedagogical, and learning issues with respect to that mission in variety of contexts, and identify the possible effects they have on mathematical problem solving, teaching and learning is powerful.

References

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialects between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245–274.

Fey, J. T., Hollenbeck, R. M., & Wray, J. A. (2010). Technology and the mathematics curriculum. In B. J. Reys, R. E. Reys, & R. Rubenstein (Eds.), *Mathematics curriculum: Issues, trends, and future directions* (pp. 41–49). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 163–176.

National Council of Teachers of Mathematics. (2005). *Technology-supported mathematics learning environments*. Reston, VA: Author.

Pólya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press. (Original work published in 1945).

Schoenfeld, A. H. (1981, April). *Episodes and executive decisions in mathematical problem solving.* Paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association, Los Angeles, CA.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Wilson, J., & Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal, 16*(2), 25–48.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57–77). New York: Macmillan.

Friedhelm KÄPNICK, Münster

Intuitive Theoriekonstrukte mathematisch begabter Vor- und Grundschulkinder

Im Ergebnis umfangreicher Literaturrecherchen verstehe ich unter Intuitionen spontane, größtenteils unbewusst ablaufende geistige Prozesse, die vom jeweiligen Vorwissen und von Gefühlen beeinflusst werden. Sie sind weitestgehend nicht an verbale Sprache gebunden, sondern durch „Bildwelten" oder Symbolhaftem geprägt und sie spielen eine große Bedeutung beim Gewinnen neuer Erkenntnisse, ebenso beim Bewerten von Sachverhalten und beim Treffen von Entscheidungen. Als Zwischenfazit meiner bisherigen Untersuchungen lässt sich bzgl. der Bedeutung von Intuitionen für mathematisches Tätigsein einschätzen, dass Intuitionen generell ein wichtiger und ein prägender Aspekt produktiven mathematischen Tätigseins sind und dass es diesbezüglich keine prinzipiellen Unterschiede zwischen der Entdeckertätigkeit von Kindern und der von Wissenschaftlern gibt. Auffällig ist insbesondere, dass Intuitionen bei kleinen wie bei großen Matheassen in verschiedenen Problemlösephasen auftreten und dass sich Problemlöseabläufe in beiden Gruppierungen ähneln.

Erscheinungsformen von Intuitionen können in den Problemphasen sein:

- ein sinnlich-emotionales und ganzheitlich-komplexes Erfassen einer Problemsituation,
- eine plötzliche, mitunter vage Eingebung einer Lösungsidee,
- eine bruchstückhafte oder diffuse Darstellung, Begründung bzw. Erklärung der Lösung einer Problemaufgabe,
- ein auf subjektiven Erfahrungen und bisherigem Wissen basierendes Theoriekonstrukt (Festlegung von Begriffsinhalten, –wörtern, Erklärung von Zusammenhängen, Entwicklung von Begriffssystemen, …).

Hinsichtlich der drei erstgenannten Erscheinungsformen habe ich bereits Untersuchungsergebnisse publiziert (vgl. Käpnick 2010). Im Fokus dieses Beitrages steht der letztgenannte Aspekt.

1. Beispiele für intuitive Theoriekonstrukte von Kindern

Folgende authentische Beispiele können intuitive Theoriekonstrukte mathematisch begabter Vor- und Grundschulkinder verdeutlichen:

- Helen (5 Jahre) kennt die wesentlichen Merkmale eines Quadrats und eines Rechtecks. Sie kann diese Formen in der Umwelt auch souverän identifizieren und mit dem Nennen der jeweiligen Merkmale ihre Zuordnungen begründen. Dass jedes Quadrat zugleich ein Rechteck ist, erfasst Helen aber noch nicht – trotz vieler Impulse unsererseits.

- Julian (6 Jahre) erkennt den Unterschied zwischen einem Rechteck und einem Quader: „*Das ist so eine flache Fläche* (Julian zeigt auf ein Rechteck.) *und das hier, das ist höher.*“ (Julian zeigt auf den Quader.) Als Begriffswort für Quader schlägt er vor: „*Hochrechteck.*“
- Beim Philosophieren mit mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern antwortete auf die Frage, woher die Zahlen stammen, Weng: „*Als die Welt erschaffen wurde, waren die Zahlen schon da.*“ Patrick vertrat dagegen die Position: „*Die Zahlen hat Gott erfunden, das Rechnen die Menschen und die Lehrer leben, um den Kindern das Rechnen zu übertragen.*“ Lucca: glaubt jedoch, „*dass sich der erste Mensch die Zahlen selbst ausgedacht hat.*“ Dem stimmt Tim zu und ergänzt: „*Aber irgendwann haben andere Menschen dann die Minuszahlen erfunden.*“
- Finn (9 Jahre) ist fasziniert von „unendlich“ in der Mathematik. Wie seine gleichaltrigen Freunde versteht er hierunter: „*Unendlich ist eigentlich keine richtige Zahl. Es ist nur so, dass nach einer Zahl immer noch eine neue kommt.*“ Unsere Versuche, den kleinen Matheassen „unendlich“ am Beispiel des berühmten kosmischen Hotels mit unendlich vielen Zimmern, einer Endlos-Figur oder des Wettlaufs zwischen Achill und seiner Schildkröte zu erklären, scheiterten. Die Kinder blieben bei ihrem intuitiven Begriffsverständnis.
- Marcel (9 Jahre) entwickelte für das Erkunden aller möglichen Lagebeziehungen von vier Geraden in der Ebene ein sehr abstraktes Lösungsmuster, das systemhaft, aber fehlerhaft war. Den „Fehler“ sah er aber nicht ein. Er war von seinem „System“ überzeugt. Erst zwei Jahre später erkannte er selbst seinen Systemfehler und akzeptierte ihn.

2. Erklärungsansätze für intuitive Theoriekonstrukte von Kindern

Für das Phänomen der intuitiven Theoriekonstrukte von Kindern gibt es in verschiedenen Bezugsdisziplinen Erklärungsansätze. So wird in der Entwicklungspsychologie der Ansatz der intuitiven Alltagstheorien vertreten, wonach (Vorschul-)Kinder sich „intuitive Alltagstheorien“ aneignen, die sich oft von denen der Erwachsenen unterscheiden. Das Wissen der Kinder ist theorieähnlich in verschiedenen Wissensbereichen organisiert und diese sind wiederum in zusammenhängende Erklärungssysteme eingebettet. Die Kausalerklärungen innerhalb dieses Theoriesystems sind bereichsspezifisch. Kinder haben z.B. andere Erklärungen für menschliches Verhalten als für naturwissenschaftliche Zusammenhänge (vgl. Sodian 2002).

Ein weiterer passender Erklärungsansatz ist aus lernpsychologischer Perspektive der „konstruktivistische Lernbegriff", wonach Lernen als ein individuell geprägter aktiv-konstruktiver Prozess verstanden wird, der von subjektiven Erfahrungsbereichen, ebenso von Gefühlen beeinflusst wird. Diese Auffassung stimmt mit Selbstreflexionen berühmter Mathematiker und Naturwissenschaftler überein, in denen zudem die große Bedeutung von Intuitionen für die Forschertätigkeit herausgestellt wird. Hadamard berichtet z.B., dass er in „nonverbalen Konzepten" denke und anschließend Schwierigkeiten habe, seine Gedanken in Worte zu fassen. Von Einstein stammt das Zitat: „*Was Sie volles Bewusstsein nennen, das ist, wie mir scheint ein Grenzfall, der nie erreicht werden kann. Das scheint mit der Tatsache zusammenzuhängen, die man Enge des Bewusstseins nennt.*"(Ruelle 2007, S. 117). Demgemäß gibt Käpnick in seinem Modell zur Kennzeichnung mathematisch begabter Grundschulkinder auch „mathematische Sensibilität" als ein wesentliches Merkmal an und zählt hierzu intuitive Problemlösungen, die Kinder „fühlen" und als vielfältige Bildwelten wahrnehmen, die sie aber oft nicht mit Worten erklären können (vgl. Käpnick 1998). Solche geometrisch-bildhaften Repräsentationen können auch in neuropsychologischen Untersuchungen nachgewiesen werden. So aktivieren mathematisch Begabte beim Problembearbeiten (vielfach innerhalb weniger Sekunden nach dem Verstehen des Sachverhaltes) jene Hirnaktivitäten, die für eine geometrisch-bildhafte und eine arithmetisch-algebraische Darstellung verantwortlich gemacht werden (vgl. Fritzlar, Heinrich 2010).

3. Konstruktiver Umgang mit intuitiven Theorien von Kindern

Viele intuitive Theoriekonstrukte zu mathematischen Themen von Kindern und Erwachsenen sind ähnlich und bereits Vorschulkinder sind zum kausalen Denken fähig. Es fehlt ihnen aber oft bereichsspezifisches Wissen für korrekte Erklärungen. Bisherige empirische Befunde deuten darauf hin, dass Kinder in derartigen Fällen ihr natürlich entwickeltes System von Überzeugungen nicht punktuell durch einzelne Korrekturen verändern. Stattdessen verwenden sie einen Interpretationsrahmen, den sie auf neue Informationen anwenden. Die Veränderung dieses Rahmens ist ein langwieriger Prozess, der oft mehrere Jahre dauert. Eine Erklärung für solche Veränderungen wird darin gesehen, dass im Verlauf der Entwicklung zentrale Begriffe ihre Bedeutung verändern und dadurch eine Wandlung in der intuitiven Theorie stattfindet. Die Vertreter intuitiver Theorien gehen davon aus, dass sich in einem Spezialbereich ein derartiger Bedeutungswandel erst in vielen verschiedenen Schritten eines individuellen Verstehensprozesses vollzieht (vgl. Sodian 2002). Es handelt sich also um alternative Denkweisen und nicht um einzelne, faktische „Fehler". Eine Korrektur ist nur möglich, wenn das Gesamtsystem verändert wird. Der Wandel von Rahmentheorien vollzieht meist sich langsam und ist durch Instruktion nicht direkt bzw. nicht leicht zu erreichen. Der „Schlüssel" zur Korrektur intuitiver Theorien von Kindern besteht darin, diese zu verstehen und mit den Kindern gemeinsam in der Interaktion neues Wissen zu konstruieren, zu vertiefen und zu verändern, statt sie zu „instruieren".

4. Hypothesen zum intuitiven Theorieerwerbs von (mathematisch begabten) Vor- und Grundschulkindern

- Je jünger, je unerfahrener und unwissender Kinder sind, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kinder „fehlerhafte" intuitive Theorien entwickeln und dass sie auf diesen beharren.
- Es gibt intuitive („fehlerhafte") Theorien, die relativ schnell überwunden werden können, aber auch „fehlerhafte" Theorien, die sich über einen längeren Zeitraum halten (weil Kinder kein Verständnis, oft gepaart mit mangelhafter Motivation, dafür entwickeln können, sich neue, andersartige und korrektere Theorien zu erschließen). Ein Beispiel hierfür ist das intuitive Verständnis der meisten Grundschulkinder von „unendlich" (vgl. Pkt. 1).
- Intuitive Theorien entwickeln nicht nur (mathematisch begabte) Vorschul- und Grundschulkinder, sondern generell Kinder und darüber hinaus Jugendliche und Erwachsene – unabhängig vom Alter und vom jeweiligen Wissensstand. Somit scheint intuitive Theoriebildung eine allgemeine und stetige Begleiterscheinung des Erkenntnisstrebens von Menschen zu sein (vgl. Zitat von Einstein im Pkt. 2).

Literatur

Fritzlar, T.; Heinrich, F. (2010): Doppelrepräsentation und mathematische Begabung im Grundschulalter – Theoretische Aspekte und praktische Erfahrungen. In: Heinrich, F. & Fritzlar, T. (Hrsg.): Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern (Hrsg. von F. Heinrich und T. Fritzlar). Offenburg: Mildenberger, 25-44

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder (Hrsg. von A. Pehnke). - Frankfurt a. M., Berlin, Bern, New York, Paris, Wien: Verl. Peter Lang

Käpnick, F. (2010): Intuitionen – ein häufiges Phänomen beim Problemlösen mathematisch begabter Grundschulkinder. In: In: Heinrich, F. & Fritzlar, T. (Hrsg.): Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern (Hrsg. von F. Heinrich und T. Fritzlar). Offenburg: Mildenberger, 77-93

Ruelle, D. (2007): Wie Mathematiker ticken. – Heidelberg, London, New York: Springer Verl.

Sodian, B. (2002): Entwicklung bereichsspezifischen Wissens. In: Oerter, R.; Montada, L. (Hrsg.): Weinheim, Basel: Entwicklungspsychologie, Beltz, 443-468

Henning KÖRNER, Oldenburg

Praxisphasen innerhalb von BA/MA, was und wie? – Ein Blick aus der 2. Phase

Im Rahmen des Umbaus des Lehramtstudiums auf BA/MA gewinnnen verlängerte Praxisphasen zunehmend an Bedeutung (z.B. Praxissemester in NRW) und gleichzeitig wird die 2. Phase (Referendariat) auf maximal 1,5 Jahre verkürzt. Es ist davon auszugehen, dass die Zweiphasigkeit als sinnvolles Grundprinzip der Lehrerausbildung erhalten bleibt, aber gleichzeitig die Zusammenarbeit der beteiligten Institutionen mit einhergehender teilweisen Verlagerung von Aufgabenteilen stattfinden wird und muss. Damit ergibt sich durchaus die Chance, lange geforderte inhaltliche Verzahnungen der beiden Phasen zu verwirklichen. Dies betrifft auch die mögliche Verbesserung der Kommunikationsstrukturen zwischen den unterschiedlichen ‚Milieus' Universität, Studiensemniar und Schule. Dazu bedarf es aber einer vorgängigen inhaltlichen Analyse und konzeptionellen Arbeit, Handlungszwang ergibt sich schon daraus, dass im Referendariat inzwischen durchweg sehr früh recht viel eigenverantwortlicher Unterricht gegeben werden muss und die zweite Staatsexamensarbeit entweder wegfällt oder als Hausarbeit sehr stark gekürzt wird. Auf der Seite der Universität sind mindestens kapazitäre Mängel massiv festzustellen.

Im Folgenden wird versucht eine inhaltliche Strukturierung eines Praxissemesters vorzunehmen, die zunächst Aspekte berücksichtigt, die aus der Sicht eines Ausbilders in der 2.Phase eine wünschenswerte Voraussetzung für eine anschlussfähige weitere Ausbildung im Referendariat sind, aber natürlich zunächst nur holzschnittartig Eckpunkte markieren kann. Es sind auch die je spezifischen institutionellen Rahmenbedingungen (Universität, Studienseminar, Schule) ebenso zu berücksichtigen und möglichst produktiv zu integrieren wie professionsbezogene Kompetenzen auf der jeweiligen Ausbilderseite. Daraus folgt unmittelbar, dass beide theoretisch möglichen Umsetzungen in Bezug auf die gegebene Situation, nämlich ein Vorziehen eines halben Jahres Referendariat einerseits oder ein unstrukturiertes Verlängern gängiger Fachpraktika anderseits keine gewinnbringende Lösung sein können.

Neben den inhaltlichen Aspekten, die das professionelle Wissen und Handeln betreffen, sollte eine vorgezogene, verlängerte Praxisphase es den Studierenden auch ermöglichen, ihre individuell wahrgenommene Eignung zum Lehrerberuf zu erleben und zu reflektieren.

Viel eigenes Unterrichten ist kein Gütekriterium für Praxisphasen! Im Gegenteil: Die Gefahr der Verfestigung und Reduktion auf eigene Schul- und

Universitätssozialisation hat ein hohes Gefahrenpotential. Es wird darum gehen, in mehr laborartigen Situationen wichtige Grunderfahrungen zu sammeln und diese zu entsprechendem Wissen auszubauen, in der Hoffnung, dass dies im weiteren Verlauf der Ausbildung (Referendariat) dann höhere Handlungssicherheit schafft und eine verstärkte Konzentration auf das dann mehr ‚ganzheitliche' Unterrichten ermöglicht.

Die folgende Tabelle zeigt im Überblick drei Schwerpunkte der inhaltlichen Gestaltung, die beide Funktionen der Praxisphase (Professionswissen, personale Eignung) berücksichtigen. In der mittleren Spalte soll die unterschiedliche Schriftgröße ungefähr den quantitativen und qualitativen Anteil der genannten Institution angeben. Hierbei wird versucht, sowohl die je spezifische Professionalität ebenso zu berücksichtigen wie die durch die organisationsbedingten Rahmenbedingungen vorhandenen Möglichkeiten. Während in (A) und (B) bewusst Teilaspekte (Kompetenzen) mehr oder weniger isoliert im Zentrum stehen, um dann auch diesbezügliche Reflexionen besser zu ermöglichen und entsprechendes Wissen aufzubauen, ist es in (C) tatsächlich mehr das ganzheitliche Erleben des Unterrichtens allein in Kooperation mit Fachlehrern an der Schule ohne vorgängige Einbettungen und nachträgliche Reflexionen in fachdidaktische und pädagogische Fragestellungen und Aufträge. Studenten sollen eben auch einmal einfach nur unterrichten, weil wohl nur hier, im mehr oder weniger beobachtungsfreien Raum, die Eignung als Lehrperson selbst gespürt und erfahren werden kann.

<table>
<tr><th>Inhalt</th><th>Institutionen</th><th>Ziele</th></tr>
<tr><td>(A) Unterrichtbeobachtungen, Diagnose</td><td>Universität,
Studienseminar,
Schule</td><td rowspan="2">-Wahrnehmung unterschiedlichen Schülerhandelns,
- Umsetzung (fach-)didaktischer Konzepte,
-methodische Planung</td></tr>
<tr><td>(B)
Unterrichtsplanung und
-durchführung</td><td>Universität,
Studienseminar,
Schule</td></tr>
<tr><td>(C)
Unterricht erleben</td><td>Univerität,
Studienseminar,
Schule</td><td>Personale Eignung</td></tr>
</table>

(A)

Was?	Wie?
Wahrnehmen, Dokumentieren und Auswerten von - Schülerbearbeitungen von Aufgaben, - Unterrichtsgesprächen, - Lehrer-Schüler-Interaktionen (fachbezogen) - beide Sekundarbereiche, - ‚Mini'-Forschungsprojekte (in Kopplung mit Seminar)	- mehrere Aufgaben (verschiedene Aufgabentypen) in mehreren Stunden einer Lerngruppe -Einzel- und Gruppenbeobachtung - in Kleinguppen, auch zusammen mit Referendaren - Vergleiche unterschiedlicher ‚Diagnosen' - Kopplung mit Seminar an Universität zu „Diagnose" - Grundlage für Masterarbeiten.

Universitäre Ausbilder übernehmen den Schwerpunkt der Betreuung:

- theoretische Vorbereitung (Seminar zu Diagnostik)
- Anwesenheit in mehreren Stunden
- Moderation des Austausches der Studenten über die Diagnosen
- Auswertung der Diagnosen
- Grundlage für Masterarbeiten.

(B)

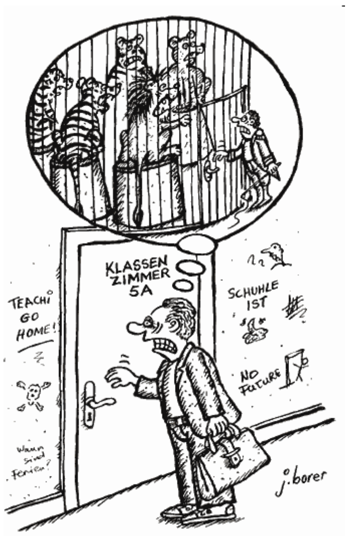
Was?	Wie?
Unterrichtsreihen planen und durchführen - inhalts- und prozessbezogene Schwerpunkte - ‚Mini'-Forschungsprojekte (in Kopplung mit Seminar)	Arbeit in Gruppen - gemeinsame Planung - Durchführung in ‚Teamteaching' (mit Beobachtung durch Mitstudenten) - gemeinsame Auswertung mit Schwerpunkt auf Vergleich Planung – Durchführung

Fachleiter (Studienseminar) übernehmen den Schwerpunkt der Betreuung:

- Organisation der Lerngruppen,
- Begleitung der Planungen,
- Anwesenheit in mehreren Stunden,
- Moderation des Austausches der Studenten zum Vergleich von Planung und Durchführung
- Umsetzen von Konzepten (Stoffdidaktik) aus vorgängigen Didaktikseminaren
- Grundlage für Seminar- und Masterarbeiten.

(C)

Ohne Worte



Anmerkungen:

1. Wichtig ist ein ständiger inhaltlicher Austausch zwischen Universität und Studienseminaren (Lehrerzentren etc.), der möglichst institutionalisiert werden sollte. Ein temporärer personeller Austausch (Fachleiter/Lehrer an Universität, Fachdidaktiker an Schule) ist wünschenswert.

2. Der Autor ist Mitglied der Kommission Lehrerbildung (GDM/MNU/DMV/KMATHF), in der eine Arbeitsgruppe die Gestaltung von Praxisphasen bearbeitet. Wer gelungene Modelle durchführt bzw. durchgeführt hat, möge sie mir bitte mitteilen.

Oliver LABS, Saarbrücken

Nullstellen von Polynomen in 2d und 3d – virtuell und real

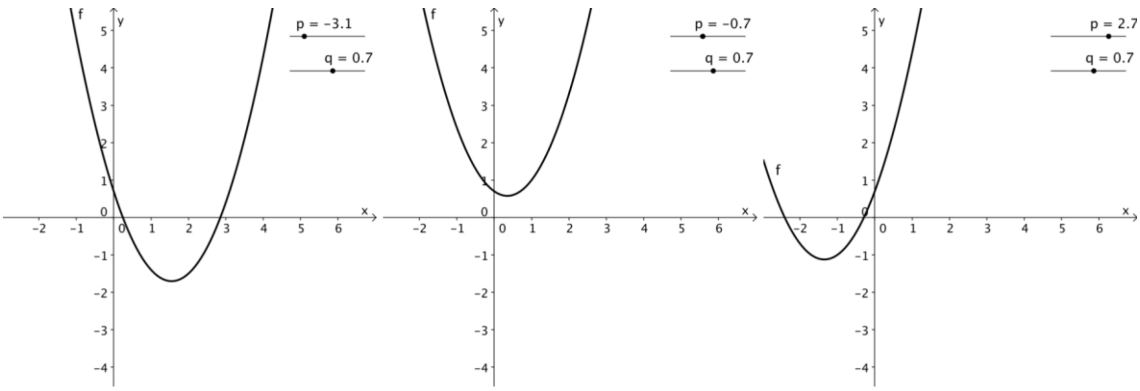
Die Berechnung von Nullstellen ist ein Thema, das in der Regel eher algebraisch-algorithmisch angesiedelt ist. Der Vortrag stellt einen experimentellen und visuellen Zugang mit Hilfe des Tabellenfensters von GeoGebra vor.

Ein neben der Vernetzung von Algebra und Geometrie zentraler Aspekt ist dabei der Perspektivenwechsel vom x,y- zu einem p,q-Koordinatensystem, durch den ein vertieftes Verständnis ermöglicht wird. Der Vortrag treibt dies noch etwas weiter - ins Dreidimensionale -, eine (nicht nur) für SchülerInnen interessante Sichtweise.

Einleitung

Welchen Einfluss haben die Koeffizienten von Polynomen auf deren Nullstellen? Ausgehend von Experimenten mit der Dynamischen Geometrie Software (DGS) GeoGebra betrachten wir zunächst den Fall der quadratischen Polynome im Detail, bevor wir auf Polynome höheren Grades eingehen; für Details, siehe [Labs, 2011].

Kenner von DGS denken bei solchen Fragen vermutlich sofort an Schieberegler. Wir betrachten der Einfachkeit halber die normierte quadratische Gleichung: x^2+px+q = 0. Mit GeoGebra kann man nun die Nullstellen von f(x) = x^2+px+q experimentell untersuchen; etwa mit dem GeoGebra-Applet *Schieberegler* auf der Webseite des Autors. Für die Schieberegler wurde dabei die Standardeinstellung von GeoGebra beibehalten, d.h. die Parameter p und q können damit jeweils zwischen -5 und 5 verändert werden:

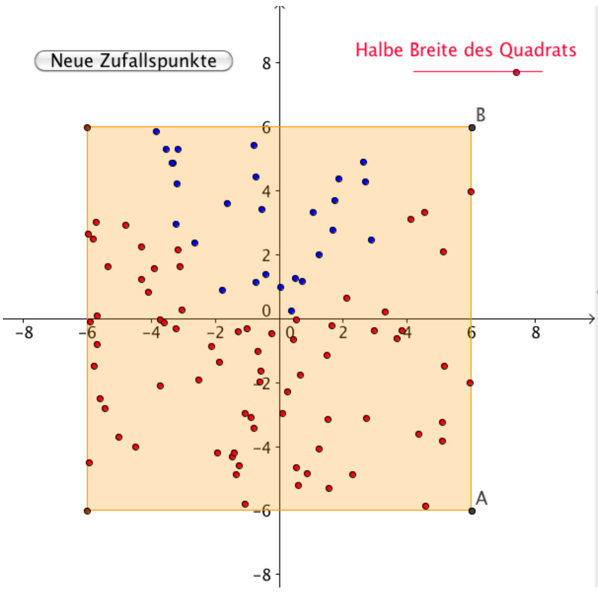


Der Einfluss des Parameters q ist recht einfach zu klären: der Graph des Polynoms wird bei Variation von q auf und ab geschoben. Auch die Frage, für welche Kombinationen von p und q das Polynom f keine, eine oder zwei Nullstellen hat, ist mit einer bekannten Lösungsformel noch leicht zu klären. Aber wie viele Nullstellen hat das Polynom vermutlich, wenn wir die Schieberegler irgendwie, d.h. zufällig, einstellen? Wie viele Nullstellen hat das Polynom f also wohl, wenn wir die Parameter p und q zufällig im Bereich -5 bis 5, oder allgemeiner -a bis a, wählen? Oder genauer: Wie wahrscheinlich sind die einzelnen Möglichkeiten?

Neben GeoGebra setzen wir bei der Untersuchung dieser Fragen auch die 3d-Software Surfer ein, die vom Autor mitentwickelt wurde.

Nullstellen zufälliger quadratischer Polynome

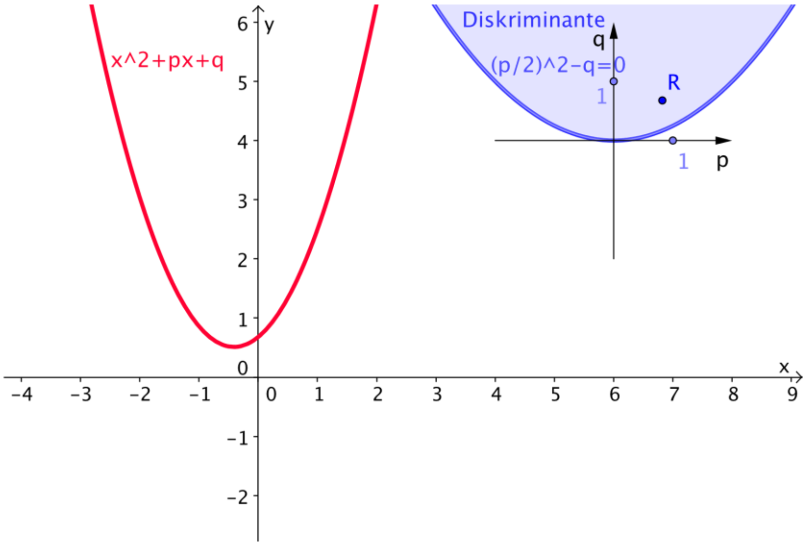
Die folgende Abbildung zeigt, wie man innerhalb einer einzigen Software, nämlich GeoGebra, gleichzeitig mit Geometrie und Tabellen arbeiten kann, um experimentell den Einfluss der Parameter p und q auf die Anzahl der Nullstellen des zugehörigen quadratischen Polynoms zu untersuchen:



	A	B	C	D	E	F	G
1	a	p	q	D=1/4...	...	(p,q)	
2	6	−3...	5.33	−2.79	−1	(−3.18, 5.33)	D<0...
3	6	−0...	−0...	0.46	1	(−0.25, −0.45)	27
4	6	1.63	−0.2	0.86	1	(1.63, −0.2)	
5	6	−3...	4.89	−2.12	−1	(−3.33, 4.89)	D=0...
6	6	−3...	5.88	−2.16	−1	(−3.86, 5.88)	0
7	6	−1...	−0...	0.83	1	(−1.31, −0.41)	
8	6	−0...	−1...	2.04	1	(−0.61, −1.95)	D>0...
9	6	2.88	2.47	−0.39	−1	(2.88, 2.47)	73
10	6	5.08	−3...	9.7	1	(5.08, −3.24)	
11	6	−0...	−3...	3.26	1	(−0.89, −3.06)	
12	6	2.69	4.3	−2.49	−1	(2.69, 4.3)	Anz....
13	6	2.1	0.67	0.44	1	(2.1, 0.67)	100
14	6	−4...	2.27	2.41	1	(−4.33, 2.27)	
15	6	−0...	−1...	1.13	1	(−0.68, −1.02)	
16	6	2.71	−3...	4.96	1	(2.71, −3.12)	
17	6	2.62	4.9	−3.18	−1	(2.62, 4.9)	
18	6	0.1	−2...	2.96	1	(0.1, −2.96)	
19	6	−2...	−1.9	3.49	1	(−2.52, −1.9)	
20	6	−5...	−1...	9.83	1	(−5.78, −1.47)	

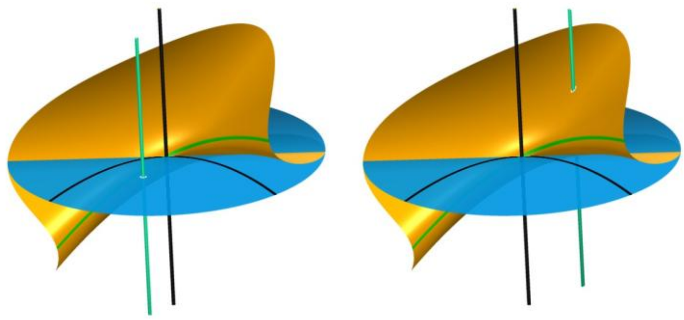
Dabei werden in der Tabelle rechts 100 zufällige Koordinaten p und q zwischen -a und a gewählt (in den Spalten B und C; das geht, wie in anderen Tabellenkalkulationen, einfach mittels *Herunterziehen*) und dann in Spalte F zu einem Punkt zusammengefügt (z.B. in Zeile 2 durch den Code *=(B2,C2);* wie in Tabellenkalkulationen üblich kann man Werte aus anderen Tabellenzellen über deren Spalte und Zeile ansprechen). Sobald man im Tabellenfenster einen Punkt definiert hat, wird er im Geometriefenster links angezeigt. Für die obige Grafik wurde für jeden Punkt sogar noch die Farbe gewählt, je nachdem, ob das zugehörige Polynom 0, 1 oder 2 Nullstellen besitzt; und zwar mit Hilfe der Spalten C und D, in denen das Vorzeichen der Diskriminante berechnet wird. Die Diskriminante bezeichnet hier wie üblich die Gleichung in den Parametern (hier p und q), für das man (wenigstens) eine doppelte Nullstelle erhält, also p^2-4q=0 bzw. q=1/4p^2. Man sieht sofort, dass es mehr rote als blaue Punkte gibt, dass also der Fall, dass es 2 reelle Nullstellen gibt, häufiger eintritt als der Fall 0 Nullstellen. Genau eine Nullstelle gibt es fast nie.

Sehr schön kann man den Einfluss der Parameter auch untersuchen, indem man zwei Koordinatensysteme gleichzeitig betrachtet, nämlich ein x,y- und ein p,q-Koordinatensystem, und dann einen Punkt R=(p,q) im letzteren frei herumschieben kann. Die Abhängigkeit der roten Parabel (links) und deren



Nullstellen lassen sich damit wesentlich besser studieren als mit zwei getrennten Schiebereglern. Z.B. kann man mit R auf der Diskriminante, also der blauen Parabel (rechts) herumlaufen und erhält links immer eine Parabel mit genau einer (doppelten) Nullstelle.

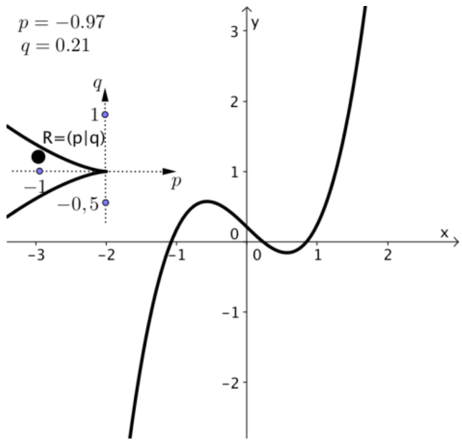
Eine ganz andere Sichtweise der gleichen Situation ergibt sich, wenn wir alle Nullstellen des Polynoms x^2+px+q in ein dreidimensionales x,p,q-Koordinatensystem eintragen. Die schwarze vertikale Achse in folgenden



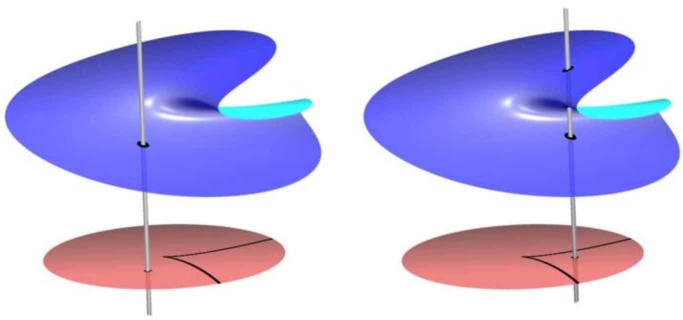
Bildern ist die x-Achse und die horizontale Kreisscheibe die x=0-Ebene, in der die Diskriminante eingezeichnet wurde. Die helle vertikale Gerade besteht jeweils aus allen Punkten zu einem Parameterpaar p,q. Wie bereits in den vorigen Visualisierungen der gleichen Situation sieht man auch hier, dass sich keine Nullstelle ergibt, wenn (p,q) *innerhalb* der Parabel liegt und zwei Nullstellen, wenn sich (p,q) *außerhalb* der Parabel befindet.

Polynome höheren Grades

Leider können wir auf Polynome höheren Grades nicht detailliert eingehen, sondern bemerken nur, dass sich die obigen Überlegungen analog auf viele weitere Fälle übertragen lassen. Es ergeben sich unten stehende Bilder.



In der Realität lassen sich die Nullstellen-Gebilde in Form von mathematischen Modellen, die der Autor mit 3d-Druckern herstellt, sogar haptisch erfahren. Für weitere Informationen und Referenzen bzw. Kurzfilme zu den Situationen siehe [Labs, 2011] bzw. [Labs & G.v.Bothmer, 2006] und die Homepage des Autors: www.OliverLabs.net.



Literatur

Hohenwarter, M. et al (2011): GeoGebra, JKU Linz. www.GeoGebra.org

Meyer, H., Stussak, C., Labs, O. & Matt, A. (2008) Surfer: Visualisierung reeller algebraischer Flächen. MFO. www.Surfer.Imaginary-Exhibition.com

Labs, O. (2011): Diskriminante und Nullstellen von Polynomen. In: R. Kaenders, R. Schmidt (Hrsg.): Mit GeoGebra Mathematik verstehen. Vieweg Verlag.

Labs, O. & G.v.Bothmer, H.-C. (2006): Advent Calendar 2006 – Geometrical Animations. Calendar.AlgebraicSurface.net.

Silke LADEL, Karlsruhe

Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen durch den Einsatz digitaler Medien in der Primarstufe

Die inhaltlichen Kompetenzen stellen häufig eine Voraussetzung für den Erwerb allgemeiner mathematischer Kompetenzen dar. Kinder, bei denen die inhaltlichen Kompetenzen nur ungenügend ausgebildet sind, haben aus diesem Grund kaum die Chance entdeckend tätig zu werden. In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen inwiefern ein *computational offloading* des reinen Rechnens zu einer Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen für alle Kinder beitragen kann.

1. Inhaltsbezogene und allgemeine mathematische Kompetenzen

In den Bildungsstandards für das Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK 2004) werden inhaltsbezogene und allgemeine mathematische Kompetenzen unterschieden. Mathematisches Lernen darf nicht auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen reduziert werden, sondern beinhaltet auch die Art und Weise sich mit mathematischen Fragestellungen auseinander zu setzen. Diese allgemeinen mathematischen Kompetenzen stellen einen wesentlichen Teil der mathematischen Grundbildung dar. Ob nun ein Kind eine bestimmte Kompetenz erworben hat, zeigt sich darin, ob es eine entsprechende Leistungsanforderung bewältigen kann (vgl. Grassmann et al. 2010, 14). Dabei bilden die inhaltlichen Fähigkeiten häufig eine Voraussetzung, um überhaupt erst Entdeckungen machen zu können.

„Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen – hier sind Automatismen ausdrücklich eingeschlossen – spielen deshalb keine geringere Rolle, sie sind vielmehr eine wesentliche Voraussetzung: Wer beim Lösen substanzieller Aufgabenformate noch mühsam zählt, wird die diesen Aufgaben innewohnenden Zusammenhänge nur schwer oder gar nicht entdecken.“ (Grassmann et al. 2010, 23)

Eine Verknüpfung inhaltlicher und allgemeiner Kompetenzen ist in vielen Fällen gut und sinnvoll. So lauten Aufgabenstellungen häufig *„Rechne und ...“*. Diese Verknüpfung hat jedoch auch zur Folge, dass allgemeine Kompetenzen häufig nur im Sinne einer zeitlichen Differenzierung eingesetzt und erworben werden können. Kinder, welche ihre Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen jedoch noch nicht automatisiert haben, benötigen im Unterricht dafür so viel Zeit, dass sie meist nicht dazu kommen irgendwelche Entdeckungen anzustellen. Aus diesem Grund bleibt für diese Schülergruppe das Bild von Mathematik immer auf das reine Rechnen beschränkt und stellt für sie eine *„zeitraubende und anstrengende Angelegenheit“*

(Krauthausen & Lorenz 2011, 171) dar. Deshalb ist vorab zu bestimmen, auf welche Kompetenzen eine Aufgabe zielt. Sollen vorrangig allgemeine mathematische Kompetenzen erreicht werden, so ist es durchaus legitim, das reine Rechnen zu delegieren:

„Die in solchen Fällen dann sekundäre Tätigkeit des Ausrechnens, Zeichnens oder allgemein Herstellens von Untersuchungsmaterial kann sinnvollerweise an den Computer delegiert werden.“ (Krauthausen & Lorenz 2011, 171)

Dieses Delegieren wird im Folgenden unter dem Blickwinkel des *computational offloadings* betrachtet.

2. Computational Offloading

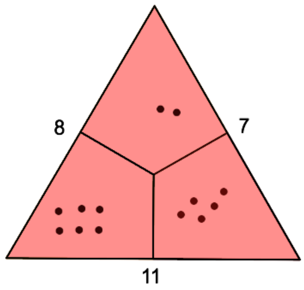
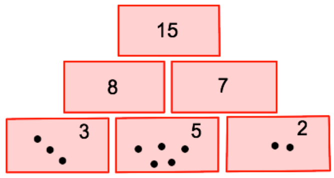
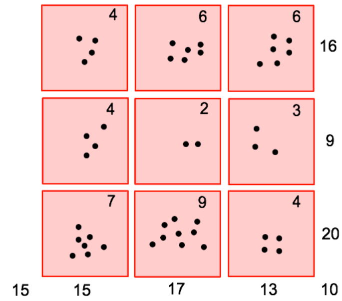
Die bewusste Verarbeitung von Informationen, sei es die Konstruktion neuer Schemata oder die Verbindung neuer Schemata mit bereits vorhandenen aus dem Langzeitgedächtnis, findet im Arbeitsgedächtnis statt. Dieses ist beim Menschen in seiner Verarbeitungskapazität jedoch begrenzt. So kann immer nur eine begrenzte Anzahl an Informationen aufrecht erhalten werden. Sind Verarbeitungsprozesse, wie z.B. das Rechnen automatisiert, so umgehen sie das Arbeitsgedächtnis und tragen dazu bei, dass kognitive Kapazitäten für andere Funktionen, wie z.B. das Durchdringen mathematischer Zusammenhänge oder das Verstehen und Anwenden von Regeln und Gesetzmäßigkeiten bereitgestellt werden können (vgl. Rasch & Schütte 2011, 73).

Das Herstellen von Zusammenhängen erfordert einen hohen *cognitive load*, da Informationen gleichzeitig verarbeitet werden müssen. So müssen die Kinder, um Muster und Strukturen entdecken zu können, zunächst die Aufgaben lösen. Meist erfordert diese Aktivität so viel *cognitive load*, dass nicht mehr ausreichend Kapazität frei ist, um sich auf die Zusammenhänge zu konzentrieren. Nun gibt es Möglichkeiten die *cognitive load* durch ein *computational offloading* zu verringern. Darunter versteht Rogers (2004) *„the extent to which external representations can reduce the amount of cognitive effort required to solve a problem.“*

In unten stehenden Beispielen wird das Berechnen von Summen und das Anzeigen von Anzahlen dem Computer übergeben, so dass die Kinder sich auf die Zusammenhänge konzentrieren können.

3. Förderung allgemeiner Kompetenzen durch digitale Medien

Im Folgenden wurden die drei substantiellen Aufgabenformate Rechendreieck, Zahlenmauer und Magisches Quadrat gewählt.

Rechendreieck	Zahlenmauer	Magisches Quadrat
		

Die Kinder haben in der computerbasierten Lernumgebung die Möglichkeit die Punkte in den Feldern zu verschieben. Diese sind automatisch mit den Zahlen verknüpft, sodass diese sich entsprechend den Veränderungen der Kinder anpassen. Das Berechnen der Summen ist an den Computer ausgelagert, sodass die Kinder ihre Kapazität ganz auf das Entdecken und Herstellen von Zusammenhängen verwenden können. Neben dem Ziel computerbasierte Lernumgebungen zur Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen zu erstellen und diesbezüglich gute Aufgaben zu formulieren, ist die Fragestellung, ob und inwieweit das *computational offloading* der rechnerischen Fertigkeiten hierzu beiträgt und sinnvoll ist.

Eine erste Erprobung fand mit Schülerinnen und Schülern einer zweiten Klasse, die jeweils zu zweit an einem PC arbeiteten, statt. Zunächst sollten die Kinder herausfinden, wie die Zahlen zustande kommen und wie sie sich verändern, wenn Punkte verschoben werden. In einem zweiten Schritt sollten sie gezielt Punkte so verschieben, dass sie einen vorgegebenen Endzustand erhielten. Beim Rechendreieck und der Zahlenmauer konnte eine hohe Kommunikation und Argumentation festgestellt werden. Das operative Denken der Kinder war ebenfalls sehr hoch. Dies zeigte sich v.a. in den zahlreichen Aussagen der Form „wenn ..., dann ...“. Solche Überlegungen wurden erst mental vollzogen, bevor sie überprüft wurden. Die Kinder stellten also Hypothesen auf, wie z.B. „Ich glaube wenn ..., dann...“ und überprüften diese anschließend durch entsprechendes Verschieben der Plättchen. Beginnend bei dem Rechendreieck, dessen Struktur den Kindern bislang nicht bekannt war, versuchten die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen dem Verschieben der Punkte und den Zahlen festzustellen. Dabei wurden die Punkte teilweise zu Beginn erst gar nicht in Verbindung zu den Zahlen gebracht, sondern so verschoben, dass z.B. eine korrekte Additionsaufgabe aus den drei Zahlen gebildet werden konnte.

Da die Zahlenmauer den Kindern bereits aus dem herkömmlichen Unterricht bekannt war wurden hier folgende Fragen gestellt: „Verschiebe die Punkte, so dass der Deckstein möglichst groß wird.“ Diese Aufgabe zeigte sich jedoch als weniger geeignet, da sie allein durch Probieren gelöst werden konnte. Ob die Kinder zusätzlich auch die Lösung begründen konnten, konnte jedoch in einem anschließenden Gespräch mit den Kindern festgestellt werden. Das unterstreicht nochmals die Bedeutung der Lehrkraft, deren Kompetenz insbesondere in computerbasierten Lernumgebungen gefordert ist. Dennoch konnten auch mit diesem Aufgabenformat Lösungsstrategien wie rückwärts arbeiten und auch vorausschauendes Denken beobachtet werden. Als besser geeignet für eine computerbasierte Lernumgebung mit dem Aufgabenformat Zahlenmauer erscheint jedoch die systematische Variation der Startzahlen oder Aufgabenstellungen zur Grundidee der Algebraisierung (vgl. Schipper 2009, 314 f.). Während eine systematische Variation der Startzahlen in herkömmlichen Lernumgebungen eher statischer Natur ist, erhält sie am Computer eine Dynamik. Es handelt sich hier nicht um beispielsweise drei unterschiedliche Zahlenmauern, die miteinander verglichen werden, sondern um eine einzelne, bei der eine Veränderung eintritt und beobachtet werden muss. Ebenso lässt sich die Grundidee der Algebraisierung im Sinne von „Was geschieht, wenn eine der Startzahlen um n größer wird?" sehr gut veranschaulichen.

Das magische Quadrat erwies sich als sehr komplex, da sich das Verschieben eines Punktes auf bis zu sieben Zahlen auswirkt. Aus zeitlichen Gründen kamen leider nur wenige Kinder bis zu diesem Aufgabenformat. Bei diesen konnte jedoch eine sehr hohe Konzentration und mentale Aktivität beobachtet werden. Insgesamt haben sich die Ansätze computerbasierter Lernumgebungen mit dem *computational offloading* rechnerischer Fertigkeiten als sehr vielversprechend erwiesen und bergen hohes Potential, dem es im Weiteren nachzugehen gilt.

Literatur

Grassmann, M. & al. (2010): Mathematikunterricht. Band 5 der Reihe: Kompetent im Unterricht der Grundschule.

Krauthausen, G. & Lorenz, J.-H. (2011): Computereinsatz im Mathematikunterricht. In G. Walther & al. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen, 162 – 183.

Rasch, R. & Schütte, S. (2011): Zahlen und Operationen. In G. Walther & al. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen, 66 – 88.

Rogers, Y. (2004): New Theoretical Approaches for Human-Computer Interaction, Annual Review of Information Science and Technology.

Schipper, W. (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Diemut LANGE, Hannover

Inwiefern hilft Kooperation beim Bearbeiten von Problemaufgaben?

Im Synonymwörterbuch sind zwei Bedeutungsebenen für das Wort „Problem“ angegeben: Die erste fasst *Problem* als synonym zu *Aufgabe*. Die zweite konnotiert Problem mit einer gewissen *Schwierigkeit* (Ärger, Erschwernis etc.): Ein Problem stellt auf dieser Ebene eine Aufgabe dar, die schwierig ist. Dies kann mit Blick auf Problemdefinitionen von Psychologen (Duncker, Dörner, …) sowie Mathematikdidaktikern (z.B. Schoenfeld 1985, S.74) präzisiert werden: Die Schwierigkeit einer Aufgabe ist nicht in den Aufgabeneigenschaften selber begründet, sondern in der Beziehung des Aufgabenbearbeiters mit der Aufgabe. Eine Aufgabe kann also für eine bestimmte Person, aber nicht für eine andere eine Schwierigkeit beinhalten.

Im Folgenden soll die Schwierigkeit einer Aufgabe ebenfalls am Aufgabenbearbeiter festgemacht, allerdings analog zu der Definition in der Testpsychologie (Lienert & Raatz, S.73) ein Aufgabenschritt a posteriori (empirisch) als schwierig definiert werden, wenn ihn nur wenige der Probanden lösen konnten. Die (a priori) Vorhersage einer a posteriori definierten Schwierigkeit ist nötig, um Aufgaben mit schwierigen Schritten auszuwählen (im Folgenden: Problemaufgaben) und diese Schwierigkeiten näher zu spezifizieren. Da die Definition eines Problems und damit einer Schwierigkeit vom Aufgabenbearbeiter abhängig ist (s.o.), eignen sich zur a priori-Vorhersage insbesondere curriculare Vorgaben sowie Studien mit ähnlichen Aufgaben und Probanden wie in der eigenen Studie.

1. Kooperation als Möglichkeit zur Überwindung von Schwierigkeiten

Fragt man sich, inwiefern die Kooperation in der Kleingruppe helfen kann, so geben Lerntheorien erste Hinweise: Denkbar wäre das Erzeugen und Lösen von Konflikten durch divergente Bearbeitungen oder Ansichten, das Teilen von Ressourcen (Ideen, Lösungswege) oder das Ordnen von Gedanken durch die Absicht, dem Partner etwas erklären zu wollen.

Im Folgenden soll unter Kooperation „jede Art von aufgabenbezogener Interaktion“ (Naujok 2000) verstanden werden. Aufgrund des zugrunde gelegten theoretischen und begrifflichen Hintergrunds erscheinen folgende Forschungsfragen relevant:

1. Was sind *(empirisch) schwierige Schritte* bei Problemaufgaben?
2. Was könnten mögliche *Gründe* für diese Schwierigkeiten und *Möglichkeiten der Überwindung* sein?

3. Inwiefern hilft *Kooperation* beim Überwinden schwieriger Schritte?

2. Design

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde für die Auswertung in diesem Artikel die folgende mathematische Problemaufgabe ausgewählt:

7-Tore-Aufgabe (Bruder et al. 2005)

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig.

Wie viele Äpfel hatte er am Anfang?

Dass es sich um eine Problemaufgabe handelt, kann aufgrund der Ähnlichkeit zu der Smarties-Aufgabe in der Studie von Aßmus (2010) vermutet werden, die für Zweit- bis Viertklässler Schwierigkeiten (insbesondere die Schwierigkeit, eine geeignete Reihenfolge der Umkehroperationen zu finden) beinhaltete. Bearbeitet wurde die 7-Tore-Aufgabe in der eigenen Studie zum einen von Schülern aus 4 sechsten Klassen eines Hannoveraner Gymnasiums (Feb. 2010) im Rahmen einer Schulstunde. Um Forschungsfrage 3 beantworten zu können, bearbeitete etwa die Hälfte der Sechstklässler diese Aufgabe individuell (N=64 Individuen) – die anderen Schüler arbeiteten zu zweit (N=31 Paare). Als Daten liegen die schriftlichen Notizen der Schüler vor.

Um einen differenzierteren Blick auf die Art der Kooperation werfen zu können, wurden zum anderen Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien beim Bearbeiten dieser Aufgabe zusammen mit einem Partner videographiert (N=7). Diese Datenerhebung fand im Rahmen einer überschulischen Mathe AG für Fünftklässler (MALU) statt (Nov. 2008-Juni 2010).

3. Auswertungsmethodik

Nach einer a priori-Aufgabenanalyse wurden die Fünft- und Sechstklässlerbearbeitungen zur 7-Tore-Aufgabe anschließend wie folgt ausgewertet:

Sechstklässlerbearbeitungen (schriftliche Notizen):

- Kodierung hinsichtlich schwieriger Aufgabenschritte
- Berechnung der relativen Häufigkeit der aufgetretenen Schwierigkeiten; für jede beobachtete Schwierigkeit wurden jeweils nur diejenigen Bearbeitungen betrachtet, in denen die Schwierigkeit hätte vorkommen können
- fallanalytische und fallvergleichende Analyse von möglichen Gründen und Überwindungsarten der schwierigen Schritte

Fünftklässlerbearbeitungen (schriftliche Notizen; Videoprozesse):

- Kodierung der schriftl. Notizen hinsichtlich schwieriger Aufgabenschritte
- Transkription der Prozesse
- Kodierung der transkribierten Prozesse hinsichtlich vorkommender Kooperationshandlungen mit Hilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse; diese Kodierung baut auf den von Naujok rekonstruierten Kooperationshandlungen auf (Näheres zu dem Auswertungsverfahren in Lange 2011)
- fallanalytische und fallvergleichende Analyse derjenigen Transkriptstellen, die mit den schwierigen Schritten in Verbindung gebracht werden können, hinsichtlich möglicher Gründe und Überwindungsarten UND hinsichtlich der vorkommenden Kooperationshandlungen

4. Ergebnisse & Diskussion

Zur Bearbeitung der 7-Tore-Aufgabe wählten die Sechstklässler (z.T. nachdem sie Zahlen als mögliche Anfangszahlen ausprobiert hatten) mehrheitlich ein Rückwärtsarbeiten: Sie starteten mit dem einen Apfel, den der Mann am Ende übrig hatte und schlossen rekursiv auf die Anfangsapfelanzahl. Ein schwieriger Schritt stellte dabei die Suche nach geeigneten Umkehroperationen in geeigneter Reihenfolge bzw. die Suche korrekter Apfelanzahlen mit Hilfe des systematischen Probierens durch Lösen der Teilaufgaben „?:2-1=bekannte Apfelanzahl" dar. So konnten etwa 60% der einzeln arbeitenden und 50% der zu zweit arbeitenden Sechstklässler, die rückwärts vorgegangen sind und zwei verschiedene Operationen gewählt hatten, die nächst folgende Apfelanzahl vor dem 7.Tor (4) nicht korrekt bestimmen. Die meisten von diesen Sechstklässlern kehrten nur die Operationen um (·2 statt :2; +1 statt -1) und nicht auch deren Reihenfolge. Scheinbar stellt die im Aufgabentext vorgegebene Reihenfolge für die Sechstklässler auch beim Rückwärtsarbeiten eine naheliegende Reihenfolge dar (·2, da er die Hälfte abgegeben muss und +1, da er einen Apfel wiederbekommt). Insgesamt finden sich in den Bearbeitungen der Fünft- und Sechstklässler, die diesen Schritt erfolgreich überwunden haben, wenig Indizien dafür, wie sie diesen Schritt überwunden haben könnten. Die Transkriptpassage eines Fünftklässlers (HF) deutet auf eine Synthetisierung eines aus beiden Operationen zusammengesetzten Operators hin, die durch die Vorstellung einer Umkehr des Prozesses des Apfelabgebens in ein Apfelbekommen ermöglicht wird (HF: „also plus einen den er wegnimmt und dann mal zwei"). Ein anderer Weg stellt das Testen einer bestimmten Reihenfolge der einzeln korrekt gebildeten Umkehroperationen anhand der ersten Apfelanzahlen 1 und 4 mit Hilfe der Vorwärtsoperationen dar.

Die etwas geringere Häufigkeit, mit der diese Schwierigkeit in den Sechstklässler*paaren* auftritt (s.oben), lässt vermuten, dass die Schwierigkeit in Kooperation überwunden werden könnte. Allerdings ist der Anteil derjenigen Bearbeitungen, in denen zwar die erste (4) Apfelanzahl korrekt bestimmt, zur Generierung der weiteren Apfelanzahlen allerdings nicht geeignete Operationen / eine nicht geeignete Operationsreihenfolge gewählt wurde, bei den Paaren höher (17,39%) als bei den einzeln arbeitenden Sechstklässlern (8,70%). Dies lässt vermuten, dass die Apfelanzahlen 1 und 4 nicht zum Ableiten geeigneter Operationen / einer geeigneten Operationsreihenfolge genutzt werden, sondern das Problem der Suche geeigneter Operationen lediglich auf einen späteren Zeitpunkt im Lösungsprozess (vermutlich wenn die Zahlen und damit der Rechenaufwand größer werden) verschoben wird.

Als Ergebnisse der Kooperationsanalyse kann Folgendes festgehalten werden: In keinem der Prozesse findet eine Ko-Konstruktion von Ideen hinsichtlich geeigneter Operationen statt. Stattdessen nennt einer der Fünftklässler eines jeden Paares Operationen bzw. führt diese aus und der Partner schließt sich diesen an. Allerdings kann in zwei Prozessen vermutet werden, dass das Vorhandensein des Partners zum Überprüfen und Begründen des eigenen Teilergebnisses (Apfelanzahl vor dem 7.Tor) anregt, so dass die zunächst angenommene Apfelanzahl 3 in die korrekte Apfelanzahl 4 verbessert werden konnte. Zudem fällt auf, dass in fast allen Prozessen – wenn überhaupt – lediglich derjenige Fünftklässler etwas überprüft, der die Operationen genannt bzw. durchgeführt hat. Ein möglicherweise hilfreiches, kritisches Hinterfragen durch den Partner unterbleibt, so dass darin (und nicht (nur) in dem wenigen oder wenig erfolgreichen Überprüfen generell (wie bei Stacey 1992)) ein Manko gesehen werden kann.

Literatur

Aßmus, D. (2010). Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei potenziell mathematisch begabten Grundschulkindern. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.). *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S.45-61), Offenburg: Mildenberger Verlag.

Bruder, R., Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Die "gute" Mathematikaufgabe – ein Thema für Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. *BzMU*, 139-146.

Lange, D. (2011). Kooperation von Fünftklässlerpaaren beim Problemlösen. In: *Beiträge zur Qualitativen Inhaltsanalyse*. Institut für Psychologie der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Band-Nr. 19.

Lienert, G.A. & Raatz, U. (1998). *Testaufbau und Testanalyse*, 6. Auflage, Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Naujok, N. (2000). *Schülerkooperation im Rahmen von Wochenplanunterricht*, Beltz: Weinheim.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press.

Stacey, K. (1992). Mathematical Problem Solving in Groups: Are Two Heads Better Than One? *Journal of Mathematical Behavior, 11(3)*, 261-275.

Katja LENGNINK, Siegen

Mathematische Vorstellungen anbahnen - Handlungsorientierte Projekte in heterogenen Lerngruppen der Schuleingangsphase

Authentische mathematische Erfahrungen auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen, dies ist das Ziel der Entwicklung von handlungsorientierten Projekten des neuen Schulbuchwerkes Spürnasen Mathematik. Im Beitrag werden Beispiele aus Erprobung einer Mathekartei in der Jahrgangsstufe 1/2 vorgestellt, die zeigen, wie Lernprozesse angestoßen werden können. Es wird analysiert, welche unterschiedlichen Vorstellungen sich in den Eigenproduktionen der Kinder zu den Aufträgen zeigen. Daran kann das Differenzierungspotential der Projektaufträge aufgedeckt werden.

Forschungsanliegen

Den Ansatz dieses Beitrages kann man als Entwicklungsforschung charakterisieren. In der Entwicklung eines Schulbuchwerkes sind viele konzeptionelle und Detail-Entscheidungen zu treffen, deren Wirkung nicht immer im Vorhinein abzusehen ist. Oft stecken in einzelnen Aufträgen bestimmte Vorstellungen darüber, wie Lernende und Lehrkräfte sich diesem Gegenstand produktiv nähern könnten. Solange die Materialien nicht erprobt und evaluiert sind, ist jedoch nicht mit Gewissheit zu sagen, dass das Konzept eines Schulbuchwerkes für die Praxis tragfähig ist.

In diesem Kontext ist der Beitrag zu verstehen. Er befasst sich mit der Erprobung eines Projektes aus der Mathekartei zum Thema „Versteckte Mathematik". Anhand von Eigenproduktionen der Schülerinnen und Schüler wird untersucht, inwiefern der Ansatz der Offenheit und der natürlichen Differenzierung, der bei der Entwicklung der Projektkartei zugrunde gelegt wurde, tatsächlich seine Wirkung in der Praxis entfaltet.

Offen? Aber sicher!

Heterogenität und Offenheit sind zwei didaktische Schlagworte, deren Interpretation und konkrete Ausgestaltung viele Spielräume zulässt. Versteht man nach Peschel unter Offenheit organisatorische, methodische, inhaltliche und soziale Offenheit (Peschel 2011, S. 39), so ist dies auch im Konzept der Mathekartei angelegt. Allerdings besteht ein Unterschied im Umfang der Offenheit, der bei Peschel weitreichender ist und den Kindern mehr Spielräume zuweist. Im Schulbuchwerk wird eine Öffnung hergestellt durch:

- die Offenheit des Materials (Arbeit an Mathekartei und Themenheften),

- die Offenheit in der Wahl der Sozialformen (Wechsel von verschiedenen Formen des Zusammenarbeitens),
- die eigenverantwortliche Organisation des Lernprozesses (schülerbestimmte Auswahl von Materialien, Arbeitsformen und Schwerpunkten),
- eine inhaltliche Öffnung (Zulassen von divergenten Lösungswegen, Lösungen, Interpretationen der Bedeutung für die Lebenswelt).

Eine solche Öffnung erfordert komplementär Sicherheit in Bezug auf die Zielsicherung und das Anbahnen wesentlicher Kompetenzen im mathematischen Anfangsunterricht. Eine solche Sicherheit kann erreicht werden durch gemeinsame Einstiegs- und Reflexionsphasen – individuelles Lernen muss ausgewogen zum gemeinsamen Austausch sein. Zudem wird der Lernprozess mit Hilfe eines Lerntagebuchs begleitet und dokumentiert, es werden systematische Vertiefungen in den Themenheften angeboten und auch Selbsteinschätzungen von den Kindern verlangt. Im Aufbau des Materials gibt es zusätzlich zur Mathekartei und den Themenheften ein Testheft zur Diagnose und Analyse sowie ein Arbeitsheft zum Fördern und Fordern.

Differenzierung – wie kann das gehen?

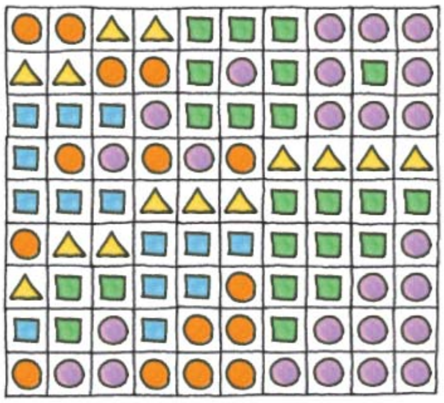
Das Umgehen mit heterogenen Lerngruppen in der Schuleingangsphase erfordert eine Differenzierung. Dabei bieten sich verschiedene Ansatzpunkte für eine Auflösung des Gleichschritts im Unterricht an (vgl. Hußmann/Prediger 2007, S. 7): Es können unterschiedliche Zugangsweisen angeboten werden, die Anspruchsniveaus können anders sein, das Tempo kann variieren und die Lerninhalte und -ziele können verschieden sein.

Konzeptionell ist dies auch in der Mathekartei realisiert. Dabei ist wieder die Balance zwischen individuellem Lernen und sozialem Austausch wesentlich, da gerade hierdurch Begriffe angebahnt und gefestigt, Ideen generiert und übernommen und prozessbezogene Kompetenzen wie das Argumentieren, Kommunizieren und Darstellen gefördert werden.

Von Handlungen über Vorstellungen zu Begriffen

Das Projekt „Versteckte Mathematik“ wurde in einer gemischten Lerngruppe des 1. und 2. Jahrgangs erprobt (Hökenschnieder 2011). Im Folgenden werden einige Aufträge und Lösungen vorgestellt und analysiert.

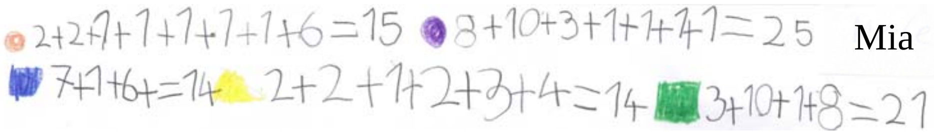
Um die Kinder anzuregen, Zahlen und Aufgaben in strukturierten Darstellungen zu erkennen, wurde der folgende Auftrag gestellt: „Was seht ihr? Findet passende Zahlen und Aufgaben.“



An den beiden folgenden Schülerlösungen kann man sehen, dass die Kinder in der Lage sind, figurierte Zahlen wahrzunehmen.

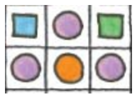
Während die Lösung von Patrick erfordert, die entsprechende Figur, die gezählt wurde, ausfindig zu machen, notiert Mia bereits mit Legende. Die erste Zeile der Lösung von Patrick entspricht der Lösung von Mia zu den Kreisen.

Patrick

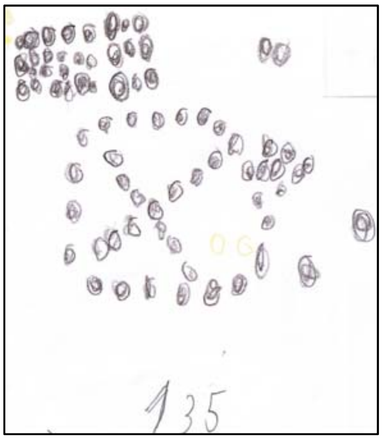


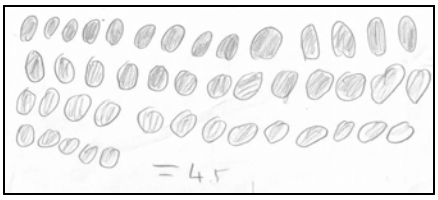
Mia

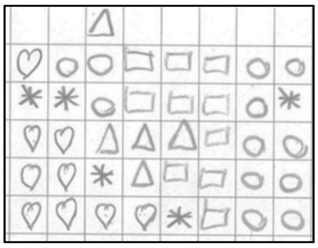
Allerdings fasst Patrick in seiner Lösung noch drei einzelne Kreise zu einer drei zusammen. Es liegt nahe, dass er die Kreise in der figurierten Darstellung direkt als Dreiheit erkennt.

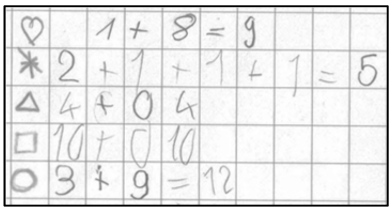


Der Auftrag, eigene Bilder zu Zahlen und Aufgaben zu gestalten, zeigt, in wie weit die Lernenden bereits in der Lage sind, figurierte Zahldarstellungen zu produzieren.





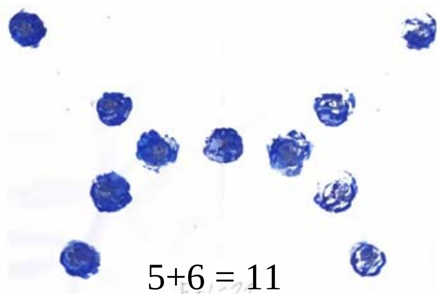


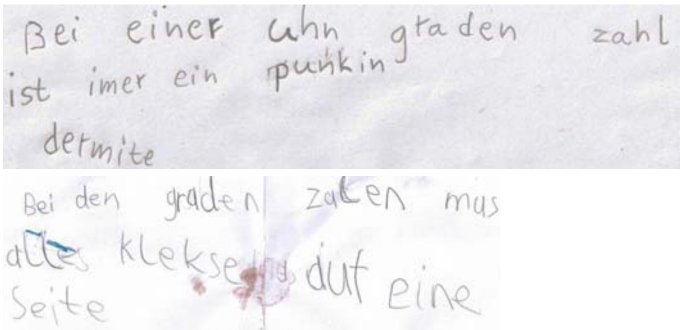


Links sind deutlich weniger als 135 Punkte zu sehen, Ansätze zur Figurierung sind jedoch erkennbar. In der Mitte wurde die Zahl 45 vermutlich abgezählt, in jeder Reihe sind unterschiedlich viele Punkte. Die rechte Darstellung ähnelt sehr dem Einstiegsbild. Ob das Kind eine davon losgelöste Figurierung erstellen könnte, wissen wir nicht.

Eine andere Projektkarte dient der Erkundung von Verdopplungsprozessen anhand von Faltbildern. Die Kinder werden aufgefordert Klecksbilder zu erstellen. Nicht immer werden die Verdopplungen beim Klecksen und Falten erkannt. So wurde z.B. unter diesem Bild 8 + 4 = 12 notiert.

Als Vertiefungsauftrag werden die Kinder angeregt, Faltbilder zu geraden und ungeraden Zahlen zu erstellen. Die Lösungen einiger Kinder zeigen, dass sich hier die Vorstellungen mit dem mathematischen Gehalt der Sache ideal verbinden. So schreibt Lea (2. Jg.): „Bei einer ungeraden Zahl ist immer ein Punkt in der Mitte.“ Und Ben (2. Jg.) stellt fest: „Bei den geraden Zahlen müssen alle Kleckse auf eine Seite.“





Fazit und Ausblick

In der Analyse dieser und weiterer Eigenproduktionen von Kindern zur Mathekartei hat sich gezeigt, dass das Konzept der offenen Differenzierung aufgeht und die Kinder zu eigenen Lernwegen ermutigt werden. Die Dokumente machen zudem deutlich, dass nicht beim individuellen Lernen stehen geblieben werden darf. Ein gezielter Austausch über die Eigenproduktionen ist notwendig, um alle Kinder angemessen zu fördern. So könnte etwa im ersten Beispiel die Qualität der Darstellungen ein Gesprächsanlass sein: Wo siehst du die Zahl besonders gut, wo weniger gut? Wo kannst du eine Zahl blitzschnell erkennen, ohne zu zählen? Im zweiten Beispiel ist das Gespräch auf gelungene Verdopplungen zu richten. Wie viele Punkte hast du gekleckst, wie viele sind entstanden? Entdeckst du eine Regel?

Literatur

Hökenschnieder, C. (2011): Mathematiklernen im offenen Unterricht – Evaluation eines Schulprojektes zur „Versteckten Mathematik“. Staatsarbeit, Universität Siegen.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2007): Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. In: PM 49(17), S. 1 – 8.

Peschel, F. (2011): Offener Unterricht, Band II. Schneider Verlag Hohengehren.

Spürnasen Mathematik (2012): Mathekartei, Duden Verlag.

Timo LEUDERS, Susanne PREDIGER, Stephan HUSSMANN, Bärbel BARZEL, Freiburg/Dortmund

Genetische Lernarrangements entwickeln – Vom Möglichem im Unmöglichen bei der Entwicklung der Mathewerkstatt

Theoretisch-historische Ausgangspunkte

Das Konzept des genetischen Lernens zieht sich in den letzten Jahrhunderten wie ein roter Faden durch die pädagogische und didaktische Literatur, früh schon bei Dewey:

> „Der Weg zum Verständnis eines entwickelten Produktes führt durch das Studium seines Werdeganges . . . Indem wir es im Werden studieren, wird manches unserem Verhältnis zugänglich, das heute zu verwickelt ist, um unmittelbar erfasst zu werden.“ (Dewey 1915, S. 283).

Im Fach Mathematik wurde (neben den Naturwissenschaften) seit jeher das genetische Prinzip besonders stark betont (etwa von Klein 1908 und Toeplitz 1927). Seit den 1960er Jahren wurden zahlreiche theoretische Fundierungen und Ausdifferenzierungen vorgelegt und Roths (1970) Ansatz der Rückverwandlung in überzeugenden Beispielen umgesetzt:

> „Alle methodische Kunst liegt darin beschlossen, tote Sachverhalte in lebendige Handlungen zurückzuverwandeln, aus denen sie entsprungen sind: Gegenstände in Erfindungen und Entdeckungen, Werke in Schöpfungen und Pläne in Sorgen, Verträge in Beschlüsse, Lösungen in Aufgaben, Phänomene in Urphänomene.“ (Roth, 1970, S. 116)

Anspruchsvoll ist nicht nur die Umsetzung dieser Forderungen, sondern auch die genauere theoretische Fassung und Abgrenzung des facettenreichen didaktischen Prinzips. Nicht jedes entdeckende Lernen ist genetisch; genetisches Lernen ist auch nicht notwendig historisch: Schon Toeplitz (1927) unterschied die direkte historisch-genetische von einer indirekten, nur an die historischen Kernideen anknüpfenden Vorgehensweise. Genetisches Lernen ist auch nicht nur im problemlösenden Unterricht zu realisieren, sondern kann sich auch im nachvollziehenden Folgen eines Vortrags entfalten. Schließlich ist eine genetische Begriffsbildung nicht ausschließlich an Anwendungskontexte gebunden, sondern kann sich auch innermathematisch vollziehen (siehe Strukturprobleme unten).

Wir wählen für die folgenden Betrachtungen diese (einengende) Definition: *Genetisches Lernen ist der durch Probleme angestoßene individuelle, aktive Vollzug eines Prozesses der Konstruktion eines mathematischen Begriffes oder Zusammenhangs, der sich schließlich als Lösung des Ausgangsproblem erweist.* Damit sind wir nah an Freudenthals „Mathematik in statu nascendi“ (Freudenthal 1973, S. 113).

Fragestellungen und Vorgehensweisen

Trotz der langen Tradition des genetischen Prinzips und wiederholter „Existenzbeweise“ durch einzelne Konkretisierungen bleiben folgende zwei zentrale Fragen zu Umsetzbarkeit und Wirkungen offen:

1. Inwiefern kann das (bislang vor allen in ausgewählten Vorzeigebeispielen umgesetzte) genetische Prinzip tatsächlich für alle Inhalte im regulären Unterricht auch für schwächere Lernende umgesetzt werden?
2. Wie verlaufen die initiierten Lernprozesse tatsächlich?
   Welche Wirkungen haben sie?

Im Rahmen des langfristigen KOSIMA-Projekts (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen; Hußmann, Leuders, Barzel & Prediger 2011) bearbeiten wir diese Fragestellungen im Forschungsprogramm der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Gravemejier & Cobb 2006; Prediger & Link 2012) und verfolgen dabei vier Arbeitsbereiche:

- Implementation des genetischen Prinzips (und zahlreicher anderer Prinzipien, vgl. Barzel et al. 2011) durch ***Design von Lernumgebungen***, die in die Schulbuchreihe Mathewerkstatt (Barzel, Leuders, Hußmann & Prediger 2012) für die Klassen 5-10 mittlerer Schulformen einfließen.
- ***Curriculare Exploration*** des Möglichen im Unmöglichen durch kritische Reflexion der Designprozesse mit dem langfristigen Ziel, die Theorie des genetischen Prinzips weiter zu entwickeln.
- ***Erprobung der Lernumgebungen*** zur Weiterentwicklung und zur Spezifizierung des Bedarfs an Unterstützungen.
- ***Empirische Beforschung der initiierten Lernprozesse***, derzeit vorrangig in Bezug auf die Wirkungen im Prozess der Vorstellungsentwicklung (z.B. Prediger 2011a; Schnell & Prediger 2012; sowie in diesem Band Zwetzschler, Richter, Schnell, Hußmann & Schindler) und Teilaspekten von Kompetenzentwicklung (Ehret, in diesem Band, Philipp & Leuders 2012). Angestrebt ist in Zukunft auch eine breitere Evaluation der Wirksamkeit.

Die der curricularen Exploration zugrundeliegenden Designprozesse umfassen bzgl. des genetischen Prinzips folgende drei Schritte:

1. die Spezifizierung von Kernideen und Kernfragen,
2. die Suche nach geeigneten Kontexten und
3. die Konstruktion geeigneter Kontextprobleme (vgl. Leuders et al. 2011).

Hierbei wurden fünf Herausforderungen des genetischen Prinzips und mögliche Ansätze zur Überwindung herausgearbeitet (und werden in der Langfassung des Artikels an Beispielen konkretisiert):

Herausforderung 1: Wenn Offenheit die Zielerreichung gefährdet - Zeitökonomie und Abgrenzungswissen

Offene Kontextprobleme laden ein zur divergenten, kreativen horizontalen Mathematisierung. Dies ist bildend und höchst erwünscht, stellt jedoch Lehrkräfte im Unterricht vor zweierlei Herausforderungen: Zum einen ist die Entwicklung alternativer Mathematisierungen *inhaltlich* nicht immer zielführend. Dann muss zum richtigen Zeitpunkt deutlich werden, welche individuellen Vorschläge warum nicht der konventionellen Mathematik entsprechen (vgl. Prediger 2011b). Zum anderen ist es zuweilen *zeitlich* nicht möglich, alle Alternativen zu entwickeln. Dann muss ein Schulbuch nach einer Exploration auch engere Wege zur Konvergenz ermöglichen.

Herausforderung 2: Wenn Kontextprobleme nicht passend sind – Authentizität, Altersgemäßheit und Kontextkohärenz

Einige Probleme führen zwar genetisch zur intendierten Mathematik, lassen sich aber kaum in Kontexten altersgemäß konstruieren. So müssen etwa für die Entwicklung der Idee der relativen Häufigkeit die Zahlen klein sein, echte Kontextprobleme aber hantieren gerade mit unübersichtlich großen Zahlen. Auch führt der Anspruch, eine gewisse Kohärenz innerhalb eines Kontexts herzustellen, zuweilen zur Notwendigkeit von Anpassungen. Sucht man z.B. in Klasse 5 nach einem genetischen Weg zum Mittelwert, so kann man überzeugende genetische Vorschläge (wie z.B. Lengnink 2008) mitunter wegen mangelnder Passung zur Altersgruppe nicht wählen. Wir haben uns für das Problem entschieden: „Haben die Jungen oder Mädchen unserer Klasse den größeren Fuß?“ (Barzel & Leuders 2012) das auf natürliche Weise zur Lösung des „gleichmäßigen Aufteilens“ führt.

Herausforderung 3: Wenn zu Erfindendes schon alltäglich ist - Enttrivialisierung und Verfremdung

Manche Kernideen und Konzepte können Lernende nicht mehr selbst erfinden, weil sie ihnen aus dem Alltag längst vertraut sind, wie z.B. die Koordinaten als Antwort auf die Kernfrage „Wie kann man Orte gut beschreiben?“. Dann muss die fertige Mathematik enttrivialisiert und die dahinter liegende Kernidee ins Bewusstsein zu rücken. Dazu hilft die Technik der Verfremdung, z.B. durch den Kontext der Bienen, die zur Beschreibung von Orten Polarkoordinaten nutzen (Hußmann & Weber 2012).

Herausforderung 4: Wenn Kontextprobleme nicht mehr funktionieren – vertikale Mathematisierung

Nicht alle mathematischen Inhalte lassen sich aus Kontextproblemen entwickeln, zum Beispiel der Übergang von der inhaltlichen Vorstellung der

Gleichwertigkeit von Brüchen (die Lernende anhand der relativen Häufigkeit selbst erfinden können) hin zum Kalkül des Erweitern und Kürzens. Ähnliches gilt für andere Schematisierungsprozesse oder Verallgemeinerungen. Dann müssen durch Strukturprobleme *vertikale Mathematisierungen* (Treffers 1987, S. 247) angeregt werden. Zwar ist das Erweitern und Kürzen keine Antwort auf ein Kontextproblem, doch die allgemeine Idee der Kalkülisierung ist Antwort auf die Kernfrage, wie man komplexe Denkwege schematisieren und dadurch das Denken entlasten kann. Diese kann auch für Lernende erlebbar gemacht werden (vgl. Prediger 2011a).

Herausforderung 5: Wenn Vorschusslernen die Sinnstiftung bedroht - genetische Zwischenplattformen

In der traditionellen fachsystematischen Anordnung mancher Themen geraten genetische Beziehungen aus dem Blick und das Lernen wird zu einem Vorschusslernen. „Genetisch gedacht“ helfen binomische Formeln beispielsweise bei der Lösung des Problems der Ermittlung von Extrema und Zielwerten quadratischer Probleme und müssten im streng genetischen Sinne auch hierfür entwickelt werden. Das würde aber zu einem unterrichtlichen Bogen von vielen Wochen führen und Lernende sowohl inhaltlich als auch in der Wahrnehmung der genetischen Struktur überfordern. Hier gilt es, „genetische Zwischenplattformen“ zu finden, also lokale Probleme und dazu passende Kontexte, die das genetische Entwickeln von Mathematik für die Lernenden plausibel erscheinen lassen, auch wenn die zentralen Verwendungszusammenhänge noch nicht verfügbar sind. So lässt sich für das Thema „binomische Formeln“ die Frage untersuchen, wie man durch das Arbeiten mit Termen Rechenwege verstehen und vereinfachen kann. Im Kontext von Zahlenzaubereien gibt es zahlreiche Phänomene, die auf quadratische Terme führen (Leuders, Marxer & Rülander 2011).

Fazit

Neben empirischen Untersuchungen sind auch curriculare Explorationen eine wichtige fachdidaktische Forschungsmethode. Die konsequente, flächendeckende Durcharbeitung und Umsetzung didaktischer Prinzipien bringt für das altvertraute Konzept des genetischen Lernens neue praktische und theoretische Einsichten in Zusammenhänge, Einschränkungen und Möglichkeiten im Unmöglichen.

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012) (Hrsg.): Mathewerkstatt 5. Berlin: Cornelsen. (Ebenso mit anderer Hrsg-Namenreihenfolge Klasse 6-10).

Alle Autorinnen und Autoren haben am Projekt gleichberechtigt mitgewirkt. Weitere Literatur in der Langfassung des Beitrags unter www.ko-si-ma.de → Publikationen.

Michael LIEBENDÖRFER, Lüneburg, Reinhard HOCHMUTH, Lüneburg

Mathematikinteresse im 1. Studiensemester

Im Rahmen des khdm wurde an der Universität Kassel ein Projekt[1] angestoßen, um Entstehung, Verlauf und Gegenstände des Mathematikinteresses im ersten Studiensemester zu beschreiben und zu verstehen. Dabei sollen Einflussfaktoren identifiziert werden, die sowohl in den äußeren Bedingungen, als auch in der Person der Studierenden liegen können. Vermutet wird hierbei ein Geflecht an Beziehungen zwischen Interesse sowie dem Erleben und Handeln im ersten Studiensemester. Die theoretische Konzeption greift dabei auf das Modell aus (Grotlüschen, 2010) zurück, in dem Interessehandlungen immer in pragmatischen Zusammenhängen stehen, aber auch habituelle Einflüsse, also nicht reflektierte eigene Eigenschaften und Handlungen, eine wesentliche Rolle spielen.

Mathematikinteresse

Aus Schulstudien ist bekannt, dass Mathematikinteresse positiv beispielsweise mit Tiefenlernen, Anstrengungsbereitschaft und Erfolg zusammenhängt (Frenzel, Goetz, Pekrun, & Watt, 2010). Dabei wird Interesse nicht mehr nur als feste Disposition gesehen, sondern zunehmend als Variable aufgefasst, auf die auch eingewirkt wird, vgl. (Köller, Baumert, & Schnabel, 2001) oder (Heinze & Reiss, 2004). Studien hierzu sind überwiegend quantitativ und betrachten den Gegenstand „Mathematik" oft ohne Spezifizierung. Qualitative Untersuchungen sind selten, hervorzuheben ist aber die Dissertation (Bikner-Ahsbahs, 1999) zum Interesse hochinteressierter Schüler, in welcher der Gegenstand des Interesses genauer betrachtet wird. Dabei erweisen sich „kognitive Problemlösetätigkeiten" als Facette mit höchster Korrelation zum Interesse ($r=0.5$, $p<0,01$), wogegen etwa „historischer Bezug" nicht mit Interesse korreliert.

Inwiefern sich diese Ergebnisse auf die Hochschule übertragen lassen ist offen, Untersuchungen an der Hochschule stehen weitgehend noch aus. (Daskalogianni & Simpson, 2002) haben für ihre Studie in England Interesse als einen Aspekt des „Cooling off"-Phänomens betrachtet und beobachten, dass Interesse in den ersten 4-6 Wochen an der Universität bei allen deutlich nachlässt, und sich dann der weitere Weg entscheidet. Während ein Typus von Studierenden das Interesse wiederfindet, resignieren andere. Als Grund wird die falsche Wahl von Lernstrategien und mangelnde Anpassung von Beliefs vermutet. Allgemeiner wird Interesse oft mit der self-

[1] Diese Untersuchung ist in der BaGym-AG des khdm verortet, die aus Mitteln der VolkswagenStiftung und der Mercatorstiftung finanziert wird.

determination theory (SDT), z.B. (Deci & Ryan, 2000) untersucht, in der drei notwendige Faktoren für geistiges Wohlergehen, Wachstum und Interesse gesehen werden: **Autonomieerleben** im Sinne eines selbstkontrollierten und bestimmten Handelns, das dem eigenen Willen und Selbstbild entspricht, **Kompetenzerleben** als das Gefühl, Erfolg zu haben und dafür verantwortlich zu sein, sowie **soziale Eingebundenheit**, also das Gefühl andere einbeziehen zu können und von anderen nicht vergessen zu werden.

Forschungsdesign

Hauptstudie soll eine Erhebung im WS 2012/13 sein, die Interesse und Studienerleben der neuen Studierenden begleitend erforscht, um den dynamischen Aspekten des Interesses gerecht zu werden. Im Februar 2012 wurde eine einmalige Gruppendiskussion mit Studierenden als explorative Vorstudie durchgeführt, um Hypothesen zu generieren. Aus dieser Vorstudie werden im Folgenden Ergebnisse berichtet.

Erste Ergebnisse

Die Gruppendiskussion wurde mit fünf TeilnehmerInnen der Vorlesung „Algorithmische Lineare Algebra I“ durchgeführt. Das Sampling war sehr breit: Ein Lehramtsstudent (1. Semester), eine Bachelorstudentin (1. Semester), ein Doppel-Bachelor-Student Mathematik/Biologie (3. Semester), eine Studentin der Physik (3. Semester) und ein Bachelorstudent (1. Semester), der zuvor schon zehn Semester im ähnlichen Studiengang „Computational Mathematics“ eingeschrieben war. Die Gruppe hat 105 Minuten über fünf Leitfragen zum Studienerleben und Interesse diskutiert und auch Raum für eigene Anmerkungen bekommen. Die Diskussion wurde als Tondokument aufgenommen, transkribiert und induktiv sowie deduktiv codiert. Es wurde bewusst eine Gruppenmethode gewählt, um kollektive Handlungsmuster in einem authentischen Rahmen zu betrachten.

Bezüglich der Gegenstände des Interesses konnten wenige Erkenntnisse gewonnen werden. Zwar wurden im Gespräch immer wieder vage Gegenstandsbereiche als interessant bezeichnet, auf Nachfrage konnten diese jedoch nicht konkretisiert werden. Das ist z.T. auf die Gruppenmethode zurückzuführen, bei der nicht sehr tief nachgefragt werden kann. Zudem bietet das Erleben der Studierenden aus Sicht der SDT auch schlechte Rahmenbedingungen für die Entstehung von Interesse an Hochschulmathematik: Das vorherrschende Gefühl bezüglich **Autonomie** ist Zwang, die Übungsblätter machen zu müssen (*„einfach nur noch dasitzen, um IRGENDWIE die Punktzahl zu erreichen“*). Positive Autonomie bezieht sich auf den Umgang mit dem System, nicht aber auf die Inhalte. Ähnlich ist das **Kompetenzerleben**: 4 von 5 Teilnehmenden erlebten sich meistens als inkompetent, sowohl in der Vorlesung als auch bei den Übungsblättern. Die fünfte Teilnehmerin dagegen erlebte sich oft als kompetent und vertrat das auch gegenüber der Gruppe. Wenn Kompetenz erlebt wurde waren die Schilderungen aller Studierenden emotional positiv belegt, ansonsten dominerten bei beiden Faktoren negative Gefühle (Angst, Frust, Verzweiflung). Ein Teilnehmer schilderte z.B., dass er *„... wirklich bis nahezu 100 Prozent davon überzeugt war, dass das alles so stimmt. Und bekam es dann wieder und es war einiges rot angestrichen, f dahinter und so weiter"*. Die **soziale Eingebundenheit** wurde kaum und wenig emotional angesprochen.

Es kam auch einiges zur Sprache, was ursprünglich nicht direkt im Forschungsfokus lag: Die vielen negativen Emotionen, die von allen geschildert wurden sind bemerkenswert. Die Belastung in der neuen Situation, Aufgaben nicht zu können (obwohl der Inhalt z.T. „offensichtlich" klar war) oder die Aufgabenstellung gar nicht erst zu verstehen, wurde als sehr erdrückend erlebt (*„dann hat man den ganzen Frust schon vor Augen und möchte sich gar nicht mehr anschauen und bewältigt sie [die Aufgaben] dann gar nicht"* oder *„und dann war halt einfach auch die Angst da, vor jeder noch so schwierigen Aufgabe einfach zu sagen ‚Scheiße, ne', Mauer."*). Resultierende Strategien sind Versuche, eine Lösung für das jeweils nächste Übungsblatt zu bekommen, ohne langfristig Wissen aufzubauen. Diese werden im Internet und in Büchern gesucht, Theorie aus Büchern oder dem eigenen Skript wird gemieden („*Aus dem Übungsbuch von dem Fischer (...) da habe ich auch nur das Übungsbuch mit Lösungen, und nicht das Theorie-Buch"*). Selbst die beste Studentin in der Runde, die fast alle Aufgaben selbst gelöst hat, berichtete: *„In Linearer Algebra habe ich nicht EINmal meine Mitschriften aus der Vorlesung angeguckt, immer nur in Büchern nachgeguckt für die Aufgaben"*. Insbesondere Abschreiben wurde von den Studierenden selbst thematisiert und offen und als sehr selbstverständlich geschildert (*„... dann saß ich da Zuhause, hab stupide abgeschrieben und hab das dann montags eingeworfen"* oder *„...Nachhilfelehrer hat alles gemacht, und versucht auch alles zu erklären, und wir so ‚oh Gott, schnell weg, weg' und ‚ich will damit nichts zu tun haben.' Ich will meine 50 Prozent und das war's."*). Dem Eindruck nach geschieht es organisiert, allseits akzeptiert und nahezu flächendeckend. Mehrfach wurde von Wegen berichtet, die sich rasch etablieren. (*„Und der Rest hat dann mehr oder weniger erwartet, dass das von denen dann gelöst wird."*) Dabei wird fehlendes inhaltliches Verständnis nicht angesprochen.

Diskussion und Ausblick

Eine pauschale Verallgemeinerung der Ergebnisse wäre sicher falsch. Die Selbstverständlichkeit, mit der manche Themen, wie beispielsweise das

Abschreiben vor der Gruppe angesprochen wurden, lässt aber vermuten, dass solches Verhalten verbreitet ist.

Hinsichtlich der Faktoren der SDT sind die Ergebnisse ernüchternd. Sowohl die als Zwang erlebte Pflicht, die Aufgaben zu bearbeiten, als auch das Gefühl, nicht kompetent zu sein, behindern das Interesse. Nicht klar ist jedoch, ob es den Lehrenden möglich ist, diese Gefühle zu mindern oder sogar umzukehren. Die oftmals kurzfristig ausgerichteten Arbeitsstrategien der Studierenden sind hinderlich. Offensichtlich gilt es einen Paradigmenwechsel zu vollziehen: Während in der Schule Theorie dazu dient, Aufgaben zu lösen, werden die Aufgaben an der Universität zum Hilfsmittel, um die Theorie zu verstehen. Es muss also eine Verschiebung von Prioritäten stattfinden. Hinzu kommen Schwierigkeiten mit der formalen Mathematik. Während das Zusammenspiel von formalen Beziehungen, Kalkülen und Anschauung bei MathematikerInnen zu großem Interesse führen kann, haben AnfängerInnen erhebliche Schwierigkeiten damit. Zur weiteren Analyse soll u.a. das Modell aus (Tall, 2008) genutzt werden, das Mathematik in diese drei „Welten“ gliedert. In der Hauptstudie sollen typische Interesseverläufe skizziert und insbesondere das Zusammenspiel von Autonomie- und Kompetenzerleben und Emotionen differenzierter beleuchtet werden.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (1999). *Mathematikinteresse : eine Studie mit mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern*. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Daskalogianni, K., & Simpson, A. (2002). „Cooling-off“: The phenomenon of a problematic transition from school to university. *Proceedings of the second international conference on teaching mathematics at the undergraduate level* (S. 103–110). Crete.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The„ what“ and„ why“ of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. *Psychological inquiry*, *11*(4), 227–268.

Frenzel, A. C., Goetz, T., Pekrun, R., & Watt, H. M. G. (2010). Development of Mathematics Interest in Adolescence: Influences of Gender, Family, and School Context. *Journal of Research on Adolescence*, *20*(2), 507–537. doi:10.1111/j.1532-7795.2010.00645.x

Grotlüschen, A. (2010). *Erneuerung der Interessetheorie die Genese von Interesse an Erwachsenen- und Weiterbildung*. Wiesbaden: VS, Verl. für Sozialwiss.

Heinze, A., & Reiss, K. (2004). Mathematikleistung und Mathematikinteresse in differentieller Perspektive. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung*. Münster: Waxmann.

Köller, O., Baumert, J., & Schnabel, K. (2001). Does Interest Matter? The Relationship between Academic Interest and Achievement in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(5), 448–470.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 5–24.

Jan LIETZAU, Berlin, Martin STEIN, Münster

Prozessbezogene Kompetenzen und ihre Unterstützung in online-Lernportalen

Die behavioristische Vorstellung des Lehrens und Lernens von Mathematik führte in den 60er Jahren zum Ansatz des *programmierten Lernens*. Mit großem Aufwand wurden Kurse zu den verschiedensten Themen - nicht nur zur Mathematik - entwickelt, die aus einem System von kurzen Lehrsequenzen mit anschließenden Verständnisüberprüfungen bestanden. Bei Fehlern wurde der Lerner zu früheren Stellen des Kurses zurückverwiesen, bei richtigen Antworten wurde der Lehrgang fortgesetzt. Die in dieser Phase gewonnenen Erkenntnisse über die Prinzipien einer kleinschrittigen Aufbereitung des Lernstoffs und die Steuerung von Lernprozessen waren eine wesentliche Vorbedingung für den schnellen Siegeszug der Rechner in der nachfolgenden Phase des *computerbasierten Lernens*. Mit dem Aufkommen der ersten Personalcomputer konnte jetzt mit relativ einfachen Mitteln eine saubere Trennung zwischen der Rolle des Lerners und der Ablaufkontrolle vorgenommen werden, wobei letztere vollständig dem Programm übertragen wurde. Die technische Weiterentwicklung mit verbesserten Grafikprozessoren und Möglichkeiten von Bild- und Tonübertragung führte in den Folgejahren zu einem stetig wachsenden Angebot an Software für das computerbasierte Lernen (CBL) im Bereich der Mathematik. Mit der Entwicklung des world wide web, das mit dem 1993 auf den Markt gekommenen Mosaic-Browser für eine breite Masse von Nutzern zugänglich wurde, wurden Lern- und Arbeitsformen möglich, bei denen die Lehrmaterialien nicht mehr auf dem PC installiert, sondern online verfügbar waren. Mittlerweile gibt es alleine im deutschsprachigen Bereich über 10 Lernportale, die sich speziell oder zumindest zu einem wesentlichen Teil der Aufgabe verschrieben haben, Schülerinnen und Schülern beim Lernen von Mathematik zu helfen, bzw. ihnen Übungsmaterial zur Verfügung zu stellen.

Gegen derartige Angebote wird von Seiten vieler Lehrenden an Schulen und Hochschulen eingewandt, sie taugten höchstens zu einem Lernen im Sinne von „drill and practice". Tatsächlich zeigt eine Analyse bestehender Angebote (vgl. z.B. Stein, Wittmers 2012), dass diese Einschätzung in vielen Fällen zutrifft – es kann daraus aber nicht geschlossen werden, dass dies ein *systemimmanenter* Mangel derartiger Angebote ist.

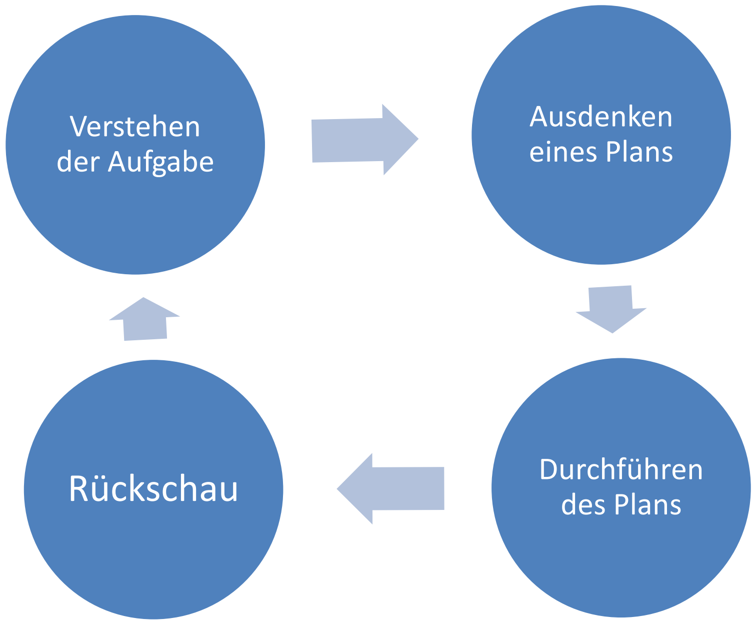
In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, welche Arten prozessbezogener Kompetenzen in online-Lernportalen gefördert werden können, und welche Voraussetzungen diese dafür erfüllen müssen. Wir beschränken uns hierbei auf Internetplattformen, die folgende einschränkende Bedingungen erfüllen:

- Es werden *Aufgaben* gestellt, die zu lösen sind. Damit entfallen Portale für blended learning sowie Plattformen, die lediglich Instruktionsmaterial – Texte, Videos etc. – enthalten.
- Die Arbeit muss ohne menschlichen Tutor oder Instruktor ablaufen können.
- Die Plattformen haben keine kollaborative Komponente wie Chats o.ä.

1. Das Prozessmodell für das Problemlösen nach Polya

Unter den angegebenen Einschränkungen entfällt von den üblicherweise genannten vier prozessbezogenen Kompetenzen das *Argumentieren / Kommunizieren*. Somit verbleiben *Medien und Werkzeuge verwenden*, *Problemlösen* und *Modellieren* als potentielle Kandidaten für die Realisierung in online-Lern- und Übungsportalen.

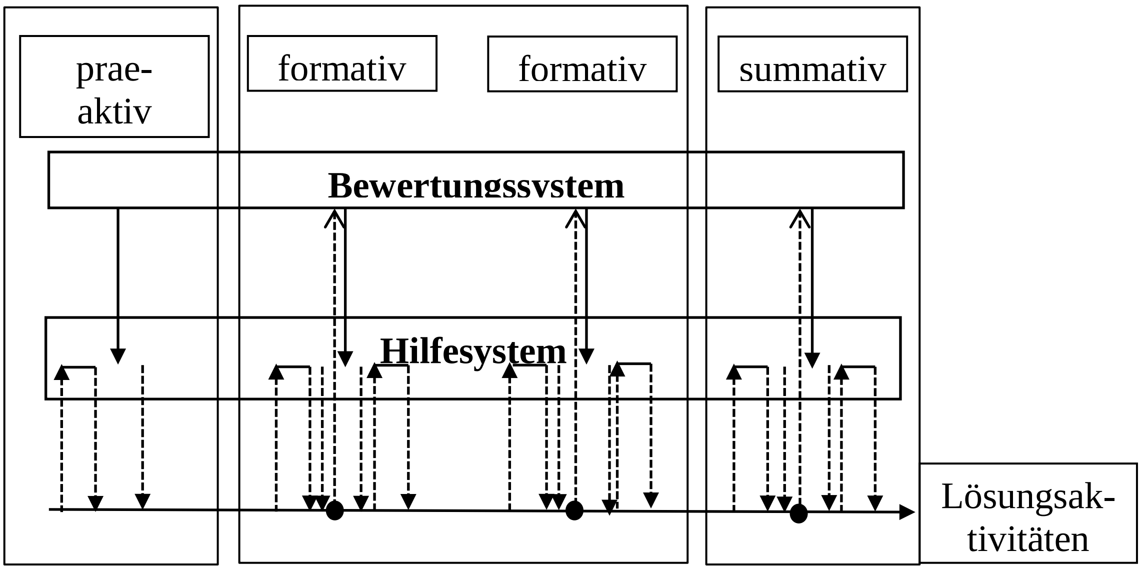
Wir beschränken uns hier wegen des beschränkten Umfangs auf das Problemlösen und erinnern an den bekannten Kreislauf nach Polya:



In diesem Kreislauf ist eine *vorbereitende Phase* zu erkennen, die aus dem *Verstehen* und dem *Ausdenken eines Plans* besteht. Es schließt sich mit dem *Durchführen des Plans* eine aus in der Regel mehreren Aktionen bestehende Phase an, abschließend gefolgt von der *Rückschau*, in der sowohl das Ergebnis überprüft wird (bzw. werden sollte), als auch über das Vorgehen reflektiert werden kann.

2. Ein Prozessmodell für das Zusammenspiel zwischen Nutzer- und System-Aktivitäten

Im Rahmen des Projekts Eva-CBTM (Evaluation computerbasierter Trainingsprogramme in Mathematik) wurde von Stein (2012) ein prozessorientiertes Modell des Arbeitsablaufs in computerbasierten Übungsprogrammen entwickelt, das hier kurz vorgestellt werden soll. Es hebt auf das Zusammenspiel von Bewertung (entspricht eine Lösung den Vorgabe, ist sie korrekt / falsch?) und Hilfestellungen ab.



Prae-aktiv bezeichnet die Phase *vor* Beginn der Lösungsaktivitäten. Eine Nutzereingabe ist noch nicht erfolgt.

Formativ bezeichnet den *Verlauf* des Arbeitsprozesses. Nur bei einem System, das die Eingabe von Zwischenschritten und Teillösungen erlaubt, kann von einer formativen Phase gesprochen werden.

Summativ: bezeichnet die Phase *nach* Beginn der Lösungsaktivitäten. Die letzte Nutzereingabe ist erfolgt und wird bewertet.

3. Prozessbezogenes Potential von computerbasierten Übungsprogrammen

Auch wenn die Vielzahl unterschiedlicher Modellierungen des Problemlöseprozesses zeigt, dass Polyas Modell nicht geeignet ist, beliebige *reale* Problemlöseprozesse zu modellieren, bleibt es als normatives Modell doch weiterhin hervorragend geeignet, gelenkte Problemlöseprozesse zu strukturieren. Aus den Phasen ergeben sich Minimalforderungen an ein CBTM-System:

- *Verstehen der Aufgabe*: Das CBTM-System benötigt eine *prae-aktive Phase*. Der Benutzer sollte vor der ersten Eingabe Möglichkeiten haben, über das Problem zu reflektieren und erste Hilfen und Tipps anzufordern
- *Ausdenken eines Plans*: einerseits findet das Ausdenken eines Plans im Idealfall *vor* Beginn der eigentlichen Lösungsaktivitäten statt – dies verweist wieder auf die Notwendigkeit einer prae-aktiven Phase. Andererseits sollte das System die Möglichkeit bieten, die einzelnen Lösungsschritte zu planen und den Ablauf der Planung zu kontrollieren und korrigieren. Dies erfolgt dann im Rahmen von Nutzereingaben während der somit zwingend erforderlichen *formativen Phase*.
- *Durchführen des Plans*: Jedes halbwegs komplexe Problem wird in mehreren Schritten gelöst – ein System, das leidglich die Eingabe des Ergebnisses ermöglicht, kann den Problemlöseprozess nicht derart begleiten, dass dies der Förderung der Problemlösekompetenz dienen könnte.
- *Rückschau*: Die Rückschau als Bestandteil des Problemlöseprozesses ist wiederum ein Einzelschritt in einer Abfolge mehrerer Aktionen – auch hierfür wird ein System benötigt, das einen formativen Teil besitzt. Zugleich befinden wir uns damit auch im summativen Teil des Prozessmodells: man kann z.B. in Form eines „Schiebepuzzles“ relevante Lösungsschritte in die richtige Reihenfolge bringen oder irrelevante aussortieren lassen.

Somit ergibt sich, dass nur solche CBTM-Systeme prozessbezogenes Potential haben, die auf der Basis eines Prozessmodells mit prae-aktiver, formativer und summativer Phase programmiert sind. Zugleich sollte offenkundig klar sein, dass die Forderung nach dieser Systemstruktur auch eine notwendige Bedingung ist: Ein System, das von einem komplexen Lösungsweg lediglich das Endprodukt – vielleicht nur eine einzige Zahl - erfasst – das also nur den summativen Teil des Prozesses abdeckt – kann auf dieser Grundlage dem Lerner keine kompetente Unterstützung beim Erwerb einer höheren Problemlösekompetenz geben.

Literatur

Polya, G. (1949): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern: Francke Verlag

Stein, M., Wittmers, E. (2012): Mathematik online – Plattformen zum Lernen und Üben von Mathematik. In: Stein, M. (Hrsg.): Mathematik online. Münster: WTM-Verlag; Seitenzahl noch nicht bekannt.

Anke LINDMEIER, Kristina REISS, Petra BARCHFELD, Beate SODIAN

Mit welcher Karte gewinne ich eher? Fähigkeiten zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten in den Jahrgangsstufen 4 und 6[1]

Stochastik hat in der Vergangenheit zwar eine kleinere Rolle im Curriculum der Primarstufe gespielt, mit den Bildungsstandards (KMK, 2004) hat sie als Leitidee „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit" aber an Bedeutung gewonnen. Allerdings liegen nur begrenzt und unsystematisch Erkenntnisse über die Fähigkeiten der Kinder in dem Bereich vor. Theoretische Kompetenzmodelle liefern eine Basis, um empirische einordnen zu können (Reiss & Winkelmann, 2009). Eine Basisfähigkeit ist z.B. die Differenzierung zwischen sicheren, möglichen und unmöglichen Ereignissen. Kinder der 2. Jahrgangsstufe konnten in einer Studie zwischen sicheren und möglichen (nicht sicheren) Ereignissen gut differenzieren, allerdings fiel ihnen die Unterscheidung zwischen unmöglichen und unwahrscheinlichen Ereignissen noch schwer. Die Vierfeldertafelanalyse ist eine beispielhafte komplexe Anforderung, die in der 2. Jahrgangsstufe nur in einfachen Fällen verstanden wird (Lindmeier et al., 2011).

1. Vergleich von Wahrscheinlichkeiten

Um die Fähigkeiten von Kindern in einem Bereich mittleren Anforderungsgrads einschätzen zu können, wurden Aufgaben zum Wahrscheinlichkeitsvergleich entwickelt. Fehlvorstellungen dazu sind beschrieben (Fischbein & Schnarch, 1997). So werden Unterereignisse nicht als solche erkannt (*conjunction fallacy*). Allerdings kann dabei eine Rolle spielen kann, welche Ereignisse besser vorstellbar sind (Fiedler, 1988). Außerdem werden Ereignisse, die der Grundpopulation ähneln, als wahrscheinlicher angesehen als unrepräsentativ wirkende Ereignisse (*misconception of representativeness*). Zudem werden Schwierigkeiten im Umgang mit zusammengesetzten Ereignissen beschrieben (*compound and simple events*).

2. Forschungsfragen

Die berichtete Untersuchung bezieht sich auf folgende Fragen: Über welche Fähigkeiten zum Wahrscheinlichkeitsvergleich verfügen Kinder der Jahrgangsstufen 2 und 4 in einem formalen Kontext? Zeigen sich dabei bekannte Fehlvorstellungen?

---

[1] Die Untersuchung wurde im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms *Wissenschaft und Öffentlichkeit* im Projekt *Die Entwicklung der Fähigkeit zum Umgang mit fragiler und konfligierender wissenschaftlicher Evidenz im Grundschulalter* durchgeführt.

3. Design der Studie und Stichprobe

Bei Studien im Primarbereich sind besondere Erhebungsbedingungen zu beachten. Es bietet sich die Interviewform an, da dabei in altersadäquaten, spielähnlichen Kontexten die Fähigkeiten unabhängig von Lesekenntnissen erfasst werden können. Zudem kann in Grundschulalter nicht von einer standardisierten Sprache im Bereich Stochastik ausgegangen werden. Deshalb wurde darauf verzichtet, fachsprachliche Begriffe wie *Wahrscheinlichkeit* oder *sicheres Ereignis* zu verwenden.

Zur Erfassung der Fähigkeiten wurde ein Glückspiel simuliert. Grundlage war ein Beutel mit 15 blauen (B) und 10 roten (R) Steinen, aus dem mit Zurücklegen gezogen wurde. Auf Karten wurden Ereignisse präsentiert, so dass mit der Karte R/B gewann, wer in zwei Zügen zuerst einen roten und dann einen blauen Stein zog. Mit der Frage *„Was glaubst du, welche Karte ist die bessere? Mit welcher gewinnst du eher?“* wurden die Kinder aufgefordert, die Gewinnwahrscheinlichkeiten zweier Karten zu vergleichen. Die Karten konnten dabei entweder zwei Züge oder einen Zug erfordern, wobei ein grauer Symbolstein (G) für das Teilereignis „ein roter oder ein blauer Stein wird gezogen“ stand. Acht verschiedene Paare (Tab. 1) wurden mit den Kindern bearbeitet. Zusätzlich zur Identifizierung der besseren Karte wurde eine Begründung für die Entscheidung eingefordert.

Insgesamt nahmen an der berichteten explorativen Untersuchung N = 40 (19 weiblich) Kinder teil, davon n = 17 (8 weiblich) aus der Jahrgangsstufe 4 sowie n = 23 (11 weiblich) aus der Jahrgangsstufe 6 einer Realschule.

3. Ergebnisse

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Die Ratewahrscheinlichkeit der Aufgaben beträgt 50%, so dass erst eine signifikante Abweichung der Lösungsrate von 0,5 als Fähigkeit der Kinder gewertet werden kann. Dies trifft bei zwei Aufgaben nicht zu. Der Vergleich der beiden Elementarereignisse B gegen R (Aufgabe WV 1) wurde sehr gut gelöst, was darauf hinweist, dass das Aufgabenformat von den Kindern verstanden wurde. Die Aufgabe R gegen B/B (WV 7) wurde nicht überzufällig gut gelöst, was den Erwartungen entspricht, da der Vergleich dieser Karten nicht mit elementaren Mitteln geleistet werden kann. Die Lösungsraten der beiden Aufgaben WV 6 und WV 3 können Aufschluss darüber geben, ob die Kinder eine Repräsentativitätsfehlvorstellung haben, wobei diese je nach Vergleichskarte erleichternd oder erschwerend wirken kann. Tatsächlich wurde erwartungsgemäß die Aufgabe WV 3 schlechter gelöst als die meisten anderen, während die Lösungsraten für die Aufgabe WV 6 hoch sind. Weiter fällt jedoch auf, dass eine Repräsentativitätsfehlvorstellung auch bei den Aufgaben WV 5 und WV 8 erschwerend wirken würde. Bei beiden Aufgaben wird allerdings die repräsentative Karte (R/B) gegen eine mit grauem Stein verglichen. Offensichtlich erkannten die Kinder dessen Joker-Charakter, obwohl dies nicht expliziert wurde. Die Lösungsraten sind hier fast durchgängig 100%, so dass bei Einsatz des sicheren Teilereignisses keine Repräsentativitätsfehlvorstellung zu Tage treten konnte.

Auf-gabe	*Karte A*		*Karte B*		*4. Jahr-gangsstufe*	*6. Jahr-gangsstufe*	*Anmerkung*
	1.	*2.*	*1.*	*2.*	*Lösungsrate (St.-Abw.)*		
WV 5	R	B	B	G	1,00* (0,00)	1,00* (0,00)	Sicheres Teilereignis Repräsentativität/erschwerend
WV 8	R	G	R	B	0,94* (0,24)	1,00* (0,00)	Sicheres Teilereignis Unterereignis Repräsentativität/erschwerend
WV 6	R	B	R	R	0,88* (0,33)	0,96* (0,21)	Repräsentativität/erleichternd
WV 1	B		R		0,82* (0,39)	0,96* (0,21)	Elementarereignisse
WV 4	B		B	B	0,88* (0,33)	0,91* (0,29)	Unterereignis Einfach-Zusammengesetzt
WV 3	B	B	R	B	0,76* (0,44)	0,87* (0,34)	Repräsentativität/erschwerend
WV 2	R		R	B	0,47 (0,51)	0,52 (0,51)	Unterereignis Repräsentativität/erleichternd Einfach-Zusammengesetzt
WV 7	R		B	B	0,47 (0,51)	0,48 (0,51)	Einfach-Zusammengesetzt

* Lösungsrate signifikant vom 0,5 abweichend.

Tab. 1: Aufgaben zum Wahrscheinlichkeitsvergleich, geordnet nach Lösungsraten für die 6. Jahrgangsstufe

In den beiden übrigen Aufgaben mussten die Kinder jeweils eine Karte mit einem Zug gegen eine mit zwei Zügen vergleichen. Dies fiel im Fall B gegen B/B leicht während der Vergleich der Karten R gegen R/B (WV 2) nicht von der Ratewahrscheinlichkeit abweichend geleistet wurde. Dies ist insbesondere interessant, da die Aufgabe mathematisch äquivalent zum Vergleich R/G gegen R/B (WV 8) ist aber beide Aufgaben deutlich unterschiedliche Lösungsraten aufweisen. Dies kann als Indikator für Schwierigkeiten beim Vergleich von einfachen und zusammengesetzten Ereignissen gewertet werden. Unterereignisse wurden von den Schülerinnen und Schüler meist erkannt, verbalisiert und dann auch genutzt.

Von Jahrgangsstufe 4 nach 6 ist in dieser Studie kein Fähigkeitszuwachs zu beobachten (Skalenmittelwerte Jgst. 4: $M = 6{,}24$, $SD = 1{,}03$; Jgst. 6: $M = 6{,}70$, $SD = 1{,}15$; $t(38) = 1.31$, $p > 0.05$). Allerdings wurden auch Begründungen für die Wahl der Kinder eingefordert. Diese lassen sich kategorisieren, je nachdem ob sie auf zufällige Prozesse Bezug nehmen oder nicht. Bereits in Jahrgangsstufe 4 spiegeln ca. 50 % der Begründungen probabilistische Überlegungen, wobei deren Anteil in Jahrgangsstufe 6 auf ca. 65 % anwächst. Dies stellt allerdings noch keinen signifikanten Anstieg dar ($t(38) = -1{,}85$, $p > 0{,}05$).

5. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorgestellten Studie wurden die frühen Fähigkeiten zum Vergleich von Wahrscheinlichkeiten in einem querschnittlichen Design untersucht. Dabei zeigte sich, dass bekannte Schwierigkeiten bei bestimmten Aufgabenkonstellationen zum Tragen kommen oder auch überdeckt werden können. In der Tendenz verfügen die Schülerinnen und Schüler der 6. Jahrgangsstufe über ein höheres Fähigkeitsniveau, was sich vor allem in besseren Begründungen zeigte. Das Aufgabenformat und die Interviewform erwiesen sich als geeignet für die Kinder im Primar- und beginnenden Sekundarschulalter. Durch systematische Variation der Aufgaben sollten die Befunde dieser explorativen Studie jedoch noch ausgebaut und gefestigt werden. Insgesamt tragen Studien dieser Art dazu bei, detaillierteres Wissen über bestimmte Fähigkeiten im Grundschulalter zu bekommen. Dies ist insbesondere wertvoll, da der Bereich „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit“ einer ist, der Kindern nicht unbedingt leicht zugänglich ist. Frühe Fähigkeiten werden aber bei geeigneten Aufgabenformaten durchaus sichtbar. Sind typische Fehlvorstellungen bekannt, so kann der Mathematikunterricht gezielt auf deren Überwindung abgestimmt werden.

Literatur

Fiedler, K. (1988). The dependence of the conjunction fallacy on subtle linguistic factors. *Psychological Research, 50*(2), 123–129.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education 28*, 96–105.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*.

Lindmeier, A., Reiss, K., Ufer,S., Barchfeld, P. & Sodian, B. (2011). Umgang mit wissenschaftlicher Evidenz in den Jahrgangsstufen 2, 4 und 6: Stochastische Basiskonzepte und Kontingenztafelanalyse. In: R. Haug, L. Holzäpfel (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster: WTM

Reiss, K. & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S.120–141). Weinheim: Beltz.

Torsten LINNEMANN, Basel

Innermathematisches Experimentieren in Lernumgebungen in der Sekundarstufe II

> "Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen, welches sich in einem konkreten Phänomenbereich an Beispielen vollzieht (…) wird im Folgenden als *innermathematisches Experimentieren* bezeichnet." (Leuders, Naccarella, Philipp, 2011, S. 207)

Forschungsfragen

In einer Interventionsstudie, die qualitative und quantitative Anteile hat, in drei Klassen der schweizerischen Fachmittelschule (einer allgemeinbildenden Schule der Sekundarstufe II) wird den folgenden drei Forschungsfragen nachgegangen:

1. Gibt es Zusammenhänge zwischen dem Verhalten von Schülerinnen und Schülern beim innermathematischen Experimentieren und Persönlichkeitsmerkmalen wie zum Beispiel Selbstwirksamkeitsüberzeugung in Mathematik?
2. Leuders et al. (2011) haben ein Kategoriensystem zur Beschreibung experimentellen Verhaltens in klinischen Interviews mit Primarschülerinnen und -schülern und Studierenden des Primarschullehramts entwickelt. Lässt sich dieses Kategoriensystem auf schriftliche Bearbeitungen in der Sekundarstufe II übertragen?
3. Welche Strategien lassen sich bei erfolgreichen Schülerinnen und Schülern feststellen?

Hintergrund

Beim Untersuchen des innermathematischen Experimentierens im obigen Sinne gehen Leuders et al (2011) vom Konzept "Scientific Discovery as Dual Search" von Klahr und Dunbahr (1988) aus, in dem experimentelles Arbeiten als Wechseln vom Hypothesensuchraum zum Experimentesuchraum beschreiben wird. Sie beobachten, dass mit einem zwischengeschalteten Strategieraum Tätigkeiten von Schülerinnen und Schülern besser erklärt werden können.

In Ihrem 3-Räume Modell stellen Leuders et al (2011) also innermathematisches Experimentieren als Arbeiten im Beispielraum, Strategieraum und Hypothesenraum dar. Im Strategieraum werden beispielsweise Strukturen gesucht und Hypothesen geprüft. Das ist eine entscheidende Weiterentwicklung früherer Beschreibungsmodelle, die auch für diese Studie von

Bedeutung ist. Die Hypothesenprüfung kommt beispielsweise in der Arbeit von Haverty et al (2000) noch nicht vor. Diese erkennen beim induktiven Argumentieren drei Aspekte: Data Gathering (Datensammlung), Pattern Finding (Mustersuche) und Hypothesis Generation (Hypothesenbildung).

Design

Die Studie wurde in einer zehnten, elften und zwölften Klasse der Fachmittelschule mit insgesamt 63 Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Zunächst wurde eine erste Lernumgebung zu binomischen Formeln eingesetzt, um die Schülerinnen und Schüler mit der Arbeitsweise in Lernumgebungen vertraut zu machen. Parallel dazu wurde ein Fragebogen unter anderem zu Selbstwirksamkeitsüberzeugungen eingesetzt.

Circa zwei Wochen später wurde eine Lernumgebung zu "Treppenzahlen" eingesetzt, an der die Schülerinnen und Schüler jeweils eine halbe Stunde arbeiteten:

> Manche Zahlen lassen sich als Summe von aufeinander folgenden Zahlen schreiben. Beispiele:
>
> 9=2+3+4 (Treppe mit drei Stufen
>
> 9=4+5 (Treppe mit zwei Stufen)
>
> 8=?
>
> Was können Sie über Treppenzahlen herausfinden?

Die Behandlung dieser Lernumgebung erfordert kein grosses mathematisches Vorwissen, es sind allerdings viele vertiefende Überlegungen möglich, so dass sich die Lernumgebung in verschiedensten Altersstufen einsetzen lässt. Der Einsatz von Treppenzahlen wird in der didaktischen Literatur häufig beschrieben (z.B. Schwätzer, Selter (1998) und Scherer, Steinbring (2007)). Die hier vorliegende Formulierung entspricht weitgehend derjenigen von Leuders et al. (2011).

Am Tage nach der Bearbeitung der Lernumgebung wurden sechs Schülerinnen und Schüler je 15 Minuten interviewt.

Vorgehensweise bei der Auswertung:

- Zunächst werden die Bearbeitungen unter Verwendung des Kategoriensystems von Leuders et al (2011) codiert.
- Daraus werden Variablen, die das Arbeiten in den drei Räumen beschreiben, entwickelt.
- Diese Variablen werden statistisch verglichen mit den Resultaten der Umfrage.

- Mit Hilfe dieser Variablen werden die erfolgreichen Schülerinnen und Schüler ermittelt. Die Bearbeitungen dieser Schülerinnen und Schüler werden qualitativ unter Zuhilfenahme der Interviews analysiert um Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren zu benennen.

Ergebnisse zum Kategoriensystem von Leuders et al (2011)

Es wird vorgeschlagen, das Kategoriensystem mit der Kategorie "Aufgabe verstehen" zu ergänzen. Diese Tätigkeit lässt sich bei vielen Schülerinnen und Schülern beobachten - und gemäss Haverty et al (2000) ist das Reflektieren über die Aufgabe ein wichtiger Aspekt bei erfolgreichen Bearbeitungen. Mit dieser Erweiterung lässt sich das Kategoriensystem von Leuders et al. (2011) für schriftliche Bearbeitungen übernehmen und erfasst Strategien bei den Schülerinnen und Schülern der Fachmittelschule vollständig. Zu berücksichtigen ist, dass bei schriftlichen Bearbeitungen der zeitliche Ablauf der Entstehung nicht nachvollziehen lässt. Der Wechsel zwischen den 3 Räumen lässt sich gut dokumentieren, der typische Ablauf ist: Beispiele generieren, oft als Reihenfolgebeispiel (Beispielraum) -> Gruppenbildung (Strategieraum)-> beispielorientierte Hypothese (Hypothesenraum) -> Bestätigungsbeispiel (Strategieraum)

Ergebnisse der quantitativen Untersuchung zu Persönlichkeitsmerkmalen und dem Vorgehen beim innermathematischen Experimentieren

Die Ergebnisse sind nicht eindeutig. Es gibt eine Klasse, in der mittlere bis hohe Korrelationen zwischen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen und Aspekten des experimentellen Verhaltens feststellbar sind. In dieser Klasse beträgt beispielsweise der Korrelationskoeffizient zwischen der mathematischen Selbstwirksamkeit und der Zahl der sortierten Beispiele 0.663. Dies ist bei 16 Teilnehmenden hoch signifikant.

Über die drei Klassen hinweg bestätigen sich die Korrelationen allerdings nicht. In einer Klasse sind viele Korrelationen negativ, wenn auch nicht signifikant.

Die in den Klassen angetroffenen Bedingungen beim Einsatz der Lernumgebung scheinen wichtiger zu sein als die Persönlichkeitsmerkmale. Dies gibt Anlass zur Vermutung, dass durch einen gezielten Einsatz solcher Lernumgebungen der Erfolg beim innermathematischen Experimentieren stark verbessert werden kann. Dies zeigen auch die Ergebnisse von Leuders und Philipp (2011).

Ergebnisse zu den Bedingungen für erfolgreiches Experimentieren

Der Wechsel zwischen dem Generieren von Hypothesen, dem Strukturieren, dem Hypothesenbilden und dem Prüfen von Hypothesen erweist sich als zentral für das erfolgreiche Experimentieren. Dies bestätigt Ergebnisse von Leuders et al (2011) und Haverty et al. (2000).

Zum erfolgreichen Experimentieren ist es wichtig, eine genügende Anzahl von Beispielen zu generieren, aber nicht bei dieser Tätigkeit zu verweilen, sondern rechtzeitig mit der Strukturierung zu beginnen. Erfolgversprechend ist es, eine einmal getroffene Hypothese weiter zu entwickeln, zu vertiefen, und komplementär dazu verschiedene Ansätze zu verfolgen. Hier ist es wichtig, sich klar zu machen, mit welcher Intention gerade gearbeitet wird.

Wichtig ist natürlich auch ein gewisses Engagement bei der Bearbeitung der Aufgabe.

Dies sind wertvolle Hinweise für geeignete Lernwegbegleitungen, die Anknüpfungspunkte für die weitere Arbeit schaffen.

Literatur

Haverty, A., Koedinger, R. K., Klahr, D. und Alibalt, M. (2000): Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. In: Cognitive Science, 24, 249 - 298.

Klahr, D. und Dunbar, K. (1988): Dual space search during scientific reasoning. Cognitive Science, 12, 1 – 48.

Leuders, T., Naccarella, D. und Philipp, K. (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32(2), 205 - 231

Philipp, K., Leuders, T. (2011). Experimentelles Denken fördern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 619-622. Münster: WTM Verlag

Scherer, P. und Steinbring, H (2007).: Zahlen geschickt addieren. In: Müller, G.; Steinbring, H.; Wittmann, C. (Hrsg.): Arithmetik als Prozess, 2. Auflage. Seelze: Kallmeyer:

Schwätzer, U. und Selter, C. (1998): Summen von Reihenfolgezahlen - Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. In: Journal für Mathematik-Didaktik. 19(2-3), 123 - 148.

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Aarau

Sprachkompetenz im Mathematikunterricht

Die Forderung nach einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht lässt es ratsam erscheinen, die Kompetenzerwartungen, wie sie in den nationalen Bildungsstandards formuliert sind, noch einmal genauer mit Blick auf kognitiv-linguistische und sozial-kommunikative Voraussetzungen und Implikationen unter die Lupe zu nehmen. Der folgende Beitrag untersucht im ersten Teil die Kompetenzbeschreibungen HarmoS-Mathematik Jahrgangsstufe 11 der Schweizer Bildungsstandards, setzt die Ergebnisse im zweiten Teil in Beziehung zur Konzeption der „mathematical literacy" von PISA2003 und geht im dritten Teil auf die Konzeption der „plurilingual and intercultural competence" ein, wie sie von Mitgliedern der Language Policy Division des Europarats lanciert wird (Beacco et al. 2010).

1. Sprachlich-kommunikative Implikationen mathematischer Bildungstandards

Das HarmoS Kompetenzmodell Mathematik umfasst 5 Kompetenzbereiche und 8 Kompetenzaspekte (Linneweber-Lammerskitten & Wälti 2008, EDK 2011), für jede der drei Jahrgangsstufen (4, 8, 11). Da die resultierenden Kompetenzbescheibungen in vollständiger „Cando"-Satzform beschreiben, was (alle) Schülerinnen und Schüler am Ende der jeweiligen Jahrgangsstufe können sollen, ist es relativ einfach, den Kern der darin intendierten kognitiv-linguistischen Aktivitäten herauszulösen. Die folgende Aufstellung, die sich auf die Jahrgangsstufe 11 (der etwa 15 Jährigen am Ende der obligatorischen Schulzeit) bezieht, abstrahiert von den inhaltlichen Komponenten und fasst ähnliche Aktivitätsbeschreibungen zusammen:

- Fachausdrücke verstehen, verwenden und erklären; Fachausdrücke den entsprechenden Objekten und Eigenschaften zuordnen und umgekehrt, Formen und Muster erkennen, unterscheiden und beschreiben, Gesetze und Regeln kennen und mit eigenen Worten wiedergeben, Sachverhalte erfassen und beschreiben
- Berechnungen, Umformungen und Konstruktionen durchführen (schriftlich, halbschriftlich oder mündlich, mit oder ohne Hilfsmittel)
- elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner, Computer), Nachschlagewerke (z.B. Formelsammlungen), Konstruktionswerkzeuge (Zirkel, Geodreieck) benutzen
- die Berechnungen, Umformungen, Konstruktionen, Begründungen anderer verstehen und eigene Überlegungen so formulieren und dar-

stellen, dass sie für andere nachvollziehbar und dem Gegenstand angemessen sind

- (Problem)Situationen (des Alltags) mit mathematischen Mitteln interpretieren, beschreiben und modulieren, um eine Lösung unter Zuhilfenahme von mathematischen Mitteln zu ermöglichen
- Behauptungen aufstellen und begründen, Überlegungen und Rechenwege transparent machen und rechtfertigen, für mathematische Phänomene und Gesetzmässigkeiten eine anschauliche Begründung geben, einfache Argumentationen, Beweise und Gegenbeispiele verstehen und reproduzieren
- eigene und fremde Resultate auf ihre Richtigkeit überprüfen, die Resultate mit Blick auf die ursprüngliche Problemstellung interpretieren und ihre Verwendbarkeit für zukünftige Problemlösungen überdenken.
- mathematische Zusammenhänge und Gesetzmässigkeiten erkunden und erforschen, Vermutungen aufstellen und durch systematisches Ausprobieren bestätigen oder widerlegen

Einige der benutzten Infinitivkonstruktionen nehmen explizit Bezug auf Sprach-/ Kommunikationskompetenzen. Insbesondere in der ersten Gruppe von Tätigkeiten geht es ja im Kern um die Relationen zwischen den drei Ebenen des semantischen Dreiecks: Mathematische Objekte, Sachverhalte, Sätze, Operationen sollen begrifflich erfasst, aber auch terminologisch bezeichnet werden, mathematische Begriffe sollen an Beispielen exemplifiziert und (mit eigenen Worten) beschrieben werden, die Bedeutung von Fachtermini soll erklärt und durch Beispiele veranschaulicht werden. In der vierten Gruppe ist das Verstehen der anderen und das verständliche Formulieren und Darstellen im Fokus.

Bei anderen Infinitivkonstruktionen sind implizit Sprachkompetenzen mitgedacht: ein echtes Verstehen, Behaupten, Interpretieren, Beschreiben, Begründen, Argumentieren, Rechtfertigen, Überprüfen, Überdenken, Vermutungen aufstellen, kommt vielleicht in einfachen Fällen mit rudimentären sprachlichen Mitteln aus, in der Regel sind hier aber anspruchsvollere Sprachkompetenzen erfordert, die weit über die Beherrschung einzelner Fachtermini hinaus geht.

Bei einer dritten Gruppe von Infinitivkonstruktionen ist zwar ein Erwerb durch reines Imitationslernen denkbar, z.B. beim Berechnen, Umformen, Konstruieren, dem Gebrauch von manuellen Hilfsmitteln etc.. Doch ist aus mathematikdidaktischer Sicht auch hier immer ein sinnvolles Lernen anzustreben, so dass der Mechanisierung ein sprachbegleitetes Lernen vorher-gehen und die Anwendung des Gelernten durch „lautes Denken“ ergänzt werden können sollte.

2. Sprachlich-kommunikative Implikationen der „mathematical literacy“

Der stärkere Akzent auf sprachlich kommunikativen Komponenten mathematischer Kompetenz in den HarmoS Bildungsstandards kommt nicht von ungefähr. Da nationale Bildungsstandards allgemeine Bildungsziele konkretisieren und in Form von Kompetenzmodellen systematisch ordnen sollen (Klieme et al. 2003: 21) ist dies eine Konsequenz der bereits in diesen angelegten Emanzipations- und Partizipationsideen. Die Leitidee einer Erziehung zum mündigen Bürger wird z.B. in der PISA-Konzeption der mathematical literacy aufgegriffen, die einen grossen Einfluss auf die Entwicklung der zeitgenössischen Bildungstandards für Mathematik hatte. Hier findet man Formulierungen wie: „capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world“, „to make well-founded judgements“, „to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen.” "communicating, relating to, assessing and even appreciating and enjoying mathematics“ (OECD 2003: 24f.). Identifizieren, verstehen, begründen, beurteilen, kommunizieren, in Beziehung setzen, prüfen usw. sind kognitive Aktivitäten, die nicht oder in der Regel nicht sprachunabhängig sind. Es sind ferner Aktivitäten auf hohem kognitiven Niveau, die Information, Kommunikation, eine diskursive Auseinandersetzung mit anderen, ein Eingebundensein in eine Sprach- und Kulturgemeinschaft und sozialkommunikative Kompetenzen voraussetzen.

3. „Plurilingual and intercultural competence“ im Mathematikunterricht.

Kognitiv-linguistische und sozial-kommunikative Kompetenzen sind somit nicht als blosse Hilfskompetenzen ausserhalb der mathematischen Kompetenz anzusehen, sondern als integrierter Bestandteil der letzteren. Sie sind mit Bezug auf das Lernen von Mathematik auf der Ebene der allgemeinen Bildungsziele und der Ebene der Bildungsstandards, aber auch auf der Ebene des Mathematikunterrichts von Bedeutung:

- Sie sind einerseits Lernvoraussetzungen, die bei der Unterrichtsplanung ebenso berücksichtigt werden müssen, wie die Lernvoraussetzungen im engeren Sinn. Sie sind nötig, um dem Mathematikunterricht organisatorisch und inhaltlich zu folgen: Anweisungen, Impulse, Fragen, Antworten verstehen, Lernumgebungen selbständig erarbeiten, aktiv an Problemlösungen mitarbeiten, Erkenntnisse schriftlich festzuhalten, etc.

– Sie sind andererseits Lernergebnisse, die ebenso wie die mathematischen Lernergebnisse im engeren Sinn zielorientiert geplant und unterstützt werden sollten.

Da Schulsprache und Erstsprache für viele Schülerinnen und Schüler in der heutigen Zeit differieren, ist für sie die Fähigkeit (und Bereitschaft) mehr als eine Sprache zu sprechen (plurilinguale Kompetenz) und sich auf andere Kulturen einzulassen (interkulturale Kompetenz) unerlässlich. Für Lehrpersonen ist sie als Voraussetzung für „language awareness“ schwerlich verzichtbar, weil anderenfalls das Problembewusstsein für sprach-/kulturbedingte Lernhindernisse fehlt. Für alle anderen Lernenden ist sie eine Chance, andere und schlussendlich sich selbst besser zu verstehen, und fügt sich ein in die Zielvorstellung von Selbstverwirklichung und Partizipation. Es gibt aber noch einen innermathematischen Grund. Da Mathematik selbst (ein Stück weit) als Sprache interpretiert werden kann, die einerseits starke universale, kultur- und sprachübergreifende Züge hat, andererseits aber gerade sehr subjektive Bezüge auf eigene Vorstellungen, Begrifflichkeiten, Lernwege und Lerngewohnheiten aufweist, darf man erwarten, dass ein Verständnis dafür, wie Sprache funktioniert, und die Fähigkeit, sich in andere Denkweisen und -gewohnheiten einzudenken, für das mathematische Lernen hilfreich ist.

Literatur

Beacco, J.-C., Byram, M., Cavalli, M., Coste, D., Egli Cuenat, M., Goullier, F. & Panthier, J. (2010): Guide for the development and implementation of curricula for plurilingual and intercultural education. Retrieved from: http://www.coe.int/t/dg4/linguistic/Source/Source2010_ForumGeneva/GuideEPI2010_EN.pdf (June 2011).

EDK (Schweizerische Konferenz der Erziehungsdirektoren) (2011). Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards. Retrieved from: http://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf (March 2012).

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K. Rost, J., Tenorth, H.-E., Vollmer, H. J. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: eine Expertise. Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Linneweber-Lammerskitten, H. and Wälti, B. (2008) HarmoS Mathematik: Kompetenzmodell und Vorschläge für Bildungsstandards. BZL, 26 (3), 326-337.

OECD 2003: PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills - Publications 2003. Retrieved from: http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/ 46/14/33694881.pdf (June 2011).

Elisabeth LORENZ, Freydis VOGEL, Stefan UFER, Ingo KOLLAR, Kristina REISS, Frank FISCHER, München

Effekte heuristischer Lösungsbeispiele in kooperativen Settings auf mathematische Argumentationskompetenz bei Lehramtsstudierenden

Der Übergang vom Sekundar- in den Tertiärbereich ist charakterisiert durch hohe Studienabbruchzahlen und niedrige Erfolgsquoten in den Anfängervorlesungen. Studienanfängern bereiten die Unterschiede in der mathematischen Arbeitsweise an der Universität, insbesondere mathematisches Argumentieren und Beweisen, häufig Probleme. Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz werden im Projekt ELK-Math[1] entwickelt und in einem Brückenkurs Mathematik evaluiert. Dabei konzentrieren wir uns auf kooperative Lernumgebungen, in denen selbstgesteuertes Lernen im Vordergrund steht.

Mathematische Argumentationskompetenz soll im Folgenden verstanden werden als die Fähigkeit und Bereitschaft individuell und kooperativ eine mathematische Aussage zu generieren und zu evaluieren, nach adäquaten Argumenten für und gegen diese Aussage zu suchen und schrittweise zu einem Beweis zusammenzuführen (Lorenz et al., 2011). In Anlehnung an ein Kompetenzmodell zum Beweisen in der Geometrie (Reiss et al., 2006) unterscheiden wir zwei Aspekte: Schematische Argumentationen beziehen sich auf die Anwendung von Regeln und Definitionen in einfachen Problemsituationen. Komplexe Argumentationen werden bei Beweisaufgaben gefordert, wenn eine kohärente Folge deduktiver Argumente gebildet werden soll. Dieser Aspekt enthält auch offene Argumentationsaufgaben, in denen eine mathematische Vermutung zunächst evaluiert werden muss.

Kooperative Lernumgebungen zur Förderung komplexer Fähigkeiten

Heuristische Lösungsbeispiele stellen nicht nur eine Problemstellung und die Lösung dar, sondern auch eine realistische Lösungsprozedur. Die einzelnen Schritte werden durch ein Prozessmodell strukturiert und zusätzlich durch heuristische Strategien ergänzt (Reiss & Renkl, 2002). Da unser Arbeitsgedächtnis nur über eine begrenzte Kapazität verfügt, können sich Lerner bei der Bearbeitung von heuristischen Lösungsbeispielen auf die relevanten Inhalte, insbesondere die dargestellte Vorgehensweise und die verwendeten Strategien konzentrieren und in ähnlichen Situationen abru-

[1] Das Projekt wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert (Förderkennzeichen: RE 1247/9-1).

fen. Studien zum Beweisen in der Geometrie belegen positive Effekte der heuristischen Lösungsbeispiele (Reiss et al., 2006).

Eine ähnliche Unterstützungsmaßnahme zur Förderung komplexer Fähigkeiten sind prozessgestützte Lösungsbeispiele. Diese enthalten zusätzlich zu einem klassischen produktorientierten Lösungsbeispiel, prozessbezogene Informationen (van Gog, Paas, & van Merriënboer, 2006). Im Unterschied zu heuristischen Lösungsbeispielen sind die prozessbezogenen Informationen jedoch nur auf einen eingeschränkten Bereich anwendbar. Außerdem wird das Prozessmodell nicht implizit dargestellt, sondern expliziert. Studien aus dem Bereich der Physik und Rechtslehre konnten positive Effekte der prozessgestützten Lösungsbeispiele feststellen. Leitende Fragen haben nur teilweise eine positive Wirkung gezeigt. (van Gog et al., 2006; Nadolski, Kirschner, & van Merriënboer, 2006).

Beide Arten von Lösungsbeispielen sind bisher im Wesentlichen in Einzellernumgebungen evaluiert worden. Kooperative Lernumgebungen stellen andere Anforderungen. Damit sie effektiv sind, muss die Einsparung an Ressourcen des Arbeitsgedächtnisses, die durch die Inhaltsverteilung auf die einzelnen Gruppenmitglieder entsteht größer sein, als die Ressourcen, die für eine Kommunikation dieser Inhalte aufgewendet werden müssen (Kirschner, Paas, Kirschner, & Janssen, 2011). Die Autoren haben in einer ersten Untersuchung festgestellt, dass in kooperativen Lernumgebungen Problemlösen effektiver war, als die Bearbeitung eines Lösungsbeispiels.

Ein anderer Ansatz zur Förderung komplexer Fähigkeiten ist Problemlösen was in der Mathematik immer wieder betont und mit der Mathematik verbunden wird. Da Problemlösebedingungen oft sehr unterschiedlich gestaltet sind, beschränken wir uns im Folgenden auf problembasiertes Lernen. Im Zentrum steht dabei die kooperative, selbstgesteuerte Arbeit an einem authentischen Problem unter Entwicklung relevanter Problemlösefähigkeiten mit Hilfe eines Moderators, in Form eines Lehrers, Tutors oder computerbasierter Unterstützung (Hmelo-Silver, 2004). Positive Effekte auf die Aneignung von Problemlösefähigkeiten konnten von Dochy et al. (2003) bestätigt werden, wobei problembasiertes Lernen meist mit herkömmlichem Unterricht vergleichen wird.

Zusammenfassend ist sowohl die Bearbeitung von Lösungsbeispielen, als auch problembasiertes Lernen zur Förderung komplexer Fähigkeiten geeignet. Neben einer Diskussion der Effektivität einer Instruktionsmaßnahme, sind auch die Integration sowie die Frage nach einer angemessenen Variation von Lösungsschritten in problembasierten Lernumgebungen interessant. Nach Renkl, Hilbert und Schworm (2009) können Lösungsschritte auf drei Ebenen vorgegeben sein. In Bezug auf eine mathematische Argumentationsaufgabe kann das so aussehen: Die inhaltliche Ebene enthält z.B. relevante Sätze, Definitionen, Regeln oder Beispiele und deren Eigenschaften. Die allgemeine Lernebene umfasst Konzepte und Prinzipien von Argumenten und Beweisen in der Mathematik. Heuristiken zur Konstruktion von Beweisen sind der strategischen Ebene zuzuordnen.

Forschungsfragen

Die Hauptfragestellung betrifft die Wirksamkeit variierender Unterstützung durch Lösungsschritte zur Förderung schematischer bzw. komplexer Argumentationsfähigkeiten. Aufgrund der ersten Ergebnisse von Kirschner et al. (2011) wird angenommen, dass Studienanfänger in kooperativen Settings am meisten profitieren, wenn sie selbstständig lernen und wenig extern unterstützt werden. Eine weitere Frage betrifft die Adaptierbarkeit von Lösungsschritten. Gerade für leistungsstarke Lerner wird vermutet, dass die selbstständige Wahl von Lösungsschritten effektiver ist als eine fixe Vorgabe. Zusätzlich werden kognitive Voraussetzungen als wichtige Einflussgröße in der Lösungsbeispielforschung berücksichtigt.

Studiendesign und Ergebnisse

In einer ersten Studie wurde ein 2x2 Design eingesetzt mit den Faktoren *Schulerfolg* als Prädiktor für kognitive Voraussetzungen und *Vorgabe von Lösungsschritten*. Keine Vorgabe von Lösungsschritten wurde in einer Problemlösebedingung und die Vorgabe von Lösungsschritten auf drei Ebenen wurde durch heuristische Lösungsbeispiele realisiert. Um eine fokussierte Diskussion anzuregen, variieren Lösungsbeispiele zweier Lernpartner auf der strategischen Ebene mit zusätzlichen Selbsterklärungsprompts auf derselben Ebene. Die Lerner arbeiteten in der Problemlöse- oder heuristischen Lösungsbeispielbedingung dreimal je 45 min. an einer Argumentationsaufgabe aus der Teilbarkeitslehre, implementiert in computergestützten Lernumgebungen während eines Brückenkurses. Zur Messung mathematischer Argumentationskompetenz wurde ein Vor- und Nachtest auf Basis der beschriebenen Aspekte der Beweiskompetenz entwickelt.

Eine Kovarianzanalyse mit den unabhängigen Variablen Schulerfolg und Vorgabe von Lösungsschritten sowie den Vortestwerten als Kovariate ergab folgendes Ergebnis: Für schematische Argumentationen war die Bearbeitung heuristischer Lösungsbeispiele effektiver als Problemlösen. Für komplexe Argumentationen jedoch ist für leistungsschwache Lerner die Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen am wenigsten effektiv.

Auf Grundlage der Ergebnisse von Studie I wurde die Lernumgebung heuristische Lösungsbeispiele in Studie II angepasst. Da der Vergleich von

Strategien insbesondere für schwache Lerner eine zusätzliche Komplexität darstellt, variierten in den angepassten Lösungsbeispielen nur die Selbsterklärungsprompts. Eine weitere Lernumgebung wurde eingesetzt, die lediglich prozessgestützte Hinweise auf der strategischen Ebene einsetzt, ähnlich zu den leitenden Fragen bei Nadolski et al. (2006). Die Lernumgebung ohne Lösungsschritte wurde beibehalten. Zusätzlich konnten in einer Gruppe die Lerner selbst entscheiden, wie viel Unterstützung sie wünschen.

Zusammenfassung und Ausblick

In einer ersten Studie konnten die Ergebnisse von Kirschner et al. (2011) nicht repliziert werden. Heuristische Lösungsbeispiele waren für den Erwerb schematischer Argumentationsfähigkeiten effektiver als Problemlösen. Für komplexe Argumentationsfähigkeiten waren jedoch für leistungsschwache Lerner die eingesetzten heuristischen Lösungsbeispiele am wenigsten geeignet. Dies zeigt die Notwendigkeit detaillierter Analysen und kontinuierlicher Anpassungen der Lernumgebungen. Weitere Erkenntnisse werden aus den laufenden Auswertungen von Studie II erwartet.

Literatur

Dochy, F., Segers, M., van den Bossche, P., & Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning: a meta-analysis. *Learning and Instruction, 13*, 533–568.

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychologist Review, 16*(3), 235–266.

Kirschner, F., Paas, F., Kirschner, P. A., & Janssen, J. (2011). Differential effects of problem-solving demands on individual and collaborative learning outcomes. *Learning and Instruction, 21*, 587–599.

Lorenz, E., Vogel, F., Fischer, F., Kollar, I., Reiss, K., & Ufer, S (2011). ELK-Math: Effekte von inhaltsübergreifenden und inhaltsspezifischen Ansätzen zur Förderung math. Argumentationskompetenz von Lehramtsstudierenden. In *BzMU* (S.559–562).

Nadolski, R. J., Kirschner, P. A., & van Merriënboer, J. (2006). Process support in learning tasks for acquiring complex cognitive skills in the domain of law. *Learning and Instruction, 16*, 266–278.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(1), 29–35,

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 194–208). Münster: Waxmann.

Renkl, A., Hilbert, T., & Schworm, S. (2009). Example-Based Learning in Heuristic Domains: A Cognitive Load Theory Account. *Educ. Psychologist Rev., 21*, 67–78.

van Gog, T., Paas, F., & van Merriënboer, J. (2006). Effects of process-oriented worked examples on troubleshooting transfer performance. *Learning and Instruction, 16*, 154–164.

Andrea MAIER, Karlsruhe, Christiane BENZ, Karlsruhe

Das Verständnis ebener geometrischer Formen von Kindern im Alter von 4 – 6 Jahren

Einleitung

Seit internationalen Vergleichsstudien wie TIMSS oder PISA wurde das Thema der frühen mathematischen Bildung und wie diese im Elementarbereich aussehen soll weit diskutiert. Im baden-württembergischen Orientierungsplan für den Kindergarten ist Mathematik seitdem im Bereich „Denken“ inbegriffen. Wie genau diese Bereiche umgesetzt werden, bleibt den einzelnen Einrichtungen selbst überlassen. Gasteiger (2010) unterscheidet zwischen lernwegorientierten und lernzielorientierten Ansätzen, welche in unterschiedlichen Ausprägungen beide in Kindertageseinrichtungen umgesetzt werden. Hier ansetzend untersucht die vorliegende Studie mathematische Kompetenzen von Kindern aus zwei unterschiedlichen Bildungssituationen. Zum einen nahmen 4 – 6jährige Kinder aus einem deutschen Kindergarten an der Untersuchung teil und zum anderen Kinder gleichen Alters aus einer englischen Grundschule, teilweise noch der „foundation stage“ (Basisbildung für 3 – 5jährige) und teilweise der „key stage 1“ (erste Stufe der verpflichtenden Schulbildung für 5 – 7jährige Kinder) angehörende Kinder. Folglich wurden in der Studie Kompetenzen von Kindern aus einem eher spielerischen Lehr-lern-Umfeld und einer eher curricular orientierten Lehr-/Lernumgebung untersucht.

Theoretischer Hintergrund

Da der Schwerpunkt des hier aufgeführten Untersuchungsausschnitts auf dem Verständnis ebener geometrischer Formen liegt, werden im Folgenden einige hierfür relevante theoretische Inhalte kurz dargestellt.

Vollrath (1984) bezeichnet ein „umfassendes Begriffsverständnis“ mit der Fähigkeit „Formen benennen“, eine „Definition der Form geben“, „weitere Repräsentanten (Beispiele) dieser Gruppe zeigen“ und „alle Eigenschaften nennen“ zu können. Jeder einzelne dieser Aspekte wurde in den Aufgaben der eigenen empirischen Studie untersucht. Dabei wurde auch die Fähigkeit der Kinder untersucht, weitere Repräsentanten einer Form in ihren Zeichnungen darzustellen.

Seit den von Piaget (1975) durchgeführten Versuchsreihen zum Zeichnen, aufgrund derer er nur das Wissen und die Vorstellung der Kinder mit ihren Zeichnungen in Verbindung brachte und die Zeichenfähigkeit außer Acht ließ, gab es viele Untersuchungen aus den unterschiedlichsten Fachdisziplinen zu Kinderzeichnungen, wie etwa der Psychologie (Winner, 1982;

Schuster, 2000), der Kunstpädagogik (Kläger, 1990; Reiß, 1996) oder der Gehirnforschung (Gazzaniga & Le Doux, 1983). Kläger (1990) fasst die Erkenntnisse aller Disziplinen zusammen, indem er feststellt, dass es sowohl der Zeichenfähigkeit als auch dem abrufbaren Wissen bzw. der Vorstellung über eine Form oder einen Gegenstand bedarf, um diese oder diesen naturgetreu zeichnen zu können. Aus fehlerhaften Zeichnungen der Kinder, wie es einst Piaget darstellt, könne nicht gleich auf ein unzureichendes Wissen und eine mangelnde Vorstellung geschlossen werden. Deshalb sollten derartige Studien immer durch Interviews begleitet sein (vgl. Kläger, 1990). Für diese ist es jedoch erforderlich, dass auch die Sprachentwicklung der Kinder betrachtet wird.

Für die Entwicklung der Begriffsbildung existieren im Bereich der Sprachentwicklung verschiedene Theorien (vgl. Szagun, 2008). Bei der „Prototypentheorie“ werden zu Beginn der Sprachentwicklung manche Mitglieder einer Kategorie als typischer kategorisiert als andere, da nicht jedes Mitglied einer Klasse über alle Merkmale verfügt. Mitglieder mit vielen gemeinsamen Merkmalen werden als prototypische Mitglieder (z.B. Spatz oder Rotkehlchen der Kategorie „Vogel“) bezeichnet, Mitglieder mit weniger gemeinsamen Merkmalen als periphere Mitglieder (z.B. Huhn der Kategorie „Vogel“).

Forschungsfragen

Der Frage, über welches Verständnis ebener geometrischer Formen Kinder im Alter von 4 bis 6 Jahren verfügen und wie sich dieses innerhalb eines Schul- bzw. Kindergartenjahres weiterentwickelt, wurde in der Studie nachgegangen. Dazu sollten die folgenden Feinziele dargestellt werden:

- Wie lösen, erklären und begründen die Kinder die ihnen gestellten Aufgaben zum Verständnis geometrischer Formen?

- Wie verändert sich dieses Verständnis und die Qualität ihrer Handlungen innerhalb eines Schul- bzw. Kindergartenjahres?

- Beeinflusst die Bildungsumgebung, wie frühes Lernen gefördert wird, die Kompetenzen der Kinder?

Methode

Insgesamt wurde die Studie mit 77 Kindern (34 englischen und 43 deutschen) in Form klinischer Interviews durchgeführt. Die Studie wurde in zwei Durchgängen konzipiert, zu Beginn des Schuljahres 2008/2009 und gegen Ende des Schuljahres 2008/2009, ohne Intervention.

Die hier vorgestellten Aufgaben sind (1) „Formen erklären“, bei welcher die Kinder eine Form, bspw. ein Dreieck, jemandem erklären sollten, „der noch nie ein Dreieck gesehen hat“, (2) „Formen zeichnen“, wobei die Kinder aufgefordert wurden ein Dreieck, dann ein weiteres, sich vom ersten unterscheidendes Dreieck, dann wieder ein weiteres usw. zu zeichnen und (3) „Formen identifizieren“, wobei den Kindern ein Blatt mit unterschiedlichen Formen vorgelegt wurde und bspw. alle Kreise markiert werden sollten und dann zum Begründen aufgefordert wurden, warum die von ihnen markierten Formen Kreise sind. Dies wurde auch mit Quadraten und Dreiecken durchgeführt.

Ergebnisse

Einige Ergebnisse werden hier exemplarisch dargestellt. Bei der Aufgabe „Formen erklären“ konnten fünf Kategorien herausgearbeitet werden.

	keine Erklärung		**durch Gesten**		**durch Vergleiche**		**informell**		**formell**	
	E	D	E	D	E	D	E	D	E	D
2008	12%	23%	6%	21%	6%	9%	9%	30%	62%	17%
2009	0%	23%	15%	21%	3%	21%	20%	49%	62%	14%

Wie in der Tabelle deutlich zu erkennen ist, wurden die Formen, hier am Beispiel Dreiecke, von englischen Kindern häufiger erklärt als von den deutschen. Die deutschen Kinder verwendeten sowohl mehr Gesten und Handbewegungen als auch – vor allem beim zweiten Untersuchungsdurchgang – mehr Vergleiche als die englischen Kinder. Die Mehrheit der deutschen Kinder erklärten ihre Formen informell während die Mehrheit der englischen Kinder die Formen bereits formell erklärten.

Bei der Aufgabe „Formen zeichnen“ von Dreiecken zeichneten die meisten Kinder, sowohl in England als auch in Deutschland, Dreiecke, die sich im Flächeninhalt unterschieden. Die Zeichnungen der englischen Kinder, von denen ein Großteil die Formen bereits formell erklärte, stimmten häufig nicht mit ihren Erklärungen („auswendig gelernten Definitionen“) überein.

Eine weitere Aufgabe, welche Aufschluss über das Verständnis der Kinder ebener geometrischer Formen gibt, ist die Aufgabe zum „Formen identifizieren“: beim „Kreise identifizieren“ markierten alle englischen Kinder alle richtigen Kreise und nur diese. Die deutschen Kinder markierten häufig zusätzlich die ovale Form als Kreis. Umgekehrt waren die Ergebnisse beim „Quadrate markieren“. Hier markierten mehr deutsche als englische Kinder alle abgebildeten Quadrate, während die englischen Kinder dazu neigten, nur die horizontalen Quadrate zu markieren. Quadrate, die auf der Spitze standen, wurden als Rauten bezeichnet und vom Quadrat abgegrenzt.

Zusammenfassung

Betrachtet man alle Ergebnisse lassen sich folgende erste Erkenntnisse ableiten: Insgesamt gibt es, vor allem sichtbar in den Ergebnissen der englischen Kinder, eine Diskrepanz zwischen Definitionswissen und tatsächlicher Übertragung auf reale Formen. Darüber hinaus benennen die englischen Kinder die Formen häufiger mit formalen geometrischen Begriffen, es gibt bei ihnen aber auch eine größere Abhängigkeit von zuvor gezeigten Prototypen. Die deutschen Kinder erweiterten ihr Begriffsverständnis, obwohl sie nicht explizit darin unterwiesen wurden. Die Frage, welche offen bleibt, ist wann der beste Zeitpunkt für die Förderung des Begriffsverständnisses ist und auf welche Weise dies erfolgen sollte, damit die Kinder ein umfassendes Verständnis über Formen erwerben. Das Problem der Prototypabhängigkeit wird dabei in der Literatur diskutiert (Sarama & Clements 2009, S. 216) und könnte in weiteren Langzeitstudien gerade in verschiedenen Bildungskontexten untersucht werden.

Literatur

Gasteiger, H. (2010): Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte: Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Münster u.a.: Waxmann Verlag.

Gazzaniga, M.S.; Le Coux, E. (1983): Neuropsychologische Integration kognitiver Prozesse. Stuttgart: Enke Verlag.

Kläger, M. (1990): Phänomen Kinderzeichnung. Manifestation bildnerischen Gestaltens. Baltmannsweiler: Pädagogischer Verlag Burgbücherei Schneider GmbH.

Piaget, J., Inhelder, B. u.a. (1975a): Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Piaget, J., Inhelder, B.; Szeminska, A. (1975b): Die natürliche Geometrie des Kindes.1. Auflage. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Reiß, W. (1996): Kinderzeichnungen – Wege zum Kind durch seine Zeichnung. Berlin: Hermann Luchterhand Verlag GmbH.

Sarama, J.; Clements, D.H. (2009): Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children. New York: Routledge.

Schuster, M. (2000): Psychologie der Kinderzeichnung. 3. Überarbeitete Auflage. Göttingen: Hogrefe Verlag.

Szagun, G. (2008): Sprachentwicklung beim Kind. Ein Lehrbuch. 2. Auflage. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. 1. Auflage. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Winner, E. (1982). Invented Worlds. Harvard University Press.

Markus MANN, Aschaffenburg

iPod touch vs. *TI-Nspire* – Unterrichtspraktische Erfahrungen mit aktuellen und zukünftigen Mathematikwerkzeugen

Tablet-Computer bergen aufgrund ihrer Kompaktheit, Performanz und der Multitouch-Bedienung großes Potential für den Einsatz als Unterrichtswerkzeug. Mit der Veröffentlichung der App *iBooks 2* und dem zugehörigen Authoring-Tool *iBooks Author* bereitet Apple zudem im Januar 2012 den Weg hin zu multimedialen, interaktiven Schulbüchern, die mit Hilfe von Tablets in Schule und Unterricht eingesetzt werden können (Beuth, 2012). Welche Potentiale jedoch *iPod touch*, *iPad* oder *iPhone* sowie andere Smartphones und Tablet mit Multitouch-Bedienung für den Unterricht im allgemeinen und den Mathematikunterricht im speziellen bieten, ist bisher wenig erforscht.

Im Rahmen des hier vorgestellten Unterrichtsprojekts konnten Schüler zunächst mit einem *iPod touch* (mit Mathematik-Apps) und später mit dem CAS-Taschenrechner *TI-Nspire CAS* arbeiten. Im Anschluss erfolgten Beurteilung und Vergleich beider Geräte durch Schüler und Lehrkraft hinsichtlich ihrer Eignung für den Mathematikunterricht. Die Ziele, die mit diesem Schulversuch verfolgt wurden, waren das Sammeln von unterrichtspraktischen Erfahrungen mit der Multitouch-Bedienung des *iPod touch* und ein Vergleich bzgl. der Potentiale und der Akzeptanz der genannten Mathematikwerkzeuge.

1. Grundlagen

Im Rahmen des bayerischen Modellversuchs M^3 wird seit 2003 der Einsatz von Taschencomputern (bzw. CAS-Taschenrechnern) im regulären Mathematikunterricht untersucht. Die Erfahrungen im langjährigen Einsatz zeigten, dass sich keine nennenswerten Unterschiede in Bezug auf händische bzw. kalkülhafte Rechenfertigkeiten zwischen CAS-Projektklassen und Kontrollklassen auftun und dass es nicht zu einer Öffnung der "Leistungsschere" kommt (Weigand, 2006). Dagegen lässt sich in den „CAS-Klassen“ eine größere Vielfalt an Lösungswegen beobachten. Häufig wird dort der Rechner zum Visualisieren, Kontrollieren und in der Unterstützung des Lernens genutzt (als "Lernwerkzeug") und es konnte ein deutlich erhöhter Anwendungsbezug beobachtet werden (Bichler, 2010).

Der CAS-Rechner übernimmt beim Mathematiklernen langwierige und häufig wiederkehrende Berechnungen und schafft damit Freiräume für Übungen und Verständnisfragen. Viele Zusammenhänge lassen sich im Unterricht selbst entdecken und erforschen, experimentelles Arbeiten wird gefördert. Ermöglicht wird dies dadurch, dass der CAS-Rechner im Unterricht immer dann zur Verfügung steht, wenn ein Schüler ihn benötigt wird. Da sich Tablet-Computer, Smartphones bzw. *iPods* durch die Installation entsprechender Apps ebenfalls mit einem CAS oder einem Funktionsplotter ausstatten lassen, ergibt sich die Frage, ob sich vergleichbare Vorteile bzw. Potentiale auch mit diesen Geräten im Mathematikunterricht nutzbar machen lassen.

2. Durchführung des Schulversuchs

Im Rahmen eines Schulversuchs wurden der *iPod touch* und der CAS-Rechner *TI-Nspire CAS* für mehrere Wochen im regulären Mathematikunterricht eingesetzt. Der Einsatz des *iPod touch* fand in zwei Phasen statt: in Phase I wurde eine 10. Klasse (28 Schüler) eines bayerischen Gymnasiums im Schuljahr 2010/11 mit 18 *iPods* ausgestattet. Auf allen *iPods* waren ein wissenschaftlicher Taschenrechner ("Touch Calc"), ein Funktionsplotter ("Quick Graph") und ein CAS ("Pocket CAS lite") installiert. In dieser Phase erhielten die Schüler die Geräte für einen Zeitraum von fünf Wochen. Sie konnten die Geräte auch zu Hause z.B. für die Bearbeitung von Hausaufgaben nutzen. Nach Abschluss der ersten Testphase wurden Fragebögen mit Antworten in einer fünfstufigen Rating-Skala verteilt. Zusätzlich waren offene, verbale Kommentare möglich.

Auch in Phase II statteten wir eine 10. Klasse (30 Schüler; 15 Geräte) von Ende November bis Mitte Februar mit *iPods* aus. Im Anschluss wurde an alle Schüler dieser Klasse ab März mit dem *TI-Nspire CAS* ein Taschenrechner mit Computer Algebra System verteilt. Die Schüler hatten in dieser Phase somit die Möglichkeit, beide Geräte unmittelbar aufeinander folgend einzusetzen und direkt miteinander zu vergleichen. Zum Abschluss der zweiten Testphase wurde der Fragebogen aus Phase I um Fragen ergänzt, die auf den Vergleich von *iPod touch* und *TI-Nspire* abzielten.

In beiden Phasen konnten die Schüler den *iPod/TI-Nspire* jederzeit im Unterricht verwenden und zielgerichtet einsetzen. Unterrichtsmethodisch wurde dabei häufig in Partnerarbeit, erforschend und auch experimentell gearbeitet (vgl. auch Bichler, 2010). Auf inhaltlicher Ebene erfolgte die Behandlung des Lehrplaninhalts „Ausbau der Funktionenlehre“ (u.a. Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Verhalten im Unendlichen, Funktionsgraph). Hierbei stellt ein Funktionsplotter ein äußerst mächtiges und vielfältig nutzbares Werkzeug dar.

3. Ergebnisse und Diskussion

Das schnelle “Booten” des *iPod touch*, vergleichbar mit dem Start eines wissenschaftlichen Taschenrechners, erweist sich im praktischen Umgang sofort als sehr positiv. Aber auch die Multitouch-Bedienung ist bei der Untersuchung von Funktionen von großem Wert: Schüler können Funktionen „greifen“, „berühren“, haptisch und enaktiv erfassen. Zwar betrachteten die Schüler den *iPod* zunächst eher als Spielzeug, der Prozess der Instrumentation (bzw. Schematisierung, vgl. Weigand, 2006) begann jedoch unmittelbar. Insgesamt wurde der *iPod touch*, wie zu erwarten, sehr positiv aufgenommen, wie sich in folgenden Schülerkommentaren zeigt:

- “Ich ... fand es für den Mathematikunterricht sehr sinnvoll und anschaulich. Es wäre sicher auch für andere Fächer interessant.”
- “Ich fand es sehr gut diese Möglichkeit der Mathematik zu erforschen, da es den ... Unterricht spannend und unterhaltsam macht.“

Sehr positiv empfanden die Schüler die Möglichkeit, eine “schnelle Übersicht über Graphen” zu erhalten (“Ich fand es sehr praktisch, den Graphen sofort zu sehen.”). Aber (selbst-)kritisch wurde auch auf das Problem hingewiesen, dass man “sich nicht von möglicherweise installierten Apps ablenken“ lassen sollte (bzw. “Problem: Durch Spielereien wird man leicht abgelenkt”). Weitere Einschätzungen wurden innerhalb des Fragebogens mit einer fünfstufigen Rating-Skala (1: “trifft voll zu” ... 5: “trifft nicht zu”) erfasst. Ein Auszug der Ergebnisse aus beiden Phasen können in Auszügen folgender Tabelle entnommen werden:

	Phase I	*Phase II*
Es fiel mir leicht, die installierten Mathematik-Apps auf dem *iPod touch* zu verwenden	2,26	2,72
Der Funktionenplotter half mir, mathematische Sachverhalte besser zu verstehen	2,13	2,72
Das Ablesen der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ist mit der Funktionsplotter-App gut möglich	1,65	2,97
Das Verhalten im Unendlichen (Grenzwertbetrachtungen) lässt sich leicht mit dem Funktionsplotter bestimmen	1,87	2,86
Aufgaben zur Funktionsuntersuchung sind für mich leichter, wenn ich den *iPod touch* verwenden darf	2,00	3,14

Insgesamt zeigte sich, dass der *iPod touch* in Phase I deutlich positiver beurteilt wurde als in Phase II. Dies verdeutlicht auch die Beantwortung der Frage: „Wenn ich mich zwischen *iPod touch* und Taschenrechner entscheiden müsste, würde ich lieber mit dem Taschenrechner arbeiten." Die Schüler aus Phase I tendieren hier leicht zum *iPod* (3,39), wohingegen die aus Phase II klar für den Taschenrechner votieren (1,86). Als Gründe hierfür sind der zeitliche Abstand zwischen Schulversuch und Befragung zu nennen: in Phase I wurde der Fragebogen unmittelbar nach Unterrichtseinsatz verteilt, in Phase II erst mit zeitlicher Verzögerung. Außerdem lernten die Schüler in Phase II auch den *TI-Nspire* kennen, der evtl. eine aus Schülersicht bessere Alternative darstellte. Der Vergleich von *iPod touch* und *TI-Nspire* zeigt auch, dass die Bedienoberfläche des *iPod touch* (1,41) und die Multitouch-Bedienung (1,52) gegenüber der Handhabung des *TI-Nspire* als wesentlich besser und intuitiver eingeschätzt wurden. Dennoch halten die Schüler den *TI-Nspire* für das bessere Mathematikwerkzeug: 24 Schüler würden den *TI-Nspire* bevorzugen, nur 3 Schüler dagegen den *iPod touch*.

4. Fazit und Ausblick

In Bezug auf Benutzeroberfläche, Multitouch-Bedienung und Rechengeschwindigkeit weist der *iPod touch* deutliche Vorteile gegenüber dem *TI-Nspire* auf. Das vorhandene Potential des *iPod touch* wird aber aktuell noch nicht voll ausgeschöpft: es fehlt an entsprechender (angepasster) Software (in Form von DGS- und CAS-Apps für den Mathematikunterricht), wie sie beispielsweise der *TI-Nspire* mitbringt. Über das entsprechende, große Potential als Lernwerkzeug verfügen auch *iPad, iPhone* und andere Smartphones bzw. Tablets.

Funktionsplotter mit Multitouch-Bedienung ermöglichen ein „neues Gefühl" für Funktionen und ihre Eigenschaften. Funktionen werden für Schüler auch in ihrem Verhalten und ihrer Dynamik greifbar. Funktionsplotter können so zu mächtigen Werkzeugen werden. Welches Potential sich für den Lernprozess ergibt, wird in Zukunft noch zu erforschen sein. Gleiches gilt auch für das Lernpotential von multimedialen bzw. interaktiven Schulbüchern, welche sich mit multitouchfähigen Tablets darstellen lassen.

Literatur

Beuth, P. (2012): Apple will Markt für Lehrbücher revolutionieren http://www.zeit.de/digital/mobil/2012-01/apple-ibooks2-ibooks-author, 19.01.2012

Bichler, E. (2010): Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht (M^3) am Gymnasium, Verlag Dr. Kovac, Hamburg, 2010.

Weigand, H.-G. (2006): Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe – Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. JMD, 89-112.

Elisabeth MANTEL, Kristina Anna BINDER, Erfurt

Erfassung räumlicher Fähigkeiten im Grundschulalter

Das räumliche Vorstellungsvermögen bezeichnet eine Komponente mathematischen Denkens und ist zugleich wesentliche Grundlage für das Geometrielernen (Besuden 1999, Devlin 2003). Entsprechend gehört die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens zu den zentralen Zielen im Mathematikunterricht der Grundschule (Bildungsstandards 2004) und wird in der Geometriedidaktik für den Primarbereich als besonders wichtige Aufgabe angesehen. In der mathematikdidaktischen Fachliteratur besteht weitestgehend Konsens darüber, dass eine Thematisierung im Unterricht die entsprechenden räumlichen Kompetenzen verbessert. Eine angemessene Förderung in den ersten vier Jahrgangsstufen erscheint aber gerade auch deshalb von Bedeutung, da das Grundschulalter eine sensible Phase in der Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens darstellt (Maier 1996).

Theoretischer Hintergrund

Unter räumlichem Vorstellungsvermögen wird allgemein die Fähigkeit verstanden „in der Vorstellung räumlich zu sehen und zu denken." (Maier 1999, S. 14). Besuden (1984, S. 70) beschreibt Raumvorstellungsvermögen als eine Gruppe von Fähigkeiten, „die nötig sind, um im zwei- und dreidimensionalen Raum handeln zu können", sei es in der Wirklichkeit oder in der Vorstellung. Dabei werden die Begriffe *räumliches Vorstellungsvermögen*, *Raumvorstellung* und *räumliches Denken* in der deutschen Fachliteratur häufig synonym verwendet. Im angelsächsischen Sprachraum bezeichnen die Begriffe *spatial abilities* und *spatial thinking* die auf den Raum bezogenen Fähigkeiten. In der psychologischen Forschungsliteratur sind weiterhin *Repräsentation, Visualisierung* oder *Veranschaulichung* als Termini zu finden. Räumliches Vorstellungsvermögen wird in den nachstehenden Studien nach dem Strukturmodell von Maier (1999) mit den fünf Teilkomponenten *Veranschaulichung, mentale Rotation, räumliche Beziehungen, räumliche Wahrnehmung* und *räumliche Orientierung* definiert.

In diesem Beitrag werden zwei Forschungsprojekte beschrieben, welche die Fähigkeiten von Grundschulkindern zu *räumlichen Beziehungen* und *Veranschaulichung* betrachten.

Zum Forschungsprojekt „Lagebeziehungen"

Wie gehen Kinder im Alter von 5 bis 10 Jahren mit Lagebeziehungsbegriffen und Lageeigenschaften um? Diese Frage soll in einem Forschungsprojekt näher untersucht werden.

Motivation zu diesem Forschungsprojekt sind Beobachtungen im Grundschulunterricht Mathematik. Im Anfangsunterricht sollen Kinder eine Spielfigur auf ein Spielfeld (3 x 3 Felder) „unten rechts“ setzen, einige möchten die Spielfigur unter den Tisch platzieren. Zweitklässler sind nicht sicher, welche Ansicht „vorn“ ist, wenn sie am Gruppentisch arbeiten und Würfelgebäude vor ihnen stehen. Diese und ähnliche Beobachtungen decken sich mit aktuellen Forschungsergebnissen, z.B. können 38% der Schulanfänger Lagebeziehungen wie „rechts unten“ nicht bestimmen (Jansen 2011).

Was genau gehört zu den Lagebeziehungen? Oben – unten, vorn – hinten, rechts – links gehören ebenso dazu wie neben, zwischen, gegenüber, benachbart etc. Alle genannten Begriffe sind Orientierungsbegriffe, die bis zum Ende der zweiten Klasse im Geometrieunterricht verwendet werden (Senftleben 2008, Franke 2007).

Das Erkennen räumlicher Beziehungen wird schon im Anfangsunterricht gefordert (Lorenz 2011). Die Rechts-Links-Orientierung spielt dabei aufgrund unseres Körperbaus eine besondere Rolle (Franke 2007, Besuden 1999, Besuden 1990).

Schwierigkeiten kann ebenfalls das Bezugssystem bereiten: Handelt es sich um ein objektives oder ein relatives Bezugssystem? Absolute Bezugssysteme verwenden beispielsweise Himmelsrichtungen zur Orientierung. Die oben genannten Orientierungsbegriffe beziehen sich jedoch immer auf ein relatives Bezugssystem. Welches Bezugssystem wird im gegebenen Kontext vom Kind verwendet? Erschwert wird die Situation, wenn Raumkonfigurationen und ebene Darstellungen gemeinsam verwendet werden. Dann ist ein ständiges Wechseln der Bezugssysteme notwendig.

Eine Vorstudie wurde 2011 mit 21 Kindern (davon 9 Mädchen) im Alter von 6 bis 10 Jahren durchgeführt. Die Aufgabe des Kindes war es, nach einer vorgegebenen verbalen Beschreibung des Versuchsleiters die entsprechenden Gebäude auf den beschriebenen Platz zu stellen. Es standen 9 oder 16 Quadratfelder und 8 oder 12 farbige Zirkuswagen zur Verfügung.

Die Auswertung der Vorstudie ist derzeit noch nicht abgeschlossen, es zeigen sich Rechts-Links-Verwechslungen, aber auch Beispiele, die auf Unklarheiten hinsichtlich des Bezugssystems hinweisen.

Zum Forschungsprojekt „Geometrie und Raumvorstellung“

Aktuelle Studien zum räumlichen Vorstellungsvermögen von Kindern zeigen, dass bereits Schulanfänger und Schulanfängerinnen Aufgaben mit räumlichen Anforderungen erfolgreich bearbeiten können. Betrachtet man die Ergebnisse differenziert, lassen sich zum Teil bemerkenswerte Leistungen bei einzelnen Aufgabentypen zur Raumvorstellung dokumentieren (Lüthje 2010, Höglinger & Senftleben 1997). Bezogen auf die Lösungsraten bei den Testaufgaben ist jedoch ein spezifischer Einfluss aufgabenrelevanter Merkmale festzustellen (Lüthje 2010, Grüßing 2002). Für die Unterrichtspraxis ist daher von Interesse, wie Kinder im Grundschulalter diese raumbezogenen Aufgabenformate bearbeiten und welche Faktoren die Aufgabenbearbeitung beeinflussen. Die oben angeführten Forschungsstudien geben einen Hinweis darauf, dass die Wahl einer adäquaten Bearbeitungsstrategie dabei eine zentrale Rolle spielt. In den vorliegenden Studien wurde bislang jedoch nicht untersucht, welche Bedeutung das Wissen um geometrische Eigenschaften im Bearbeitungsprozess hat. Mit dieser Frage beschäftigt sich das hier vorgestellte Forschungsprojekt.

Um Aufschluss über die Bedeutung des Begriffswissens bei verschiedenen Aufgabentypen zur Raumvorstellung zu gewinnen, wurde eine erste Interviewstudie mit 34 Vorschulkindern durchgeführt. Dabei wurde jedes Kind zu seinen Vorgehensweisen bei der Aufgabenbearbeitung befragt. Die Kinder waren im Durchschnitt 5,4 Jahre alt.

Bei der Testaufgabe zu *mentaler Rotation* wurden drei Würfelkonfigurationen als massives Modell aus jeweils fünf einfachen Holzwürfeln vor das Kind auf den Tisch gelegt. Der Auftrag an das Kind war es, aus dieser Auswahl von Würfelkonfigurationen das Modell zu bestimmen, das mit der Ausgangsfigur übereinstimmt. Im Interview begründet Benjamin seine Lösung, indem er zunächst auf die entsprechenden Konfigurationen zeigt und diese im Anschluss nebeneinander legt. Mit der Handbewegung veranschaulicht Benjamin sein gedankliches Vorgehen (Reinhold 2007). Zu beobachten ist weiterhin, dass Benjamin bei der verbalen Beschreibung seines Lösungswegs die Begriffe „oben", „unten" und „anders herum" verwendet. Darüber hinaus ist Benjamin das einzige Kind, das diese Orientierungsbegriffe verwendet und gleichzeitig die Richtigkeit seiner Lösungen anhand von Kippbewegungen am Material verifiziert. Inwieweit diese Vorgehensweise von Benjamin bei der Aufgabenbearbeitung in Zusammenhang mit dem Begriffswissen steht, bleibt weiterführend noch zu untersuchen.

Zusammenfassung und Ausblick

In den beiden Forschungsprojekten besteht eine grundlegende Herausforderung darin, die Denkprozesse von jüngeren Kindern angemessen nachvollziehen und beschreiben zu können. Auf der Basis der bislang in den Vorstudien gewonnenen Ergebnisse erscheint es daher notwendig, Sprache und non-verbale Handlungen als Kommunikationsmittel einzubeziehen und Kinder ihre Lösungswege auch begründen zu lassen.

Literatur

Besuden (1984): Knoten, Würfel, Ornamente. Aufsätze zur Geometrie in Grund- und Hauptschule. Stuttgart. Klett.

Besuden, H. (1990): Räumliche Orientierung: Die rechts/links-Beziehung.

In: Mathematik in der Schule, 7/8, 461-474

Besuden, H. (1999): Raumvorstellung und Geometrieverständnis. Oldenburg.

Devlin, K. (2003). Das Mathe-Gen. München. Deutscher Taschenbuch Verlag.

Franke, M. (2007): Didaktik der Geometrie. Heidelberg. Spektrum.

Grüßing, M. (2002): Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? In: ZDM, 34 (2), 37-45.

Höglinger, S. & Senftleben, H.-G. (1997): Schulanfänger lösen geometrische Aufgaben. In: Grundschulunterricht, 5, 36-39.

Lorenz, J. H. (2011): Was muss jedes Kind können? In: Grundschule, 1, 9-13.

Lüthje, T. (2010): Das räumliche Vorstellungsvermögen von Kindern im Vorschulalter.

Maier, P. H. (1996): Volumen und Oberfläche. In: mathematik lehren, 77, S. 14-16.

Maier, P. H. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen. Frankfurt/M., Peter Lang.

Jansen, P. (2011): Vielschwimmer und Mathecracks. In: Grundschule, 10, 34-37.

Reinhold, S. (2007): Mentale Rotation von Würfelkonfigurationen – theoretischer Abriss, mathematikdidaktische Perspektive und Analysen zu Strategien von Grundschulkindern in einer konstruktiven Arbeitsumgebung. Dissertation. Hannover.

Senftleben, H.-G. (2008): Geometrische Figuren exakt beschreiben. In: Grundschule Mathematik, 18, 36-39.

Michael MARXER, Freiburg

Von der Arithmetik zur Algebra – Wege zu einem inhaltlichen Verständnis von Variablen, Termen und Termstrukturen

Konzepte, die in der Arithmetik entwickelt werden, sind häufig auch in der Algebra tragfähig – und sie können helfen, diese besser zu verstehen: In diesem Beitrag sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, wie *Terme* (zunächst noch ohne Variable) als knappe Darstellungen für mehrschrittige Rechnungen zu strukturellen Überlegungen anregen können und erste Vorerfahrungen für algebraische Konzepte ermöglichen (Prediger u. a. 2012).

Gefördert wird diese Sicht auf den Zusammenhang zwischen Arithmetik und Algebra durch geeignete Aufgabenstellungen, die deutlich machen, dass algebraisches Denken nicht mit dem Umformungskalkül beginnt, sondern viel früher beim Verstehen arithmetischer Operationen und ihrer Wirkungen („operatives Prinzip“, Wittmann 1981)

Terme können als Sprachelement verstanden werden, um die Struktur eines Problems knapp und prägnant darzustellen, die Berechnung erfolgt erst anschließend. Durch die Trennung dieser Schritte werden Unterschiede zwischen verschiedenen Ansätzen besser sichtbar als am Wert des ausgerechneten Terms (Prediger u. a. 2012).

Zwei zentrale Vorgehensweisen dazu sollen erläutert werden:

1. Die Verwendung von Aufgabenformaten, bei denen (neben dem „Ausrechnen“) die konkreten Werte eines Zahlenterms durch Zusatzfragen so variiert werden, dass die prinzipielle Austauschbarkeit dieser Werte erkannt und dadurch die Bedeutung von Variablen erfahren wird.

2. Die Betrachtung von Termen unter dem Blickwinkel, wie sich die Struktur einer Situation in der Struktur des Terms widerspiegelt, und wie sich eine geänderte Situation in einer Änderung des Terms ausdrücken lässt. Dies wird als *Arithmetisches Modellieren* bezeichnet.

Inhaltliches Denken steht also vor dem reinen Kalkül (Prediger 2009).

Arithmetische Terme: Im konkreten Beispiel das Allgemeine erkennen

Bereits bei der Bearbeitung von Aufgaben, die mit Hilfe der Arithmetik gelöst werden können, werden verallgemeinernde Überlegungen angestellt: Lernende, denen noch keine Algebra zur Verfügung steht, nehmen die prinzipielle Variierbarkeit eines Wertes manchmal bewusster wahr als die im formalen Umgang mit algebraischen Werkzeugen routinierten Lehrkräfte. Neben dem reinen „Ausrechnen“ von Termen stellt somit die Verallgemeinerung und fortschreitende Formalisierung mathematischer Muster und Strukturen eine wichtige Grundlage für Aufgaben dar.

Im folgenden Aufgabenbeispiel werden die Zahlen durch Zusatzfragen „in Bewegung“ gesetzt. Sie treten damit als konkrete Zahlen in den Hintergrund, die Sichtweise verlagert sich darauf, wie sich die Änderung an anderen Stellen – insbesondere beim Termwert – auswirkt. Damit können schon im Bereich der Arithmetik Vorerfahrungen gesammelt werden, die das Verständnis für den späteren Umgang mit algebraischen Termen erleichtern.

Fünf Freunde planen einen Ausflug nach Hamburg.

Benzinkosten (PKW mit max. 5 Personen) 120 €	Eintritt Modellbahnausstellung 8 € pro Person

Kosten pro Person [in €]: $\frac{120}{5} + 8$

(a) Was ändert sich, wenn die Benzinkosten auf 130 € steigen?

(b) Was ändert sich, wenn zwei Freunde krank werden?

(c) Was ändert sich, wenn insgesamt sechs Freunde mitfahren?

(d) Was ändert sich, wenn es in der Ausstellung eine Gruppenkarte zu 36 € für bis zu sechs Besucher gibt?

(e) Mit welchem Term kann man die Gesamtkosten für alle ausrechnen?

Eine Änderung an der Sachsituation macht also weitere Überlegungen erforderlich:

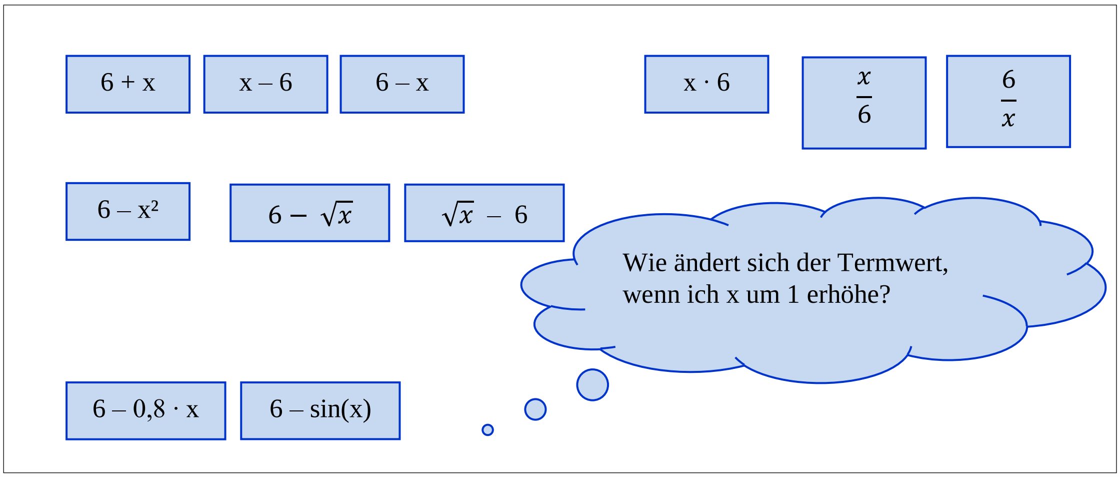
– An welcher Stelle des Terms muss ein Zahlenwert geändert werden?
– Führt diese Änderung zu einer Erhöhung oder einer Verminderung des Termwertes?
– Genügt die Änderung eines einzelnen Wertes oder muss der gesamte Term neu strukturiert werden?

Eine neue Sichtweise auf Terme rückt in den Vordergrund: Der einer Zahl zugewiesene Platz legt fest, wie sich eine Veränderung dieser Zahl auf den Termwert auswirkt. Dabei wird die Semantik von Termstrukturen erfasst: „Warum steht die Anzahl der Personen im Nenner, warum stehen die Benzinkosten im Zähler? Wieso schreibt man die Kosten für den Eintritt nicht in den Zähler des Bruchs, sondern als weiteren Summanden dahinter?“

Teilaufgabe (c) muss mit Vorsicht beantwortet werden: Bevor ein Automatismus bei der Bearbeitung einsetzen könnte, muss über die Gültigkeit des Terms neu nachgedacht werden. Im Modellierungskreislauf sind derartige Überlegungen dem Teilschritt „Validierung“ zuzuordnen (Maaß 2007).

Algebraische Terme unter dem Blickwinkel der Kovariation

Der durch die Variation bei Zahlentermen vertraute Blick auf die Auswirkungen beim Termwert bildet die Grundlage für die Betrachtung algebraischer Terme unter dem Kovariationsaspekt. Abhängig vom „Platz“, an dem die Variable innerhalb eines Terms steht, ergeben sich ganz unterschiedliche Auswirkungen auf den Wert des Terms, wenn für x unterschiedliche Zahlen eingesetzt werden.



Zunächst kann der Vergleich der Terme auf die Fragestellung eingegrenzt werden: „Wird der Termwert größer oder kleiner, wenn x um 1 erhöht wird?“ Anspruchsvoller wird die Betrachtung, wenn untersucht wird, bei welchen Termen eine lineare Zu- oder Abnahme vorliegt und wie sich die Zu- oder Abnahme bei den anderen Termen beschreiben lässt. Graphische Darstellungen können die Überlegungen unterstützen und schaffen den Zugang zum Denken in funktionalen Zusammenhängen.

Beim *arithmetischen* Modellieren wird durch geeignete Aufgabenformate erfahren, wie sich die Struktur einer Situationen in einem Zahlenterm darstellen lässt. Auf diese Erfahrungen aufbauend wird die Einführung von Variablen beim *algebraischen* Modellieren als eine erleichternde Formalisierung erlebt, mit der die Struktur wiederkehrender Situationen erfasst werden kann. Beides zielt darauf ab, Erfahrungen damit zu sammeln, wie die Struktur einer Sachsituation und die Struktur eines Terms einander entsprechen (Marxer 2012).

Typische Aktivitäten sind: Das *Aufstellen* von Termen zu gegebenen Sachsituationen, die *Modifizierung* von Situationen und Umsetzung in die Änderung eines Terms, und – umgekehrt – die Modifizierung des Terms und Umsetzung in eine geänderte Situation. Die mathematisierte Darstellung wird also durch Aufgabenformate erlernt, die sich nicht auf das Ausrechnen von Termwerten beschränken, vielmehr geht es darum, Lernende zu befähigen, arithmetische Konzepte zu verallgemeinern und Beziehungen und Strukturen zu erkennen (Carpenter & Franke 2001). Aufgaben sollten dabei so angelegt werden, dass

- durch Variation der *Ausgangsdaten* Konzepte zur Verwendung von (Quasi-) Variablen entwickelt werden,
- durch Variation der *Situation* Konzepte zur Anpassung oder (Um-) Gestaltung von Termen erlernt werden.

Im Verständnis eines Mathematikunterrichts, der genetisch angelegt ist, bedeutet dies: Schülerinnen und Schüler arbeiten über einen längeren Zeitraum mit Quasi-Variablen, lernen Regelmäßigkeiten und Gesetzmäßigkeiten kennen, werden vertraut mit spezifischen Notationsformen. Wenn dann in den folgenden Klassenstufen weiter führende Formen der Mathematisierung – Buchstabenvariable, algebraische Terme, Funktionsgleichungen – in den Unterricht Eingang finden, werden diese als Möglichkeit erlebt, die Arbeit mit bereits Vertrautem zu erleichtern, aber auch neue Horizonte zu öffnen.

Literatur

Carpenter, T. P. & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In: Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. & Vincent, J. (Hrsg.): The future of teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. Dordrecht: Kluwer, S. 155–162

Maas, K. (2007): Mathematisches Modellieren im Unterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Marxer, M. (2012): Arithmetisches Modellieren – Vorerfahrungen zu Variablen und Termen ermöglichen. Erscheint in: Mathematik lehren 171

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül. In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Weinheim: Beltz, S. 213–234.

Prediger, S.; Barzel, B.; Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.) (2012): Handbuch zu: mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen

Wittmann, E. Ch. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg (6.Auflage)

Patrick MEIER, Root

Wirkungsstude zum Einsatz mathematischer Clips unter dem Kompetenzaspekt „Erforschen und Explorieren"

Die Masterarbeit „Wirkungsstudie zum Einsatz mathematischer Clips im Kompetenzaspekt Erforschen und Explorieren" basiert auf einer quantitativen Studie mit dem Einbezug von Filmen aus dem Projekt „VITAL Maths" (Visual technologie for the autonomous learning of mathematics). Das Projekt VITALMaths entstand in enger Zusammenarbeit zwischen der Fachhochschule Nordwestschweiz FHNW (Prof. Dr. Helmut Linneweber-Lammerskitten) und der Rhodes University in Südafrika (Prof. Dr. Schäfer und Dr. Samson) und verfolgt das Ziel, visuelle Technologien für das selbstständige Lernen in Mathematik zu entwickeln um eine nachhaltige Entwicklung des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik in Südafrika und in der Schweiz sicher zu stellen. Zum Einsatz kamen kurze mathematische Video Clip Animationen.

Die Studie wurde an 14 Klassen der Sekundarstufe I und einer 6. Klasse der Primarstufe mit 308 Lernenden (N=308) an ausgewählten Schweizer Schulen der Kantone Basel-Stadt, Baselland, Solothurn, Aargau und Luzern durchgeführt. Sie baute auf einem Pretest zur Normierung der Kontroll- und Experimentalgruppe auf und endete mit einem Posttest unter dem Kompetenzaspekt „Erforschen und Explorieren" mit einer nach oben offenen Punkteskala. Die Experimentalgruppe arbeitete zwischen den beiden Testdurchführungen mit ausgewählten Clips aus VITAL Maths. Zur Kontrollgruppe gehörten 80 Lernende (N=80), die Experimentalgruppe bestand aus 228 Lernenden (N=228).

Es zeigte sich, dass im Pretest die Differenz der Gruppenmittelwerte der erreichten Punkte bei 0.31 Punkte (1.85 %) lag. Beide Gruppen hatten für die weitere Studienarbeit gleiche Voraussetzungen. Zur Prüfung der Resultate im Posttest wurde eine Varianzanalyse durchgeführt. Es ergab sich ein signifikanter Unterschied ($F(1,305)=16.288$; $p<.01$) in der Erreichung der Gesamtpunktzahl beim Abschlusstest. Die Effektstärke betrug 0.051. Die Experimentalgruppe (N=228) erreichte eine um 30.53 % bessere Gruppenmittelwertleistung.

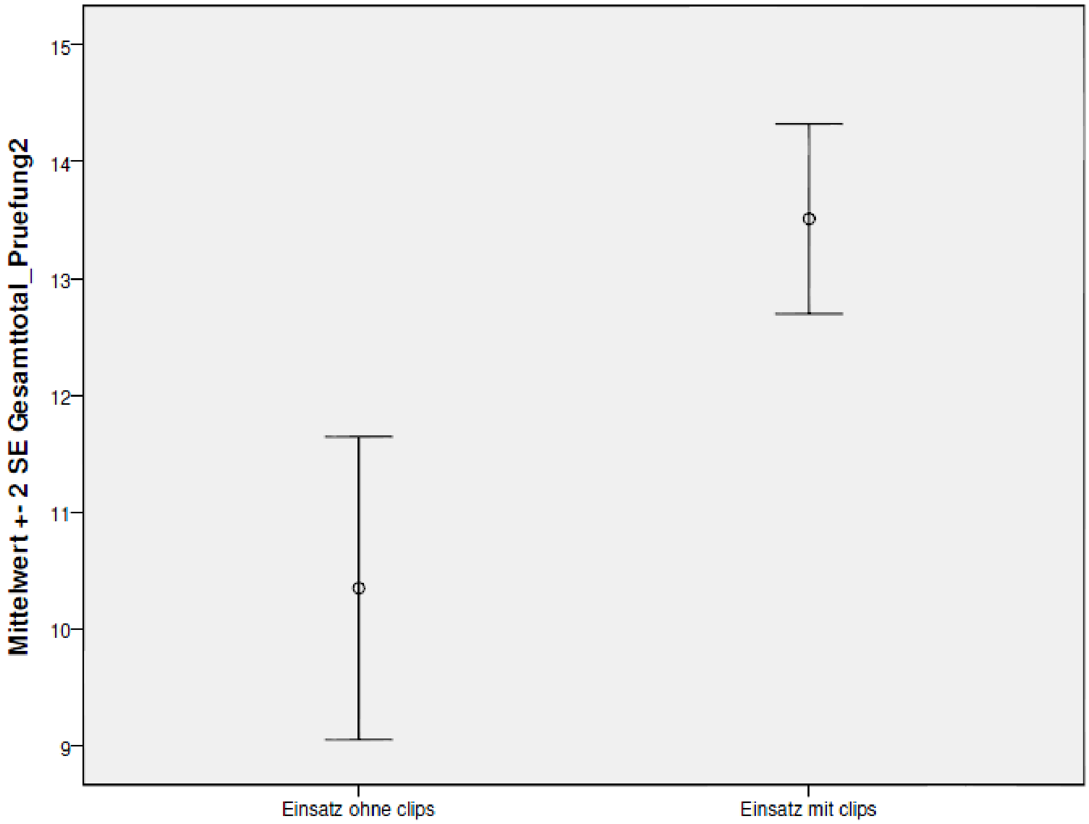


Abbildung 1: Varianzanalyse Einsatz mathematischer Clips

Es zeigte sich, dass der Einsatz von ausgewählten Clips aus VITAL Maths den Kompetenzaspekt „Erforschen und Explorieren“ erfolgreich ansprechen konnte. Als Nebeneffekt wurde erkannt, dass der Einsatz der Clips individualisiertes Lernen fördert.

Erforschen und Explorieren im Mathematikunterricht

Es stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, welche Voraussetzungen für den Unterricht gelten müssen, damit im Kompetenzaspekt „erforschen und explorieren“ erfolgreich gearbeitet werden kann. Zwei Bereiche sind dafür entscheidend: Die Voraussetzung der Lernenden und die Beschaffenheit des Umfeldes, wie die Klassensituation, jedoch auch räumliche und materielle Gegebenheiten.

„Kinder wie Wissenschaftler, suchen nach Erklärungen für Phänomene der belebten und unbelebten Natur“ (Sodian, Thoermer, & Koerber, 2008, S. 29). Sie erkunden die Umwelt und bilden eigene Theorien, wie Sachverhalte sich erklären lassen. Können Kinder jedoch bereits wissenschaftlich Denken? Den Begriff „Kind als Wissenschaftler“ prägte Piaget (1958) (Koerber, 2006), wobei er der Ansicht war, dass sich „wissenschaftliches Denken“ als Fähigkeit erst in der Adoleszenz entwickle. Im formal-

operatorischen Stadium nach Piaget zeigen Kinder und Jugendliche Fähigkeiten zum wissenschaftlichen Denken. In Anlehnung an Koerber (Koerber, 2006) kann festgehalten werden, dass bereits Vorschulkinder über „grundlegende Fähigkeiten im Bereich des formal-wissenschaftlichen Denkens“ verfügen, wenn „klare, eindeutige Daten gezeigt werden und sie selber keine gegenteilige Hypothese“ haben (Koerber, 2006, S. 198). „Erforschen und Explorieren“ ist entsprechend nicht nur Erwachsenen vorbehalten, sondern kann von Kindern durchgeführt werden. Für das Projekt VITAL Maths heisst dies, dass bereits Lernende der 5./6. Klasse (bei geeigneter Fragestellung) Antworten auf gestellte Forschungsfragen geben können und Filme aus VITAL Maths nicht nur der Sekundarstufe I und folgenden Stufen vorbehalten sein müssen. Die LOGIC[1]-Erkenntnisse stärken den Einsatz von Clips aus VITAL Maths an der Grundschule. *„Dies ist vereinbar mit einem moderat konstruktivistischem Unterricht, in dem Elemente des Konstruktivismus (hohe Eigenaktivität des Schülers, Bezug zu Alltagsproblemen, Kooperation der Schüler untereinander, Ermutigung zur aktiven Umstrukturierung von Misskonzepten) mit instruktionspsychologischen Ansätzen wie Strukturierungselementen [....] gekoppelt werden.“* (Koerber, 2006, S. 199) In den Filmen werden gezielte Fragen gestellt, so zum Beispiel „Ist das bloss Zufall?“ (Film Summe von Kubikzahlen), „Kann dies auch mit Zahlen mit drei Ziffern gemacht werden?“ (Film: Produkte bilden Rechtecke), „Kannst Du es sehen, wieso es immer funktioniert?“ (Film: Konsekutive ungerade Zahlen) usw. Das formal-wissenschaftliche Denken ist eine Kompetenz, welche für die Erschliessung von Wissen im naturwissenschaftlichen Bereich sehr wichtig ist. So fordert den auch Koerber *„formal-wissenschaftliches Denken im Vor- und Grundschulalter ernst zu nehmen und die Schüler in altersadäquater Form an den wissenschaftlichen Erkenntnisprozess heranzuführen“*. (Koerber, 2006, S. 200)

Zur Infrastruktur und Beschaffenheit des Forschungsplatzes bezüglich "Clips aus VITAL Maths" gilt die Computernutzung (nur im Schweizer Forschungsarrangement) als zentrale Vorbedingung. Der Forschungsauftrag könnte jedoch, wie dies in Südafrika praktiziert wurde, mit anderen Abspielgeräten auch erfüllt werden. Von Vorteil erscheint auch, wenn genügend Platz für die Entwicklung von Exponaten geschaffen werden kann, damit mit Papier und Schreibutensilien, wie auch mit Schere und Bastelmaterialien "Ahnungen" manifestiert oder verworfen werden können. Zusammengefasst soll der Arbeitsplatz so eingerichtet werden, dass dem "freien,

[1] LOGIC ist eine Längsschnittstudie aus dem Jahre 1999. Es wurde untersucht wie sich Experimentierstrategien von Menschen zwischen ihrem 8. bis zum 21. Geburtstag entwickeln.

forschenden Geist" möglichst wenige Hindernisse in den Weg gelegt werden.

Da am Projekt diverse Klassen mit unterschiedlichen Leistungsniveaus beteiligt waren, sollten die möglichen Studienresultate bereits im Vorfeld diskutiert werden können. Reiss & Hartmann führten aus, dass Förderprogramme, zu denen auch VITAL Maths zählen dürfte, erfolgreich sein können, wenn ein niedriges Leistungsniveau vorhanden war: *„Einige Untersuchungen bestätigen die These, dass Förderprogramme insbesondere dann erfolgreich sind, wenn vorher ein eher niedriges Leistungsniveau vorhanden war“* (Reiss & Albrecht, 1994) (Hartmann & Reiss, 2000, S. 85). In der Wirkungsstudie beeindruckten Gesamtresultate von Klassen eines tieferen Einstufungsniveaus durch teilweise bessere Resultate der Leistungen von Klassen in höheren Anforderungsniveaus.

Literatur

Hartmann, J., & Reiss, K. (2000). Auswirkungen der Bearbeitung räumlich-geometrischer Aufgaben auf das Vorstellungsvermögen. In D. L. Brünken, *Neue Medien in Unterricht, Aus- und Weiterbildung : aktuelle Ergebnisse empirischer pädagogischer Forschung* (S. 85 - 94). Münster: Waxmann.

Koerber, S. (Juni 2006). Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens bei 4 bis 8 Jährigen. *Beiträge zur Lehrerbildung , 2*, S. 192 - 201.

Linneweber-Lammerskitten, H. (2010). *Basisstandards für die Mathematik.* Bern: EDK.

Linneweber-Lammerskitten, H. (10. 10 2010). *Der Einsatz von Kurzfilmen als Einstieg in Experimentier- und Explorationsphasen.* Abgerufen am 10. 10 2010 von www.mathematik.tu-dortmund.de: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/LINNEWEBER_Helmut_2009_Kurzfilme.pdf

Linneweber-Lammerskitten, H. (10. Oktober 2009). *VITAL Maths - ein gemeinsames Forschungs- und Entwicklungsprojekt Schweiz Südafrika.* Abgerufen am 09. Dezember 2011 von mathematik.tu-dortmund.de: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/bzmu2011/_BzMU11_2_Einzelbeitraege/BzMU11_LINNEWEBER_H_VITALmaths.pdf

Linneweber-Lammerskitten, H. (2011). Workshop: Der Lernstick als Hilfe zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht. In H.-U. Grunder, *mLearning in der Schule: Der Lernstick als Lerninstrument* (S. 75 - 84). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Sodian, B., Thoermer, C., & Koerber, S. (2008). Das wissbegierige Kind. In L. Fried, *Das wissbegierige Kind* (S. 29 - 36). Weinheim, München: Juventa.

Links:

Projekt VITALmats:	*http://www.ru.ac.za/vitalmaths/*
Masterarbeit:	*http://meierpatrick.ch/unterlagen/MA_120221_Meier%20Patrick.pdf*

Irmin MENTZ, Freie Universität Berlin

Eine dialogische Lineare Algebra 1 – ein neuer Weg in der Studieneingangsphase des Mathematikstudiums

„du Bis LiB Papa“ schrieb mir neulich mein 6 jähriger Sohn auf ein Blatt.

Da ich ja möchte, dass aus meinem Sohn etwas wird, suchte ich mir sofort einen motivierten Drittklässler, schenkte dem einen Rotstift und bat ihn, diesen Satz meines Sohnes zu korrigieren. Falls der Drittklässler Fragen habe, würde ich für diesen eine wöchentliche Sprechzeit einrichten. Selbstverständlich schaffte der Drittklässler es:

Für das erste Wort 0 von 2 Punkten, für das zweite 0 von 4 Punkten, für das dritte 0 von 4 Punkten und für das vierte, da es ja schon so lange bekannt war 2 Punkte.

Aber bis zum Ende des Halbjahres wird mein Sohn schon auf 50% der Punkte kommen! Ich lese ihm jeden Tag Weltliteratur zum Beispiel von Goethe, Schiller und Lessing vor.

1. Bedingungen zum Studienanfang

Bachelorstudierende des Faches Mathematik mit Lehramtsoption haben an der Freien Universität Berlin einige Hürden zu nehmen.

Mathematik wird an der Hochschule anders vermittelt als in der Schule. Es ist für die Studierenden ungewohnt, sich auf diese neue Betrachtung des Wissens einzulassen. Dies ist kein neues und auch kein Standortproblem sondern schon seit über hundert Jahren bekannt (vgl. doppelte Diskontinuität bei Klein).

Vielleicht ist das mit ein Grund dafür, dass von 75 Studierenden (90 LP Kernfach Mathematik im Kombibachelor mit Lehramtsoption) aus dem WS 2007/2008 nur 43 noch im sechsten Semester Mathematik studierten.

An der Freien Universität hören aktuell alle Studierenden des Faches Mathematik unabhängig vom Berufswunsch Lineare Algebra 1 im ersten Semester. Dazu zählen Studierende mit 90 LP Kernfach Mathematik mit Lehramtsoption und auch jene mit 60 LP Modulangebot mit Lehramtsoption. Je nach Studienziel unterscheiden sich aber die weiteren Vorlesungen. Studierende mit dem Ziel Grundschullehrer mit Mathematik als 60 LP Modul oder auch Studierende mit dem Ziel Lehrer für die Sekundarstufe 1 zu werden mit Mathematik als 60 LP Modul hören gegebenenfalls nie eine Lineare Algebra 2, andere Studierende für das gymnasiale Lehramt, die aber Mathematik als 60 LP Modul studieren, hören Lineare Algebra 2 im letzten Semester (4. Semester) des Masterstudiengangs, also mindestens neun Semester später.

Damit die Studierenden nach so langer Zeit noch auf die Inhalte der Linearen Algebra 1 zurückgreifen können, muss die Auseinandersetzung mit den Inhalten der Linearen Algebra 1 so intensiv sein, dass ein Anknüpfen an diese Inhalte möglich ist.

Aus diesem Grund möchte ich hier eine Idee vorstellen, wie die Studierenden sich dialogisch mit der Linearen Algebra 1 auseinandersetzen können, um sie für sich nachhaltig zu erlernen.

2. Das FU.Mint-Projekt Lehrerbildung neu denken

Mit der MINT-Lehrerbildungsinitiative der Deutsche Telekom Stiftung verbessert die Freie Universität die Ausbildung der zukünftigen Lehrkräfte in den Fächern Mathematik (M), Informatik (I) und Naturwissenschaften (N) unter Berücksichtigung des Bereichs Technik (T). (Homepage der FU-Berlin, Stand 23.06.2011)

Das Projekt besteht aus drei Teilprojekten, dem Teilprojekt 1, Studieneingangsphase, dem auch die Mathematik angehört, dem Teilprojekt 2, Schülerlabore und dem Teilprojekt 3, in welchem ein neuer Studiengang Integrierte Naturwissenschaften entwickelt wurde und erprobt wird.

Im Teilprojekt 1 gibt es speziell für Lehramtsstudierende eingerichtete Vorlesungen in der Studieneingangsphase, bei denen auch die Tutorien und Übungen neu konzipiert werden sollen. Es entstehen dazu Lehr- und Lernmaterialien, die den Studieneingang begleiten.

3. Dialogische Lineare Algebra 1

Die Idee, sich beim Erlernen der Linearen Algebra 1 dialogisch im Sinne von Gallin und Ruf in das neue, komplexe Fachgebiet zu vertiefen, entstand durch Berichte positiver Erfahrungen mit dem dialogischen Lernen in Mathematikdidaktikveranstaltungen an der Freien Universität Berlin.

Aus den Ideen von Gallin und Ruf wurden für die Lineare Algebra 1 folgende als grundlegend erachtet:

An die Stelle der Übungsaufgaben treten Aufträge. Nicht jede Aufgabe lässt sich durch einen Auftrag ersetzen, es gibt Aufgaben, die bleiben, da an ihnen wichtige Inhalte geübt werden, aber durch die Änderung von einer Aufgabe, die zu lösen ist, zu einem Auftrag, mit dem man sich beschäftigen soll, entsteht ein anderer Zugang zu den bisherigen Aufgaben.

Ein mögliches Beispiel ist der folgende Auftrag: Schreiben Sie auf, was sie zum Thema mathematische Gruppe in Fachbüchern finden. Schreiben Sie so viel auf, dass ihnen der Begriff Gruppe und alle ihre Eigenschaften vertraut erscheinen und überprüfen Sie an 3 selbst gewählten Beispielen, ob sie die Eigenschaften nachweisen können.

Solch ein Auftrag lässt sich zugegebener Weise nicht so leicht mit Punkten bewerten, wie das Vorgeben von drei möglichen Gruppen, für welche die Eigenschaften zu überprüfen sind, aber ist es denn zum Lernen notwendig, diese Punkte zu bekommen. Kann nicht eine Überprüfung des Wissens über die Eigenschaften mit einer kleinen Präsenzaufgabe genauso gut stattfinden, wenn es denn der Punktvergabe in dieser Form bedarf?

Ein solcher Auftrag bietet aber die Möglichkeit selber nach dem Inhalt zu forschen, in Büchern zu lesen, sich ein Bild davon zu verschaffen, was der Begriff bedeutet.

Um diese Mühe, die sich eine Studierende oder ein Studierender macht, um den Begriff zu finden, nicht nur für den einzelnen Studierenden nutzbar zu machen, bietet sich als zweite Maßnahme ein Lerntagebuch an.

In die Lerntagebücher sollen die Studierenden die Aufträge eintragen darüber hinaus aber zusätzlich auch Empfindungen und Emotionen, die sie beim Erledigen des Auftrags hatten.

Ganz wichtige Bestandteile der Dokumentation sind auch Fehler und Umwege, denn aus denen lernen die Studierenden manchmal mehr als aus den richtigen Lösungen einer Aufgabe.

Die Lerntagebücher dienen als Grundlage für einen Austausch der Studierenden untereinander, aber auch als Grundlage eines Austauschs zwischen Tutoren und Studierenden oder Dozenten und Studierenden.

Damit diese Lerntagebücher aber in diesem Sinne genutzt werden, muss sowohl den Studierenden Zeit gegeben werden, sich gegenseitig auszutauschen als auch mit den Tutoren und Dozenten in einen Dialog zu treten.

Um diesen Dialog zu ermöglichen sollte von einer Vorlesung als Lesung eines fertigen vorhandenen Skripts Abstand genommen werden. Nicht die gesamte Zeit der vierstündigen Vorlesung, aber doch ein Großteil sollte im Dialog zwischen Studierenden und Dozenten stattfinden, die Studierenden können von ihren Forscherergebnissen berichten und es wird der Inhalt gemeinsam erarbeitet. Der Dozent hat hier die Aufgabe normierend auf die Ergebnisse einzuwirken, damit nicht falsche Ergebnisse verfestigt werden.

Gerade auch in Tutorien bieten die Lerntagebücher eine Grundlage zum gemeinsamen Diskutieren und Thesenaufstellen, zum Überprüfen der Ergebnisse und zum Dialog im Schriftlichen.

4. Umsetzung und Überprüfung des Vorhabens

These: Eine dialogische Lineare Algebra 1 bietet die Chance sich intensiv mit den mathematischen Themen zu beschäftigen und auch den Lernweg zu dokumentieren, so kann bei einem späteren wieder Aufgreifen schneller an das vorhandene Wissen angeknüpft werden. Um das zu zeigen wollen wir zunächst eine dialogische Lineare Algebra 1 anbieten und am Ende der Vorlesung die wesentlichen Inhalte in einer Klausur abfragen. Zum Nachweis der Nachhaltigkeit streben wir an nach 2 Semestern dieselben Inhalte noch ein Mal abzufragen und nach 4 Semestern wieder.

Bisher ist das noch eine Idee, inwieweit sie umgesetzt werden kann, ist zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht absehbar, auch über Kontrollgruppen und Transfermöglichkeiten muss sich noch Gedanken gemacht werden.

Literatur

Ruf, Urs & Gallin, Peter. Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1. Seelze- Velber 1998

http://www.fu-berlin.de/sites/mint-lehrerbildung/index.html (24.03.2012)

Alexander MEYER, Oldenburg

Diagnose in Algebra – Typische Schülerlösungen zu einer diagnostisch reichhaltigen Aufgabe

Algebra ist eine Herausforderung an Lehrpersonen, da Lernende an neue, ungewohnte Denkweisen sowie an die algebraische Symbolsprache heran geführt werden müssen. Vielfältige Forschungen setzen sich damit auseinander, wie der Zugang zum algebraischen Denken für Lernende erleichtert werden kann (z.B. Cai & Knuth 2011). Algebraisches Denken ist trotz seiner mit ihm verbundenen Schwierigkeiten eine wesentliche Voraussetzung für späteren Mathematikunterricht, besitzt aber auch einen Bildungswert in sich.

Diagnose und Förderung ermöglichen es, für Lernende optimale Lernbedingungen zu schaffen. Ziel einer Diagnose zur Verbesserung des Lernens sind das Erkennen von Lernressourcen und –defiziten, sowie die Überprüfung der Lernfortschritte der Lerner. Eine Förderung hat daran anschließend das Ziel, die folgenden Lernschritte individuell an den Bedürfnissen der Lerner zu orientieren (Ingenkamp 2005). Bei der Förderung stellt sich jedoch das Problem, welche Beschaffenheit eine Aufgabe haben muss, die das Denken des Lernenden fördert und damit „bessere“ Lernerfolge ermöglicht (vgl. Kleber 1992). Eine systematische Analyse von Schülerfehlern scheint für die Auswahl einer solchen Förderaufgabe nicht unmittelbar hilfreich, da einem Fehler in der Algebra sehr unterschiedliche Denkprozesse zugrunde liegen können. Eine Diagnose des algebraischen Denkens der Lernenden am Ende des Lehrgangs zur Algebra kann aufzeigen, welche Lernschritte in Algebra erreicht worden sind, und in welchen Bereichen Förderbedarf besteht.

In diesem Beitrag setze ich mich mit der Frage auseinander, welche algebraischen Denkmuster Lernende in diagnostischen Problemlöseaufgaben zur Algebra zeigen. Diese Frage soll exemplarisch anhand der qualitativen Analyse einer Diagnoseaufgabe, die algebraisches Schlussfolgern herausfordert, beleuchtet werden.

Algebraisches Schlussfolgern in Diagnoseaufgaben

Ich beschränkte mich in meiner Untersuchung auf einen Teilbereich des algebraischen Denkens, dem algebraischen Schlussfolgern. Ein Lerner kann algebraisch Schlussfolgern, wenn

– er flexibel zwischen „Term lesen“ und „Term umformen“ wechseln kann (Arcavi 1994);

- er situationsangemessen Beziehungen zwischen mathematischen Strukturelementen herstellen kann und diese Beziehungen selbst als neues Strukturelement begreifen kann;
- Er anhand von gebildeten Beziehungen argumentieren und begründen kann;
- Er algebraische Denkhandlungen sachgerecht wählt und durchführt (zu algebraischen Denkhandlungen vgl. Fischer & Hefendehl 2010).

Diese Definition ermöglicht die Bildung von Kategorien, die der Analyse des empirischen Materials zugrunde gelegt wird.

Auf der Grundlage der Tätigkeitstheorie gehe ich davon aus, dass sich aus den Handlungen der Lerner in den Aufgaben und aus den Objekten dieser Handlungen auf das Denken der Lerner zurück schließen lässt (Leont'ev 1979). Die Aufgabenbearbeitungen der Lerner zeigen die algebraischen schlussfolgernden Denkprozesse an, da sie intentionales verstehendes Handeln abbilden.

Es wird zugrunde gelegt, dass das Herstellen von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten bzw. Strukturelementen ein wesentliches Merkmal mathematischen Denkens und Lernens ist. Aufgrund des Zeichencharakters mathematischer Objekte ist jede neue Beziehung, die geschaffen wird, ein Bezeichnungsprozess - und damit ein Prozess, der genuin mathematisches Denken ausmacht. Das Verständnis eines mathematischen Objekts zeigt sich demnach in den Beziehungen, die ein Lerner durch Handlungen an diesem Objekt ausdrückt.

Denkmuster in diagnostischen Aufgaben

Die Aufgaben, auf deren Grundlage im Folgenden algebraische Denkmuster dargestellt werden, bieten den Lernenden besondere Möglichkeiten, offen und mit individuellen Zugängen an sie heran zu gehen, sie sind also für Diagnose geeignet (Büchter & Leuders 2009). Sie fordern dabei algebraisches Schlussfolgern heraus.

Die folgende Aufgabe wurde 90 Lernenden aus 10. Klassen des Gymnasiums vorgelegt, mit der Bitte, ihre Gedanken ausführlich zu verschriftlichen.

Algebraische Denkmuster in der Aufgabe „Teilbarkeitsuntersuchung“

Aufgabe: „Gegeben ist eine ungerade Zahl. Multipliziere diese mit sich selbst und ziehe vom Ergebnis 1 ab.“

Zahlen, die nach dieser Vorschrift entstehen, sind immer gerade. Stefan behauptet nun, sehr große Zahlen sind sogar immer durch 16 teilbar. Überprüfe diese Aussage. Algebra und Variablen können Dir dabei helfen.

Tipp: mache Dir zuerst klar, dass sich ungerade Zahlen durch $2n + 1$ *schreiben lassen!*

Mithilfe eines an Typenbildung angelehnten qualitativen Verfahrens habe ich auf der Grundlage ähnlich beschaffener Aufgabenbearbeitungen zu der obigen Aufgabe Denkmuster rekonstruiert.

Denkmuster 1: „Teilbarkeit als arithmetische Operation“. Bei diesem Denkmuster wird Teilbarkeit arithmetisch betrachtet. Es werden „zufällig gewählte ungerade Zahlen“ gewählt, diese sind Grundlage zur Bildung der im Aufgabentext benannten Zahl. Anhand dieser Zahl wird die Teilbarkeit durch 16 geprüft und– je nachdem ob ein ganzzahliges Ergebnis vorliegt oder nicht – festgestellt, dass eine Teilbarkeit vorliegt oder eben nicht. Dabei wird lediglich anhand von wenigen probierten Zahlen geurteilt.

Denkmuster 2: „Teilbarkeit als algebraische Routine“. Bei diesem Denkmuster wird der algebraische Term $(2n + 1)^2 - 1$ benutzt, um schrittweise die geforderten Zahlen zu bilden, wobei für n eine Zahl gewählt wird. In einem zweiten Schritt wird die so gebildete Zahl auf ihre Teilbarkeit geprüft. Im Gegensatz zu Denkmuster 1 werden hier Zahlen auf Grundlage des algebraischen Terms ausprobiert. Hier fehlen Überlegungen, wie Teilbarkeit in einem algebraischen Term abzulesen ist, obwohl der algebraische Term Ausgangspunkt der Aufgabenbearbeitung zu sein scheint.

Denkmuster 3a: „Teilbarkeit als Geschichte“. Die Lernenden benutzen algebraische Symbolsprache, um der Reihe nach zu beschreiben, was in der Aufgabe zu tun ist. Ein Beispiel ist „$(2n + 1)^2 - 1 = x: 16$ [...]“. Die Einzelnen Terme sind eher prozedural zu lesen, d.h. als Anweisung, was jeweils (von links nach rechts) zu berechnen ist.

Denkmuster 3b: „Teilbarkeit als Zahleigenschaft“. Der oben zitierte Term lässt eine zweite Deutung zu. Der Lerner deutet den Term $(2n + 1)^2 - 1$ als eine unbestimmte Zahl, und gibt dieser Zahl deshalb den Namen x. Die Zahl x wird nun als beliebig angesehen, dabei geht aber die Struktur der ursprünglichen Zahl verloren. Es wird dennoch zum Ausdruck gebracht, dass diese Zahl in irgendeiner Weise durch 16 teilbar sein soll.

Denkmuster 4: „Teilbarkeit als funktionale Abhängigkeit“. Die in der Aufgabe zu bildende Zahl und die Teilbarkeit werden als Funktionen oder Folgen umgedeutet, also in $x^2 - 1$ und $16 \cdot x$. Diese Funktionen/Folgen werden mittels der Vorstellung von dazugehörigen Graphen in Beziehung zueinander gesetzt. Auf dieser Grundlage wird versucht zu argumentieren, dass die Funktion/Folge $x^2 - 1$ nicht (immer) die Werte annimmt, die die Funktion/Folge $16x$ annimmt, und somit keine generelle Teilbarkeit gegeben ist.

Diskussion und Ausblick

Die Rekonstruktion von Denkmustern in Diagnoseaufgaben stellt einen ersten Schritt dar, um Diagnose und Förderung in Algebra handhabbar zu machen. Dabei wird eine an Kriterien orientierte Datenreduktion (vgl. Thomas 2007, S. 83) ermöglicht, die für eine Diagnose im Unterricht wertvoll ist.

Ein nächster Schritt muss die Bewertung der Denkmuster hinsichtlich ihres Potentials für algebraisches Denken und dessen Förderung erfolgen. Dazu sollen ähnliche Denkmuster verglichen werden und herausgearbeitet werden, welche Merkmale eines Denkmusters ein erfolgreiches, d.h. mathematisch angemessenes algebraisches Denken kennzeichnen. Auf diese Weise kann in einer Diagnose im Unterricht die Bewertung einer Schülerlösung, die für Förderung immer erfolgen muss, anhand von Indikatoren erfolgen, die erfolgreiche algebraische Denkmuster als Grundlage haben – immer jedoch nur innerhalb der oben genannten Diagnoseaufgaben. Offen bleiben muss die Generalisierbarkeit der erfolgreichen algebraischen Denkmuster.

Literatur

Arcavi, A. (1994): Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. In: For the Learning of Mathematics, 14(3), 24-35.

Büchter, A., & Leuders, T. (2009): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen (4 Aufl.). Berlin: Cornelsen scriptor.

Cai, J., & Knuth, E. (2011): Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 52(33), 1-7.

Ingenkamp, K., & Lissmann, U. (2005): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik (5. vollständig überarbeitete Auflage). Weinheim: Beltz.

Kleber, E. W. (1992): Diagnostik in pädagogischen Handlungsfeldern. München: Juventa.

Leont'ev, A. N. (1979): The problem of activity in psychology. In J. V. Wertsch (Ed.): The concept of activity in Soviet Psychology. New York: Sharpe.

Thomas, L. (2007): Lern- und Leistungsdiagnostik. In T. e. a. Fleischer (Ed.), Handbuch Schulpsychologie. Psychologie für die Schule. Stuttgart: Kohlhammer, 82-97.

Mareike MINT, Köln

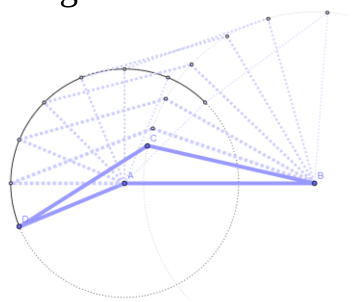
Gelenkvierecke – Elementare Geometrie in alltäglicher Technik erkennen

1. Einleitung

Motiv der folgenden Betrachtungen ist der Gedanke, Lernende dazu anzuregen, ihre Umgebung „geometrischer“ wahrzunehmen. Dahinter steht die These, dass das Entdecken geometrischer Phänomene Anreiz zur Beschäftigung mit Geometrie selbst bieten könne. – Wer sich, motiviert durch solche Phänomene, eingehender mit einem (mathematischen) Thema auseinandersetzt, kann zum einen auch tieferes Verstehen dafür entwickeln. Zum anderen findet der für Geometrie Aufmerksamere auch erneut weitere Realisierungen davon in seiner Umwelt.

Im Folgenden sollen als geometrischer Kontext speziell Gelenkvierecke betrachtet werden. Gelenkvierecke sind bewegbare Objekte – sie bieten somit Potential für das Einbeziehen kinematischer Phänomene in den Geometrieunterricht, wie etwa Bender (Bender 1983) es fordert. Auch wird der Lernende zur Interaktion (vgl. Mariotti 2000) mit dem betrachteten Gegenstand oder Sachverhalt angeregt – beobachtend oder selbst handelnd.

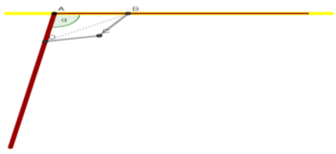
Vier durch Gelenke miteinander verbundene Stangen bilden ein *Gelenkviereck*. Dieses hat einen Freiheitsgrad – beispielsweise ein Winkel oder die Länge einer Diagonale kann also noch zusätzlich gewählt werden. In vielen technischen Realisierungen findet man Gelenkvierecke als *Kurbelgetriebe* wieder – eine der Stangen, bezeichnen wir sie mit AB, wird festgestellt, eine zweite, AD, zu einer Drehung um den Punkt A angetrieben. Während $\angle BAD$ also verschiedene Winkel durchläuft, bewegen sich die beiden anderen Stangen, BC und CD, zwangläufig mit.



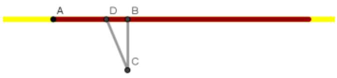
Drei Beispiele für im Alltag anzutreffende Gelenkvierecke werden in Abschnitt 2 betrachtet. Zugleich bieten sie Potential für tiefergehende mathematische Überlegungen; auf drei Aspekte wird in Abschnitt 3 eingegangen.

2. Gelenkvierecke in Anwendungen

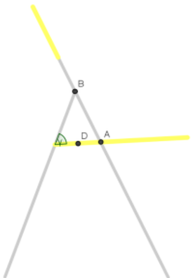
Als erstes Beispiel sei eine Tür mit gelenkiger Metallverstrebung zum Rahmen genannt (siehe Abbildung). Hier liegt ein Kurbelgetriebe vor – während der *Steg* AB (der Türrahmen) stets ruhig bleibt, wird die *Kurbel*



AD (die Tür) angetrieben. Die verbindenden Metallstangen BC und CD werden zwangläufig mitbewegt. Wie lang sollten jene Metallstangen sein, und wo angebracht werden? Mathematisch ausgedrückt: Man bestimme mögliche und zweckmäßige Längen AB, BC, CD, AD!



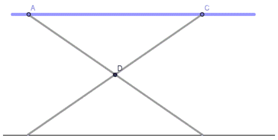
In geschlossenem Zustand sollte die Stange BC möglichst senkrecht zur Tür stehen, damit diese mit maximaler Kraft ins Schloss gedrückt wird; wir finden hier also nach dem Satz des Pythagoras die Bedingung $(AB - AD)^2 + BC^2 = CD^2$. Ist die Tür maximal geöffnet (siehe oben), so sollte dennoch das Gelenk bei C nicht durchgestreckt sein – die Gefahr, dass die Verstrebungen herausgerissen werden, wenn die Tür einmal schwungvoll aufgestoßen wird, wäre sonst groß. Es gilt hier also die Dreiecksungleichung: $BC + CD > BD_{\max}$. Der maximale Abstand der Punkte B und D voneinander lässt sich auch durch den Winkel ausdrücken, den Tür und Rahmen maximal bilden – nach dem Kosinussatz ist $BD_{\max}^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha_{\max}$. Weitere Bedingungen könnten etwa berücksichtigen, dass die Stangen einen bestimmten Abstand zur Türangel nicht unter- bzw. überschreiten sollten.



Ein zweites Beispiel ist ein Klappstuhl – auch hier findet man ein Gelenkviereck; bezeichnen wir es erneut mit $ABCD$ (vgl. Abbildung). Die Untersuchung der Bewegung gestaltet sich aber schon schwieriger: Meist hält man den Stuhl an der Lehne fest und drückt die Sitzfläche von dieser weg – der Antrieb scheint also beim Sitz zu liegen. Allerdings wird eigentlich auch die Lehne in entgegengesetzter Richtung bewegt. Ist es trotzdem sinnvoll, die Ebene, in der sich die Lehne befindet, als unbewegte Bezugsebene und den Stuhl daher erneut als Kurbelgetriebe zu betrachten? Oder geht man von zwei Antrieben aus? Spielt das überhaupt eine Rolle?

In zusammengeklapptem Zustand sollte der Stuhl möglichst „flach“ sein – das Gelenkviereck $ABCD$ ist annähernd *durchschlagend*. Für seine Seiten ergibt sich die Beziehung $AB + CD = BC + AD$. Beim aufgestellten Stuhl bilden ABC ein gleichschenkliges Dreieck (siehe oben) – ist das Zufall oder absichtlich so konstruiert? Jedenfalls gilt daher $AB = BC$, und wegen der vorherigen Gleichung auch $CD = AD$. Für den maximalen Öffnungswinkel des Stuhles bei C, $\gamma_{\max}$, ergibt sich daraus $\cos\gamma_{\max} = \frac{CD}{BC}$.

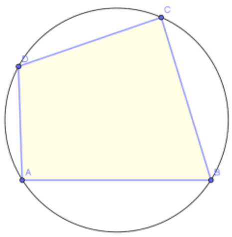
Welche weiteren Bedingungen werden an den aufgeklappten Stuhl gestellt? Natürlich sollte die Sitzfläche ziemlich waagerecht sein, die Rückenlehne leicht nach hinten geneigt. Wie wird das erreicht, wo kann oder muss man Abstriche machen?



Schließlich sei noch ein Bügelbrett als Beispiel für eine *Schubkurbel* genannt – die Stange AD (Bezeichnungen siehe Abbildung) wird erneut als Kurbel betrachtet, der Punkt B jedoch als unendlich weit entfernt in senkrechter Richtung zur Bügelfläche. Der Punkt C, der beim Kurbelgetriebe einen Kreisbogen um B beschreibt, bewegt sich hier daher auf einer Geraden. Welche geometrischen Ideen findet man?

3. Gelenkvierecke – geometrisch betrachtet

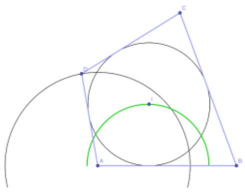
Kann man bei einem gegebenen Gelenkviereck eine Aussage über dessen Flächeninhalt machen? Der folgende Satz nach Wilfried Haags *Wege zu geometrischen Sätzen* (Haag 2003) gibt eine obere Grenze an:



Ein Gelenkviereck habe die Seitenlängen a, b, c, d. Der **Flächeninhalt** des Vierecks ist nach oben beschränkt durch $F_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(ac+bd)^2 - \frac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$, und der maximale Flächeninhalt wird genau dann erreicht, wenn das Viereck ein nicht überschlagenes **Sehnenviereck** ist.

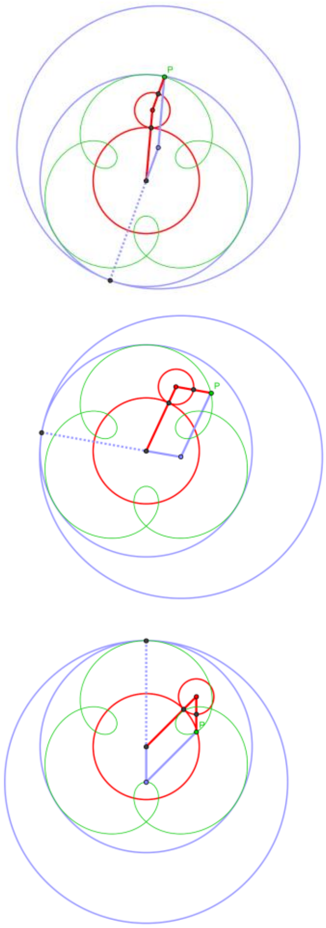
Hier schließt sich direkt die Frage an, ob solch ein Sehnenviereck immer existiert, d.h. ob der Flächeninhalt bei gegebenen Seitenlängen auch tatsächlich erreicht wird, und ob es gegebenenfalls eindeutig bestimmt ist. Geometrische Sachverhalte, die in Haags Beweis genutzt werden, oder die kontextuell der Aussage nahe liegen, sind beispielsweise: Drehstreckungen – gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck ergänzen sich zu $180°$ – Satz des Ptolemäus – Formel von Brahmagupta für Sehnenvierecke und Satz des Heron für Dreiecke.

Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, das einen Inkreis hat. Für seine Seitenlängen a, b, c, d gilt $a+c=b+d$, wenn wie üblich a und c sowie b und d einander gegenüberliegen. Ist ein Gelenkviereck ein Tangentenviereck, so bleibt diese Eigenschaft also stets erhalten, wie auch immer es bewegt wird. Hier gilt der folgende Satz:



Sei $ABCD$ ein **Tangenten-Gelenkviereck**, und sei I sein **Inkreismittelpunkt**. Wird die Stange AB festgestellt und der Punkt D auf einem Kreisbogen um A bewegt (Kurbelgetriebe), so bewegt sich auch I auf einem Kreisbogen.

Hier werden verschiedene Eigenschaften von Winkelhalbierenden und Tangentenvierecken benötigt, man trifft auf den Kreis des Apollonius, und dann liegt auch die Inversion am Kreis nahe.



Das letzte Beispiel zeigt einen alltagsnahen Zugang zum Zusammenhang von Gelenkvierecken und Rollkurven auf. Man betrachte einen Kreis k (in der Abbildung rot, kleinerer Kreis), der sich außerhalb eines zweiten Kreises K (ebenfalls rot) befindet und auf diesem rollt. Ein Punkt P, der in der Ebene von k liegt, beschreibt dann eine Rollkurve (grün gezeichnet) in der Ebene von K. Diese Bewegung wird ebenfalls erzeugt durch das Rollen eines Kreises k' (blau, groß) außen auf einem Kreis K' (ebenfalls blau), wobei K' komplett innerhalb von k' liegt (siehe Abbildung) und die beiden unbewegten Kreise K, K' konzentrisch sind. Den Punkt P kann man dabei auch als Ecke C eines Gelenkparallelogrammes $ABCD$ auffassen, bei dem die beiden Stangen AB und AD mit jeweils konstanter (voneinander verschiedener) Geschwindigkeit angetrieben werden. Der Punkt A ist dabei unbewegt und zugleich Mittelpunkt von K und K'. – Zur besseren Vorstellbarkeit dieser Situation kann man eine Uhr heranziehen, bei der Stunden- und Minutenzeiger durch zwei Stäbe zu einem Gelenkparallelogramm ergänzt werden. Das verbindende Gelenk dieser beiden zusätzlichen Stäbe entspricht dem Punkt P, und durch die Vorstellung der Variation von Zeigerlängen und Zahl der Stunden eines Tages (d.h. der Relation der Antriebsgeschwindigkeiten der beiden Zeiger) erhält man verschiedene Rollkurven.

Literatur

Bender, P. & Schreiber, A. (1985): Operative Genese der Geometrie. Wien, öbv.

Haag, W. (2003): Wege zu geometrischen Sätzen. Stuttgart, Klett.

Mariotti, M. (2000): Introduction to proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. In: Educational Studies in Mathematics, 44, 25-53.

Müller, R. (1932): Einführung in die Theoretische Kinematik. Berlin: Springer.

Seiji MORIYA, Tamagawa University in Tokyo, Japan

An Educational Significance of the Sundial and Examples of Teaching in Mathematical Modelling

1. Introduction

The sundial is used the teaching materials only to teach time in elementary school in Japan. But, the sundial has much educational significance. In this paper I would like to study on the educational significance of the Sundial in mathematics education from several points of view; the improvement of geometry education, the development of mathematical modelling, the cultural history of mathematics and the interrelationship of mathematics and science.

The Sundial has three types as follows;

- The horizontal sundial which the board of time lines keeps horizontality and we often find in Japan.
- The vertical sundial which the board of time lines keeps vertical on wall and we often find in Europe.
- The equator sundial which the board of time lines keeps a plane parallel to the equator's plane and we sometimes find in China and Korea.


Fig.1 Horizontal sundial(Japan)


Fig.2 Vertical sundial(Germany)


Fig.3 Equator sundial(China)

2. Educational significance

1) Teaching time

We use sundial when we teach time. Children put a milk bottle on the paper and record its shadow par hour on the paper. They learn time depended on the moving of the Sun.

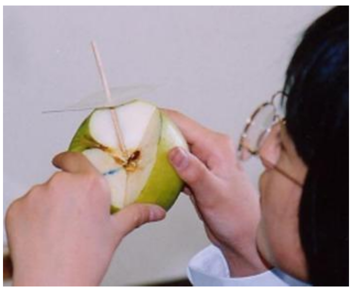


Fig.4 Studying latitude and longitude

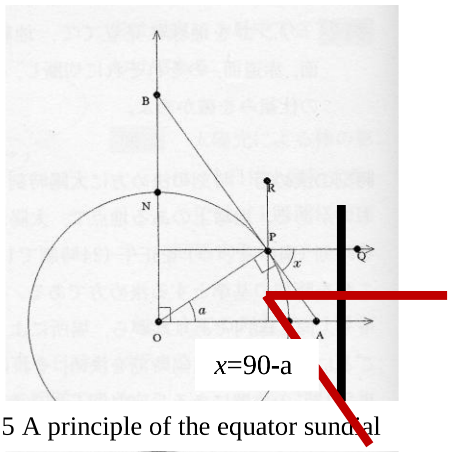


Fig.5 A principle of the equator sundial

2) The improvement of geometry education

Principle of sundial includes plane, solid and space geometry. For this research we taught the equator sundial to pupils of 1st grade in Junior high school. At first the pupils studied definition of latitude and longitude by cutting an apple. Next, they studied principle of an equator sundial using learned proof of geometry. At last, pupils made original sundial. It is simple and easy for them to draw time lines on the board of equator sundial, because the sun revolves round the gnomon for one day, then they only drew the time line of the radiating of 15 degrees out from the center.

3) The development of mathematical modelling

The sundial exists around pupils on daily life. But they don't understand the sundial's structure and the principle, and the interrelationship between mathematics and sundial. We would like to teach the sundial making mathematical model. Teaching Sundial is effective to teach developing from Elementary Model to Mathematical Development Model in mathematical modelling (Fig.6).

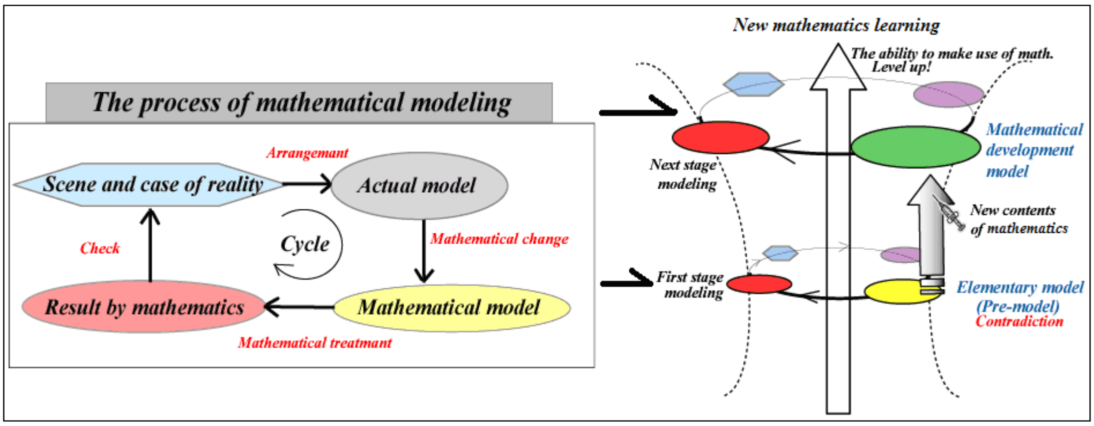


Fig.6 T.Kawasaki & S.Moriya (2011)

Sundial as teaching material is worth developing mathematics model. The understanding on principle and making Equator Sundial is the base for modelling. Time boards of Horizontal and Vertical Sundial are developed from the time board of Equator Sundial. At this time, it is different that mathematics which is used according to ages of pupils. For example, pupils in a primary school and junior high school use construction of a right triangle. And pupils in a high school use calculation using trigonometric function.

i) The developing to Horizontal sundial in class in junior high school

After pupils made the equator sundial, we gave them a new problem; "How are time lines drawn on the time board of the horizontal Sundial?" One solution by pupils is the following; the shadow of AP is RP, because shadow of AP in horizontal plane is line of intersection with △ARP and horizontal plane. They draw time lines at intervals of 15

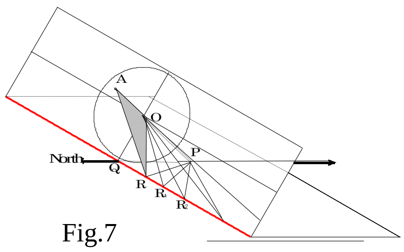


Fig.7

degrees on the board which is parallel to equator plane. Next they extend these lines to line of intersection of two planes. And they draw the points of intersection, R, R1, R2, etc. At last, they connect these points and P. Because length of OQ, ∠Q=90-latitude, ∠O=90 => Draw △OQP, they could determine the length of PQ. When OQ is 5cm, then they take PQ is from 8.0cm to 8.3cm. And they made horizontal sundial (Fig.9). During the time, we can evaluate whether pupils understand on tests for congruent triangles.

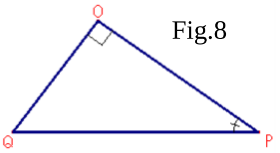


Fig.8


Fig.9 The work of pupil

ii) Estimating place from time lines of Horizontal sundial as real classroom in junior high school.

The mathematical model develops further when pupils research the latitude based on a time board of Horizontal Sundial. In Elementary Model, pupils used teaching materials prepared by the teacher. But in Mathematical Development Model, they used construction or trigonometric function and solved the problem by themselves. The rubbing in Fig. 10 is time board of sundial made by Mr. Hayashi who is very famous researcher on geography at 1792 in Edo period to make a contribution to Shiogama Shinto shrine in Shiogama city. We gave the pupils a new problem; “Can we use this time board in Shiogama of 38.3 degrees of the north latitude?” In Elementary Model, pupils traced the lines of the rubbing of this sundial to a transparent sheet B. Sheet A1, A2, A3... are the lines of the sundial in latitude 38, 36, 34, 32… degrees. They compared sheet A to sheet B, and they examined whether sheet B accord with sheet A. B accorded with A of latitude 34 degrees. In Mathematical Development Model, they thought of the right angled triangle which had been used to make the equator sundial. They could estimate the latitude of the rubbing by the method of geometric construction. Their solution is the following; at first, they determined O by this method. Next, Given Length of PQ, Length of OQ, Angle O is 90 degrees, then triangle is determined. They could know the angle of latitude. The latitude that they estimated was 31.0 to 34.1degrees. And the average was 33.3 degrees (Fig. 10).

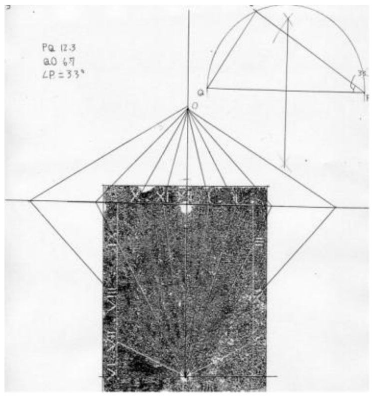
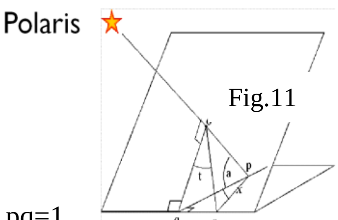


Fig. 10 The work of pupil



$\Rightarrow a = \sin^{-1}\dfrac{\tan x}{\tan t}$

If pupils use trigonometric function like in Fig.11, then it is more mathematical development model than model of construction.

4) The cultural history of mathematics

The degrees of latitude which the horizontal sundial of Shiogama was used was estimated 33.3 degrees by pupils. But latitude of Shiogama is 38.3 degrees! Pupils inferred that this horizontal sundial was not produced to set at Shiogama, and was produced to set Nagasaki of 34 degrees of the north latitude. They thought that Mr. Hayashi maybe couldn't make original sundial to set at Shiogama, and he didn't know the principal of sundial. Pupils came to realize that mathematical researching of sundial was used to study history.

It is good problems for pupils to solve why shape of equator sundial is different, why there are sundials on the walls of East, West and North in London, and why Korea's sundials are similar to Chinese sundials

5) The interrelationship of mathematics and science.

Education in Japan draws a distinction between mathematics education and science education. But the sundial as an educational material has the interrelationship of teaching time's concept and moving the Sun, the interrelationship of teaching proofs of geometry and making the sundial, and explication on the interrelationship of the Earth and the Sun. If we relate mathematics education and science education, levels of mathematical contents will increase.

3. Conclusion

Why do we use the sundial? There are sundials all over the world. The sundial has common principles and differences in appearance. We can teach the sundial to pupils of all grades. The sundial includes Euclid's geometry and analytic geometry as geometry contents in three-dimensional shape. Pupils can experience the developed mathematical modelling through learning the sundial. The sundial connects mathematics, science and culture. Pupils can experience practical use of mathematics by using and making sundials. The sundial is a very good teaching material in Mathematics Classroom

References

T.Kawasaki & S.Moriya. (2011): Using Modelling Experiences to Develop Japanese Senior High School Students' Awareness of the Interrelations between Mathematics and Science. G.Kaiser & W.Blum et al.(Eds.), *Trend in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*(ICTMA14), Springer, 603-615.

S.Moriya et al.（2010）：A trial of the Using a Horizontal Sundial as teaching Material in Class and the Results, *Journal of Teacher Education Research Center in Tamagawa University research Institute* Vol.2, Tamagawa University, pp.1-10c.

Renate MOTZER, Augsburg

Lerntagebücher im Mathematikunterricht der Sek II

In Lerntagebüchern werden eigenständige Auseinandersetzungen mit mathematischen Inhalten dokumentiert und das Lernen mathematischer Inhalte reflektiert. Vielen erscheint es so, als bräuchten derartigen eigenständige Auseinandersetzungen mehr Zeit als herkömmlicher Frontalunterricht. Außerdem ist das so angeregte Denken der Jugendlichen divergenter und führt nicht unmittelbar zu dem Standard, der in zentralen Abschlussprüfungen gefragt ist. Daher scheint es nicht gerade sehr naheliegend, in Abschlussklassen derartige Methoden einzuführen. Schülerinnen und Schüler müssen sich erst an Methoden des eigenständigen Arbeitens gewöhnen. Wenn sie Mathematikunterricht bisher immer anders erlebt haben, fällt ihnen die Umstellung oft gar nicht so leicht. Lohnt sich der Aufwand wirklich für nur ein Schuljahr – ein Schuljahr noch dazu, das spätestens zu Pfingsten mit der zentralen Abschlussprüfung endet? Die hier vorgestellten Erfahrungen sagen: „Ja, es lohnt sich trotzdem“. Wobei ich es durchaus begrüße, wenn ich zumindest einen Teil der Klasse für zwei Jahre unterrichten kann und die entsprechenden Jugendlichen die Umstellung des Arbeitsstils länger nutzen können.

Die neue Unterrichts- und Aufgabenkultur sollte sich außerdem in der Notengebung wiederfinden. Daher hängt das hier vorgestellte Unterrichtskonzept auch mit der Art der Leistungsbewertung zusammen. Traditionell ist die Notengebung durch folgende Kriterien gekennzeichnet: Die Beurteilung ist eine Quittung für erbrachte Leistungen. Die Chance, sich zu verbessern besteht in der Regel nicht. Fehler sind zu vermeiden. Die Lehrkraft delegiert die Verantwortung an einen weitgehend zufälligen Notenschnitt. Man misst ausschließlich technische Leistungen zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem bestimmten Umfang. Die Korrektur ist defizitorientiert. Sinnvoller wäre es, wenn die Beurteilung den Lernprozess begleiten, nicht quittieren würde. Schlechte Leistungen können dann verbessert werden. Fehler sind Lernchancen. Arbeits-, Lern- und Sozialverhalten sind ebenso fachbezogene Kompetenzen. Die Beurteilung sollte auch begleitende Funktionen haben (Diagnose). Die Schüler werden aufgefordert, Eigenproduktionen zu gestalten und auf ihrem Niveau zu arbeiten. Gute Leistungen werden honoriert, auch wenn sie teilweise fehlerhaft sind. Statt der Defizitorientierung sollte auf die Kompetenzorientierung geachtet werden (vgl. Wälti, Jundt 2010).

Ausgangspunkt meiner Arbeit mit längerfristigen Lerntagebüchern war, dass ich 2008, im Jahr der Mathematik, in einer Gestalter-Klasse unterrichtete. Das 2. Halbjahr wurde so gestaltet, dass die Jugendlichen selbstständig (den ersten Teil als Gruppenpuzzle, den zweiten Teil in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit gestaltet) sich wichtige Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen erschlossen und das Aufstellen von Funktionstermen übten. Zum Abschluss sollten sie ein Bild mit Geogebra gestalten, in dem mindestens 5 Funktionen beteiligt waren. Die Ergebnisse wurden in einer kleinen Ausstellung im Schulhaus gezeigt. Die Arbeiten hatten mich zwar nicht vollständig von dem her begeistert, was die Jugendlichen an Mathematik hineingesteckt haben. Die Kreativität aber war enorm. Auch das selbstständige Arbeiten im Vorfeld klappte so gut, dass ich diese Arbeitsform mit der Klasse im kommenden Schuljahr fortsetzen wollte (vgl. Motzer 2010).

Folgendes konnte zunächst bei den Arbeiten der 11. Klässler beobachtet werden: Bei schwächeren Schülern findet sich viel Trial-and-Error, aber auch sie können durch Aufschreiben der Beobachtungen dabei manches für sich dazu lernen. Strecken werden leider nicht immer (der Vorgabe entsprechend) mit Hilfe von Geradengleichungen bestimmt. Häufig werden nur Strecken und Parabeln verwendet. Die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler rechnen die Funktionsterme wirklich aus. Sie setzen Stück an Stück und versuchen bewusst Funktionen höheren Grades unterzubringen (Wendepunkte, Wellen u.ä.).

Im Lauf des folgenden Schuljahrs haben die Jugendlichen dann 4-mal ein Lerntagebuch abgegeben. In diesen Heften sollten sie den Unterricht reflektieren, vor allem mit Hilfe des PCs daheim Funktionen und stochastische Phänomene selbstständig erkunden und außerdem ihre Probearbeiten verbessern. So lautete etwa der erste Auftrag:

Verbessern Sie die Extemporale. Erklären Sie dabei auch Ihre Fehler. Wie sind die Fehler zustande gekommen? Was haben Sie inzwischen daraus gelernt?

Ein Stochastik-Auftrag für die PC-Arbeit lautete:

Simulieren Sie 3 Zufallsexperimente mit dem Programm „Baumdiagramm“ (siehe Stochastik-CD, verwenden Sie dabei auch den Programmpunkt „Simulation“). Notieren Sie Ihre Beobachtungen.

Auch früher hatte ich im Unterricht immer wieder versucht, Schülerinnen und Schüler dazu zu bringen, selbst Aufgaben zu entwickeln. Dem wurde bisher kaum nachgekommen. Jetzt, da es für die selbst entwickelten Aufgaben Noten gab, wurden die jungen Leute durchaus kreativ und einige entwickelten auch eine gewisse Freude daran, mit Mathematikaufgaben zu spielen, z.B. am PC. Manche Schülerinnen und Schüler erleben die Einarbeitungszeit durchaus als mühsam, sehen aber im Lauf des Schuljahrs, dass sich die Mühe lohnt. Gerade im laufenden Schuljahr beobachte ich, dass die Schülerinnen und Schüler erst sehr knapp vor dem Abgabetermin beginnen und dann kurzfristig feststellen, dass es am PC nicht so klappt, wie sie es sich vorgestellt haben. Es fehlt ihnen dann aber die Zeit, bei Mitschülern oder bei mir nachzufragen.

Damit die jungen Leute auch das Einteilen ihrer Zeit selbst üben können, werden die Lerntagebücher zu vorgegebenen Terminen eingesammelt, drei bis viermal im Jahr, nicht jede Stunde. Den meisten gelingt eine vorausschauende Einteilung ihrer Zeit jedoch leider nicht.

Hausaufgaben wurden in der Zeit, bevor ich die Lerntagebücher eingeführt habe, kaum angefertigt. Da es nun um Noten geht, arbeiten einige Schülerinnen und Schüler doch deutlich mehr, als wenn die Noten auf andere Art gemacht würden.

Ein Beispiel für einen Auftrag, der im Wesentlichen in der Unterrichtszeit erledigt wird:

> Lassen Sie sich von der Lehrerin das Funktionspuzzle geben. Ordnen Sie die Graphen nach: f, f‘, f‘‘.
>
> Notieren Sie, wie Sie vorgegangen sind und was Sie dazugelernt haben.
>
> (Sie können auch daheim am PC solch ein Funktionenpuzzle ordnen:
>
> Klicken Sie auf
>
> http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html#ableitung
>
> die Ableitungspuzzles an. Auch die anderen Applets auf dieser Seite können Ihnen helfen, die bisher gelernten Begriffe zu vertiefen.)

Ein Auftrag für die Arbeit am häuslichen PC lautete:

> Untersuchen Sie Funktionen vom Typ:
>
> $f(x) = ax + b + c/(x+d) = (ax^2+ex+f)/(x+d)$
>
> Welcher Zusammenhand besteht zwischen e, f und a, b, c, d?
>
> Warum reicht im Nenner ein Parameter, d.h. warum muss man nicht gx+h schreiben, sondern kann auf g verzichten?
>
> Sie können dies evtl. an einem Beispiel erklären: wie würden Sie
>
> $(x^2+4x-3)/(2x+3)$ umformen?
>
> Für welche Fragen kann man aus der 1. Form leichter Antworten ablesen, für welche aus der 2. Form? Untersuchen Sie jeweils, wie der der Graph aussieht, falls a, b, c, d größer/ kleiner/ gleich 0 sind?

(Warum gäbe es bei der vollständigen Diskussion 81 Fälle?

Sie müssen aber nicht alle Kombinationen testen, sondern können jeden Parameter einzeln untersuchen.)

Wählen Sie Bsp. für die Parameter, lassen Sie die Graphen mit Geogebra (oder einem anderen Programm) zeichnen und erläutern Sie Ihre Beobachtungen (evtl. können Sie mit Schiebereglern arbeiten).

Die meisten Jugendlichen bevorzugen das Führen von Lerntagebüchern und ziehen es anderen Formen der Leistungserhebung vor.

Man kann, mit etwas Fleiß, bessere Noten erzielen und verinnerlicht den Unterrichtsstoff deutlich mehr. Die Möglichkeit, eigenständig etwas über die Unterrichtsinhalte herauszufinden, wird ebenfalls positiv gesehen.

Manchmal gibt es jedoch junge Männer, denen die Lerntagebücher zu aufwändig sind. In diesem Schuljahr hab ich so viele davon, dass ich ihnen andere Möglichkeiten anbiete, zu Noten zu kommen.

Für solche junge Frauen, denen es an mathematischem Selbstbewusstsein fehlt, sind Lerntagebücher aber eine Chance, doch ein Stückchen Selbstwirksamkeit im mathematischen Bereich zu erfahren.

Für die Lehrkraft ergeben sich folgende Vorteile: Man erfährt mehr über das mathematische Denken der Schülerinnen und Schüler. Man wird immer wieder von kreativen Lösungen überrascht. Man lernt aber auch die Fehler und Verständnisschwierigkeiten besser kennen.

Der Mathematikunterricht wird also für Lehrerkräfte wie für Schülerinnen und Schüler reicher.

Und was das Zentralabitur angeht: Ich habe die Schwerpunkte zwar nicht immer so gesetzt, dass vorrangig das geübt wurde, was in der zentralen Prüfung gefragt war. Aber es ist uns am Ende des Schuljahrs immer genügend Zeit geblieben, anhand früherer Abschlussprüfungen das zu üben, was dort verlangt war. Dadurch, dass sich die Abiturienten selbst Aufgaben gestellt haben und am PC anschauliche Zugänge zu den Themenbereichen gefunden haben, hatten sie eine gute Basis für die in den Prüfungen verlangten Kompetenzen.

Literatur

Wälti, B., Jundt, W. (2010): Erwartungen transparent machen. Arbeiten in mathematischen Beurteilungsumgebungen. In: Mathematik lehren 162. Oktober 2010, S. 56 – 62

Motzer, R. (2010): Bilder aus ganzrationalen Funktionen. In: MNU 63 /03, S.143- 147

Thomas MÜLLER, Krems/Donau (Österreich)

5 Jahre Geometriewanderworkshop in Österreich

Vor fünf Jahren, 2007, ging der österreichische Geometriewanderworkshop zum ersten Mal auf Tour – Zeit für einen kurzen Bericht, ein Innehalten und einen Ausblick.

Warum? Um über eine Geometrieinitiative zu informieren, um Erfahrungen weiterzugeben, damit andere darauf aufbauen können, um Ideen für Weiterentwicklungen zu diskutieren.

Der Wanderworkshop versteht sich als Ergänzung der großen zentralen Initiativen, die Mathematik in Form von Ausstellungen, Erlebnis- oder Experimentierstationen zum Mittelpunkt haben: Hervorgehoben seien das Mathematikum in Gießen samt der Wanderausstellung „Mathematik zum Anfassen“ (Beutelsbacher 2002), das Haus der Mathematik in Wien (Lindbichler 2003) oder das 3D-Museum in Dinkelsbühl (Stief 1998).

1. Warum ein Wanderworkshop?

Unser Wanderworkshop – diese Bezeichnung erinnert an „Wanderzirkus“ – will auch so etwas Ähnliches sein: etwas Besonderes über das Alltägliche hinaus, nachhaltig in der Erinnerung, zum Nachahmen und Beschäftigen mit Geometrie inspirierend und – auch schulnah.

Die Situation ist doch anders als beim Zirkus: Es geht nicht um passives Zusehen und Begeistertsein. Es geht um das aktive, auch das kollaborative Lernen – um das Lernen von Geometrie und um das aktive Erkunden von geometrischen Eigenschaften, Gesetzen und Anwendungen, den Erwerb von Raumerfahrung und Unterstützung beim Aufbau der individuellen Raumintelligenz.

Es geht um das Erleben und Fühlen von Geometrie, um das Experimentieren und Bauen, um das Sehen und Erkennen, um das Spielen und Ausprobieren durch Schülerinnen und Schüler. Das zeigen Bilder auf der Website www.geometry.at/wanderworkshop (Blümel, Müller, Scheibenhofer 2009).

Unser Workshop kommt in die Schulen. Er will zu geometrischen Denk- und Arbeitsweisen abseits vom Unterrichtsalltag motivieren. Er will Lobbying für Geometrie betreiben – auch ohne Computeranwendungen, so faszinierend diese auch sein mögen. Den Lehrpersonen soll die Möglichkeit geboten werden, ihre Klassen zusätzlich zum Mathematikunterricht und ohne Vorbereitungsaufwand, zeitressourcenschonend durch den Wegfall weiter Anreisestrecken konzentriert Geometrie erleben zu lassen. Der Workshop will besonders zur wichtigsten Aufgabe (Müller 2010) des aktuellen Raumgeometrieunterrichts beitragen: der Förderung der Raumintelligenz.

Es gibt auch fachpolitische Gründe: Im Deutsch- oder Fremdsprachenunterricht gibt es Theaterbesuche, im Kunstunterricht Ausstellungsbesuche, im Geschichtsunterricht Museumsbesuche – und in Mathematik? Gerade solche Veranstaltungen außerhalb des regulären Unterrichtes wirken durch die lange Erinnerung daran nachhaltig.

2. Von der Idee zur Realisierung - was dahinter steckt

Ich suchte im April 2006 um Unterstützung meiner Idee für eine Wanderausstellung bei IMST (BMUKK 2006) an und erhielt eine positive Befürwortung: Die Gutachter fanden die Aspekte innovativ: Durch „*konkret begriffliches Lernen und Problemlösen, eine Differenzierung durch unterschiedliche Anspruchsniveaus und durch den Zugang über fächerübergreifende Beispiele*“ würden durch dieses Vorhaben „*Defizite im Geometrieunterricht*“ abgebaut. Das beantragte Projekt sei daher sehr zu begrüßen und förderungswürdig.

Als Partner konnte ich Josef Hirzinger aus Kössen in Tirol gewinnen. Auch zu zweit sahen wir bald ein, diese Idee nicht alleine verwirklichen zu können!

So stellte ich im November 2006 die Idee bei der alljährlichen gesamtösterreichischen Strobl-Geometrietagung des ADG, des österreichischen Fachverbandes für Geometrie (ADG 2006), vor. Und einige Kollegen und Kolleginnen fingen dank Josef Hirzinger Feuer und erklärten sich zur Mitarbeit bereit: So fanden sich Renate Kobli (NÖ), Luise Maar (Bgl), Burghard Fiechtner (T), Stefan Schleifelder (OÖ) in der Arbeitsgruppe ein. Sie entwickelten 2007 und 2008 den Workshop und kümmerten sich um die Modellherstellung. Weitere Impulse kamen von Daniela Strolz (V) und Werner Gems (S). 2009 errichteten Manfred Blümel (NÖ) und Franz Scheibenhofer (NÖ) unter meiner Mitarbeit die oben erwähnte Website zum Wanderworkshop.

So wurden Ideen nach und nach in Materie – sprich angreifbare Geometrie – umgesetzt. Ich selbst musste mich nach dem Start bedingt durch berufliche Veränderung leider ausklinken und konnte die Entwicklung „meines Kindes“ nur am Rande verfolgen. Nun, nach meiner Rückkehr in die Lehre, kann ich die Beschäftigung mit dem Geometriewanderworkshop wieder zu meinen eigentlichen „Nebenaufgaben“ zählen.

Im Zuge der Erarbeitung wurde aus der Wander*ausstellung* ein Wander*workshop*, um das aktive Arbeiten hervorzuheben. Im Juni 2007 gab es den ersten großen Zwischenbericht für IMST (Hirzinger 2007) und schon im Herbst wurde ein Prototyp der Ausstellung in Klassen getestet. Durch die Rückmeldungen der Erfahrungen im Echtbetrieb wurden die Stationen sukzessive verbessert und immer praxistauglicher.

Erste Höhepunkte waren die Einsätze im Frühjahr 2008 in der Woche rund um den Tag der Mathematik in Graz und im September 2009 in Krems, wo jeweils einige Hundert Schülerinnen und Schüler den Workshop besuchten.

3. Ziele, Leitsätze und Konzeption

Statt reiner Anschauungsmodelle sollten schülergerechte „Experimentierstationen“ gebaut werden. Deren Herstellung durch einzelne Lehrpersonen ist meist sehr aufwändig und scheint in der für den Schulgebrauch nötigen Robustheit zeitlich und finanziell nicht realisierbar zu sein. Um die Anschlussmöglichkeit zum Unterricht zu gewährleisten, sollten die Aufgaben lehrplannah konzipiert sein. Die gesamte Ausstellung sollte idealerweise von allen Schülerinnen und Schülern einer Klasse gleichzeitig besucht werden können. Zentrale Zielgruppe des Wanderworkshops waren und sind Schülerinnen und Schüler der Altersgruppe von 13 bis 15 Jahren[1]. Ein konzipierter Gesamtzeitbedarf von 2 Unterrichtsstunden sollte helfen, den Workshop im Rahmen des Stundenplanrasters besuchen zu können.

Die Aufgabenstellungen des Wanderworkshops folgen den Leitlinien:

- Lernen auf Basis haptischer Erfahrungen: Be*greifen* statt nur An*sehen*
- Aktives Auseinandersetzen mit Problemstellungen
- Die Aufgabenbearbeitung erfolgt selbstständig – ideal in Kleingruppen.
- Vielfältige, einfach zu verstehende Hilfestellungen gewährleisten differenzierte Lösungszugänge.
- Die Nachhaltigkeit wird durch das Mitnehmen der selbstgebauten Modelle und bearbeiteten Blätter verstärkt. Begleitlehrpersonen erhalten alle Arbeitsunterlagen, um Aufgaben im Unterricht nachbearbeiten zu können.
- Eine Literatur- und Linkauswahl erleichtert eine vertiefende Beschäftigung mit den Themen des Workshops.
- Der Workshop ist allen Schulen des Landes zugänglich. Alle Objekte sind einfach transportabel und robust gestaltet.
- Eine begleitende Evaluation ermöglicht eine ständige Verbesserung bzw. Anpassung an die Bedürfnisse der Unterrichtspraxis.

[1] Dazu ist zu erläutern, dass es in Österreich in der Hauptschule bzw. dem Realgymnasium (7. und 8. Schulstufe) neben der Mathematik einen eigenen Gegenstand gibt, der die Entwicklung und Lehre der Raumgeometrie zum Ziel hat und „Geometrisches Zeichnen“, manchmal auch „Raumgeometrie und CAD“ genannt wird.

4. Konkrete Aufgaben und praktische Durchführung (2006 – 2011)

Aus Dutzenden von Ideen wurden 20 ausgewählt, realisiert und auf fünf Aufgabengruppen aufgeteilt – gekennzeichnet durch ein Farbleitsystem: Je Arbeitsgruppe sind 15 – 20 Minuten Bearbeitungszeit vorgesehen.

GRÜN: Reguläre Körper, Pop-up: Postkarten u. Körper, Skelett-Oktaeder

BLAU: Wände öffnen, Impossible, Soma, Würfel kippen und stempeln

GELB: Katakaustik, Perspektive-Schaukasten, Ellipsen, 3D-Bilder

SCHWARZ: Kantenmodelle (Körper), 3D-Sogo, Tangram, Würfelpuzzle

ROT: Zersägte Körper, Körper- und Text-Puzzle, Clixi, Körper ertasten

Derzeit müssen die Lehrpersonen noch mit manchen Herausforderungen[2] fertigwerden: Die zentrale Ausleihreservierung, die Bewerbung, das Planen der Besucheranmeldungen, die Beaufsichtigung und die fachliche Begleitung beim Workshop selbst. Dazu kommen der Transport, die Bereitstellung der notwendigen Räumlichkeit (Flächenbedarf etwa 100 m²), die Aufbauzeit (etwa ein halber Tag), das Kopieren der Unterlagen. Auch die Begrüßung/Einführung in den Workshop und die Kleingruppenbildung müssen vorbereitet sein. Trotzdem gab es Dutzende Reservierungen, die zeigen, dass sich die Mühe letztlich gelohnt hat.

Literatur

ADG (2006): Fachverband der Geometrie in Österreich, www.geometry.at [20120228].

Blümel M., Müller T., Scheibenhofer F. (2009): Website zum Wanderworkshop, www.geometry.at/wanderworkshop [20120228].

Beutelsbacher, A. (2002): Mathematikum in Gießen und „Mathematik zum Anfassen“ www.mathematikum.de , www.mathematikum-unterwegs.de [20120228].

BMUKK (2006): IMST (Initiative zur Weiterentwicklung des Mathematik-, Naturwissenschafts- und Informatikunterrichts in Österreich), www.imst.ac.at [20120229].

Hirzinger, J. (2007): Projektbericht zum Projekt 587 mit Evaluation/Langfassung http://imst3plus.aau.at/imst-wiki/images/6/65/587_Langfassung_Hirzinger.pdf.

Lindbichler, G. (2003): Haus der Mathematik in Wien, Erlebniswelt – Faszination der Mathematik www.hausdermathematik.at [20120228].

Müller, T. (2006): "Pop-Up-Modelle“, in Weigand H-G. (Hrsg.): Sammelband "Geometrie" von Mathematik lehren, Friedrich Verlag, 42 und 43.

Müller, T. (2010): Der Raumgeometrieunterricht und seine Rolle im Fächerkanon, Informationsblätter der Geometrie, Jg. 29, Heft 2/2010, Innsbruck, 21 – 22.

Stief, G. (1987): 3D-Museum in Dinkelsbühl, www.3d-museum.de/ [20120228].

[2] Nun, 2012, im 5. Jahr des Bestehens soll der Workshop auf Basis der Erfahrungen etwas umgestaltet werden, um das Handling für die Lehrpersonen einfacher zu machen.

Stefanie MÜLLER-HEISE, Halle

Reflexion von mathematischen Arbeitsprozessen – wie sehen Grundschüler ihre Bearbeitung von Fermi-Aufgaben

Nachdem in internationalen Vergleichsuntersuchungen herausgestellt wurde, dass im deutschen Mathematikunterricht vorrangig die technische Seite der Mathematik vermittelt wird, wurden Forderungen nach mehr Denkaktivitäten und Reflexion seitens der Schüler für den Mathematikunterricht laut. (vgl. Klieme/Neubrand/Lüdtke 2001) Dies schlägt sich auch in den Bildungsstandards für den Primarbereich nieder, wo im Anforderungsbereich 3 „Verallgemeinern und Reflektieren" zu lesen ist, dass Aufgabenlösungen „… komplexe Tätigkeiten, wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern" erfordern. (KMK 2004, S. 13)

Letzteres bedeutet für Grundschüler, über ihren Lösungsweg nachzudenken, diesen möglicherweise zu planen, abzuwägen, welcher Weg günstig ist, und schlussendlich den eigenen Lösungsweg auf Sinnhaftigkeit zu prüfen und zu beurteilen. Somit wird das eigene Denken und mathematische Handeln zum eigentlichen Denkinhalt. Dieses reflexive Denken findet losgelöst vom eigentlichen Lösungsprozess statt und verlangt die Erinnerung eigener kognitiver Aktivitäten. (vgl. Kluwe/Modrow 1988)

Wie kommt man nun dazu mit Schülern in der Grundschule zu reflektieren? Eine Möglichkeit stellt das mündliche Gespräch dar, in dem die Schüler ihre Gedanken zur Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe äußern und diesen selbst bewerten. Weiterhin können Schüler beispielsweise ein Lerntagebuch führen, in dem sie die Gedanken und Wertungen schriftlich festhalten. Dies hat den Vorteil, dass einmal angestellte Reflexionen festgehalten sind und später im Lerntagebuch erneut nachgeschlagen werden können. (vgl. Selter 1993) Diesbezüglich kann allerdings auch der für Grundschüler sehr hohe Anspruch kritisch angemerkt werden, reflexive Gedanken zu verschriftlichen. Als Konsequenz entstand die Idee, die Schüler bei ihrer Reflexion zu unterstützen, so dass der Bearbeitungsweg nicht frei erinnert und notiert werden muss.

Damit Schülerinnen und Schüler zu Reflexionen angeregt werden, müssen reichhaltige Anlässe geschaffen werden. Fermi-Aufgaben können als besonders geeignet eingeschätzt werden, weil durch ihre Offenheit bereits während der Bearbeitung die Notwendigkeit besteht, eigene Wege zu begründen und gegen andere abzuwägen. Weiterhin haben Grundschüler hier die Möglichkeit, eigene Wege zu finden und diese auch zu gehen. Eventuelles Stocken im Arbeitsprozess führt häufig zu neuen Überlegungen und letztlich zu einem Ergebnis. (vgl. Büchter/Herget/Leuders/Müller 2007) Nach Beendigung der Aufgabe kann der eigene Lösungsweg noch einmal rekapituliert und auf Sinnhaftigkeit, Nutzen und Erfolg bzw. Misserfolg geprüft und beurteilt werden. Wege, die in die Irre geführt haben, oder Strategien, die sich später als günstig herausgestellt haben, werden noch einmal betrachtet und somit das eigene mathematische Handeln reflektiert. Die Leistung, die Schüler hier erbringen sollen, ist sehr anspruchsvoll. Gerade bei Fermi-Aufgaben ist der Lösungsweg sehr vielfältig und vielgestaltig. Um diesen nach Abschluss der Bearbeitung erneut aufzurufen und zu bewerten, wurde ein Material zusammengestellt, das Schüler bei dieser Aufgabe unterstützt.

1. Entwicklung eines Reflexionsmaterials

Das Material besteht zum einen aus einem sogenannten Reflexionskasten. Hierin befinden sich in sieben einzelnen Gefäßen kleine Zettel, auf denen verschiedene Schülertätigkeiten benannt werden. Zu jedem Gefäß gehört eine Überblickskarte, die alle einzelnen „Handlungszettel" einer Kategorie abbildet. Die farbigen Zettel können von den Schülern genutzt werden, um ihren eigenen Lösungsprozess nachzulegen und anschließend zu beurteilen.

Die farbige Zuordnung der einzelnen „Handlungszettel" zu einem bestimmten Gefäß geht auf eine Untersuchung von Möwes-Butschko (2010) zurück. Sie analysierte Arbeitsprozesse von Grundschülern zu Fermi-Aufgaben und kam zu dem Ergebnis, dass die einzelnen Handlungen verschiedenen, für Grundschüler sehr abstrakten Kategorien zugeordnet werden können. Diese Kategorien – Orientierung, Planung, Datenbeschaffung, Datenverarbeitung, Datensicherung, Kontrolle, Argumentieren - sind den Schülern nicht bekannt und dienen zur Unterscheidung im späteren Analyseprozess.

Den zweiten Teil des Materials bildet ein Hefter, in dem die Schüler die Aufgabenstellung, ihren Lösungsweg und später auch ihre Rekonstruktionen und schriftlichen Reflexionen einheften. Dieser Hefter steht ihnen für jeden Bearbeitungsprozess zur Verfügung und die Schüler können ihn ähnlich wie ein Nachschlagewerk bei der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben nutzen.

2. Forschungsfragen

Mit meinem Forschungsprojekt möchte ich folgenden Forschungsfragen nachgehen:

- Wie können Grundschulkinder nach der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben in Kleingruppen ihre Arbeitsprozesse gestützt durch das entwickelte Material reflektieren?
- Zeigen sich im Laufe der Untersuchung über ein Schuljahr hinweg Entwicklungen in den Rekonstruktions- und Reflexionsphasen?
- Werden Dokumente zu vorherigen Arbeitsprozessen beim Lösen von weiteren Fermi-Aufgaben genutzt?
- Können Fermi-Sammelbücher mit entsprechenden Reflexionskarten Schülern im schulischen Alltag als Reflexions- und Dokumentationsmedium dienen?

3. Untersuchung an einer Grundschule

An einer Grundschule in Halle wird derzeit die Anwendung des oben beschriebenen Materials in zwei dritten und drei vierten Klassen erprobt. Dort werden über ein Schuljahr hinweg einmal im Monat in einer Doppelstunde Fermi-Aufgaben in Kleingruppen von jeweils drei bis vier Schülern bearbeitet und anschließend reflektiert. Da vor der Untersuchung nur in einer Klasse Fermi-Aufgaben bekannt waren, wurden die ersten drei Termine zum einen zur Einführung des Aufgabenformats und zum anderen zur Einführung und Erklärung des Reflexionskastens genutzt. Somit wurde die Verständlichkeit der „Handlungszettel“ geklärt und abgesichert.

Für die genauere Analyse von Reflexionsprozessen in den Schülergruppen wurden aus jeder Klasse zwei Gruppen aufgrund ihrer guten Kommunikation während des Bearbeitungs- und Reflexionsprozesses ausgewählt, die für sechs weitere Termine in Einzelinterviews beobachten werden sollen.

Der reflexive Teil der Bearbeitungen durch die Schüler gliedert sich in die Rekonstruktions- und die Reflexionsphase auf. In der Rekonstruktionsphase wird zunächst mit dem Reflexionskasten der absolvierte Arbeitsprozess durch die Schüler nachempfunden. Die hier geforderte reflexive Leistung bezieht sich auf das Erinnern des eigenen mathematischen Handelns. Die Reflexionsphase beinhaltet darüber hinaus die Bewertung dieses Arbeitsweges. Dazu stellt der Interviewleiter gezielt Fragen, welche die Schüler zunächst verbal beantworten. Anschließend erhalten sie ein Blatt, auf dem die Fragen des Interviewleiters noch einmal stehen und nun schriftlich beantwortet werden. Die entstandene schriftliche Reflexion, sowie die Rekonstruktion des Arbeitsprozesses mit den bunten Kärtchen werden neben der Aufgabenstellung und den Lösungsblättern in den Hefter geordnet und stehen der Gruppe immer wieder zur Verfügung.

Die übrigen Schülergruppen verbleiben im Klassenraum, bearbeiten dieselbe Fermi-Aufgabe und führen anschließende ebenfalls die Rekonstruktions- und Reflexionsphase durch.

4. Fazit und Ausblick

Zum jetzigen Zeitpunkt sind erst jeweils zwei Beobachtungstermine in den einzelnen Gruppen durchgeführt worden, vier weitere folgen in den Monaten bis zum Schuljahresende. Die genaue Analyse der Aufzeichnungen und Schülerdokumente wird zeigen, wie Grundschülern die Reflexion ihrer Auseinandersetzung mit Fermi-Aufgaben mithilfe des entwickelten Materials gelingt.

Erste grobe Beobachtungen zeigen, dass die Schüler mit dem Reflexionskasten umgehen können und er ihnen bei der Rekonstruktion des Lösungsweges hilft. Bei der anschließenden Reflexion sind die Schüler sehr kritisch mit sich und ihren Arbeitswegen. Sie können dies gut verbalisieren und anschließend auch verschriftlichen. Der Rückgriff auf bereits abgeheftet Rekonstruktionen und Reflexionen erfolgt einerseits, um Informationen, die für die aktuelle Aufgabe ebenfalls benötigt werden, nachzuschlagen. Andererseits kommen in den Gesprächen unter den Gruppenmitgliedern auch Äußerungen zu Tage, die sich auf den Reflexionskasten beziehen. Beispielsweise wird davon gesprochen, das jetzt „gemeinsam diskutiert“ oder „abgemessen“ wird. Ob diese Äußerungen später auch bei der Rekonstruktions- und Reflexionsphase berücksichtigt wurden, muss eine genaue Analyse der Aufzeichnungen ergeben.

Literatur

Büchter, A., Herget, W., Leuders, T., Müller, J. (2007). Die Fermi-Box. Seelze: Friedrich

Klieme, E., Neubrand, M., Lüdtke, O. (2001). Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Baumert, J. PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske & Budrich, S. 141 – 191

Kluwe, R., Modrow, K. (1988). Planen und Reflexion im Problemlöseverhalten 4- bis 7-jähriger Kinder. In: Schweizerische Zeitschrift für Psychologie. Bern: Hans Huber 47/1988, Heft 1 S. 171 – 181

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich

Möwes-Butschko, G. (2010). Offene Aufgaben aus der Lebensumwelt Zoo : Problemlöse- und Modellierungsprozesse von Grundschülerinnen und Grundschülern bei offenen realitätsnahen Aufgaben. Münster: WTM

Selter, C. (1993). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag

Eva MÜLLER-HILL, Köln

Ein handlungsbasiertes Konzept mathematischer Erklärung

1. Begründen, Erklären, Verstehen

Prediger und Meyer unterscheiden in einem Aufsatz von 2009 *Beweisen*, *Begründen* und *Argumentieren* als zentrale Elemente des MU. *Erklären* tritt dabei nur als eine *Funktion* des Begründens in Erscheinung. Dies greift jedoch im Hinblick auf die Spezifika erklärender Begründungen zu kurz, denn Erklären ist nur eine *optionale* Funktion von Begründen: nicht jede Begründung erklärt, erst recht nicht *für* einen bestimmten Adressaten. Auch kennen wir verschiedene *Typen* des Erklärens: Erklären-was, -wie und -warum. In der Regel lässt sich nur der Typus „Erklären-warum" sinnvollerweise als Funktion oder Spezifikum des Begründens auffassen. Eine Präzisierungsmöglichkeit besteht im Rückgriff auf die Ausrichtung der Angemessenheit von Begründen und Erklären. Die Angemessenheit von Begründen richtet sich in erster Linie auf den begründeten Sachverhalt: Ziel einer Begründung ist es, hinreichende Gründe für sein Bestehen anzugeben. Die Angemessenheit von Erklären dagegen ist sowohl auf den Sachverhalt als auch auf den Adressaten gerichtet: Spezifisches Ziel einer Erklärung im Hinblick auf den erklärten Sachverhalt ist es, die entscheidenden Gründe für sein Bestehen anzugeben. Hinzu tritt das Ziel, beim Adressaten der Erklärung Verständnis zu wecken. Für diesen Präzisierungsansatz findet sich disziplinübergreifender Rückhalt in der mathematikdidaktischen, der wissenschaftstheoretischen und der linguistischen Erklärungsdiskussion. Besonders deutlich wird die prinzipielle bilaterale Ausrichtung des Erklärungsanspruchs bei Klein (2009): Erklären beinhalte „*eine kommunikative Bringschuld gegenüber dem Adressaten und eine Verpflichtung zur Angemessenheit gegenüber dem zu erklärenden Sachverhalt*." Auch die generelle Spezifität von zur Erklärung anzuführenden Gründen kommt zum Ausdruck: Erklären-warum „*besteht darin, das Zustandekommen eines Sachverhaltes in seinen entscheidenden Bedingungen zu explizieren*."

2. Nomischer Charakter von Erklären-warum

Den begrifflich-theoretischen Ausgangspunkt der nachfolgenden Überlegungen bildet die wissenschaftstheoretische Erklärungstheorie von Thomas Bartelborth (u.a. Bartelborth (2007)). Eine Erklärung eines Sachverhalts (SV) stellt diesen laut Bartelborth als Instanz eines *nomischen (gesetzesartigen) Musters*, d.h. einer geeignet invarianten Regelmäßigkeit (z.B. im Naturgeschehen oder am Finanzmarkt) dar, die sich relativ allgemeinen, stabilen und essentiellen Eigenschaften der beteiligten grundlegenden Objekte oder Systeme verdankt (vgl. auch (Müller-Hill 2011)). Ein nomischer Charakter von Erklären-warum lässt sich auch für den Fall mathematischer Erklärungen (von Bartelborth nur kurz erwähnt) genauer explizieren. Dies erfordert den Bezug zu spezifischen Hintergrundtheorien, denn was die grundlegenden mathematischen Gegenstände, Strukturen und deren essentielle, allgemeine Eigenschaften und Beziehungen in Zusammenhang mit einem zu erklärenden mathematischen Sachverhalt p sind ist abhängig davon, in Bezug auf welche mathematische Hintergrundtheorie H wir die zugehörige Aussage interpretieren (kurz: „H-allgemein“, „H-essentiell“ etc.):

Eine (relativ zur Hintergrundtheorie H) ***H*-nomische** mathematische Begründung stellt einen mathematischen Sachverhalt p als Instanz oder logische Konsequenz einer geeignet invarianten, auf H-allgemeinen, -essentiellen, -stabilen Eigenschaften/Beziehungen von/zwischen H-grundlegenden Objekten/Strukturen/Systemen beruhenden Regelmäßigkeit dar.

Für das nomische Erklären-warum im Mathematikunterricht ergibt sich aus der Notwendigkeit, die entsprechenden Hintergrundtheorien zumindest in den relevanten Aspekten genauer zu bestimmen, ein erstes, seiner Natur nach *sachanalytisches Problemfeld*. Die Beispiele für mögliche Hintergrundtheorien im Mathematikunterricht sind bekanntermaßen vielfältig und auch der Theorie*typus* variiert von subjektiven Alltagstheorien mit Gegenständen des täglichen Lebens über empirische Theorien mit theoretischen Begriffen bis hin zu formal-axiomatischen Theorien. Ein zweites, *adressatenbezogenes Problemfeld* schließt sich hier unmittelbar an: H ist dem Adressaten (also den SuS) oft *nur* vermittels spezieller (Referenz-)Kontexte, Darstellungen, Formalismen, Anwendungs- oder Erfahrungsbereiche (im Folgenden einfach kurz „H-Kontexte“) bekannt. Jeder dieser Kontexte besitzt spezifische grundlegende Gegenstände, Strukturen und essentielle Eigenschaften und Beziehungen und zeichnet dadurch jeweils ganz spezielle der H-nomischen Begründungen eines gegebenen Sachverhaltes als nomisch für diesen Kontext aus. Dies ist im Hinblick auf den Verständnisanspruch einer Erklärung geeignet zu berücksichtigen.

3. Handlungbasiertes Konzept von mathematischem Erklären-warum

Ich schlage folgende Explikation mathematischen Erklärens-warum vor:

Mathematisches Erklären-warum ist eine dialogische Handlung, bei der eine H-nomische, argumentative mathematische Begründung für einen mathematischen Sachverhalt p an einen Adressaten kommuniziert wird. Damit ist der explizite Anspruch verbunden, durch die gegebene Begründung beim Adressaten Verständnis-warum zu befördern.

Dieses Erklärungskonzept ist im Sinne der pragmatischen Auffassung als kommunikative dialogische Handlung, aber auch des nachfolgend ausformulierten Verständnisanspruchs handlungsbasiert. Die Ausformulierung des Verständnisanspruchs von Erklären-warum ist nicht gleichzusetzen mit einer hinreichenden Explikation von „Verstehen-warum“. „Verstehen-warum“ kann grundsätzlich aus zwei ganz unterschiedlichen Perspektiven analysiert werden, nämlich als ein *kognitiver Akt* oder als ein *stabiler epistemischer Zustand*, der durch diesen Akt erreicht wird und der in dem Vorliegen einer Art *Handlungsdisposition*, d.h. Handlungsbereitschaft (i.S.v. möglich und willentlich) im Rahmen kommunikativer Prozesse besteht. Im Hinblick auf den Verständnisanspruch setze ich den Schwerpunkt auf Verstehen als Handlungsdisposition. Hinsichtlich der kognitiven Basis, die für das Erreichen dieses epistemischen Zustandes durch geeignete kognitive Verstehensakte notwendig ist, wird angenommen, dass sie aus vermittels konkreter Handlungen an spezifischen Objekten oder Zeichen implementierten Kontexten besteht. Dabei wird insbesondere die durch zahlreiche Lehr-Lern-Theorien etablierte prinzipielle Bereichsspezifität mathematischen Wissens mitgedacht. Gleichzeitig muss den konkreten Bedingungen der Erklärpraxis im Mathematikunterricht durch die Formulierung des Verständnisanspruchs Rechnung getragen werden. Diese variieren situativ in hohem Maße. Ich schlage daher ein situativ geeignet spezifizierbares Kriterium für den allgemeinen Verständnisanspruch von Erklären vor:

> Der **Verständnisanspruch** einer mathematischen Erklärung besteht darin, den Adressaten *durch die gegebene Begründung* in die Lage zu versetzen, Situationen im Rahmen einer situativ gegebenen Menge von H-Kontexten, in denen p relevant ist (z.B. in kontextbezogenen Problemlöseprozessen), qualitativ weiter argumentativ zu erschließen als vorher.

Im *Minimalfall* bedeutet dies, dass der Adressat in die Lage versetzt werden soll, Situationen im Rahmen *eines ihm bekannten* H-Kontextes, in dem p relevant ist, qualitativ weiter argumentativ zu erschließen als vorher. Im *Idealfall* soll der Adressat in die Lage versetzt werden, p in sämtlichen ihm bekannten und ggf. darüber hinaus relevanten H-Kontexten und ggf. auch auf Ebene von H selbst nomisch begründen zu können.

4. Ausblick: Bereichsinvarianz, Perspektivwechsel, Erklärungsgüte

Zwei wichtige allgemeine Konsequenzen der hier vorgestellten Erklärungskonzeption sind nun die folgenden:[1] In vielen Fällen im Mathematikunter-

[1] Weitere Folgerungen für die Erklärpraxis und Beispielanalysen von Erklärungen im MU werden in einer detaillierteren Darstellung (in Vorbereitung) ausgearbeitet.

richt ist ein kontextübergreifender Verständnisanspruch situativ angemessen. In diesen Fällen werden zwei weitere, abhängig kontextbezogene Parameter relevant, die über den Verständnisanspruch implizit in der vorgeschlagenen Erklärungskonzeption enthalten sind, nämlich …

… *seitens des Erklärenden* die sicherzustellende *Bereichsinvarianz* der für die Erklärung herangezogenen *H*-nomischen argumentativen Begründung, d.h. dass deren nomischer Charakter in Bezug auf die gegebene Menge von *H*-Kontexten unter geigneten Umdeutungen erhalten bleibt.

… *seitens des Adressaten,* hier also der SuS, das Vorliegen einer Fähigkeit zum geeignet flexiblen *Perspektivwechsel oder Kontexttransfer,* die ein Umdeuten der gegebenen nomischen Begründung in für die relevanten Kontexte spezifische nomische Begründungen ermöglicht.

Wie kann man fördern, dass die Bereichsinvarianz von Begründungen seitens des Adressaten auch erkannt wird? Geht man etwa im Sinne von Bauersfeld davon aus, dass mathematisches Wissen bereichspezifisch in *per se* isolierten subjektiven Erfahrungsbereichen organisiert ist, so reicht es i.A. nicht, ihm ein geeignet bereichsinvariantes Argument einfach „an die Hand zu geben". Erklären wird besonders dann zur Herausforderung, wenn echte „Grenzerfahrungen" innerhalb eines Kontextes ein Erklärungsbedürfnis auslösen, also ein bestimmter mathematischer Sachverhalt in einem bestimmten Kontext Anlass zur Erklärung gibt, eine geeignete Erklärung aber im Rahmen dieses Kontextes nicht möglich ist – hier wird dann mindestens ein Perspektivwechsel nötig. Über die beiden abhängigen Parameter „Bereichsinvarianz" und „Perspektivwechsel" erhält man zudem die Möglichkeit, bezüglich unterschiedlicher Grade von Erklärungsgüte und Verständnistiefe zu differenzieren, etwa im folgenden Sinne: Je bereichsinvarianter (hinsichtlich der dem Adressaten bekannten Kontexte) das zur Erklärung angeführte Argument, desto besser die Erklärung (für den Adressaten) – und je mehr Kontexte der Adressat dank der Erklärung nun selbst mithilfe einer nomischen Begründung bewusst abdecken kann, desto tiefer ist sein durch die Erklärung gewonnenes Verständnis.

Literatur

Prediger, S. & Meyer, M. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 51 (30), 1-7.

Klein, J. (2009): Erklären-was, Erklären-wie, Erklären-warum. In Vogt, R.: Erklären, Tübingen, Stauffenburg-Verlag, 25-36.

Bartelborth, T. (2007): Erklären. Berlin, De Gruyter.

Müller-Hill, E. (2011): Mathematische Erklärung – Wissenschaftsphilosophische Konzeptionen und ihre Relevanz für die Mathematikdidaktik. In: BZMU 2011.

Robert NEUMANN, Freiburg/Nürnberg,

CAS-Taschenrechner und die Untersuchung von mathematischen Fähigkeiten bei Erstsemesterstudenten

In verschiedenen Studien wurde der Einfluss der Computeralgebrasysteme auf den Unterricht bereits untersucht. So z.B. in Bayern im Rahmen des Bayerischen Modellversuchs M^3 (Weigand 2010) oder CAliMERO (Pinkernell 2011). Der Fokus der untersuchten Klassenstufen lag bei diesen Untersuchungen auf der Sekundarstufe 1.

Im Unterschied zu einer Vergleichs- und Interventionsstudie sollte in diesem Projekt untersucht werden, in wie weit Basiskompetenzen von Studienanfängern davon abhängen, ob im vorherigen Schulunterricht CAS eingesetzt wurde oder nicht .

Konzeption und Forschungsfrage

Das Forschungsinteresse konzentrierte sich darauf, zu untersuchen, ob sich im Hinblick auf mathematische Basiskompetenzen Unterschiede zwischen Schülern, die mit CAS und solchen, die ohne CAS in der Schule gearbeitet haben, feststellen lassen.

Das Untersuchungsdesign

Der Studie liegt ein quasiexperimentelles Untersuchungsdesign zugrunde. Es wurde kein spezielles Unterrichtskonzept untersucht. Die Ergebnisse sind daher eher im Hinblick darauf zu verstehen, dass sie vor allem Informationen darüber geben, wie sich der „reale“ Unterricht mit CAS in den letzten Jahren in den letzten Jahren auswirken kann und weniger, welche Möglichkeiten sich bei einem Unterricht bieten, der einem speziellen didaktischen Konzept folgt, wie das z.B. in CAliMERO mit integriert wurde (Pinkernell 2011).

Die untersuchten Studienanfänger bearbeiteten zum Beginn des Studiums in der ersten Vorlesungsstunde einen Test, bei dem zusätzlich erhoben wurde, welche Art von Technologie im Mathematikunterricht der letzten Jahre verwendet worden war. Es wurden in den Jahren 2010, 2011 und 2012 im Wesentlichen Studierende der Fächer Wirtschaftswissenschaften und Biologie getestet. In Niedersachsen sind seit 2009 in der Abiturprüfung nur noch graphikfähige Taschenrechner (GTR) oder CAS zugelassen.

Die Aufgaben im Rahmen der Untersuchung

Bei der Untersuchung ging es vor allem darum, Basiskompetenzen zu untersuchen. Die verwendeten Aufgaben lassen sich mehreren Gruppen zuordnen:

- Algebra- und Kalkülaufgaben. Die Aufgaben in diesem Bereich setzten sich aus Multiplikations- und Divisionsaufgaben und sechs Aufgaben zum Potenzrechnen zusammen. Außerdem sollten Terme an der richtigen Position im Zahlenstrahl eingetragen werden.
- Gleichungsaufgaben, bei denen Gleichungen mit einer bzw. mehreren Variablen gelöst wurden.
- Textaufgaben. Hierbei handelte es sich um „klassische" Textaufgaben, bei denen es schwerpunktmäßig um das Verstehen der Aufgabenstellung geht.
- Interpretation von Funktionsgraphen. Es wurden Funktionsgraphen angegeben, die im Hinblick auf ihren Sachzusammenhang interpretiert werden sollten.

Die Studierenden bearbeiteten diese Testaufgaben in ihrer ersten Vorlesungsstunde ohne jegliche Hilfsmittel.

Durch die äußeren Rahmenbedingungen der Testdurchführung war die Wahl der Aufgaben eingeschränkt: Der Test wurde gleichzeitig als „Einstufungstest" für die Universität benutzt; in vorangegangenen Tests zeigte sich, dass Studierende Aufgaben, die aus ihrer Sicht zu wenig Bezug zum Studium hatten, nicht bearbeiteten, so dass Aufgaben aus dem Bereich der Geometrie nicht in den Test aufgenommen werden konnten.

Die Aufgaben zur Interpretation von Funktionsgraphen boten in diesem Zusammenhang eine Chance auch Bereiche des Reflektierens und Interpretierens zu testen.

Erste Ergebnisse

Der in diesem Beitrag vorgestellten Auswertung stellt einen Zwischenstand des Projekts dar. Ihr lagen die Ergebnisse von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften zugrunde, die in Niedersachsen zur Schule gegangen waren und entweder ein allgemeinbildendes Gymnasium oder eine Gesamtschule besucht hatten (n=270). Die angeführten Ergebnisse geben den jetzigen Stand der Auswertung wieder. Die Auswertung erfolgte sowohl quantitativ als auch qualitativ.

Quantitative Auswertung: Im Bereich der Algebra- und Kalkülaufgaben sind die Unterschiede zwischen den beiden Gruppen nicht signifikant, auch wenn die CAS-Schüler im Bereich des Zahlenstrahls tendenziell etwas schlechter abschnitten.

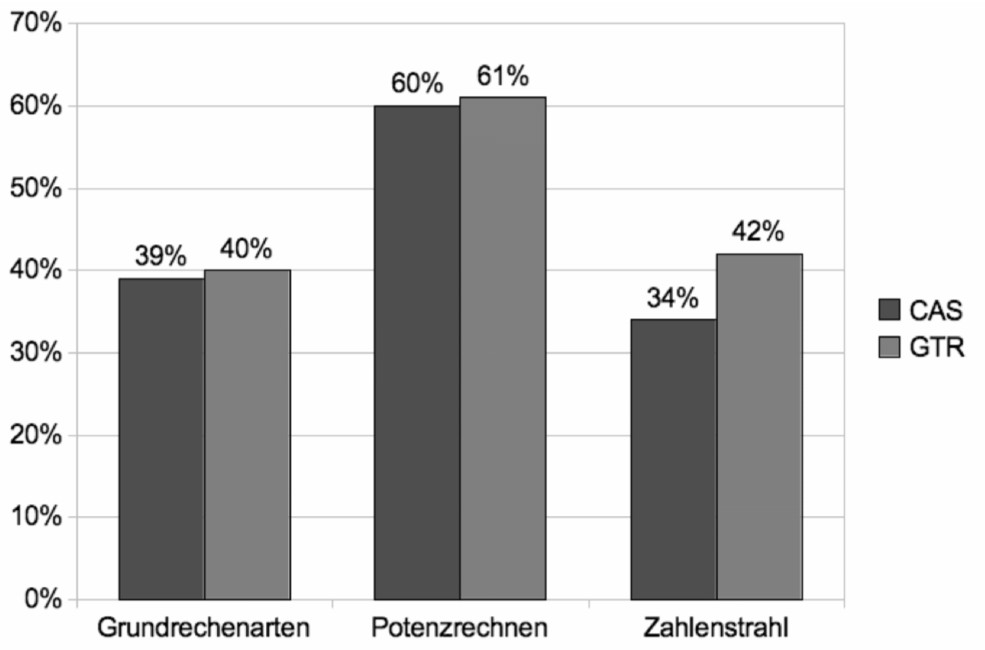


Abb. 1: Mittlere erreichte Punktzahl der Aufgaben, es ist der Anteil an richtigen Lösungen angegeben.

Qualitative Auswertung: Bei der qualitativen Auswertung stand die Frage im Vordergrund, ob sich Unterschiede in den Lösungsstrategien der beiden Gruppen zeigten. In einem ersten Ansatz wurde verglichen, wie groß der Unterschied der Testteilnehmer ist, die Aufgaben entweder gar nicht bearbeitet, oder unmittelbar nach der Bearbeitung abgebrochen haben.

Ausgewertet wurden 8 Aufgaben des Tests. Es zeigte sich, dass bei drei Aufgaben der Anteil unter den CAS-Schüler bei einer Testung mit einem Chi-Quadrat-Test nach Pearson signifikant höher ist, als der Anteil derjenigen, die nicht mit einem CAS gearbeitet haben. Dies betrifft die Aufgaben „Gleichung 1“ ($\alpha = 0{,}001$), „Gleichung 2“ ($\alpha = 0{,}019$) und „Graph interpretieren3“ ($\alpha = 0{,}007$). (siehe Abb.2)

Aus diesen Ergebnissen sollte jedoch nicht geschlossen werden, dass CAS-Schüler per se schneller bei der Aufgabenbearbeitung abbrechen oder die Bearbeitung verweigern.

Die Gründe könnten – gerade bei der Bearbeitung der Gleichungen – auch darin zu finden sein, dass Schülerinnen und Schüler gewisse Aufgaben nur noch mit dem CAS rechnen und daher nicht bereit sind, diese Aufgabe ohne Gerät zu rechnen. Eine Literaturrecherche zu dieser Fragestellung blieb ergebnislos, lediglich David J. Jeffrey beschreibt in einem Artikel seine Erfahrungen mit Studieren in Bezug auf Frustrationserlebnisse durch die Syntax bei Mathematiksoftware. Er kommt dabei zu dem Schluss, dass die Zeit, die für das Lehren des Umgangs mit der Technologie verwendet wird, nicht zu gering bemessen sein sollte, auch wenn die Lehrenden dies dort teilweise als „verlorene“ Zeit betrachteten, da in dieser Zeit keine Mathematik betrieben wurde (Jeffrey 2009).

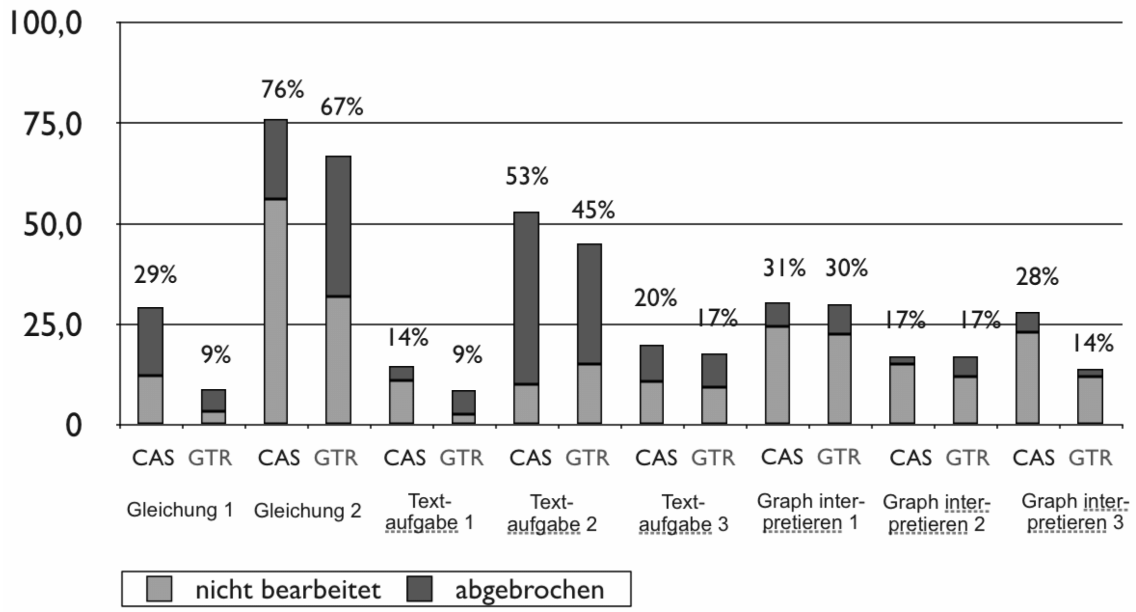


Abb. 2: Prozentualer Anteils der Teilnehmenden, die eine Frage entweder nicht bearbeitet oder die Bearbeitung direkt wieder abgebrochen haben.

Ausblick

Für den weiteren Fortgang der Auswertung soll der Fokus vor allem auf die qualitative Untersuchung der Ergebnisse gelegt werden.

Es wäre auch sicher von Interesse, genauer zu untersuchen, ob die Art der verwendeten Technologie sich auf die Motivation bzw. die Frustrationstoleranz von Schülern auswirkt. Falls dem so wäre, wird die Art der Verwendung der Technologie im Unterricht sicher eine große Rolle spielen.

Literatur

Pinkernell, G., Bruder, R. (2011): Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel & al. (Hrsg.): PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Münster: Waxmann, 123-234.

Jeffrey, D. (2009): Getting from x to y without crashing: Computer syntax in mathematics education.. In: International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 17, No 2, 87 - 92.

Weigand, H.G, Bichler, E. (2010) Der Einsatz von Taschencomputern an bayerischen Gymnasien – Analyse eines langjährigen Unterrichtsversuchs. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. GDM-Tagung für Didaktik der Mathematik. Münster: WTM-Verlag

Danh Nam NGUYEN, Universität Würzburg

Understanding the development of the proving process within a dynamic geometry environment

Abstract. In this paper we investigated the development of the proving process within a dynamic geometry environment in order to provide tertiary students with a strategy for proving. As a result, we classified different levels of proving and designed an interactive help system corresponding with these levels. This help system makes a contribution to bridge the cognitive and structural gaps between conjecture and proof. We also propose three basic conditions for understanding the development of the proving process.

Keywords. Proving process, level of proving, help system, abduction.

1. Introduction

In this research we consider proof as the final product of the proving process. Therefore, understanding the development of the proving process contributes in gaining insight into the invention of mathematical ideas and the difficulties in constructing proofs. That is also the reason why tertiary students should learn how to write, read, understand, and construct proofs. To support students in learning proofs, we provided them a methodological model with seven levels of proving and built the interactive help system based on this model (see Fig. 1). This help system contains open-ended questions and explorative tasks with two functions: to *direct thought* and to *convey information*. An open-ended question was used to help students look for geometric invariants and combine valid arguments into a formal proof. An explorative task was used to help students explore the problem on their own. During students' proving process, by answering open-ended questions as well as tackling explorative tasks, the idea of proofs may emerge gradually and arguments are produced as well.

2. Methodology

The proving process is a sequence of mental and physical actions, such as writing or thinking a line of a proof, drawing or visualizing a diagram, producing arguments, etc. Therefore, we classified seven levels of proving that represent the developmental phases in the proving process. These levels are described as follows: *level 0 (information)* provides students with clear information aimed at pointing out the principal parts of the problem, the unknown, the data, and the conclusion; *level 1 (construction)* guides students to model and construct the figures in a dynamic geometry environment; *level 2 (invariance)* guides students to search for geometric invariants that support in generating the ideas for proofs; *level 3 (conjecture)* supports students in formulating conjectures that often originate from experimental activities; *level 4 (argumentation)* guides students to produce arguments by explaining 'observed facts' and validating formulated conjectures; *level 5 (proof)* guides students to write proofs based on produced arguments; *level 6 (delving)* suggests students to delve into the problem such as generalization, specialization, analogy, etc.

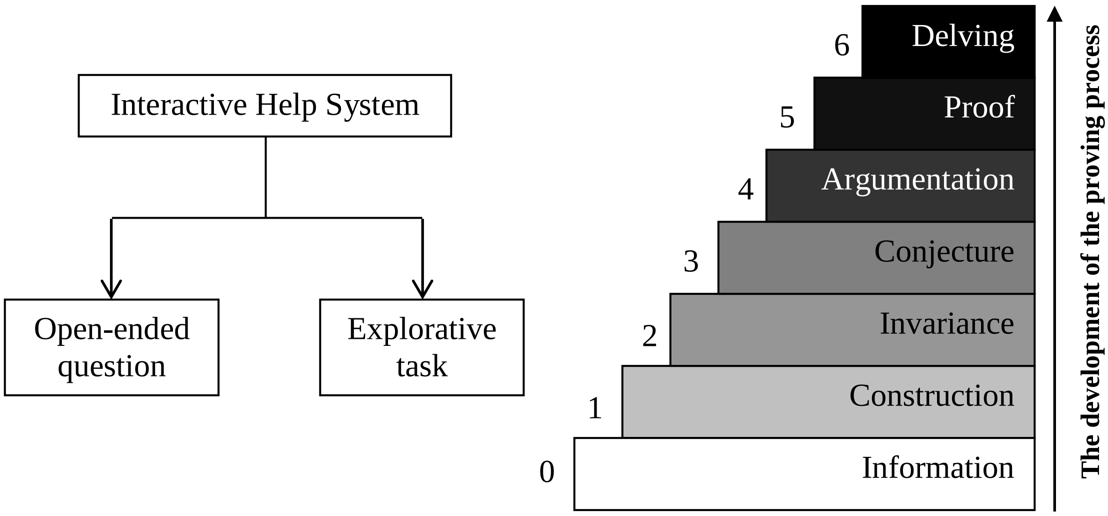


Fig. 1 A methodological model for understanding the proving process

The data of the empirical research was collected during the summer semester 2010/2011. The students were enrolled in a required elementary geometry classes for a teacher training course and divided into groups of three who sat together at one computer. We also installed Wink® software on each computer in order to capture and audio-record of all the working worksheets and group discussions. In this research, we also used Toulmin model in order to analyze the structure of argumentation during students' discussion in their group. According to this model, in any argumentation the first step is expressed by a *claim* (**C**) such as an assertion, an opinion or a conjecture. The second step consists of the production of *data* (**D**) supporting the claim. The *warrant* (**W**) can be expressed as a principle, a rule or a theorem for supporting for the data-claim relationships (see Toulmin, 1958). This model is not only useful to represent a deductive step but also a powerful tool to represent an abductive structure, which can be used to explicate the role of abduction in transition from conjecturing to proving modality (see e.g. Pedemonte & Reid, 2011). The following model describes the way students finding data (?) for validating their claim when they know one rule for supporting the claim:

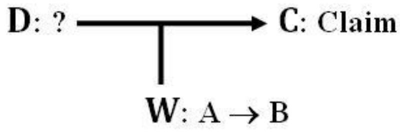


Fig. 2 Abduction in Toulmin model of argumentation

3. Understanding the development of the proving process

In this paper we provide three basic conditions for understanding the development of the proving process: (1) *Realizing geometric invariants for generating ideas for proofs*. This phase supports students in getting more data for proving and searching geometric invariants for generating the ideas of proofs. (2) *Constructing a cognitive unity in the transition from conjecture to proof*. This process produces arguments for validating conjectures and writing proofs. In other words, cognitive unity is a phenomenon where some arguments, which are produced for the plausibility of the conjecture and become ingredients for the construction of a proof (Boero et al., 1996). (3) *Organizing arguments in order to write a formal proof*. This is one of the most difficult phases in the proving process because students need to organize (select and combine) produced arguments as a chain of logical valid arguments for writing proofs.

We chose the discussion of one typical group, which was audio-recorded by using Wink® software, to analyze students' arguments during proving process through the following problem: *A river has straight parallel sides and cities A and B lie on opposite sides of the river. Where should we build a bridge in order to minimize the traveling distance between A and B (a bridge, of course, must be perpendicular to the sides of the river)?* The interactive help system provided students with some open-ended questions and explorative tasks like "What is relationship between two lines *AD* and *EB* when the length of the broken line *ADEB* is minimal?", "Compare the length of the broken line *ADEB* and the length of the broken line *AGHB*", and so on. Firstly students realized a key geometric invariant by using GeoGebra software: "the line *AD* is an image of the line *EB* under a translation in the vector $\overrightarrow{ED}$ direction when the length of the broken line *ADEB* is minimal". Then they determined two points *G* and *H* which are best places for building the bridge and some spontaneous arguments were also produced for validating this conjecture. The following dialogue was extracted from three-student group's discussion and Toulmin model was used to represent the structure of argumentation:

♣ Student 1: It is obvious that the length of the broken line *AGHB* is smaller the length of the broken line *ADEB*. How can we prove this inequality when we have the following data *ED* = *HG* = *BB'*, *HB* = *GB'*, *EB* = *DB'*?

$$\mathbf{D_1 = ?} \longrightarrow \mathbf{C_1}: AG + GH + HB \leq AD + DE + EB \quad (1)$$

$\mathbf{W_1}$: $ED = HG = BB'$, $HB = GB'$, $EB = DB'$

♣ Student 2: We may consider the inequality $AG + GB' + B'B \leq AD + DB' + B'B$ (2)

$$\mathbf{D_2 = ?} \longrightarrow \mathbf{C_2}: AG + GB' + B'B \leq AD + DB' + B'B$$

$\mathbf{W_2}$: *BB'* is common summand

♣ Student 3: Look at the inequality! We have *BB'* as a common summand and three points *A*, *G*, *B'* are collinear. Therefore, we need to prove that $AG + GB' = AB' \leq AD + DB'$.

$$\mathbf{D_3 = ?} \longrightarrow \mathbf{C_3}: AB' \leq AD + DB' \quad (3)$$

$\mathbf{W_3}$: Triangle inequality ($\Delta ADB'$)

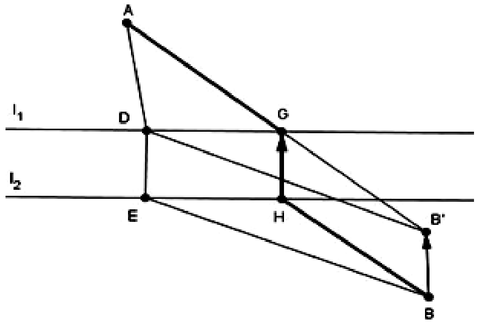


Fig. 3 One-Bridge problem

In order to write a formal proof, students followed a sequence of the inequalities (3) → (2) → (1). Therefore, by using Toulmin model, we interpret that students always reverse 'abductive structure' so that they can find the data for validating the claims, produce arguments, and write a formal proof.

4. Conclusions

This paper proposes a methodological model and three basic conditions for understanding the development of the proving process within a dynamic geometry environment. This model also provides tertiary students with appropriate strategies and tools as a means of exploration, discovery, and invention. The interactive help system can support students in realizing geometric invariants, producing arguments, and writing a formal proof. The findings of this research also provide mathematics teachers with a strategy for teaching proof and the proving process at the tertiary level.

References

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996): Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. Proceedings of the 20th PME International Conference, Valencia, Spain, vol.02, pp.121-128.

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011): The role of abduction in proving processes. Educational Studies in Mathematics, 76, 281-303.

Toulmin, S. (1958): The uses of argument. Cambridge: Cambridge University Press.

Inga NIEDERMEYER, Lüneburg

Räumliche Perspektivübernahme am Schulanfang - Symmetriebedingungen im Aufgabendesign

Räumliche Perspektivübernahme als die Fähigkeit, sich vorstellen zu können, wie Gegenstände von einer anderen als der eigenen Perspektive aus betrachtet aussehen, ist eine Teilfähigkeit des räumlichen Vorstellungsvermögens. Dazu gehört zum einen das *Wissen*, dass zu einem bestimmten Standpunkt einer Person nur genau eine Ansicht des betrachteten Gegenstands gehören kann. Haben also zwei Betrachter denselben Standpunkt, dann sehen sie dieselbe Ansicht. Und: Unterschiedliche Ansichten gehören zu unterschiedlichen Standpunkten. Zum anderen wird aber auch die *Fähigkeit* benötigt, in der Vorstellung herausfinden zu können, wie genau eine andere Ansicht aussieht: Was ist zu sehen und vor allem wie und wo (in Relation zu anderen Objekten) ist es zu sehen (vgl. Fishbein et al. 1972, Coie et al. 1973, Salatas/Flavell 1976, Cox 1977).

In einer Untersuchung zu räumlichen Fähigkeiten von Vorschulkindern traten bei einer Aufgabe zur räumlichen Perspektivübernahme Ergebnisse auf, die einen Einfluss der Symmetrie der Aufgabenobjekte vermuten lassen (vgl. Lüthje 2010).

Diesen Einfluss mit einer höheren Aufgabenanzahl systematisch zu überprüfen, ist Ziel der Studie, für die das im Folgenden vorgestellte Aufgabenset zum Einsatz in Einzelinterviews entwickelt wurde.

Die Hypothese lautet, dass Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme mit symmetrischen Objekten schlechter gelöst werden als mit unsymmetrischen Objekten, da bei ersteren zwei gegenüberliegende Ansichten symmetrisch zueinander sind und sich nur durch Beachtung der Rechts-links-Relation voneinander unterscheiden lassen. Bei unsymmetrischen Objekten dagegen lassen sich alle Ansichten durch Beachtung der Vorne-hinten-Relationen zuordnen. Die Unterscheidung von rechts und links fällt jedoch Kindern der untersuchten Altersgruppe schwerer als die Unterscheidung anderer Dimensionen, was bereits mehrfach (auch im Zusammenhang mit der Perspektivübernahme) beobachtet wurde (vgl. Nigl/Fishbein 1974, Clark/Klonoff 1990).

Die erhöhte Schwierigkeit symmetrischer Aufgaben wird sich vermutlich vor allem in einer Vertauschung der beiden zueinander symmetrischen Ansichten zeigen.

1. Aufgabenstellung

Auf einer quadratischen Platte wurden jeweils in der Mitte der Kanten Playmobilfiguren unterschiedlicher Farbe mit Blick zur Mitte der Platte platziert. Die eigentlichen Aufgabenobjekte waren verschiedene Gegenstände, die in der Mitte der Platte aufgestellt wurden, sowie jeweils vier Fotos dieser Gegenstände aus den vier verschiedenen Richtungen. Die Fragestellung an das Kind lautete jeweils: „Welches dieser Fotos hat das rote/blaue/gelbe/grüne Männchen gemacht?“ Nachdem das Kind ein Foto ausgewählt hat, wurde es gebeten, seine Antwort zu begründen, indem es erklärt, woran es die richtige Ansicht erkannt hat oder warum es die anderen Fotos ausschließen kann.

Bei jedem Objekt wurde dabei nur nach der Ansicht zweier benachbarter Playmobil-Figuren gefragt, um vermeiden zu können, dass sich Folgefehler ergeben, wenn alle vier Fotos zugeordnet werden sollen.

2. Systematisch variierte Bedingungen

Das Hauptinteresse der vorgestellten Untersuchung liegt auf dem Unterschied zwischen symmetrischen und unsymmetrischen Aufgabenobjekten. Um diesen Unterschied möglichst gut untersuchen zu können, wurden Aufgabenpaare aus jeweils einem symmetrischen und einem unsymmetrischen Objekt gebildet, die sich in allen anderen im Folgenden vorgestellten Bedingungen nicht unterscheiden.

Als Aufgabenobjekte wurden zum einen Playmobil-Tiere und zum anderen Arrangements aus zwei verschiedenfarbigen Quadern gleicher Größe (2,5cm × 5cm × 10cm) gewählt. Diese Unterscheidung wurde vorgenommen, da die Vermutung nahe liegt, dass Kindern die Aufgabenstellung mit konkreten, ihnen bekannten Objekten leichter fällt als mit abstrakten geometrischen Körpern. Außerdem haben die Tiere eine intrinsische Ausrichtung, die es ermöglicht, auf ausgewiesene Seiten (vorne, hinten…) Bezug zu nehmen. Eine entsprechende innere Ausrichtung bezüglich der Dimensionen vorne-hinten und links-rechts ist dagegen bei Quader-Bauwerken nicht vorhanden.

Die Symmetrie der Tiere wurde aufgehoben, indem ein Bein angehoben wurde. Diesem Detail wurde zusätzlich durch einen Gegenstand aus dem Zirkus-Kontext ein Sinn verliehen. Damit der Unterschied zwischen symmetrischen und unsymmetrischen Tieren nicht im Vorhandensein eines Gegen-

Abbildung 1: Aufgabenpaar Tiere

standes liegt, wurde auch den Tieren, die als symmetrische Aufgabenobjekte dienen sollen, ein Gegenstand hinzugefügt.

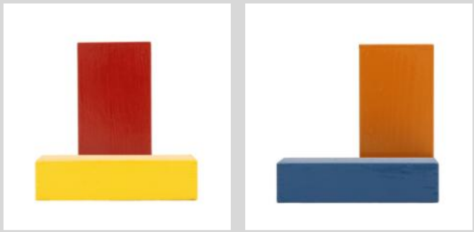


Abbildung 2: Aufgabenpaar Quader

Bei den Quadern wurden Paare aus symmetrischen und unsymmetrischen Bauwerken so zusammengestellt, dass sich die beiden Pendants nur dadurch unterscheiden, dass beim unsymmetrischen Aufbau einer der beiden Quader orthogonal zur Symmetrie-Ebene an den Rand des anderen Quaders verschoben wurde (siehe Abbildung 2). Darüber hinaus wurde nur die Farbe der Quader geändert.

Die Ausrichtung der Objekte auf der quadratischen Platte wurde so variiert, dass die Symmetrieebene (bzw. die entsprechende Ebene der unsymmetrischen Objekte) entweder parallel oder orthogonal zur Blickrichtung des Kindes verlief. Bei den Tieren wurden bei der orthogonalen Ausrichtung alle Tiere mit Blick nach links ausgerichtet, da in einer Vorstudie kein Unterschied zwischen der Ausrichtung nach links und nach rechts beobachtet werden konnte. Bei der parallelen Ausrichtung wurden alle Tiere mit Blick zum Kind aufgestellt, da in einer Vorstudie die Kinder bei der Ausrichtung vom Kind weg nicht erkennen konnten, um welches Tier es sich handelt und dadurch verleitet wurden, sich seitlich zu bewegen. Um dies zu vermeiden wurden alle Tiere so ausgerichtet, dass sie vom Kind aus gut zu erkennen waren.

Da, wie bereits erwähnt, bei jedem Objekt nur nach zwei Figuren gefragt wurde, die Bedingungen innerhalb eines Aufgabenpaars aus symmetrischem und unsymmetrischem Objekt jedoch möglichst gleich sein sollten, bedeutet das, dass bei beiden Objekten eines Aufgabenpaars nach den selben zwei Figuren gefragt wurde. Um aber unterscheiden zu können, ob beispielsweise die Fragen nach der Figur, die dieselbe Ansicht hat wie das Kind, und der gegenüberliegenden Figur unterschiedlich gelöst werden, wurde deshalb ein zweites Aufgabenpaar derselben Ausrichtung benötigt, bei dem nach den anderen beiden Figuren gefragt wird.

Aufgrund der Bedingungen Symmetrie (symmetrisch-unsymmetrisch), Ausrichtung (parallel-orthogonal) und abgefragte Figuren (zweimal jeweils zwei benachbarte) wurden also bei jeder Objektart acht verschiedene Objekte benötigt, sodass sich eine Aufgabenanzahl von insgesamt 32 Items ergab (8 Tiere und 8 Quaderbauwerke mit jeweils zwei Items).

3. Durchführung

Das beschriebene Aufgabenset wurde am Anfang des Schuljahres 2011/ 2012 95 Kindern der ersten Klasse in Einzelinterviews vorgelegt, die mit Protokollbögen und Videoaufzeichnungen dokumentiert wurden.

Die beiden Objektarten wurden den Kindern jeweils im Block präsentiert, der Hälfte der Kinder zuerst die Tiere, der anderen Hälfte zuerst die Quaderbauwerke. Innerhalb der Blöcke wurde die Reihenfolge der Objekte so festgelegt, dass sich symmetrische und unsymmetrische Objekte und die verschiedenen Ausrichtungen möglichst gut abwechselten und in beiden Objektarten gleich waren. Innerhalb eines Objektes wurde zuerst nach der Figur gefragt, die die Seitenansicht der Tiere (oder die entsprechende Ansicht der Quader) hat, um diese für die Fragestellung relevanteste Ansicht möglichst unbeeinflusst von vorherigen Items testen zu können.

4. Ausblick

Anders als erwartet, zeigte sich in ersten Häufigkeitsauszählungen kein Unterschied in den Lösungsraten der Aufgaben mit symmetrischen und unsymmetrischen Objekten. Deutliche Unterschiede ließen sich aber in der Art der Fehler beobachten: bei den symmetrischen Objekten wurden deutlich häufiger die beiden „Seiten"-Ansichten vertauscht.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung soll neben quantitativen Auswertungen vor allem eine qualitative Analyse der Videodaten vorgenommen werden, um herauszufinden, ob und wenn ja welche Schwierigkeiten die untersuchten Kinder mit symmetrischen Objekten bei Aufgaben zur räumlichen Perspektivübernahme zeigen.

Literatur

Clark, C. M., Klonoff, H. (1990): Right and left orientation in children aged 5 to 13 years. In: Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology 12, 459-466.

Coie, J. D., Costanzo, P. R., Farnill, D. (1973): Specific transitions in the development of spatial perspective-taking ability. In: Developmental Psychology 9 (2), 167-177.

Cox, M. V. (1977): Perspective ability: The relative difficulty of the other observer's viewpoints. In: Journal of Experimental Child Psychology 24 (2), 254-259.

Fishbein, H. D., Lewis, S., Keiffer, K. (1972): Children's understanding of spatial relations: Coordination of perspectives. In: Developmental Psychology 7 (1), 21-33.

Lüthje, T. (2010): Das räumliche Vorstellungsvermögen von Kindern im Vorschulalter. Hildesheim, Franzbecker.

Nigl, A. J., Fishbein, H. D. (1974): Perception and conception in coordination of perspectives. In: Developmental Psychology 10 (6), 858-866.

Salatas, H., Flavell, J. H. (1976): Perspective-taking: The development of two components of knowledge. In: Child Development 47 (1), 103-109.

Andreas OBERSTEINER, München, Kristina REISS, München, Stefan UFER, München

Reaktionszeitexperimente zur Messung von Lerneffekten im ersten Schuljahr

1. Theoretischer Hintergrund und Fragestellung

Im arithmetischen Anfangsunterricht werden unter anderem strukturierte Anschauungsmittel eingesetzt. Beim Zwanzigerfeld beispielsweise befinden sich stets zehn Punkte in einer Reihe, wobei diese wiederum durch räumliche Trennung in zwei Fünfergruppen geteilt sind. Der Zweck einer solchen Darstellung besteht darin, dass Kinder die vorgegebenen Strukturen nutzen können, um Anzahlen sehr schnell und ohne Zählen (quasisimultan) zu erfassen. Ferner soll die enthaltene Struktur bei häufiger Verwendung in die mentale Repräsentation der Kinder übernommen werden (z. B. Krauthausen & Scherer, 2007). Für diese Annahmen liegen bisher – anders als für den im asiatischen Raum verbreiteten Abakus, der ebenfalls eine feste Strukturierung enthält (z. B. Stigler, 1984; Frank & Barner, 2011) – so gut wie keine empirischen Belege vor. Dies gilt nicht nur für die spezifische Wirkung strukturierter Anzahlrepräsentationen nach gezieltem Training, sondern ganz grundsätzlich für die Annahme, dass Kinder die vorhandenen Strukturen *überhaupt* zur Anzahlbestimmung nutzen. Mit der vorliegenden Studie wird hier ein Beitrag geleistet. Als Methode wurden computerbasierte Tests gewählt, bei denen die Reaktionszeiten in Aufgaben zur Anzahlerfassung erhoben wurden. Es sollte untersucht werden, a) ob Schülerinnen und Schüler im ersten Schuljahr die Struktur des Zwanzigerfeldes zur Anzahlbestimmung nutzen, und b) ob die Fähigkeit des Quasisimultanerfassens am Zwanzigerfeld durch eine kurzfristige Intervention messbar gefördert werden kann.

2. Methode

Im Rahmen des Projekts *MenZa – Mentale Repräsentation von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Kompetenz* (vgl. Obersteiner, Ufer & Reiss, 2010) wurden insgesamt 204 Schülerinnen und Schüler des ersten Schuljahres in basalen numerischen Fähigkeiten gefördert. 50 Kinder erhielten eine Förderung im quasisimultanen Anzahlerfassen am Zwanzigerfeld, während 96 Kinder einer Förderbedingung ohne eine Förderung in diesem Bereich angehörten und für die vorliegende Betrachtung als Kontrollgruppe fungieren.[1] Vor und nach zehn Interventionssitzungen bearbeiteten die

[1] In dem Projekt wurde noch eine weitere Förderbedingung realisiert, auf die hier nicht eingegangen wird (s. hierzu Obersteiner, im Druck).

Kinder unter anderem die folgenden computerbasierten Tests zur Anzahlerfassung, bei denen die Reaktionszeiten gemessen wurden:

Punkte zählen: Auf dem Bildschirm erschien nach einem Wartekreuz von 2 Sekunden eine bestimmte Anzahl von Punkten in nicht strukturierter Anordnung. Die Kinder waren aufgefordert, so schnell wie möglich (und innerhalb von maximal 15 Sekunden) die korrekte Anzahl der Punkte zu bestimmen und dann die Leertaste zu drücken. Anschließend sollten sie die Anzahl der Punkte über die Tastatur eingeben. Gemessen wurde die Reaktionszeit vom Zeitpunkt der Punktanzeige bis zum Drücken der Leertaste. Der Test enthielt 20 Items mit den Anzahlen von 1 bis 20, die in randomisierter Reihenfolge vorgegeben wurden.

Quasisimultanerfassen: Diese Aufgabenstellung unterschied sich von der eben beschriebenen lediglich darin, dass die Punkte nicht in unstrukturierter Anordnung, sondern in der Struktur eines Zwanzigerfeldes dargeboten wurden und die maximale Reaktionszeit 10 Sekunden betrug.

Als Indikator für einen Fördereffekt im Quasisimultanerfassen dient ein Vergleich der Reaktionszeiten im Vor- und Nachtest. Um die Strategien der Kinder zu erfassen, wurde ferner der Verlauf der Reaktionszeiten in Abhängigkeit von der präsentierten Anzahl betrachtet. Bei unstrukturierter Punktdarstellung waren für die Anzahlen 4 bis 20 Zählstrategien und für die Anzahlen 1 bis 3 simultanes Erfassen („Subitizing“) anzunehmen. Entsprechend sollte sich ein Verlauf der Reaktionszeiten wie in Abb. 1 ergeben (vgl. Dehaene, 1999, S. 82). Für die erhobenen Reaktionszeiten konnte die Güte dieses Modells mithilfe von Regressionsanalysen geprüft werden.

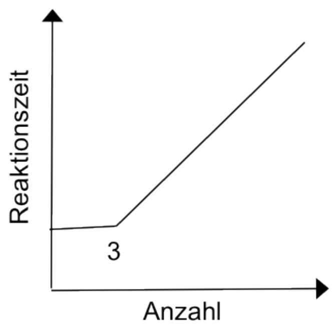


Abb. 1 Erwarteter Verlauf der Reaktionszeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der präsentierten Punkte, wenn keine Strukturen genutzt werden können.

3. Ergebnisse

Für die Auswertungen wurden falsch beantwortete Items und solche mit extremen Reaktionszeiten (insgesamt 24,1%) ausgeschlossen. Die mittleren Reaktionszeiten können Tab. 1 entnommen werden.

Tab. 1 Mittlere Reaktionszeiten (*M*) und Standardabweichungen (*SD*) in ms.

		Experimentalgruppe		Kontrollgruppe	
		M	*SD*	*M*	*SD*
Punkte zählen	Vortest	5795	337	5762	194
	Nachtest	4866	212	4987	212
Quasisimultanerfassen	Vortest	3337	182	3408	145
	Nachtest	2247	138	2670	113

Für beide Aufgabenstellungen waren Leistungsverbesserungen vom Vortest zum Nachtest festzustellen. Während eine Varianzanalyse mit dem Faktor *Gruppe* und der Vortestleistung als Kovariate für die Aufgabe *Punkte zählen* keinen signifikanten Gruppenunterschied anzeigte, war dies für die Aufgabe *Quasisimultanerfassen* der Fall ($F(1, 103) = 6{,}52$; $p < 0{,}05$; part. $\eta^2 = 0{,}060$). Die Experimentalgruppe wies in dieser Aufgabe deutlich stärkere Leistungszuwächse auf als die Kontrollgruppe.

Betrachtet man die Reaktionszeiten in Abhängigkeit von der präsentierten Anzahl, so ergab sich für die Aufgabe des *Punktezählens* ein weitgehend erwarteter Verlauf (s. Abb. 2; vgl. das Modell aus Abb. 1).

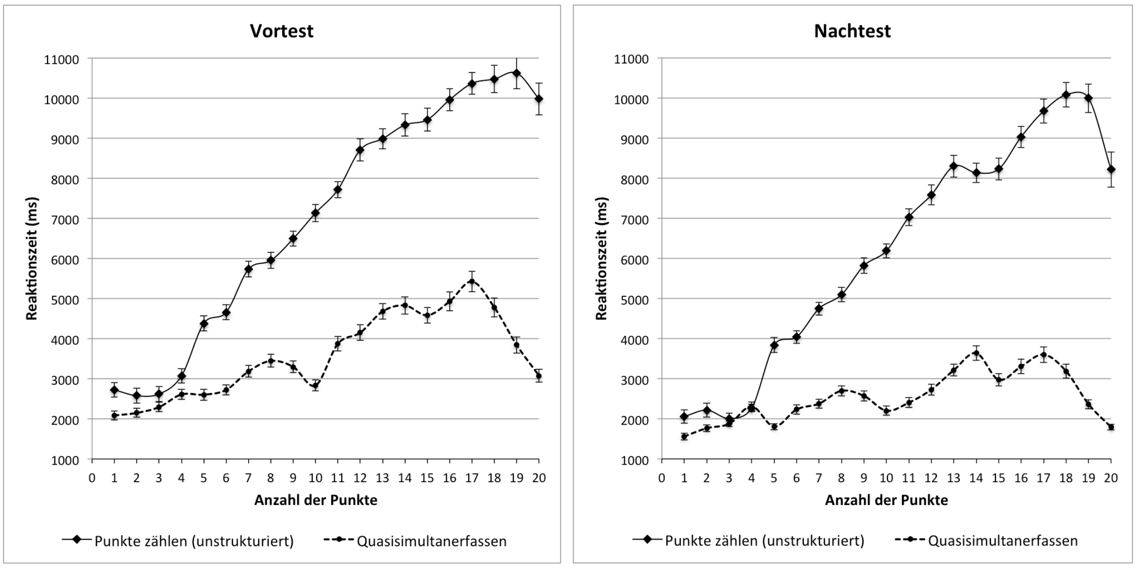


Abb. 2 Mittlere Reaktionszeiten (und Standardfehler) in Abhängigkeit von der Anzahl der präsentierten Punkte für beide Aufgabenstellungen im Vortest und im Nachtest. Zu beachten ist, dass zu beiden Messzeitpunkten die Reliabilität der Reaktionszeiten im *Punkte zählen* für die Anzahlen 14 bis 19 stark reduziert ist, da die Lösungsraten für diese Anzahlen unter 50% lagen und sich die Stichprobengröße entsprechend verringerte.

Bei strukturierter Punktdarbietung ergaben sich dagegen deutliche Abweichungen (s. Abb. 2). Regressionsanalysen mit der nach dem Modell aus Abb. 1 transformierten Punktanzahl als Prädiktor und der Reaktionszeit als abhängiger Variable bestätigen, dass das erwartete Modell im Fall der unstrukturierten Punktdarbietung einen beträchtlichen Teil der Varianz erklärt (korr. R^2 = 0,604 im Vortest bzw. 0,553 im Nachtest), wohingegen dies im Fall der strukturierten Präsentation nicht der Fall war (korr. R^2 = 0,096 bzw. 0,041).

4. Diskussion und Ausblick

Der vorliegende Beitrag zeigt, dass computerbasierte Reaktionszeitexperimente zur Erhebung numerischer Fähigkeiten bereits im ersten Schuljahr erfolgreich eingesetzt werden können. Anhand der mittleren Reaktionszeiten und der beobachteten Reaktionszeitmuster konnte empirisch belegt werden, dass Kinder im ersten Schuljahr in der Lage sind, die im Zwanzigerfeld realisierte Struktur zur Anzahlbestimmung zu nutzen. Diese Fähigkeit kann offenbar durch eine kurzfristige Intervention gezielt gefördert werden. An den vorliegenden Beitrag anschließende Forschungsfragen könnten sein, mit welchem theoretisch begründeten Modell sich die Reaktionszeitverläufe beim Quasisimultanerfassen adäquat beschreiben lassen, ob die Fähigkeit des Quasisimultanerfassens auch auf individueller Ebene reliabel erfasst werden kann und ob ein Zusammenhang zwischen dieser Fähigkeit und arithmetischen Fähigkeiten besteht.

Literatur

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Frank, M. C. & Barner, D. (2011). Representing exact number visually using mental abacus. *Journal of Experimental Psychology: General*, doi: 10.1037/a0024427.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). München: Spektrum Akademischer Verlag.

Obersteiner, A. (im Druck). *Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten. Konzeptionierung einer Förderung mit psychologisch-didaktischer Grundlegung und Evaluation im ersten Schuljahr*. Münster: Waxmann.

Obersteiner, A., Ufer, S., & Reiss, K. (2010). Förderung des Aufbaus mentaler Zahlrepräsentationen im Grundschulalter. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 649–652). Münster: WTM-Verlag.

Stigler, J. W. (1984). “Mental abacus”: The effect of abacus training on chinese children’s mental calculation. *Cognitive Psychology, 16*, 145–176.

Mareike OBERTHÜR, Paderborn, Rolf BIEHLER, Paderborn

Bewegungsdaten automatisch erfassen und mit Funktionen modellieren als Bestandteil von Lernumgebungen mit Schülerexperimenten

Die Lernumgebung „Experimentelle Mathematik – Bewegungsdaten erfassen und mit Funktionen modellieren" ist im Rahmen des Paderborner Projekts cool.MATH (http://cool.math.upb.de) entstanden. Dies Projekt hat als Ziel die Entwicklung und Beforschung mathematischer Lernumgebungen für das Schülerlabor coolMINT.paderborn (http://www.coolmint-paderborn.de). Das Schülerlabor ist eine Kooperation der Universität Paderborn und des Heinz-Nixdorf-Museumsforums. Es ist ein außerschulischer Lernort, an dem Schulklassen einen Vor- oder Nachmittag verbringen können, um dort an Lerninhalten mit MINT-Schwerpunktsetzung zu arbeiten. Im Folgenden wird die Lernumgebung vorgestellt und über erste Ergebnisse einer Voruntersuchung berichtet.

1. Die Lernumgebung

Die Lernumgebung besteht aus drei Stationen: „Graphenlaufen", „Ball auf schiefer Ebene" und „Springender Ball". In allen drei Stationen sollen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von Ultraschallsensoren (Vernier Go!Motion) die entsprechenden Bewegungsdaten erfassen und mit Software-Unterstützung (Logger Pro 3, Fathom) Weg-Zeit-Diagramme erstellen und interpretieren. Ziel ist es, die Steigung in den Weg-Zeit-Graphen als Geschwindigkeiten interpretieren zu lernen und zu lernen, wie man geeignet Funktionen an reale Daten zwecks Modellierung anpassen kann. Die Software erstellt die Diagramme in Echtzeit, so dass die Schülerinnen und Schüler während des Experimentierens auf dem Monitor das entsprechende Diagramm entstehen sehen können. Dieses direkte Feedback hat laut Mokros und Tinker (1989) einen positiven Einfluss auf die Fähigkeit, Graphen zu interpretieren und verringert typische Fehler, wie zum Beispiel den Graph-als-Bild-Fehler (s.u.).

Bei der Gestaltung der Lernumgebung haben Erkenntnisse aus mehreren Bereichen Einfluss genommen. An dieser Stelle sollen nur die wichtigsten dieser Prinzipien kurz genannt werden: experimenteller Zugang (vgl. Barzel und Ganter 2010), Nutzung von realen, selbst erhobenen Daten (vgl. Engel 2010, Riemer 2011, Biehler et al. 2011), und Embodied Cognition (vgl. Robutti 2006, Radford 2009). Letzteres ist für die Gestaltung der Station „Graphenlaufen" relevant. Eine weitere wichtige Rolle spielt der modulare Aufbau der Lernumgebung. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Stationen in der folgenden vorgegebenen Reihenfolge *Station 1: Graphen-*

laufen, Station 2: Ball auf schiefer Ebene, Station 3: Springender Ball bearbeiten. Jede Aufgabe innerhalb der Stationen läuft anhand des Dreischritts Vorüberlegung – Experimentieren – Reflektion ab. Danach erfolgt eine Festigungsphase, in der weiterführende Fragen zum Überprüfen des Verständnisses gestellt werden.

Genauere Informationen zum Inhalt der Lernumgebung sind auf der Internetseite (s.o.) zu finden.

2. Erste Ergebnisse der Voruntersuchung

In der Voruntersuchung wurden eine Hauptschulklasse und zwei Gymnasialklassen der Jahrgangsstufe 9 sowie zwei Realschulklassen der Jahrgangsstufe 10 bei der Bearbeitung der Lernumgebung beobachtet, Video- und Audioaufnahmen angefertigt und interpretiert sowie Arbeitsblätter ausgewertet. Es wurde eine Machbarkeitsstudie durchgeführt und untersucht, ob die Materialien geeignet sind, die erwünschten Lernziele zu realisieren. Bezüglich des zweiten Punkts soll über erste Ergebnisse bezüglich des Auftreten des Graph-als-Bild-Fehlers sowie über das Umgehen der Schülerinnen und Schüler mit dem direkten Feedback der Software berichtet werden.

Aufgrund der Rückmeldungen sowie der gezielten Beobachtungen konnten die Materialien angepasst sowie einzelne Fehler korrigiert werden. Es wurde festgestellt, dass die Lernumgebung in unterschiedlichen Jahrgangsstufen und Schulformen einsetzbar ist, da die Aufgaben wie geplant selbstdifferenzierend sind. Die positiven Aspekte überwiegen in der Wahrnehmung der Schülerinnen und Schüler deutlich, sehr häufig zurückgemeldet wurden Äußerungen wie: „Das Experimentieren war gut.“, „Es hat mir gut gefallen, weil wir so viel selber machen konnten.“, „Ich fand gut, dass wir in Gruppen zusammen gearbeitet haben.“.

Graph-als-Bild-Fehler

Nachdem die Schülerinnen und Schüler selber einen vorgegebenen Graphen (siehe Abb. 1) beschrieben hatten und gelaufen waren, wurden ihnen fünf unterschiedliche Beschreibungen eben dieses Graphen vorgelegt. In vier der Beschreibungen waren unterschiedliche Fehler eingebaut, bei einem Fehler handelte es sich um den Graph-als-Bild-Fehler, bei dem der Anstieg und das Fallen des Graphen als Besteigung einer Anhöhe anstelle Entfernen vom und Annähern an den Sensor missinterpretiert wurde. Die Schülerinnen und Schüler sollten nun jeweils entscheiden, ob die

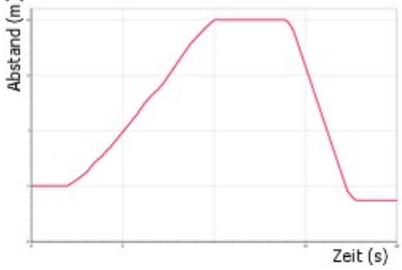


Abbildung 1: Erster Graph, den die Schülerinnen und Schüler nachlaufen sollen

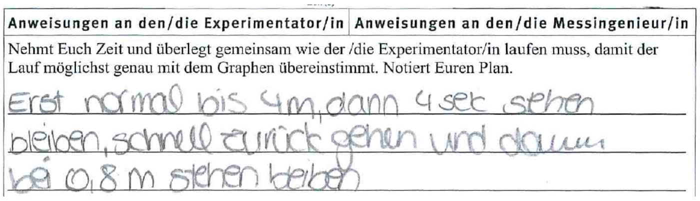
Welche Beschreibung ist richtig?	Gym 1 (n = 8)	Gym 2 (n = 4)	RS 1 (n = 4)	RS 2 (n = 3)
Beschreibung 1: Person steigt auf Anhöhe	50%	25%	50%	100%
Beschreibung 2: richtige Beschreibung	100%	100%	75%	≈67%
Beschreibung 3: Person startet und endet direkt vor dem Sensor	0%	0%	0%	0%
Beschreibung 4: Unterscheidung Geschwindigkeit der Person fehlt	50%	50%	0%	≈33%
Beschreibung 5: Person läuft schnell vom Sensor weg und geht langsam auf den Sensor zu	0%	0%	0%	0%
Entscheidung nach Hinweis, dass nur eine Beschreibung richtig ist	Frage existierte noch nicht	viermal Antwort 2	einmal Antwort 1 dreimal Antwort 2	einmal Antwort 1 zweimal Antwort 2

Abbildung 2: Auftreten des Graph-als-Bild-Fehlers nach dem Lauf des Graphen aus Abbildung 1; n = Anzahl der Kleingruppen, Größe der Kleingruppen 3 - 4 Personen

Beschreibung richtig oder falsch war (vgl. Abb. 2). Auffallend ist, dass die Hälfte der Gruppen der Gymnasialklasse 1 und die Hälfte bzw. alle Gruppen aus den RS-Klassen nicht erkennen, dass die Beschreibung fehlerhaft ist, obwohl sie alle kurz zuvor diesen Graphen selber „erlaufen“ haben und dafür nicht auf eine Anhöhe steigen mussten. Auch nach dem Hinweis, dass nur eine der fünf vorgegebenen Beschreibungen vollständig richtig ist, blieb jeweils eine der Gruppen aus den beiden RS-Klassen bei ihrer Meinung. Sie hatten vorher zusätzlich die richtige Lösung als falsch identifiziert. Dieses Ergebnis mit der starken Ausprägung des Graph-als-Bild-Fehlers steht im Widerspruch zu den Ergebnissen von Tinker und Mokros (1989), die gerade hier eine der Stärken der Echtzeit-Datenerfassung sehen und dies soll in der Hauptstudie genauer untersucht werden.

Umgang der Schülerinnen und Schüler mit direktem Feedback der Software

Eine weitere Gefahr, die dem Lernerfolg entgegenstehen könnte, besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler durch das direkte Feedback dazu verleitet werden könnten, auf die Reflektion zu verzichten und nach dem Prinzip Versuch-und-Irrtum vorzugehen (vgl. Radford 2009). Die Auswertung der erfassten Daten hat folgendes Vorgehen der Schülerinnen und Schüler ergeben: Verinnerlichung der Grundbewegung durch Erstellen des Plans sowie Nutzen des Feedbacks durch die entstehende Grafik zur Verfeinerung des Plans. In dem Schülerdokument (vgl. Abb. 3) sind die Grundbewegungen enthalten. Unter „normaler“ Geschwindigkeit ist der Gegensatz zu „schnell“ bei der zweiten Bewegungsphase zu verstehen. Die Gruppe notiert die erste Wartezeit nicht. Vor der ersten Durchführung des Laufs wird aber deutlich, dass ihnen diese Phase präsent ist und sie ledig-



Anweisungen an den/die Experimentator/in	Anweisungen an den/die Messingenieur/in

Nehmt Euch Zeit und überlegt gemeinsam wie der /die Experimentator/in laufen muss, damit der Lauf möglichst genau mit dem Graphen übereinstimmt. Notiert Euren Plan.

Erst normal bis 4m, dann 4 sek stehen bleiben, schnell zurück gehen und dann bei 0,8 m stehen bleiben

Abbildung 3: Plan zum Lauf des Graphen aus Abb. 1 (Klasse 10, RS)

lich vergessen haben, sie zu notieren. Sie haben also die Grundstruktur der Bewegung verinnerlicht. Um den Graphen akkurat nachzulaufen, benötigen sie nun allerdings das direkte Feedback der Software, da sie in ihrem Plan mit den relativen Geschwindigkeitsangaben „normal“ und „schnell“ gearbeitet haben. Sie laufen nun den Graphen mehrmals, bis sie ein zufriedenstellendes Ergebnis erhalten und speichern dieses. Die Frage, was ihnen mehr geholfen hat, die Erstellung des Plans oder das Feedback durch den Monitor, beantworten sie damit, dass ihnen beides geholfen habe, der Plan sei gut „damit man vorher schon weiß wie ungefähr man laufen muss“, beim Laufen selber haben sie dann mehr auf den Monitor geschaut „auf die Linien, die da gekommen sind“. Eine abschließende Reflexion, ob der Plan vollständig ist und tatsächlich den gewünschten Graphen ergeben hat (oder ergeben würde), was bei dieser Gruppe ja nicht der Fall ist, erfolgt nicht. In der Hauptstudie soll unter anderem untersucht werden, welche Ursachen dem zu Grunde liegen können. Hypothesen sind: (1) Der erzeugte Graph stimmt mit dem vorgegebenen überein. Es besteht keine Notwendigkeit zur Überprüfung des Plans. (2) Auf dem Arbeitsblatt war kein Platz für eine schriftliche Beantwortung der Frage vorgesehen, daher wurde sie als nicht so wichtig erachtet. Das beschriebene Vorgehen konnte bei den meisten Gruppen beobachtet werden.

Literatur

Barzel, B. & S. Ganter (2010). "Experimentell zum Funktionsbegriff." Praxis der Mathematik in der Schule **31**: 14-19.

Biehler, R. et al. (2011). Daten und Zufall mit Fathom. Unterrichtsideen für die SI mit Softwareeinführung. Braunschweig, Schroedel.

Engel, J. (2010). Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende. Berlin Heidelberg, Springer.

Radford, L. (2009). “No! He starts walking backwards!”: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance." ZDM **41**(4): 467-480.

Riemer, W. (2011). "Bewegung mit GPS untersuchen: Grundvorstellungen der Analysis "erfahren".“ mathematik lehren **160**: 54-58.

Robutti, O. (2006). "Motion, Technology, Gestures in Interpreting Graphs." International Journal for Technology in Mathematics Education **13**(3): 117-126.<

Tinker, R. F. & J. Mokros (1987). "The Impact of Microcomputer-Based Labs on Children`s Ability to Interpret Graphs." Journal of Research in Science Teaching **24**(4): 369-383.

Laura OSTSIEKER, Rolf BIEHLER, Paderborn

Analyse von Beweisprozessen von Studienanfänger/innen bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Konvergenz von Folgen

Vielen Studienanfänger/innen bereitet der Übergang von der Schule zur Hochschule große Schwierigkeiten. Dies wird unter anderem an den hohen Abbruch-Quoten deutlich. Im Rahmen des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) untersuchen wir diese Frage in unterschiedlichen Teilprojekten. Ein Bereich, in dem viele der Studierenden zu Beginn Probleme haben, ist der des formalen Beweisens. In der Schule werden formale Beweise eher selten behandelt, in der Hochschulmathematik sind sie dagegen von enormer Bedeutung. Robert C. Moore (1994) hat die Schwierigkeiten mit formalen Beweisen in verschiedene Bereiche unterteilt. Als einen dieser Bereiche nennt er die mathematische Sprache. Damit haben sich auch Elena Nardi und Paola Iannone (2005) befasst. In ihrer Studie beschreiben Mathematiker, dass die Studierenden sehr schnell bemerkten, dass in der Hochschulmathematik eine andere Sprache gesprochen werde. Sie versuchten oft, diese Sprache zu imitieren. Diese Thematik untersuchen wir am Beispiel des Begriffs der Konvergenz von Folgen bei Bachelor-Studierenden aus der Vorlesung Analysis I. Dabei geht es sowohl um die Schwierigkeiten bei der formalen Darstellung eines Beweises als auch um Schwierigkeiten mit der formalen Definition der Konvergenz.

1. Design der Studie

Da die Lösungsprozesse analysiert werden sollen, müssen diese beobachtbar gemacht werden. Wir haben uns für die kooperative Bearbeitung von Aufgaben entschieden, da diese für die Teilnehmenden eine natürlichere Situation darstellt als die Methode des lauten Denkens. Es wurden sechs Gruppen bestehend aus jeweils zwei bis drei Studierenden der Veranstaltung Analysis I beobachtet. Den Gruppen wurden nach und nach bis zu drei Aufgaben zur Konvergenz von Folgen vorgelegt. Sie hatten den Auftrag, eine gemeinsame Lösung zu erstellen, den Prozess auf „Konzeptpapier“ zu notieren und dann in eine „Reinschrift“ zu übertragen. Danach wurden die Ergebnisse dem anwesenden Tutor präsentiert. Wir waren besonders daran interessiert zu sehen, wie unterschiedliche mathematische Überlegungen in der Konzeptversion und in der Reinschrift notiert werden und ob die Reinschrift weitere reflektive Prozesse anstößt. Der gesamte Lösungsprozess wurde von uns mit zwei Kameras gefilmt.

Die Studie wurde während der fünften Semesterwoche durchgeführt. In der Vorlesung Analysis I wurden bis zu diesem Zeitpunkt die Themen Mengen und vollständige Induktion, reelle Zahlen und komplexe Zahlen behandelt. Ab der dritten Semesterwoche wurden Folgen und Konvergenz in den komplexen Zahlen eingeführt.

Die erste Aufgabe, die den Studierenden vorgelegt wurde, ist die folgende:

Untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = \frac{1-n}{4n-1}$ auf Konvergenz. Gib gegebenenfalls den Grenzwert begründet an und bestimme für ein beliebiges vorgegebenes $\epsilon > 0$ ein mögliches von ϵ abhängiges $N \in \mathbb{N}$ im Sinne der Definition der Konvergenz.

Diese Aufgabe wurde leicht verändert von Büchter und Henn (2010) übernommen. Es handelt sich unserer Einschätzung nach um eine eher leichtere Aufgabe, da im Wesentlichen „lediglich" die Definition angewendet werden muss. Es handelt sich um zwei Teilaufgaben. Wenn im ersten Teil richtig mit den Grenzwertsätzen gearbeitet wird, ist der Nachweis der Konvergenz über die Bestimmung eines N logisch überflüssig. Es sollte aber getestet werden, wie die Studierenden mit diesem Aspekt umgehen.

2. Erste Ergebnisse

Die durchschnittliche Bearbeitungsdauer bis hin zu einer Reinschrift betrug etwa 33 Minuten. Auffällig ist, dass fünf von sechs Gruppen als erste Vermutung äußerten, es handele sich um eine Nullfolge. Einige dieser Gruppen bemerkten ihren Fehler sehr schnell und fanden den tatsächlichen Grenzwert -1/4. Bei einer der Gruppen dauerte es über 20 Minuten bis sie den Irrtum bemerkten und eine Gruppe war bis zuletzt der Meinung, es handele sich um eine Nullfolge. Dieser Gruppe gelang es nicht, eine Reinschrift zu erstellen. Daher liegen lediglich fünf Reinschriften vor. Positiv zu bemerken ist, dass fünf der sechs Gruppen den Grenzwert ohne Hilfe richtig bestimmten. Das Vorgehen war unterschiedlich. Etwa die Hälfte der Gruppen formte den Folgenterm um und bestimmte den Grenzwert mithilfe der Grenzwertsätze. Die übrigen Gruppen bestimmten zunächst hohe Folgenglieder um auf den Grenzwert zu schließen. Einige von ihnen bewiesen diesen Grenzwert anschließend noch durch Umformungen und die Grenzwertsätze. Der Großteil der Studierenden war folglich in der Lage, die Umformungen durchzuführen und die Grenzwertsätze anzuwenden. Es ist allerdings anzumerken, dass die Grenzwertsätze oft lediglich als Rechenregeln verstanden wurden und die Existenzaussage nicht beachtet wurde.

Ziel der explorativen Studie war es auch, für Fehler und Schwierigkeiten in den Reinschriften ein geeignetes Kategoriensystem zu entwickeln. Wir unterscheiden folgende Kategorien:

Fehlende Begründung im Verhältnis zu vermittelten Bezugsnormen: Ein Schritt wurde nicht oder nicht ausreichend begründet. Diese Kategorie beinhaltet aber das Problem, dass in Vorlesung und Übungen oft gar keine klaren expliziten Bezugsnormen entwickelt werden.

Mängel beim Umformen symbolischer Ausdrücke:

Unterkategorien:

– *Schulniveau:* Es wurde ein Fehler bei einer Umformung gemacht, die in der Schule ausführlich behandelt wird, zum Beispiel Bruchrechnung.

– *Höheres Schulniveau:* Es wurde ein Fehler bei einer Umformung gemacht, die in der Schule zwar behandelt wird, bei der die Studienanfänger/innen jedoch nicht die nötige Routine haben, zum Beispiel Rechnen mit Ungleichungen oder Beträgen.

  Ein Beispiel aus einer Reinschrift:

  $$\frac{1}{4N-1} < \frac{4}{3}\varepsilon \iff 4N-1 < \frac{3}{4\varepsilon}$$

  Hier handelt es sich um einen Umformungsfehler beim Rechnen mit Ungleichungen.

– *Hochschulniveau:* Es wurde ein Fehler bei einer Umformung gemacht, die in der Schule nicht behandelt wird, zum Beispiel wurden die Grenzwertsätze falsch angewendet.

Unvollständige formale Aussagen: Ein Teil einer Aussage fehlt, zum Beispiel Quantoren oder die Angabe der Grundmenge.

Ein Beispiel aus einer Reinschrift:

noch zz.: $|a_n - a| < \varepsilon$

Hier fehlt die Angabe der Grundmenge, aus der n stammen soll. Zu ε werden keine weiteren Angaben gemacht.

Logische Probleme mit folgenden Unterkategorien:

– *Aussagenstatus:* Der Status von Aussagen wird verwechselt, zum Beispiel wird die Behauptung als Voraussetzung benutzt.

– *Äquivalenz:* Diese Kategorie beinhaltet alle Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit der Äquivalenz auftreten, zum Beispiel wird ein Folgepfeil geschrieben, obwohl die Äquivalenz benutzt wird.

– *Unvollständige logische Darstellung:* Hierunter fallen Fehler wie das Benutzen eines falschen Symbols.

Umformen der Behauptung mit mangelnder Kommentierung: Über die gesamte Aufgabenbearbeitung werden die Umformungen unzureichend kommentiert.

n-N-Problem: Die Studierenden haben Schwierigkeiten mit dem Status von n und N in der Konvergenzdefinition.

Ein Beispiel aus einer Reinschrift:

$\Longleftrightarrow \frac{3}{16n-4} < \varepsilon$, da $n \in \mathbb{N}$

Setze $n := N$ nach Voraussetzung

$\frac{3}{16N-4} < \varepsilon$

Hier ersetzen die Studierenden n durch N ohne sich inhaltlich darum zu kümmern, dass eine Aussage für alle n≥N gelten soll.

Wir möchten noch angeben, wie häufig Fehler der einzelnen Kategorien in den fünf Reinschriften vorgefunden wurden. Vier der fünf Gruppen hatten Mängel der Kategorie *fehlende Begründung im Verhältnis zu vermittelten Bezugsnormen*. *Mängel beim Umformen symbolischer Ausdrücke* waren auf *Schulniveau* und *höherem Schulniveau* jeweils bei zwei Gruppen festzustellen. *Unvollständige formale Aussagen* ließen sich bei drei von fünf Gruppen finden. *Logische Probleme* der Unterkategorien *Aussagenstatus* und *Äquivalenz* waren jeweils bei zwei Gruppen vorhanden, *unvollständige logische Darstellung* bei drei der fünf Gruppen. Ein *Umformen der Behauptung mit mangelnder Kommentierung* war bei zwei Gruppen festzustellen. Das *n-N-Problem* wurde bei vier von fünf Gruppen deutlich.

3. Ausblick

Zusätzlich zu dem Datenmaterial aus der hier vorgestellten Studie liegen uns 52 eingescannte Studierendenbearbeitungen zu ähnlichen Aufgaben vor. Anhand dieser soll das Kategoriensystem überprüft und gegebenenfalls angepasst werden. Im Wintersemester 2012/13 soll die Hauptstudie durchgeführt werden.

Literatur

Büchter, A. & Henn, H.W. (2010): Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag.

Moore, R.C. (1994): Making the transition to formal proof. In: Educational Studies in Mathematics, 27(3), 249 - 266.

Nardi, E. & Iannone, P. (2005): To appear and to be: Acquiring the ‚genre speech‘ of university mathematics. In: Proceedings of the 4th Conference on European Research in Mathematics Education, 1800 - 1810.

Bodo v. PAPE, Oldenburg

Geometrisches Modellieren

Nach den Bildungsstandards der KMK ist das Modellieren eine der sechs Kernkompetenzen der Mathematik. Um der begrifflichen Klarheit willen beschränke ich mich auf das, was anderswo „Modellieren im engeren Sinn“ heißt, also das „Übersetzen“ einer Gegebenheit in Mathematik – hier Geometrie. Außen vor bleibt das - nicht selten stark übermächtige – „Arbeiten in dem jeweiligen mathematischen Modell“. Es geht um „Lösen anspruchsvoller mathematischer Problemaufgaben“. Aufgabenstellungen, bei denen die Herausforderung sich beschränkt auf den Einsatz eines einzigen Modells – etwa eines aktuellen Standardmodells – scheiden damit auch aus.

Zwei Thesen vorab:

- Der Computer ist ein Standardwerkzeug beim GM.
- Innerfachlich geht es zunächst um Figuren und Körper im Koordinatensystem, dann um Differentialgeometrie auf numerischer Basis.

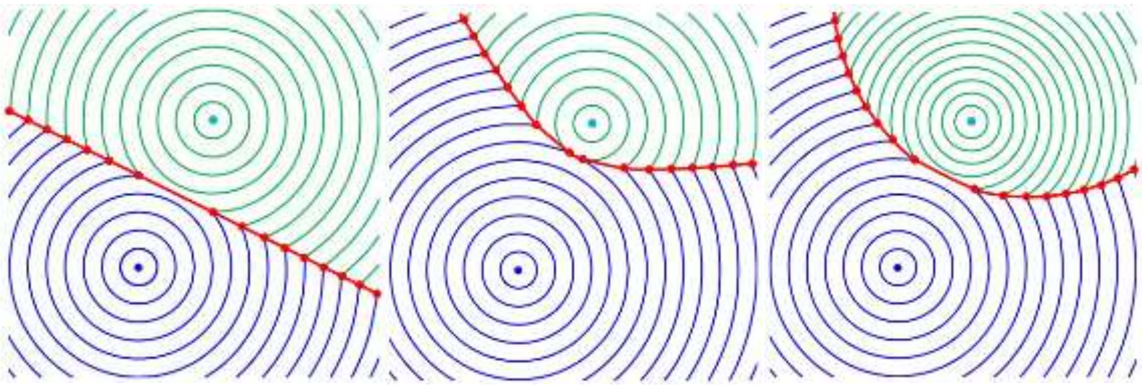
Den Thesen kommt man näher, wenn man kurz einen Blick über die Fachdidaktik hinaus wagt: „Das geometrische Modellieren beschäftigt sich mit dem rechnergestützten Entwurf und der Manipulation geometrischer Formen.“ (Abramowski-Müller, 1991) Dabei gibt es zwei Ansätze: Das „Kombinatorische Modellieren“ mit Standardprimitiven und das „Differentialgeometrische Modellieren“. Hier dominieren approximierende Verfahren.

Wer inhaltlich ausgerichtet ist auf Lebensnähe, der wird sich auch im Bereich der mathematischen Werkzeuge entscheiden für ein Tool, das im Leben etabliert ist. MS-Excel („Office-Standard“) ist an den Schulen verfügbar, auch bei den Schülern sollte man es erwarten. Mit Excel kann man den Bereich der geometrischen Modellierungen in seinen Grundzügen in großer Breite und Vielfalt erschließen. Entscheidend ist dabei die Möglichkeit, das Angebot der Funktionen zu erweitern durch selbst erarbeitete Funktionsmakros (= Ketten von Wertzuweisungen) zu geometrischen Routinen. (Etwa: Schnittpunkte zweier Kreise)

1. Modellierungsaufgaben

Bei der Sichtung der Vorschläge zum Modellieren im MU im Hinblick auf ihre Eignung für den Unterrichtsalltag stößt man schnell auf ein Dilemma: Im Focus stehen Aufgabenstellungen, denen man gerecht werden kann eigentlich nur im Rahmen eines Projekts, möglichst fächerverbindend angelegt („Authentischer Kontext, gesellschaftliches Interesse“): „Lohnt sich eine Fahrt zum Tanken nach Luxemburg?“ – „Versorgung beim Weltjugendtag in Köln“ – „Wie sollte man die Einkommensteuern festlegen?“ – „Solarenergie in Deutschland – lohnt sich das?“ Daneben stehen Aufgaben, in denen es um ein sehr kurzsinniges Abschätzen und Ankreuzen geht wie bei der Wassertank-Aufgabe aus den Bildungsstandards. Das Rechnen erweist sich nicht selten – angesichts der Unwägbarkeiten und Ungenauigkeiten der Ausgangsdaten – als aufgesetzt: „Lohnt sich die Abkürzung?“ aus den Bildungsstandards oder die „Zuckerhut“-Aufgabe

Im Rahmen der IQB-Aufgabe zu den Abraumhalden geht es um Höhenlinien einer Landschaft aus zwei Kegeln gleicher Höhe. Hier sollte man unter „Geometrischer Modellierung“ mehr erwarten als bloßes Ausscheiden abwegiger Vorgaben: Wie sieht es eigentlich aus bei Kegeln unterschiedlicher Höhe. Wie sieht es aus bei unterschiedlicher Neigung? Wie sehen insbesondere die „Tal“-Linien aus? Wie sieht das Geflecht der Tallinien aus, wenn man die Zahl der Kegel von zwei erhöht fünf?



2. Klassifikation der geometrischen Modellierungen

Eine erste Einteilung nach der Vorgehensweise ist bereits ins Auge gefasst. Jeder der beiden Vorgehensweisen – „Elementargeometrisch“ und „Differentialgeometrisch“ – lässt sich eine Klasse typischer Objekte zuordnen. Weitergehend bietet sich hier eine Differenzierung nach der Zielsetzung an.

Zweck einer Modellierung kann auch die sehr direkte Nachbildung eines vorhandenen Objekts („Replikation“) sein – Warenzeichen, Parkettierung, Werk aus der Konkreten Kunst (Nees: „Schotter“) – sowie das Design von etwas, das erst noch hergestellt werden soll. („Produktion“)

Neben die statischen Modellierungen tritt der Typ der kinematischen.

Dem geometrischen Modellieren zuzurechnen ist zweifelsfrei auch das Erstellen von Papier-, Drahtgitter-, Strohhalm- und Höhenschichtenmodellen.

3. Elementargeometrisches Modellieren

Die elementargeometrische Modellierung erfolgt idealisierend aus ebenen Primitiven – Rechteck, Dreieck, Kreis – oder räumlichen: Quader, Würfel, Kugel, Kegel, Pyramide. Als Objekte drängen sich auf: Haus, Auto, Baum, Dach. Die Passung der Teile kann durchaus diffizil sein, so etwa beim Modellieren von Maßwerk. Approximieren durch Streckenzüge oder Polygone tritt als Standardverfahren hinzu.

Nicht nur im Primarschulbereich kommt diesem Verfahren Bedeutung zu. In der professionellen Anwendung deckt es ein breites Spektrum ab: Im Maschinenbau lassen sich 90% der Bauteile auf diese Weise modellieren.

4. Differentialgeometrisches Modellieren

Zum einen geht es um Naturformen: Blüte, Ei, Phyloceras, Wasserstrahl, Kette, Muschel. Noch ergiebiger ist der Bereich „Artefakte“: Vasen, Gläser, Flaschen, Giebel, Brücken, Bögen bei Kirchen, Ziergitterelemente.

Im Wesentlichen geht es um eine Anpassung an eine Vorlage. Zum Einsatz kommen dabei höhere mathematische Objekte, in der Ebene zunächst Funktionsgraphen – Parabel, Polynomfunktion, Kettenlinie, Spline –, dann aber vor allem Kurven: Kegelschnitte, Spiralen, Zykloiden, Bezier-Kurven, Klotoiden. Im Raum greift man – etwa bei Modellierungen aus der Architektur – zurück auf Raumkurven und Funktionsflächen.

5. Visualisierung

Allgemein gesprochen zielt das geometrische Modellieren auf eine vereinfachte Wiedergabe einer augenfälligen Gegebenheit. Spricht man von „Visualisierung“, so hat man mehr im Auge. (Neubrand: „Zu den in der Geometrie authentisch und dennoch elementar darstellbaren Tätigkeiten gehören das Aufklären von Phänomenen, das Aufdecken verborgener Beziehungen und die Präzisierung qualitativer Beziehungen.“) So kann es gehen um

- die Aufdeckung eines verborgenen Sachverhalts
- den Aufweis eines theoretischen Hintergrunds
- die Umsetzung eines abstrakten Sachverhalts
- eine Illustration eines imaginierten Sachverhalts

Die Darstellung von Spuren –beim Basketballwurf, beim Einparken oder bei Verfolgungsproblemen – wird man der ersten Kategorie zurechnen, die Hinterlegung der Katakaustik in einer Tasse mit Strahlenverläufen der zweiten. Beim Modellieren eines Stapels von überstehenden Bausteinen nimmt man das Unendliche in den Blick. Stilisierte Darstellungen – Herzen, Bäume – wird man der vierten Kategorie zurechnen.

6. Kinematische Modelle

Bei Modellierungsaufgaben sind in der Regel Daten vorgegeben, nicht selten unzureichend („Fahrzeit etwa 3 min“) oder unsachgemäß versteckt („Geschwindigkeit 30 km/h“: Wie misst man das eigentlich?). In der Geometrie dagegen geht man aus von einer Abbildung. Der wichtigste Schritt der Modellierung besteht in der Wahl der Parameter. Der Übergang zu einem kinematischen Modell erfolgt problemlos über eine Variation der Werte einiger dieser Parameter über eine Zählschleife. In der Bewegung zeigt sich dann, ob die Wahl der Parameter günstig war. So geht die Validierung eines kinematischen Modells hinaus über den bloßen visuellen Vergleich mit der Vorlage. (Kriterium der „Zugfestigkeit“)

In der Literatur wird dieser Bereich abgedeckt mit Beispielen wie: Briefwaage, Kran, Bagger, Hubkolben, Garagentor, Einparken,

7. Interdisziplinäres Modellieren, innerfachliches Modellieren

Zu den klassischen geometrischen Modellen gehören die zum Planetensystem und zum Atom. Lichtstrahl und Elementarwelle sind weitere einschlägige geometrische Modelle aus der Physik. Bei der Modellierung einer Leiterschleife im Magnetfeld – „Elektromotor“ – wird man sogar ein aktuelles gesellschaftliches Interesse unterstellen dürfen.

Visualisierungen zur Erzeugung von Ortslinien sollten als Modellierungen einzustufen sein, und zwar ganz unabhängig davon, ob ein Sachverhalt aus der Realität widergespiegelt wird („Garagentor“: Zimmermannskonstruktion der Ellipse) oder nicht. Dasselbe gilt für Visualisierungen zur mechanischen Erzeugung von Kurven insgesamt („Cyklograph“: Rollkurven). Schließlich: Weiter tragende innermathematische Modellierungen – etwa mit Streckenzügen oder Treppen – können bei unserem Thema nicht ausgeschlossen bleiben.

8. Bilanz

Der Themenbereich ist umfassend, gehaltvoll und sehr attraktiv. Aber:

- GM und Unterrichtsalltag – passt das überhaupt zusammen?
- GM- und „PISA“-Aufgaben – passt das zusammen??

Literatur

Heinz Schumann: Rekonstruktives Modellieren in Dynamischen Geometriesystemen mathematica didactica 26 (2003), Bd. 2, 21-42

Franz PICHER, Klagenfurt

Texte über Mathematik im Unterricht

In populärwissenschaftlicher Literatur über Mathematik wird häufig versucht, wesentliche Ideen von Mathematik darzustellen. Ein anderes Ziel ist es, einen Überblick über ein Teilgebiet der Mathematik zu geben. Diese Ansprüche stellen sich auch einem reflexionsorientierten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Im Folgenden wird daher der Frage nachgegangen, worin die spezifischen Stärken von populärwissenschaftlichen Darstellungen von Mathematik einerseits und Schulbuchtexten andererseits liegen.

1. Ein Blick in populärwissenschaftliche Literatur

Auf der Suche nach Darstellungen von Mathematik, die ein Nachdenken über Mathematik – und im Speziellen das Stellen der Sinnfrage im Rahmen des Analysisunterrichts – ermöglichen, habe ich unter anderem populärwissenschaftliche Literatur gesichtet. Im Folgenden soll zunächst anhand dreier Bücher beispielhaft kurz dargestellt werden, was mir dabei aufgefallen ist.

Ian Stewart: Meilensteine der Mathematik (Stewart 2010). Das Buch gibt Einblicke in verschiedene Teilgebiete der Mathematik und dabei insbesondere in historische Entwicklungen (Wozu sind die Dinge erdacht worden? Wer hatte welche Problemstellung?), Grundideen (Was verbirgt sich hinter dem Begriff „Infinitesimalrechnung“?) und Anwendungen (so wird in Kastenform kurz und bündig dargestellt: „Wozu man Infinitesimalrechnung damals brauchte“, „Wozu man Infinitesimalrechnung heute braucht“). Die Beschreibungen sind dabei eher knapp und sehr grundsätzlich. Mathematische Details kommen immer wieder vor, werden aber ebenso nur kurz erläutert – der Autor kommt kaum in die Tiefe, dies wohl auch deshalb, weil für die behandelten, durchwegs „interessanten“ Problemstellungen häufig „schwere“ Mathematik benötigt wird. Zahlreiche Abbildungen, Skizzen und Grafiken lockern die eher kurzen Absätze auf.

Günter M. Ziegler: Darf ich Zahlen? (Ziegler 2010). Der Untertitel „Geschichten aus der Mathematik“ deutet bereits darauf hin, dass hier der Versuch unternommen wird, weitgehend ohne mathematische Inhalte etwas über Mathematik zu erzählen. Die folgenden Kapitelüberschriften sollen dies weiter illustrieren: „Wo Mathematik entsteht“, „Was sind das für Leute?“. Es wird gewissermaßen eine Außensicht auf Mathematik eingenommen und aus dieser Perspektive in Form von Kurzgeschichten auch auf Besonderheiten der Mathematik geblickt. Behandelte Themen sind dabei unter anderem: „Der mathematische Blick“, „Vorsicht Formeln!“, „Das BUCH der Beweise“.

Erich Schneider: Von der Null zur Unendlichkeit (Schneider 1987). Dieses Buch trägt den Untertitel „Mathematische Plaudereien für Nichtmathematiker. Gerade die Ausführungen in diesem Werk bewegen sich aber vergleichsweise nahe an einem „mathematischen Denken“. Den Einblick in die „Differential- und Integralrechnung“ beginnt der Autor mit besonders ausführlichen Darlegungen, es entsteht beinahe der Eindruck, dass man ihm beim Denken zuschauen kann. Man erkennt ein Einlassen auf die Sache und erfährt in Form von Erzählungen auch mathematische Details hinter den behandelten mathematischen Themen, was doch mehr ist, als der Titel „Plaudereien“ vermuten lässt.

Nachfolgend wird in aller Kürze dargelegt, was ich unter Reflexion und einem reflexionsorientierten Mathematikunterricht verstehe, um dann aufzuzeigen, inwiefern die eben vorgestellte Literatur einen Beitrag dazu leisten könnte.

2. Reflexionsorientierter Mathematikunterricht

Reflexion soll in erster Linie Offenheit signalisieren. Dies bedeutet, nicht am Lerninhalt selbst hängen zu bleiben. Es geht vielmehr um Aspekte wie „In-Beziehung-Setzen“ des Gelernten, um „Bewertung“ und um die Ausbildung einer entsprechenden „Haltung“. Dazu sind die Einordnung des Gelernten in einen übergeordneten Kontext und das Herstellen von Zusammenhängen unabdingbar. Reflexion führt im Rahmen der Bewertung fast zwangsweise auf ein Stellen der Sinnfrage, etwa: „Was bedeutet das für mich, für uns und für die Gesellschaft?“ Am Ende steht dabei die Beurteilung, am primitivsten in der Unterscheidung zwischen gut und schlecht: „Was erscheint wichtig, was weniger wichtig?“ (vgl. Picher 2008, S. 26).

Die Berücksichtigung der genannten Aspekte kann nun auf die folgenden Ansprüche an den Inhalt eines reflexionsorientierten Unterrichts führen:

- Die „Darstellung wesentlicher Ideen“ – als rote Fäden durch das Thema – kann zur Orientierung im Thema und zur Einordnung des Gelernten beitragen. Beides ist Grundlage für das Stellen der Sinnfrage.
- Ein „Überblick“ über das Gelernte und ein „Aufzeigen von Zusammenhängen“ ermöglichen ein „In-Beziehung-Setzen“ des Gelernten zu bereits Bekanntem.
- „Anwendungen“ (Was „leistet“ dieses mathematische Themengebiet?), ein „Blick in die Geschichte“ (Welche Probleme führten zu der betrachteten Mathematik?) und ein (kritischer) Blick auf „Besonder-

heiten der Mathematik“ (Was kann Mathematik? Was kann Mathematik nicht?) begünstigen die Bewertung des Gelernten.

Als mögliche Ansprüche an die Form eines reflexionsorientierten Unterrichts ergeben sich damit:

- Verschiedene Standpunkte zur Bedeutung eines Themengebiets werden dargelegt. Die Lernenden legen ihren eigenen Standpunkt und ihre eigene Meinung begründet dar; die Lernenden (er-)kennen andere mögliche Standpunkte und Meinungen sowie Argumente dafür.
- Diskussionen und dem Schreiben und Lesen von Texten kommt eine hohe Bedeutung zu. Das Verwenden von Texten ermöglicht insbesondere ein individuelles Sich-Zeit-Nehmen, eine offene Reflexionstiefe sowie die Vorgabe von Reflexionsangeboten und -anlässen.

Inwiefern ist nun populärwissenschaftliche Literatur eine Textsorte, die den oben genannten Ansprüchen dienlich sein kann?

3. Populärwissenschaftliche Literatur und reflexionsorientierter Mathematikunterricht

Folgende mögliche spezifische Stärken von populärwissenschaftlichen Darstellungen von Mathematik scheinen im Hinblick auf reflexionsorientierten Unterricht bedenkenswert:

- In populärwissenschaftlicher Literatur über Mathematik finden sich häufig Darstellungen wesentlicher Ideen, ihrer historischen Genese sowie wichtiger Anwendungen eines Themengebiets (siehe etwa Stewart 2010).
- Populärwissenschaftliche Literatur kann einen Blick auf Besonderheiten der Mathematik – etwa: Wie arbeitet Mathematik? Wer betreibt Mathematik? – sowie das Einnehmen einer Außensicht auf das Betreiben von Mathematik (siehe etwa Ziegler 2010) ermöglichen. Dadurch wird auch eine Darstellung von interessanter, „schwerer“ Mathematik, die operativ nicht handhabbar wäre, ermöglicht (siehe etwa Stewart 2010). Beides erleichtert eine Bewertung und das Stellen der Sinnfrage.
- Die Nicht-Belastung mit operativen Ansprüchen kann das Geben eines Überblicks sowie das Aufzeigen von Zusammenhängen begünstigen.
- Die Freiheit der Form im Falle populärwissenschaftlicher Darstellungen ermöglicht Erzählungen bzw. Geschichten sowie die ausführliche Darlegung von Gedankengängen und damit ein intensives Einlassen auf die Sache (siehe etwa Schneider 1987).

- Populärwissenschaftliche Bücher stellen häufig gefällige Darstellungen dar, weil sie den Leser und die Leserin für sich gewinnen müssen.

4. Populärwissenschaftliche Darstellungen von Mathematik und Schulbuchtexte

Unterschiede zwischen Schulbuchtexten und populärwissenschaftlichen Darstellungen finden sich zum Ersten in der Zielgruppe (Schülerinnen und Schüler vs. vornehmlich Erwachsene), zum Zweiten in der Zielsetzung (Beherrschung konkreter Verfahren vs. Überblick und wesentliche Ideen) und damit einhergehend zum Dritten im Blick auf die Mathematik (von innen vs. eher von außen).

Spezifische Stärken von Schulbuchtexten liegen gerade in der genannten Innensicht und folglich im Blick auf Details. Es wird über weite Strecken nachvollzogen, wie Mathematik funktioniert: Fachspezifische Erkenntnis-, Konstruktions- und Kommunikationsmittel werden in Gebrauch genommen, und es kommt zu einem Einlassen auf Geltungsansprüche und Handlungslogiken innerhalb der Mathematik.

Spezifische Stärken von populärwissenschaftlichen Darstellungen liegen hingegen in der Möglichkeit des Einnehmens einer Außensicht auf die Mathematik, die ein distanzierendes Nachdenken über Eigenheiten der fachspezifischen Erkenntnis-, Konstruktions- und Kommunikationsmittel erlaubt. Dadurch können die Geltungsansprüche und Handlungslogiken in Frage gestellt werden, alternative Sichtweisen sind möglich.

Für einen reflexionsorientierten Unterricht in obigem Sinne scheinen ein fachliches Kommunizieren innerhalb der Mathematik und ein Kommunizieren über das Fach Mathematik notwendig. Wünschenswert im Hinblick auf die genannten Ansprüche an einen solchen Unterricht ist eine Verschiebung der Gewichtung hin zum Kommunizieren über das Fach, was (auch) für den Einsatz von populärwissenschaftlicher Literatur spricht.

Literatur

Picher, F. (2008): Sozialreflexion im Mathematikunterricht – Kooperation oder Verweigerung. München/Wien, Profil Verlag.

Schneider, E. (1987): Von der Null zur Unendlichkeit – Mathematische Plaudereien für Nichtmathematiker. Dreieich, Weiss Verlag.

Stewart, I. (2010): Meilensteine der Mathematik. Heidelberg, Spektrum Verlag.

Ziegler, G. M. (2010): Darf ich Zahlen? Geschichten aus der Mathematik. 2. Auflage. München/Zürich, Piper Verlag.

Guido PINKERNELL, Heidelberg, Regina BRUDER, Darmstadt

Unterrichtsmethodik und Mathematikleistung in einem technologiegeprägten Mathematikunterricht

Mathematikleistung und Unterrichtsgestaltung:CAliMERO 2005-2010

In Pinkernell und Bruder (2011) wurde über Zusammenhänge zwischen der im Projekt CAliMERO 2005-2010 erfassten Mathematikleistung der beteiligten Schüler und der Gestaltung des Unterrichts berichtet, über den die beteiligten Schüler Auskunft gaben. Bei CAliMERO 2005-2010 handelt es sich um ein Projekt des Landes Niedersachsen zum Einsatz von Taschencomputern im gymnasialen Mathematikunterricht der Sek. I. Ziel dieser von Texas Instruments unterstützten Studie war die Entwicklung und Erprobung eines nachhaltig wirksamen Unterrichtskonzepts für das Unterrichten mit CAS (Ingelmann 2009). Eine der Forschungsfragen betraf den Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Unterrichtsleistung und der Unterrichtsgestaltung. Und zwar deshalb, weil man von dem erwähnten Unterrichtskonzept und den hieran sich orientierenden Materialien einen positiven Effekt auf die Entwicklung der Mathematikleistung erwartete. In der Tat ließen sich leichte Effekt nachweisen: Differenzierte man nämlich die beteiligten Lerngruppen hinsichtlich der beobachteten Methodenvielfalt, so ließen sich Leistungsunterschiede zugunsten "methodenreicher" Klassen wahrnehmen, die sich durch ein relativ häufiges Vorkommen von Unterrichtsgesprächen, selbständiges Arbeiten, Gruppenarbeit, Stoffwiederholung, Kopfübungen und leistungsdifferenzierende Aufgaben auszeichneten. Dieser Eindruck wurde bestätigt durch ein vergleichbar ausgeprägtes Methodenprofil der leistungsstarken Kontrollklassen. Insbesondere konnte bei den Lerngruppen ein höherer Leistungszuwachs festgestellt werden, in denen die sogenannten "Kopfübungen" vergleichsweise häufig durchgeführt wurden (Pinkernell & Bruder 2011).

Medieneinsatz und Unterrichtsgestaltung

Die Präsenz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht allein wird kaum zu einer verbesserten Mathematikleistung führen. Die Berichte bzgl. der Effekte des Einsatzes von CAS und anderen digitalen Werkzeugen auf die Mathematikleistung sind demgemäß uneinheitlich. Während z.B. Kieran & Saldanha (2005) von positiven Effekten im Vergleich zu Kontrollgruppen sprechen, berichtet z.B. Bichler (2010) von nur tendenziellen Differenzen zwischen Experimental- und Kontrollgruppen. Dies ist auch in CAliMERO 2005-2010 so zu beobachten (Ingelmann 2009, Pinkernell & Bruder 2011). In Konsequenz schlagen Weigand & Bichler

(2010) für eine differenziertere Leistungsdiagnose eine Erweiterung des Kompetenzmodells um technische und dynamische Aspekte vor.

Ein anderer Ansatz könnte den Medieneinsatz als Teil der Unterrichtsgestaltung insgesamt sehen. Der Einsatz digitaler Werkzeuge würde sich dann als erfolgreich erweisen, wenn die didaktisch-methodische Gestaltung des Unterrichts insgesamt "stimmt". Dass die Präsenz von digitalen Medien zu einer besonderen Herausforderung für das Unterrichten von Mathematik wird, ist an der häufig bemühten Metapher für den Computereinsatz als "Katalysator" für eine Veränderung von Mathematikunterricht ablesen (cf. Laborde & Sträßer 2010). Gleichzeitig ist die Methodenvielfalt ein wichtiges Merkmal gängiger Modelle guten Unterrichts, begründet durch die wachsende Heterogenität der Lernvoraussetzungen. Im Angebots-Nutzungs-Modell von Helmke (2009) finden wir mit dem Begriff "Lernangebote" einen guten Terminus, der Medien, Methoden, Sozialformen und auch Aufgaben als Gegenstand einer den verschiedenen Lernvoraussetzungen und -zielen angemessenen Unterrichtsplanung begreift. Eine Hypothese könnte also lauten: Der Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht zeigt sich als erfolgreich, wenn er als Teil eines situationsangemessenen und differenzierten Angebots verschiedener Lerngelegenheiten wahrgenommen wird.

Mathematikleistung und Unterrichtsgestaltung: CAliMERO Oberstufe

CAliMERO Oberstufe ist ein Nachfolgeprojekt zu CAliMERO 2005-2010, bei dem es schwerpunktmäßig um die Umsetzung neuer Oberstufencurricula mit dem Taschencomputer in Vorbereitung auf ein Zentralabitur mit CAS geht. Begleitend soll in einer kleinen Studie der Zusammenhang zwischen Unterrichtsgestaltung - insbesondere der Einsatz regelmäßiger Kopfübungen - und der Leistungsentwicklung in "rechnerfreiem" Grundwissens untersucht. Damit greift diese Studie gezielt entsprechende Beobachtungen aus CAliMERO 2005-2010 auf und sucht sie zu bestätigen.

Die mit dem Sommerhalbjahr 2012 endende Studie begann im Winterhalbjahr 2010/11 mit 15 niedersächsischen Oberstufenkursen mit erhöhtem Anforderungsniveau ("eA") und 28 Kursen mit grundlegendem Anforderungsniveau ("gA"). Allen beteiligten Lehrkräften wurden Kopiervorlagen mit den erwähnten Kopfübungen für einen ein- bis zweiwöchentlichen Einsatz zur Verfügung gestellt. Inhaltlicher Schwerpunkt ist Wissen aus den Bereichen "kaufmännisches Rechnen" und Funktionale Zusammenhänge. Die Aufgaben erfordern sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen (Darstellungswechsel, Interpretationen in Sachzusammenhängen, Grund- und Fehlvorstellungen, ...).

Im Verlauf des Projekts wurden fünf Leistungstests durchgeführt, deren Inhalte sich an dem oben skizzierten Schwerpunkten orientierten. Da die Tests, obwohl strukturell identisch, nicht parallelisiert sind, wurden für die Auswertung die Testerfüllungsgrade der beteiligten Schüler der eA- bzw. gA-Kursen z-standardisiert. Für die Erfassung der Leistungsentwicklung wurden die Ergebnisse des ersten und des vierten Tests herangezogen, die Auswertung des fünften Tests liegt noch nicht vor.

Der einseitige Testbogen enthielt neben den kurzen Aufgaben auch Fragen zur Häufigkeit bestimmter methodischer Aspekte im Mathematik, die auf einer fünffach gestuften Likertskala zu beantworten waren. Diese acht methodischen Aspekte betrafen einerseits Sozialformen (Einzel-, Kleingruppenarbeit, Lerngruppendiskussion, Erklärungsphasen durch Lehrperson) und zu Aufgaben und Medien (rechnerfreie, leistungsdifferenzierende bzw. stoffwiederholende Aufgaben, Einsatz digitaler Werkzeuge). Für die Auswertung wurde jede Skala, obwohl nur ordinal skaliert, in Form des arithmetischen Mittelwerts zusammengefasst. Das ist unüblich, erlaubt aber angesichts des geringen Stichprobenumfangs eine feinere Differenzierung. Trotzdem dürfen diese Werte nicht als tatsächliche Häufigkeit interpretiert werden, sondern sie dienen nur dem relativen Vergleich zwischen den Lerngruppen.

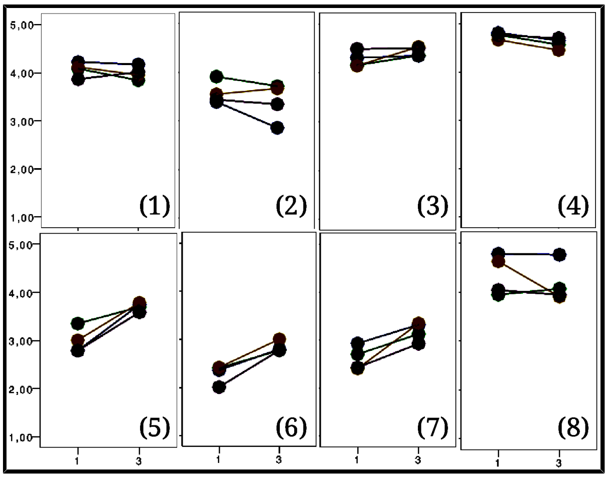


Abbildung 1: Für die gA-Kurse zeigt hier jede Grafik für einen der acht methodischen Aspekte die Durchschnitte der Lerngruppenhäufigkeiten zu jedem der vier berücksichtigten Erhebungszeitpunkte, jeweils links für die Kurse mit geringen (N=3) und rechts mit hohem Leistungszuwachs (N=7). Bei 5 ("rechnerfrei"), 6 ("leistungsdifferenzierend") und 7 ("stoffwiederholend") zeigen sich eine zu allen vier Messzeitpunkten konstant höhere Häufigkeiten bei den zuwachsstarken Lerngruppen.

Zur Beantwortung der Frage, inwieweit ein Zusammenhang zwischen der Mathematikleistung und methodischen Aspekten der Unterrichtsgestaltung besteht, wurden sowohl die eA-Kurse als auch die gA-Kurse hinsichtlich ihres Leistungszuwachses zwischen dem ersten und den vierten Test in drei etwa gleichgroße Gruppen differenziert, wobei die beste (N_{eA}=3, N_{gA}=3) und die schlechteste Leistungsgruppe (N_{eA}=3, N_{gA}=4) hinsichtlich der Unterrichtsgestaltung verglichen wurden. Es zeigt sich, dass sich die gA-Kurse mit besonders hohem Leistungszuwachs von denen mit besonders schwachem Zuwachs in methodischer Hinsicht dahingehend unterschieden, dass sie eine größere Häufigkeit an rechnerfreien, leistungsdifferenzierenden und stoffwiederholenden Lernangeboten aufwiesen. Die gemessenen Effekte sind mit Werten zwischen $\tau_b = .25$ und $\tau_b = .78^*$ zum Teil recht groß, sind aber wegen des kleinen Stichprobenumfangs nicht immer statistisch gesichert. Bei den eA-Kursen zeigen sich keine bemerkenswerten Effekte. Insgesamt spielt die Einsatzhäufigkeit des TC keine entscheidende Rolle sowohl bei den gA- als auch den eA-Kursen (Abb. 1).

Explizit auf die Kopfübungen eingegangen wurde in Lehrerfragebögen, die zum Zeitpunkt des vierten Testdurchgangs durchgeführt wurden. Hier wurden die Lehrkräfte u.a. zur Häufigkeit dieses Übungsangebots und seiner Akzeptanz bei Lehrenden und Lernenden befragt. Es zeigen sich deutliche Effekte der angegebenen Einsatzhäufigkeit auf den Erfüllungsgrad des vierten Tests bei eA- und gA-Kursen ($N_{eA}=10$, $\tau_b = .466^*$ bzw. $N_{gA}=9$, $\tau_b = .719^{**}$), bei den gA-Kursen auch deutliche Effekte der Akzeptanz durch die Lehrkraft ($\tau_b = .504^*$) und der Schüler ($\tau_b = .609^*$).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Schülerinnen und Schüler von gA-Kurse mit einer starken Leistungsentwicklung in ihrem Unterricht mit dem TC tendenziell häufigere Lernangebote mit rechnerfreien, leistungsdifferenzierenden und stoffwiederholenden Aufgaben wahrnehmen. Insb. die Kopfübungen finden gleichzeitig eine hohe Akzeptanz sowohl bei Lehrenden als auch Lernenden. Bei eA-Kursen sind bis einem positiven Einfluss der Häufigkeit von Kopfübungen solche Effekte nicht wahrnehmbar. Ein Einfluss der Einsatzhäufigkeit digitaler Hilfsmittel auf die Leistungsentwicklung der Kurse konnte nicht beobachtet werden.

Literatur

Bichler (2010): Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht, Hamburg: Kovac

Helmke, A. (2009): Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität, Kallmeyer

Kieran, Carolyn; Saldanha, Luis (2005): Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. In: Proceedings of the 29th PME conference, Melbourne University

Laborde, C. & Sträßer, R. (2010): Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years, in: ZDM, Jg. 42, 121-133

Ingelmann, M. (2009): Evaluation eines Unterrichtskonzepts für einen CAS-gestützten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Logos,

Pinkernell, G. & Bruder, R. (2011): CAliMERO (2005-2010): CAS in der Sekundarstufe I, in: Beiträge zum Mathematikunterricht,

Weigand, H.-G. & Bichler, E. (2010): Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics lessons: the case of functions, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jg. 42, 697-713

Meike PLATH, Lüneburg

Strategien bei Raumvorstellungsaufgaben. Erste Ergebnisse einer Untersuchung mit Kindern im vierten Schuljahr.

Aufgaben zum Erfassen räumlichen Vorstellungsvermögens werden traditionell bestimmte Lösungsstrategien zugeschrieben. Diese werden allerdings nicht zwangsläufig von Kindern eingesetzt. Erste Ergebnisse einer Interviewstudie zeigen, dass Kinder im vierten Schuljahr eine Vielzahl verschiedener Strategien einsetzen, deutlich mehr als die Theorie erwarten lässt. Diese Strategien gilt es zu analysieren, zu strukturieren und der Theorie gegenüberzustellen.

1. Theoretischer Hintergrund

Raumvorstellung, als die Fähigkeit mit zwei- oder dreidimensionalen Objekten in der Vorstellung zu handeln, wird in der Literatur vielfach als ein komplexes Konstrukt aus verschiedenen Teilkomponenten beschrieben (vgl. Thurstone 1938, 1950; Rost 1977; McGee 1979; Linn & Petersen 1985). Mit Bezug zu der Drei-Faktoren-Hypothese von Thurstone (1938, 1950) und den Raumvorstellungskategorien von Linn und Petersen (1985) entwickelte Maier (1999) eine Zusammenfassung der fünf wesentlichen Komponenten räumlicher Fähigkeiten. Diese werden nach zwei Dimensionen strukturiert. Zum einen können mentale Lösungsproesse als **dynamisch** oder **statisch** beschrieben werden. Die Komponenten *Veranschaulichung, mentale Rotation* und *räumliche Orientierung* zeichnen sich durch dynamische Denkvorgänge aus, bei denen Bewegungen von Objekten stattfinden. Lösungsprozesse der Komponenten *räumliche Beziehung* und *räumliche Wahrnehmung* haben dagegen einen statischen Charakter ohne jegliche Form der Bewegung. Anderseits wird unterschieden, ob die Person sich **innerhalb** oder **außerhalb** der Aufgabensituation befindet. Ist die Person selbst Teil der Situation, so befindet sie sich innerhalb. Nimmt die Person dagegen die Position eines distanzierten Beobachters ein und betrachtet die Gesamtsituation, so spricht man von außerhalb.

Die Unterscheidung von dynamischen und statischen Denkvorgängen deutet darauf hin, dass bei Aufgaben innerhalb der verschiedenen Komponenten auch jeweils unterschiedliche Strategien eingesetzt werden. In der faktorenanalytischen Forschung wird vielfach davon ausgegangen, dass Strategien aufgabenabhängig sind. Aufgaben intendieren bestimmte Strategien, welche von den Testpersonen mehr oder weniger erfolgreich eingesetzt werden können (vgl. Hosenfeld et al. 1997; Pinkernell 2003; Plath 2011). Anderseits existieren eine Reihe verschiedener Studien, welche auf eine

Personenabhängigkeit der Strategien hindeuten. So wurde festgestellt, dass verschiedene Personen auch verschiedene Strategien einsetzen, dabei nicht unbedingt immer die intendierte Strategien gewählt wird und auch innerhalb eines Aufgabentyps Strategiewechsel auftreten (vgl. Barrat 1953; Kyllonen et al. 1984; Lüthje 2010). In der Literatur wird häufig zwischen analytischen und holistischen Strategien unterschieden (vgl. Barrat 1953; Cooper 1976), welche den statischen bzw. dynamischen Denkvorgängen Maiers (1999) gleichzusetzen sind. Diese Unterscheidung lässt sich weiter ausdifferenzieren, wie es beispielweise Lüthje (2010) zur Entwicklung eines Strategiemodells gemacht hat.

2. Design der Studie

Stichprobe. An der Untersuchung nahmen 57 Kinder des vierten Schuljahrs teil. Die Kinder stammten aus fünf verschiedenen Klassen dreier Schulen in Hamburg und Lüneburg.

Durchführung. In materialbasierten Einzelinterviews (20-30min.) wurden den Kindern verschiedene Aufgaben zur Raumvorstellung präsentiert. Dabei wurden die Kinder zuerst nach der Lösung und im Anschluss nach einer Erklärung ihres Lösungsprozesses gefragt.

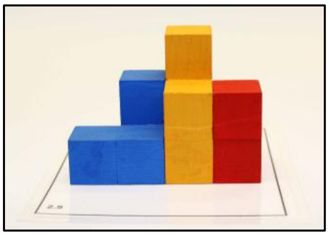


Abb. 1: A3 "Wer berührt wen?"

Aufgaben. Für die Untersuchung wurden vier Aufgabentypen mit insgesamt 38 Teilaufgaben entwickelt. Dabei handelt es sich um Aufgaben, welche den Komponenten der *räumlichen Orientierung*, der *räumlichen Beziehung*, der *mentalen Rotation* und der *Veranschaulichung* zugeordnet werden können (vgl. Plath 2011). Abbildung 1 zeigt eine Beispielaufgabe zur Beurteilung von Lagebeziehungen zwischen verschiedenen Soma-Teilen.

Auswertungsverfahren. Die qualitative Auswertung der Lösungsstrategien lässt sich mit fünf Phasen beschreiben. In der 1. Phase wurden die **Daten zusammengefasst**. Dazu wurden Erklärungen zum Lösungsvorgehen und Gesten der Kinder auf Grundlage von Videodaten verschriftlicht. In der 2. Phase fanden die **Kodierung** der Aussagen und die **Beschreibung** der verschiedenen Strategien statt. Auf diese Weise entstand für jeden der vier Aufgabentypen ein Strategieleitfaden. In der 3. Phase wurden aufgrund der großen Vielzahl verschiedener Strategieaspekte und deren möglicher Kombinationen **Strategieobergruppen** mit verschiedenen Substrategien gebildet und die Daten den Obergruppen zugeordnet. Parallel zur Auswertung wurde basierend auf theoretischer Literatur und in Anlehnung an das Modell von Lüthje (2010) ein Fünf-Ebenen-Strategiemodell entwickelt. Dieses diente in der 4. Phase der **theoriebezogenen Analyse** der Interviewdaten.

In der 5. Phase fand eine **Kontrastierung** von Theorie und Daten statt. Die durch die Aufgaben intendierten Strategien und die Strategien aus den empirischen Daten wurden im Strategiemodell gegenübergestellt, um mögliche Übereinstimmungen und Abweichungen festzustellen.

3. Ergebnisse

Die Ergebnisse der Kontrastierung sollen für jede Aufgabe kurz zusammengefasst dargestellt werden.

A1 „Bauen-mit-Soma-Teilen“ zum mentalen Zusammensetzen und Zerlegen von Objekten: Auf theoretischer Grundlage zeichnet sich diese Art der Aufgabe vor allem durch holistische Strategien aus, bei denen Objekte mental bewegt werden. Dieses Vorgehen ließ sich auch in den empirischen Daten vielfach (507-mal) wiederfinden. Darüber hinaus setzten die Kinder aber auch 100-mal analytische Strategien ein. Die holistischen Strategien erwiesen sich dabei in rund 70% der Fälle als erfolgreich, wohingegen die analytischen Strategien nur bei 34% zum Erfolg führten und daher wenig zielführend erscheinen.

A2 „Wer sieht was?“ zur mentalen Perspektivübernahme: Das mentale Hineinversetzen in andere Positionen stellt einen Aspekt holistischer Strategien stellt. Auch die Kinder in der vorliegenden Untersuchung beschrieben, neben weiteren holistischen Strategien, dieses Vorgehen. Insgesamt zeigten die Daten 189-mal holistische Strategie. Der Theorie widersprechend wurden dagegen 495-mal analytische Strategie eingesetzt. Betrachtet man die Erfolgsraten so zeigt sich, dass die zu erwartenden holistischen Strategien mit rund 67% zum richtigen Ergebnis führten. Die analytischen Strategien mit 78% aber noch erfolgreicher waren.

A3 „Wer berührt wen?“ zur Beurteilung von Lagebeziehungen: Diese Aufgabe zeichnet sich durch analytisches Vorgehen aus, was durch die empirischen Daten bestätigt wurde. Die Ergebnisse zeigen 310-mal eine analytische Strategie und nur 13 holistische Vorgehensweisen. Auch führten 67% der analytischen Strategien zum richtigen Ergebnis. Eine Erfolgsaussage über die 13 holistischen Strategien kann aufgrund der geringen Anzahl kaum gemacht werden.

A4 „Würfelschlangen vergleichen“ zur mentalen Rotation: Diese Aufgabe wird typischerweise im Bereich der mentalen Rotation eingesetzt und intendiert damit vor allem holistische Strategien. Diese ließen sich in den Daten 172-mal finden. Aber auch bei dieser Aufgabe zeigten die Kinder darüber hinaus analytische Strategien (95-mal). Beide Strategietypen scheinen erfolgreich zu sein, da 75% der analytischen Strategien und der holistischen Strategien zum richtigen Ergebnis führten.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Diese ersten Ergebnisse zeigen, dass bei allen Aufgaben sowohl analytische als auch holistische Strategien eingesetzt wurden und mehr unterschiedliche Strategien gezeigt wurden, als die Theorie erwarten ließ. Dadurch wird die Annahme, dass sowohl Aufgabe als auch die Person selbst die Strategiewahl beeinflusst, noch bestärkt. In weiteren Auswertungen sollen die Strategien weiter ausdifferenziert betrachtet und unter anderem in Bezug zu den einzelnen Teilaufgaben analysiert werden, um die Komplexität und Vielfältigkeit der kindlichen Lösungsstrategien bei Raumvorstellungsaufgaben noch stärker herauszuarbeiten.

Literatur

Barrat, E. S. (1953): An analysis of verbal reports of solving spatial problems as an aid in defining spatial factors. In: Journal of Psychology, 26, 17-25.

Cooper, L. A. (1976): Individual differences in visual comparison processes. In: Perception & Psychophysics, 19(5), 433-444.

Hosenfeld, I.; Strauss, B. & Köller, O. (1997): Geschlechtsdifferenzen bei Raumvorstellungsaufgaben – eine Frage der Strategie?. In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 11(2), 85-94.

Kyllonen, P. C.; Lohmann, D. F. & Woltz, D. J. (1984): Componential modeling of alternative strategies for performing spatial tasks. In: Journal of Educational Psychology, 76(6), 1325-1345.

Linn, M. C. & Petersen, A. C. (1985): Emergence and characterization of sex differences on spatial ability: a meta-analysis. In: Child Development, 56, 1479-1498.

Lüthje, T. (2010): Das räumliche Vorstellungsvermögen von Kindern im Vorschulalter. Ergebnisse einer Interviewstudie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Maier, P.-H. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögens. Donauwörth: Auer.

McGee, M. G. (1979): Human spatial abilities: psychometric studies and environmental, genetic, hormonal and neurological influences. In: Psychological Bulletin, 86(5), 889-918.

Pinkernell, G. (2003): Räumliches Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht: Eine didaktische Analyse mit Fallstudie. Hildesheim: Franzbecker.

Plath, M. (2011): Aufgaben in unterschiedlichen Präsentationsformen zum räumlichen Vorstellungsvermögen von Kindern im vierten Schuljahr. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM Verlag, 631-634.

Rost, D. H. (1977): Raumvorstellung: psychologische und pädagogische Aspekte. Weinheim, Basel: Beltz.

Thurstone, L. L. (1938): Primary mental abilities. Chicago, Illinois: The University of Chicago Press.

Thurstone, L. L. (1950): Some primary abilities in visual thinking. In: The Psychometric Laboratory Research, 59, 1-7.

Melanie PLATZ, Landau, Engelbert NIEHAUS, Landau

Test-Umgebung für räumliche Entscheidungsunterstützung zur späteren Verwendung in Augmented Reality für mobile Endgeräte

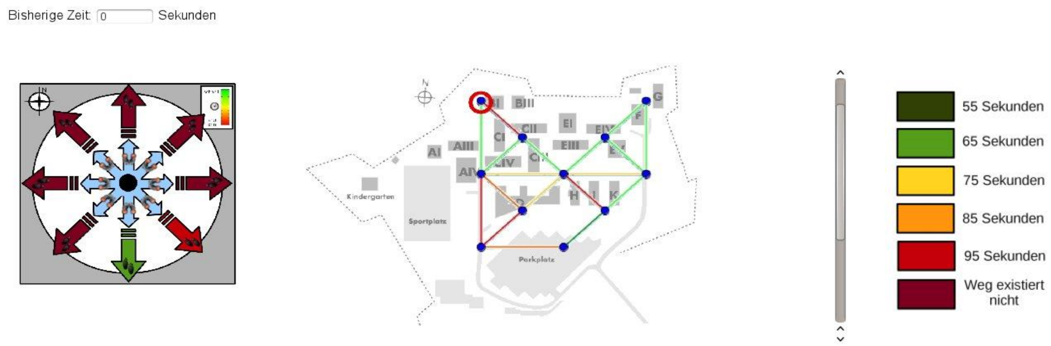
Ziel ist die Entwicklung einer web-basierten Test-Umgebung (T-U) zur räumlichen Problemlösekompetenz in Form eines Spiels zur Risiko-Minimierung. Mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler (SuS) lösen die Optimierungsaufgabe durch Lösung von Wegeproblemen auf Basis lokaler Informationen. Lernziel ist die Begründung von räumlichen Entscheidungsprozessen. Die verwendeten grafische Benutzerschnittstellen (GUIs) sollen evaluiert und optimiert werden, um später in Augmented Reality (AR) für Mobile Endgeräte (ME) verwendet zu werden.

1. Einleitung

Das Projekt „ReGLaN Health and Logistics“ hat die Optimierung der Gesundheitssituation in ländlichen Gegenden in Südafrika zum Ziel. Beteiligt sind Mathematiker, Mediziner, Logistiker, Psychologen, Softwareingenieure und Forscher der Kommunikations- und Informationstechnologie. Innerhalb des Projektes soll ein Entscheidungsunterstützungssystem im Rahmen eines Frühwarnsystems entstehen, das mit OpenSource Software als Anwendung für ME umgesetzt werden soll. Diese fachwissenschaftliche Fragestellung zur Entscheidungsunterstützung (EU) ist der inhaltliche Startpunkt für die Untersuchung der räumlichen Problemlösenkompetenz. Im mathematischen Umweltlabor (UWL) der Universität Koblenz-Landau bearbeiten mathematisch begabte SuS Fragestellungen aus den Umweltwissenschaften, die gleichzeitig mathematische Modellbildung für die Problemlösung benötigen. Die SuS erhalten folgendes räumliches Optimierungsziel: Möglichst unbeschadet durch ein Gefahrengebiet gelangen, in dem ein unsichtbares Risiko vorliegt, z.B. Radioaktivität, eine Epidemie, oder toxische Stoffe. Risikokarten und spezielle GUIs sollen die räumliche Problemlösekompetenz der im Risikogebiet befindliche Personen unterstützen. AR, die computergestützte Erweiterung der Realitätswahrnehmung, ist besonders gut geeignet, um unsichtbares Risiko über das Display mobiler Endgeräte sichtbar zu machen. Ziel ist die Entwicklung einer web-basierten T-U zur räumlichen EU in Form eines Spiels zur Risiko-Minimierung als Anreiz, sich mit räumlicher EU auseinanderzusetzen. Die SuS sollen Wegeprobleme lösen. Lernziel ist die Begründung von räumlichen Entscheidungsprozessen und deren Optimierung. Die Begründungen der SuS geben erste Hinweise, welche

Darstellungselemente des GUI für räumliche Entscheidungprozesse hilfreich waren und wie lokale bzw. globalere Informationen in der T-U für einzelne Wegentscheidungen und Optimierungen verwendet wurden.

2. Entwicklung der web-basierten Test-Umgebung



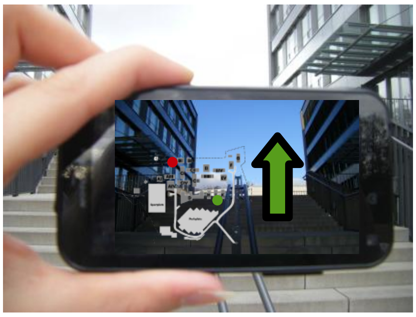
Ein Netz bestehend aus 11 Knoten und 18 Kanten wurde über den Lageplan des Campus Landau gelegt. Die Kanten wurden nach der Zeit bewertet, die zu Fuß zum zurücklegen des Wegs benötigt wird. Jedem 10-Sekunden-Intervall zwischen 55 und 95 Sekunden wurde eine Farbe zugeordnet. Rückwege wurden nicht mit einbezogen. Durch einen roten Kreis wurde in der T-U der aktuelle Standort angezeigt. Durch Anklicken von sternförmig angeordnete Pfeilen konnte die Richtung an jedem Knoten gewählt werden. Nach dem Anklicken wurde zunächst ein Nachrichtenfenster geöffnet, welches die jeweilige Zeit für den gewählten Weg anzeigte. Durch Anklicken des Fernglases wurde ein Foto des Standpunktes mit Blick in die jeweilige Pfeilrichtung angezeigt, um die Position im Wegenetz mit einer realen Position im Raum zu verbinden. Die aufaddierte Zeit als Minimierungsgröße ist in einem Textfeld sichtbar.

3. Evaluation der web-basierten Test-Umgebung

Den SuS wurden Aufgaben der Form „Wie gelangt man am schnellsten von Punkt A nach Punkt B?“ gestellt. Als Hilfsmittel durfte die web-basierte T-U verwendet werden. Die SuS wurden bei der Lösung der Aufgaben beobachtet. Zudem bearbeiteten die SuS einen Fragebogen um eine Schwierigkeitseinstufung des Problems vorzunnehmen, um herauszufinden, ob Strategien zur Lösung entwickelt wurden, um die T-U und das GUI zu bewerten, um Verbesserungs- und Weiterentwicklungsvorschläge für T-U und GUI zu sammeln und um Vorschläge zur Umsetzung für ME zusammenzutragen. Ergebnisse: Die SuS hatten noch keine Vorerfahrungen mit solchen Problemen und haben es mittelschwer bis leicht eingestuft. Alle SuS verwendeten zur Lösung unabhängig voneinander eine Art genetischen Algorithmus zur Problemlösung: Sie suchten einen möglichen Weg zwischen A und B, betrachteten Veränderungen dieses Weges und wählten schnellere Wege als neue verbesserte Lösung. Für den ersten möglichen Weg wurde der räumlich kürzeste (aber nicht schnellste) gewählt. Im Gegensatz zum genetischen Algorithmus wurden die neuen Wege nicht zufällig (wie Mutationen) ausgewählt, da gezielt Kanten mit hoher Gewichtung umgangen wurden. Die Gewichtung der resultierenden Wege wurden verglichen und der Weg mit der kleinsten Gewichtung wurde ausgewählt. Angewendete heuristische Strategien waren somit: Analogien suchen, in Teilprobleme zerlegen, Vorwärtsarbeiten und Darstellungsform wechseln. Als Möglichkeiten zur Weiterentwicklung der T-U wurden größeres Netz, mehr Wege, Gewichtung verfeinern (die SuS wären gerne noch mehr herausgefordert worden), Alert-Feld überarbeiten, den Button „Abbrechen“ ergänzen und „Rückgängig“-Funktion einbauen (die SuS hätten gerne die heuristische Strategie Rückwärtsarbeiten angewendet) genannt.

4. Ideen zur späteren Verwendung in Augmented Reality für Mobile Endgeräte

Folgende Resultate haben sich aus den Begründungen der SuS und den Problemlösungen selbst ergeben: Das Netz müsste ausgeweitet werden, die Rückwege mit unterschiedlicher Zeit sollten einbezogen werden. Die Gewichtung der Kanten sollte verfeinert werden. Risikokarten als globalere Entscheidungshilfen sollten einbezogen werden. Bezogen auf die fachwissenschaftliche Problemaufgabe entwickelten die SuS folgende Vorschläge: Ein Algorithmus zur Lösung des Wegproblems sollte entwickelt und eingearbeitet werden. Es sollten verschiedene Versionen der Anwendung, für Rollstuhlfahrer, Farbenblinde, Analphabeten, usw. zusammen mit einer maßgeschneiderten EU für ME entwickelt werden. Da Bilderlastige Anwendungen viel Energie verbrauchen und in Gefahrensituationen ein Zugang zu Strom nicht vorausgesetzt werden kann, sollte eine Energiesparversion entwickelt werden. Da auch Internet nicht überall als verfügbar vorausgesetzt werden kann, sollte eine Offlineversion entwickelt werden. Eine weitere Idee ist die Messung der Bewegungsgeschwindigkeit des Benutzers, um besser kalkulieren zu können und die Entscheidungsünterstützung u.U. an die geänderten Rahmenbedingungen anzupassen. Der Benutzer sollte Prioritäten wählen können: Ob es Ihm wichtig ist möglichst schnell voran zu kommen oder möglichst wenig Risiko ausgesetzt zu sein oder ob er gar



in ein Gefahrengebiet hineinlaufen möchte. Ein Vorschlag zur Gestaltung des GUIs ist obiger Abbildung zu entnehmen.

5. Zusammenfassung

Eine web-basierte T-U zur räumlichen EU in Form eines Spiels zur Risiko-Minimierung wurde entwickelt. Die SuS lösten die Optimierungsaufgabe, ein Wegeproblem, auf Basis lokaler Informationen an den Knoten und mit globalen Informationen und einer Art genetischem Algorithmus über die Analyse von Kanten. Die SuS konnten sich räumlich in die Position der bewegenden Person hineinversetzen und individuelle Anforderungen von Personenprofilen (z.B. Behinderte) in die Lösung mit einbeziehen. Das Lernziel der Begründung von räumlichen Entscheidungsprozessen wurde sowohl innermathematisch als auch im Bereich des außermathematischen Problems erreicht. Das GUI und die T-U lieferte erste Hinweise auf die Komplexität der Aufgabe, Optimierungsvorschläge zur späteren Verwendung in AR für ME und zeigte Möglichkeiten auf, welchen Beitrag die Wegoptimierung für die Begründung von mathematisch-räumlichen Entscheidungsprozessen leisten kann.

6. Ausblick

Die web-basierte T-U soll auf Basis der bisherigen Resultate umgestaltet werden, um im Unterricht der Sekundarstufe eingesetzt werden zu können. Dazu sollen Unterrichtsplanungen mit passenden Aufgabenstellungen erarbeitet werden. Für die Umsetzung zur späteren Verwendung in AR für ME soll im mathematischen UWL mit mathematisch begabten SuS weitergearbeitet werden.

Literatur

Halbritter, Ulrich (2001) Projektseite Schüleruniversität der Universität zu Köln, http://www.mi.uni-koeln.de/Schuelerstudenten (18.03.2012)

Tücke, M. (2005): *Schulische Intelligenz und Hochbegabung für (zukünftige) Lehrer und Eltern.* Münster: LIT Verlag (Osnabrücker Schriften zur Psychologie; Bd. 9).

Vock, M.; Preckel, F.; Holling, H. (2007): *Förderung Hochbegabter in der Schule.* Göttingen: Hogrefe-Verlag.

Wagner, H.; Zimmermann, B. (1986): *Identification and Fostering of Mathematically Gifted Students.* (Educational Studies in Mathematics 17, p. 243 – 259).

Azuma, R.; Baillot, Y.; Behringer, R.; Feiner, S. ; Julier S.; MacIntyre, B. (2001): *Recent advances in augmented reality.* (S. 34–47).

Homepage Wikitude, http://www.wikitude.com/de (18.03.2012)

Projektseite ReGLaN-Health and Logistics, http://reglan-health.uni-landau.de (18.03.2012)

Stefanie RACH, Kiel, Aiso HEINZE, Kiel, Stefan UFER, München

Wahrgenommene Fehlerkultur und individueller Umgang mit Fehlern: eine Interventionsstudie

Der konstruktive Umgang mit Fehlern wird als wichtiger Bestandteil von individuellen Lernprozessen angesehen. Dementsprechend sollen Instruktionsmaßnahmen dazu dienen, Schülerinnen und Schülern zu einer lernförderlichen Nutzung von Fehlern zu ermutigen.

1. Theoretischer Hintergrund

Fehler können als Resultate der individuellen Bewältigung von fachunterrichtlichen Anforderungen betrachtet werden. Individuelle Erfahrungen in Fehlersituationen werden als eine Möglichkeit angesehen, negatives Wissen aufzubauen (Oser, Hascher & Spychiger, 1999). Negatives Wissen wird als ein wichtiger Bestandteil individuellen Wissens angesehen, da es die Unterscheidung von Korrekten und nicht Korrekten ermöglicht.

Aus Trainingststudien (z. B. Keith & Frese, 2008) ist ein positiver Effekt der Nutzung von eigenen bzw. fremden Fehlern für den Lernerfolg bekannt. Auch legt eine Interventionsstudie von Heinze und Reiss (2007) mit 29 Schulklassen dar, dass Interventionen zum Lernen aus Fehlern auf der Ebene der Lehrkraft Wirkungen auf den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern haben können.

Guldimann und Zutavern (1999) postulieren ein vierschrittiges Idealmodell zur lernförderlichen Nutzung von Fehlern mit den Schritten (1) *Fehlersensibilität* (2) *Fehleranalyse* (3) *Fehlerkorrektur* (4) *Fehlerprävention*. Basierend darauf gehen wir von einem Modell aus, das zwei typische Wege der Bearbeitung von Fehlersituationen unterscheidet (Abb. 1).

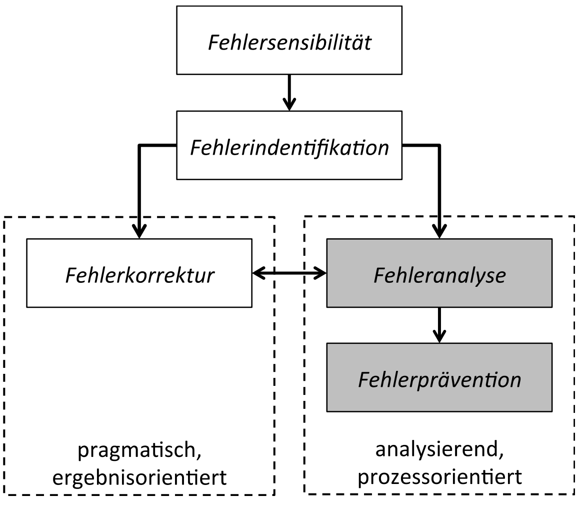


Abb. 1: Prozessmodell zur Nutzung von Fehlersituationen.

Im Unterschied zum idealtypischen Modell gibt es hier zum ersten einen pragmatisch-ergebnisorientierten Weg, der von der Fehleridentifikation direkt zur Fehlerkorrektur führt und dort endet. Zum anderen ist auch ein analysierender-prozessorientierter Weg möglich, bei dem die Fehlerkorrektur von einer Fehleranalyse begleitet wird und der zum Aufbau von Präventionsstrategien führt. Im Sinne des Aufbaus negativen Wissens kann dem zweiten Weg lernförderliches Potential zugesprochen werden, wohingegen der erste Weg dem in bisherigen Studien beobachteten eher ungünstigen Muster zur Behandlung von Fehlersituationen entspricht (z. B. Oser, Hascher & Spychiger, 1999).

Aus Videostudien ist bekannt, dass Lehrkräfte eine dominante Rolle in Fehlersituationen einnehmen. Sie sehen Fehler als natürlichen Bestandteil von Lernprozessen an, besitzen aber kaum Strategien, um konstruktiv Fehlersituation im Unterricht zu nutzen (Oser et al., 1999). Hinsichtlich der Perspektive der Lernenden weisen Fragebogenstudien darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler eine eher positive Einstellung gegenüber Fehlern im Mathematikunterricht haben. Die Lernenden berichten von wenig Angst vor Fehlern im Unterricht und nehmen ihre Lehrpersonen in Fehlersituationen als unterstützend wahr, nutzen ihre Fehler aber nicht regelmäßig für den Lernprozess (z. B. Heinze, Ufer, Rach & Reiss, 2011).

2. Fragestellungen

In der Forschung besteht Konsens, dass Fehlersituationen Potential für individuelle Lernprozesse aufweisen. Neben individuellen Charakteristika der Lernenden scheint die Art und Weise, wie im Unterricht mit Fehlersituationen umgegangen wird, eine zentrale Rolle bei diesen Lernprozessen zu spielen. Es stellt sich die Frage, welche Maßnahmen in den regulären Unterricht eingebettet werden können, um Lernende zu unterstützen. Unsere Studie untersucht damit die folgenden Fragen:

- Lassen sich charakteristische Profile von Schülerinnen und Schülern in Bezug auf deren Unterrichtswahrnehmungen und Einstellungen zum Lernen aus Fehlern identifizieren?
- Wie wirken sich Interventionen (a) zum Aufbau einer positiven Fehlerkultur bzw. (b) zum Aufbau einer positiven Fehlerkultur in Kombination mit der expliziten Vermittlung von Strategien zur lernförderlichen Nutzung von Fehlersituationen im Vergleich zum Unterricht in einer Kontrollgruppe auf die Schülerwahrnehmungen und -einstellungen aus?

3. Methode und Design

Bei dieser Studie handelt es sich um eine quasi-experimentelle Feldstudie im Prä-Post-Design mit 31 Mathematikklassen der Jahrgangsstufen 6 bis 9. Dabei gibt es zwei Interventionsgruppen und eine kleinere Kontrollgruppe. Die erste Interventionsgruppe implementierte eine *positive Fehlerkultur*, während die zweite Gruppe neben einer *positiven Fehlerkultur* noch zusätzliche Materialien zu *Strategien zum Lernen aus Fehlern* regelmäßig einsetzte. Die Bedingung *positive Fehlerkultur* wurde durch eine positive Besetzung von Fehlern in Unterrichtssituationen durch die Lehrkräfte umgesetzt. Die Auswahl der behandelten *Strategien zum Lernen aus Fehlern* orientierte sich an der prozessorientierten Vorgehensweise des beschriebenen Prozessmodells zur Nutzung von Fehlersituationen. Die Intervention umfasste fünf Monate.

Als abhängige Variablen wurden Schülerwahrnehmungen zum Lernen aus Fehlern durch eine adaptierte Version des S-UFS (Spychiger, Kuster & Oser, 2006) erhoben. Es konnten vier Subskalen identifiziert werden (vgl. Heinze et al., 2011; α = .69 - .91): affektive (LU_{aff}, 7 Items) und kognitive Lehrkraftunterstützung (LU_{kog}, 4 Items), keine Angst vor Fehlern (KA, 3 Items) und lernförderliche Nutzung von Fehlersituationen (LN, 8 Items).

4. Ergebnisse

Auf Basis der vier Skalen zur Schülerwahrnehmung von Fehlersituationen wurde nach der Vorbefragung eine Clusteranalyse durchgeführt, um in der Stichprobe homogene Untergruppen mit ähnlichen Profilen zu identifizieren. Es ließen sich drei interpretierbare Cluster gewinnen (Abb. 2). Dabei sticht der Typ „angstfrei, inaktiv" (Cluster 2, N = 257) besonders hervor, da er zwar von deutlich weniger Angst als der Typ „ängstlich, inaktiv" (Cluster 3, N = 169) berichtet, aber entweder über wenig Bereitschaft oder über weniger Strategien zum konstruktiven Umgang mit Fehlern als der Typ „angstfrei, konstruktiv" (Cluster 1, N = 272) verfügt.

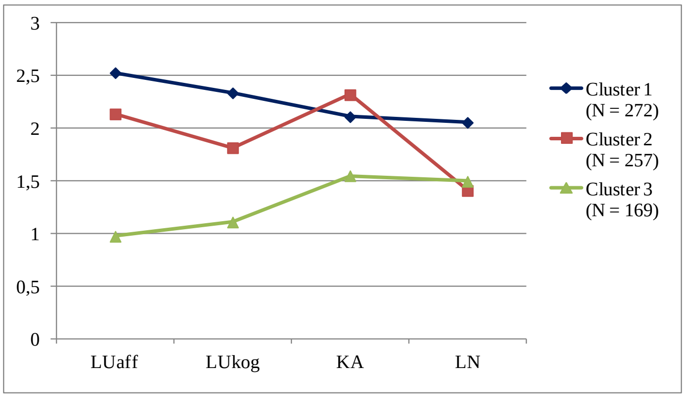


Abb. 2: Profile der identifizierten Cluster in der Vorbefragung.

Um die Auswirkungen der beiden Interventionsmaßnahmen auf das individuelle Erleben von Fehlersituationen zu prüfen, wurden Kovarianzanalysen für jede der vier Skalen durchgeführt. Die Lernenden profitieren nur im affektiven Bereich (Wahrnehmung affektiv unterstützenden Lehrkraftverhaltens und Angst vor Fehlersituationen) von einer *positiven Fehlerkultur*. Im kognitiven Bereich gibt es keine signifikanten Effekte und das Einbringen *zusätzlicher Strategien* zeigt keine Auswirkungen. Differentielle Effekte auf die Lernertypen traten ebenfalls nicht auf.

5. Diskussion

Erwartungsgemäß ließen sich Typen von Lernenden identifizieren, die unterschiedliche Erfahrungen mit Fehlersituationen berichten. Durch die Intervention konnten die Hypothesen zu Effekten einer positiven Fehlerkultur im affektiven Bereich gestützt werden. Die Hypothese zu Effekten einer Vermittlung von Strategien zur lernförderlichen Nutzung von Fehlersituationen bestätigt sich dagegen nicht. In authentische Fehlersituationen eingebettet scheint die Analyse von Fehlern und der Aufbau von Vermeidungsstrategien einen zusätzlichen Anspruch und eine mögliche Überforderung der Lernenden darzustellen. Die kognitive Förderung von Lernenden im Bereich Lernen aus Fehlern bleibt damit ein Forschungsdesiderat.

Förderung durch die Stadt Hamburg im Forschungsprogramm „komdif“

Literatur

Guldimann, T. & Zutavern, M. (1999): „Das passiert uns nicht noch einmal!“ Schülerinnen und Schüler lernen gemeinsam den bewussten Umgang mit Fehlern. In W. Althof (Hrsg.): Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Opladen: Leske + Budrich, 233-258.

Heinze, A. & Reiss, K. (2007): Mistake-Handling Activities in the Mathematics Classroom: Effects of an In-Service Teacher Training on Students’ Performance in Geometry. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park & D.-Y. Seo (Hrsg.): Proceedings of the 31st Conference of the PME (Vol. 3). Seoul: PME, 9-16.

Heinze, A., Ufer, S., Rach, S. & Reiss, K. (2011): The Student Perspective on Dealing with Errors in Mathematics Class. In E. Wuttke & J. Seifried (Hrsg.): Learning from errors. Opladen: Barbara Budrich, 65-79.

Keith, N. & Frese, M. (2008): Effectiveness of Error Management Training: A Meta-Analysis. In: Journal of Applied Psychology, 93(1), 59-69.

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999): Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In W. Althof (Hrsg.): Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Opladen: Leske + Budrich, 11-41.

Spychiger, M., Kuster, R. & Oser, F. (2006): Dimensionen von Fehlerkultur in der Schule und deren Messung. Der Schülerfragebogen zur Fehlerkultur im Unterricht für Schülerinnen und Schüler der Mittel- und Oberstufe. In: Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften, 28(1), 87-110.

Renate RASCH, Landau

Module für den Geometrieunterricht der Grundschule – ein Versuch, beziehungshaltiges Wissen aufzubauen

Studien zur Formenkenntnis in verschiedenen Schuljahren zeigten, dass Grundschulkinder vielfach ein unsicheres Begriffswissen haben und selten auf geometrische Zusammenhänge zurückgreifen können. (Rasch 2011) Eine Ursache hierfür sehen wir in der geringen Vernetzung geometrischen Wissens.

1 Ausgangsüberlegungen

Jean Piagets Versuchsreihe „Konstruktion des geometrischen Raumes" (Piaget/Inhelder 1975) verweist auf die Entwicklung geometrischer Grundfiguren im Verständnis des Kindes. Während noch Dreijährige Dreiecke und Vierecke sowie den Kreis als geschlossene Kurven darstellten ,ohne die Ecken (Winkel) angemessen präsentieren zu können, gelang das Darstellen der Grundformen vierjährigen Kindern ohne größere Probleme. Dieses Wissen gehört zu den stabilen Lernvoraussetzungen zu Schulbeginn. Das niederländische Ehepaar Pierre und Dina van Hiele untersuchte bei 13-jährigen Schülern die Möglichkeiten für die Entwicklung geometrischen Wissens im Unterricht. (van Hiele 1986) Im Rahmen ihrer Untersuchung identifizierten sie die seither weltweit bekannten und immer wieder genutzten Niveaustufen, von denen die ersten drei (Visualization, Analysis und Abstraction) für die geometrische Entwicklung von Grundschulkindern relevant sind. Die vorliegende Untersuchung wendet sich vor allem der Niveaustufe „Abstraction" zu, die durch die Fähigkeit Beziehungen zwischen Eigenschaften und Figuren zu entdecken und zu benennen, charakterisiert wird.

2 Fragestellung, Konzept und erste Ergebnisse

Ausgangspunkt für die Untersuchung zur Entwicklung des Wissens zu geometrischen Formen sind die folgenden Forschungsfragen:

Wie lässt sich die Figurenkunde im Geometrieunterricht so aufbereiten, dass Grundschulkinder Zusammenhänge sehen, artikulieren und nutzen?

Welche Fähigkeiten der Grundschulkinder lassen sich der Niveaustufe „Abstraction" zuordnen?

Der Untersuchung liegt die Hypothese zugrunde, dass Wissen dann beziehungshaltig erworben werden kann, wenn es für die Lernenden vernetzt angeboten wird. Es wurde nach Kernideen Ausschau gehalten, um die man geometrisches Wissen gruppieren kann. Auf dieser Grundlage entstanden

Module, kleine geometrische Wissenspakete, die klassenstufenübergreifend konzipiert wurden. Unsere Vorstellung ist, dass Lehrpersonen entsprechend der zu berücksichtigenden Ziele und Vorerfahrungen zusammenhängende Einheiten aus den Modulen herauslösen oder auch das gesamte Modul nutzen bzw. in weiteren Schuljahren wieder darauf zurückgreifen können. Die Module stellen nur ein Gerüst dar, in dem sich die Lehrkraft frei bewegen kann. Sie können entsprechend der curricularen und spezifischen Interessen der Lehrenden und Lernenden modifiziert und erweitert werden. Als Kernideen eignen sich Objekte wie „Faltwinkel", „Achsenkreuz", „Streifen" aber auch Grundfiguren selbst wie der Kreis oder die Dreiecke. Die geometrische Sprache orientiert sich mitunter an den Vorstellungen der Grundschulkinder. Zehn solcher Module wurden bisher zusammengestellt. Während das Modul 1 Grundbegriffe aufgreift, wenden sich die folgenden Einheiten den Figuren zu, z. B.:

Modul 3: *Dreiecke* (beliebige Dreiecke mit spitzen und flachen (stumpfen) Ecken (Winkeln); Dreiecke mit einer Mitte bzw. Symmetrieachse (gleichschenklig, „unter dem Halbkreis rechtwinklig"); Dreiecke mit drei gleichlangen Seiten; Symmetrien)

Modul 4: *Streifengeometrie* (parallele Kanten; Trapeze, rechtwinklige Trapeze, symmetrische Trapeze; … Parallelogramm; Rechteck; Quadrat)

Modul 5: *Geometrie im Kreis* (Halbkreis, Viertelkreis – Faltwinkel , Dreiviertelkreis, Vierviertelkreis; Quadrat, halbes Quadrat – rechtwinkliges Dreieck; Achteck; Kegel – 12-Eck, Sechseck, gleichseitiges Dreieck, symmetrisches Trapez, Rechteck; Beziehungen Radius-Kreis)

Beim Nutzen des Moduls *„Dreiecke"* spielt, wie auch bei den anderen Kernideen, das Papierfalten eine Rolle. Legt man z. B. ein Papierquadrat vor sich hin und stellt sich vor, die linke und rechte untere Ecke sind die Ecken A und B eines Dreiecks so könnte die dritte Ecke (der dritte Punkt) C irgendwo auf dem Blatt (oder außerhalb) sein. Nehmen wir an, er befindet sich auch auf dem Blatt und wir verbinden jeweils die Punkte A und B mit den Punkten C zu Dreiecken, dann können ganz spitze oder flache (später spitz- und stumpfwinklige) Dreiecke entstehen. Liegt der Punkt C links oder rechts auf dem Rand des Papierquadrates, erhält man rechtwinklige Dreiecke. Faltet man das Papierquadrat in der Mitte (zwischen A und B) und kennzeichnet die Punkte C auf diese Faltlinie, entstehen Dreiecke mit zwei gleichlangen Seiten.

Der vorgestellte Ansatz wurde durch Lehrerinnen und Lehrer in zahlreichen Fortbildungen evaluiert. Sie begrüßten insbesondere die Systematik. Der Schulversuch begann im Schuljahr 2010/11 mit zwei ersten Klassen (n

= 40). Die Entwicklung der Kinder soll drei Jahre begleitet werden. Das Unterrichtsdesign umfasst in der Regel vier Phasen (vgl. auch van Hiele 1986): 1 Erinnern/Reflektieren, 2 Wissen aufnehmen, 3 Anwenden/Erproben, 4 Austauschen/Besprechen. In Phase 2 wird durch die Lehrperson neues Wissen vorgestellt, und die notwendigen Aktivitäten werden demonstriert. Im Anschluss erhalten die Kinder einen offenen Arbeitsauftrag, mit dem sie sich in der Anwendungs- und Erprobungsphase entsprechend ihren Möglichkeiten eigenständig auseinandersetzen. Offene Aufgaben im Zusammenhang mit den Modulen zu Dreiecken waren z. B.: „Zeichne und schneide Dreiecke mit zwei gleichlangen Seiten.“ (Kl. 1), „Zeichne Dreiecke, die keine, eine oder mehrere Symmetrielinien haben.“ (Kl. 2).

Am Ende der Klasse 1 (nach 12 Geometriestunden) erhoben wir wie auch schon in der Pilotstudie mit einem offenen Zeichenauftrag das erworbene Wissen: „Zeichne und falte Linien und Figuren, die du kennst. Schreibe die Namen daran.“ Anhand der Darstellungen der Kinder erfassten wir die Häufigkeit des Auftretens der Figuren. (Abb. 1) Die Art und Weise des Faltens und Zeichnens ließ Rückschlüsse zu auf Beziehungen und Eigenschaften, die die Erstklässler inzwischen nutzen konnten.

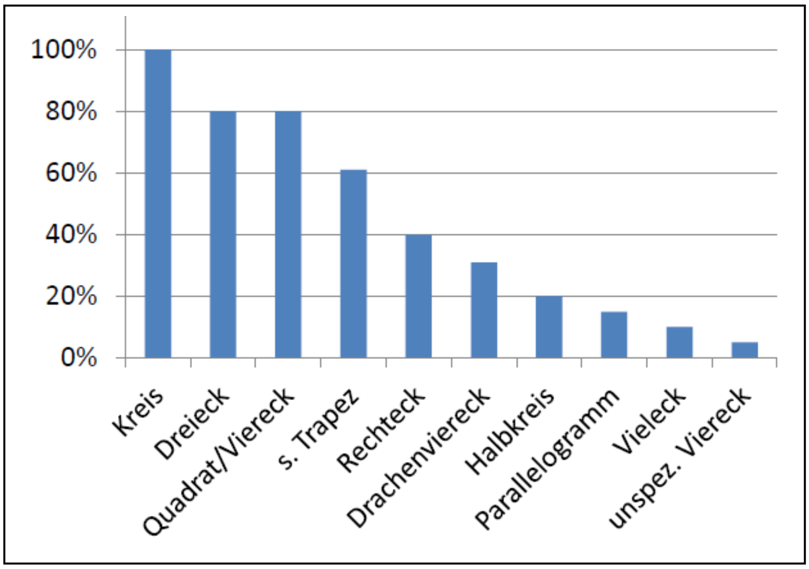


Abb.: 1: Figurenkenntnis Kl. 1, Juni

Insgesamt konnten alle Figuren, die in den 12 Geometriestunden eine Rolle gespielt hatten, von den Erstklässlern realisiert werden. Allerdings hatten wir Darstellungen von Rechteck, Parallelogramm und Drachenviereck zahlreicher erwartet. Es wurde deutlich, wie nachhaltig sich die Vorerfahrungen zu den einzelnen Formen auswirken: Kreis, Dreieck und Quadrat (teilweise immer noch als „Viereck“ benannt) waren nach Erhebungen im Rahmen von Masterarbeiten auch in den traditionell unterrichteten Klassen die Spitzenreiter. Versöhnlich stimmten die vielfältigen Beziehungen, die unsere Probanden bei der Erstellung der Figuren nutzten, z. B.: „Ein (gleichschenkliges) Dreieck kann man aus einem Quadrat falten.“, „Das Dreieck, das man aus dem Quadrat falten kann, hat eine Mittellinie.“, „Man muss erst die Mitte eines (gleichschenkligen) Dreiecks markieren, um daraus ein symmetrisches Trapez falten zu können.“, „Aus (kongruenten gleichschenkligen) Dreiecken kann man andere Figuren legen, z. B. Trapeze.“, „Dort, wo sich die Achsen beim Achsenkreuz schneiden, findet man viermal den rechten Winkel.“, „Linien durch den Mittelpunkt des Kreises markieren Punkte auf der Kreislinie, die zu Vielecken führen („Achtereck“, „Vierzehneck“).“

3 Gedanken zum Falten und Zeichnen

Auf dem Weg zu geometrischem Wissen und Können war das *Falten* zunächst die wichtigste Aktivität. Hilfreich für die Schulanfänger war, dass ein Teil des Ausführungswissens immer schon im Medium kodiert ist. (Schuster 2000) Die Kinder konnten sich auf (Falt-) Linien konzentrieren. Das schien einfacher als das Koordinieren von Punkten beim Zeichnen. Die Teilschritte, um zu einer Figur zu gelangen, ließen sich gut zurückverfolgen bzw. vorausdenken. Trotz der Überlegenheit des Faltens im Zusammenhang mit den frühen geometrischen Aktivitäten sollten auch das *Zeichnen und Anfänge des Konstruierens* einbezogen werden. Dieses Darstellungswissen ist wichtig, um später komplexere Darstellungen erfolgreich zu bewältigen. Insbesondere der Zirkel erwies sich als nützliches und von jungen Grundschulkindern gut handhabbares Zeichengerät. Sie lernten das Markieren von Abständen ohne messen zu müssen. Das Wechseln zwischen den Lagebeziehungen (waagrecht/senkrecht) beim Zeichnen mit dem Geometriedreieck erwies sich als anspruchsvoll. Allerdings gelang es den am Versuch beteiligten Kindern schon am Ende der 1. Klasse gut, das Achsenkreuz mit dem Geometriedreieck zu zeichnen. Ausgehend von diesem Grundbaustein können Zeichenfertigkeiten für die Darstellung von rechtwinkligen Vierecken erworben werden.

Literatur

Piaget, J. , Inhelder, B. (1975): Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Stuttgart: Klett.

Rasch, R. (2011): Geometrisches Wissen in der Grundschule. In: R. Haug, L. Holzäpfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag.

Schuster, M. (2000): Psychologie der Kinderzeichnung. Göttingen: Hogrefe.

van Hiele, P. M. (1986): Structure and Insight: A theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press.

Sandra REBHOLZ, Weingarten

Aufzeichnung von Lernaktivitäten als Hilfsmittel zu semiautomatischem Assessment von mathematischen Aufgaben zur Vollständigen Induktion

Im Rahmen des Forschungsprojekts SAiL-M[1] wurden mathematische Lernprogramme entwickelt, die mithilfe von semiautomatischem Assessment den gesamten Lösungsweg eines Lernenden berücksichtigen und individuelle Rückmeldungen zum aktuellen Aufgabenkontext liefern. In diesem Beitrag wird ein solches Lernwerkzeug zur Bearbeitung von Aufgaben zur Vollständigen Induktion vorgestellt und aufgezeigt, inwiefern eine Aufzeichnung aller relevanten Lernaktivitäten und Lösungsschritte dazu beitragen kann, der betreuenden Lehrperson einen detaillierten Einblick in den Lösungsprozess des einzelnen Lernenden zu geben.

1. Lernprogramme mit semiautomatischem Assessment

Im Bereich der Mathematikausbildung an der Hochschule werden vermehrt Konzepte vorgestellt und erprobt, die computergestützte Lernwerkzeuge in den Veranstaltungs- und Übungsablauf integrieren. Lernende erhalten dadurch ein zusätzliches Angebot an Übungsmöglichkeiten und können in interaktiven Lernumgebungen das behandelte Themengebiet eigenständig erforschen und vertiefen.

Für die computergestützte Leistungsbewertung (engl. *Computer-Aided Assessment, CAA*) durch solche Lernwerkzeuge gibt es verschiedene Ansätze. Während sich die Leistungsbewertung in den sogenannten *E-Assessment-Systemen* (Ruedel, 2009) vorwiegend auf die automatische Auswertung von geschlossenen Fragestellungen konzentriert und zur benoteten Leistungskontrolle eingesetzt wird, ist der von Bescherer et al. (2009) vorgeschlagene Ansatz des *Intelligent Assessment* darauf ausgerichtet, komplette Lösungswege zu analysieren und individuelles Feedback zu einzelnen Lösungsschritten zu liefern. Ziel ist es, die Lernenden prozessbegleitend zu unterstützen und die gewonnenen Informationen im Sinne von formativem Assessment (Black & Wiliam, 2009) in eine Verbesserung der Lehre einfließen zu lassen. Ein wesentlicher Aspekt von *Intelligent Assessment* besteht darin, dass Lernende auf Anforderung semiautomatische Rückmeldungen zu den von ihnen erarbeiteten Lösungswegen erhalten. Hierbei werden Standardlösungen und Standardfehler automatisch erkannt und

[1] Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik, http://www.sail-m.de

rückgemeldet. Unübliche Lösungen oder Fehler, die keiner bekannten Kategorie zugeordnet werden können, werden zur manuellen Beurteilung an die Lehrperson weitergeleitet. Diese korrigiert die Lösung und gibt dem Lernenden eine persönliche Rückmeldung zu dem betreffenden Problem. Um die Fehlerursache und tiefergreifende Verständnisprobleme feststellen zu können, ist es allerdings notwendig, dass nicht nur die (Zwischen)-Lösung zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachtet wird, sondern auch die einzelnen Schritte, die im Lernprozess zu dieser Lösung geführt haben. Im folgenden Kapitel wird eine allgemeine Logging-Architektur vorgestellt, die einen Einblick in diesen Lernprozess ermöglicht.

2. Aufzeichnung von Lernaktivitäten und Lösungswegen

Um Bearbeitungsprozesse im Umgang mit computergestützten Lernprogrammen nachvollziehbar zu machen, ist es notwendig, alle Lernaktivitäten und Lösungswege aufzuzeichnen und darzustellen. Die SMALA-Logging-Architektur wurde im Rahmen des Forschungsprojekts SAiL-M zu diesem Zweck definiert und entwickelt. Als zentrale Komponente dieser Architektur zeichnet der SMALA-Protokolldienst alle wesentlichen Benutzeraktionen in Form von Ereignissen (engl. *Event*) im zeitlichen Ablauf auf. Für jedes Event werden sowohl allgemeine als auch für die konkrete Aufgabe relevanten, inhaltsspezifischen Eigenschaften erfasst. Über geeignete Ansichten erhalten die Lehrenden umgehenden Zugriff auf die aufgezeichneten Daten und können so die Lernaktivitäten „beobachten".

Um den SMALA-Protokolldienst zu verwenden, muss der Lehrende zunächst das gewünschte Lernwerkzeug als Aktivität in seinen Online-Kurs im Lern-Management-System (LMS) einbinden. Anschließend können sich Studierende über ihren Internetbrowser beim LMS anmelden und erhalten so Zugriff auf das Lernwerkzeug. Alle Aktionen, die sie nun innerhalb des Lernwerkzeugs ausführen, werden als Ereignisse an den SMALA-Protokolldienst weitergeleitet. In einer speziellen Logging-Datenbank werden diese Ereignisse abgespeichert und können nach Bedarf von der Lehrperson abgerufen werden. Der Zugriff erfolgt auch hier über den Browser und ist nur autorisierten Benutzern erlaubt.

3. Das Lernwerkzeug ComIn-M

Als konkretes Anwendungsbeispiel wird nun das Übungswerkzeug *ComIn-M* zum Lösen von Beweisen mittels Vollständiger Induktion vorgestellt. *ComIn-M* steht als webbasiertes Arbeitsblatt zur Verfügung und bietet den Lernenden die Möglichkeit, verschiedene Summenbeweise mit Vollständiger Induktion selbständig zu üben (vgl. Rebholz & Zimmermann, 2011). Die Benutzungsoberfläche ist entsprechend den Teilschritten eines Induktionsbeweises strukturiert: Induktionsanfang, Induktionsannahme, Induktionsbehauptung und Induktionsschluss. Die Lernenden können jeden dieser Teilschritte vom Lernprogramm überprüfen lassen und erhalten umgehend eine automatische Rückmeldung zu der abgeschickten Lösung. Gemäß den Prinzipien des *Intelligent Assessment* können bei Bedarf auch direkte Anfragen an die Lehrperson geschickt werden. Die Lehrperson erhält die Anfrage zusammen mit dem aktuellen Lösungsweg und einer Darstellung der bisherigen Benutzeraktionen durch den SMALA-Protokolldienst.

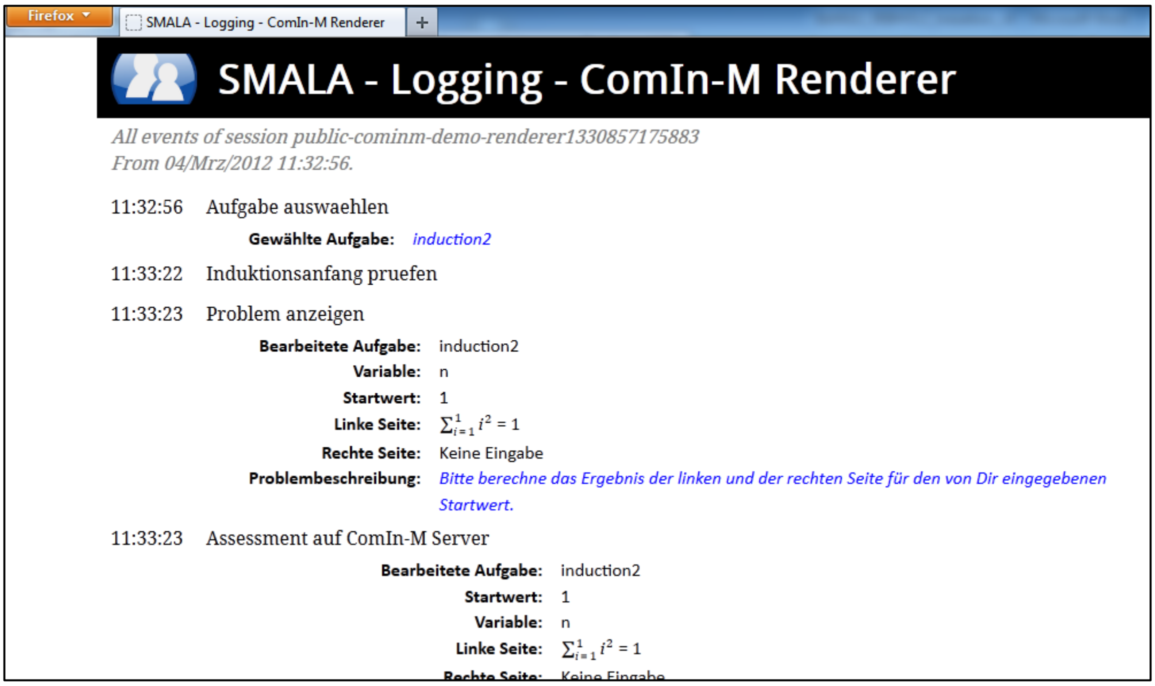


Abbildung 1: Darstellung eines Bearbeitungsprozesses

Wie in Abbildung 1 zu sehen ist, werden die Benutzeraktionen in zeitlicher Reihenfolge dargestellt. Sie enthalten nicht nur Informationen über die *Art des Ereignisses* sondern auch darüber hinaus gehende Informationen wie z.B. automatisch erzeugte Rückmeldungstexte von *ComIn-M* und die jeweiligen Zwischenlösungen im Induktionsbeweis.

4. Einsatz und Erfahrungen

Im Wintersemester 2011/2012 wurde das Lernwerkzeug *ComIn-M* zusammen mit zwei weiteren Lernwerkzeugen in Grundlagenveranstaltungen zur Mathematik an den Pädagogischen Hochschulen Karlsruhe, Heidelberg und Ludwigsburg als freiwilliges Zusatzangebot eingesetzt. Laut Nutzungsstatistik aus den SMALA-Aufzeichnungen haben 156 Studierende im Evaluationszeitraum mit den Lernwerkzeugen gearbeitet. Es wurden 965 Sessions mit insgesamt 24.655 Events aufgezeichnet.

Interviews mit den beteiligten Dozenten ergaben, dass die Aufzeichnungen den individuellen Bearbeitungsprozess der Lernenden widerspiegeln, und sich eignen, um konkrete Anfragen beantworten zu können. Darüber hinaus äußerten die Befragten den Wunsch, Hinweise auf typische Fehler und einen Überblick über die Lernaktivitäten der gesamten Lerngruppe zu erhalten.

Studierende nutzten die Lernwerkzeuge als zusätzliches Übungsangebot und bewerteten die Möglichkeit, die Aufgabenlösungen schrittweise überprüfen zu lassen, als positiv. Die Möglichkeit, die Lehrperson direkt zu kontaktieren, wurde lediglich von fünf Studierenden in Anspruch genommen. Die übrigen Teilnehmer nutzten für die Aufgabenbearbeitung ausschließlich die automatischen Rückmeldungen und Tipps.

5. Fazit und Ausblick

Am Beispiel des Lernwerkzeugs *ComIn-M* wurde gezeigt, wie semiautomatisches Assessment erfolgreich umgesetzt und als Unterstützungsmaßnahme in großen Hochschulveranstaltungen eingesetzt werden kann. Durch die detaillierten Aufzeichnungen der Lernaktivitäten und Lösungsschritte werden die individuellen Lernprozesse für die Lehrpersonen nachvollziehbar und analysierbar. Zukünftig sollen diese Aufzeichnungen statistisch ausgewertet und visualisiert werden, um dem Lehrenden einen Überblick über den Lernfortschritt der gesamten Lerngruppe zu geben.

6. Danksagung

Die Arbeit, die in diesem Artikel beschrieben wird, wurde vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) gefördert.

Literatur

Bescherer, C., Kortenkamp, U., Müller, W. & Spannagel, C. (2009): Intelligent Computer-Aided Assessment in Mathematics Classrooms. In A. McDougall, et al. (Hrsg.), Researching IT in Education: Theory, Practice and Future Directions. Milton Park, New York: Routledge, 200-205.

Black, P. J. & Wiliam, D. (2009): Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1), 5-31.

Rebholz, S. & Zimmermann, M. (2011): Applying Computer-Aided Intelligent Assessment in the Context of Mathematical Induction. In: eLearning Baltics 2011: Proceedings of the 4th International eLBa Conference, Stuttgart: Fraunhofer Verlag, 43-51.

Ruedel, C. (2010): Was ist E-Assessment? In: Ruedel, C. & Mandel, Sch. (Hrsg.), E-Assessment - Einsatzszenarien und Erfahrungen an Hochschulen. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann, 11-22.

Karin RECHSTEINER, Bernhard HAUSER, Franziska VOGT, Pädagogische Hochschule St.Gallen CH

Förderung der mathematischen Vorläuferfertigkeiten im Kindergarten: Spiel oder Training?

Einleitung

Seit den PISA Untersuchungen rückt die Frage nach einer adäquaten Bildung unserer Kinder in den Vordergrund. Die Frage, ob die Schule die Kinder genügend auf das Leben vorbereite, beschäftigt Eltern, Lehrpersonen, Vertreter aus Politik und Wirtschaft sowie die Bildungsforschung. Die Testresultate PISA der fünfzehnjährigen Kinder in Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften zeigen deutlich, dass eine enorme Heterogenität in den Leistungen vorliegt (Konsortium PISA, 2010). Der Druck, der heutzutage auf einer Gesellschaft lastet, möglichst leistungs- und konkurrenzfähige Individuen hervorzubringen, wird innerhalb den Bildungsinstitutionen von oben nach unten weitergereicht. Es stellt sich somit die zwingende Frage, wie Kinder von vier bis acht Jahren gefördert werden müssen, damit sie später beruflich erfolgreich durchs Leben gehen können?

Die Schweizer Bildungspläne für den Kindergarten orientieren sich stark an einer ganzheitlichen, am Spiel orientierten Bildung (Kanton St.Gallen, 1996). Doch genau diese auf das Kind abgestimmte, umfassende Bildung und insbesondere die spielerische Tätigkeit sind durch den Druck auf die Kinder, möglichst früh schulfähig zu sein, bedroht. Gmitrova und Gmitrov (2003, S. 245) stellen in ihrer Untersuchung fest, dass „ the press for academic readiness through concentrated and direct teaching of alphabet, number, color , and other skills is now affecting the amount of time allocated for play in preschools“.

In den letzten zehn Jahren sind auf dem Kindergarten etliche Trainingsprogramme eingeführt worden. Vor allem im Bereich der Sprachförderung wurden große Anstrengungen unternommen, Migrantenkindern eine bestmögliche sprachliche Integration in die Schule zu ermöglichen. Beispielsweise arbeiten viele Kindergärten mit dem Würzburger Sprachförderprogramm. Der Bereich der Mathematik wird unter anderem durch Lehrmittel wie das „kleine Zahlenbuch“ oder auch „komm mit ins Zahlenland“ und anderen Programmen wie „Mengen zählen Zahlen (MzZ)“ auch durch alltägliches mathematisches Tun in Rollenspielen abgedeckt und war bisher noch weniger stark im Fokus wissenschaftlich Evaluation als der Bereich Sprachförderung.

Frühe Mathematische Bildung

Ein Zitat aus dem Projektschlussbericht der EDK-Ost von Moser und Bayer (2010, S.101) zeigt auf, dass „ohne größere Investitionen in die Förderung der Vorläuferkompetenzen wird das Ziel der Volksschule, dass sämtliche Schülerinnen und Schüler am Ende der obligatorischen Schulzeit über ausreichende Grundkompetenzen für einen erfolgreichen Übertritt in die Berufsbildung verfügen, kaum erreicht". Insbesondere weisen Moser und Bayer (2010) darauf hin, dass im Bereich Mathematik die Erstsprache, die kognitiven Grundfähigkeiten und zum größten Teil das mathematische Wissen selbst zum späteren Erfolg in Mathematik beitragen. Kinder, die viel bereichsspezifisches Wissen mitbringen, sind später erfolgreicher. Zum gleichen Ergebniskommt auch die Studie von Krajewski und Schneider (2006), in welcher die mathematischen Vorläuferkompetenzen als guter Prädiktor für das mathematische Wissen am Ende der Grundschulzeit stehen.

Die Evaluation verschiedenster mathematischer Förderprogramme zeigt, dass deren Wirksamkeit teilweise ungenügend erforscht ist. Beispielsweise konnten Krajewski, Nieding und Schneider (2008) die positiven Effekte zum Zahlenland, welche von Friederich und Munz (2008) sowie von Pauen und Pahnke (2008) postuliert wurden, durch ihre Interventionsstudie mittels des Förderprogramms MzZ weitgehend entkräften. Der Widerstand gegen diese didaktisch eng geführten instruktionalen settings kommt unter anderem aus den USA. Untersuchungsergebnisse von Golinkoff und Hirsh-Pasek (2009) zeigen auf, dass insbesondere das spielerische Lernen dem frühen instruktionalen Lernen gegenüber nachhaltigere Vorteile aufweist. Der Stand der momentanen Diskussion zeigt, dass mehr Forschung im Bereich der mathematischen Frühdidaktik nötig ist. Genau an diesem Punkt setzt unsere Nationalfondsstudie an, indem sie die Wirksamkeit unterschiedlicher didaktischer Ansätze zum Aufbau des Zahlbegriffs bei Kindern im zweiten Kindergarten untersucht (Hauser, Vogt, Stebler & Rechsteiner, 2010).

Methode und Ergebnisse

An der Untersuchung, die zwischen März und Juni 2010 stattfand, nahmen insgesamt 324 Kinder der zweiten Kindergartenklasse aus dem Kanton St.Gallen mit durchschnittlichem Alter von 6.24 Jahren teil. Die Kindergärten wurden in einem randomisierten Verfahren ausgewählt und den Interventionen Spiel oder Training- und Kontrollgruppe zugeteilt. Die Gruppen unterscheiden sich nicht bezüglich ihrer kognitiven Fähigkeiten ($F=0.652$, $df=2$, $p=0.522$), welche mit dem Lest 4-7 (Moser & Berweger, 2004) gemessen wurde. Die mathematischen Fähigkeiten wurden mit dem Instrument „wortgewandt und zahlenstark (Moser & Berweger, 2006) erhoben; es zeigten sich ebenfalls keine signifikanten Gruppenunterschiede zu Beginn der Intervention (F=1.988, df=2, p=0.139). Das Studiendesign war so ausgelegt, dass die beiden Interventionsgruppen Spiel und MzZ während acht Wochen jeweils wöchentlich dreimal 30Minuten lang das sehr strukturierte Trainingsprogramm MzZ oder die zwölf nach MzZ-identischen mathematischen Teilfertigkeiten entwickelten und adaptierten Spiele nutzten. Zum einen waren das bekannte Spiele wie das Leiterspiel, das Fünferraus, das HalliGalli wie auch eigens dafür mit Pilotkindergärtnerinnen im Voraus entwickelte Spiele. Die dritte Gruppe diente als Kontrollgruppe, die Lehrpersonen unterrichteten an diesen Klassen wie gewohnt (vgl. Hauser & Rechsteiner, 2011)

Über die Interventionszeit von acht Wochen gesehen, zeigen alle Kinder Fortschritte. Die zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung ergibt einen signifikanten Interaktionseffekt (Zeit * Gruppe), wobei anzumerken ist, dass es sich dabei um ein kleines η^2 von0.025 handelt (N=324, F=4.04, df=2, p=0.019). Kinder mit der spielintegrierten Förderung erzielten einen Lernzuwachs von 11.35 Punkte, wohingegen die Kinder der Kontrollgruppe durchschnittlich 8.02 Punkte zulegen konnten, was mittels einseitiger post-hoc Testung mit dem Scheffé-Test einem signifikanten Effekt zu Gunsten der spielintegrierten Förderung entspricht (MW Differenz=-3.33, SE=1.18, p=0.01). Die Kinder der Trainingsgruppe legten 9.05 Punkte zu. Im Vergleich zu der Kontrollgruppe zeigen diese Kinder mathematisch keine höheren Lernfortschritte (MW Differenz=-1.03, SE=1.11, p=0.326). Die spielintegrierte Förderung ist dem Training nur tendenziell überlegen (MW Differenz=-2.30, SE=1.21 p=0.084).

Fazit

Die Ergebnisse zeigen, dass eine spielintegrierte Förderung dem traditionellen Kindergarten überlegen ist und die Kinder ebenso gut wie das Trainingsprogramm MzZ für das spätere mathematische Lernen vorbereitet. Diese Ergebnisse bringen die didaktische Diskussion zur Wirksamkeit von methodischen Ansätzen in Gang- „offenbar geht es auch mit etwas weniger Verschulung“(Hauser & Rechsteiner, 2011, S. 30), ganz im Sinne von Golinkoff und Hirsh-Pasek (2009, S. 55): „the best preschool education is one that embraces the whole child, is playful and rich in opportunities for exploring and meaning-making and is under adult guidance“.

Literatur

Friederich, G. & Munz, H. (2006). Förderung schulischer Vorläuferfertigkeiten durch das didaktische Konzept „Komm mit ins Zahlenland*". Psychologie in Erziehung und Unterrricht, 53*, 134-146.

Gmitrova, V. & Gmitrov, J. (2003). The Impact of teacher-directed and child-directed pretend play on cognitive competence in kindergarten children. *Early Childhood Educational Journal, 30(4),* 241-246.

Golinkoff, R.M., Hirsh-Pasek, K., Berk, L.E. & Singer, D.G. (2009). A mandate for playful learning in preschool: Presenting the evidence. New York: Oxford Press.

Hauser, B., Vogt, F., Stebler, R. & Rechsteiner, K. & Lehner, R. (2010). Frühe Mathe-Förderung im Kindergarten. Schlussveranstaltung des NF-Projekts mit Kindergärtnerinnen. Verfügbar unter: http://www.phsg.ch/Portaldata/1/Resources/forschung_und_entwicklung/lehr_lernforschung/100922_schlussveranst_Fruehe_Mathefoerd.pdf [Februar2012].

Hauser, B. & Rechsteiner, K. (2011). Frühe Mathematik: Geführtes Spiel oder Training? *4bis8 8Schweizerische Fachzeitschrift für Kindergarten und Unterstufe), Mai 2011 (5),* 28-30.

Kanton St.Gallen (1996). Erziehungsplan Kindergarten/Lehrplan Kindergarten. http://www.schule.sg.ch/home/volksschule/rechtliche_grundlagen/lehrplan/1997/_jcr_content/Par/downloadlist/DownloadListPar/download_2.ocFile/K4_Plan_Kindergarten.pdf

Konsortium PISA.ch (2010). PISA 2009: Schülerinnen und Schüler der Schweiz im internationalen Vergleich. Erste Ergebnisse. Bern und Neuchatel: BBT/EDK und Konsortium PISA.c.http://pisa.educa.ch/sites/default/files/20110114/pisa2009_de.pdf

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53, 246–262.

Krajewski, K., Nieding, G. & Schneider, W. (2008). Kurz- und langfristige Effekte mathematischer Frühförderung im Kindergarten durch das Programm „Mengen,zählen, Zahlen". *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 40,* 135-146.

Moser, U. & Bayer, N. (2010). Lernfortschritte vom Eintritt in die Eingangsstufe bis zum Ende der 3.Klasse der Primarschule. Zusammenfassung der summativen Evaluation. In: Birri, Th.; Grossenbacher, S.; Moser, U.; Bayer, N.; Vogt, F.; Zumwald, B.; Urech, C.; Abt, N.; Wiederkehr, B. Projektschlussbericht. Erziehung und Bildung in Kindergarten und Unterstufe im Rahmen der EDK-Ost und Partnerkantone. EDK-Ost und Schulverlag plus AG.

Moser, U., Berweger, S. & Lüchinger-Hutter, L. (2004). Lest 4-7. Unveröffentlichter Test. Institut für Bildungsevaluation und Leistungsmessung der Universität Zürich.

Moser, U. & Berweger, S. (2006). Wortgewandt & Zahlenstark. Lern- und Entwicklungsstand 4- bis 6-jährigen. Testhandbuch. St.Gallen und Zürich: kantonale Lehrmittelverlage.

Pauen, S. & Pahnke, J. (2008). Mathematische Kompetenzen im Kindergarten: Evaluation der Effekte einer Kurzzeitintervention. *Empirische Pädagogik, 22(2)*, 193-208.

Sandra REICHENBERGER, Linz

Technologie und Grundkompetenzen in Österreich

Standardisierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung in Mathematik

Im Haupttermin des Schuljahres 2013/14 wird in Österreich an den allgemein bildenden höheren Schulen (AHS) bzw. ein Jahr später im Haupttermin des Schuljahres 2014/15 an den berufsbildenden höheren Schulen (BHS) das neue Modell der standardisierten, kompetenzorientierten Reife- und Diplomprüfung (sRP) zur Anwendung kommen.

Die schriftliche Klausur aus Mathematik (AHS) bzw. Angewandter Mathematik (BHS) wurde bisher von den unterrichtenden LehrerInnen individuell zusammengestellt. Bei der neuen schriftlichen Reifeprüfung werden die Aufgaben zentral vorgegeben.

Als wesentliche Beweggründe für eine Zentralisierung der schriftlichen Reifeprüfung werden eine „stärkere Objektivierung“ und eine „bessere Vergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse“ genannt.

„Das wesentliche Ziel einer zentralen sRP aus Mathematik ist die Sicherung mathematischer Grundkompetenzen für alle österreichischen Maturant(inn)en.“ (Peschek & Fischer, 2009)

Während es in der AHS einen einheitlichen Grundkompetenzkatalog gibt, ist dies für das hochdifferenzierte BHS-System nicht möglich. Dort wurden verschiedene Kompetenzkataloge für die unterschiedlichen Anforderungen der Schulformen entwickelt.

Dieser Beitrag beschränkt sich auf die mathematischen Grundkompetenzen, die für die AHS (Stand Februar 2012) entwickelt wurden. Der Grundkompetenzkatalog (Liebscher et al., 2011) ist in vier Inhaltsbereiche gegliedert: Algebra und Geometrie, Funktionale Abhängigkeiten, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Die Grundkompetenzen orientieren sich an den Inhalten des Lehrplans.

Technologieeinsatz und Grundkompetenzen

Der Technologieeinsatz im Mathematikunterricht hat verschiedene Funktionen bei der Unterstützung der Kompetenzentwicklung (vgl. Liebscher et al., 2011)

Technologie kann beispielsweise als Rechenwerkzeug eingesetzt werden und bietet die Möglichkeit komplexe Operationen auf die Technologie auszulagern. Dadurch können sich SchülerInnen verstärkt auf mathematische Zusammenhänge, Modellieren sowie das Interpretieren von Ergebnissen konzentrieren. Für diesen Einsatz benötigen SchülerInnen spezielle Kenntnisse der verwendeten technologischen Werkzeuge (Tabellenkalkulation, Dynamische Geometriesoftware, Computeralgebra).

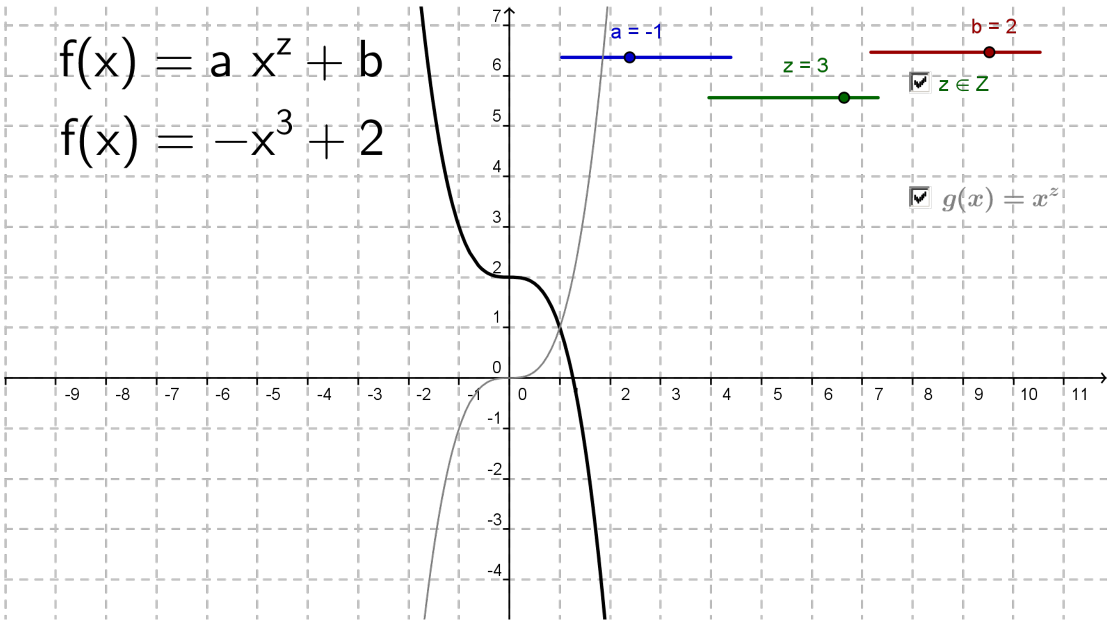
Weitere Einsatzmöglichkeiten von Technologie wie visualisieren, modellieren, begriffsbilden, experimentieren und simulieren fördern das aktive, experimentelle, entdeckende Lernen und helfen den SchülerInnen mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge besser nachvollziehen zu können.

Im Folgenden werden nun konkrete technologiebasierte Beispiele vorgestellt, die den Erwerb der geforderten Grundkompetenzen unterstützen können. Die hier vorgestellten Materialien können von GeoGebraTube, einer Plattform für den Austausch von Unterrichtsmaterialien, heruntergeladen bzw. direkt dort verwendet werden.

Beispiel 1:
Funktionale Abhängigkeiten – Technologie als Visualisierungswerkzeug

Grundkompetenz FA3.3: *Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können*

Das Applet „Potenzfunktionen (Wirkung der Parameter)“ soll SchülerInnen dabei unterstützen diese AHS-Grundkompetenz zu erwerben.



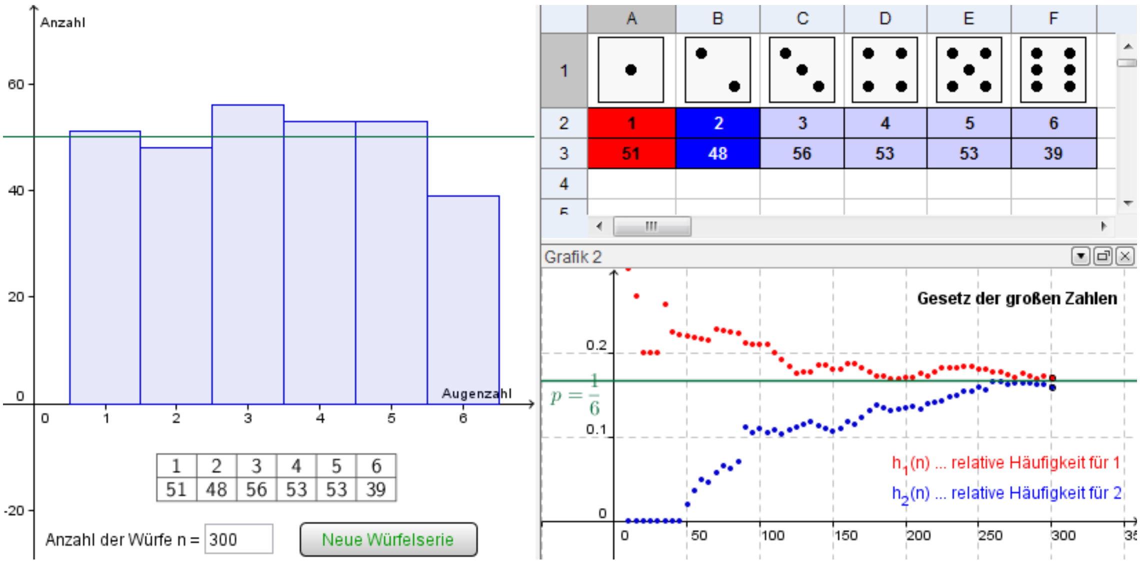
Die Auswirkungen der Parameter auf die Funktionsgraphen können mit Hilfe von Schiebereglern dynamisch untersucht werden. Durch begleitende Fragestellungen können SchülerInnen selbstständig entsprechende Eigenschaften der Funktionen entdecken.

Beispiel 2:

Wahrscheinlichkeitsrechnung – Technologie als Simulationswerkzeug

Grundkompetenz WS2.2: *Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können*

Das Applet „Würfeln und relative Häufigkeit“ (Lindner & Schmidt, 2011) zeigt eine Simulation für das n-malige Werfen eines Würfels.



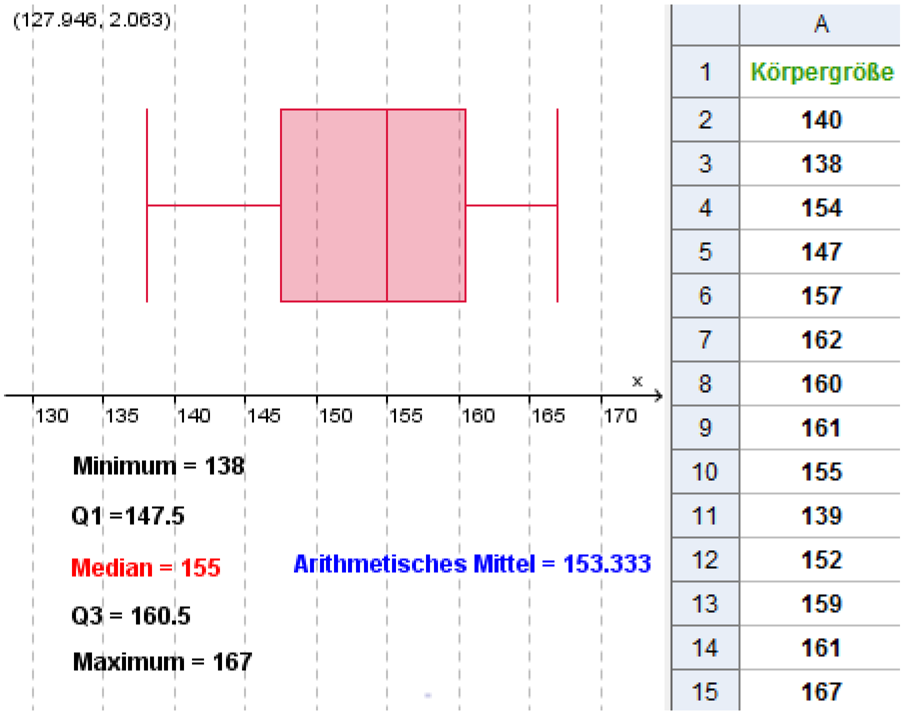
Natürlich können SchülerInnen das Experiment auch selbst mit Würfeln durchführen. Da das Gesetz der großen Zahlen aber erst nach einer relativ hohen Anzahl von Versuchen deutlich erkennbar wird, stellt diese Simulation eine zeitsparende Ergänzung bzw. Alternative dar. Durch die verschiedenen Darstellungsformen der relativen Häufigkeiten wird darüberhinaus auch die Grundkompetenz *„WS1.1: Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können“* gestärkt.

Beispiel 3:

Statistik – Technologie als Experimentierwerkzeug

Grundkompetenz WS1.4: *Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben, nutzen und interpretieren können*

In der Tabelle sind die Körpergrößen (in cm) von SchülerInnen und einer Lehrerin eingetragen. Daneben ist die Visualisierung dieser Daten in Form eines Boxplots zu sehen. Durch das Verändern verschiedener Datensätze können SchülerInnen Eigenschaften von Median und arithmetischem Mittel an konkreten Beispielen untersuchen.



Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurden einige Beispiele vorgestellt, wie durch Technologieeinsatz der Erwerb der im Rahmen der neuen zentralen Reifeprüfung in Österreich geforderten Grundkompetenzen unterstützt werden kann. Weitere technologiebasierte Beispiele zu diesen Grundkompetenzen sind auf http://kompetenzen.pbworks.com zu finden. Neben einzelnen Arbeitsblättern und Übungsmaterialien sind dort auch umfangreichere Lernpfade verlinkt, welche den Erwerb von Grundkompetenzen unterstützen können.

Literatur

GeoGebra (2012): Dynamische Mathematiksoftware. http://www.geogebra.org, Zugriff: Februar 2012.

Aue, V., Frebort, M., Hohenwarter, M., Liebscher, M., Schirmer, I., Siller, H.-S., Vormayr, G., Weiß, T., Willau, E. (2011): Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik" Phase II. BIFIE Wien (Hrsg.).

Liebscher, M., Breyer, G., Fürst, S., Heugl, H., Kraker, M., Preis, C., Svecnik, E., Liegl, I., Plattner, G. (2011): Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. BIFIE (Hrsg.), Graz, Leykam.

Peschek, W., Fischer, R. (2009): In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, 42, 1-12.

Interaktive Beispiele:

http://kompetenzen.pbworks.com/gdm (Stand: März 2012)

Katrin REIMANN, Köln

Verschiedene Stufen in der historischen Entwicklung der Algebra

In diesem Beitrag wird eine Verbindung zwischen der historischen Entwicklung der Algebra und dem Erlernen und Lehren von Algebra aufgezeigt werden.

1. Probleme beim Übergang von Arithmetik zur Algebra

Um zu eruieren, welche Probleme beim Übergang von Arithmetik zur Algebra bei Schülerinnen und Schülern (SuS) auftreten, führten Herscovics und Linchevski 1994 eine Interviewstudie mit 22 SuS der 7. Klasse durch. Dabei wurden zunächst arithmetische Grundfähigkeiten abgefragt und darauf aufbauend sollten verschiedene, für die SuS neue, Gleichungen mit einer Unbekannten gelöst werden. Das Ergebnis zeigte, dass die SuS in der Lage waren die Aufgaben größtenteils zu lösen, jedoch waren zu keiner Zeit Belege dafür ersichtlich, dass mit den Unbekannten operiert wurde. Herscovics und Linchevski folgerten daraus, dass die SuS die Gleichungen lösten indem sie „um die Unbekannte herum arbeiteten". Sie sehen die Grenze zwischen Arithmetik und Algebra daher als einen ‚cognitive gap' an, worunter sie die Unfähigkeit der SuS verstehen, spontan mit Unbekannten Operationen auszuführen. Diese Studie zeigt auf, dass wesentliche Probleme beim Übergang von Arithmetik zur Algebra in dem fehlenden Verständnis von Variablen und dem Umgang mit ihnen liegen. Der korrekte Umgang mit Variablen ist jedoch zentral für das Erlernen der Algebra, da Variablen Mittel der Verallgemeinerung sind und somit die Grundlage der formale Betrachtung und Beschreibung von mathematischen Strukturen bilden.

2. Epistemologische Hindernisse

Was bedeutet es einen mathematischen Begriff zu verstehen? Es ist nicht hinreichend nur die Definition des Begriffes zu wissen, sondern wesentlich ist es die Beziehung zu anderen Begriffen, die Position des Begriffes innerhalb einer Theorie und Beispiele und Gegenbeispiele zu kennen (Sierpinska, 1992). Mathematisches Lernen stellt keinen linearen Prozess dar, sondern ist durch Entwicklungssprünge gekennzeichnet. Die Entwicklungssprünge beschreiben das Überwinden eines zugrundeliegenden Hindernisses, welches mit dem Bruch von sicher geglaubten Wissen einher geht. Von Interesse sind für meine Arbeit vor allem die Hindernisse, die unabhängig von dem einzelnen Individuum beim Erwerb eines Inhaltes oder Begriffes auftreten, sogenannte epistemologische Hindernisse. Diese liegen in der

Natur der Sache und sind damit unabhängig vom Lernenden und der Art des Unterrichts. Die berühmten Mathematiker der Geschichte mussten sich diesen Problemen ebenso stellen und sie überwinden, wie heute die Lernenden beim Erwerb eines Begriffes. Theoretische Begriffe wie Gerade oder Kraft sind Beispiele für epistemologische Hindernisse. Die Theorie über das Verstehen eines Begriffes im Zusammenhang mit den Problemen beim Erwerb des Konzepts der Variable führen zu der Annahme, dass in dem Konzept der Variable ebenfalls epistemologische Hindernisse liegen.

3. Symbolbasierte Stufen der Algebra

Die Analyse der historischen Entwicklung der Algebra kann Aufschluss über die Existenz epistemologischer Hindernisse geben. In einer gängigen Einteilung der Entwicklung der Algebra wird zwischen drei Abschnitten unterschieden (Boyer 1968): Am Beginn steht die rhetorische Phase. In dieser werden alle Behauptungen und Argumente rein verbal formuliert. Um ca. 250 n. Chr. läutet Diophant durch die Verwendung von Symbolen für gesuchte Größen die synkopierte Phase ein. In dieser werden einige Zeichen im Umgang mit algebraischen Ausdrücken verwendet. Unbekannte gegebene Größen konnten jedoch noch nicht durch Zeichen ausgedrückt werden. Erst Vieta verwendete um 1600 Symbole für gegebene unbekannte Größen. Die Änderung in der Sprache der Algebra gilt als Ausgangspunkt für die letzte, symbolische Phase. In der symbolischen Phase ist eine komplette Symbolisierung möglich, d.h. alle Zahlen, Operationen und Beziehungen können durch Symbole ausgedrückt werden. Was bedeutet die Weiterentwicklung der algebraischen Sprache und wie äußert sich diese beim Lösen von Gleichungen? Dies wird durch die Betrachtung einer Beispielaufgabe deutlich: ‚Gegeben sind die Summe und die Differenz zweier Zahlen. Zeigen Sie, dass Sie stets die zwei Zahlen finden können.' In der rhetorischen Phase würde die Aufgabe in vollständigen Sätzen, rein verbal gelöst werden. Eine Überlieferung der Lösung dieser Aufgabe aus der rhetorischen Phase ist nicht vorhanden. In der synkopierten Phase wurde ein Symbol für die kleinere der gegebenen Größen eingesetzt und dann die zweite Zahl mit Hilfe des Repräsentanten für die erste Zahl und der Differenz angegeben. Für die Summe und die Differenz wurden exemplarisch ganze Zahlen eingesetzt. Die Lösung wurde dann für dieses exemplarische Beispiel ausgerechnet. In der symbolischen Phase hingegen werden auch die Summe und die Differenz durch Symbole repräsentiert und mit deren Hilfe eine allgemeine Lösung angegeben.

In dieser Einteilung der historischen Entwicklung der Algebra werden zwei Entwicklungssprünge sichtbar, und zwar jeweils beim Übergang von einer Phase in die nächste. Dies legt nahe, dass bei diesen Übergangen epistemologische Hindernisse überwunden wurden und somit die epistemologischen Hindernisse in der Verschiedenartigkeit der Variablen begründet liegen.

Eine Studie zur Anwendung und Umgang mit Variablen bei SuS führte Eon Harper mit 144 SuS, jeweils 12 SuS aus den Klassen 5 bis 11 zweier Gymnasien, durch (Harper, 1987). Er untersuchte die Lösungen der SuS zu der oben genannten Aufgabe und teilte diese zunächst in drei Kategorien ein: Erstens, Antworten welche eine Lösung für beliebige Zahlen angeben, zweitens durch Trial und Error gefundene Antworten, meist ausschließlich ganzzahlige Lösungen und unter drittens alle unvollständigen oder falschen Lösungen. Die Lösungen aus der ersten Kategorie untersuchte er im Anschluss auf die Verwendung von Variablen und identifizierte drei verschiedene Typen und zwar rein sprachliche Lösungen, Lösungen mit der Verwendung einer Variable für die gesuchte Größe und vollständig symbolisierte Lösungen. Diese Studie legt eine Parallele zwischen dem individuellen Lernen und dem Verständnis des Konzepts der Variable auf der einen Seite und der historischen Entwicklung der Algebra auf der anderen Seite nahe und stützt damit die eingangs aufgestellte Annahme.

4. Konzeptuelle Stufen der Algebra

Eine weitere Parallele zwischen der Entwicklung und dem Erlernen von Algebra liegt in der Auffassung der Algebra begründet. Die historische Entwicklung kann in vier konzeptuelle Stufen unterteilt werden (Katz, 2007). Zu Beginn waren die algebraischen Konzepte geometrisch fundiert, zum Beispiel basierte bei den antiken Griechen Algebra auf geometrische Manipulationen. Diese Stufe wird ‚geometrical stage' genannt. Sie wurde von der ‚static equation-solving stage' abgelöst, in welcher das Finden von Zahlen unter Betrachtung bestimmter Bedingungen im Vordergrund stand. In der dritten Stufe, der ‚dynamic function stage', ist das Betrachten von Bewegung die zugrundeliegende Idee. Das Ziel war zum Beispiel die Beschreibung der Planetenlaufbahnen oder gegebener Kurven. Die letzte Stufe ist die ‚abstract stage', welche die moderne Algebra nach Hilbert beschreibt. Die konzeptuellen Stufen sind nicht disjunkt mit den drei symbolbasierten Abschnitten, vielmehr kann in einer konzeptuellen Stufe alle drei Darstellungsphasen durchlaufen werden.

Implizit wird in jeder dieser konzeptuellen Stufen eine Rechtfertigung der Algebra angegeben. In den ersten drei Stufen ist die Rechtfertigung empirisch, was durch die Art der Probleme deutlich wird, welche behandelt wurden. Die historische Motivation der Algebra war gekennzeichnet durch das Bedürfnis gegebene Probleme zu lösen. Diese Probleme waren geometrischer Natur, wie zum Beispiel Probleme der Landvermessung oder auch der Beschreibung von gegebenen Kurven. Auch in der zweiten Stufe war die implizite Rechtfertigung empirisch, selbst wenn eine Gleichung losgelöst von einem konkreten Problem betrachtet wurde. Zum Beispiel wurden die Lösungen bei Problemen geometrisch interpretiert oder wie bei den Arabern keine negativen Lösungen zugelassen. Nur die ‚abstract stage' ist unabhängig von geometrischer oder naturwissenschaftlicher Rechtfertigung. Die historisch, empirische Auffassung der Algebra wird auch in Eulers Definition der Algebra deutlich. Dort definiert er Algebra als „die Wissenschaft (...), die zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet" (Euler, 1770, S. 245).

Betrachtet man Schulbücher und analysiert wie Algebra dort eingeführt und gelehrt wird, zeigt sich deutlich, dass die dort behandelten Objekte oft aus der Empirie stammen. Im Schulbuch der Klasse 8 vom Lambacher Schweizer werden Operationen mit Unbekannten eingeführt. Der Einstieg in das Thema erfolgt durch Probleme der Flächenberechnung. Die Variablen stehen hier für die Längen von Seiten. Hiernach wird erst eine allgemeine Regel angegeben und auf ein Beispiel angewendet. Ebenso wird auch an die Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung herangegangen. Die allgemeine Lösung wird durch Beispielaufgaben aus der Flächenberechnung motiviert. Die SuS werden hier zunächst aufgefordert eine Gleichung für die Länge x aufzustellen und diese dann zeichnerisch zu lösen. Diese Beispiele aus Schulbüchern zeigen deutlich, dass die Objekte mit denen die Schüler arbeiten, an Hand derer die Algebra gelehrt und gelernt wird empirischer Natur sind.

Dies legt die Vermutung nahe, dass Algebra in der Schule empirisch gerechtfertigt und auf die Realität bezogen wird. Für die Schüler sind die Objekte der Algebra empirisch. Algebra wird also nicht als eine Theorie über abstrakte Gegenstände vermittelt und erlernt, sondern wie in der historischen Entwicklung der Mathematik anhand von realen Gegenständen.

Literatur

Boyer, Carl B. (1968): A history of mathematics, John Wileys & Sons.

Euler, Leonhard (1770): Vollständige Anleitung zur Algebra, Stuttgart.

Harper, Eon (1987): Ghost of diophantus, In: Educational Studies in Mathematics 18, 75 – 90.

Herscovics, Nikolas & Linchevski, Liora (1994): A cognitive gap between arithmetic and algebra, In: Educational Studies in Mathematics 27, 59 – 78.

Katz, Victor J. (2007): Stages in the history of algebra with implications for teaching, In: Educational Studies in Mathematics 66, 185 – 201.

Sierpinska, Anna (1992): On understanding the notion of function, In Dubinsky, E. and Harel, G.: The concept of function, Elements of Pedagogy and Epistemology.

Martin REINOLD, Dortmund, Sabrina HUNKE, Dortmund, Christoph SELTER, Dortmund

Die KIRA-DVD – Einsatzmöglichkeiten in der Lehreraus- und -fortbildung

Bei dem Projekt KIRA („Kinder rechnen anders") handelt es sich um ein gemeinsames Projekt der TU Dortmund und der Deutsche Telekom Stiftung zur Weiterentwicklung der Grundschullehrerausbildung. Mit Ende der Förderung durch die Deutsche Telekom Stiftung wurde im Dezember 2011 zur Verstetigung des Projekts eine DVD herausgebracht, die Materialien zum Einsatz in mathematikdidaktischen Lehrveranstaltungen enthält.

1. Ausgangspunkt

Ausgangspunkt des Projekts ist die Notwendigkeit, die diagnostischen Fähigkeiten angehender (Mathematik-)Lehrkräfte zu fördern, da diese Fähigkeiten eine wichtige Voraussetzung für eine individuelle Förderung und konstruktive Unterstützung der Schülerinnen und Schüler darstellen (vgl. Brunner et al. 2011; Deutsches PISA-Konsortium 2001; KMK 2002; Selter, Götze, Höveler, Hunke & Laferi 2011). Ebenso wird die Verbindung von Erwerbs- und Anwendungssituationen in der Lehrerausbildung als notwendig erachtet, um den angehenden Lehrpersonen wissensbasiertes Handeln zu eröffnen und um der Erarbeitung von Theorien größere Verbindlichkeit und Relevanz zu verleihen (vgl. Heinzel & Garlichs 2007; Terhart 2009).

Vor diesem Hintergrund hat das KIRA-Team in Grundschulen und Kindergärten mit Schülerdokumenten und Videos dokumentiert, wie Kinder mathematisch denken, mit dem Ziel die mathematikdidaktische Ausbildung angehender Lehrkräfte praxisnäher und diagnostisch orientiert zu gestalten.

Zu Beginn des Projekts wurden die Materialien zunächst schwerpunktmäßig für den Einsatz in Lehrveranstaltungen an der TU Dortmund aufbereitet. Dort dienen sie den Studierenden zur Orientierung bei der Durchführung eigener Experimente, zur Analyse kindlicher Lösungswege im Rahmen von Lehrveranstaltungen und zur Illustration zentraler didaktischer Themen. Dadurch wurden die Lehrveranstaltungen zunehmend praxisorientierter, wodurch die Studierenden die Relevanz des vermittelten Wissens für ihren späteren Beruf besser erkennen konnten und auch bessere Lernerfolge erzielten.

2. Die KIRA-Materialien

Im Laufe der Projektlaufzeit (Jan. 2008 – Dez. 2011) ist schließlich die KIRA-Website (www.kira.tu-dortmund.de) zum Kernstück des Projekts geworden, die das Material auch anderen lehreraus- und -fortbildenden Institutionen zugänglich macht. Damit das Material in der Lehreraus- und Lehrerfortbildung auch internetunabhängig eingesetzt werden kann, wurde die KIRA-DVD produziert, auf der eine Offlineversion der Website zu finden ist.

Den Schwerpunkt der Website bzw. DVD bildet der Bereich *Material*. Dieser gliedert sich in die sechs Teilgebiete „Mathe – mehr als Ausrechnen", „Lernen, wie Kinder denken", „Unterricht – offen und zielorientiert", „Geometrie und Sachrechnen", „Arithmetik bis zum 2. Schuljahr" und „Arithmetik im 3. und 4. Schuljahr". Zu jedem dieser Teilgebiete gibt es wiederum mehrere Themenseiten, auf denen neben theoretischen Hintergrundinformationen und Literaturempfehlungen die speziell für das Projekt erstellten Schülerdokumente und Videos zur Verfügung stehen.

So gibt es im Teilgebiet „Mathe – mehr als Ausrechnen" z.B. die Themenseiten ‚Schöne Päckchen', ‚Zahlengitter' und ‚Tangram'. Der Fokus liegt dabei auf den prozessbezogenen Kompetenzen. Videos und Schülerdokumente zeigen dabei insbesondere auf, wie die Kinder im Kontext solcher substanzieller Lernumgebungen Auffälligkeiten und Zusammenhänge beschreiben und begründen. Die Themenseiten des Teilgebiets „Lernen, wie Kinder denken" enthalten hingegen vor allem Materialien, die den Studierenden gezielt dabei helfen, selbständig diagnostische Gespräche vorzubereiten, durchzuführen und auszuwerten (vgl. auch Götze & Höveler 2010).

3. KIRA – mehr als Denkwege von Kindern

Doch die KIRA-Materialien gehen auch über die Auseinandersetzung mit den Denkwegen von Kindern und deren Erhebung hinaus. In diesem Zusammenhang sei vor allem das Teilgebiet „Unterricht – offen und zielorientiert" erwähnt, zu dem u.a. die Themenseiten ‚Entdeckendes Lernen', ‚Operatives Prinzip' und ‚Natürliche Differenzierung' gehören. So vermitteln diese Seiten vielmehr grundsätzliche Informationen zum Spannungsfeld von Offenheit und Zielorientierung, das konstitutiv ist für guten Mathematikunterricht.

Auf der Seite ‚Entdeckendes Lernen' beispielsweise wird anhand verschiedener Videobeispiele der Unterschied verschiedener Grundhaltungen zum Lernen illustriert. So versucht der Lehrer in einem der Videos durch fragend-entwickelnden Unterricht die Kinder Schritt für Schritt zur Lösung zu bringen. In den anderen Videos arbeitet die Lerngruppe nach der Erklärung des Problems eigenständig; die Kinder strukturieren und lösen das Problem selbst. Diese Videos können also gut eingesetzt werden, um mit Studierenden, Lehramtsanwärtern oder auch (fachfremden) Lehrkräften in der Fortbildung verschiedene Aspekte dieser Grundpositionen zu reflektieren. Auf der Internetseite finden sich dazu auch entsprechende Fragestellungen, die in der eigenen Lehre oder im Heimstudium aufgegriffen werden können.

Die Seiten, die mathematikdidaktische Prinzipien wie das ‚Operative Prinzip' und ‚Natürliche Differenzierung' thematisieren, sollen mithilfe der vielfältigen Beispiele aus der Praxis dazu beitragen, dass die Studierenden zu diesen häufig zunächst abstrakt wirkenden Prinzipien ein umfassendes Verständnis aufbauen können. So wird beispielsweise das ‚Operative Prinzip' auf der entsprechenden KIRA-Seite durch (Video-)Beispiele zu ganz verschiedenen mathematischen Inhalten veranschaulicht, um Schwierigkeiten auf Seiten der Studierenden vorzubeugen. Denn in Lehrveranstaltungen hat sich gezeigt, dass die Studierenden das operative Prinzip oftmals nicht auf andere Inhalte übertragen können.

Schließlich gibt es neben dem Bereich *Material* mit seinem Schwerpunkt auf der Lehreraus- und Lehrerfortbildung auch den Bereich *Beispiele*. Dort findet man einige öffentlich zugängliche Videos wie bspw. den KIRA-Film oder das KIRA-Quiz, ebenso wie ausgewählte Poster, die u.a. genutzt werden können, um z.B. im Kollegium oder auf Elternabenden über zeitgemäßen Mathematikunterricht zu informieren.

4. Einsatzmöglichkeiten der KIRA-DVD

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die KIRA-DVD bzw. die Website vielseitig einsetzbar ist, z.B.

- zur Vorbereitung auf und Gestaltung von Vorlesungen, Übungen, Seminarsitzungen und Fortbildungen
- zum Selbststudium im Rahmen von Bachelor- und Masterarbeiten (Wie führt man Interviews? Wie betreibt man Diagnose?),
- als wertvoller Literaturpool, denn es wird wesentliche Literatur zu den verschiedenen Themen empfohlen, teilweise auch verlinkt,
- als Informationspool für Studierende zur Prüfungsvorbereitung,

- zur Vorbereitung erster eigener Unterrichtsexperimente. Hier sensibilisiert KIRA die Studierenden im Hinblick darauf, welche Strategien, Schwierigkeiten sowie typische Fehlermuster zu erwarten sind,
- zur Auffrischung des eigenen mathematikdidaktischen Wissens
- als Möglichkeit die interessierte Öffentlichkeit (z.B. Eltern) über zeitgemäßen Mathematikunterricht zu informieren.

Auch wenn die offizielle Projektlaufzeit beendet ist, so wird die KIRA-Website weiterhin gepflegt und insbesondere durch die Einbindung von Master- und Bachelorarbeiten auch zukünftig ergänzt werden.

Die 2000 produzierten DVDs sind nur wenige Wochen nach Erscheinen nahezu „ausverkauft“. Auf Anfrage wird lehreraus- und -fortbildenden Institutionen gern ein Passwort zum Abruf des Video-Materials auf der Website zur Verfügung gestellt. Somit wird eine Nutzung der Materialien über die TU Dortmund und die Projektlaufzeit hinaus ermöglicht.

Literatur

Brunner, M.; Anders, Y.; Hachfeld, A. & Krauss S. (2011): Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In: M. Kunter & al. (Hrsg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COAKTIV. Münster: Waxmann, 215-234.

Deutsches PISA-Konsortium (2001): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

Götze, D. & Höveler, K. (2010): Diagnostische Gespräche planen, durchführen, auswerten. In: K. Reiss (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM-Verlag, 345-348.

Heinzel, F. & Garlichs, A. (2007): Lehrerausbildung und Schulpädagogik vor neuen Aufgaben. In: A. Garlichs & al (Hrsg.) (2007): Lernbegleitung und Patenschaften. Reflexive Fallarbeit in der universitären Lehrerausbildung. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 11-21.

Kultusministerkonferenz (2002): PISA 2000 – Zentrale Handlungsfelder. Zusammenfassende Darstellung der laufenden und geplanten Maßnahmen in den Ländern (Stand: 07.10.2002) Beschluss der 299. Kultusministerkonferenz vom 17./18. 10. 2002.

Selter, Ch.; Götze, D.; Höveler, K.; Hunke, S. & Laferi, M. (2011): Mathematikdidaktische diagnostische Kompetenzen erwerben - Konzeptionelles und Beispiele aus dem KIRA-Projekt. In K. Eilerts & al (Hrsg.): Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens. Berlin: Lit Verlag, 307-321.

Terhart, E (2009): Erste Phase: Lehrerbildung an der Universität. In: O. Zlatkin-Troitschanskaia (Hrsg.): Lehrprofessionalität. Bedingungen, Genese, Wirkung und ihre Messung. Weinheim: Beltz, 425-438.

Verena REMBOWSKI, Saarbrücken

Begriffsbildung – hinter der Mauer?

0. Verortung in der Mathematikdidaktik

„Begriffsbildung – hinter der Mauer?“ ist Bestandteil meines theorieorientierten Dissertationsprojektes zur Begriffsbildung, welches durch die Nähe des Themas zu Bezugswissenschaften (Philosophie, Psychologie, Semiotik und Mathematik) gekennzeichnet ist, und sich näher bestimmt durch Begriffsbildung vor dem Hintergrund von Anschauung und Strenge. Da Begriffsbildung im Unterrichtsgeschehen stark durch den gesellschaftlichen Kontext, in welchem der Unterricht und die didaktische Theoriebildung stattfinden, beeinflusst ist, ist Begriffsbildung in der Mathematikmethodik der DDR ein fruchtbares Untersuchungsobjekt. Im Folgenden wird dabei zunächst eine Begriffsbestimmung von „Mathematikmethodik“ vorgenommen, bevor Begriffsbildung, wie sie sich in psychologischen Werken der DDR widerspiegelt, dargelegt wird, und auf Begriffslernen, wie es von der Mathematikmethodik der DDR gelehrt wurde, eingegangen wird.

1. „Methodik der Mathematik“

In der DDR wurde mit Bezug auf die heute Fachdidaktiken genannten Wissenschaften von Methodiken gesprochen (vgl. Walsch, 2002). Der Gegenstand der Mathematikmethodik war das Lehren und Lernen von Mathematik vor allem im institutionalisierten Kontext. Die Hauptaspekte der Methodik waren daher die Ziele von Mathematikunterricht, die Inhaltsauswahl und Strukturierung des Inhalts für den Mathematikunterricht, als auch der Unterrichtsprozess, woraus sich unmittelbar Vernetzungen der Mathematikmethodik zu Gesellschafts- und Erkenntnistheorie, Psychologie, (allgemeiner) Didaktik und Mathematik ergaben. Ein großes Gewicht unter den Aufgaben der Mathematikmethodiker hatten die Ausbildung zukünftiger und die Weiterbildung aktiver Lehrkräfte, sowie die Mitwirkung an Entwicklungsarbeiten zum Mathematikunterricht. Dies schließt die Konzeption von Lehrplänen, methodischer Literatur und Unterrichtsmitteln verschiedenster Art ein, wobei mit den genannten Publikationen ein möglichst genaues, möglicherweise aber auch als einseitig anzusehendes Bild von Mathematikunterricht weitergegeben wurde.

2. „Begriffsbildung“ in der Psychologie

In Werken der Mathematikmethodik der DDR finden sich mit Bezug zur Begriffsbildung viele Verweise auf die Psychologie, wo die Thematik durch Psychologen explizit theoretisch fundiert wurde (vgl. z.B. Dawydow, 1977 & 1982; Galperin, 1980; Lompscher, 1982 & 1989; Rubinstein, 1973; Wygotsky, 1964). Dabei wurde zwischen *empirischen Begriffen* und *(wis-*

senschaftlich-)theoretischen Begriffen unterschieden. Empirische Begriffe spiegeln lediglich das Äußere von Erscheinungen wider, wohingegen theoretische Begriffe den Übergang zwischen den Erscheinungen und dem Wesen erfassen. Theoretische Begriffe beruhen auf wissenschaftlichen Erkenntnissen und bilden idealisierte Objekte ab. Widersprüche zwischen empirischen und theoretischen Begriffen sind vor allem dann leicht möglich, wenn ein Bezeichner im Alltag eine andere Bedeutung hat, als in der Wissenschaft (zur Terminologie: Lambert, 2003).

Empirische Begriffsbildung vollzieht sich in der Verallgemeinerung und Gliederung eigener Erfahrungen und ist durch eine unmittelbare Orientierung auf das Erreichen von Klassifikationen geprägt, weshalb die erforderlichen Methoden eher spontan angewendet werden. Bei *theoretischer Begriffsbildung* hingegen muss das Verhältnis von Objekten in einem strukturierten System erfasst werden, weswegen theoretische Begriffsbildung durch einen hohen Stellenwert und Bewusstseinsgrad allgemeiner Methoden des Denkgeschehens, als auch eine enge wechselseitige Verbindung von Methode und Resultat gekennzeichnet ist. Die am häufigsten propagierte Methode der theoretischen Begriffsbildung ist die des „Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten", wonach sich Begriffsbildung in zwei dialektischen Schritten vollzieht. Im ersten Schritt wird durch Analyse und Verallgemeinerung einer sinnlich-konkreten Repräsentation in Form von erfahrenen Erscheinungen eine Abstraktion erzeugt, die das Wesen des zu untersuchenden Gegenstandes fixiert und als Begriff zum Ausdruck bringt, wobei innere Beziehungen zwischen den einzelnen Erscheinungsformen des Gegenstandes aufgedeckt werden. Im zweiten Schritt erfolgt durch Aufdecken der Widersprüche des gebildeten Begriffs und durch Bestimmung von Verfahren zu deren praktischer Auflösung der Übergang zu einer geistig-konkreten Repräsentation als Einheit der verschiedenen Seiten des Ganzen. Im zweiten Schritt wird also vom Wesen eines Begriffs wieder zu dessen Erscheinungen zurückgegangen, wodurch sich erst erklärt, weshalb der Begriff in seinen konkreten Erscheinungsformen manifestiert ist, und weswegen er sich in idealisierter Form möglicherweise von diesen Erscheinungen unterscheidet.

Die Psychologie propagierte schließlich auch für den Schulunterricht ein Begriffslernen im Sinne des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten, das sich durch eine Wechselbeziehung induktiver und deduktiver Phasen auszeichnen sollte. Dabei sollten zur Vereinfachung der Begriffsaneignung möglichst umfangreiche Ausgangsabstraktionen und begriffliche Makrostrukturen bereitgestellt werden. Weiterhin wurde der Einsatz von Problemaufgaben, die Anregung aktiver Handlungen auf verschiedenen Ebenen der Erkenntnistätigkeit als auch, beeinflusst durch die reformpädagogische Tradition, die Verwendung von (be-)greifbaren Modellen als Gegenstand und Mittel der Lerntätigkeit für den Prozess des Begriffslernens befürwortet, der sich zudem durch Methodenvielfalt, besonders den Einsatz kooperativer Lernformen, auszeichnen sollte.

3. „Begriffslernen“ in der Mathematikmethodik

In der Mathematikmethodik unterscheidet man verschiedene Entwicklungsphasen, wobei hier auf die „mengentheoretische Fundierung“ des Mathematikunterrichts der 1960er und 1970er Jahre eingegangen werden soll (vgl. Schulz, 2002; Walsch & Weber, 1977). Die mengentheoretische Fundierung des Mathematikunterrichts der DDR unterschied sich essenziell von New Math und bedeutet, dass, ohne einen prägenden bourbakischen Überbau, explizit Mengen aus beliebigen, vor allem mathematischen, Objekten gebildet werden. Weiterhin wird das Bezeichnete als wichtiger als der Bezeichner angesehen, wobei die Beschränkung auf das, was zur eindeutigen Kennzeichnung eines Begriffs als notwendig erachtet wird, durch die mengentheoretische Definition geleistet wird. Zudem impliziert die mengentheoretische Fundierung des Mathematikunterrichts einen „genetischen Aufbau“, wonach eine Fülle definitorisch eingeführter Begriffe aus immer wiederkehrenden einfachsten Bestandteilen konstruiert werden können. So soll das Denken in großen Zusammenhängen geschult werden und es soll den Lernenden erleichtert werden, Forderungen nach der Reproduzierbarkeit von Begriffsbildungen zu erfüllen. Die mengentheoretische Fundierung des Mathematikunterrichts gewann ihren Wert dadurch, dass die eindeutige Formulierung von Begriffen, exakten Definitionen und Aussagen sowie die Präzision sprachlichen Ausdrucks als Grundlage für das Verständnis mathematischer Zusammenhänge, als Voraussetzung zur Fähigkeit der Anwendung des Gelernten, als Schwerpunkt der sprachlich-logischen Schulung sowie als eine Basis zur Vermittlung weltanschaulich-theoretischer Einsichten und auch bestimmter persönlicher Charaktereigenschaften angesehen wurde.

In der Mathematikmethodik ist ebenfalls Begriffslernen, wie von der Psychologie propagiert, im Sinne eines Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten prävalent, wird im Lehrplan, sowie in einer Übersicht zur Begriffseinführung in der Zeitschrift ‚Mathematik in der Schule‘ explizit aufgegriffen, und findet sich implizit mit Bezug auf die Einführung verschiedener Begriffe in der einzigen Schulbuchreihe. Darüber hinaus werden die Wege des Begriffslernens „vom Besonderen zum Allgemeinen“ und „vom Allgemeinen zum Besonderen“ unterschieden. Ein Begriff wird also ausgehend von Beispielen, Beschreibungen, Erläuterungen und Anwendungen beziehungsweise seiner Definition als Ausgangspunkt unterrichtlich entwickelt, wobei sich in beiden Fällen induktive und deduktive Phasen des Begriffslernens gegenseitig beeinflussen. Der jeweils gewählte Weg sollte schließlich sowohl von dem Begriff als auch von dem Entwicklungsstand der Lernenden abhängig sein.

4. Möglichkeiten und Grenzen jenes Begriffs von Begriffsbildung

Der (wissenschaftlich-)theoretische Begriff von Begriffsbildung, wie er in der Mathematikmethodik der DDR entwickelt wurde, bietet schließlich die Möglichkeiten, induktives und deduktives Vorgehen konstitutiv zu verbinden und ein umfassendes Begriffsnetz aufzubauen. Andererseits erlaubt dieser Begriff von Begriffsbildung kaum Beschäftigung mit den mental repräsentierten Begriffen der Lernenden oder möglicherweise auftretenden kognitiven Konflikten. Weiterhin wurden Definitionen und Festlegungen sehr genau vorgegeben, individuelle Lehr- und Lernprozesse und durch diese induzierte Sinnkonstruktionen kaum anerkannt. Auch die frühe Verwendung von vorbestimmten Bezeichnern birgt die Gefahr, dass diese für die Lernenden sinnarm bleiben. Somit bleibt es Aufgabe der Mathematikdidaktik heutzutage, unter Beachtung der Möglichkeiten und Grenzen des Begriffs der Begriffsbildung der Mathematikmethodik die wertvollen Arbeiten der damaligen Zeit in die Theoriebildung heute einfließen zu lassen.

5. Literatur

Dawydow, W. W. (1977): Arten der Verallgemeinerung im Unterricht. Berlin, Volk und Wissen (VuW).

Dawydow, W. W. (1982): Inhalt und Struktur der Lerntätigkeit. In W. W. Dawydow & al. (Hrsg.): Ausbildung der Lerntätigkeit bei Schülern. Berlin, VuW, 14-27.

Galperin, P. J. (1980): Zu Grundfragen der Psychologie. Köln: Pahl-Rugenstein Verlag.

H. Henning & al. (Hrsg., 2002): Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern – Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR. http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning/tagung.pdf238-245.

Lambert, A. (2003): Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In P. Bender & al. (Hrsg.) Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des AK MU&I in der GDM. Hildesheim, Franzbecker.

Lompscher, J. (1982): Analyse und Gestaltung von Lernanforderungen. In W. W. Dawydow & al. (Hrsg.): Ausbildung der Lerntätigkeit bei Schülern. Berlin, VuW, 36-50.

Lompscher, J. (1989): Die Lehrstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten. In J. Lompscher & al. (Hrsg.): Psychologische Analysen der Lerntätigkeit. Berlin, VuW, 51-90.

Rubinstein, S. L. (1973): Grundlagen der allgemeinen Psychologie. Berlin, VuW.

Schulz, W. (2002): Entwicklungsphasen in der DDR-Zeit. In (H. Henning & al., 2002), 238-245.

Walsch, W. & Karlheinz, W. (1977): Methodik Mathematikunterricht. Berlin, VuW.

Walsch, W. (2002): Methodik des Mathematikunterrichts als Lehr- und Wissenschaftsdisziplin. In (H. Henning & al., 2002), 141-148.

Wygotsky, L. S. (1964): Denken und Sprechen. Berlin, Akademie-Verlag.

Sebastian REZAT, Gießen

Von der Propädeutik zum algebraischen Denken: Überlegungen zur Zahlbegriffsentwicklung der negativen Zahlen von der Primar- zur Sekundarstufe

Einleitung

Das Verhältnis zwischen Zahlen und Algebra wird in der einschlägigen Literatur sowohl aus einer algebraischen als auch aus einer arithmetisch-propädeutischen Perspektive gekennzeichnet: Die algebraische Perspektive artikuliert VOLLRATH in seinem Standardwerk zur Algebra in der Sekundarstufe: „Der Algebraunterricht kann wesentliche Beiträge zum Verständnis der Zahlen leisten, wenn in ihm die Regeln des Rechnens und die Zusammenhänge zwischen diesen Regeln deutlich gemacht werden.“ (Vollrath, 2003, S. 22). Im Gegensatz dazu bringt die arithmetisch-propädeutische Perspektive zum Ausdruck, dass ein tiefes Verständnis der Zahlen und ihrer Strukturen zu einem besseren Verständnis der Algebra beitragen kann. In diesem Sinne fordern BERLIN et al. (2009), „dass algebraisches Denken frühzeitig im Zusammenhang mit arithmetischen Aktivitäten entwickelt werden sollte“ (S. 273) und „man die inhaltliche Bindung erst lösen [sollte], wenn sie vorher bestanden hat und kräftig gewesen ist“ (S. 291).

Die Themenstränge ‚Zahlen‘ und ‚Algebra‘ stehen in Schulbüchern und in der didaktischen Literatur in der Regel nebeneinander in gewisser Isolation. Die engen Verflechtungen beider Themenstränge werden zwar betont (vgl. z. B. Vollrath, 2003, S. 5-6), aber Vorschläge zu einer integrierten Behandlung von Zahlbereichserweiterungen und Algebra sind rar.

Die Befunde zum algebraischen Denken von Kindergarten- und Grundschulkindern (vgl. z. B. Kaput, Carraher, & Blanton, 2008) sprechen dafür, die Behandlung von Zahlen und Algebra von der Primarstufe bis hin zur Sekundarstufe zu überdenken. Dies soll im vorliegenden Beitrag am Beispiel der negativen Zahlen konkretisiert werden. Zunächst wird kurz umrissen, was unter einer Propädeutik der Algebra verstanden wird und auf zentrale Ergebnisse verwiesen. Aus diesen Überlegungen werden Folgerungen gezogen, die schließlich anhand der negativen Zahlen konkretisiert werden.

Propädeutik der Algebra

Der Übergang von der Arithmetik zur Algebra wird in der einschlägigen Literatur als „algebra problem“ (Kaput, 2008) bezeichnet und als „cognitive gap“ (Linchevski & Herscovics, 1996) charakterisiert. Das Ziel der Propädeutik der Algebra ist es, diesen Sprung zu verkleinern bzw. besser vorzubereiten. Im Vordergrund steht dabei die Einführung in algebraisches Denken: "The fundamental purpose of early algebra should be to provide students with a set of experiences that enables them to see mathematics—sometimes called the science of patterns—as something they can make sense of, and to provide them with the habits of mind that will support the use of the specific mathematical tools they will encounter when they study algebra" (Schoenfeld, 2008, S. 506). Algebraisches Denken wird dabei häufig mit 'Generalisieren' gleichgesetzt und meint auf einer ersten Stufe insbesondere "die Fähigkeit, in arithmetischen Zusammenhängen Strukturen und Formen zu erkennen [und] diese begrifflich […] zu beschreiben" (Berlin, et al., 2009, S. 273).

In der einschlägigen Literatur finden sich Belege dafür, dass die Propädeutik der Algebra ein erfolgsversprechender Ansatz ist. Da Variable das zentrale Mittel der algebraischen Sprache zum Generalisieren sind, liegt ein Schwerpunkt der Untersuchungen auf Studien zum Variablenbegriff. Diese zeigen, dass Grundschulkinder in der Lage sind, Variablen als Mittel zum Generalisieren zu verwenden und dabei intuitiv verschiedene Variablenaspekte zu erfassen (vgl. z. B. Fischer, 2009; Specht, 2009).

Folgerungen

1. Die Befunde zum algebraischen Denken von Kindergarten- und Grundschulkindern deuten darauf hin, dass mathematische Begriffe sowie Denk- und Arbeitsweisen, die bislang der Sekundarstufe vorbehalten waren, wie z. B. die negativen Zahlen, bereits in der Primarstufe auf intuitivem Niveau im Sinne einer Propädeutik thematisiert werden können, um epistemologische Sprünge besser vorzubereiten bzw. zu glätten.
2. Darüber hinaus ist es kennzeichnend für Ansätze zur Propädeutik der Algebra, dass diese sich bislang auf das Erkennen von Mustern und Strukturen in den natürlichen Zahlen beschränken. Im Sinne einer engeren Verschränkung der Themenstränge ‚Zahlen' und ‚Algebra' in der Sekundarstufe I erscheint es sinnvoll, algebraisches Denken auch im Rahmen der Zahlbereichserweiterungen in anderen Zahlbereichen, wie z. B. den negativen Zahlen, zu fördern.

Konkretisierung am Beispiel der negativen Zahlen

Die Auseinandersetzung mit negativen Zahlen ist bislang insbesondere durch historische Betrachtungen, epistemologische Überlegungen und die Darstellung und Analyse von didaktischen Modellen gekennzeichnet. Empirische Befunde zum Lernen und zum Verständnis negativer Zahlen sind rar. Vielmehr ist gerade die Didaktik der negativen Zahlen von der Annahme geprägt, dass „geistige Hürden, die sich dem Verständnis eines mathematischen Gegenstandes im Laufe seiner geschichtlichen Entwicklung entgegengestellt haben, auch die Lernprozesse unserer heutigen Schüler/innen blockieren können“ (Hefendehl-Hebecker, 1989, S. 7). Dies ist jedoch zunächst eine Hypothese, die einerseits empirisch zu belegen wäre und andererseits angesichts veränderter soziokultureller Bedingungen hinterfragt werden kann.

JAHNKE und STEINBRING problematisieren die übliche Thematisierung negativer Zahlen in Sachkontexten. JAHNKE (2003, S. 21) sieht „die mit den negativen Zahlen verfolgte Intention […] klar im algebraischen Kalkül. Die Interpretation erfolgt durch Sachsituationen, die diesen Kalkül nicht benötigen“. STEINBRING (1994, S. 278) verweist auf epistemologische Sprünge zwischen dem mathematischen Kalkül und den Sachsituationen: „Letztlich bedarf der Begriff der negativen Zahlen samt zugehöriger mathematischer Operationen ähnlich formaler, autonomer Regeln wie die Algebra. Es gibt ein System in sich stimmiger Operationsregeln, das den Kalkül der negativen Zahlen formal beschreibt. Dieses System ‚negative Zahlen‘ wird nicht aus der Realität deduziert, noch ist es unmittelbar auf reale Zusammenhänge beziehbar“. Beide Aussagen verweisen einerseits darauf, dass eine ergänzende Thematisierung der negativen Zahlen im Sinne einer Propädeutik der Algebra epistemologisch angemessener und ‚ehrlicher‘ wäre, als sie vornehmlich als Mittel um „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (Winter, 1995, S. 37) zu behandeln. Andererseits ist aufgrund der von STEINBRING angesprochenen Analogie zwischen dem algebraischen Kalkül und dem Kalkül der negativen Zahlen (das auf der Menge der ganzen Zahlen ja in der Tat dasselbe ist) anzunehmen, dass Lernende mit dem Kalkül ähnliche Probleme haben, wie mit dem algebraischen Kalkül. In diesem Sinne ist eine Propädeutik der negativen Zahlen in der Primarstufe analog zur Propädeutik der Algebra anzudenken. Dafür sprechen einerseits die veränderten soziokulturellen Bedingungen: Lernende erfahren heute negativen Zahlen als selbstverständliche Objekte der Lebenswelt. Andererseits verweisen Erfahrungsberichte auf eine erfolgsversprechende Propädeutik negativer Zahlen in der Primarstufe (vgl. z. B.: Borges, 1995; Hativa & Cohen, 1995). Anstelle der Einführung der negativen Zahlen in der Sekundarstufe I ließe sich hier stärker die Erkundung der Strukturen des Kalküls der negativen Zahlen im Sinne einer Propädeutik der Algebra in den Vordergrund rücken, das im Zusammenhang mit Permanenzreihen ja bereits eine Rolle spielt. Damit einher ginge auch eine engere Verschränkung der Themenstränge ‚Zahlen' und ‚Algebra' im Sinne der arithmetisch-propädeutischen Perspektive.

Literatur

Berlin, T., Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Melzig, D. (2009). Vom Rechnen zum Rechenschema - zum Aufbau einer algebraischen Perspektive im Arithmetikunterricht. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden (S. 270-291). Weinheim: Beltz.

Borges, R. (1995). Negative Zahlen in der Grundschule? Mathematische Unterrichtspraxis, 16(1), 21-30.

Fischer, A. (2009). Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen - Zahl- und Variablenauffassungen von Fünftklässlern. Journal für Mathematik-Didaktik, 30(1), 3-29.

Hativa, N., & Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. Educational Studies in Mathematics, 28(4), 401-431.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989). Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion - geistige Hinternisse in ihrer Geschichte. mathematik lehren(35), 6-12.

Jahnke, H. N. (2003). Numeri Absurdi Infra Nihil. Die negativen Zahlen. mathematik lehren(121), 21-22, 39-40.

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Hrsg.), Algebra in the Early Grades (S. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). Algebra in the Early Grades. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. Educational Studies in Mathematics, 30(1), 39-65.

Schoenfeld, A. H. (2008). Early Algebra as Mathematical Sense Making. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Hrsg.), Algebra in the Early Grades (S. 479-510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Specht, B. J. (2009). Variablenverständnis und Variablen verstehen. Empirische Untersuchungen zum Einfluss sprachlicher Formulierungen in der Primar- und Sekundarstufe. Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (1994). Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung - am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht. Journal für Mathematik-Didaktik, 15(3-4), 277-309.

Vollrath, H.-J. (2003). Algebra in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik(61), 37-46.

Vanessa RICHTER, Dortmund

„Passt auf, dass ihr bei der Multiplikation nicht den Startwert doppelt rechnet" – Vorstellungsentwicklungsprozesse funktionalen Denkens am Beispiel des Phänomens Linearität

Im vorliegenden Beitrag wird der Frage nachgegangen, inwiefern sich Vorstellungen von Lernenden zu linearen Funktionen im Lernprozess verändern und welche typischen Verläufe und Hürden sich in einer Entwicklung hin zu mathematisch tragfähigen Vorstellungen zeigen.

Linearität gilt als eine der zentralen Ideen der Sekundarstufe I und liefert eine Basis für weitergehende komplexere Konzepte (z.B. in der Analysis). Der Bedarf neuer Lehr-Lernarrangements sowie die Weiterentwicklung spezifischer Elemente der Theorie des funktionalen Denkens wird besonders deutlich, wenn man die inadäquate Verwendung proportionaler Rechenstrategien vieler Lernender fokussiert: vielfach lässt sich eine Übergeneralisierung der Anwendung auf jegliche Art von funktionalen Zusammenhängen beobachten (vgl. u.a. De Bock et al. 2002).

Das Forschungsinteresse wird im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung und konkret im Ansatz des Forschungs- und Nachwuchskollegs FUNKEN realisiert (vgl. Hinz, Hußmann, Prediger, Ralle & Thiele 2012). Zentral ist dabei die Gegenstandsorientierung (Hinterfragung und Rekonstruktion der fachlichen Inhalte und ihrer fachlichen Strukturierung), die Prozessorientierung (Beobachtung von Lernprozessen mit ihren Voraussetzungen, Verläufen und Hürden) sowie die Iterativität und Vernetzung (Ablauf von Forschung und Entwicklung geschieht zyklisch mit dem Bestreben einer konsequenten Verschränkung der Arbeitsbereiche; s. Abb. 1). Konkret soll dabei neben der in diesem Beitrag fokussierten Frage nach typischen Verläufen der Entwicklung und Hürden im Lernprozess auch beforscht werden, mit welchen Vorstellungen Lernende zu Beginn des Lehr-Lernarrangements arbeiten und inwiefern verschiedene Darstellungen und deren Wechsel zum Vorstellungsaufbau genutzt werden.

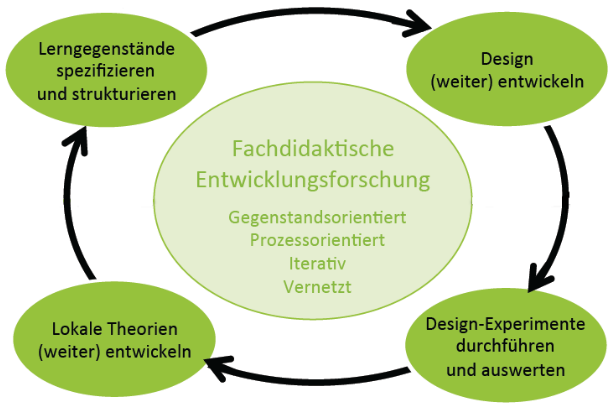


Abbildung 1: Modell fachdidaktischer Entwicklungsforschung im Forschungs- und Nachwuchskolleg FUNKEN

1. Spezifizierung und Strukturierung der Lerngegenstände

Mit dem Ziel die Entwicklung tragfähiger Vorstellungen im funktionalen Denken – „eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath 1989, S.6) – bzgl. linearer Funktionen zu unterstützen ist eine Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes nötig.

Zentrale Nahtstelle zwischen realen Situationen und der Mathematik sind die drei für das funktionale Denken wichtigen Grundvorstellungen der Zuordnung, Kovariation und der Funktion als Ganzes, sowie die Darstellungsformen (graphisch, tabellarisch, symbolisch, Text) in denen sie den Lernenden begegnen können. Nach Duval (2002) resultiert mathematisches Verständnis erst aus der Koordination von mindestens zwei dieser Repräsentationsformen. Die Grundvorstellungen werden in den Darstellungsformen unterschiedlich sichtbar, z.B. betont der Graph einer Funktion besonders den Verlauf und Aspekte wie Monotonie oder Linearität, in der tabellarischen Darstellung dagegen lässt sich die Kovariation schlecht bzw. nur mit größerem Rechenaufwand herausfiltern.

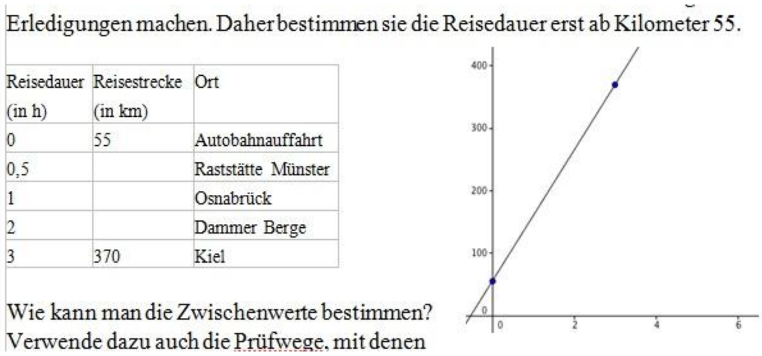
2. Entwicklung des Designs

In die Entwicklung des Designs sind Erkenntnisse über Lernstände, sowie empirische und theoretische Einsichten zu Lehr-Lernprozessen eingeflossen. Im Folgenden sei eine kurze Auswahl der berücksichtigten Aspekte dargestellt: (a) Lernende wenden unterschiedliche proportionale Rechenstrategien flexibel an; (b) gleichzeitig neigen viele Lernende aber zu einem unzulässigen Einsatz – „overuse“ – proportionaler Erklärungsmuster (vgl. Van Dooren & Greer 2010); (c) außerdem werden direkte Abhängigkeiten zwischen Elementen einer Darstellungsform gesehen, z.B. das Anwachsen bzw. Sinken der Gerade hängt mit dem Ort zusammen von dem sie kommt (vgl. Moschkovich 1990).

Das Forschungsinteresse wird im Projekt KOSIMA (vgl. Barzel, Hußmann, Leuders & Prediger 2011) realisiert. Im Lehr-Lernarrangement „Mit Funktionen Voraussagen machen und weitere Werte bestimmen“ (Jgst. 8) sollen die Lernenden eigenständig das Phänomen Linearität im Kontext der Routenplanung erkunden, schrittweise Erkenntnisse erzielen und diese Erkenntnisse kritisch prüfen und reflektieren. Erkenntnisleitende Kernfrage ist dabei, woher so ein Routenplaner eigentlich weiß, wann man sein Ziel erreicht.

Konkrete Prinzipien, die in die Design-Entwicklung eingeflossen sind, sind beispielsweise (vgl. Hußmann et al. 2012): (a) Gezieltes Anknüpfen an Vorwissen: proportionale Rechenstrategien werden direkt aufgegriffen. (b) Darstellungsangebot: Zur Erkundung des Phänomens Linearität werden

Tabelle (mit Lücken) und Graph (vollständige Gerade) parallel angeboten. Der Startwert (y-Achsenabschnitt) ist in beiden Darstellungen vorgegeben, der feste Faktor (Durchschnittsgeschwindigkeit pro Stunde) nur indirekt erkennbar und damit zu entdecken (s. Abb. 2).


Erledigungen machen. Daher bestimmen sie die Reisedauer erst ab Kilometer 55.

Reisedauer (in h)	Reisestrecke (in km)	Ort
0	55	Autobahnauffahrt
0,5		Raststätte Münster
1		Osnabrück
2		Dammer Berge
3	370	Kiel

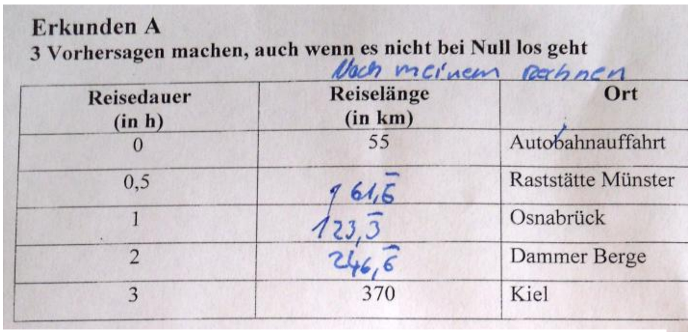
Wie kann man die Zwischenwerte bestimmen?
Verwende dazu auch die Prüfwege, mit denen

Abbildung 2: Auszug aus dem Lehr-Lernarrangement „Mit Funktionen Voraussagen machen und weitere Werte bestimmen

3. Durchführung und Auswertung der Design-Experimente

Die ersten Designexperimente wurden sowohl in Klassensituationen (Gymnasium in NRW, Klasse 7) als auch in Interviewsituationen mit je zwei Lernenden (Gymnasium in NRW, Klasse 8) durchgeführt.

Erste Ergebnisse bekräftigen bisherige empirische Studien teilweise, legen aber auch neue Aspekte offen: Die Loslösung von proportionalen Rechenstrategien stellt sich als problematisch dar: in der abgebildeten Tabelle wurden die Zwischenwerte vielfach proportional berechnet (s. Abb. 3). Zudem bereitete vielen Lernenden der Wechsel in die graphische Darstellung Probleme (Zeichnung von Geradenteilstücken mit Knick, aber auch die Änderung der Skalierung – der Startwert der Tabelle wurde als neue Null der y-Achse eingeführt – waren beobachtbare Strategien). Überraschend zeigte sich, dass das Aufstellen bzw. die Deutung eines linearen Terms den Lernenden keine weiteren Probleme bereitete.


Erkunden A
3 Vorhersagen machen, auch wenn es nicht bei Null los geht

Nach meinem Rechnen

Reisedauer (in h)	Reiselänge (in km)	Ort
0	55	Autobahnauffahrt
0,5	$61{,}\overline{6}$	Raststätte Münster
1	$123{,}\overline{3}$	Osnabrück
2	$246{,}\overline{6}$	Dammer Berge
3	370	Kiel

Abbildung 3: Schülerbearbeitung

4. (Weiter-) Entwicklung lokaler Theorien

Auf gegenstandsspezifischer Ebene sollen Lernziele ausdifferenziert und (neu) strukturiert werden. Zudem soll die Rolle und Strukturierung des Darstellungsangebots für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen expliziert werden. Auf eher gegenstandsübergreifender Ebene wird zu klären sein, welche konkreten Diagnose- und Förderansätze eine Veränderung individueller Vorstellungen bzw. eine Weiterentwicklung hin zu tragfähigen Vorstellungen bewirken können.

Ausblick und Fazit

Aufgrund der beobachtbaren Phänomene wurden einige Design-Veränderungen vorgenommen, sodass Fehlvorstellungen gezielter aufgegriffen, der Lernweg schlüssiger aufgebaut und zentrale Lernmomente gestärkt werden, immer unter Berücksichtigung eines gezielten Einsatzes von Darstellungen und Darstellungswechseln. Ein Beispiel für eine solche Veränderung ist: Der Startwert wird nicht mehr tabellarisch oder graphisch vorgegeben, sondern soll eigenständig entdeckt werden. Die Lernenden sollen erkennen, dass Rechenstrategien gebraucht werden, die über proportionale Verfahren hinausgehen. Diese „neuen“ Strategien sollen selbstständig entwickelt werden, sodass weiterhin ein geschicktes Berechnen von Zwischenwerten möglich ist. Ein Startwert ungleich 0 wird damit zum einen als Phänomen erkundet, soll aber gleichzeitig auch als Grund identifiziert werden, warum proportionale Rechenstrategien keine eindeutigen Ergebnisse mehr liefern, bzw. wie sich die Ergebnisse von Zwischenwerten verändern, wenn proportional gerechnet wird.

In neuen Designexperimenten (Klassensituationen + begleitende Partnerinterviews an zwei Gesamtschulen in NRW, Jgst. 8; Dauer: 4-5 Wochen) wurde das weiterentwickelte Lehr-Lernarrangement erprobt. Dabei zeigten sich neben der Übergeneralisierung proportionaler Rechenstrategien weitere spannende Phänomene, die einer tiefergehenden Analyse bedürfen.

Literatur

Barzel, B.; Hußmann, S.; Leuders, T. & Prediger, S. (2011). Kontexte und Kernprozesse – Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 71-74.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students´ errors. In: Educational Studies in Mathematics, 50(3), 311-334.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking – Basic issues for learning. In: F. Hitt (Eds.), Representations and mathematics visualization. Mexico-City, 31-46.

Prediger, S.; Hußmann, S.; Hinz, R.; Ralle, B. & Thiele, J. (2012): bisher unveröffentlichte interne Projektunterlagen.

Hußmann, S.; Mühlenfeld, U. & Witzmann, C. (2015) Voraussagen mit dem Routenplaner – Mit Funktionen modellieren. Erscheint in: B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders & S. Prediger (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 8. Berlin: Cornelsen.

Moschkovich, J. (1990). Students' interpretations of linear equations and their graphs. Proceedings of the 14th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (JGPME) Vol II., 109-116.

Van Dooren, W. & Greer, B. (2010). Students´ behavior in linear and non-linear situations. In: Mathematical Thinking and Learning, 12(1), 1-3.

Vollrath, H.-J.(1989): Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik 10, 3-37.

Leonhard RIEDL, Daniel ROST, Erwin SCHÖRNER, München

Fachwissenschaftliche mathematische Kompetenzen von Studierenden für das Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen zu Studienbeginn.

1. Motivation

Ein Motivationsgrund für diese breit angelegte Untersuchung hinsichtlich der fachwissenschaftlichen mathematischen Kompetenzen von Studierenden für das Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen ist der Mangel an empirischen Datenbefunden auf diesem Themengebiet im deutschsprachigen Raum. Die folgenden beiden Zitate untermauern diesen Aspekt. So schildert Ludwig Huber: „Die Universität erforscht alles auf der Welt, nur nicht sich selbst." (Huber, 1999, S.27). Larcher und Oelkers analysieren diesen Aspekt spezifischer auf den Lehramtsbereich bezogen, indem sie formulieren: „Wenn es eine Krise in der Lehrerausbildung gibt, dann ist es wesentlich eine Krise der fehlenden Daten." (Larcher, Oelkers, 2004, S.129). Ferner ist die häufig thematisierte Kluft zwischen Schule und Hochschule ein weiterer Beweggrund für die Studien. Diese Kluft hat seit Anfang des letzten Jahrhunderts nicht an Aktualität verloren; 1933 prägte Felix Klein in seinem Werk „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" den Begriff „Doppelte Diskontinuität". Dieser Begriff beinhaltet die beiden markanten Bruchstellen in der Biographie einer Mathematiklehrkraft, einmal beim Übergang von der Schule zur Hochschule und zum anderen nach Beendigung des Studiums beim Eintritt ins Schulleben als Lehrperson. In den folgenden Untersuchungen wird speziell die erste Bruchstelle untersucht, die Klein folgendermaßen charakterisiert: „Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkt mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergisst er daher alle diese Sachen rasch und gründlich." (Klein, 1933, S.1).

2. Forschungsfragen und Forschungsdesign

Das Forschungsanliegen ist charakterisiert durch eine Längsschnittstudie und eine Querschnittstudie; die Längsschnittuntersuchung soll aufzeigen, welches fachliche Wissen die Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik zu Studienbeginn aufweisen sowie welchen Kompetenzzuwachs diese Kohorte über die Studiendauer erlangen kann. Hingegen werden in der Querschnittuntersuchung lediglich die fachwissenschaftlichen mathematischen Kompetenzen zu Studienbeginn, also das „Schulwissen", der beginnenden Erstsemester analysiert, vor allem in Hinblick auf die Umstellung von G9 auf G8 in Bayern. Ferner werden die erzielten Leistungen in beiden Gruppen hinsichtlich verschiedener Variablen wie beispielsweise dem Alter (persönliche Daten), dem studierten Lehramtstyp (studienbezogenen Angaben), Aspekten der Studien- und Berufswahlmotivation beleuchtet, und es wird dabei versucht zu klären, welchen Einfluss diese Variablen auf die Leistungen in den gestellten Testerhebungen bewirken. Als Testinstrument dient zum einen ein Fragebogen, der persönliche und studienbezogene Angaben beinhaltet, ferner auch Aspekte der Studien- und Berufswahlmotivation sowie des Lernverhaltens aufweist. Bei der Gestaltung dieses Fragebogens werden für die entsprechenden Items ein endpunktbestimmtes Skalenniveau mit sechs Skalenpunkte verwendet (vgl. Porst 2008). Hinsichtlich der Erfassung der mathematischen Kenntnisse zu Studienbeginn sind Vorwissenstests in den schulrelevanten Disziplinen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik konzipiert worden; die Aufgabenauswahl begründet sich zum einem an den bayerischen Lehrplänen für das achtstufige Gymnasium bzw. der sechsstufigen Realschule und andererseits an den inhaltlichen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (vgl. KMK 2004) sowie an den Einheitlichen Anforderungen für die Abiturprüfung im Fach Mathematik (vgl. KMK 2002). Eine Übersicht über das Kenntnisspektrum von Lehrpersonen liefert die Struktur des professionellen Wissens von Lehrkräften nach Shulman. Neben dem pädagogischen und psychologischen Wissen (general pedagogical knowledge) sollen demnach Lehrkräfte auch fachdidaktische Kenntnisse (pedagogical content knowlegde) und fachwissenschaftliche Kompetenzen (matter content knowledge) aufweisen (vgl. Shulman 1986). Die Untersuchung fokussiert sich auf die fachwissenschaftlichen Kenntnisse (matter content knowledge) im Fach Mathematik.

3. Ergebnisse der vier Vorwissenstests

Die vier Einzeltests erstrecken sich auf die schulrelevanten Gebiete Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik. Alle Tests sind einheitlich mit 24 Punkten bewertet, wobei sich diese Punkte auf eine verschiedene Anzahl an Einzelaufgaben verteilen. Ferner ist die Bearbeitungszeit einheitlich auf 45 Minuten festgesetzt. Dabei können bei der Analyse der vier Erhebungen folgenden Aspekte global festgehalten werden. Es werden vergleichsweise starke Leistungen in Algebra (arithmetisches Mittel bei 18,87 Punkten, Median bei 19,75 von 24 Punkten), schwache Leistungen in Geometrie (arithmetisches Mittel 11,23, Median 11,00), mittelmäßige Leistungen in Analysis (arithmetisches Mittel 13,55, Median 13,50) und sehr schwache Leistungen in Stochastik (arithmetisches Mittel 9,25, Median 8,50) erzielt. Betrachtet man den Mittelwert aus allen vier Einzelerhebungen, so liegt eine symmetrische Verteilung mit einem arithmetischen Mittel von 13,23 und einem Median von 13,50 bei maximal 24 zu erreichenden Punkten vor. Die Leistungen in diesen vier Erhebungen werden nun anhand verschiedener Variablen beleuchtet; dabei wird untersucht, welchen Einfluss diese auf die Leistungen haben. Als Variablen werden persönliche Aspekte (Alter und Geschlecht) sowie studienbezogene Angaben (studierter Lehramtstyp, Schwerpunkt der Mathematikausbildung in der Oberstufe der Schule) berücksichtigt. Bei der Analyse hinsichtlich des Alters werden zwei Gruppen unterschieden; dabei werden die Studierenden unter 21 Jahren und eine Vergleichsgruppe mit Studierenden mit mindestens 21 Jahren betrachtet. Die stärksten Unterschiede werden im Fachgebiet Stochastik festgestellt; die jüngere Vergleichsgruppe schneidet im Mittel um fast zwei Punkte besser ab. Möglicherweise liegt dies an der noch höheren Affinität zur Oberstufenmathematik dieser Gruppe. Insgesamt sind die Unterschiede in Stochastik nicht signifikant und folglich auch nicht in den übrigen drei Disziplinen. Bei der Betrachtung der Leistungen in Abhängigkeit des Geschlechts ergeben sich in keinem Bereich signifikante Unterschiede, insgesamt zeigt die weibliche Vergleichsgruppe leicht bessere Ergebnisse; dabei sollte beachtet werden, dass 75 % der Teilnehmer weibliche Studierende sind. Die Untersuchung der Leistungen hinsichtlich der drei studierten Lehramtstypen (Grund-, Haupt- oder Realschullehramt) eröffnet, dass die Grundschulgruppe (50 % der Leistungen zwischen 10 und 18 Punkten) sehr gut, die Realschulgruppe (50 % der Leistungen zwischen 10 und 16 Punkten) auch sehr ansprechend und zuletzt die Hauptschulschulgruppe (50 % der Leistungen zwischen 7 und 10 Punkten) sehr schwach abschneidet. Die Leistungsunterschiede zwischen Grund- und Hauptschulgruppe sowie zwischen Real- und Hauptschulgruppe sind bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % signifikant. Auch in diesem Fall sind die drei Gruppen hinsichtlich ihrer Stichprobenlängen sehr differierend (Hauptschulgruppe 8 %, Grundschulgruppe 17 %, Realschulgruppe 75 %).

Schließlich werden nun die Leistungen in den vier Einzeltests hinsichtlich der mathematischen Schwerpunktsetzung in der Oberstufe beleuchtet. Dabei gliedert sich die zu betrachtende Stichprobe in 50 Grundkursteilnehmer/innen, 52 Leistungskursteilnehmer/innen, 14 Studierende der Fachoberschule und 16 der Berufsoberschule. Die Leistungskursgruppe schneidet in allen Gebieten sehr gut ab und erzielt signifikant bessere Ergebnisse als die Grundkursgruppe. Die FOS-Gruppe kann in allen Gebieten mit der Leistungskursgruppe mithalten, fällt doch in Stochastik signifikant ab (Differenz von über fünf Punkten im Mittel). Die Grundkursgruppe zeigt ähnlich Leistungen wie die BOS-Gruppe, beide sind vergleichsweise schwach einzustufen.

4. Ausblick und weiteres Vorgehen

Hinsichtlich der Längsschnittuntersuchung werden thematisch spezifische Testerhebungen konzipiert, um den Kompetenzzuwachs der Studierenden dokumentieren und analysieren zu können. Die Querschnittstudie soll zum einen Aufschluss darüber geben, ob und wie sich die Umstellung von G9 auf G8 (in Bayern) auf die mathematischen Kenntnisse der Studierenden auswirkt sowie zum anderen die Kluft zwischen Schule und Hochschule analysieren und damit die erste Bruchstelle der „Doppelten Diskontinuität“ beleuchten. Aufgrund der Aktualität und Brisanz bezüglich der Umstellung im gymnasialen Sektor von G9 auf G8 sind diese empirischen Befunde im Hinblick auf die Auswirkungen der mathematischen Ausbildung am Gymnasium sehr interessant und können ein Fundament für weitere Diskussionen auf diesem Gebiet legen.

Literatur

Huber, L. (1999): An- und Aussichten der Hochschuldidaktik. In Zeitschrift für Pädagogik, 45, 25-44.

Larcher, S. & Oelkers, J. (2004): Deutsche Lehrerbildung im internationalen Vergleich. In Blömeke, S., Reinhold, P., Tulodziecki, G. & Wildt, J. (Hrsg.): Handbuch Lehrerausbildung. Bad Heilbrunn und Braunschweig: Klinkhardt und Westermann, 128-150.

Klein, F. (1933): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Erster Band. Berlin: Springer.

Beschluss der Kultusministerkonferenz (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss - Beschluss vom 4.12.2003. München: Luchterhand Verlag.

Beschluss der Kultusministerkonferenz (2002): Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik vom 01.12.1989 in der Fassung vom 24.05.2002.

Porst, R. (2008): Fragebogen. Ein Arbeitsbuch. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. In Educational Researcher, 15(4), 4-14.

Jürgen ROTH, Landau

Geometrie selbständig erarbeiten – Das Beispiel Strahlensätze

Am Beispiel der Geometrie wird mathematisches Denken und Arbeiten für Schüler besonders gut erlebbar. Es kann gerade auch hier gut durch gegenständliche Modelle und Computersimulationen unterstützt werden. Im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ (www.mathe-labor.de) der Universität Landau werden auf diese Weise Lehrplaninhalte selbständig erarbeitet.

1 Ziele von Lernumgebungen zur Geometrie

Lernumgebungen sind auf das selbständige Arbeiten von Schülern abgestellt und ermöglichen entdeckendes Lernen. In Roth (2012b) werden darüber hinaus weitere wesentliche Aspekte von Lernumgebungen genannt. Gerade die Geometrie bietet sich für den Einsatz von Lernumgebungen an, weil hier u. a. sehr gut gestützt auf verschiedenste Medien wie etwa gegenständliche Modelle, computergestützte Simulationen, Filme und natürlich Papier und Bleistift gearbeitet werden kann. Anhand solcher Lernumgebungen sollen Schüler *Begriffe verstehen*, erleben, was *Mathematik treiben* bedeutet und *Vernetzungen erfahren*.

Das Verstehen von Begriffen lässt sich unterteilen in Voraussetzungen und sicheres Verstehen. Voraussetzungen zum Begriffsverständnis sind grundlegende Kenntnisse zu Eigenschaften und Beziehungen zu anderen Begriffen. Erst auf dieser Grundlage kann ein sicheres Begriffsverständnis erarbeitet werden, das sich durch folgende Fähigkeiten fassen lässt: Schülerinnen und Schüler können den *Begriff in neuen Situationen als relevant erfassen* sowie *für Problemlösungen und neue Erkenntnisse nutzen*. Genau diese Fähigkeiten des Begriffsverständnisses werden beim „Mathematik treiben“, also dem Lösen (mathematischer) Probleme und dem Erarbeiten neuer mathematischer Erkenntnisse benötigt. Dabei werden vom betrachteten Phänomen veranlasst, ganz automatisch verschiedene Lehrplaninhalte angewandt und damit vernetzt. Das so verstandene „Mathematik treiben“ kann im Rahmen von Lernumgebungen durch einen vernetzten Einsatz von verschiedensten Medien unterstützt werden.

2 Die Lernumgebung „Strahlensätze“

Die vollständige Darstellung der Ausgestaltung der Lernumgebung „Strahlensätze“ im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ würde den Rahmen dieses Beitrags sprengen. Eine ausführlichere Darstellung findet man in Roth (2012a), sämtliche zugehörigen Materialien sind im Internet unter www.mathe-labor.de/simulation/strahlensaetze/ abrufbar. Trotzdem soll hier schlaglichtartig das Konzept der Laborstation „Strahlensätze“ vorgestellt werden.

An der Laborstation sollen sich die Schüler in Vierergruppen einen Lehrplaninhalt – hier die Strahlensätze – auf der Grundlage ihres im Unterricht bereitgestellten Vorwissens selbständig erarbeiten. Die Laborarbeit umfasst drei Doppelstunden á 90 Minuten und die Ergebnisse sollen anschließend im Unterricht angewendet und vertieft werden. Abbildung 1 gibt einen Überblick über die Lernumgebung und die jeweils eingesetzten Medien. Dazu gehören neben einem Film, gegenständlichen Modellen und Simulationen auch Arbeitshefte, die einerseits die Aufgabenstellungen enthalten und andererseits zur Protokollierung der Ergebnisse und Prozesse dienen. Daneben gibt es gestufte Hilfen die teilweise in Form eines Hilfehefts und teilweise innerhalb der Simulationen abhängig von der jeweils gewählten Zugangsweise bei Bedarf abrufbar sind.

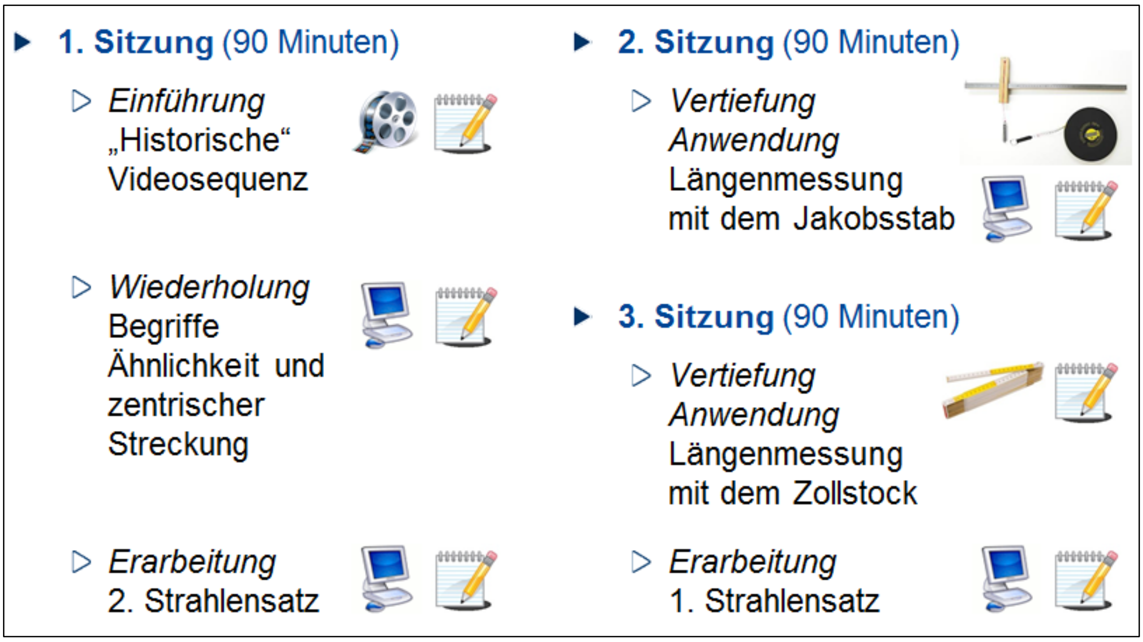


Abb. 1: Struktur der Lernumgebung mit Piktogrammen zum Medieneinsatz

Die gesamte Lernumgebung wird getragen von der Idee der Messung von unzugänglichen Längen mit Hilfe eines Jakobsstabes. Aus diesem Grund beginnt die Laborarbeit auch mit einem eigens erstellten Video (vgl. Abb. 2), indem man einen mittelalterlichen Meister dabei beobachtet, wie er seinem Schüler rezeptartig die Messung der Höhe eines Turms mit Hilfe eines Jakobsstabs erläutert. Das Video endet mit der Frage des Schülers, wie man damit die Höhe des Turms bestimmen kann. Um diese Frage beantworten zu können, reaktivieren die Schüler ihr Wissen zur Ähnlichkeit von Dreiecken und zur zentrischen Streckung und erarbeiten sich auf dieser Grundlage die zur Messsituation passende Strahlensatzfigur selbständig.

Abb. 2: Filmausschnitt

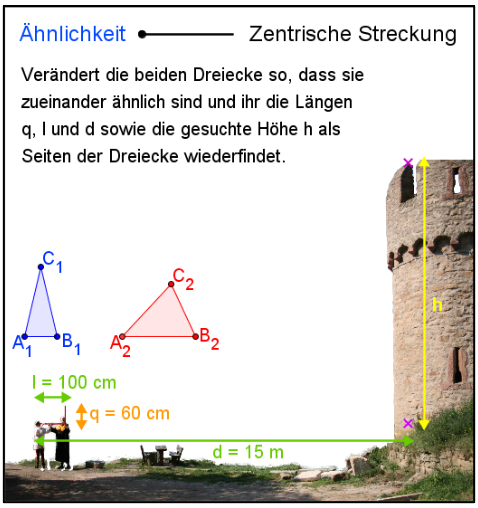


Abb. 3: Strahlensatzkonfiguration selbständig erarbeiten ▶

In einer Simulation können sie wählen, ob sie mit ähnlichen Dreiecken oder der zentrische Streckung argumentieren wollen. Die jeweils in der Simulation angebotene Konfiguration muss auf die Messsituation aus dem Film hin angepasst werden (vgl. Abb. 3) und führt im Ergebnis zur Strahlensatzfigur. Anhand der ins Arbeitsheft übertragenen Konfiguration entwickeln die Schüler aus den bekannten Größen eine Verhältnisgleichung und bestimmen damit die Turmhöhe. Anschließend gewinnen sie die Erkenntnis, dass die durchgeführten Überlegungen für alle Figuren des Typs der Strahlensatzkonfigurationen gelten und formulieren den zweiten Strahlensatz.

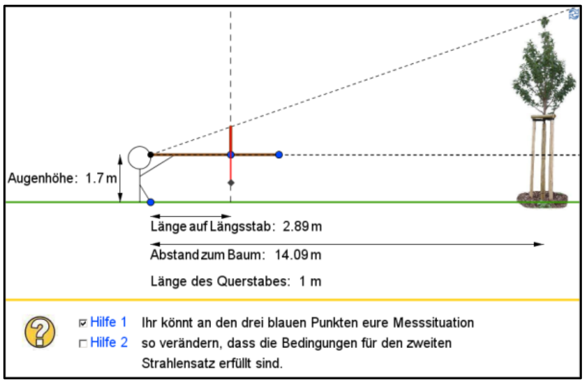


Abb. 3: Jakobsstabmessung vorbereiten

Abb. 3: Messen mit dem Jakobsstab ▶

In der folgenden Doppelstunde werden die erworbenen Erkenntnisse genutzt um die Höhe eines Baums mit einem realen Jakobsstab zu bestimmen. Zur Vorbereitung dazu erarbeiten sich die Schüler die Handhabung des Jakobsstabs anhand einer Simulation (vgl. Abb. 3). Diese erleichtert auch das Herstellen der Beziehung zwischen dem Strahlensatz und der Messkonfiguration. Anschließend messen die Schüler mit dem Jakobsstab die Höhe eines Baums und wenden dazu den zweiten Strahlensatz an. Diesen nutzen sie schließlich um mit einem Zollstock an Stelle des Jakobsstabs die Entfernung zu einem Gebäude zu messen. Dies ist Vertiefung und Praxisbezug zugleich.

3 Einbindung in den Mathematikunterricht

Die Einbindung der Arbeit an außerschulischen Lernumgebungen, wie etwa im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“, in den Unterricht ist entscheidend für den Erfolg eines solchen Konzepts. Leider findet bisher eine Vor- und Nachbereitung des Besuchs von Lernlaboren im Unterricht kaum statt (vgl. Schmidt et al. 2011, S. 362). Aus diesem Grund wurde in der Untersuchung mit vier 9. Klassen einer Realschule, die die Laborstation im Klassenverband durchlaufen haben, viel Wert auf die Einbindung in den Unterricht gelegt. Die beteiligten Lehrkräfte erhielten Informationen darüber, welches Vorwissen die Schüler mitbringen sollten. Es gab einen Rückmeldebogen zu den Leistungen ihrer Schüler im Vor- und Nachtest mit detaillierten Angaben zu aufgetretenen Fehlern. Eine Zusammenfassung der erarbeiteten Inhalte und Konzepte wurde in Form eines Merkblatts an die Schüler und die Lehrkräfte zum Weiterarbeiten im Unterricht ausgeteilt. Darüber hinaus erhielten die Lehrkräfte Aufgabenvorschläge für eine durchzuführende Klassenarbeit. Trotzdem hat weder eine adäquate Vorbereitung stattgefunden (vgl. Dexheimer (2012) für erste Ergebnisse der Pilotstudie zur Lernumgebung „Strahlensätze“) noch wurde die Laborarbeit nach Aussage der Lehrkräfte im Unterricht nachgearbeitet. Hier scheint der Hauptgrund der empirischen Befunde zur in der Regel unbefriedigenden Lernwirksamkeit der Arbeit in Schülerlaboren zu liegen. Ein Schwerpunkt der Weiterentwicklung wird deshalb die Optimierung der Einbindung der Laborarbeit in den Unterricht sein, z. B. durch zielgerichtete Fortbildungen und Ergänzungen der Begleitmaterialien für die beteiligten Lehrkräfte.

Literatur

Dexheimer, M. (2012): Strahlensätze im Mathematik-Labor – Ergebnisse einer Pilotstudie. In: Kleine, M.; Ludwig, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM-Verlag.

Roth, J. (2012a): Ähnlichkeit verstehen – Den Jakobsstab nutzen. In: Mathematik lehren, Heft 173, August 2012. (Im Internet verfügbar unter: www.dms.uni-landau.de/roth/veroeffentlichungen/2012/roth_aehnlichkeit_verstehen_jakobsstab_nutzen.pdf)

Roth, J. (2012b): Lernumgebungen zur Geometrie. In: Kleine, M.; Ludwig, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM-Verlag.

Schmidt, I., Di Fuccia, D. S., Ralle, B. (2011): Außerschulische Lernstandorte − Erwartungen, Erfahrungen und Wirkungen aus der Sicht von Lehrkräften und Schulleitungen. In: MNU 64/6 (2011), 362-369

Benjamin ROTT, Hannover

Heurismen in den Problembearbeitungsprozessen von Fünftklässlern

Problemlösen spielt eine zentrale Rolle in der Mathematik und ist daher – nicht nur wegen curricularer Vorgaben – auch für Unterricht von großer Bedeutung. Im Gegensatz zu Routineaufgaben, für deren Bearbeitung Algorithmen herangezogen werden können, lassen sich Problemaufgaben durch eine personenspezifische Barriere kennzeichnen. Eine wichtige Rolle in Problemlöseprozessen spielen in diesem Zusammenhang **Heurismen** (Schoenfeld 1985, S. 44 f.), wobei es sich um „Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung“ (Pólya 1949, S. 118) wie *Rückwärtsarbeiten* oder *Suche nach ähnlichen Aufgaben* handelt. Eine präzise Definition dessen, was ein Heurismus ist, findet sich nicht in der Literatur und ist vermutlich auch nicht möglich. Kilpatrick hat deswegen vorgeschlagen:

> „Let us forego such precision, therefore, and define a heuristic as any device, technique, rule of thumb, etc. that improves problem-solving performance. We consider heuristics to be typically provisional, without guarantee of effectiveness […].” (Kilpatrick 1967, S. 19)

Verschiedene Studien haben einen (wenn auch oft geringen) Zusammenhang zwischen dem Einsatz von Heurismen und dem Erfolg beim Problemlösen nachgewiesen (Zusammenfassung bei Schoenfeld 1985, S. 71 ff.).

Die Studie

In diesem Artikel möchte ich mich den folgenden beiden Fragen widmen:

- Verwenden Fünftklässler, die im Problemlösen nicht geschult wurden, Heurismen?
- Inwiefern hängt der Einsatz heuristischer Elemente mit dem Erfolg beim Problemlösen von Schülern zu Beginn der Sek. I zusammen?

Zur Beantwortung dieser Fragen dienen Videoaufnahmen aus den ersten vier Halbjahren (Ende 2008 bis Mitte 2010) der „Mathe AG an der Leibniz Universität“ (MALU). Es handelt sich bei MALU um ein Enrichment-Projekt für interessierte Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien. Die Schüler arbeiteten etwa die Hälfte der 90-min. AG-Zeit in Paaren an Problemaufgaben. Drei der Aufgaben werden im Folgenden betrachtet (s. Tab. 1).

Methoden

Produktbewertung: Die Bearbeitungsergebnisse unserer Schüler wurden in vier Erfolgskategorien eingeteilt, die für die einzelnen Probleme konkretisiert wurden: (1) *Kein Ansatz*, wenn überhaupt kein sinnvoller Ansatz festgestellt werden konnte. (2) *Einfacher Ansatz*, wenn das Problem zu Teilen richtig bearbeitet wurde. (3) *Erweiterter Ansatz*, wenn das Problem zu großen Teilen korrekt bearbeitet wurde. Und (4) *Korrekter Ansatz*, wenn das Problem vollständig begründet gelöst wurde.

Diese Kategorien wurden für jede Aufgabe einzeln operationalisiert und die Produkte wurden von unabhängigen Ratern eingeteilt (Cohens $\kappa = .87$ bzw. $\kappa = .91$ bzw. $\kappa = 1.0$ für die drei Aufgaben); bei voneinander abweichenden Bewertungen wurde eine Einigung erzielt (*konsensuelle Validierung*).

Zwei Bierdeckel	**Marcos Zahlenreihe**	**Ach ja, das Schachbrett...**
Die beiden unten stehenden Quadrate stellen zwei flächengleiche Bierdeckel dar. Dabei sind die beiden Bierdeckel so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des einen Bierdeckels mit dem Mittelpunkt des anderen Bierdeckels übereinstimmt. Untersuche die Größe der Fläche, die von **beiden** Bierdeckeln überdeckt wird! [In der Abb. ist diese Fläche rot gekennzeichnet.]	Marco möchte alle Zahlen von 1 bis 15 so in die 15 Kästchen schreiben, dass die Summe von jedem Paar benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ergibt: Stehen beispielsweise in drei aufeinander folgenden Kästchen die Zahlen 10, 6, 3, so ergibt die 6 sowohl mit der 10 in dem linken Nachbarkästchen (10+6=16) als auch mit der 3 in dem rechten Nachbarkästchen eine Quadratzahl (6+3=9).	Peter spielt leidenschaftlich gerne Schach. Er spielt so gerne Schach, dass seine Gedanken auch dann um das Spiel kreisen, wenn er gerade gar nicht spielt. Neulich stellte er sich die Frage, wie viele Quadrate wohl auf einem Schachbrett zu finden sind. Versucht, Peters Frage zu beantworten!

Tabelle 1: Aufgabenstellungen [ohne die zugehörigen Abbildungen]

Prozesskodierung: Die Identifikation der Heurismen erfolgte zweischrittig: Da es keine präzise Definition des Begriffs „Heurismus“ gibt (s.o.), wurde zunächst ein qualitativer Ansatz gewählt. In Zusammenarbeit mit einem Masterstudenten wurden alle Prozesse zu den oben genannten Aufgaben gesichtet (insgesamt etwa 930 Minuten Videomaterial). Dabei wurden alle Aktionen der Schüler herausgeschrieben, bei denen es sich um Problemlösetechniken, Faustregeln etc. handelte (*induktiver* Ansatz). Zusätzlich haben wir die Prozesse auf heuristische Tätigkeiten, wie sie in der Literatur beschrieben werden, untersucht (*deduktiver* Ansatz). Aus diesen Prozessmitschriften wurden Charakterisierungen für Heurismen der ausgewählten Aufgaben abgeleitet (siehe Tab. 2).

Nach diesem qualitativen Ansatz dienten die Charakterisierungen als Manual, auf dessen Basis mehrere Hilfskräfte die Prozesse unabhängig voneinander mit guter Interrater-Übereinstimmung kodiert haben. Die Ergebnisse dieses Kodierprozesses bilden die Basis der folgenden Auswertungen.

Kode	Beschreibung	Beispiele
Informative Figur	Das Anfertigen einer Skizze, eines Diagramms oder eines Graphen.	**[Bierdeckel]** Das Zeichnen möglicher Konfigurationen der beiden Quadrate. **[Schachbrett]** Das Zeichnen eigener (evtl. kleinerer) Schachbretter.
Spezialfall	Betrachten von besonderen Fällen oder Werten, z.B. Einsetzen von Werten wie 0 oder 1 in Gleichungen.	**[Bierdeckel]** Positionen der zwei Quadrate zueinander, in denen ersichtlich ist, dass die gesuchte Fläche ¼ beträgt.

Tabelle 2: Auszug aus dem Heurismen-Kodiermanual

Ergebnisse

Die Beantwortung der ersten Forschungsfrage, ob unsere Fünftklässler als untrainierte Problemlöser Heurismen verwenden, konnte bereits bei der Erarbeitung der Prozesskodierung (s.o.) positiv beantwortet werden. Im Rahmen dieses Artikels fehlt leider der Platz für eine ausführliche Darstellung. Zum Zusammenhang zwischen dem Heurismeneinsatz und dem Erfolg beim Problemlösen (2. Forschungsfrage) sind unterschiedliche Hypothesen denkbar: Zu erwarten wäre einerseits eine (grob) lineare Beziehung der Art „je mehr Heurismen, desto größer die Erfolgswahrscheinlichkeit“. Andererseits könnten Schüler, die keinen Zugang zu einer Problemaufgabe finden, erfolglos einen Heurismus nach dem anderen ausprobieren – dies spräche dann eher für einen umgekehrt-u-förmigen Zusammenhang.

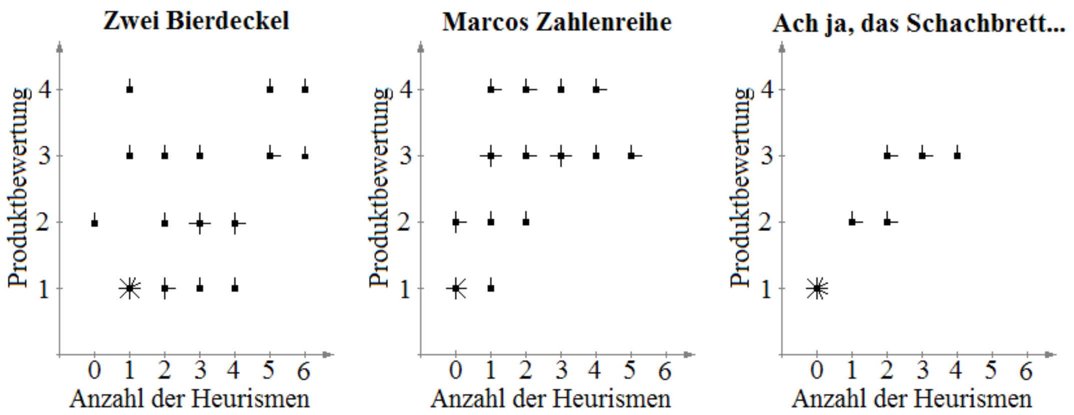


Abbildung 1: Die Zahl der Striche an den Punkten steht für die jeweilige Schüleranzahl

Abb. 1 zeigt die Anzahl der Heurismen im Vergleich zum Bearbeitungserfolg in einem Streudiagramm. Die Daten sprechen für (schwache) lineare Zusammenhänge, die durch die Berechnung der Korrelationskoeffizienten r_s (s. Tab. 3) bestätigt werden.[1] Gegen einen umgekehrt-u-förmigen Zu-

[1] Da die Produktbewertung nur ordinalskaliert vorliegt, wurde die Rangkorrelation nach Spearman ermittelt – im Gegensatz zur Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson.

sammenhang in dieser Stichprobe sprechen zudem die Mittelwerte x der verwendeten Heurismen je Bewertungskategorie (s. Tab. 3) und die Tatsache, dass die Schüler mit einer großen Anzahl an Heurismen allesamt erfolgreich (Kategorie 3/4) waren. Dennoch gibt es, wie zu erwarten war, keine strikte „je mehr, desto besser"-Regel für den Heurismeneinsatz. Einige Schüler verwendeten von Anfang an eine zielführende Technik und lösten die Aufgabe damit, wohingegen andere auch durch den Einsatz verschiedener Heurismen keinen Erfolg bei der Bearbeitung erzielen konnten.

Zwei Bierdeckel	#	**Zahlenreihe**	#	**Schachbrett...**[2]	#
x_{kat1} = 1,57 x_{kat2} = 2,89 x_{kat3} = 3,67 x_{kat4} = 4,00	14 9 6 3	x_{kat1} = 0,14 x_{kat2} = 0,60 x_{kat3} = 2,62 x_{kat4} = 2,43	7 5 13 7	x_{kat1} = 0,00 x_{kat2} = 1,50 x_{kat3} = 2,80 x_{kat4} = ---	10 4 5 0
x_{ges} = 2,56 +/- 1,66	32	x_{ges} = 1,72 +/- 1,58	32	x_{ges} = 1,05 +/- 1,31	19
r_s = 0,54 ($p < 0,01$)		r_s = 0,63 ($p < 0,001$)		r_s = 0,97 ($p < 0,001$)	

Tabelle 3: Mittelwerte und Korrelationskoeffizienten zum Heurismeneinsatz

Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass bereits junge Schüler – ohne entsprechendes explizites Training – Heurismen verwenden und dass ihre Problemlöseleistung davon profitiert. Dies ist auch für den Schulunterricht interessant, da entsprechende Trainingsprogramme nicht bei Null beginnen müssen, sondern auf dem Vorwissen aufbauen können. Vygotski spricht hier von der Zone der nächsten Entwicklung, die das Potential betrachtet, das in den bereits vorhandenen Fähigkeiten liegt (vgl. Bruder & Collet 2011, S. 113). Geplant sind weitere (qualitative) Auswertungen, die den Fokus darauf legen, welche Heurismen tatsächlich hilfreich bei der Überwindung bestimmter Schwierigkeiten („Problembarrieren") sind.

Literatur

Bruder, Regina & Collet, Christina (2011): *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Kilpatrick, Jeremy (1967): *Analyzing the solutions of word problems in mathematics: An exploratory study*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University.

Pólya, George (1949): *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.

Schoenfeld, Alan H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

[2] Ohne die 10 Bearbeitungen aus Kategorie 1 (Antwort: „64 Quadrate"), in denen das Problem als Routineaufgabe interpretiert wurde, lauten x_{ges} = 2,22 und r_s = 0,73 ($p < 0,05$), was von den Größenordnungen gut zu den anderen beiden Aufgaben passt..

Markus RUPPERT, Würzburg

Wege der Analogiebildung – Denkprozesse beim Arbeiten mit gelösten Beispielaufgaben

„Die Kräfte des Menschen sind, soweit Erfahrung und Analogie uns leiten können, unbegrenzt.“ H. Buckle (1861, Übers.) beschreibt als wesentliches Charakteristikum der Analogiebildung die Möglichkeit, durch den Rückgriff auf Erfahrungen das (kollektive) Wissen zu erweitern. Auf das Individuum bezogen und im Rahmen des Lernens von Mathematik betrachtet, will Polyà (1949; 1961) die Analogiebildung im obigen Sinne als heuristische Strategie verstanden wissen. Er formuliert konkrete Handlungsanweisungen, die dem Lernenden helfen sollen, auf seine Erfahrung zuzugreifen. Trotzdem gelingt dieser Transfer allzu häufig nicht. Ausgangspunkt der nachfolgend beschriebenen empirischen Untersuchung ist deshalb die Frage: Wie nutzen Schüler Analogiebildung als Möglichkeit des Zugriffs auf ihre mathematische Erfahrung mit Beispielaufgaben beim Lösen von neuen Aufgaben mit ähnlicher mathematischer Struktur?

1. Theoretischer Rahmen: Zwei Dimensionen der Analogiebildung

Ziel einer Analogiebildung ist es, die Struktur eines unerschlossenen Sachverhalts (target) durch den Vergleich mit Strukturen aus der Erfahrung des Lernenden (source) zugänglich zu machen. Gentner (1983) beschreibt diesen Vorgang als Strukturabbildung. Dabei werden im Ausgangs- und im Zielbereich die beteiligten Objekte, vor allem aber die Relationen zwischen den Objekten miteinander verglichen. Werden hier strukturelle Ähnlichkeiten erkannt, so können auf dieser Grundlage fehlende Entsprechungen ergänzt werden (Analogieschluss). Durch die zugrunde liegende Struktur einer Aufgabe werden die mathematischen Handlungsmöglichkeiten bestimmt. Zur Bearbeitung einer Aufgabe müssen also außerdem die mathematischen Operationen aus dem Ausgangsbereich analogisiert werden. Analogiebildung findet demnach auf drei verschiedenen Ebenen statt (Objekt-, Relations- und Handlungsebene – Dimension 1 der Analogiebildung).

Betrachtet man Analogiebildung als Prozess, so lassen sich nach Sternberg (1977) verschiedene Phasen des Analogiebildungsprozesses unterscheiden. In Anlehnung an Sternberg werden hier vereinfacht vier Phasen der Analogiebildung zugrunde gelegt (Dimension 2 der Analogiebildung): (1) Strukturieren (2) Abbilden (3) Schließen (4) Beurteilen.

Zusammenfassend lassen sich Analogiebildungsprozesse demnach als Wege in einem *Zwei-Dimensionen-Modell* beschreiben (vgl. Ruppert, 2010 und Abb. 1, o. li.).

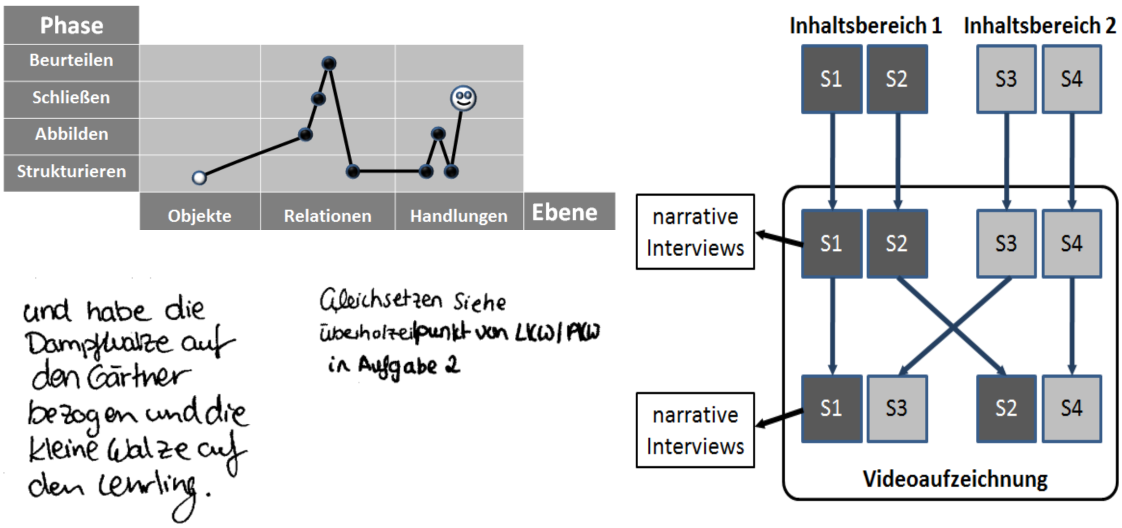


Abbildung 1: Zwei-Dimensionen-Modell der Analogiebildung (o. li.), Schülerdokumente (u. li.), Drei-Phasen-Design der Untersuchung (re.)

2. Forschungsfragen

In der vorliegenden Studie sollen auf dieser Grundlage insbesondere die folgenden Fragen geklärt werden:

- Wie sehen konkrete Analogiebildungsprozesse als „Wege“ im dargestellten Zwei-Dimensionen-Modell aus?
- Lassen sich diese „Wege“ (sowohl für gelungene, als auch für gescheiterte Analogiebildungsprozesse) klassifizieren?
- Welche besondere Bedeutung kommt dem Übergang von der Struktur- auf die Handlungsebene zu?

3. Untersuchungsdesign: Ein Drei-Phasen-Modell

Die Wege der Analogiebildung wurden zunächst qualitativ durch die Auswertung von Schüleräußerungen, -gesten und -dokumenten analysiert. Dazu wurden Aufgabensequenzen zu verschiedenen Inhaltsbereichen entwickelt. In einer ersten Vorstudie konnte gezeigt werden, dass zur Lösung der Aufgaben Analogiebildung als Strategie verwendet wird (vgl. Abb.1, u. li.).

Im Rahmen der Hauptstudie wurden die überarbeiteten Aufgabensequenzen in einem Drei-Phasen-Design verwendet, um Analogiebildungsprozesse zu initiieren (vgl. Abb. 1, re.).

- Phase 1 (Instruktionsphase): Bereitstellung der Grundlagen und Beispielaufgaben in mündlicher und schriftlicher Form. Zwei der sechs Aufgaben dienten dabei als gelöste Beispiele zum jeweiligen Inhaltsbereich (vgl. Gentner/ Loewenstein/ Thompson, 2003).

- Phase 2 (Partnerphase): Je zwei Schüler bearbeiteten gemeinsam zwei Aufgaben zu diesem Inhaltsbereich. Die Instruktion und die gelösten Beispiele standen den Schülern dabei schriftlich zur Verfügung.
- Phase 3 (Expertenphase): Je zwei Schüler mit unterschiedlichen Inhaltsbereichen bearbeiteten zusammen je eine Aufgabe aus jedem der beiden Inhaltsbereiche.

Zusätzlich wurden die Schüler nach jeder Aufgabenbearbeitung dazu aufgefordert, den Lösungsweg noch einmal darzulegen (narrative Interviews).

Die Arbeit der Schüler in der Partner- und in der Expertenarbeitsphase, sowie die Interviews wurden videographiert und transkribiert.

4. Auswertungsmethoden

Zur Auswertung liegt das folgende Datenmaterial vor:

- Transkripte der Schülerdialoge und Interviews
- Bildmaterial der Schülerbearbeitungen (insb. Auswertung von Gesten)
- Schülerdokumente (schriftliche Bearbeitung der Aufgaben)

Die Zuordnung zu den verschiedenen Feldern des Zwei-Dimensionen-Modells geschieht auf der Grundlage eines Codierleitfadens, der im Rahmen einer zweiten Vorstudie entwickelt wurde. Die Codierung des Materials erfolgt mit der Software Videograph.

Die Software liefert als ein Ergebnis der Codierungsarbeit eine graphische Darstellung, die bereits zu ersten Interpretationen herangezogen werden kann (vgl. Abb. 2, o.). Als weitere Grundlage für Interpretationen dienen die Wege im Zwei-Dimensionen-Modell (Abb. 1 o. li.; Abb. 2, u. li.). Es wird dann versucht, die auf den Diagrammen basierende, interpretative Klassifikation „ähnlicher Wege“ mit Hilfe einer Clusteranalyse quantitativ zu bestätigen. Hierzu werden die Wege zusätzlich in eine „Aufenthaltsmatrix“ übersetzt (Abb. 2, u. re.).

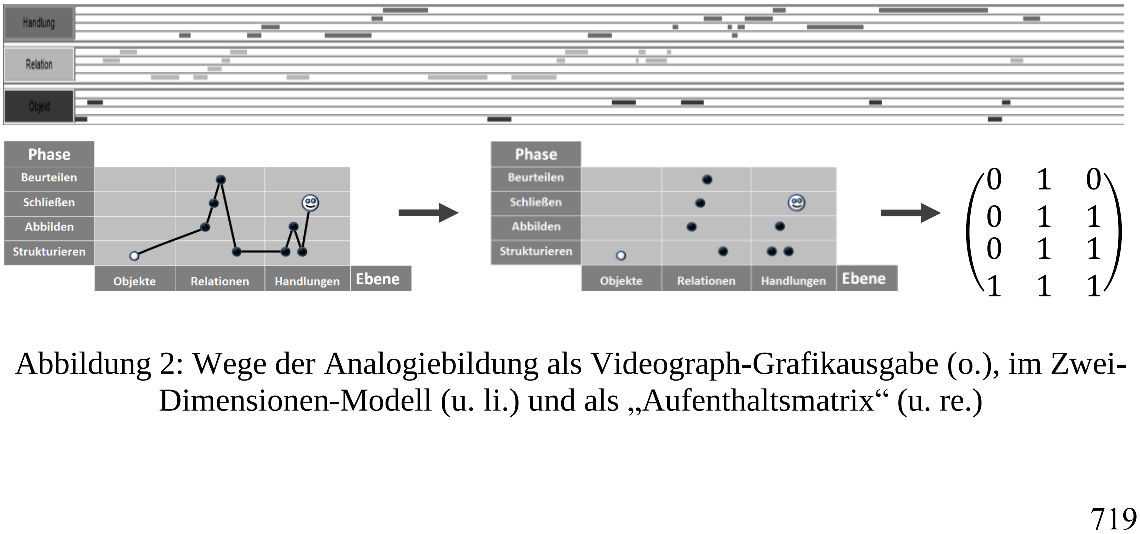


Abbildung 2: Wege der Analogiebildung als Videograph-Grafikausgabe (o.), im Zwei-Dimensionen-Modell (u. li.) und als „Aufenthaltsmatrix“ (u. re.)

5. Erste Ergebnisse

Die Interpretation der graphischen Darstellung aus der Software Videograph liefert zusammen mit den Schülerdialogen die folgenden Erkenntnisse:

- Für einen Analogiebildungsprozess, der nicht sofort zum Ziel führt, können mehrere (Denk-)abschnitte identifiziert werden.
- Ein neuer Denkabschnitt wird im Diagramm stets „weiter unten“ begonnen, als der abgebrochene Denkabschnitt endet.
- Einzelne Denkabschnitte verlaufen im Wesentlichen ansteigend.

Die Interpretation der graphischen Darstellung auf der Grundlage des Zwei-Dimensionen-Modells liefert weiter:

- Die aufgezeichneten Wege verlaufen im Wesentlichen „von links nach rechts“ und „von unten nach oben“.
- Ein neuer Denkabschnitt beginnt grundsätzlich auf der Objektebene und/oder in der Phase des Strukturierens.

Mit diesem Wissen können nun auch die Aufenthaltsmatrizen bezüglich eines geeigneten Abstandsmaßes miteinander verglichen werden. Ziel ist es dabei, im Rahmen einer Clusteranalyse „ähnliche“ Wege in Gruppen zusammen zu fassen. Bei ersten Auswertungen mit dieser Methode fällt auf, dass insbesondere solche Wege in eine Gruppe fallen, die auf einer Ebene oder innerhalb einer Phase parallel verlaufen. Dies könnte ein erster Anhaltspunkt für eine Klassifizierung von Wegen der Analogiebildung sein.

Literatur

Buckle, H. T. (1861) History of civilization in England. London, Parker and Son.

Gentner, D. (1983). Structure-Mapping: A theoretical framework for analogy. Journal of cognitive science, 7. S. 155-170.

Gentner, D.; Loewenstein, J.; Thompson, L. (2003) Learning and Transfer: A General Role for Analogical Encoding. In: Journal of Educational Psychology, Bd. 95, Nr. 2, S. 393-408.

Pólya, G. (1949). Schule des Denkens. Bern: A. Francke.

Pólya, G. (1962). Mathematik und Plausibles Schliessen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhäuser.

Ruppert, M. (2010) Analogiebildung - eine grundlegende mathematische Denkweise. In: Lindmeier, A. & Ufer, St. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. WTM-Verlag, Münster, S. 717-720.

Sternberg, R. J. (1977). Component Processes in Analogical Reasoning. Psychological Review, 84. S. 353-378.

Christian RÜEDE, Zürich

Zur Förderung des Strukturierens algebraischer Ausdrücke

Das Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks ist nach Malle (1993, S. 254) die Voraussetzung für das algebraische Umformen:

„Viele Lehrer sind sich der Tatsache gar nicht bewusst, dass dem Umformen algebraischer Ausdrücke ein Termstrukturerkennen zugrunde liegt. Man begnügt sich daher meist mit einem ‚endlosen' Üben des Umformens, ohne gezielt auf diese Voraussetzung – die man geradezu als ‚crux' aller Schülerfehler beim Umformen ansehen kann – einzugehen."

Konsequenterweise macht Malle mehrere Vorschläge zur Förderung des Strukturierens. In diesem Beitrag werden zwei weitere Aufgabenformate vorgestellt. Diese fokussieren auf das *Umstrukturieren*. Dadurch wird das Strukturieren tatsächlich gefördert, wie im Folgenden mit Hilfe eines vierstufigen Modells plausibel gemacht wird.

Ein vierstufiges Modell des Strukturierens

Zur Illustration des Modells des Strukturierens dient die Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$. Die nachstehenden Schüleraussagen sollen die jeweilige Stufe illustrieren (Genaueres in Rüede (2012)):

· Auf Stufe 1 verfolgt jemand das Ziel, den Ausdruck **optisch einfacher** zu machen. So streicht eine Schülerin die Klammern weg und erhält $7 = 100 - 3$ mit der Begründung „Ich habe $16 + 3x$ weg gestrichen, weil ein Minus dazwischen ist".

· Auf Stufe 2 verfolgt jemand das Ziel, den Ausdruck zu **ändern**. So multipliziert ein Schüler aus und fasst zusammen mit der Begründung „Ich schaue halt, ob man auf beiden Seiten etwas ausrechnen könnte".

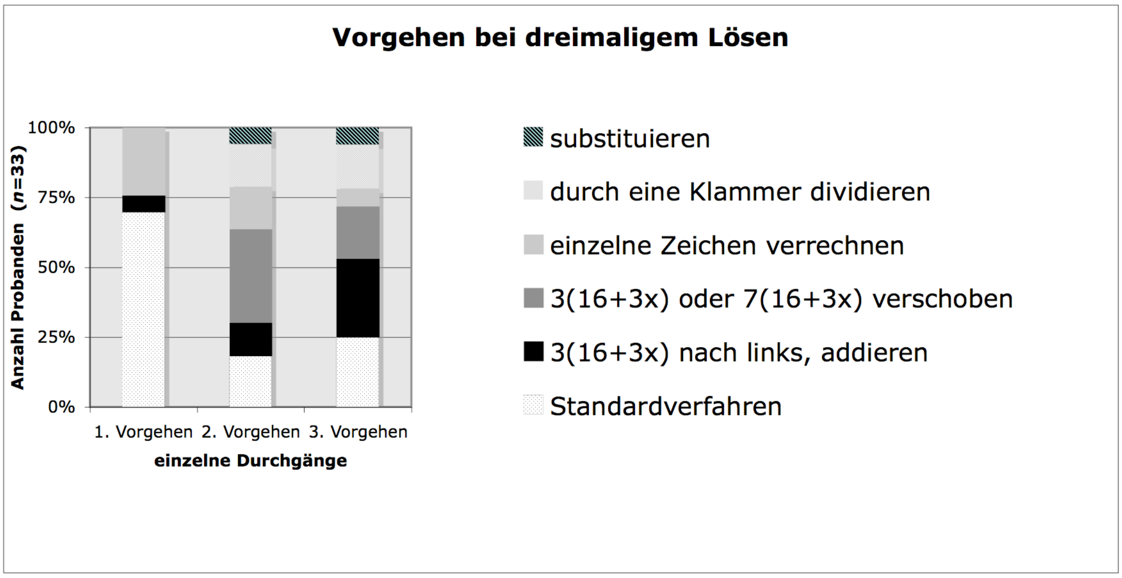
· Auf Stufe 3 wird das Ziel verfolgt, die Aufgabe zu **lösen**. Ein Schüler formt die Gleichung im zweiten Anlauf um auf $7(16 + 3x) + 3(16 + 3x) = 100$ mit der Begründung, dass dies „einfacher" sei. Er habe dies vorhin nicht gesehen „weil ich mich nur auf diese Klammer konzentriert habe und nicht noch auf die Zahl, also nur noch minus, dann ändert es [in der Klammer], aber nicht, dass ich das jetzt noch plus rechnen könnte".

· Und auf Stufe 4 verfolgt jemand das Ziel**,** die Aufgabe zu **diskutieren**. So kommentiert ein Schüler: „Klammern. So was kann man da umstellen. Die Klammern sind gleich? Ja, die Klammern sind die gleichen [...] also kann man so plus 3-mal die Klammern". In der Folge formt er die Gleichung direkt um zu $7(16 + 3x) + 3(16 + 3x) = 100$.

Im Fokus der folgenden Ausführungen steht der Übergang von Stufe 2 auf Stufe 3. Auf Stufe 2 wird ein Ausdruck vor allem darauf hin betrachtet, ob irgendetwas gerechnet – also ein Verfahren verwendet – werden kann. Die entsprechenden Bezüge dienen dem Ändern des Ausdrucks. Im Vordergrund steht das Ausführen eines Verfahrens, nicht das Erreichen eines intendierten Ziels wie etwa das Lösen der Gleichung. Sobald der Ausdruck geändert werden konnte, wird die Aufgabe als bearbeitet betrachtet. Auf der Stufe 3 hingegen wird eine hergestellte Strukturierung daran gemessen, ob sie zum intendierten Ziel führt. Konsequenterweise wird der Ausdruck weiter umstrukturiert, falls die erste Strukturierung unangemessen war. Eine solche Umstrukturierung wird durch die Orientierung am intendierten Ziel ausgelöst. Mit welchen Aufgaben könnte der Übergang von Stufe 2 zur Stufe 3 angeregt werden?

Erstes Aufgabenformat

Das erste Aufgabenformat besteht darin, mehrmals zum Lösen derselben Aufgabe aufzufordern. Der Effekt dieses Aufgabenformats wurde anhand der Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ untersucht. 33 Probanden wurden aufgefordert, diese Gleichung zu lösen, sie dann noch einmal zu lösen, aber anders, und sie schließlich nochmals anders zu lösen. Das Ergebnis ist ermutigend:



Zu Beginn neigten die Probanden zur Verwendung des Standardverfahrens, nahezu drei Viertel multiplizierten aus und fassten zusammen. Doch beim zweiten und dritten Lösungsversuch strukturierten viele Probanden um und verschoben meistens $7(16 + 3x)$ oder $3(16 + 3x)$. Über alle drei Versuche hinweggesehen, schaffte es sogar die Hälfte der Probanden, (selbstständig!) auf $10(16 + 3x) = 100$ umzuformen.

Dieses Aufgabenformat stößt Diskussionsanlässe im Unterricht an. So können die Schülerinnen und Schüler ihre unterschiedlichen Herangehensweisen analysieren, vergleichen und beurteilen im Hinblick auf Fragen wie: Was ist das Ziel der Umformung? Welche Wege führen zu diesem Ziel? Welcher Weg ist der eleganteste?

Die Hoffnung ist, dass sich durch die Auseinandersetzung mit Fragen wie diesen die Leseperspektive auf Gleichungen ändert. Eine Gleichung ist nicht einfach dazu da, irgendwie verändert zu werden, sondern sie bestimmt implizit eine Zahl (oder eine Menge von Zahlen), die durch das Umformen der Gleichung zu finden ist.

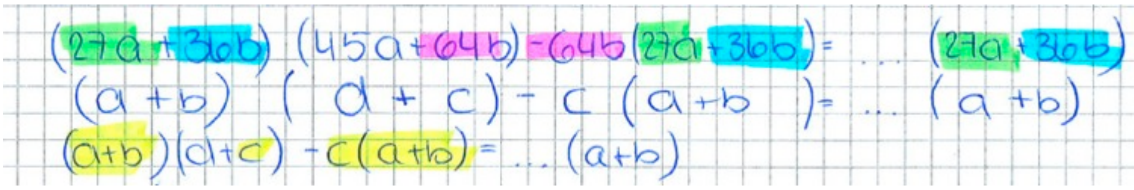
Zweites Aufgabenformat

Das zweite Aufgabenformat besteht in Aufgaben wie:

- Was gehört in die Box, damit die Gleichung allgemeingültig wird:
  $11 \cdot 2x - 2 \cdot 11x = 10x \cdot 3 - \square \cdot 3x$?
- Was gehört in die Box, damit die Gleichung allgemeingültig wird:
  $(7 + x)(21x + 14) - x(21x + 14) = 14 \cdot \square$?
- Ist die Gleichung allgemeingültig oder nicht?
  $247x - 178x = x + 246x - 178x$
- Ist die Gleichung allgemeingültig oder nicht?
  $8(4x + 2) - 16(2x + 1) = 16(2x + 1) - 8(4x + 2)$

Solche Aufgaben lenken davon ab, algebraische Ausdrücke als Input von Verfahren zu sehen. Denn bei obigen Aufgaben geht es darum, eine relationale Auffassung des Gleichheitszeichens zu entwickeln, indem die Gleichung zum Beispiel als Anwendung des Kommutativ- oder Distributivgesetzes verstanden wird. Eine analoge Aufgabe im Rahmen der Arithmetik wäre das Auffinden einer Zahl so, dass die Gleichung $65 - \square = 64 - 38$ stimmt (Carpenter, Franke & Levi, 2003). Kinder können dadurch nebst dem operativen Zugang zur Arithmetik auch das relationale Denken lernen und so den Subtrahenden und Minuenden bei der Subtraktion gleichsinnig verändern.

Welche Überlegungen dieses zweite Aufgabenformat evozieren kann, zeigt die folgende Passage einer Probandin:



Hier bearbeitet eine Probandin den Ausdruck $(27a + 36b)(45a + 64b) - 64b(27a + 36b) = \square\,(27a + 36b)$. Er soll allgemeingültig gemacht werden. Dazu färbt sie zuerst detailliert jene Teile mit derselben Farbe, die gleichartig sind. Danach bezeichnet sie gleichfarbige Teile mit demselben Buchstaben. Indem sie schließlich $a + b$ und c sowie $c(a + b)$ gelb färbt, kann sie auch ganze Klammerausdrücke als Objekte auffassen. Damit sind die distributiven Bezüge auf der linken Seite hergestellt.

Mit diesen beiden Aufgabenformaten können die Schülerinnen und Schüler lernen, Gleichungen nicht nur ändern zu wollen. Vielmehr stellen sie mathematisch relevante Bezüge her und erfahren, dass Gleichungen mathematische Äquivalenzen ausdrücken. So werden die Schülerinnen und Schüler zur Auffassung geführt, dass bei einer Gleichung jene Zahl interessiert, welche beide Seiten äquivalent macht, und dass es nicht nur darum geht, die Gleichung zu ändern.

Selbstverständlich wird dieses Lernziel nur dann erreicht, wenn die Bearbeitungen dieser Aufgaben im Unterricht reflektiert werden. Dann entfalten diese Aufgabenformate ihr ganzes Potential.

Fazit

Die obigen beiden Aufgabenformate eignen sich meines Erachtens zur Förderung des Strukturierens. Es ist nicht die Idee, Päckchen von solchen Aufgaben abzuarbeiten, sondern zwei, drei derartige Aufgaben pro Woche im Algebraunterricht zur Verfügung zu stellen. Die Aufgabenformate veranlassen die Lernenden in natürlicher Art und Weise dazu, zu argumentieren und zu begründen. So vermögen sie das Strukturieren algebraischer Ausdrücke zu fördern.

Literatur

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Portsmouth: Heinemann

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33* (1), 113–141.

Ildar SAFUANOV, Moskau

Symmetry and elements of Galois Theory at school

In Soviet Union, since 30-es of 20-th century, schools with mathematical bias and also mathematical circles at leading universities have been established. The pupils of studying at these schools and circles usually solved a lot of difficult problems and participated in mathematical Olympiads. In addition, they attended lectures of university professors and working mathematicians on various topics of modern and classic advanced mathematics. For example, since 30-es such prominent mathematicians as academicians, professors of Moscow university A.Kolmogorov, P.Aleksandrov, S.Sobolev, S.Yanovskaya, B.Delaunay, I.Gelfand and others gave lectures on difficult themes of abstract algebra, number theory, topology, mechanics etc.

For example, here is the list of some of these lectures:

Aleksandrov P. Transfinite numbers.

Kolomogorov A. Modular arithmetic and its applications in technology.

Kolomogorov A. Fundamental theorem of algebra.

Gelfand I. Fundamental concepts of the set theory.

Hinchin A. Continuous fractions.

Gelfond A. Prime numbers.

Kurosh A. What is algebra?

Pontryagin L. What is topology?

Shafarevich. I. Solving algebraic equations by radicals (i.e. using roots only).

Shnirelman L. Group theory and its application in the solving of the equations of 3-d degree.

Boltyansky V. Continuous fractions and musical gamma.

Yefremovich V. Non-Euclidean geometry.

These lectures had a great impact on the audience, and some of pupils that attended the lectures later became prominent mathematicians themselves (e.g.V.Arnold and A.Kirillov).

Today, the process of the differentiation of schools and higher education takes place. Many of schools are converted into gymnasiums, lyceums, vocational schools etc. Various supplements to programs, special and optional courses are included in curricula of schools.

The profile preparation of the pupils at school assumes their profound specialization in the senior grades on the appropriate scientific direction, in particular in the field of physical and mathematical education

In the traditions of Soviet mathematics education, it is useful to acquaint school pupils, especially gifted ones, with interesting and important topics of modern mathematics.

As an example of such topic one can choose symmetry and elements of Galois Theory. However, Galois Theory is extremely difficult even for university students and school mathematics teachers. Therefore, it is necessary to thoroughly select, adapt and elaborate concepts and results to be taught to school pupils. We propose our system of teaching this topic at school.

We think that it is possible to explain the elementary facts on symmetry and Galois Theory within a short course consisting of several, usually 4, lectures (one hour long each).

We begin with the definition of a symmetry of a geometrical figure as a rigid motion (i.e. 1-1 transformation preserving distances) that transforms a figure onto itself. For example, an isosceles triangle not being equilateral has only two symmetries: the identity transformation (leaving every point unchanged) and an axial symmetry - reflection around the straight line bisecting the angle between equal sides of the triangle. An equilateral triangle has six symmetries: except for identical transformation e, there are rotations by 120^0 and 240^0 (we will designate them a and b), and also three axial symmetries c, d and f around bisectors of the angles. A rectangle (not square one) has, in turn, four symmetries (identity, two axial symmetries and the rotation by 180^0.

Similarly, it is possible to define a symmetry of a geometrical body in the space as a rigid motion of space translating body onto itself. It appears, for example, that a regular tetrahedron has 24 symmetries. Note that the more symmetric a figure or a body looks, the more symmetries it has. For example, a circle and a sphere have infinitely many symmetries.

Furthermore, we introduce the notion of the composition of symmetries as their consecutive performance. Moreover, a transformation that is inverse to a symmetry is also a symmetry.

Now it is possible to introduce the concept of a group. It is important to show that number systems w.r.t. to addition and sets of non-zero rational or real numbers w.r. to multiplication constitute groups. Further, rising to the higher abstraction level, we introduce permutations and groups of permutations, i.e. symmetric groups (e.g. S_3).

Thus, in the second lecture we acquaint pupils with elementary notions of theories of groups, rings and fields: Abelian groups, Cayley tables of finite groups, subgroups, normal subgroups, polycyclic groups, solvable groups (without introducing the notion of a quotient group).

In the third lecture, we begin the study of the solvability of algebraic equations of higher degrees, namely the problem of finding all roots of the polynomial

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-1} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-2} + \ldots\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}.$$

First, we tell the pupils about attempts of finding the universal method of solving algebraic equations of any degree, acquaint them with formulas of Cardano and Ferrari for solving equations of 3-rd and 4-th degrees, with the theorem of K.F.Gauss on the existence of a complex root for a polynomial in one variable.

However, for equations of the 5-th degree it appeared to be impossible to find a formula for expressing solutions by radicals (i.e. using four arithmetic operations and computing roots of numbers, beginning with the coefficients of the polynomial).

It is important to include in the course elements of the history of the subject. In the research of the reason of the absence of a formula for solving `equations of 5-th degree such famous scientists as Josef-Louis Lagrange (1736-1813), Paolo Ruffini (1765-1822) and Niels Henrik Abel (who proved that general equations of the degree 5 and above are unsolvable by radicals) were engaged, and finally the problem was solved by Evariste Galois (1809-1830), who discovered and proved the necessary and sufficient conditions for solvability of the equations of any degree by radicals.

J.L.Lagrange was the first to notice that the solvability of the equation of 2-nd, the 3-rd 0r 4-th degree with rational coefficients is connected to the search of such polynomial with rational coefficients in several variables which preserves its value on the roots of a given equation accept under any permutation of these roots.

For example, polynomials in the left part of the Vieta formulas

$$x_1+x_2=-p,$$

$$x_1x_2=q$$

for the equation

$$x^2 + px + q$$

do not change their values under any permutation of two roots. However, not always such polynomials preserve their values under any permutation of roots. Consider, for example, the equation

$$x^3 - x = 0$$

with roots $x_1 = 0, x_2 = 1$ and $x_3 = -1$. The polynomial

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - x_3,$$

apparently, preserves its value 0 only under two permutations: identity permutation and transposition of x_1 and x_2.

It is possible to show, that for any equation of n-th degree (that, as we have noticed above, has n roots, some of which may be equal), the set of permutations preserving values of any polynomial that takes rational values on roots, is a subgroup in the group S_n of all permutations of n roots.

Thus, in the last lecture, we introduce the definition of a Galois group of the equation of n-th degree and formulate Galois criterion:

The equation of n-th degree is solvable by radicals if and only if its Galois group is solvable.

We provide the example of the equation with unsolvable Galois group (therefore, this equation is unsolvable by radicals):

$$x^5 - 13x + 13 = 0.$$

Of course, actually Galois theory is much deeper and more complicated. However, the approach described here allows pupils to get some certain views of the history and modern state of the problem of solving equations of any degree and of Galois' approach using symmetries and groups.

Literatur

Artin, E. (1998): Galois Theory. Dover Publications.

Postnikov, M. M. (2004): Foundations of Galois Theory. Dover Publications.

Alexander SALLE, Bielefeld

Interaktive Lösungsbeispiele als Elemente individueller Förderung

Im folgenden Artikel werden erste Ergebnisse einer Feldstudie vorgestellt, die einen Eindruck der Rolle vermitteln sollen, die interaktive Lösungsbeispiele in individuellen Förderszenarien einnehmen können. Die Untersuchung wurde in drei sechsten Realschulklassen durchgeführt, inhaltliches Thema war elementare Bruchrechnung.

1. Spannungsfelder, Forschungsdesiderata & Leitfragen

Der Stellenwert instruktionaler Materialien wird vor dem Hintergrund konstruktivistischer Lerntheorien kontrovers diskutiert (bsp. Kuhn, 2007). Insbesondere Lösungsbeispiele werden dabei häufig als rezeptive Lernmittel bewertet, die eher das oberflächliche Auswendiglernen schematischer Abfolgen als das aktive Lernen zur Folge haben. Inwieweit aus Lösungsbeispielen – insbesondere aus animierten – flexibel einsetzbares Wissen gewonnen werden kann, ist ebenfalls Gegenstand kontroverser Auseinandersetzungen. Aus diesem Spannungsfeld ergibt sich die erste Leitfrage: „Inwieweit lassen sich Lösungsbeispiele sinnvoll in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht einsetzen?“

Lösungsbeispiele werden in vielen Schulbüchern zu Beginn eines Lernabschnitts eingesetzt. Dies wird durch viele psychologische Forschungsarbeiten unterstützt, die den größten Nutzen von Lösungsbeispielen für Novizen bzw. Anfänger in einem Inhaltsbereich nachweisen (vgl. Sweller & Cooper, 1985). Hierbei werden jedoch Vorkenntnisse der Lernenden häufig ignoriert. Dies kann dazu führen, dass die Verwendung von Lösungsbeispielen eher zu einer Stagnation bzw. zu einem Rückgang der Leistungen führt, da beispielsweise Konflikte zwischen der Struktur der dargebotenen Lösung und den kognitiv bereits konstruierten Strukturen auftreten. Um diesen sogenannten Expertise-Reversal-Effekt (Kalyuga, 2003) zu umgehen, sollen Lösungsbeispiele zu bestimmten Themen nur bei individueller Eignung eingesetzt werden – am besten selbst gesteuert von den Lernenden. Mit diesem Ansatz folgt die zweite Leitfrage: „Inwieweit lassen sich Lösungsbeispiele in selbstgesteuerten Arbeitsphasen einsetzen?“

Die Untersuchung interaktiver Lösungsbeispiele ist ein hochaktuelles Forschungsthema. Insbesondere der Umgang von Schülerinnen und Schülern mit solchen animierten Beispielen wurde bisher nur spärlich untersucht (vgl. Betrancourt, 2005). Zum einen ist dies vor dem Hintergrund der Erfahrungen bei statischen Lösungsbeispielen interessant, zum anderen ist nicht klar, ob Lernende solche Animationen als Filme begreifen und rezeptiv wahrnehmen, oder ob sie die vorhandenen Möglichkeiten der Steuerung wahrnehmen (Mayer & Chandler, 2001). Dies führt zur dritten Leitfrage: „Wie verhalten sich die Nutzer im Umgang mit interaktiven Lösungsbeispielen?“

Durch gezielte Fragen, die die zentralen Konzepte eines Lösungsbeispiels fokussieren, können bestimmte Prozesse bei der Beispielverarbeitung angeregt werden (Chi et al. 1989, Renkl 1997). Während der Nutzen solcher Selbsterklärungs-Prompts als Unterstützung statischer Beispiele vielfach nachgewiesen und als Selbsterklärungs-Effekt formuliert wurde (Roy & Chi, 2005), ist diese Tatsache bisher für interaktive bzw. animierte Beispiele nicht bestätigt worden. Daher ist die vierte Leitfrage der Studie: „Sollten animierte Lösungsbeispiele durch Selbsterklärungsprompts unterstützt werden?“

2. Untersuchungsdesign

In den drei untersuchten Klassen wurde vier Wochen Bruchrechnung unterrichtet. Der Unterricht erfolgte bei den jeweiligen Klassenlehrkräften anhand von Leitlinien, die im Vorfeld erarbeitet wurden. Anschließend folgte eine vierstündige Phase, in der die Schülerinnen und Schüler auf der Basis eines Selbsteinschätzungsbogens individuell Inhalte der vorangegangenen Unterrichtssequenz üben konnten. Das Arbeitsheft und die Materialien wurden auf der Basis aktueller mathematikdidaktischer und instruktionspsychologischer Ergebnisse konzipiert (vgl. Salle, 2011). Je nach selbsteingeschätztem Leistungsstand konnten die Lernenden zwischen vollständig gelösten Aufgaben (interaktive bzw. statische Lösungsbeispiele), Aufgaben mit unvollständigen Lösungen (Fade-Out Examples) und ungelösten Aufgaben wählen.

Die vierstündige individuelle Phase, die die Schülerinnen und Schüler in Zweiergruppen absolvierten, unterschied sich in den drei Klassen auf der Ebene der Lösungsbeispiele. In der „6a“ wurden statische Lösungsbeispiele im Arbeitsheft bereitgestellt, die durch

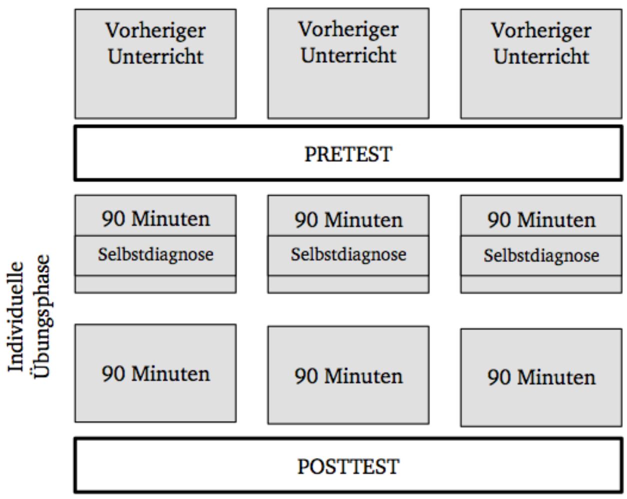


Abbildung 1: Übersicht des Untersuchungsdesigns

Selbsterklärungsprompts unterstützt wurden. In der „6b“ wurden diese Beispiele aus dem Heft entfernt und durch interaktive Lösungsbeispiele ersetzt, die wiederum durch Selbsterklärungsprompts ergänzt wurden. Die „6c“ hatte ein paralleles Setting zu der „6b“, nur dass hier keine Prompts zu den Beispielen gestellt wurden. Stattdessen erhielt die „6c“ im Vorhinein ein „Selbsterklärungstraining“: Den Schülerinnen und Schülern wurde erklärt, wie sie vorteilhaft mit solchen Beispielen lernen können.

Es stehen drei Arten von Daten zur Verfügung. Die mathematischen Leistungen wurden vor und nach der Intervention durch einen Pre- und einen Posttest erfasst. Weiterhin wurden die „6b“ und die „6c“ während der vier Förderstunden videographiert: Zum einen wurde der Bildschirminhalt jedes Computers aufgezeichnet, zum anderen wurden die Zweiergruppen mit Webcams gefilmt und ihre Kommunikation aufgezeichnet. Ergänzend dazu gibt es zu jedem Lernenden der drei Klassen ein Arbeitsheft, in dem die Selbsteinschätzung festgehalten ist und in dem die Selbsterklärungsprompts, Fade-Out Examples und Aufgaben bearbeitet worden sind.

3. Erste Ergebnisse

Die Auswertung des Pre- und Posttests ergibt erste Hinweise auf den Lernerfolg, den die Schülerinnen und Schüler der drei Klassen erreicht haben. Die drei untersuchten Klassen unterscheiden sich in den Pretest-Ergebnissen deutlich. Während die „6a“ und die „6c“ im arithmetischen Mittel eine signifikante Verbesserung aufweisen können und die mittleren 50% in ihrer Spannweite zusammenrücken, gibt es in der „6b“ nur eine minimale Verbesserung und die mittleren 50% rücken weiter auseinander.

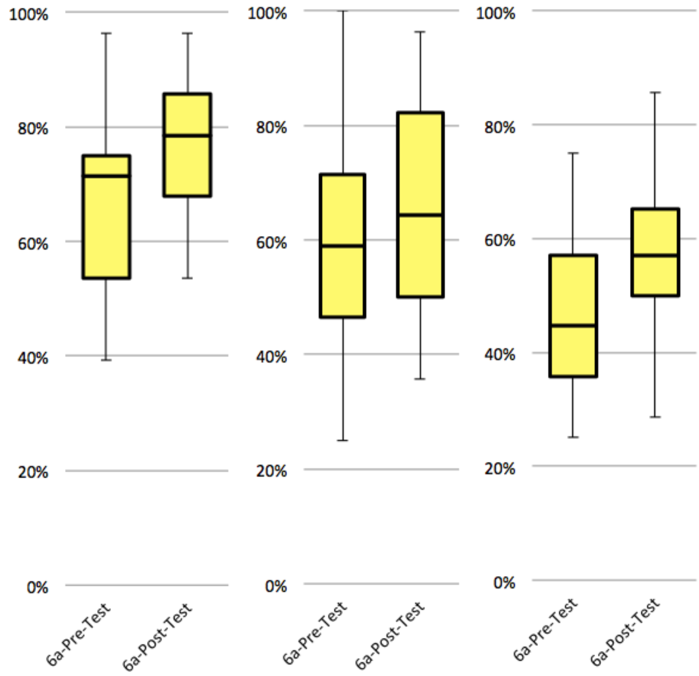


Abbildung 2: Pre- und Posttest-Ergebnisse

Diese Zahlen lassen erste Vermutungen in Bezug auf die eingesetzten Interventionen zu. Als erstes lässt sich festhalten, dass sich das Unterrichtssetting als praktikabel und erfolgreich erweist, dies wird durch einen Lernzuwachs in allen drei Klassen dokumentiert. Aufgrund der verschiedenen

Leistungsprofile der drei Klassen lässt sich zeigen, dass sich sowohl leistungsstarke als auch leistungsschwache Lernende verbessert haben. Besonders profitieren jedoch Lernende, die im Pretest zwischen 40% und 80% erreichten. Nur bei wenigen Schülerinnen und Schüler ist eine negative Differenz zwischen Pre- und Posttest zu verzeichnen.

Bevor jedoch belastbare Aussagen möglich sind, müssen die Ergebnisse anhand der vorliegenden qualitativen Daten validiert werden. Um insbesondere Schlüsse im Hinblick auf den Umgang mit den eingesetzten Lösungsbeispielen und deren Nutzen ziehen zu können, ist eine detaillierte, kategoriegeleitete Analyse der Videodaten indiziert. Dabei wird das Augenmerk besonders auf die Arbeitsprozesse am Computer und die Kommunikation in den Zweiergruppen gelegt. Dieser Schritt wird durch eine Auswertung der Schülerprodukte (Selbsterklärungsprompts, Fade-Out Examples, Aufgaben) ergänzt. Diese Prozesse sind zurzeit in Arbeit.

Literatur

Betrancourt, M. (2005): The Animation and Interactivity Principles in Multimedia Learning. In: Mayer, R.E. (Hrsg): The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. New York: Cambridge University Press.

Chi, M., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P. & Glaser, R. (1989): Self- explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. In: Cognitive Science, 13, 145-182.

Kalyuga, S. (2003): The Expertise Reversal Effect. In: Educational Psychologist, 38(1), 23-13.

Kuhn, D. (2007): Is Direct Instruction an Answer to the Right Question? In: Educational Psychologist, 42(2), 109-113.

Mayer, R.E. & Chandler, P. (2001): When Learning is just a click away: Does simple interaction foster deeper understanding of multimedia messages? Journal of Educational Psychology, 93, 390-397.

Renkl, A. (1997): Learning from worked-out examples: A study on individual differences. In: Cognitive Science, 31, 1-29.

Roy, M. & Chi, M. (2005): The Self-Explanation Principle in Multimedia Learning. In: Mayer, R.E. (Hrsg): The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. New York: Cambridge University Press.

Salle, A. (2011): Lösungsbeispiele in interaktiven Lernumgebungen. In Beiträge zum Mathematikunterricht (2011), S. 719 - 722.

Sweller, J. & Cooper, G. (1985): The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. In: Cognition and Instruction, 2, 59-89.

Alexandra SCHERMMANN, Ludwigsburg

Lernen mit Lösungsbeispielen beim Auswerten von Daten

1. Die Balance zwischen Instruktion und Exploration zwischen Fokussierung und Aktivierung

Lernen wird nach konstruktivistischer und kognitionspsychologischer Grundauffassung als ein individueller und zugleich aktiver Prozess verstanden. Zahlreiche Lehr-, Lernarrangements zielen darauf ab „aktives Lernen“ zu fördern. Häufig bleibt jedoch unklar, was darunter genau verstanden wird (Renkl, 2011). Auch führt das „Aktivieren“ nicht per se zu einem höheren Lernerfolg, zumal äußere Aktivität nicht gleich gesetzt werden kann mit „kognitiver Aktivierung“. Renkl (2011) nimmt stattdessen die Perspektive der fokussierten Informationsverarbeitung ein, die darauf abzielt die aktive Verarbeitung von Informationen auf zentrale Konzepte und Lernziele hin zu fokussieren.

Nicht nur aus kognitionspsychologischer, sondern auch aus didaktischer Sicht erscheint dieser Ansatz gewinnbringend: Schließlich müssen neue Inhalte in Schulcurricula immer in einer bestimmten Zeitspanne erarbeitet sein. Die Aktivitäten der Lernenden, seien es kognitive oder „händische“, sind typischerweise auf ein bestimmtes Lehr-/ Lernziel hin gebündelt. Diese Ziele bedingen, dass innerhalb des Schulsystems die Aktivitäten meist nicht „willkürlich“ von einem zum anderen Thema fließen können. Es soll also aktiv *und* fokussiert zugleich gelernt werden. Die Bündelung der Informationsverarbeitung funktioniert wie eine Art „Gerüst“ oder „Geländer“, an dem die Lernenden orientierend entlanggehen können. Jedoch sind schulische Lernprozesse immer auch Bildungsprozesse, die den „mündigen Bürger“ als Zielvorstellung haben, der in der Lage ist „sich seines eigenen Verstandes zu bedienen“. Aus diesem emanzipatorischen Erkenntnisinteresse heraus darf das Konzept der „fokussierten Informationsverarbeitung“ nicht einseitig die „Lenkung“ oder das „Führen“ betonen und hierfür missbraucht werden. Das aktive Tun und Handeln, das Explorieren in offenen Lernangeboten, das Problemlösen in unsicheren Situationen – das alles gehört genauso zum Bildungsprozess. Nicht immer kann und soll in solchen explorierenden Lernsituationen auf ein bestimmtes (vorgeplantes) Lernziel fokussiert werden. Vielmehr wird hier das Spektrum an Lernzielen aufgefächert. In diesem Sinne warnt auch Renkl (2011) vor einer ‚Überdidaktisierung’ und betont, dass eine fokussierte Informationsverarbeitung nicht bedeutet, „dass das Wichtige den Lernenden immer ‚auf dem Tablett serviert’ werden sollte.“ (S.29).

2. Das Lernen mit Lösungsbeispielen

Ein vielversprechender Ansatz, Lernende im Sinne der fokussierten Informationsverarbeitung zu aktivieren, stellt das Lernen mit Lösungsbeispielen dar. In zahlreichen Studien erwiesen sie sich als lernwirksam (vgl. dazu Hilbert, 2008). Insbesondere für Novizen und in gut strukturierten Domänen, wie beispielsweise in Physik oder in Mathematik, sind Lösungsbeispiele dem freien Problemlösen ohne Lösungsbeispiele überlegen (für einen Überblick vgl. Atkinson, Derry, Renkl, & Wortham, 2000).

Dennoch ist das Lernen mit Lösungsbeispielen kein Selbstläufer. Es zeigte sich, dass bestimmte Gestaltungs- und Einsatzrichtlinien lernförderlich sind. Beispielsweise sollten Zeichnungen und Berechnungen nicht separiert, sondern in einem integrierten Format dargestellt werden (Mayer & Moreno, 2003). Des Weiteren soll nicht an einem einzelnen Lösungsbeispiel, sondern an einer Sequenz aus mindestens zwei Lösungsbeispielen gelernt werden (Sweller & Cooper, 1985). Die Beispielsequenzen sollen dabei strukturbetont eingesetzt werden, so dass für die Lösung bedeutsame Merkmale hervortreten. Dies geschieht einerseits, indem verschiedene inhaltliche Kontexte für die gleichen Algorithmen verwendet werden und andererseits, indem dieselben Kontexte für verschiedene Algorithmen eingesetzt werden. Modulare Lösungsbeispiele, welche die Bedeutung einzelner Lösungsschritte für den gesamten Lösungsweg hervorheben, scheinen lernwirksamer zu sein als sogenannte „molare“ Lösungsbeispiele, die lediglich die einzelnen Lösungsschritte wiedergeben (Gerjets, Scheiter, & Catrambone, 2006).

Neben diesen von „außen“ durch die Lernumgebung gestalteten Intra-Beispiel- und Inter-Beispiel-Merkmalen wird zudem auf der individuellen Ebene unterschiedlich mit Lösungsbeispielen umgegangen. So fanden Chi et al. (1989) heraus, dass erfolgreiche Lerner sich die Lösungsbeispiele selbst erklären. Bei weniger erfolgreichen Lernern scheint dieser Vorgang nicht in Gang zu kommen. Letztlich laufen alle Forschungsbemühungen darauf hinaus, die Verarbeitungstiefe zu erhöhen und den Selbsterklärungseffekt hervorzurufen. Dies wurde beispielsweise versucht durch den Einsatz von unvollständigen Lösungsbeispielen (completion problems, fading) (Renkl, Atkinson, & Große, 2004) und in den letzten Jahren auch durch den (bewussten) Einsatz von Fehlern (Kopp, Stark, Heitzmann, & Fischer, 2009; Große & Renkl, 2007;). Hierbei scheint es günstiger zu sein, wenn die fehlerhaften Stellen markiert sind, der Lernende also nicht erst nach den Fehlern suchen muss.

3. Eine Interventionsstudie zum Auswerten von Daten

Da unvollständige und fehlerhafte Lösungsbeispiele bislang häufig in Laborstudien und mit älteren Lernenden (Oberstufenschüler, Studierende) eingesetzt wurden, interessiert in dieser Studie die Frage, wie lernwirksam diese Typen von Lösungsbeispielen im regulären Mathematikunterricht sind. Hierfür wurde eine Lernumgebung zur elfstündigen Unterrichtseinheit „Auswerten von Daten" für die Klassenstufe 8 der Realschule konzipiert. Dabei wurde der gesamte Datenkreislauf von der Fragestellung über die Planung, die Erhebung und die Auswertung sowie das Schlussfolgern durchschritten (Wild & Pfannkuch, 1999). Insgesamt kamen vier Lösungsbeispiele zu folgenden Themen zum Einsatz: „Arithmetischer Mittelwert und Spannweite" sowie „Median" „Quartile" und „Boxplots deuten". Die Lösungsbeispiele waren so konzipiert, dass immer eine Sequenz von zwei Lösungsbeispielen pro Thema eingesetzt wurde. Im Sinne der modularen Lösungsstruktur wurden die einzelnen Lösungsschritte begründet und erläuternd dargestellt. Es kamen jeweils drei Typen von Lösungsbeispielen (Treatmentgruppen) zum Einsatz: vollständige, unvollständige und fehlerhafte Lösungsbeispiele. Jede Schulklasse wurde gleichmäßig – unter Berücksichtigung der Mathematiknote und des Geschlechts – in die drei Gruppen eingeteilt. Insgesamt nahmen sieben Schulklassen (N=200) teil. Die Probanden wurden post-hoc hinsichtlich ihres Vorwissens aufgeteilt. Das Vorwissen wurde über die aktuelle Mathematiknote operationalisiert (Note 1,0 bis 2,5 - „hohes Vorwissen", Note zwischen 2,5 und 3,5 (ausschließlich) - „mittleres Vorwissen", Note 3,5 (einschließlich) und schlechter - „niedriges Vorwissen"). Der Lernzuwachs wurde über einen fachinhaltlichen Test erhoben (pre, post, follow-up Erhebung). Anhand der bisherigen Forschungslage wurde ein stärkerer Lernzuwachs bei den unvollständigen bzw. fehlerhaften Lösungsbeispielen im Vergleich zu den vollständigen vermutet, da bei den ersteren der Selbsterklärungseffekt höher ausgeprägt sein dürfte. Außerdem wurde ein Interaktionseffekt zwischen dem Vorwissen und dem Lösungsbeispieltyp vermutet, wie er beispielsweise bei Große & Renkl (2007) auftrat. Demnach können Lernende mit hohem Vorwissen stärker vom Verbessern der Fehler profitieren als Lernende mit geringem Vorwissen. Die varianzanalytische Auswertung ergab einen Haupteffekt des Vorwissens. Demnach haben Lernende mit einer guten Mathematiknote einen signifikant höheren Wissenszuwachs als Lernende mit einer schlechten Mathematiknote (α=0,001; F=25,603; partielles η^2=0,239). Es zeigte sich kein Haupteffekt des Typus Lösungsbeispiel (vollständig, unvollständig, fehlerhaft).

Für die Lösungsbeispiele zum Thema „Quartile“ und „Boxplots deuten“ wurden die Lernzeiten erhoben. Es zeigten sich signifikante Unterschiede ($p < 0{,}05$) hinsichtlich der drei Typen von Lösungsbeispielen: die Lernenden verbrachten durchschnittlich am wenigsten Zeit mit den vollständigen (19,8 min.) und am meisten mit den unvollständigen Lösungsbeispielen (26 min.). Bei den fehlerhaften Lösungsbeispielen benötigten die Lernenden nur knapp 2 Minuten mehr als bei den vollständigen Lösungsbeispielen zum Thema „Quartile“.

Weitere Analysen z.B. hinsichtlich der Motivation, der mathematischen Selbstwirksamkeit und der subjektiv wahrgenommenen kognitiven Auslastung folgen. Über deren Ergebnisse wird dann auf der nächsten GDM-Tagung berichtet.

Literatur

Atkinson, R. K., Derry, S., Renkl, A., & Wortham, D. (2000): Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. Review of Educational Research, 70, 181–214.

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989): Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. Cognitive Science, 13, 145–182.

Gerjets, P., Scheiter, K., & Catrambone, R. (2006): Can learning from molar and modular worked examples be enhanced by providing instructional explanations and prompting self-explanations? Learning and Instruction, 16, 104–121.

Große, C. S., & Renkl, A. (2007): Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes. Learning and Instruction, 17, 612–634.

Hilbert, T. (2008): Learning cognitive skills from complex examples:: Extending the Rationale of Example-Bases Learning Beyond the Boundaries of Algorithmic Domains. Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg im Breisgau.

Kopp, V., Stark, R., Heitzmann, N., & Fischer, M. R. (2009): Self-regulated learning with case-based worked examples: effects of errors. Evaluation & Research in Education, 22, 107–119.

Mayer, R., & Moreno, R. (2003): Nine Ways to Reduce Cognitive Load in Multimedia Learning. Educational Psychologist, 91(4), 638–643.

Renkl, A. (2011): Aktives Lernen in Mathematik: Von sinnvollen und weniger sinnvollen Konzeptionen aktiven Lernens. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Ed.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik (pp. 23–30).

Renkl, A., Atkinson, R. K., & Große, C. S. (2004): How fading worked solution steps works - a cognitive load perspective. Instructional Science, 32(1-2), 59–82.

Sweller, J., & Cooper, G. (1985): The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. Cognition and Instruction, 2(59-89).

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999): Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review, 67(3), 223–248.

Gerald SCHICK, Pädagogische Hochschule Freiburg

Analyse von Eye-Tracking-Daten zur Generierung von Hypothesen über Präkonzepte und Fehlvorstellungen beim Winkelkonzept

In der diesem Beitrag zugrunde liegenden Studie sollte den Fragen nachgegangen werden, was Alltags- und Präkonzepte beim Winkelkonzept sind und worin die Ursachen von Fehlkonzepten liegen könnten.

Im Folgenden soll ein Einblick in erste Ergebnisse einer Pilotierungsstudie gegeben werden. Dabei wurde versucht, mittels der Auswahl und des Einsatzes der Methoden eines Eye-Trackers „sichtbar zu machen“, wie Kinder denken.

Winkel

Das Winkelkonzept ist zweifellos eines der komplexesten geometrischen Grundkonzepte. „Die Definition des Winkelbegriffs ist überraschend schwierig.“ (Schupp 2006). So kann der Winkel von Halbgeraden oder Geraden definiert, als Fläche oder als Rand betrachtet und als orientiert oder nicht-orientiert angesehen werden. Kommt noch eine statische oder dynamische Winkelvorstellung hinzu, so ist die Vielfältigkeit und enorme Bandbreite des Winkelbegriffs erahnbar. Je nachdem, in welchem Bereich und Zusammenhang man den Winkelbegriff verwendet, scheint nun der eine schwerfällig oder der andere passend zu sein (Becker 1980). Um einem „umwelt- und anwendungsbezogenen Geometrieunterricht“ gerecht zu werden, sowie einem auf die Heterogenität der Kinder eingehenden Unterricht, müssen mehrere verschiedene Merkmale und Definitionen des Winkels betrachtet und vermittelt werden (Krainer 1989).

„The problem seems to be that angle is such a multifaceted concept.“ (White, Mitchelmore 2001). Zum beschriebenen Problem der Vielschichtigkeit des Winkelbegriffs kommt hinzu, dass viele weitere geometrische Konzepte auf einem mathematisch tragfähigen Winkelbegriff aufbauen und Fehlkonzepte hierbei sehr hindernd wirken können.

Fehlvorstellungen beim Winkelkonzept

Eine der umfassendsten Sammlungen an Fehlvorstellungen hat Close (1981) aufgestellt, welche von Krainer 1989 erneut aufgegriffen, auf Validität überprüft und durch eigene Interviews vertieft wurde. Seither gab es wenige aktuelle und umfangreiche Studien zu den Fehlkonzepten beim Winkelbegriff.

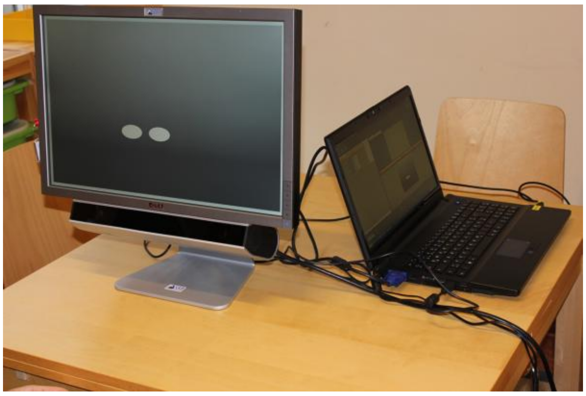
Zu den verbreitetesten Fehlvorstellungen gehören:

- Schwierigkeiten beim differenziellen Umgang mit Alltag und Fachsprache, z.B. „rechter Winkel" als „rechtsliegender Winkel"; volle Drehung als 180° statt 360° (z.B. Close 1981); Verwechslung von rechter Winkel und Rechteck (Fielker 1979).
- Winkel, bei denen ein oder zwei Schenkel unsichtbar sind, werden nicht identifiziert (White, Mitchelmore 2001).
- Winkel, die in geometrischen Figuren eingebettet sind, werden schlechter erfasst (Fielker 1979) oder
- wenn mehrere Schenkel zusammenstoßen (Giles 1981).
- Das Erkennen überstumpfer Winkel gelingt schlecht (Close 1981).
- Einschätzung der Größe der Winkel wird beeinflusst durch akzidentelle Eigenschaften, wie Bogenlänge, Schenkellänge, Lage des Winkels am Zeichenblatt (z.B. Bright 2003, Close 1981).

Es gibt wenig Forschung darüber, worin die Ursachen solcher Fehlkonzepte liegen, welche Faktoren die Kinder anfällig machen oder was sich zur Vermeidung der Fehlkonzepte tun lässt. Eine der umfassendsten Arbeiten hierzu haben Piaget et al. 1974 veröffentlicht, wobei sie die jeweiligen Fehlkonzepte nur über die geistige Entwicklung der jeweiligen Altersstufe erklären können. Erklärungen ohne Berücksichtigung des Alters gelingen ihnen nicht.

Das Ziel dieses Dissertationsprojekts besteht darin, mittels des Eye-Trackers Erkenntnisse darüber zu gewinnen, wie es zu solchen Fehlkonzepten der Kinder kommt und Einsichten in mögliche Zugänge der Kinder zum Winkelkonzept, also Präkonzepte, zu ermöglichen.

Eye-Tracking



Eye-Tracker, also Systeme zur Blickerfassung, sind am ehesten bekannt aus dem Marketing, sowie der Web-Usability. Auf einem Monitor wird ein statischer oder dynamischer Stimulus präsentiert und mittels eines unter dem Stimulusmonitor angebrachten Infrarotgerätes wird sichtbar gemacht, wohin der Proband auf dem Monitor im selben Moment seinen Blick richtet. Der Testleiter kann dies in Echtzeit an einem externen Computer nachvollziehen.

Der Vorteil dieses Aufbaus und dieser neueren Generation an Eye-Tracking-Geräten ist die maximale Freiheit der Testpersonen, im Unterschied zu Vorgängermodellen, bei denen z.B. der Kopf festgeschnallt werden musste.

Aber auch in der Mathematik kommt der Eye-Tracker bereits zum Einsatz, mit zu den bekanntesten Studien zählt wohl jene zur Unterscheidung zwischen funktionalen und prädikativen Denken von Schwank (2003).

Mittels Eye-Tracking lassen sich Fixationen (Dauer ca. 200-300ms), die sich in Form von Punkten bzw. Kreisen darstellen und Sakkaden (30-50ms), dieses sind die geradlinigen Verbindungen zwischen den Fixationen, voneinander unterscheiden und deren Position, Wege und Dauer nachvollziehen.

Ablauf der Pilotierungsstudie

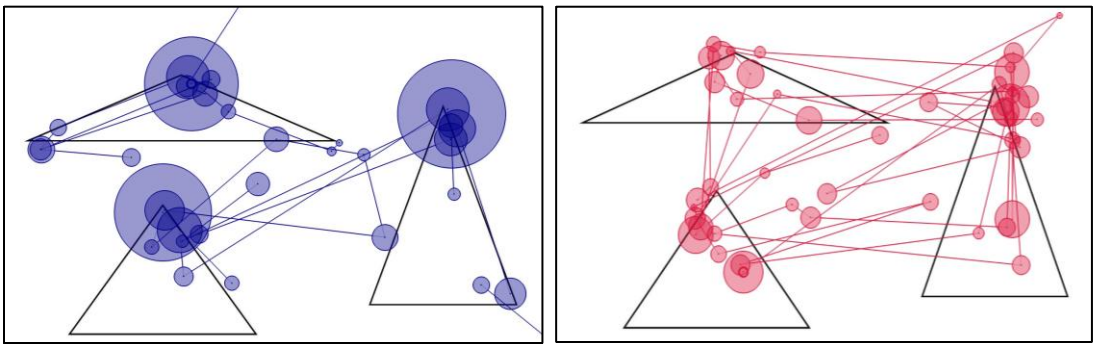
Für die Pilotierungsstudie wurden 11 Schülerinnen und Schüler einer vierten Klasse Grundschule ausgewählt, weil angenommen wurde, dass diese noch nicht über ein von der Schule geprägtes Winkelkonzept verfügen.

Als Items sollten Fotos oder Bilder mit "winkelhaltigen" Situationen, sowie deren abstrahierte zeichnerische Darstellung dienen.

Mittels Fragen seitens des Interviewers und think-aloud der Kinder, sollte ermittelt werden, wohin diese schauen. Dabei waren die Fragen zunächst offen (was siehst du, wo liegen Unterschiede) und wurden zunehmend geschlossener (welches Dach ist das flachste).

Erste Erkenntnisse

Eine erste Erfahrung, die gewonnen werden konnte, war, dass man durch den Eye-Tracker unterschiedliche Lösungsstrategien der Kinder offensicht-



lich machen kann; dies wäre ohne die "technische Hilfe" nicht möglich gewesen. So lässt sich in bei Viktoria (linke Abb.) erkennen, dass sie wenige(r) Sakkaden hat, aber sehr lange Fixationen, was sich an der Größe der

Kreise zeigt. Michaela (rechte Abb.) hingegen hat sehr viele Sakkaden (also die Verbindungen zwischen den Kreisen) aber kürzere und häufigere Fixationen. Was dies über die Qualität der Strategie aussagt, kann aus der Darstellung heraus nicht beurteilt werden. Dies ist jedoch ein Ansatzpunkt, an dem im Projekt weiter geforscht werden kann.

Weiterhin zeigt sich nach einem Vergleich der verschiedenen Auswertungswerkzeugen, die der Eye-Tracker liefert, dass sich mehr Informationen aus den dynamischen als den statischen Analyseverfahren des Eye-Trackers ziehen lassen.

Ausblick

Mittelfristig muss zunächst eine weitere Auswertung der bereits erhobenen Eye-Tracking-Daten erfolgen, in denen ein nahezu unerschöpfliches Potential steckt. Des Weiteren wird es Eye-Tracking-Studien zu konkreten Fehlkonzepten beim Winkelkonzept über verschiedene Alters- und Schulstufen geben.

Langfristig wird an der Entwicklung eines Kompetenzmodells in Form einer schrittweisen Entwicklung eines Diagnostikums gearbeitet.

Literatur

Becker, G. (1980): Geometrieunterricht. Bad Heilbrunn, Klinkhard Verlag.

Bright, G. W. (2003): Angle measurement: Teaching notes. In: Classroom activities for learning and teaching measurement. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA. 25-26.

Close, G.S. (1982): Children’s understanding of angle at the primary/secondary transfer stage. London, Polytechnic of the South Bank.

Fielker, D.S. (1979): Strategies for Teaching Geometry to Younger Children. In: Educ. Stud. Math. 10, 85-133.

Giles, G. (1981): School Mathematics under Examination: 3. Factors Affecting the Learning of Mathematics. University of Stirling.

Krainer, K. (1989): Lebendige Geometrie. Frankfurt, Peter Lang.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1974): Die natürliche Geometrie des Kindes. Klett, Stuttgart.

Schupp, H. (1977): Elementargeometrie. Paderborn, UTB Schoeningh.

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In: Schwank, I.: ZDM Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', 70-78.

White, P. & Mitchelmore, M. C. (2001): Teaching for Abstraction: Angle as a Case in Point. In: Bobis, J., Perry, B. & Mitchelmore, M. C. (Eds.): Numeracy and Beyond. Proceedings of the 24th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney, 531-538.

Stephanie SCHIEMANN, Berlin

Spannende Mathe-News und Tipps für den Unterricht von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Im Jahre 2010 hat die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) mit finanziellen Mitteln der Deutschen Telekom Stiftung das Netzwerkbüro Schule — Hochschule eingerichtet und mit der Studienrätin Stephanie Schiemann besetzt. Betreut wird es von den Professoren Jürg Kramer (HU Berlin), Günter Törner (Uni Duisburg-Essen) und Günter M. Ziegler (FU Berlin). Das Netzwerkbüro ist am Lehrstuhl von Herrn Ziegler an der FU Berlin beheimatet. Die Aufgaben knüpfen an das erfolgreiche Jahr der Mathematik 2008 an. Schul- und Lehrerprojekte werden hier weitergeführt und weiterentwickelt. Im Laufe der Projektzeit bildeten sich auch neue Ausrichtungen heraus. Die Kern-Projekte und -Angebote des Netzwerkbüros sollen hier kurz geschildert werden.

1. DMV-Abiturpreis Mathematik

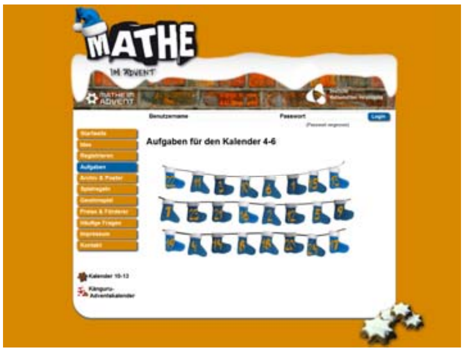
Seit 2008 verleiht die DMV in Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag Heidelberg den *Mathematik-Abiturpreis* an jede deutschsprachige Schule im In- und Ausland, die Abitur vergibt. Jeweils ein Preis ist kostenfrei (bei Doppelabiturjahrgängen zwei). Er soll für eine exzellente Leistung im Abiturfach Mathematik vergeben werden. Mehrpreisvergabe ist möglich, aber kostenpflichtig:16€ für die einjährige DMV-Mitgliedschaft + 24,95€ für das Abiturpreisbuch. Der Mathematik-Abiturpreis ist online auf der DMV-Homepage bestellbar. Jeder Abiturpreisträger erhält einer Urkunde *„DMV-Abiturpreis Mathematik“*, das *Abiturpreisbuch „Pi und Co. Kaleidoskop der Mathematik“* und eine *einjährige beitragsfreie Mitgliedschaft* in der DMV. Es ist also analog zum Physikpreis der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (DPG). Die Entscheidung, welche Schülerinnen und Schüler ausgezeichnet werden, trifft die Schulleitung oder die Fachleitung Mathematik nach Ermessen. Die Abiturpreise sollen möglichst im Rahmen der Abiturfeier der Schule feierlich übergeben werden.

	2008	**2009**	**2010**	**2011**
Anzahl Abiturschulen	4906	4906	4906	**4906**
Anzahl Preisschulen	1167	993	1339	**1798**
Anteil Preisschulen	23,8%	20,2%	27,3%	**36,6%**
Anzahl Preise	1320	1200	1786	**2631**
Doppelabiturpreise				**406**

Statistik der ersten vier Jahre des Mathematik-Abiturpreises

2. Mathe-Adventskalender

Vorbild der beiden DMV-Mathe-Adventskalender für die Klassenstufen 4 bis 6 und 7 bis 9 war der digitale Adventskalender vom DFG-Forschungszentrum MATHEON für die Oberstufe. Der erste Mittelstufenkalender wurde 2008 aus der Taufe gehoben, zunächst für die für die Klassenstufen 5 bis 7. Im Jahr 2010 sorgte das Netzwerkbüro für die Durchgängigkeit der Mathekalender und öffnete den Unterstufenkalender auch für die Grundschüler.



Heute nehmen Schülerinnen und Schüler ab der 2. Klasse bis zum Abitur an den drei Mathekalendern teil (Altersverteilung siehe Diagramm). Für mathebegeisterte Erwachsene gibt es neben dem MATHEON-KALENDER auch zusätzlich noch einen Spaßaccount der DMV-Kalender. Letzteres nutzen 4414 Personen. Im Advent 2011 gab es einen Teilnehmerrekord: Über 100.000 Schüler/-innen und 4274 Lehrer/-innen nahmen mit 5110 Klassen an den Mathekalendern teil.

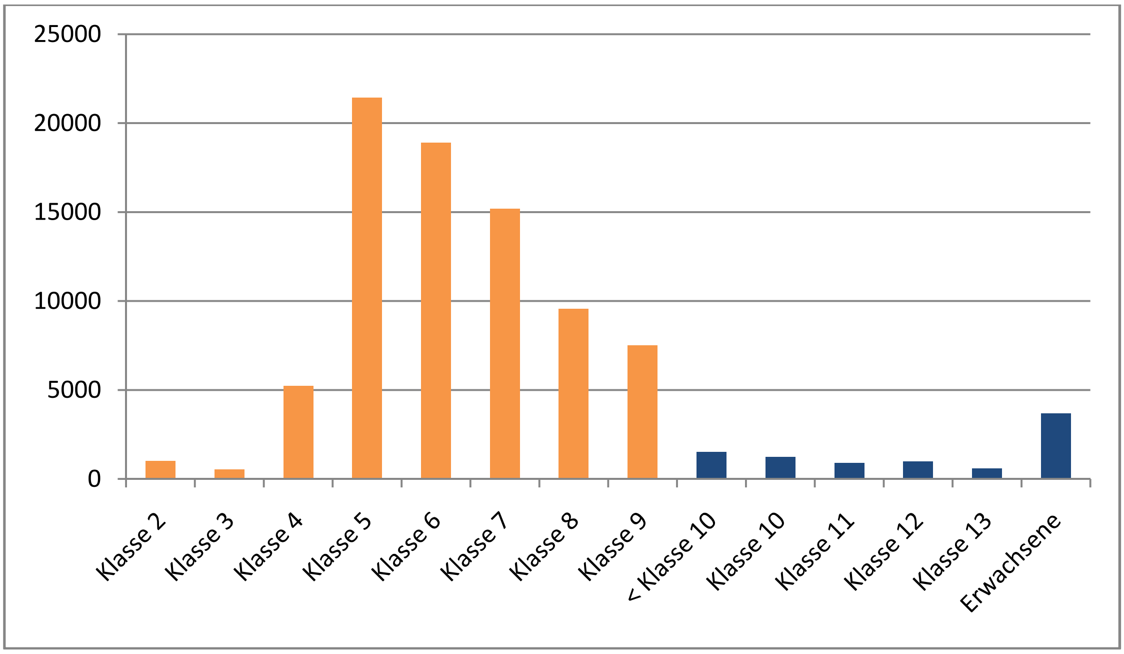


Diagramm: Mathekalender 2011 - Verteilung auf die Klassenstufen
Kl. 2-9 (hell): DMV-Kalender (Kl.4-6, 7-9), ab < Kl. 10 (dunkel): MATHEON-Kalender

3. Mathematik-Schülerwettbewerbe

Die Landschaft der Schülerwettbewerbe wird immer vielfältiger, aber auch immer unübersichtlicher. Neben den traditionellen Mathematik-Wettbewerben, wie der Mathematik-Olympiade und dem Bundeswettbewerb oder auch dem erfolgreichsten mathematischen Schülerwettbewerb, dem Känguru der Mathematik (2010: 825.000 Teilnehmer!), gibt es inzwischen noch viele weitere interessante mathematische Wettbewerbe. Zur besseren Übersicht hat das Netzwerkbüro einen Mathematik-Wettbewerbs-Schuljahresplaner erstellt, der zum Download auf der DMV-Webseite unter Schulthemen zur Verfügung steht. Zudem werden alle bundesweiten, regionalen und internationale Mathe-Wettbewerbe und auch einige MINT-Wettbewerbe kurz erläutert und verlinkt. Dies kann allen Mathematiklehrerinnen und Lehrern, insbesondere den jungen Anwärtern zur Orientierung dienen und helfen Anmeldetermine zu verpassen.

4. Mathelandkarte

Die Mathelandkarte vereinigt nennenswerte Mathematik-Projekte an Schulen, Hochschulen und anderswo. Es wird der Standort, die Ansprechperson und möglichst eine Web-Adresse genannt. Die blauen Pins stehen für aktuelle Mathematik-Talentförderprojekte für Schülerinnen und Schüler. Die gelben Häuser stehen für Mathematik-Ausstellungen in Museen oder anderswo und die weißen Frauen und Männer stehen für unsere aktive Mathemacherinnen und Mathemacher und zeigen ihr jeweiliges Engagement. Möchten Sie selbst als Mathemacher(in) oder mit Ihrem (Talentförder-) Projekt hier zu finden sein, melden Sie sich bitte beim Netzwerkbüro.

5. Mathemacherinnen und Mathemacher

Die Idee der Mathemacher stammt aus dem Jahr der Mathematik. Sie geben der Mathematik in Deutschland ein Gesicht und sind das „M“ der MINT-Botschafter/-innen für die Mathematik. Möchten Sie Mathemacher(in) werden, melden Sie sich bitte beim Netzwerkbüro.

Zu finden sind die Mathemacher in der Mathelandkarte und zusätzlich in der A-Z-Liste. Die monatlich ausgezeichnete Person steht aktuell auf der Startseite der DMV-Homepage und später im Archiv. Mathemacherin des Monats März 2012 ist deutsche Mathematikerin *Emmy Noether*. Sie war Jüdin und ist am 23. März 1882 geboren und am 14. April 1935 gestorben. Sie wird auch „Mutter der modernen Algebra" genannt.

links: Emmy Noether (Oberwolfach, MFO)

6. DMV-Lehrerforum

Im Forum der DMV werden verschiedene Rubriken rund um die Mathematik angeboten, darunter auch die Themen „Mathematik in der Schule“ und „Bildungspolitische Themen“. Regelmäßig werden dort vom Medien- und vom Netzwerkbüro Beiträge und Nachrichten eingestellt, die öffentlich lesbar sind und Mitglieder zum Diskutieren anregen oder kommentieren sollen. Auf Anregung einer Tagungsteilnehmerin, werden wir hierfür auch GDM-Mitglieder freischalten, die mitreden möchten. Bitte melden Sie sich bei Interesse im DMV-Netzwerk- oder Medienbüro. DMV-Mitglieder können im eingeloggten Zustand auch selbst Beiträge einstellen. GDM-Mitglieder mögen mir bitte ihr Wunschthema mailen.

7. Mathematik-Veranstaltungskalender

Der Mathematik-Veranstaltungskalender bietet weltweit interessante Mathematik-Termine an. Filter erlauben die Selektion nach Ansprechgruppe (Hochschullehrer, Lehrer, Schüler, Studierende und Interessierte) und nach Region (10 PLZ-Gruppen). Für Hinweise auf Veranstaltungen sind wir sehr dankbar. Bitte melden Sie sich! DMV-Mitglieder können auch selbst Termine einstellen und komfortablere Ansichten des Kalenders wählen.

Literatur

Kramer, J., Schiemann, S., Törner G. (2010): DMV nimmt Stellung zu geplanter Schulreform in Hamburg, MDMV 18-3 / 2010 | 158–159.

Lohauß, N. und Schiemann, S. (2011): Rekordzahlen bei Mathe im Advent, MDMV 20-1 / 2012.

Schiemann, S. (2010): Netzwerkbüro Schule — Hochschule, In: MDMV 18-2 / 2010 | 115–117.

Schiemann, S., Wöstenfeld, R. (2010): 3 Jahre Abiturpreis – und weiter? (Wie) gewinnen wir den Nachwuchs für die Mathematik?“, MDMV 18-3 / 2010 | 139–140.

Schiemann, S. und Wöstenfeld, R. (2011): Mathematik statt Schokolade: Bei Kindern sehr beliebt, MDMV 19-1 / 2011 | 10-11.

Schiemann, S. und Wöstenfeld, R. (2011): Die DMV begrüßt die Abiturpreisträger und die neuen Lehrermitglieder, MDMV 19-3 / 2011 | 179.

Schiemann, S. (2011): Mathe-Blogg , http://blog.scoyo.de/2011/07/problemfach-mathe/

Schiemann, S. (2011): Ausgezeichnete Mathemacher und MINT-Botschafter des Jahres 2011, MDMV 20-1 / 2012.

Maike SCHINDLER, Dortmund, Stephan HUßMANN, Dortmund

„Plus ist gut, minus ist schlecht“ – Eine Lernprozessstudie zur Rolle des Kontextes und des Transfers im Bereich der negativen Zahlen

Im vorliegenden Beitrag werden die Konzeption und erste Ergebnisse einer Lernprozessstudie dargestellt. Die Zielperspektiven dieser Studie sind: Erkenntnisse zu individuellen Begriffsentwicklungen von Schülerinnen[1] zu den negativen Zahlen zu erlangen, Theorieentwicklung zum Begriff der negativen Zahl zu leisten und die Entwicklung einer Lernumgebung zu begleiten, in der die Einführung der negativen Zahlen innerhalb eines Kontextes erfolgt. Es wird – neben weiteren – den Fragen nachgegangen, über welche individuellen Begriffe die Schülerinnen *vor* der Einführung ganzer Zahlen verfügen und inwiefern die Schülerinnen zur Bearbeitung von Rechenaufgaben auf Kontexte oder die Zahlengerade zurückgreifen. Im Anschluss an eine Unterrichtsreihe zu ganzen Zahlen wird untersucht, inwiefern sich Entwicklungen des individuellen Begriffs der negativen Zahl vollzogen haben und inwiefern die Schülerinnen dazu in der Lage sind, ihr Wissen in andere Kontexte zu transferieren.

Im Rahmen des Projektes Kosima (Barzel et al. 2011) wurde eine Lernumgebung entwickelt mit dem Ziel, ausgehend von einem realistischen Kontext die Entwicklung eines tragfähigen individuellen Begriffs der negativen Zahl zu ermöglichen. Der gewählte Kontext musste dabei u.a. den Ansprüchen genügen, (a) an die Erfahrungen und die Lebenswelt der Schülerinnen anzuknüpfen und (b) tragfähig für alle Rechenoperationen mit ganzen Zahlen zu sein (Leuders et al. 2011). Um an die Erfahrungen der Schülerinnen anzuknüpfen, wurde der Kontext Guthaben und Schulden gewählt. Da die gängigen Modelle im Kontext Guthaben und Schulden jedoch nur bedingt authentisch und auch nicht für alle Rechenoperationen uneingeschränkt tragfähig sind, wurde mit der Lernumgebung „Schulden und Guthaben“ (Hußmann/Schindler 2013) ein neues Modell entwickelt, welches eine sinnstiftende Interpretation von Zahl- und Rechenzeichen für alle Grundrechenarten ermöglicht. In diesem Modell werden die Rechenzeichen als zeitliche Operationen und die Zahlzeichen als Bestand bzw. Veränderung gedeutet.

[1] Das generische Femininum bezieht sich in diesem Beitrag auf beide Geschlechter.

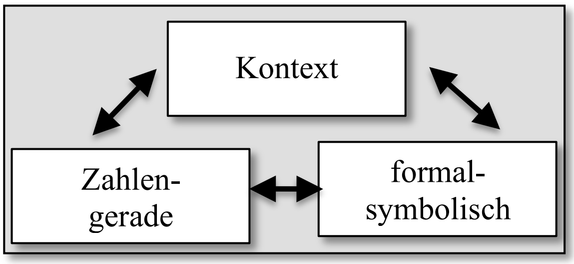


Abbildung 1 Drei Dimensionen für das Lernen des Begriffs der negativen Zahl

Für die Entwicklung des Begriffs der negativen Zahl sind drei Dimensionen und der Wechsel zwischen ihnen von Bedeutung (vgl. Bruno 1997): (1) Kontexte, die den Begriff bedeutsam machen und Ankerpunkte in der Realität bilden, (2) die Zahlengerade als wesentliches Anschauungsmittel sowie (3) die formal-symbolische Dimension – eine dekontextualisierte Darstellung der Aufgaben (vgl. Abb. 1). Bei der Gestaltung der Lernumgebung im Projekt Kosima wurden diese drei Dimensionen, der Wechsel zwischen ihnen sowie empirische Ergebnisse zu Schwierigkeiten von Schülerinnen beim genannten Wechsel berücksichtigt, da davon ausgegangen wird, dass sich ein tragfähiger Begriff der negativen Zahl nur im Wechselspiel aller Dimensionen ausbilden kann.

Der theoretische Rahmen zur Rekonstruktion individueller Begriffe und deren Transfer setzt sich aus zwei Bezugsrahmen zusammen: Aus einer sprachphilosophischen Perspektive – in Anlehnung an Robert Brandom –, in der Begriffe in ihrem Gebrauch als Festlegungen und Inferenzen betrachtet werden, auf der einen Seite und aus einer entwicklungspsychologisch-lerntheoretischen Perspektive – in Anlehnung an Gérard Vergnauds „Theory of Conceptual Fields" –, in der individuelle Begriffe als Tripel aus Situationen, symbolischen Repräsentanten und operationalen Invarianten betrachtet werden, auf der anderen Seite. Aus diesen beiden Bezugsrahmen wurde ein Analyseschema entwickelt (vgl. Hußmann/Schacht 2009, Schacht 2012), mit welchem individuelle Begriffe von Schülerinnen aus deren Sprechhandlungen rekonstruiert werden können. Das Analyseschema orientiert sich im Wesentlichen an *Festlegungen*, mit denen handlungsleitende Annahmen der Lernenden als Concepts-in-action (Kategorien zur Auswahl von Informationen in einer Situation) und Theorems-in-action (handlungsleitende Behauptungen in der jeweiligen Situation) erfasst werden, an den *Situationen*, in denen Festlegungen eingegangen werden und den *Darstellungen*, in denen Festlegungen sichtbar werden.

Die empirische Studie wurde in einer sechsten Klasse einer Gesamtschule im Ruhrgebiet durchgeführt. Im Rahmen der Untersuchung erfolgte eine Einführung in die Thematik der ganzen Zahlen mit der o.g. Lernumgebung. Dies wurde eingerahmt durch halbstandardisierte Einzelinterviews – zum einen in Form von Vorinterviews zum Erfassen der Vorkenntnisse, zum anderen in Form von Nachinterviews zur Analyse der Entwicklungen des

Begriffs der negativen Zahl und des Transfers in andere Kontexte. In den folgenden Interviewausschnitten soll exemplarisch die Rekonstruktion des Begriffsgebrauchs eines Schülers skizziert werden.

Im *Vorinterview* befindet sich der Schüler Dietrich in der Situation, bei den Zahlen -27 und -31 – beide als Zahlenkarten vorliegend – die größere zu bestimmen. Seine Sprechhandlungen sind:

> ... Die ... 31 minus 31 .. weil die Zahlen, weil die Zahl (nimmt die -31 in die Hand) schon allein größer ist auch wenn sie jetzt ohne minus wär, dann wär sie ja auch größer als die 27 (zeigt auf die -27)

Dietrich legt sich darauf fest, dass -31 größer ist als -27 und er begründet dies mit der Festlegung, dass die Zahl, die ohne Minuszeichen größer ist, auch *mit* Minuszeichen größer ist. Letztere Festlegung kann bei Dietrich in mehreren Situationen rekonstruiert werden und stellt damit ein Theorem-in-action dar (vgl. Abb. 2). Das Concept-in-action, das er als Fokus wählt, ist die Ordnung der natürlichen Zahlen (bzw. der Zahlen „ohne Minuszeichen“). Dietrichs Sprechhandlungen erfolgen ausschließlich in der formal-symbolischen Dimension – die Zahlengerade und Kontexte scheint er nicht zu gebrauchen. Der rekonstruierte Begriffsgebrauch scheint zudem auf spiegelbildliche Ordnungsrelationen für negative Zahlen hinzudeuten, was sich in weiteren Situationen bestätigt.

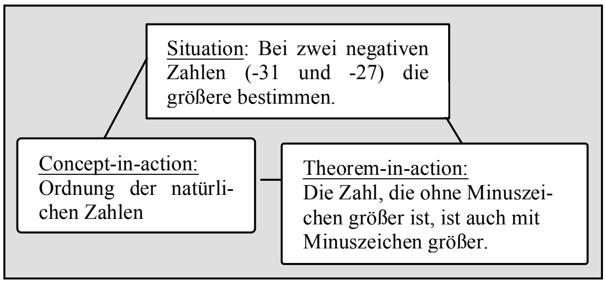


Abbildung 2 Rekonstruierter Begriffsgebrauch Vorinterview

Im *Nachinterview* befindet Dietrich sich in einer ähnlichen Situation, in der er die Zahlen -12 und -8 vergleicht. Seine Sprechhandlungen sind:

> (Nimmt die Karten in die Hand, hält sie nebeneinander und betrachtet sie.) Die minus acht ist größer weil die näher an der Null ist. ... Ja, und wenn eine Zahl näher an der Null ist, dann ist sie größer

Er nutzt hier mit der Entfernung zur Null ein anderes Concept-in-action (vgl. Abb. 3) als im Vorinterview und setzt damit einen anderen Fokus. Das Theorem-in-action, welches rekonstruiert werden kann, deutet nun auf geänderte Ordnungsrelationen hin, welche sich im weiteren Verlauf

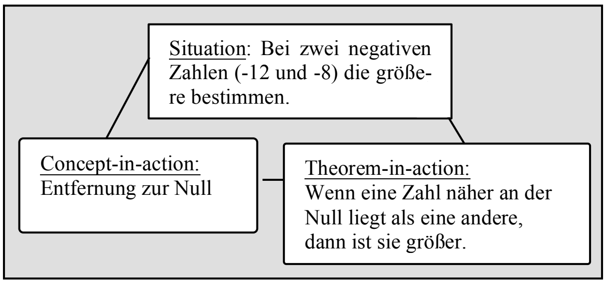


Abbildung 3 Rekonstruierter Begriffsgebrauch Nachinterview

des Interviews bestätigen. Auf die Nachfrage, wie er sich dies vorstelle, zeichnet Dietrich eine Zahlengerade, an der er seine Festlegung verdeutlicht. Es kann rekonstruiert werden, dass nun auch die Dimension der Zahlengerade für seine Festlegungen und Inferenzen Bedeutung gewonnen hat.

Um den *Transfer* aus dem Kontext „Guthaben und Schulden“ in andere Kontexte, in denen negative Zahlen relevant sind, zu betrachten, bearbeiteten die Schülerinnen im Nachinterview Aufgaben in unterschiedlichen Kontexten. In der Situation, bei zwei Orten unterhalb des Meeresspiegels den höheren zu bestimmen (Kontext Höhenmeter), zeigten die Schülerinnen bspw. unterschiedliche Arten des Transfers. Während einige Schülerinnen mit Äußerungen wie „Das ist genauso wie bei den Aufgaben die wir als erstes hatten, die wenn da eine Zahl näher an der Null dran ist, dann ist die äh .. dann ist die Zahl größer.“ über eine Art dekontextualisiertes Modell der Zahlengerade verfügen zu scheinen, welches die Basis für den Transfer darstellt, scheinen andere Schülerinnen sich eng am Kontext der Lernumgebung zu orientieren und daran festzuhalten (bspw. „Ist wie die Schulden halt nur mit Höhe.“).

Erste Ergebnisse der dargestellten Studie weisen darauf hin, dass die Schülerinnen über sehr unterschiedliches Vorwissen zum Begriff der negativen Zahl verfügen, dass sich mittels des gewählten Theorierahmens Entwicklungen der individuellen Begriffe sowie Transfers rekonstruieren lassen, dass den Schülerinnen ein Transfer auf unterschiedliche Art und Weise gelingt und, dass der Kontext und das Modell der Lernumgebung sich in Kombination mit der Zahlengerade als tragfähige Stütze zum Aufbau des Begriffs der ‚negativen Zahl’ eignen.

Literatur

Barzel, B. / Hußmann, S. / Leuders, T. / Prediger, S. (2011). Kontexte und Kernideen – Aspekte eines theoriegeleiteten und praxiserprobten Schulbuchkonzepts. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011,* 71-74.

Bruno, A. (1997): La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. In: Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 29, 5-18.

Hußmann, S. / Schindler, M. (2013): Schulden und Guthaben – negative Zahlen. In: *Mathewerkstatt 6*. Cornelsen-Verlag.

Hußmann, S. / Schacht, F. (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009,* 339-342.

Leuders, T. / Hußmann, S. / Barzel, B. / Prediger, S. (2011): „Das macht Sinn!" Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 53(37), 2-9.

Schacht, F. (2012): Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Wiesbaden, Vieweg-Teubner Verlag.

Andrea SCHINK, Dortmund

Flexibler Umgang mit Brüchen – Strukturierungen von Lernenden zu Teil, Anteil und Ganzem

1. Facetten eines flexiblen Umgangs mit Brüchen

Viele empirische Studien dokumentieren Schwierigkeiten von Lernenden im Umgang mit Brüchen (z.B. Wartha 2007): Schwer fallen z.B. die situationsangemessene Aktivierung geeigneter Grundvorstellungen und das Interpretieren von Anteilen bzgl. des relevanten Ganzen. Andererseits zeigen sich immer wieder auch reichhaltige individuelle Strukturierungen.

Im Rahmen der hier vorgestellten mixed-methods-Design-Studie (Interviews in Klasse 6 und Paper-Pencil-Test in Klasse 7; Schink 2012) wurde das Konzept eines flexiblen Umgangs mit Brüchen entwickelt durch empirisch begründete Theoriebildung (vgl. Abb. 1).

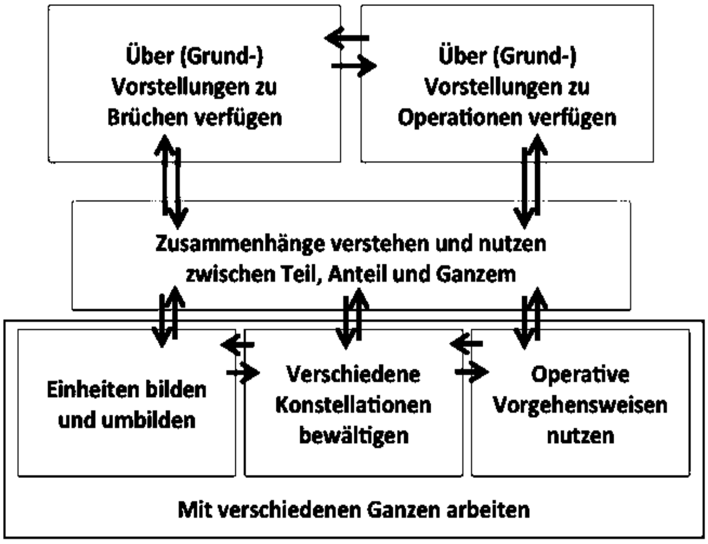


Abb. 1: Facetten eines flexiblen Umgangs mit Brüchen

Dem hier genutzten Konzept von *Flexibilität* liegt eine *Emergenz-Perspektive* zugrunde (z.B. Rathgeb-Schnierer 2010), nach der Lernende nicht aus einem Repertoire fertiger Strategien die jeweils geeignetste Strategie auswählen, sondern Lösungswege *spontan und individuell* in der Auseinandersetzung mit dem jeweiligen Problem generieren. Damit werden gleichzeitig im Sinne von Kreativität auch die Vielfalt (operativer) Strategien und die Fähigkeit betont, sich neuen Anforderungen anpassen zu können.

Wie in Abb. 1 gezeigt, besteht der *flexible Umgang mit Brüchen* aus vier miteinander verbundenen Facetten: 1. Bilden und Umbilden von Einheiten, 2. Bewältigen verschiedener Konstellationen, 3. Nutzen operativer Vorgehensweisen und 4. (als Basis) Arbeiten mit verschiedenen Ganzen.

1. Das (Um-)Bilden von Einheiten (z.B. das Zusammenfassen von Teilen eines Ganzen zu neuen Einheiten) wird vor allem in der internationalen Diskussion als wichtige Voraussetzung für multiplikatives Denken gesehen (z.B. Lamon 1994). 2. Unter der Fähigkeit, verschiedene Konstellationen

zu bewältigen, wird in Anlehnung an die Prozentrechendidaktik das Bearbeiten verschiedener Kombinationen gegebener und gesuchter Komponenten (Teil, Anteil, Ganzes) verstanden. Dabei soll nicht ein Aufgabe-Verfahren-Wissen oder ein Einüben von Formeln im Vordergrund stehen; vielmehr liegt der Fokus auf 3. (selbstinitiierten) operativen Vorgehensweisen, über die Lernende strukturelle Zusammenhänge herstellen und explorieren. 4. Die letzte und die anderen drei einbettende Facette ist die Fähigkeit, mit verschiedenen Ganzen arbeiten zu können. Damit ist sowohl das Umgehen mit wechselnden Bezugsgrößen (d.h. situationsadäquate Identifikation und Interpretation des Ganzen) als auch mit verschiedenen Qualitäten des Ganzen (Beschaffenheit und Strukturierung) gemeint (z.B. kontinuierlich wie ein Kuchen, diskret wie 30 Bonbons oder Mischformen).

In dieser Konzeptualisierung des flexiblen Umgangs wird somit auf Grundvorstellungen als inhaltliche, aus der Rückschau formulierte kognitive Konstrukte zurückgegriffen. Diese werden jedoch weiter ausdifferenziert bzgl. des Zusammenspiels der Komponenten Teil, Anteil und Ganzes.

In diesem Kontext ergaben sich für die Studie die folgenden zwei zentralen Forschungsfragen zum flexiblen Umgang mit Brüchen:

1. *Wie gehen Lernende in unterschiedlichen Konstellationen mit Teil, Anteil und Ganzem um?*
2. *Wie können Schwierigkeiten und Hürden von Lernenden beim Umgang mit Brüchen überwunden werden?*

2. Beispiele individueller Strukturierungen und Begründungen

Im Folgenden sollen drei knappe Beispiele den spezifischen Blick der Studie auf individuelle Strukturierungen, seinen Wert für die Analyse von Lernprozessen und seinen Beitrag zur Gestaltung von Lernarrangements verdeutlichen (ausführlicher in Schink 2012). Dazu werden Bearbeitungsprozesse aus Interviews betrachtet zur Aufgabe „Ole hat 6 Orangenbonbons. Das sind 2/3 von Oles und Pias Bonbons. Wie viele Bonbons haben beide zusammen?“:

Beispiel 1: Simon errechnet 36 als Ganzes und erklärt dies seinem Interviewpartner Akin im Laufe des Interviews folgendermaßen: *„Und das Ganze 2 mal. [...] Guck, weil er hat ja <u>2</u>/3. – 1/3 wäre 18´ [...] und 2/3 wären 36. [...] Nein, weil guck mal Akin, er hat ja 6 Bonbons [...] Und das Ganze hat er ja <u>2</u> mal, also er hat ja <u>12</u> Bonbons schon mal.“* Hier wird deutlich, dass Simon im Kontext der Bonbons über die Einheit argumentiert, die er als 6 interpretiert und verdoppelt. Er nutzt also inhaltliche Überlegungen zu den Zusammenhängen zwischen Teil, Anteil und Ganzem. In dieser Konstellation ist der Teil jedoch nicht für die *Einheit* vorgegeben, so dass seine Argumentation über die Zusammenhänge hier nicht trägt.

Beispiel 2: Miriam und Fatima, die auch 36 als Lösung erhalten, argumentieren eher im Kalkül, indem sie den Vergleich zu zuvor bearbeiteten Aufgaben mit Stammbruchanteil ziehen (sie verrechnen sich nur beim Produkt) und die Einbeziehung des Zählers erst im Nachhinein als Multiplikation deuten: *„[...] ja bei dem 1/4 und bei dem 1/6 ham wir die 1 weggelassen – aber hier sind ja 2…“* und *„[...] hier haben wir ja auch – 6 mal 8 gemacht und das warn ja 41, 41 mal 1 das wären ja auch 41 [...] deswegen hab ich 6 mal 3 und das dann nochmal das mal 2.“*

Beispiel 3: In Lauras Erklärung zeigt sich schließlich die Kraft operativer Argumentationen und flexibler Umstrukturierungen: *„[...] Also wenn [...] diese 6 Orangenbonbons da 3, 2/3 wären - dann [...] würde man doch rein theoretisch die <u>Hälfte</u> von 18 nehmen [...] dann müsste die Pia nämlich weniger haben als der Ole´, also plus - 3 weil es sind insgesamt 6, also kommt das auf 9 raus, weil – 1/3 wären in dem Fall [...] 3´ Bonbons, dann wären 2/3 6 Bonbons und 3/3, also das Ganze 9 Bonbons [...]“*

Diese drei Beispiele verdeutlichen, dass es sich lohnt, den mit dem Konzept des flexiblen Umgangs einhergehenden differenzierten Blick auf individuelle Strukturierungen von Lernenden zu Teil, Anteil und Ganzem einzunehmen, denn es können sich z.B. trotz gleicher Ergebnisse Begründungen und Vorstellungen auf völlig unterschiedlichen Ebenen verorten.

3. Befunde zu den Forschungsfragen und ihr Nutzen für die Praxis

Die exemplarisch dargestellten Prozesse verorten sich vor dem Hintergrund der hier in aller Kürze referierten Ergebnisse der Studie (vgl. Schink 2012):

Im Hinblick auf den Umgang mit Teil, Anteil und Ganzem in verschiedenen Konstellationen (Forschungsfrage 1) lässt sich feststellen, dass Lernende die Zusammenhänge zwischen den drei Komponenten auf vielfältige Art und Weise strukturieren.

Insgesamt waren die Lernenden im Test recht erfolgreich. Vor allem die Interviews zeigten vielfältige Zugänge und reichhaltige operative Vorgehensweisen. Dabei scheint die Qualität des Ganzen (diskret vs. kontinuierlich) für die Bearbeitungen eine größere Bedeutung zu haben als die Art der Konstellation. Darüber hinaus hat sie einen Einfluss auf die Bearbeitungswege, wenn z.B. in diskreten Kontexten Vorstellungen von kontinuierlichen Ganzen aktiviert werden. Gleichzeitig ist der Begriff „Ganzes“ durch vielfältige individuelle (Alltags-)Vorstellungen beeinflusst.

Der Blick auf Teil, Anteil und Ganzes sensibilisiert für die Komplexität von Strukturierungen und Interpretationen und kann damit dazu beitragen, Schwierigkeiten und Hürden von Lernenden beim Umgang mit Brüchen zu überwinden (Forschungsfrage 2): So lassen sich Uminterpretationen oder die Nutzung eines falschen Ganzen, Schwierigkeiten bei der Deutung des Zählers, fehlende relative Betrachtungen und nicht tragfähige Interpretationen von Operationen z.T. aus den hergestellten Zusammenhängen ableiten. Insbesondere wird dafür sensibilisiert, dass es sich stets um triadische Zusammenhänge handelt, d.h. dass alle drei Komponenten berücksichtigt werden müssen und sich auf Bearbeitungen auswirken können. Gleichzeitig liegt im (operativen) Erkunden und Bewusstmachen von relevanten und nicht relevanten Strukturen (z.B. in Bildern) eine Chance, Schwierigkeiten für Lernende zu thematisieren und damit zu überwinden.

Die Studie ist in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) eingebunden (Hußmann et al 2011). Ergebnisse sind u.a. in die Gestaltung einer Lernumgebung zur Multiplikation von Brüchen eingegangen (Prediger / Schink et al. 2013): Die Interpretation des Ganzen ist dort Ausgangspunkt für das Reden über Anteile von verschiedenen Gruppen und Anteilen. Die Schwierigkeit einiger Lernender, Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und dem relevanten Ganzen zu interpretieren und strukturieren, wird damit aufgegriffen und explizit thematisiert. In diesem Sinne leistet die Studie einen Beitrag zur didaktischen Rekonstruktion des (flexiblen) Umgangs mit Brüchen.

Literatur

Hußmann, S., Leuders, T., Barzel, B. & Prediger, S. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 419-422.

Lamon, S. J. (1994): Ratio and proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In: G. Harel & J. Confrey (Hrsg.): The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany: SUNY Press, 89-120.

Prediger, S., Schink, A., Schneider, C. & Verschraegen, J. (2013, im Druck): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken. Erscheint in: S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010): Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. In: JMD, 31(2), 257-283.

Schink, A. (2012): Flexibler Umgang mit Brüchen - Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem. Dissertation, TU Dortmund.

Wartha, S. (2007): Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs. Hildesheim: Franzbecker.

Kathrin SCHLARMANN, Oldenburg

Konzeptuelles Begriffsverständnis von Lehramtsstudierenden in der Linearen Algebra

1. Erkenntnisinteresse

Im Lehramtsstudium muss die „fachmathematische Ausbildung Erfahrungen mit einer ‚Schulmathematik vom höheren Standpunkt' […] ermöglichen" (Beutelspacher et al. 2011, S.2). Dabei, so fordern Danckwerts und Beutelspacher weiter, solle die Fachmathematik „ein tieferes, beweglicheres Verständnis der Fachinhalte des schulischen Sekundar-Curriculums" (ebd., S.9) hervorrufen und hin zu einer „verstehensorientierten begrifflichen Durchdringung" (ebd., S.15) führen.
Die Lineare Algebra als streng formalisierte, abstrakte Theorie bereitet vielen Studierenden Schwierigkeiten (u. a. Carlson et al. 1997). Die zentrale Leitfrage dieses Aufsatzes ist folgende: Ist das konzeptuelle Begriffsverständnis von Lehramtsstudierenden nach erfolgreichem Bestehen des Moduls Lineare Algebra wirklich tief und beweglich?

2. Was ist konzeptuelles Begriffsverständnis?

Unter konzeptuellem Begriffsverständnis verstehe ich in Anlehnung an das „concept image" von Tall & Vinner (1981) und an „conception" von Sfard (1991) ein mentales Netzwerk, welches aus dem besteht, was eine Person gedanklich mit einem Begriff assoziiert und dem, wie diese Person mit dem Begriff umgeht. Harel (1997) erläutert, dass in der Fähigkeit Aufgaben zu lösen ein wichtiger Indikator für konzeptuelles Begriffsverständnis liege. Dabei betont er, dass beim Lösen von Aufgaben zwei Dinge wichtig seien: zu wissen, was zu tun ist und zu wissen, warum dies zu tun ist. Um konzeptuelles Begriffsverständnis analysieren und beschreiben zu können, werden folgende Indikatoren samt Ausprägungen in Anlehnung an Harel (1997) und unter Berücksichtigung von Bestandteilen des Begriffsverständnisses nach Vollrath (1984) und Vollrath & Weigand (2007) gebildet:

„Remembering". „Remembering" beinhaltet das Heranziehen von Bekanntem, das Erkennen von relevanten Aspekten sowie das Wiedererkennen von zuvor Kennengelerntem. Außerdem stellt das Herleiten von Erinnertem eine weitere Ausprägung des „Remembering" dar. Abgespeichertes Wissen, welches nur erinnert werden kann, solange es nicht vergessen ist, aber nicht selbst wieder hergeleitet werden kann, ist für das „Remembering" nicht ausreichend.

Kontextflexibles Wechseln. Es gibt verschiedene Sachverhalte, auf die ein Begriff angewendet werden kann und zwischen denen flexibles Wechseln einen Indikator für konzeptuelles Begriffsverständnis darstellt. Solche Sachverhalte sind in der Vektorraumtheorie beispielsweise der Vektorraum $\mathbb{R}^n$, der Matrizen- oder der Polynomraum. Eine weitere Ausprägung ist das flexible Wechseln in Bezug auf die Repräsentationsform (vgl. Hillel 2000).

Beziehungen. Ein integriertes Begriffsverständnis beinhaltet immer mathematische Beziehungen. Dabei können Beziehungen zwischen Eigenschaften eines Begriffs, also in Bezug auf den Begriffsinhalt und Beziehungen zu anderen Begriffen und somit global und den Begriffsumfang betreffend, unterschieden werden.

Die drei[1] Indikatoren „Remembering", kontextflexibles Wechseln und Beziehungen stehen in Relation zueinander. So kann eine Beziehung zwischen zwei Begriffen beispielsweise in einen konkreten Sachverhalt eingebettet sein. Bei der Anwendung der Indikatoren als Analyseinstrument wird ebenfalls berücksichtigt, ob ihre Ausprägungen für eine Lösung der jeweiligen Aufgabe zielführend auftreten.

3. Untersuchungsdesign und Stichprobe

Im Rahmen einer qualitativen Untersuchung wurden klinische Interviews mit Lehramtsstudierenden durchgeführt. Dabei stand das zentrale und weitreichende Thema Basis mit zahlreichen Anknüpfungsmöglichkeiten an das Schulwissen im Vordergrund.

Untersuchungsinstrument: Gegeben wurde der Untervektorraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \mid 2x = z \right\} \subset R^3$, dessen Darstellung den Studierenden aus der Vorlesung vertraut war. Die Studierenden wurden aufgefordert, eine Basis von U anzugeben und den Untervektorraum U geometrisch zu deuten.

Im Folgenden wird aufgezeigt, dass die Aufgabe zahlreiche Möglichkeiten bietet Beziehungen zu nutzen und Kontexte flexibel zu wechseln.

- Eine mögliche Basis ist $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, wobei die Bedingung $2x = z$ im ersten und die beliebige y-Komponente im zweiten Basisvektor gefasst ist.

[1] Harel (1997) erwähnt zusätzlich das *„Communicating"* als Indikator für konzeptuelles Begriffsverständnis.

- Die Bedingung $2x = z$, also $2x + 0y\text{-}z = 0$, kann auch als Koordinatenform einer Ebene aufgefasst werden.
- Durch Einsetzen von 2x für z und Separation nach Variablen ergibt sich folgende Linearkombination: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Denkbar wäre es auch, in der Darstellung von U das lineare Gleichungssystem $\begin{vmatrix} x = x \\ y = y \\ z = 2x \end{vmatrix}$ zu entdecken.
- Geometrisch stellt U eine zur x-z-Ebene senkrecht verlaufende Ebene dar, welche durch den Koordinatenursprung und den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Stichprobe: Es wurden vier Einzelinterviews mit Lehramtsstudierenden geführt. Die Probandinnen und Probanden wurden nach ihrer Klausurnote (Noten: 1,3; 2,0; 2,3; 3,7) und Punkten in einer Klausuraufgabe zum Thema Basis (mindestens die Hälfte der Punkte sollten erreicht worden sein) ausgewählt.

4. Überblick über die Ergebnisse

Mit Hilfe der oben genannten Indikatoren wurden die Transkriptionen der Interviews qualitativ und detailliert mit Hilfe von Interpretationen analysiert. Nachfolgend werden Beispiele für die einzelnen Indikatoren gegeben.

„Remembering“. Eigenschaften in Bezug auf eine Basis von U werden von einer Probandin herangezogen und algebraisch betrachtet.

Kontextflexibles Wechseln. Diese Probandin deutet Eigenschaften des Untervektorraums U geometrisch und es gelingt ihr aufgrund fehlender Repräsentationswechsel nicht, die erkannten unterschiedlichen Aspekte aus algebraischem und geometrischem Kontext zu einer Gesamtargumentation zusammenzubringen. Bei anderen zeigt sich, dass eine geometrische Deutung der algebraischen Repräsentation von Basisvektoren als aufspannende Vektoren nicht gelingt, da nur Vielfache der jeweiligen Basisvektoren geometrisch gedeutet werden, nicht jedoch deren Linearkombination.

Beziehungen. Durch eine implizite Anwendung des Basisergänzungssatzes mit dem Ziel, Vektoren zu finden, die ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bilden, nutzt ein Proband Beziehungen zwischen Eigenschaften von Basen. Ein anderer Proband ist auf der Suche nach drei linear unabhängigen Basisvektoren. Dies stellt einen Widerspruch zur Teilmengenbeziehung dar. Die Beziehung zum Begriff Dimension wird von anderen Probanden genutzt, indem über die Dimension von U auf die Anzahl der Vektoren einer gesuchten Basis geschlossen wird.

Insgesamt konnten alle Probandinnen und Probanden die Aufgabe zum vertrauten Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ nach bestandenem Modul Lineare Algebra nicht (allein) lösen. Außerdem sind bei allen Teilnehmenden Schwierigkeiten mit der formalen Darstellung von U aufgefallen.

5. Exkurs: Schriftliche Gesamtbefragung

In einer schriftlichen Befragung wurden nahezu alle Studierenden, welche das Modul Lineare Algebra bestanden haben, aufgefordert, eine Basis zum Untervektorraum U anzugeben. Es zeigte sich, dass zwei Drittel aller 57 beteiligten Probanden keine richtige Basis angeben konnten.

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S.& Wickel, G. (2011): Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden, Vieweg+Teubner.

Carlson, D. (Hrg), Johnson, C.R. (Hrg), Lay, D.C. (Hrg), Porter, A.D. (Hrg), Watkins, A. (Hrg) & Watkins, W. (Hrg) (1997): Resources for Teaching Linear Algebra. MAA Notes 42.

Harel, G. (1997): The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition. In: Carlson, D. (Hrg), Johnson, C.R. (Hrg), Lay, D.C. (Hrg), Porter, A.D. (Hrg), Watkins, A. (Hrg) & Watkins, W. (Hrg). Resources for Teaching Linear Algebra. MAA Notes 42. 1997. 107-126.

Hillel, J. (2000): Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In: Dorier, J. (Hrg). On The Teaching of Linear Algebra. Dordrecht 2000. 191-207.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22.1-36.

Tall, D. & Vinner, S. (1981): Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151–169.

Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht. Stuttgart, Klett.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007): Algebra in der Sekundarstufe. Mathematik Primar- und Sekundarstufe. 3. Auflage. Heidelberg, Spektrum.

Reinhard SCHMIDT, Engelskirchen, Evelyn STEPANCIK, Wien

Elektronische Lernpfade und das Projekt MedViel – Mehr als Programmiertes Lernen

Alter Wein in neuen Schläuchen

Im deutschsprachigen Raum sind Projekte, die sich der Erstellung und Erprobung digitaler Lernpfade bzw. Lernumgebungen widmen, mittlerweile zahlreich vertreten, wenngleich der Begriff des Lernpfades oder der Lernumgebung derzeit noch nicht klar und eindeutig definiert ist. Es verwundert daher nicht, wenn es eine Vielzahl von expliziten oder impliziten Definitionsversuchen gibt. Zum Beispiel:

> *Ein Lernpfad ist „ein für den Lerner vorgesehener oder vom Lerner selbst generierter Weg bei der Nutzung von hypertextbasierten Lernmaterialien. Der Lernpfad wird einerseits durch die angebotene Reihenfolge von Lehr-/Lernmodulen oder Lehr-/Lerneinheiten bestimmt, andererseits wird er aktiv vom Lerner – geleitet durch ein bestimmtes Informationsbedürfnis – beschritten“.*
>
> *Bildungsportal Sachsen (https://bildungsportal.sachsen.de/e140/index_ger.html)*

Ein gemeinsamer Kern der verschiedenen Begrifflichkeiten ist jedoch auszumachen. Unter einem digitalen Lernpfad wird ein Online-Angebot verstanden, das Informationen und mathematische Zusammenhänge in einer klar strukturierten Anordnung anbietet.

Die Lernpfade des MedViel-Projektes sind von kognitivistischen und konstruktivistischen Lerntheorien geprägt. Daher wird in diesem Projekt besonders darauf geachtet, dass die Lernenden die Möglichkeit haben, eigene Lernwege einzuschlagen. Eine wesentliche Intention besteht darin, dass das methodische und didaktische Arrangement so gestaltet sind, dass aktiv-entdeckendes Lernen möglich ist.

Dennoch vermag der Gedanke, dass Inhalte in einer klar strukturierten Abfolge angeboten werden, manche Fachdidaktiker/innen an das in den 70ern populäre "Programmierte Lernen" erinnern. Was also unterscheidet die Lernpfade des Projekts MedViel vom Programmierten Lernen und worin liegen die Gemeinsamkeiten?

Das Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“

Die ersten Gehversuche im Zusammenhang mit Lernpfaden reichen ins Jahr 2003 zurück. Ein wichtiges Ziel aller MedViel-Projekte war und ist es, die Kraft der neuen Medien mit den Möglichkeiten der neuen Lernkultur – also den schüler/innenzentrierten Lernformen – zu kombinieren. In den vergangenen Jahren wurden unter diesen Aspekten 27 verschiedene Lernpfade (www.medienvielfalt.org) entwickelt und bildungspolitisch relevante Aspekte wie die Bildungsstandards und Kompetenzorientierung deutlich berücksichtigt. Alle Lernpfade wurden schon mehrfach von Schüler/innen, Lehrern/innen und Experten/innen der Fach- und eLearning-Didaktik evaluiert.

Der Lernpfad „Direkte und indirekte Proportionalität“

Einen Lernpfad hier in der gegebenen Kürze zu beschreiben, ist ein so gut wie unmögliches Unterfangen. Dennoch versuchen wir jenen zur direkten und indirekten Proportionalität exemplarisch zu skizzieren.

Der Einstieg in das Thema erfolgt mit einer Problemstellung, die den Schüler/innen aus ihrem Alltag vertraut ist. Die Werbung für einen neuen Handytarif, der als günstig angepriesen wird, verspricht, dass man seinen Lieblingssong ins 10 Sekunden am Smartphone hat. Mithilfe eines GeoGebra-Applets werden die tabellarische Darstellung der Proportionalität sowie der Proportionalitätsfaktor selbst erarbeitet. Ganz ähnlich geschieht dies mit der indirekten Proportionalität. Danach werden Schritt für Schritt die Graphen und Funktionsgleichungen von den Lernenden entdeckt. Auch die Abgrenzung dieser beiden Proportionalitäten zur linearen Funktion wird im Lernpfad von den Schüler/innen erarbeitet. Mit abwechslungsreiche Aufgaben (Legespiel, Forschungsauftrag, ...) wird zum Schluss die Möglichkeit zum Vertiefen und Üben eröffnet.

Digitale Lernpfade versus Programmierter Unterricht

Auch wenn sich die einzelnen Lernpfade des Medienvielfaltsprojektes in mancherlei Hinsicht unterscheiden, so wurde doch darauf bei allen darauf geachtet, dass sie nicht nur unter formalen Aspekten einheitlich gestaltet sind (HTML-Layout, Struktur des didaktischen Kommentars etc.). Daher sind allen Lernpfaden die folgenden Leitgedanken immanent:

1) Verständnisorientierung
2) Berücksichtigung des Kontextes
3) Prozessorientierte Kompetenzorientierung
4) Förderung der Werkzeugkompetenz
5) Methodische Vielfalt
6) Gender-Aspekte
7) Kommunikation der Lernenden
8) Argumentieren

9) Ergebnissicherung

Somit wird also deutlich, dass die digitalen Lernpfade sich erheblich vom Programmierten Lernen unterscheiden und die Gemeinsamkeiten der beiden Unterrichtsformen bloß in der klar strukturierten Anordnung des Lernangebots und der Individualisierung des Lerntempos liegen. Das Programmierte Lernen zielte vorwiegend auf die Wiedergabe auswendig gelernten Wissens ab, während die Lernpfade des MedViel-Projektes für entdeckendes Lernen, für das Lösen von Problemen, für das Lernen in Kontexten, für Lernwege mit Verzweigungen, für Kompetenzorientierung und ein ausgewogenes Verhältnis zwischen Instruktion und Konstruktion (vgl. Hischer 2001 und Hohenwarter 2006) stehen.

Perspektiven und Grenzen

Die digitalen Lernpfade des MedViel-Projektes sind das Ergebnis des Versuchs, die Vorteile digitaler Medien und zeitgemäßer Lernkultur, letztlich auch die Vorteile des Programmierten Lernens zu nutzen und die Nachteile zu eliminieren. Dies gelingt überzeugend, auch wenn weitere Optimierungen jederzeit möglich sind. Der hohe zeitliche Aufwand für die Erstellung eines didaktisch hochwertigen Lernpfades muss sicherlich als Nachteil angesehen werden und kann kaum von einer Lehrperson allein bewältigt werden.

Die Lernpfade setzen wichtige Impulse in der Unterrichtsentwicklung und konnten nur mit kollegialer Zusammenarbeit auch über Grenzen hinweg entstehen. Zu guter Letzt meinen wir, dass es wünschenswert wäre, wenn es gelänge, die Auseinandersetzung mit digitalen Lernpfaden bereits in der Lehramtsausbildung zu etablieren.

Literatur

MedViel. (2010). Lernpfade. Verfügbar unter www.medienvielfalt.org [06.01.2012]

Hischer, H. (2001). Programmierter Unterricht. Verfügbar unter hischer.de/uds/forsch/beitrag/hischer/kybern68.pdf [12.02.2012]

Hohenwarter, M. (2006). GeoGebra - didaktische Materialien und Anwendungen für den Unterricht

Stepancik, E. (2010). Medienvielfalt im Mathematikunterricht – Längsschnitt „Funktionale Abhängigkeiten".

Wiesner, H. Wiesner-Steiner, A. (2011). Evaluationsbericht zur Expert/innenbefragung Mathematik-Lernpfade.

Oliver SCHMITT, Darmstadt, Regina BRUDER, Darmstadt

Grundwissen als Voraussetzung für Reflexionen – am Beispiel des Gaußalgorithmus

Das Themenfeld der linearen Algebra und analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II ist derzeit in der thematischen Ausrichtung kalkülorientiert. Die Bedeutung der fachlichen Gegenstände wird so nur unzureichend deutlich. Reflexionen bieten hier eine Möglichkeit Perspektiven für und über das Fach hinaus aufzuzeigen. Jene erfordern allerdings verfügbares Grundwissen. Der vorliegende Artikel soll am Beispiel des Gaußalgorithmus einen möglichen Weg hin zu einem reflexionsorientierten Curriculum aufzeigen, der dem aktuellen Arbeitsstand eines Dissertationsvorhabens entspricht.

1. Reflexionsbegriff

Skovsmose und Fischer kommen aus unterschiedlichen theoretischen Perspektiven zu ähnlichen Unterteilungen von Wissensformen über Mathematik: mathematisches Wissen, technologisches Wissen und reflektives Wissen bei Skovsmose (s. Skovsmose 1994, S. 47f) sowie Grundwissen, operatives Wissen und Reflexionswissen bei Fischer (s. Fischer 2001, S. 4f). Beide betonen dabei die besondere Wichtigkeit von Reflexionen für den zukünftigen Mathematikunterricht. Verschiedene Aspekte von Reflexionen werden auch bei anderen Autoren mit unterschiedlichem Fokus im Verhältnis von Mensch, Fach und Welt identifiziert. Das nebenstehende Schaubild, das sich an Lengnink (2006) orientiert, gliedert diese Fülle der Reflexionsaspekte mit einer Verortung in der Trias Mensch, Mathematik und Welt. Explizit betont werden soll dabei der Aspekt der historischen Reflexion, da alle anderen Reflexionsaspekte jeweils in einem bestimmten historischen Kontext zu verstehen sind und dieser ebenfalls der Reflexion bedarf.

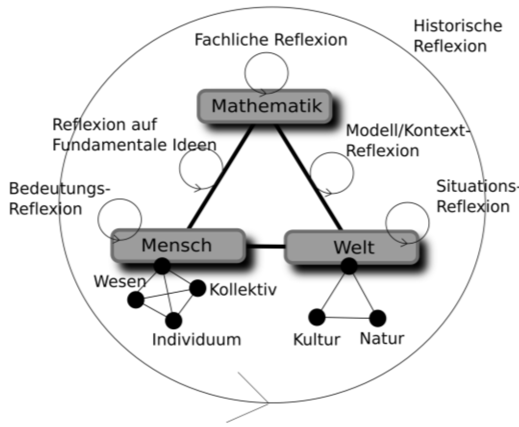


Abb.: Aspekte des Reflexionsbegriffs

2. Beschreibung von Grundwissen

Um diese Reflexionsaspekte im Unterricht verwirklichen zu können ist neben einer passenden Unterrichtskultur ein verfügbares Grundwissen notwendig. Dieses ist auch in pragmatischer Hinsicht in Bezug auf den

Rechnereinsatz oder Basiskompetenzen in der Diskussion. Eine Verbindung dieser Ansätze von einer erwünschten Reflexionsperspektive und verfügbarem Grundwissen im Sinne von Mindeststandards bietet sich an und kann beide Ansätze bereichern.

Zur Beschreibung dieses Grundwissens wird ein Begriffssystem von Bruder & Brückner (1989) herangezogen, das die dominierenden Schülerhandlungen im Mathematikunterricht erfassen soll. Gegründet auf elementare Denkoperationen von Lompscher werden dort auf verschiedenen Ebenen hierarchisch gegliedert komplexe Denkoperationen, Aneignungshandlungen, Grundhandlungen und komplexe Handlungen angegeben. Für die Anwendung auf die Beschreibung von Grundwissen werden die Grundhandlungen Erkennen, Beschreiben, Verknüpfen, Anwenden und Begründen verwendet.

Um Grundwissen zu identifizieren werden die mathematischen Begriffe, Sätze und Verfahren in einem semantischen Netz systematisch aufgebaut. Rechts und links davon werden wichtige Darstellungsarten sowie Ideen und Strategien zu den jeweiligen fachlichen Gegenständen notiert. Verschränkt mit der inhaltlichen Gliederung werden die jeweils erforderlichen Grundhandlungen festgehalten, die zusammen eine Beschreibung des Grundwissens liefern.

Dabei zeigen sich im Falle eines mathematischen Verfahrens drei wesentliche Einflüsse: die Durchführbarkeit, der fachliche Zugang sowie die gewählte Reflexionsperspektive (vgl. Greefrath 2011, S. 112). Die bloße Durchführbarkeit genügt nicht dem Anspruch eines sich systematisch über Jahre entfaltenden Mathematikunterrichts, der fachliche Zugang muss beachtet werden; für sich genommen wird durch diesen die Bedeutung der mathematischen Gegenstände nur unzureichend klar, eine Reflexionsperspektive muss beachtet werden.

3. Der Gaußalgorithmus mit Blick auf eine Reflexionsperspektive

Bestehende Aufgaben zum Thema beschränken sich oft auf das reine Ausführen des Gaußalgorithmus und einige, zum Teil durchaus komplexe, Interpretationen von linearen Gleichungssystemen und deren Lösungen. Der Mehrwert des Gaußalgorithmus gegenüber den bereits erlernten Verfahren aus der Sekundarstufe I wird auf diese Art nicht deutlich. Entsprechend unterschiedlich fällt auch die Motivation seiner Erarbeitung in Schulbüchern aus. So wird er in manchen Lehrwerken als günstig für große Systeme ohne elektronische Hilfsmittel bezeichnet in anderen aber gerade wegen seiner maschinellen Anwendbarkeit hervorgehoben, während bei der Rechnung ohne Hilfsmittel das Einsetzverfahren vorgezogen werden sollte. Bei Jahnke (2006, S. 404) wird für den Computer ein leicht beschreibbares, systematisches und immer funktionierendes Verfahren gefordert, das damit wesentliche Eigenschaften eines Algorithmus aufweist.

Um dem Gaußalgorithmus eine eigene Bedeutung im Unterricht zukommen zu lassen bietet sich an Jahnke anschließend die explizite Reflexion auf die fundamentale Idee des Algorithmus an. Wird diese verbunden mit einer historischen Reflexion, kann darüber hinaus aufgeklärt werden, in welchem Sinne eine Eignung für den Computer der wesentliche Vorteil ist, und dass höchstens im Fall einer entwickelten symbolischen Darstellung von linearen Gleichungssystemen das Einsetzverfahren bei der Anwendung ohne elektronische Hilfsmittel Vorteile aufweisen kann.

Wie eine Aufgabe, die eine solche Reflexionsperspektive aufweist, aussehen könnte, soll nun am konkreten Beispiel beschrieben werden (vgl. auch: https://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/fileadmin/home/users/252/Folien_GDM_2012.pdf). Die Aufgabe gliedert sich in vier Teile. Zunächst wird den Lernenden eine moderne technische Darstellung des Gaußalgorithmus in Form eines Flussdiagramms und dazu ein detailliert ausgearbeitetes Beispiel sowie die historische Beschreibung der Fang-Cheng-Regel (vgl. Vogel 1968) gegeben, die im Kern dem Gaußalgorithmus entspricht. Beide Darstellungen sollen nachvollzogen werden. Im zweiten Aufgabenteil finden zunächst ein Vergleich und eine Zuordnung der einzelnen Abschnitte des Flussdiagramms zu den Beschreibungen der Fang-Cheng-Regel statt, anschließend sollen beide Vorgehensweisen an einer weiteren historischen Aufgabe aus dem alten China realisiert werden. Neben dem bloßen Anwenden des Gaußalgorithmus wird hier auch das Erkennen und Beschreiben der einzelnen Schritte als Grundhandlung verwirklicht. Im dritten Teil der Aufgabe sollen die Lernenden beide Regeln auf Eigenschaften eines Algorithmus, etwa auf den Algorithmusbegriff Ziegenbalgs (s. Ziegenbalg 2007) bezogen, untersuchen. Darüber hinaus sollen sie ergründen, was für eine Bedeutung Algorithmen in der modernen technischen Zeit haben und welche sie vermutlich im China vor 2000 Jahren hatten. Hier finden die entscheidenden Reflexionen statt: der Algorithmusbegriff wird am Beispiel des Gaußalgorithmus entwickelt, durch die historische Einbettung wird der Begriff über den eines Computerprogrammes hinausgehend erweitert. Im abschließenden vierten Teil sollen die Lernenden das Umformen bei der Rückwärtselimination mit den symbolischen Mitteln der modernen Algebra mit der heute schwerfällig anmutenden detaillierten Rechenbeschreibung aus dem alten China vergleichen, womit die Stärken einer algebraischen Darstellung herausgearbeitet werden können.

Nachdem Stärken von der Algorithmisierung und Algebraisierung aufgezeigt wurden, bietet es sich im Anschluss an diese Aufgabe an Fragen zu deren Grenzen zu thematisieren. Auch kann der Algorithmusbegriff durch eine Untersuchung seiner Bedeutung in Argumentationen, etwa bei der Frage der Invertierbarkeit einer Matrix, fachlich weiter vertieft werden.

4. Fazit und Ausblick

Zum Grundwissen über den Gaußalgorithmus, verstanden im Sinne von Mindeststandards, gehört auch Wissen über die Idee des Algorithmus, die zugehörige Grundhandlung ist etwa das Beschreiben seiner Eigenschaften. Dazu sollte eine Reflexion über die gesellschaftliche Bedeutung von Algorithmen, möglicherweise im historischen Kontext, treten. Die Reflexionsperspektive weitet Grundwissen über den fachsystematischen und pragmatischen Bereich hinaus, das Grundwissen zeigt Wege auf Reflexionsperspektiven zu verwirklichen.

In Zukunft sollen neben weiteren Reflexionsperspektiven für den Gaußalgorithmus auch zunehmend die anderen Themen der linearen Algebra und analytischen Geometrie einbezogen werden. Offene Fragen sind dabei die nach einem „Kern" des notwendigen Grundwissens, der sich möglicherweise aus verschiedenen Reflexionsperspektiven extrahieren lässt, und die nach möglichen operativen Entlastungen durch Technik ohne dadurch das Grundwissen zu verhindern, das Reflektieren ermöglicht.

Literatur

Bruder, R.; Brückner, A. (1989): Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht - ein allgemeiner Ansatz. In: Pädagogische Forschung, 30, 72-82.

Fischer, R. (2001): Höhere Allgemeinbildung. URL: http://imst3plus.uni-klu.ac.at/materialien/2001/fischer190901.pdf [Stand: 18.03.2012].

Greefrath, G.; Pinkernell, G. (2011): Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 64.2, 109-113.

Jahnke, T. u. a. (2006): Analytische Geometrie Lineare Algebra. Berlin, Cornelsen Verlag.

Lengnink, K. (2006): Reflected Acting in Mathematical Learning Processes. In: ZDM, 38/4, 341-349.

Skovsmose, O. (1994): Towards a critical Mathematics Education. In: Educational Studies in Mathematics, 27, 35-57.

Vogel, K. (1968): Neun Bücher Arithmetischer Technik. Braunschweig, Vieweg.

Ziegenbalg, J. u. a. (2007): Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. Frankfurt, Verlag Harri Deutsch.

Michael SCHMITZ, Jena

Papierfalten auch im Mathematikunterricht
Begründungen und Beispiele

Unter Papierfalten wird oft die alte japanische Kunst des Origami verstanden. Dennoch gibt es auch bei uns in Deutschland eine Tradition für das Falten von Papier. Dabei kann man im Besonderen an Friedrich Fröbel (1782 – 1852) denken, der den pädagogischen Wert des Papierfaltens hervorhob, es mehr schematisch betrachtete und es in die Ausbildung von Kindergärtnerinnen integrierte. Interessant ist, dass um 1890 die japanische Regierung ein System der Vorschulerziehung einführte, das sich an westlichen Vorbildern orientierte. Sie übernahmen die Praktiken Fröbels, speziell das schematische Papierfalten, und richteten Kindergärten ein. Durch die Einführung dieses westlichen Systems konnte die eigene japanische Tradition des Papierfaltens gestärkt werden und führte zu einer breiten Basis für Origami in Japan (vgl. Lister, 2003).

Eine moderne Erklärung, was Origami ist, stammt von Kunihiko Kasahara: „Origami ist ein traditionelles Faltspiel, in dem bildnerisch-ästhetische, funktionelle und geometrisch-mathematische Prinzipien zusammenfließen.“ (Kasahara, 2000). Hier soll noch ergänzt werden, dass es im Origami auch hervorragende Möglichkeiten gibt, „eine handwerkliche Tätigkeit mit den geistigen Erfordernissen beim Erlernen und im Umgang mit der Mathematik hilfreich zu verbinden“ (Flachsmeyer, 2009). Damit ist aber auch schon das Ziel dieses kleinen Beitrages beschrieben: Es soll aufzeigt werden, dass Origami mathematische Überlegungen ermöglicht, die im Mathematikunterricht in vielfältiger Weise genutzt werden können. Außerdem wird an Hand von kurzen Hinweisen auf Beispiele deutlich, dass sich beim Papierfalten eine Vielzahl von Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen (im Hinblick auf die Bildungsstandards) entwickeln lassen, womit sich auch die Einbeziehung des Papierfaltens in den Mathematikunterricht begründen lässt. Insbesondere unterstützt das Falten von Papier:

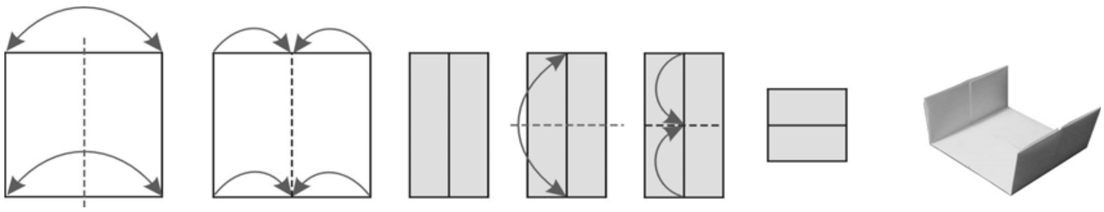
- die Entwicklung wichtiger Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen (Beobachten, Vor- und Nachmachen, Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer, Stärkung der Konzentration)
- die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- die Entwicklung der mathematischen Fachsprache
- die Begreifbarkeit der Mathematik
- weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen

- das Sammeln von Erfahrungen im Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- die Entwicklung von Kreativität
- das differenzierte Arbeiten im Mathematikunterricht

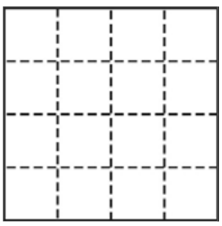
Die folgenden Beispiele sollen das obige verdeutlichen. Ausführliche Beschreibungen zu den genannten Beispielen, weitere Anregungen und Literaturhinweise findet man auf www.mathegami.de unter 'Downloads' bzw. 'Literatur'.

1. Beispiel (Würfel und Quader)

Aus einem quadratischen Blatt lässt sich leicht ein Modul für den Bau eines Würfels herstellen, wie es in der Bildfolge gezeigt ist.

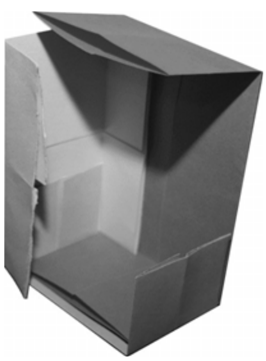


Bei der Herstellung dieses Moduls kann man sehr gut über Eigenschaften von Quadraten und Rechtecken sprechen. Auch die Veränderung von Seitenlängen, Umfang und Flächeninhalt im Faltprozess kann thematisiert werden.



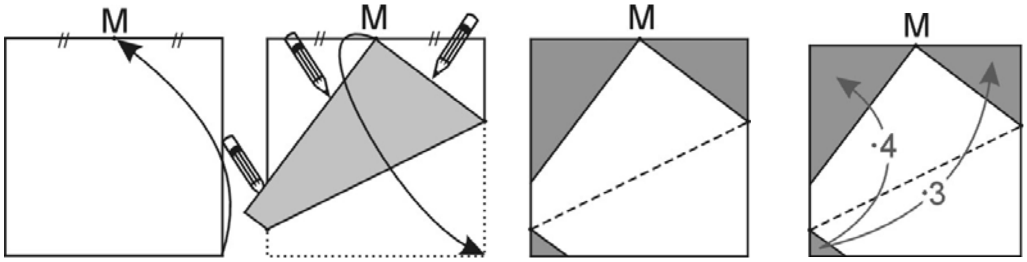
Öffnet man das kleine, zusammengefaltete Quadrat wieder, so erhält man das Ausgangsquadrat, welches in 16 kleine Quadrate durch Faltlinien eingeteilt ist. Nun kann man nach der Anzahl aller möglichen Quadrate beziehungsweise Rechtecke, die keine Quadrate sind, in diesem Faltmuster fragen.

Stellt man sechs Exemplare dieses Moduls her, so kann man daraus einen Würfel zusammenstecken. Durch dieses Herstellen werden die Eigenschaften eines Würfels bewusster erlebt, seine Elemente (Ecken, Kanten, Flächen) besser wahrgenommen und Raumvorstellung entwickelt sich weiter. Nun kann experimentiert werden: Kann man ausgehend von den Würfelmodulen neue Module erfinden, mit denen man Quader bauen kann?



2. Beispiel (Satz von Haga)

Ausgangspunkt ist wieder ein Quadrat, von dem man durch Falten den Mittelpunkt M einer Kante (im Bild die oben liegende) bestimmen.

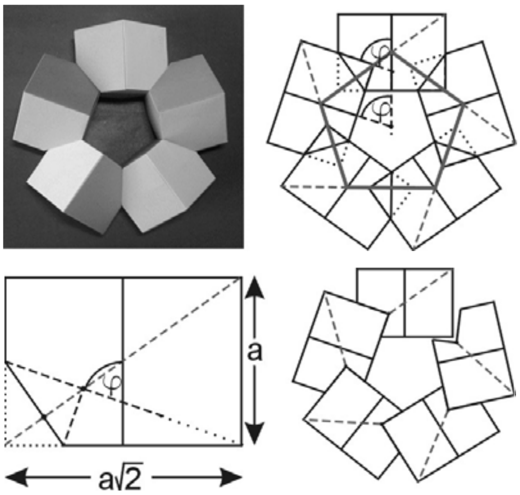


Nun faltet man die im Bild gezeigte Ecke auf diesen Kantenmittelpunkt und markiert die Faltlinie. Anschließend kennzeichnet man mit einem Stift die von M ausgehenden Kanten des umgefalteten Trapezes. Dieses Trapez ragt an einer Stelle über das Ausgangsquadrat hinaus. Ebenfalls markiert man mit einem Stift auf der Rückseite des Trapezes die zugehörige Quadratkante. Anschließend wird das umgefaltete Trapez wieder in seine Ausgangslage zurückgefaltet und auf dem Quadrat sind drei markierte Dreiecke zu sehen, wie es in der Bildfolge gezeigt ist. Nun kann man zeigen, dass diese drei Dreiecke ähnlich zueinander sind. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras kann man auch die Seitenlängen dieser drei Dreiecke berechnen. Dabei stellt man fest, dass es sich um pythagoreische Dreiecke handelt. Das ist der Satz von Haga. Aufgrund der Ähnlichkeit kann nun der Ähnlichkeitsfaktor der Dreiecke untereinander berechnet werden. Ausgehend vom kleinen Dreieck findet man die Ähnlichkeitsfaktoren 3 und 4, wie es im Bild oben rechts gezeigt ist. Da noch eine Ecke im Quadrat kein Dreieck enthält, kann man nun fragen, ob sich dort durch Umfalten des Ausgangsquadrates noch ein Dreieck erzeugen lässt, das zum kleinen Dreieck den Ähnlichkeitsfaktor 2 hat. Diese Fragestellung eröffnet z.B. die Möglichkeit zum Experimentieren. Dabei spielt natürlich neben dem Finden einer Lösungsmöglichkeit auch das Begründen der Richtigkeit des gewählten Verfahrens eine wichtige Rolle.

3. Beispiel (Kolumbuswürfel)

Aus den oben beschriebenen Würfelmodulen kann man auch Module machen, mit denen man den Kolumbuswürfel zusammenstecken kann (siehe www.mathegami.de).

Neben Körperberechnungen (Oberfläche und Volumen) kann man fünf solche Würfel zu einem Fünfeckring zusammensetzen.

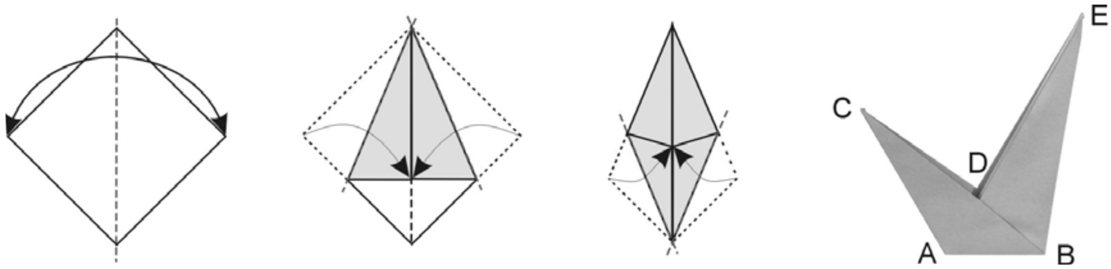


Links ist ein Foto eines solchen Fünfeckrings von oben und daneben eine schematische Zeichnung zu sehen. Es sieht so aus, dass dabei ein regelmäßiges Fünfeck gebildet wird, was natürlich zu hinterfragen ist.

Analysiert man die Situation, so muss man feststellen, dass der gesuchte Zentriwinkel nicht den gewünschten 72° entspricht. Folglich wird hier kein regelmäßiges Fünfeck gebildet. Neben der zugehörigen Rechnung, die Kenntnisse im Umgang mit trigonometrischen Funktionen voraussetzt, kann hier auch über (mathematische) Exaktheit und praktische Genauigkeit diskutiert werden.

4. Beispiel (Gras – Kongruenz von Dreiecken)

Auch hier ist ein Papierquadrat der Ausgang, in das zuerst eine Diagonale gefaltet wird. Der weitere Faltvorgang ist in der Abbildung gezeigt. Vom Quadrat kommt man dabei zuerst zu einem Drachenviereck und dann zu einem Rhombus. Beides kann natürlich begründet werden. Anschließend wird der Rhombus zu der Origamifigur 'Gras' zusammengelegt.



In dieser Figur sind die beiden sichtbaren Dreiecke ABC und DBE kongruent zueinander. Auch das kann begründet werden.

Literatur

Flachsmeyer, J. (2009): Mathematikdidaktische Belange des Origami. In: Math. Semesterberichte 56, 201-214.

Kasahara, K. (2000): Origami figürlich und geometrisch. Augustus.

Lister, D. (2003): Die Geschichte des Papierfaltens. Eine deutsche Perspektive. In: Der Falter, Nr. 35 - April 2003 (Teil 1), Nr. 37 - April 2004 (Teil 2).

www.papierfalten.de/documents/papierfalten-deutschland.pdf

Schmitz, M.: www.mathegami.de

Wolfgang SCHNEIDER, Augsburg

Affine und nicht affine synthetische Ebenen – ein Projekt in der 10. Jahrgangsstufe eines Augsburger Gymnasiums

Durch eine langjährige Geometrielehrtätigkeit an der Universität Augsburg angeregt, habe ich in der 10. Jahrgangsstufe eines Augsburger Gymnasiums ein Projekt ins Leben gerufen, bei dem es um einen wissenschaftlich exakten Zugang zur Geometrie geht. In den folgenden Abschnitten 1. bis 6. werden die wichtigsten Inhalte und Merkmale des Projekts beschrieben.

1. Zur Geschichte der Geometrie

Bei der eingangs erwähnten Thematik bietet sich als Anfang ein geschichtlicher Rückblick an, der mit den griechischen Philosophen Plato und Aristoteles beginnt. Kaum ein Schüler hat je von Euklid gehört, der Aristoteles folgend in seinen „Elementen“ einen beeindruckend logischen Aufbau der Geometrie versuchte. Interessant ist insbesondere Euklids Versuch, das Wesen eines Punktes zu beschreiben. Eine wirklich zufrieden stellende Beschreibung ist Euklid letztlich nicht gelungen. Dieser Umstand und andere Schwachstellen im Werk des Euklid bewogen Ende des 19. Jahrhunderts zu einem Umdenken: Hilbert (1862 – 1943) bemerkte, dass nicht das Wesen eines Punktes entscheidend sei, sondern einzig die gegenseitige Beziehung von Punkten und Geraden, die durch plausible Gesetzmäßigkeiten (Axiome) geregelt sein müsse.

2. Inzidenzaxiome und synthetische Ebenen

Hilberts Denkansatz wird nun beschrieben. Man stelle sich eine Menge E vor, deren Elemente Punkte genannt werden, bezeichnet mit Großbuchstaben A, B, C,…, P,…,A1, A2, A3 usw.. Man stelle sich ferner eine gewisse Menge G von Teilmengen von E vor, wobei die Elemente von G Geraden genannt und mit Kleinbuchstaben a, b, c,…, g, h,…, g1, g2, g3 usw. bezeichnet werden. Das Paar (E, G) erfüllt sinnvolle Geometriegrundvorstellungen und heißt dann auch synthetische Ebene, wenn folgende Gesetzmäßigkeiten, die so genannten Inzidenzaxiome (I1) bis (I4), erfüllt sind:

(I1) Zu $A, B \in E$ gibt es $g \in G$ mit $A, B \in g$.

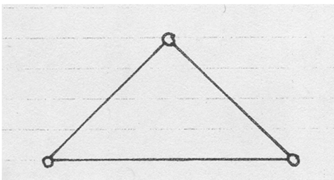
(I2) Zu $A, B \in E$ mit $A \neq B$ gibt es höchstens ein $g \in G$ mit $A,B \in g$.

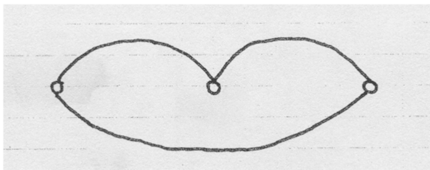
(I3) Auf jeder Geraden $g \in G$ liegen mindestens zwei verschiedene Punkte.

(I4) Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Die bei (I1) bis (I4) formulierten Anforderungen an ein System von Punkten und Geraden entsprechen genau dem, was ein Schüler nach einigen Jahren gymnasialer Schulgeometrie auch von Punkten und Geraden erwartet. Allerdings wirkt eine derartige Herangehensweise an eine Definition im Schulbetrieb befremdlich und bedarf einer sorgfältigen Vertiefung. Dementsprechend werden die Schüler zunächst einmal mit folgender Aufgabenstellung konfrontiert: E sei eine Menge von drei Punkten, sagen wir {A, B, C}. Wie sieht dann G aus?

Die Antwort ist elementar: Bei der Potenzmenge von E scheiden wegen (I3) die leere Menge und die einelementigen Teilmengen von E aus. Ebenfalls nicht infrage als Gerade kommt wegen (I4) die ganze Menge E. Es bleiben also {A, B},{A, C},{B, C}, die wegen (I1) zu G gehören müssen. Ist $|E|=3$, so ist (E, G) genau dann eine synthetische Ebene, wenn G die Menge aller zweielementigen Teilmengen von E ist. Zur Verdeutlichung dieser Tatsache eignen sich folgende Schemata:



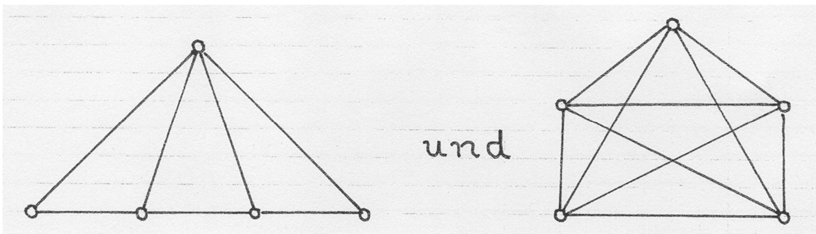


Die Aufgabenstellung wird nun von $|E|=3$ auf $|E|>3$ ausgeweitet. Wann ist (E, G) im Fall $|E|=4$, $|E|=5$, $|E|=6$ usw. eine synthetische Ebene?

Übrigens scheint jedem Schüler die Unabhängigkeit der Inzidenzaxiome intuitiv klar zu sein; wie allerdings beispielsweise nachgewiesen wird, dass (I1) keine Folge der übrigen Axiome (I2),(I3),(I4) ist, kann sich zunächst einmal kaum jemand vorstellen.

3. **Parallelität und affine synthetische Ebenen**

Wir stellen zwei synthetische Ebenen mit $|E|=5$ gegenüber:



Bei der links dargestellten Ebene besteht G aus einer Gerade mit 4 Punkten und vier Geraden mit 2 Punkten, bei der rechts dargestellten Ebene ist G die Menge der zweielementigen Teilmengen von E, d.h. es sind zehn Geraden mit je 2 Punkten.

Was fällt auf? Bei der links dargestellten Ebene gibt es zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ niemals eine Parallele h zu g durch P, bei der rechts dargestellten Ebene gibt es zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ stets zwei Parallelen zu g durch P. Dabei werden Geraden h und g als parallel bezeichnet (kurz $h \| g$), wenn entweder $h=g$ oder $h \cap g=\{\ \}$ gilt.

Die gemachten Beobachtungen passen überhaupt nicht zum Vorstellungsvermögen der Schüler, sind sie es doch gewohnt, dass es zu einer Geraden g und einem Punkt P außerhalb von g genau eine Parallele zu g durch P gibt. Möchte man diese vom Schüler erwartete Eigenschaft bei einer synthetischen Ebene gewährleistet haben, muss man dies offensichtlich durch die Gültigkeit eines weiteren Axioms sichern, welches man Parallelenaxiom (P) nennt:

(P) Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P mit $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h

mit $h \| g$, $P \in h$.

Eine synthetische Ebene, bei der zusätzlich auch das Parallelenaxiom (P) gilt, wird als affine synthetische Ebene bezeichnet. Beispielsweise ist die Ebene mit $|E|=4$ und G = {alle zweielementigen Teilmengen von E} affin. Die Ebene E mit $|E|=5$ und G= {alle zweielementigen Teilmengen von E} ist dagegen keine affine Ebene. Bei dieser Ebene macht man noch eine Entdeckung: Aus $g \| h$ und $h \| k$ folgt nicht zwingend $g \| k$, wie für E={A, B, C, D, E} das Beispiel g={A, B}, h={C, D}, k={A, E} zeigt.

4. **Aus den Inzidenzaxiomen folgende Eigenschaften synthetischer Ebenen**

Das streng logische Argumentieren im Rahmen mathematischer Beweise wird im alltäglichen Mathematikunterricht vernachlässigt. Die Eigenschaften synthetischer Ebenen sind ein ideales Terrain für das Einüben und auch selbständige Durchführen einfacher Beweise nach den Kriterien der strengen Logik. Folgende Sätze bieten sich an:

- Zu jeder Geraden gibt es einen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt.
- Jeder Punkt ist Durchschnitt zweier Geraden.
- Zu jedem Punkt gibt es eine Gerade, die nicht durch den Punkt geht.

5. **Weitere Beispiele für synthetische Ebenen**

Ein unverzichtbares Beispiel ist natürlich die affine Ebene über einem Körper, insbesondere deshalb, weil hier eine hervorragende Verbindung zur Algebra hergestellt wird. Nach einer allgemeinen Klärung des Körperbegriffs kann man neben den Körpern Q bzw. R der rationalen bzw. reellen

Zahlen interessante andere Körper thematisieren: Körper zwischen Q und R, endliche Körper mit 2, 3 oder 4 Elementen. Bei der affinen Ebene über Q bzw. R erkennen die Schüler natürlich sofort „ihre“ Schulgeometrie wieder, durch das Eingehen auch auf andere Körper bekommen sie aber auch ein sicheres Gespür dafür, welch zahlreiche andere Möglichkeiten für synthetische Ebenen existieren. Noch beeindruckender für die Schüler sind Einblicke in das Klein’sche Modell bzw. die Poincare’sche Halbebene, wo es zu einer vorgegebenen Gerade g und einem Punkt P außerhalb von g unendlich viele Parallelen zu g durch P gibt.

6. **Endliche affine synthetische Ebenen**

Im Rahmen der ausschließlich auf den Inzidenzaxiomen beruhenden Eigenschaften synthetischer Ebenen haben die Schülerinnen bereits etliche kürzere Beweise kennengelernt. Nun sollen sie abschließend einen umfangreicheren Satz mit einem entsprechend umfangreicheren Beweis kennenlernen. Es geht um Eigenschaften einer endlichen affinen synthetischen Ebene.

Satz: Sei (E, G) eine endliche affine synthetische Ebene. Dann gilt:

a) Zu je zwei Geraden $g1, g2 \in G$ mit $g1 \neq g2$, $g1 \cap g2 \neq \{\ \}$ gibt es $A \in E$ mit $A \notin g1 \cup g2$.

b) Jede Gerade umfasst die gleiche Anzahl m von Punkten.

c) $|E| = m2$

d) $|G| = m2+m$

Der Beweis, der bei detaillierter Durchführung mehrere Unterrichtsstunden in Anspruch nimmt, erweist sich als äußerst konstruktiv und informativ. Die Schüler lernen im Rahmen des Beweises die innere Struktur einer derartigen Ebene kennen und können danach sogar folgende schwierige Aufgabenstellung bewältigen:

Entwickle mit Hilfe des Satzbeweises ein Beispiel für eine affine synthetische Ebene mit 9 Punkten.

Die letzte Aufgabenstellung stellt den Schlusspunkt eines Projekts dar, das Mathematik in einer Form behandelt, die einen Einblick in typische Anforderungen eines universitären Mathematikstudiums gibt.

Literatur

Hilbert, D. (1962), Grundlagen der Geometrie, Teubner-Verlag,Stuttgart.

Kunz, E. (1975), Ebene Geometrie, Vieweg,Wiesbaden.

Susanne SCHNELL, Dortmund

Beforschung von Vorstellungsentwicklungsprozessen– Ein Beispiel zum empirischen Gesetz der großen Zahlen

Besonders in der Stochastik gibt es zahlreiche Untersuchungen zu Lernständen und–defiziten (Überblick z. B. in Jones 2007). Häufig kann beobachtet werden, dass Schülerinnen und Schüler im Stochastikunterricht zwar tragfähige Vorstellungen aufbauen, in Alltagssituationen aber dennoch auf alternative individuelle Vorstellungen zurückgreifen (vgl. Konold 1989). Um den Vorstellungsaufbau in der Stochastik zu unterstützen, erscheinen Einsichten in die *Prozesse der Vorstellungsentwicklung* bei Lernenden sinnvoll. Einen Ansatz zur Beforschung derer bietet die Fachdidaktische Entwicklungsforschung, die zum Ziel einerseits das theorie- und empiriegeleitete Design adäquater Lerngelegenheiten, andererseits die Generierung einer gegenstandspezifischen Theorie zu Lernprozessen hat (vgl. Prediger & Link 2012). Im Folgenden wird ein Projekt mit dem Schwerpunkt in der Theoriegewinnung zur Entwicklung von Vorstellungen zum empirischen Gesetz der großen Zahlen vorgestellt (Schnell in Vorbereitung).

1. Unterscheidung zwischen kurzer und langer Sicht als zentrale Herausforderung

Empirische Vorarbeiten zeigen, dass Lernende häufig die Aussagekraft von Wahrscheinlichkeiten umdeuten: Anstelle einer Prognose über relative Häufigkeiten auf lange Sicht beziehen sie die Aussage direkt auf einzelne Ergebnisse (Konold 1989). So kann der Wert mathematischer Wahrscheinlichkeiten nicht erfasst werden. Daher hat sich eine Unterscheidung zwischen der kurzen und der langen Sicht als essentiell für den verständigen Aufbau tragfähiger Vorstellungen herausgestellt (Schnell & Prediger im Druck). Diesem Wahrscheinlichkeitsverständnis liegt das empirische Gesetz der großen Zahlen zugrunde, das in einem datengestützten Zugang zum Phänomen Zufall erkundet werden kann (ebd.).

2. Lehr-Lern-Arrangement ‚Wettkönig'

Auf Grundlage der fachlich-theoretischen Vorarbeiten wurde das Lehr-Lern-Arrangement ‚Wettkönig' (Prediger & Hußmann 2013) im Rahmen des Projekts Kosima entwickelt und erprobt (vgl. Hußmann et al. 2011).

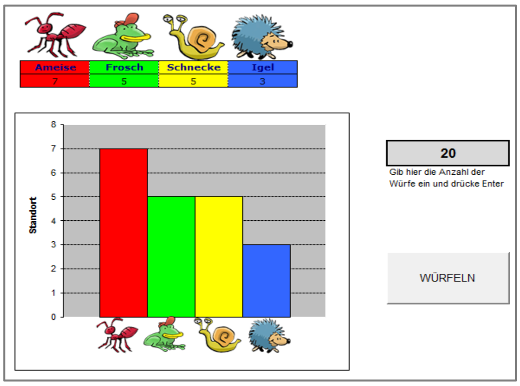


Abb. 1: Computersimulation ‚Wettkönig' mit Verteilung der Tiere entsprechend der Farbverteilung bei Wurfanzahl 20: Ameise: 7, Frosch & Schne-

Zentrales Element ist das Spiel ‚Wettkönig', das als Motivation für die Erkundung der Muster in den erzeugten Daten dient (Prediger & Hußmann 2013; hier wird nur die Variante „Wetten auf Sieg" vorgestellt). In dem Spiel laufen vier farbige Tiere in einem Wettrennen gegeneinander (zunächst in einem Brettspiel, später in einer Computersimulation, vgl. Abb. 1). Die Lernenden wetten vorab darauf, welches Tier gewinnen wird. Gespielt wird mit einem 20-seitigen Farbwürfel, dessen Farbverteilung nicht symmetrisch ist: Die rote Ameise hat mit sieben von 20 Seiten die größte theoretische Chance gewürfelt zu werden (vgl. Abb.1). Die explizite Fokussierung der Unterscheidung zwischen der kurzen und der langen Sicht findet statt über die Festlegung der Wurfanzahl: Vor Beginn wird bestimmt, nach wie vielen Würfen das Spiel beendet werden soll (in der Simulation zwischen 1 und 10.000). Intendiert ist die Einsicht, dass die rote Ameise gemäß der Farbverteilung zwar die beste Wette ist, allerdings erst bei hohen Wurfzahlen ziemlich sicher gewinnt. Ergänzt wird das Lehr-Lern-Arrangement durch Arbeitsblätter und Untersuchungsaufträge, die den Fokus auf die Wurfanzahl unterstützen.

3. Forschungsfrage und empirische Untersuchung

Das Lehr-Lern-Arrangement wurde im Sinne der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Prediger & Link 2012) genutzt, um im Rahmen eines Dissertationsprojekts eine gegenstandspezifische Theorie zu erarbeiten (Schnell in Vorbereitung). Erkenntnisleitend ist die Frage: „Wie verlaufen Prozesse der Vorstellungsentwicklung bei Schülerinnen und Schülern zum empirischen Gesetz der großen Zahlen?"

Das für die Design-Experimente in Laborsituationen angepasste Lehr-Lern-Arrangement wurde in der Hauptstudie in jeweils vier bis sechs aufeinander aufbauenden Sitzungen mit neun Paaren von Lernenden der sechsten Jahrgangsstufe einer Gesamtschule durchgeführt.

Ziel der Analyse ist die Beschreibung der Lernwege auf einer Mikro-Ebene. Hierzu wurden die Design-Experimente von zwei Paaren vollständig und von den anderen szenenweise transkribiert. Die Transkripte wurden zunächst sequenzanalytisch und dann über ein komparatives, kategorienbildendes Verfahren analysiert (adaptiert nach Schwarz et al. 2009). Zentrale Analyseeinheit bilden dabei die Konstrukte: Diese werden verstanden als empirisch beobachtbare Bausteine von Vorstellungen, die in Netzwerken koordiniert und in spezifischen Kontexten verortet sind (ähnlich Pratt & Noss 2002). Im vorliegenden Artikel werden die Konstrukte hinsichtlich ihrer Proposition und Funktion vorgestellt und mit Großbuchstaben bezeichnet.

4. Entwicklungsprozesse auf Konstruktebene bei Hannah und Nelly

Die folgenden Sequenzen finden am Ende der ersten Design-Experiment-Sitzung mit Hannah und Nelly statt (nach ca. 80 Minuten). Unter anderem hat Nelly folgendes Konstrukt über ein Muster geäußert: <Die Reihenfolge der Tiere bleibt bei hohen Wurfzahlen immer gleich> (REIHENFOLGE-EMPIRISCH). Diese ordinale Betrachtung wurde von ihr rein empirisch abgeleitet, denn die Farbverteilung wurde von den Schülerinnen noch nicht entdeckt. Zur Zusammenfassung der empirischen Beobachtungen wurde eine Tabelle ausgefüllt, die zeigt, dass bei kleinen Wurfanzahlen alle Tiere mindestens einmal gewonnen haben, während bei hohen Wurfanzahlen ab 100 nur die Ameise gewonnen hat. Auf die anschließenden Fragen „Wann kann man sicherer wetten? Wieso?“ antwortet Hannah:

> Hannah: „Ich meine eigentlich, dass man dahin schreiben sollte, dass das eigentlich ne reine Glückssache ist (…) Es kann aber auch passieren, dass ähm alle besser sind als die Ameise.“ (GLÜCKSSPIEL-2)

Hannah scheint davon auszugehen, dass alle beobachteten Muster rein zufällige Ergebnisse sind, da es sich um ein „Glücksspiel“ handelt. Dieses Konstrukt scheint die Funktion zu haben, eine Alternative zu Nellys REIHENFOLGE-EMPIRISCH darzustellen.

Im weiteren Verlauf des Experiments zählen die Mädchen auf einen Impuls der Interviewerin hin die Farbverteilung aus (FARBVERTEILUNG). Nelly verwendet FARBVERTEILUNG als stützende Erklärung für das Muster REIHENFOLGE-EMPIRISCH. Auch Hannah nutzt die neue Erkenntnis:

> Hannah: „Also da wir das jetzt gezählt haben, denk ich, dass es darauf ankommt auf die Anzahl, wenn es zum Beispiel von jedem gleich viele wären- es sind ja insgesamt 20 [Seiten auf dem Würfel]. (…) und [man] dann von jedem zum Beispiel so fünf drauf tun würde.. (…) also dann würde das ein Glücksspiel werden.“ (GLÜCKSSPIEL-3)

Hannah greift die FARBVERTEILUNG auf und verwendet sie, um für ihr Konstrukt GLÜCKSSPIEL-2 einen neuen Gültigkeitsbereich zu schaffen, indem sie einen Würfel mit anderer Verteilung zugrunde legt. So gelingt es ihr, ihr anfängliches Konstrukt nicht zu verwerfen, sondern es mit den anderen Konstrukten FARBVERTEILUNG und REIHENFOLGE-EMPIRISCH zu koordinieren.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Der Einblick in den Lernweg von Hannah und Nelly verdeutlicht exemplarisch, wie auf Ebene der Konstrukte Prozesse der Vorstellungsentwicklung verlaufen. Die Analyse über alle Lernendenpaare zeigt, dass Schülerinnen und Schüler häufig ihre Konstrukte nicht verwerfen, wenn sich Widersprüche ergeben. Stattdessen finden sie wie Hannah einen Weg, durch Änderungen des Gültigkeitsbereichs ein kohärentes Netzwerk von Konstrukten zu bilden (vgl. Schnell & Prediger im Druck; Schnell in Vorbereitung). Die Rekonstruktion dieser Mikroprozesse kann Aufschluss über spezifische Verläufe, Hürden und Chancen geben, was zur Konzeption neuer und/oder weiterführender Lerngelegenheiten genutzt werden kann.

Literatur

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster: WTM Verlag, 419-422.

Jones, G.A., Langrall, C.W., & Mooney, E.S. (2007): Research in probability: Responding to classroom realities. In Lester, F. K. (Hrsg.): *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 909-956). Charlotte, USA:Information Age Publishing.

Konold, C. (1989): Informal Conceptions of Probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

Pratt, D. & Noss, R. (2002): The Micro-Evolution of Mathematical Knowledge: The Case of Randomness. *Journal of the Learning Sciences*, 11(4), 453-488.

Prediger, S. & Hußmann, S. (2013): Spielen, Wetten, Voraussagen - Dem Zufall auf die Spur kommen. Erscheint in: Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.): *mathewerkstatt 6.* Cornelsen, Berlin.

Prediger, S. & Link, M. (2012): Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. Erscheint in: Bayrhuber, H. et al. (Hrsg.): *Formate Fachdidaktischer Forschung.* Münster: Waxmann.

Schnell, S. (in Vorbereitung für 2013): *Entwicklung von Schülervorstellungen zum Phänomen Zufall (Arbeitstitel)*. Dissertation. (Betreuerin: S. Prediger).

Schnell, S. & Prediger, S. (im Druck): From “everything changes” to “for high numbers, it changes just a bit” Theoretical notions for a microanalysis of conceptual change processes in stochastic contexts. Erscheint in: *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*.

Schwarz, B., Dreyfus, T. & Hershkowitz, R. (2009): The nested epistemic actions model for abstraction in context. In dies. (Hrsg.): *Transformation of Knowledge through Classroom Interaction* (S. 11-41). London, New York: Routledge.

Sebastian SCHORCHT, Siegen

Vom historisch-genetischen Prinzip lernen – Potential von Aufgaben mit historischem Hintergrund

Sollte Geschichte der Mathematik im Unterricht behandelt werden und wenn ja, welche Rolle könnte sie im Mathematikunterricht spielen und wie lässt sich dies in konkreten Beispielen umsetzen? Die klassischen mathematikhistorischen Themen in heutigen Schulbüchern der Grundschule sind die „Römischen Zahlzeichen“ und „Das Volk der Inka“. Betrachtet man solche Schulbuchseiten zur Mathematikgeschichte genauer, fallen historisch meist unzutreffende Darstellungen auf. Umso wichtiger erscheint die Beschäftigung mit den oben genannten Fragen. Dazu habe ich mich mit den Anfängen und der Entwicklung verschiedener Methoden beschäftigt, die die Einsatzmöglichkeiten mathematikhistorischer Inhalte im Mathematikunterricht darlegen.

Historisch-genetische Methode

Zuerst wird die vom Leipziger Bürgerschullehrer Friedrich Wilhelm Lindner (1779-1864) formulierte historisch-genetische Methode näher beleuchtet. Er definiert den Terminus ‚Genetisch‘ wie folgt:

„Ich muss wissen, ob der Punct, oder die Linie, oder das Dreyeck oder das Viereck, der Kreis, oder die Ellipse <u>zuerst</u> oder <u>zuletzt</u> erfolgt […], d.h. es müßte gezeigt werden, inwiefern jede vorhergehende Figur oder Form der Grund der anzureihenden wäre; […]. Dies […] würde die genetische Methode seyn; […]“ [Hervorhebung im Original] (Lindner 1808, S. 22)

Lindner versteht folglich unter dem ‚Genetischen‘ eine logisch-genetische Stoffstrukturierung. Zum Terminus ‚Historisch‘ schreibt er weiter:

„[…] daß aber diese Wissenschaft [Mathematik; S. Sch.] zuerst geübt würde, wenn auch nicht als solche, dieß würde ich die historische Methode nennen; beide vereinigt die historisch-genetische.“ (ebd.)

Lindner verweist in diesem Zitat implizit auf eine Reihung der Wissenschaften, weil er angehalten war die „einzelnen Fächer nicht neben- sondern nacheinander“ (Schubring 1978, S. 61) zu unterrichten. Er sieht die Mathematik als die Urform des Denkens, Schließens und Zusammenreihens von Beobachtungen (vgl. Lindner 1808, S. 21f). Deshalb unterrichtete er in der Reihenfolge Mathematik, Schreiben, Zeichnen, Physik, usw. die Mathematik zuerst. Der Terminus ‚Historisch‘ repräsentiert dementsprechend einen historisch begründeten Aufbau des gesamten Lernprozesses.

An späterer Stelle beschreibt Lindner eine weitere Bedeutungsebene des ‚Historischen‘:

„[…] und dann, wenn sie [alle Theile der vorzutragenden Wissenschaft] in diese enge natürliche Stufenfolge geordnet sind, in ein historisches-geschichtliches Gewand gekleidet, (dieß nenne ich historisch, erzählend) den Zöglingen bekannt gemacht werden.“ (Lindner 1808, S. 84)

Da er voraussetzt, dass Lernende Interesse an Erzählungen haben, bettet er den Themeneinstieg in eine historische Situation. Er begründet dies anhand von persönlichen Beobachtungen bei Kindern, welche von Märchen und Fabeln begeistert schienen. Geschichte der Mathematik taucht bei ihm also nicht nur als *Strukturierungshilfe* des gesamten Lernprozesses von Lernenden auf, sondern auch als *Einstiegsimpuls* in ein Themengebiet.

Genetisch-sokratisch-exemplarische Methode

Die genetisch-sokratisch-exemplarische Methode Martin Wagenscheins, die vor allem den reformpädagogischen und fachdidaktischen Strömungen der 20er-Jahre des letzten Jahrhunderts und den Theorien von Leonard Nelson folgt, betont eher den individual-genetischen Aspekt des genetischen Prinzips. Wagenschein (1896-1988) spricht vom „werdenden Menschen“ und vom „Werden des Wissens in ihm“. (Wagenschein 1968, S. 75) Er betont an mehreren Stellen, dass das ‚Genetische‘ nicht auf historische Themen verweist. (vgl. Wagenschein 1973, S. 388) Das ‚Sokratische‘ in seiner Methode, soll im Dialog mit den Lernenden eine „produktive Verwirrung“ hervorrufen, die die Lernenden dazu anhält einen Sachverhalt vertieft verstehen zu wollen. (vgl. Wagenschein 1968, S. 95f) Wagenschein geht im Lernprozess immer von einem „Naturphänomen“ aus, das das Ganze widerspiegelt. Das Einzelne im Ganzen zu finden, exemplarisch an einem Beispiel das Ganze zu sehen, ist ein Kernpunkt seiner Methode. Das ‚Exemplarische‘ soll, nach Wagenschein, die Lernenden aus ihrer Sicherheit herausholen. Dies gelingt, so schreibt er, durch die „produktive Verwirrung“, die die Sicherheit ‚angreift‘ und zur neuen Strukturierung, zur „Einwurzelung“ des Wissens führt. (vgl. Wagenschein 1968, S. 76-79)

Bei Wagenschein werden historische Untersuchungen nur dann sinnvoll, wenn sie zur Klärung eines heutigen Phänomens beitragen: „Der Schüler, der uns […] in die Antike zurückdrängt, fragt […] nicht historisch, sondern genetisch.“ (Wagenschein 1968, S. 90) Die „produktive Verwirrung“ und der Versuch das Wissen logisch-genetisch aufzubauen, <u>können</u> den Lernenden in die Wissenschaftsgeschichte zur Klärung der Zusammenhänge führen. Eine *historische Antwort auf eine logisch-genetische Frage* ist das

Ergebnis. Wissenschaftsgeschichte und somit auch Mathematikgeschichte erscheinen als Auswirkungen auf die Gegenwart.

Historisch-hermeneutische Methode

Den Abschluss der Betrachtungen bildet die historisch-hermeneutische Methode, wie sie etwa Hans Niels Jahnke verfolgt. (vgl. Jahnke 1991) Den Terminus ‚Hermeneutik' definiert Glaubitz, der sich intensiv mit dieser Methode auseinandersetzte, wie folgt:

„[Sie; S. Sch.] bezeichnet […] die Lehre und Tätigkeit des interpretativen und evaluativen Verstehens, Auslegens oder Deutens sinnhaltiger (von Menschen hervorgebrachter) Zeichen." (Glaubitz 2010, S. 57)

Die historisch-hermeneutische Methode verwendet historische Quellen als Interpretationsgrundlage. Dabei sollen die Lernenden in einen sogenannten „innere[n] Dialog" mit der Quelle treten. Die Vernunft klassifiziert bei der ersten Begegnung die Quelle. Ein vorgelegter Text im Mathematikunterricht wird beispielsweise einen anderen Inhalt und Betrachtungsschwerpunkt haben, als im Englischunterricht. Der Lernende weiß um den mathematischen Gehalt und liest mit dieser Perspektive den Text durch. Dabei kontrolliert er mit seinem Verstand seine Vermutung und stellt mit Hilfe der Vernunft neue Thesen auf. Diese Thesen werden wiederum überprüft und so tastet sich der Lernende an den Inhalt im hermeneutischen Zirkel heran, bis sein Verständnis des Textes und das des Autors annähernd deckungsgleich sind. (vgl. Glaubitz 2010, S. 61-67) ‚Hermeneutik' in der beschriebenen historisch-hermeneutischen Methode ist folglich eine mathematische *Interpretationsleistung*. Der Terminus ‚Historisch' wird integriert, weil Geschichte der Mathematik beitragen soll zur „Einsicht in die Entwicklung mathematischer Begriffe", in „die Rolle der Mathematik in unserer Welt" und in die „Möglichkeiten alternativer Wege". (Habdank-Eichelsbacher und Jahnke 1999, S. 96) Ähnlich beschreibt Hans-Jürgen Pandel aus der Geschichtsdidaktik das Ziel der Ausbildung eines Historizitätsbewusstseins bei den Lernenden:

„Historizitätsbewusstsein [bezeichnet] jenen Aspekt […], der Angaben darüber enthält, was im historischen Prozeß veränderlich ist und was statisch bleibt." (Pandel 1991, S. 64)

Das ‚Historische' würde demnach zum Einblick in das Werden der Mathematik führen, in das Erkennen von Möglichkeiten und Grenzen, Veränderbarem und Statischem – Eine Einsicht in die Historizität von Mathematik.

Potential von Aufgaben mit historischem Hintergrund

Lindner betrachtet das ‚Historische' an seiner Methode als historischen *Einstiegsimpuls* in ein Themengebiet und als Grundlage einer *Strukturierungshilfe* für alle Lerninhalte der Kultur (längsschnittliche Abfolge der Mathematikentwicklung; von Vergangenem zu Gegenwärtigem). Bei Wagenschein dagegen taucht Geschichte der Mathematik als *historische Antwort auf eine logisch-genetische Frage aus der Gegenwart* auf (längsschnittliche Fragestellung aus der Gegenwart in die Vergangenheit). Diese Frage entsteht aus einem individual-genetischen Lernprozess, der über einen Dialog durch eine produktive Verwirrung angeregt wird und eine logisch-genetische Strukturierung fordert. Die historisch-hermeneutische Methode fordert zur *mathematischen Interpretationsleistung* auf und versucht Einblicke in die Historizität der Mathematik zu ermöglichen (punktuelle, vielleicht querschnittliche, mathematische Quelleninterpretation). Diese vier Kategorien (*Impuls*, *Strukturierung*, *Antwort* und *Interpretation*) decken ein breites Feld der Funktionen von Aufgaben mit historischem Hintergrund ab.

Literatur

Glaubitz, M. (2010): Mathematikgeschichte lesen und verstehen. Eine theoretische und empirische Vergleichsstudie (Diss.). Duisburg-Essen.

Jahnke, H. N. (1991): Mathematik historisch verstehen – oder: Haben die alten Griechen quadratische Gleichungen gelöst? In: Mathematik Lehren. Heft 47, S. 6-12.

Jahnke, H. N. und Habdank-Eichelsbacher, B. (1999): Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. In: Selter, C. und Walther, G.: Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann. Leipzig.

Lindner, F. W. (1808): Über die historisch-genetische Methode. Ein Beitrag zur Verbesserung und Vereinfachung des Unterrichts sowohl in höhern, als niedern Schulen, als Einladungsschrift zu den von Ostern 1808 an zu haltenden sowohl theoretischen, als auch praktischen, pädagogischen Vorlesungen. Leipzig.

Pandel, H.-J. (1991): Dimensionen und Struktur des Geschichtsbewusstseins. In: Süssmuth, H.: Geschichtsunterricht im vereinten Deutschland. Auf der Suche nach Neuorientierung. Teil I. Baden-Baden, S. 55-73.

Schubring, G. (1978): Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik. Stuttgart.

Wagenschein, M. (1968): Verstehen lehren. Genetisch-Sokratisch-Exemplarisch. Weinheim und Basel.

Wagenschein, M. (1973): Der Vorgang des Verstehens. Pädagogische Anmerkungen zum mathematisierenden Verstehen. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 26. Heft 7, S. 25-32.

Christof SCHREIBER, Frankfurt

Podcasts zur Mathematik in der Primarstufe

Im Rahmen des Projektes Lehr@mt (Bremer u.a. 2011) konnten in den letzten Jahren im Teilprojekt Mathematik am Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik der Goethe-Universität Frankfurt verschiedene Möglichkeiten des Einsatzes digitaler Medien zum Lernen, Lehren und Forschen erprobt werden. Dabei stand bei zwei der Themenbereiche die schriftlich-grafische Darstellung im Mathematikunterricht im Fokus (Schreiber 2010; Merkel 2012). Es bildete sich aber auch die Frage heraus, wie mathematische Lernprozesse mit digitalen Medien mündlich stattfinden können. Dazu wurden PriMaPodcasts erstellt: Audio-Podcasts zu mathematischen Themen in der Primarstufe (Schreiber 2011).

1. ‚Mathe-Chat' und ‚wiLM@'

Im Forschungsprojekt „Mathe-Chat" geht es um die Rolle der schriftlichen Kommunikation in kollektiven mathematischen Problemlöseprozessen. Da die schriftliche Kommunikation zu mathematischen Problemen von Interesse war, wurde das Setting so gestaltet, dass zwischen den beiden Seiten des Settings nur die schriftlich-/grafische Kommunikation möglich ist. Mit der Software NetMeeting haben die Schüler die Möglichkeit, mit der Tastatur oder über das Whiteboard zu kommunizieren. Da alle Eintragungen einer Seite unverzüglich auch der anderen Seite des Settings zugänglich sind, liegt eine synchrone Kommunikation vor. Der Vorteil der digitalen Medien liegt darin, dass man die Schülerkommunikation auf die Chatumgebung reduzieren kann.

Aus dem für Forschungszwecke gestalteten Konzept des Mathe-Chat haben wir dann im Projekt Lehr@mt die wikibasierte Lernumgebung zum kooperativen Lernen mit Neuen Medien im M@thematikunterricht der Primarstufe, kurz ‚wiLM@', entwickelt (Reinhard 2008; Merkel 2012). Eingesetzt wurden auch hier Tablet-PC oder Cintiqboards, die jeweils über einen Touchscreen verfügen, so dass die Schüler ihre Lösungen direkt auf dem Bildschirm mit einem Stift verschriftlichen können. Außerdem wird eine Internetverbindung benötigt, um auf die Lernumgebung wiLM@ zugreifen zu können, da die Aktivitäten nicht auf den Geräten selbst sondern auf einem Server gespeichert werden. Im Unterschied zum Mathe-Chat ist hier nun nicht nur eine synchrone Kommunikation, sondern auch die asynchrone Kommunikation möglich, da alle Lösungsschritte auf einer Datenbank weiterhin zur Verfügung stehen.

2. Erste Erfahrungen mit ‚PriMaPodcasts'

Bei den PriMaPodcasts handelt es sich um eine Verwendung digitaler Medien, die speziell die mündlichen Anteile beim Darstellen von Mathematik in den Fokus nimmt: Dabei ist wichtig, dass es sich um AudioPodcasts handelt, also solche, die eben gerade keine Abbildungen oder animierte Filme verwenden, sondern nur Ton. Erste Versuche, der bisherige Ablauf der Erstellung und Beispiele kann man unter Schreiber (2011) und bei Klesczewski & Klesczewski (2012) nachlesen und -hören.

Die Podcasts werden in einem Blog zur Verfügung gestellt, sind also öffentlich zugänglich. Der Blog ermöglicht, dass über Kategorien und eine Verschlagwortung die einzelnen Podcasts gefunden werden können. Die Beispiele sind sehr unterschiedlich bezüglich Länge, Art der Entstehung und Qualität. Um die Qualität des Inhalts der PriMaPodcasts zu erhöhen, wurde der folgende Ablauf der Erstellung entworfen.

3. Überarbeitetes Konzept

Die Erstellung beginnt mit einem Impuls, zu dem zunächst spontan eine Aufnahme gemacht wird (Abb. 1). Impulse könnten Fragen sein wie „Was ist das besondere an der Zahl 0?", „Wie geht das mit dem 10er Übergang?" oder „Welche geometrischen Körper kennst Du?" aber auch Aufforderungen wie „Beschreibe einen geometrischen Körper genau!". Anschließend hören die Schüler ihre Aufnahme mehrfach an und planen dann eine Aufnahme als Podcast, die also potentiell zur Veröffentlichung geeignet ist. Dabei ist es sinnvoll, Notizen zu machen bzw. eine Art Drehbuch zu erstellen. Es erfolgt dann die Aufnahme eines ersten Podcasts (s. Abb. 1).

Abbildung 1: Ablauf der Erstellung der PriMaPodcasts

Es folgt eine Redaktionssitzung, an der mehrere Schülergruppen und die Lehrerin bzw. der Lehrer teilnehmen. So dient die Podcast-Aufnahme nochmals als Gesprächsanlass und es kann Gelungenes, weniger Gelungenes sowie Berichtigungen und Ergänzungen besprochen werden. Das führt zu einem neuen Drehbuch, einer neuen Aufnahme. Nun kommt es zu einer weiteren Redaktionssitzung. Dann kann entschieden werden, ob man erneut Änderungen vornimmt. Im Prinzip könnte dieser Kreislauf (Abb. 1) mehrfach wiederholt werden. Bis dann die Redaktionssitzung die Entscheidung trifft, dass die Aufnahme als PriMaPodcast veröffentlicht werden kann.

4. Forschungsinteresse

Nachdem ich nun einen geeigneten Ablauf für die Erstellung von PriMa-Podcasts entworfen habe, möchte ich folgende Aspekte fokussieren:

- Möglichkeiten des Kompetenzerwerbs
- semiotische Analysen
- digitale Medien und Lehrerbildung

Das Kommunizieren ist eine der fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzbereiche der KMK Bildungsstandards und zwar mit dem Verweis auf die sachgerechte Verwendung mathematischer Fachbegriffe. Dieser Kompetenzbereich ist nicht überschneidungsfrei mit den Kompetenzbereichen Darstellen und Argumentieren. Geht es um die Förderung und Entwicklung von Kompetenzen, sollten diese miteinander verbunden und möglichst vielfältig angesprochen werden. Dies stellt allerdings besondere Anforderungen an die empirische Erforschung von Kompetenzerwerbsprozessen, da sich Kompetenzen in der Unterrichtssituation komplex darstellen. Daher möchte ich durch videobasierte Analysen genauer untersuchen, in wiefern die genannten Kompetenzen durch die Erstellung von Audiopodcasts durch Grundschülerinnen und Grundschülern gefördert werden. Dabei ist gerade die Verbindung von schriftlichen und mündlichen Tätigkeiten bei der Erstellung der PriMaPodcasts von Interesse, also auch der eben beschriebene Kreislauf der Erstellung mit der darauf folgenden Redaktionssitzung.

Wie immer in der rekonstruktiven Sozialforschung sollte auch dieses Projekt dazu beitragen, das Repertoire der Forschungsmethoden zu erweitern. Die mündlichen Produkte sollen in Verbindung mit dem zuvor erstellten Drehbuch einer semiotischen Analyse unterzogen werden. Hierzu wird eine Weiterentwicklung der Analysemethode der Semiotischen Prozess-Karten im Hinblick auf die Anwendung auf vokale Kommunikationsformen angestrebt. Ziel ist die Ausdifferenzierung einer Theorie, die semiotische Aspekte der mathematischen Unterrichtsinteraktion untersucht. Bisher sind diese weitgehend auf den inskriptionalen Aspekt beschränkt (Schreiber 2010). Die Semiotischen Prozess-Karten sollen hier für die mündliche Interaktion genutzt werden, so, wie diese bereits für inskriptionsbasierte und für gestische Zeichen (Huth 2011) in der mathematischen Interaktion genutzt werden.

Wenn im Bereich der Nutzung digitaler Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe in Deutschland ein Defizit vorherrscht, wie Mitzlaff (2008) und Ladel & Schreiber (2011) beschrieben haben, dann sollten wir als Mathematikdidaktiker die Lücke schließen. Gerade für einen projektorientierten Mathematikunterricht, der den Bildungsstandards der KMK genügt, müssen alltagstaugliche Szenarien entworfen und erprobt werden. Hier wird die Möglichkeit mündlicher Darstellungen mit digitalen Medien als PriMaPodcasts erprobt. Diese sollen dabei einerseits als Szenario für eine Lern-/ Lehrumgebung (oder -methode) und andererseits als Möglichkeit für das forschende Lernen der Studierenden genutzt werden.

Literatur

Bremer, C., Höhl, H., Schreiber, Chr. & Wenzel, F. (2011) Projekt Lehr@mt: Neue Medien in allen Phasen der Hessischen Lehrerbildung. In: SEMINAR - Lehrerbildung und Schule 4/2011, Forum Fachdidaktik - Theorie und Praxis, Schneider Verlag: Hohengehren, 103-114.

Huth, M. (2011) Das Zusammenspiel von Gestik und Lautsprache in mathematischen Gesprächen von Kindern. In: Brandt, B., Vogel, R. & Krummheuer, G. (Hrsg.), Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Münster: Waxmann, 197-243.

Klesczewski, S. & Klesczewski, J. (2012) PriMaPodcast zum Thema Vierecke - ein Beispiel. Bei "lehrer-online": http://www.lehrer-online.de/podcasts-vierecke.php

Ladel, S. & Schreiber, Chr. (2012) (Hrsg.) Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe. Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz. Band 1. Franzbecker: Hildesheim.

Ladel, S. & Schreiber, Chr. (2011) PriMaMedien – Den digitalen Medien eine Chance! In A.-S. Steinweg (Hrsg.), Mathematikdidaktik Grundschule (1. Band). Bamberg: University of Bamberg Press, 25-37.

Merkel, A. (2012) Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht mit der Lernumgebung wiLM@. In: Ladel, S. & Schreiber, Chr. (Hrsg.) Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe. Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz. Band 1. Franzbecker: Hildesheim. 103-130

Mitzlaff, H. (Hrsg.) (2008) Internationales Handbuch. Computer (ICT), Grundschule, Kindergarten und Neue Lernkultur (1. und 2. Band). Hohengehren: Schneider.

Schreiber, Chr. (2012) Mit Neuen Medien forschen– Schriftlichkeit und Mündlichkeit beim Darstellen im Mathematikunterricht. In: Ladel, S. & Schreiber, Chr. (Hrsg.) Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe. Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz. Band 1. Franzbecker: Hildesheim. 131-150.

Schreiber, Chr. (2011) PriMaPodcasts - Podcasts zur Mathematik in der Primarstufe. Bei "lehrer-online": http://www.lehrer-online.de/mathe-podcasts.php

Schreiber, Chr. (2010) Semiotische Prozess-Karten - Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen. Waxmann: Münster u. a.

Stephan SCHREIBER*, Elisabeth FISCHER*, Rolf BIEHLER**, Martin HÄNZE*, Reinhard HOCHMUTH***, *Universität Kassel, **Universität Paderborn, ***Leuphana Universität Lüneburg

Von der Schwierigkeit, Leistung zu steigern. Innovationen zu Beginn des Mathematik-Lehramtsstudiums.

Das Projekt LIMA (Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“) ist ein Gemeinschaftsprojekt der Universitäten Paderborn und Kassel und wird im Rahmen der Hochschulforschung als Beitrag zur Professionalisierung der Hochschullehre vom BMBF[1] finanziert. Zentrale Komponenten des Projekts sind die Entwicklung und Implementierung von Lehrinnovationen zu Beginn des Mathematikstudiums für Lehramt und eine empirische Begleitstudie. In diesem Beitrag werden Forschungsansatz und -ziele des Projekts skizziert und Teilergebnisse der Studie berichtet. Im Zentrum steht dabei der Zusammenhang zwischen Lehrinnovation und den individuellen Merkmalen sowie der fachlichen Leistungsentwicklung der Studierenden.

Das Projekt: Ziele, Aufbau und Durchführung

Das Projekt verfolgt das Ziel, den Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik für Lehramtsstudierende zu erleichtern. Die Umsetzung dieses Vorhabens erfolgte in drei Schritten:

- Zunächst wurde eine erste Kohorte von Studienanfängern in Kassel und Paderborn als Kontrollgruppe im Rahmen einer Mathematik-Einführungsveranstaltung wissenschaftlich begleitet. Dabei wurden Problembereiche, die den Beginn der Fachausbildung erschweren, identifiziert und umfangreiche Verbesserungsmaßnahmen entwickelt (Biehler et al., 2012a).
- Diese wurden in der folgenden Kohorte von Studienanfängern implementiert und als Experimentalbedingung wiederum wissenschaftlich untersucht.
- In einem dritten Schritt wurden die Lehrinnovationen schließlich durch den Vergleich beider Kohorten evaluiert.

Die durch die unterschiedlichen Kohorten bedingten methodischen Nachteile wurden durch umfangreiche Prä- und Postmessungen kontrolliert und aufgefangen. Dazu wurde zu Beginn des Semesters neben individuellen Merkmalen wie Studien- und Berufswahlmotivation, Selbstkonzept, Zielo-

[1] Förderkennzeichen 01PH08028B

rientierungen oder Lernstrategien auch das fachliche Vorwissen erhoben. In der Mitte des Semesters wurde ein Fragebogen zum Übungserleben eingesetzt, zum Semesterende wurden schließlich die Veranstaltung evaluiert und verschiedene Skalen aus dem Eingangsfragebogen erneut erhoben. Als Maß für die erreichte fachliche Leistung diente die Klausur.

Die Lehrinnovation umfasste folgende Elemente:

- kompetenzorientierte Überarbeitung der Übungsaufgaben,
- Einführung von Arbeitsphasen in Kleingruppen in den wöchentlichen Übungen mit speziell gestalteten Aufgaben und betreut durch ein Team aus zwei Tutoren,
- fachspezifische Tutorenschulungen, u. a. zur Verbesserung der Korrekturen und Qualitätssteigerung der Tutorien (vgl. Biehler et al., 2012b) sowie intensive Begleitung der Tutoren im Semester,
- Einrichten eines „Mathe-Treffs“, in dem die Studierenden gemeinsam lernen konnten und Tutoren als Berater zur Verfügung standen.

Da es bei der Umsetzung der Lehrinnovation, bei der Stichprobe und den Rahmenbedingungen Unterschiede zwischen den Universitäten gibt und die erhobenen Daten somit nicht direkt vergleichbar sind, werden die Untersuchungen an den beiden Standorten als separate Teilstudien behandelt.

Einfluss der Lehrinnovation auf die Leistungsentwicklung, die Kompetenz der Tutoren und die Übungsqualität

Die Lehrinnovation scheint auf die Entwicklung der fachlichen Leistung keinen signifikanten Einfluss zu haben. Kovarianzanalysen zwischen Kontroll- und Experimentalgruppe mit dem Klausurergebnis als abhängiger Variable und dem Vorwissen als Kovariate zeigen für Kassel mit $F_{(1,79)} = 3.5$, $p > .05$ ($M_{(K1)} = 60.3\%$ (12.4), $M_{(K2)} = 55.7\%$ (15.1)) und in Paderborn mit $F_{(1,276)} = 0.39$, $p > .05$ ($M_{(K1)} = 60.0\%$ (17.1), $M_{(K2)} = 61.4\%$ (19.0)) keinen bedeutsamen Unterschied in der Leistungsentwicklung beider Kohorten.

Das Ausbleiben eines positiven Effekts könnte u.a. auf das verwendete Leistungsmaß, die „reguläre“ Klausur, zurückzuführen sein. Diese zielt auf eine inhaltsvalide Prüfung der Studienleistung ab und wurde nicht nach den Kriterien einer differenzierten Kompetenzdiagnostik konzipiert. Damit werden evtl. veränderte Kompetenzen bei den Studierenden jenseits der Beherrschung klausurtypischer Inhalte nicht erfasst. Eine weitere Erklärung wird vor dem Hintergrund des Angebot-Nutzungs-Modells von Helmke (Helmke, 2009) deutlich. Es stellt die komplexen Zusammenhänge von Lernprozessen im schulischen Kontext dar und zeigt auf, dass der Pfad von Angebot über Nutzung bis hin zur Wirkung von vielen Unbekannten und

Zwischenprozessen beeinflusst wird, die die Ergebnisvorhersage erschweren. Ein Grund für das Ausbleiben der Leistungssteigerung kann also auch im langen Pfad vom Treatment zur Wirkungsmessung gesehen werden.

Um diesen Wirkungspfad transparenter zu machen und die Reichweite des Treatments festzustellen, wurden auch Treatment-nähere Indikatoren, nämlich die Einschätzung der Tutorenkompetenz und der Qualität der Übungen von Seiten der Studierenden, verglichen. Hier zeigt sich eine deutliche Verbesserung von Kohorte 1 zu Kohorte 2: In Kassel, beispielsweise, schätzten die Studierenden der zweiten Kohorte die Kompetenz ihrer Tutoren auf einer 6-stufigen Likertskala (1 = niedrig, 6 = hoch) mit $M_{(K2)} = 5.4$ (0.7) viel höher ein als ihre Vorgänger mit $M_{(K1)} = 4.1$ (1.8), $T_{(53)} = -4.03$, $p < .01$. Die Kompetenzeinschätzung der einzelnen Tutoren und die Qualität der Übungen zeigen jedoch keinen Einfluss auf den Lernerfolg in den verschiedenen Gruppen.

Einfluss individueller Merkmale auf den Lernerfolg

Über die Evaluationsstudie hinaus wurde innerhalb der Semester untersucht, wie sich die fachlichen Kompetenzen der Studierenden jeweils entwickeln, welche spezifischen motivationalen und volitionalen Lernvoraussetzungen sie charakterisieren und welchen Einfluss diese Merkmale auf den Lernerfolg haben.

Mit einer linearen Regressionsanalyse wurde bestätigt, dass das Vorwissen zu Beginn des Semesters einen guten Prädiktor für die in der Klausur erzielte Leistung darstellt, da es 21% (39%) der Varianz im Klausurergebnis in Paderborn (Kassel) erklärt. Um den Einfluss individueller Merkmale auf die Leistungsentwicklung während des Semesters zu untersuchen, wurde das Vorwissen als unabhängige Variable in den Regressionsmodellen beibehalten. Dabei zeigte sich, dass sich mathematisches Selbstkonzept, Distanzierungsfähigkeit, Intelligenz, Beharrlichkeit und soziale Eingebundenheit, aber auch die Teilnahmehäufigkeit an den Übungen signifikant positiv auf den Leistungszuwachs auswirken. Negativen Einfluss haben die Überzeugung, Mathematik sei als Toolbox zu verstehen, Prokrastination und die Lernstrategie der Memorisation. Keine Bedeutung scheint dagegen häufig als leistungsrelevant angesehenen Konstrukten wie Matheangst, fachlichem Interesse, Handlungsorientierung nach Misserfolg, Lern- und Leistungszielorientierungen oder lernrelevanten Einstellungen wie Lernbereitschaft und Engagement zuzukommen. Auch scheint nur der fachbezogene Teil des Selbstkonzepts Einfluss auf den Lernerfolg zu haben, das allgemeine Selbstkonzept leistet keine nachweisbare Varianzklärung.

Einfluss der Lehrinnovation auf individuelle Merkmale

Um die Effekte der Lehrinnovation auf die Entwicklung individueller Merkmale zu untersuchen, wurden Kontroll- und Experimentalgruppe mit Hilfe von Kovarianzanalysen verglichen, wobei als Kovariate jeweils die betreffende Skala zum ersten Messzeitpunkt aufgenommen wurde.[2] Dabei zeigt sich lediglich bei den Skalen Kompetenz- und Autonomieerleben an beiden Standorten ein einheitliches Bild, nämlich eine negative Verschiebung der Entwicklung von Kohorte 1 zu Kohorte 2. Dies kann als Konsequenz der Lehrinnovation gedeutet werden, da einerseits ausführlichere Korrekturen den Studierenden ihre Fehler eindringlicher vor Augen führen, was eine Abnahme des Kompetenzempfindens nach sich ziehen könnte, und andererseits vorstrukturierte Präsenzübungen mit vorbereitenden Übungsaufgaben und Gruppenarbeitsphasen das Autonomieerleben negativ beeinflussen könnten.

Ausblick

Derzeit werden differenziertere Datenanalysen durchgeführt, insb. um zu prüfen, wie die Lehrinnovation auf verschiedene Teilgruppen Studierender gewirkt hat. Weiterhin scheinen sich die Aufgabenbearbeitungen zwischen den Kohorten im Hinblick auf die Darstellungs- und Begründungsqualität zu unterscheiden, was in vergleichenden Analysen untersucht wird.

Forschungsbedarf besteht weiterhin bei der Entwicklung von Instrumenten zur Untersuchung der studentischen Nutzung der Lehrinnovation und der daraus resultierenden Veränderung des Lernens.

Literatur

Biehler, R., Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S., Hänze, M. (2012a). Tutorenschulung als Teil der Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ (LIMA-Projekt). In: Zimmermann et al., 2012, S. 33-44

Biehler, R., Hochmuth, R., Klemm, J., Schreiber, S., Hänze, M. (2012b). Fachbezogene Qualifizierung von MathematiktutorInnen – Konzeption und erste Erfahrungen im LIMA-Projekt In: Zimmermann et al., 2012, S. 45-56

Helmke, A. (2009). Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Seelze-Velber: Klett-Kallmeyer.

Zimmermann, M., Bescherer, C. & Spannagel, C. (2012). Mathematik lehren in der Hochschule - Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen, Hildesheim, Berlin: Franzbecker

[2] Für die Konstrukte des Fragebogens zum Übungs-, Kompetenz- und Autonomieerleben, der nur einmal in der Mitte des Semesters erhoben wurde, dienten inhaltlich passende Skalen aus dem Eingangsfragebogen als Kovariaten.

Stanislaw SCHUKAJLOW, Paderborn, André KRUG, Kassel

Multiple Lösungen beim Modellieren: Wirkungen auf Leistungen, kognitive Aktivierung, Kontrollstrategien, Selbstregulation, Interesse und Selbstwirksamkeit

Im DFG-Projekt MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht) wird die Entwicklung von multiplen Lösungen bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben untersucht. Themenfelder des Projekts umfassen

- theoretische Studien zur Wirkung von multiplen Lösungen bei mathematischen Aufgaben (Schukajlow & Blum, 2011),
- Umgang der Lernenden mit realitätsbezogenen Aufgaben, die mehrere Lösungen zulassen (Schukajlow & Krug, in press) und
- Entwicklung sowie empirisch fundierte Evaluation der Lernumgebungen zu Modellierungsaufgaben, in denen das Erstellen von mehreren Lösungen gefördert und gefordert wird.

Im vorliegenden Beitrag berichten wir über die Anlage und erste Ergebnisse einer experimentellen Feldstudie, in der Wirkungen von multiplen Lösungen auf kognitive, strategische und motivational-affektive Merkmale untersucht wird.

Modellierungskompetenz, Strategien, Selbstwirksamkeit und Interesse

Modellierungskompetenz ist eine komplexe Fähigkeit, die aus verschiedenen Teilaktivitäten besteht. Die vorliegenden Forschungsergebnisse deuten an, dass Modellieren besser in selbständigkeitsorientierten Lernumgebungen gefördert wird (Schukajlow et al., 2009). Da die Steigerung in der Modellierungskompetenz normativ nicht befriedigend erscheint, wird nach weiteren Fördermöglichkeiten gesucht. Eine solche Möglichkeit besteht in der Entwicklung von mehreren Lösungen zu einer gegebenen Aufgabe, welche das tiefergehende Durcharbeiten des Lerngegenstands ermöglichen, das vorhandene Wissen flexibilisieren und eine kognitive Aktivierung positiv beeinflussen kann. Von vielen theoretisch denkbaren Lösungsvariationen beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben werden in derzeitiger Projektphase solche multiple Lösungen untersucht, die durch das Treffen von Annahmen über fehlende Angaben entstehen.

Neben den Veränderungen im kognitiven Bereich stehen auch die Wirkungen der multiplen Lösungen auf strategische und motivational-affektive Merkmalen von Lernenden im Mittelpunkt des Projekts. Unter den metakognitiven Strategien wird der Kontrolle der Lösung und der Selbstregulation eine wichtige Rolle zugeschrieben. Die Entwicklung der zweiten Lösung bietet die Gelegenheit an, beide Lösungen gegenüberzustellen und diese wechselseitig zu prüfen. Durch dieses Vorgehen kann die Anwendung von Kontrollstrategien stimuliert werden. Eine bedeutende Voraussetzung der Leistungssteigerungen beim Modellieren in selbständigkeitsorientierten Lehr-Lernformen ist die Schüler-Selbstregulation (Schukajlow et al., 2009). Die Selbstregulation profitiert bei der Entwicklung von multiplen Lösungen zum einen von der häufigeren Anwendung der Kontrollstrategien, die eine wichtige Rolle in Modellen des selbstgesteuerten Lernens spielen. Zum anderen kann die Selbstregulation durch das Treffen von Annahmen und der damit zusammenhängenden individuellen Zielsetzung gesteigert werden. Selbstwirksamkeit und Interesse werden in den letzten Dekaden immer häufiger als Prädiktoren der Leistungsentwicklung oder auch als eigenständige Ziele des Mathematikunterrichts diskutiert (Schukajlow et al., 2012; Zan, Brown, Evans, & Hannula, 2006). Die Entwicklung mehrerer Lösungen kann die Überzeugung, eine Aufgabe bearbeiten zu können, steigern und Interesse an Mathematik erhöhen.

In der vorliegenden Studie wird angenommen, dass die Entwicklung von multiplen Lösungen einen positiven Einfluss auf Modellierungskompetenz, kognitive Aktivierung, Selbstregulation, Kontrollstrategien, Selbstwirksamkeit und Interesse der Schüler hat.

Untersuchungsbedingungen, Messinstrumente und Stichprobe

Auf der Basis des empirisch erprobten, selbständigkeitsstimulierenden „operativ-strategischen“ Unterrichts wurden zwei Lernumgebungen entwickelt. In einer Lernumgebung (ML) haben Schüler offene Modellierungsaufgaben zum Satz des Pythagoras bearbeitet und sollten zwei Lösungen zu jeder Aufgabe entwickeln (siehe eine Beispielaufgabe bei Schukajlow & Krug, in press). In der anderen Lernumgebung (EL) wurden Lernenden geschlossene Aufgaben vorgelegt, die bis auf die Festlegung aller für die Lösung notwendigen Informationen identisch zu den offenen Aufgaben der Gruppe ML waren. Der Unterricht hat insgesamt 5 Schulstunden gedauert und wurde umrahmt von jeweils 90-minutigen Vor- und Nachtest. An der Untersuchung haben 6 Realschulklassen aus der Jahrgangsstufe 9 teilgenommen. Jede Klasse wurde leistungs- und geschlechtshomogen in zwei gleichgroße Gruppen aufgeteilt. In einer Gruppe wurde die ML- und in der anderen EL-Bedingung implementiert. Der Unterricht wurde von 4 erfahrenen Lehrkräften erteilt, die vor der Unterrichtseinheit geschult wurden. Jede Lehrkraft hat die gleiche Anzahl von ML- und EL-Gruppen in einer Schule unterrichtet, so dass der Einfluss der Lehrkraft in beiden Experimentallgruppen konstant gehalten wurde.

Die Modellierungskompetenz wurde dreidimensional operationalisiert. Die erste Dimension enthielt Items, die den gesamten Modellierungsprozess erfassen und die Identifikation von notwendigen und überflüssigen Angaben erfordern. Die zweite und dritte Dimension waren „Auswahl wichtiger Informationen“ (Leiss, Schukajlow, Blum, Messner, & Pekrun, 2010) und innermathematisches Arbeiten zum Satz des Pythagoras. Im Vor- und Nachtest hat ein Schüler verschiedene Aufgaben gelöst, die durch eine gemeinsame Skalierung auf einer Skala abgebildet wurden. Kognitive Aktivierung, Strategien, Selbstwirksamkeit und Interesse wurden mit Hilfe einer 5-stufigen Likert-Skalen erfasst. Die Testitems sowie Fragebogenskalen wurden aus verschiedenen Untersuchungen übernommen und z.T. adaptiert. Die Reliabilitäten des Leistungstests und der Befragungen lagen im befriedigenden bis sehr guten Bereich.

Ergebnisse

Zur Kontrolle der Umsetzung des Treatments wurden Befragungen eingesetzt und Beobachtungen des Unterrichts durchgeführt. Es zeigte sich, dass Schüler im Durchschnitt deutlich mehr Lösungen in der ML- als in der EL-Gruppe entwickeln.

Der Vergleich von Schülerleistungen deutet große Zuwächse von Vor- zum Nachtest in beiden Gruppen an. In der Gruppe „multiple Lösungen“ zeigen sich – so die ersten Ergebnisse – tendenziell bessere Leistungen im Posttest bei der Modellierungskompetenz unter Kontrolle des Vortests. In den Dimensionen „Identifikation wichtiger Informationen“ und „technisches Arbeiten“ wurden keine Unterschiede beobachtet. Die kognitive Aktivierung war deutlich höher in der Unterrichtsbedingung, in der mehrere Lösungen entwickelt wurden.

Keine Unterschiede zwischen den Untersuchungsgruppen wurden in der Schüler-Selbstwirksamkeit beobachtet. Unter Berücksichtigung des Vortests geben Lernende im Nachtest in der ML-Gruppe an, häufiger Kontrollstrategie anzuwenden. Sie berichten zudem über höhere Selbstregulation und stärkeres Interesse an Mathematik. Somit erscheint die Lernumgebung, in der jeder Lernende aufgefordert wird, mehrere Lösungen durch das Treffen von Annahmen zu gegebenen Aufgaben zu entwickeln, in einigen Merkmalen vergleichbar gut und in anderen signifikant besser zu sein.

Offene Forschungsfragen umfassen u.a. Untersuchungen der Wirkungen von multiplen Lösungen, welche durch das Anwenden verschiedener mathematischer Verfahren entwickelt werden. Eine aktive Förderung der Vernetzung mathematischer Inhalte, wie sie durch die Entwicklung mehrerer mathematischer Lösungen beim Modellieren realisiert werden kann, würde weitere Anhaltspunkte zur Steigerung der Modellierungskompetenz und zur Verbesserung Schüler-Einstellungen und -Überzeugungen zu Mathematik geben.

Literatur

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., & Pekrun, R. (2010). The role of the situation model in mathematical modelling – task analyses, student competencies, and teacher interventions. Journal für Mathematikdidaktik, 31(1), 119-141.

Schukajlow, S., & Blum, W. (2011). Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser & P. Bender (Eds.), Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung - Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der empirischen Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens (pp. 249-267). Münster: LIT Verlag.

Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., Pekrun, R., Leiss, D., & Müller, M. (2009). Unterrichtsformen, erlebte Selbständigkeit, Emotionen und Anstrengung als Prädiktoren von Schüler-Leistungen bei anspruchsvollen mathematischen Modellierungsaufgaben. Unterrichtswissenschaft, 37(2), 164-186.

Schukajlow, S., & Krug, A. (in press). Considering multiple solutions for modelling problems - design and first results from the MultiMa-Project. In W. Blum, J. Brown, G. Kaiser & G. Stillman (Eds.), Proceedings of ICTMA15. Heidelberg: Springer.

Schukajlow, S., Leiss, D., Pekrun, R., Blum, W., Müller, M., & Messner, R. (2012). Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. Educational Studies in Mathematics, 79(2), 215-237.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in Mathematics Education: An Introduction. Educational Studies in Mathematics, 63(2), 113-122.

Stephanie SCHULER, Freiburg

Mathematiklernen im Kindergarten in formal offenen Situationen

In welcher Form und unter welchen Voraussetzungen und Bedingungen kann mathematische Bildung in *alltäglichen* Zusammenhängen im Zuge einer *ganzheitlichen* frühen Bildung in *altersgemischten* Kindergartengruppen realisiert werden? Diese Frage liegt dem Forschungsvorhaben zugrunde, über dessen Ergebnisse im Folgenden berichtet wird.

1. Lernort Kindergarten

Der Alltag im Kindergarten ist geprägt von formaler Offenheit. Diese zeigt sich z.B. in einer Wahlfreiheit der Räume, der Materialien, der Spielpartner und der Verweildauer. In diesem Alltag treten mathematische Aktivitäten selten spontan auf und werden von den Erzieherinnen häufig nicht mathematisch gedeutet und aufgegriffen (vgl. Stöckli & Stebler 2011, 81).

Eine Möglichkeit, mathematische Aktivitäten im Kontext der formalen Offenheit anzuregen, ist der Ansatz Spiele bzw. das Spielen. Dafür können mehrere Argumente ins Feld geführt werden: *Spiele* sind gängige Materialien im Kindergarten, *Spielsituationen* sind ein kindergartentypisches didaktisches Setting, (Gesellschafts-) Spiele weisen Bezügen zu einem zentralen Bereich früher mathematischer Bildung auf, dem Zahlbegriff, und s*pielerisches Lernen* kann als die Hauptform des Lernens im frühen Kindesalter bezeichnet werden (vgl. z.B. Oerter 2006).

2. Forschungsprozess

Um den Spiel(e)ansatz zu präzisieren, wurden Spiele in mehreren Erhebungsphasen im Kindergarten eingesetzt, die zuvor auf ihr mathematisches Potenzial untersucht worden waren. Die Spielsituationen mit diesen Materialien wurden videotechnisch aufgezeichnet, Ton- und Bilddaten aufbereitet und ausgewertet (vgl. Dinkelaker & Herrle 2009). Aufgrund der kontinuierlichen Datenerhebung und Datenauswertung lehnt sich das Forschungsvorhaben methodologisch an die Grounded Theory an (vgl. Strauss & Corbin 1996).

Ergebnis des zirkulären Forschungsprozesses sind Bedingungen für die Entstehung mathematischer Lerngelegenheiten in formal offenen Situationen (vgl. auch Schuler 2012 i.Vorb.). Die Ergebnisse sollen im Folgenden exemplarisch anhand einer Spielsituation erläutert und illustriert werden.

3. Spielsituation *Quips*

Quips ist ein Anzahl-Legespiel, bei dem Anzahlen durch Zählen, Erfassen und das Wiedererkennen von Würfelbildern bestimmt werden können. Es ermöglicht den Vergleich von Mengen und die Zerlegung in Teilmengen (vgl. Abb. 1).

Quips (Ravensburger)

Spieler: 2 bis 4
Material: 4 Legetafeln, 90 Holzspielsteine in 6 Farben, 1 Farbwürfel, 1 Augenwürfel mit den Anzahlen eins bis drei
Spielregeln: Jeder Spieler bekommt eine Legetafel. Es wird mit dem Augen- und dem Farbwürfel gleichzeitig gewürfelt. Die beiden Würfel bestimmen die Farbe und wie viele Steine dieser Farbe aus der Schachtel genommen werden dürfen. Diese werden in die farbgleichen Felder der eigenen Tafel gesetzt. Steine, für die kein Platz mehr frei ist, müssen zurück in die Schachtel gelegt oder können an einen anderen Spieler verschenkt werden. Es gewinnt, wer als Erster seine Tafel gefüllt hat.

Abb. 1: Spielregeln zu „Quips“ (Bildquelle www.amazon.de)

Die Erzieherin (kurz: E) legt im Freispiel *Quips* auf den Tisch. Lisa (l, 2;11 Jahre) setzt sich an den Tisch. Christoph (C, 3;1 Jahre) und Luis (L, 3;0 Jahre) kommen ins Zimmer und setzen sich dazu. Sie wollen auch mitspielen. Beide greifen nach Spielsteinen und Spielplan. Fabio (F, 2;4 Jahre) kommt weinend ins Zimmer. Die Erzieherin nimmt ihn auf den Schoß (vgl. Abb. 2).

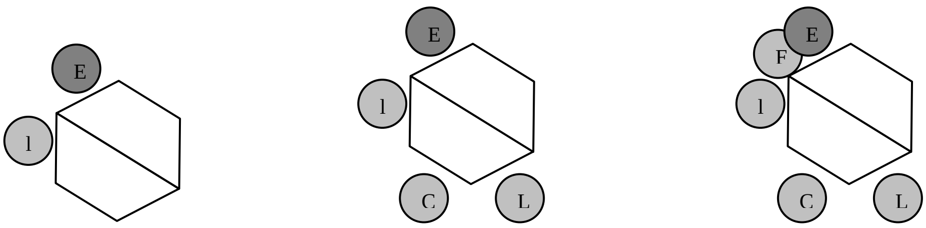
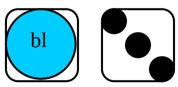


Abb. 2: Tischkonfigurationen zu Spielbeginn

In der zweiten Spielrunde ergibt sich folgende Situation:



Lisa *würfelt*
Erzieherin: Oi, was hast du da für ne Zahl?
Lisa: Eins, drei, vier. *Lisa tippt auf jedes Auge*
Erzieherin: Soll mer mal zusammen zählen, schau mal *hebt den Daumen* eins
Lisa: Zw
Lisa und Erzieherin: zwei, drei, vier. *Erzieherin klappt vier Finger auf*
Erzieherin: Und jetzt zählen wir noch mal zusammen hier. *Zeigt auf den Augenwürfel, Fabio stapelt rosa Steine auf dem Spielplan*
Lisa und Erzieherin: Eins, zwei, drei. *Lisa tippt auf jedes Auge*
Erzieherin: Und welche Farbe darfst du nehmen? *Fabio zeigt auf seinen Turm*
Lisa: Blau.

Erzieherin: *Zu Fabio* Du sollst hier kein Turm bauen.
Lisa: Blau.
Erzieherin: Drei Blaue genau.
Lisa: *schaut auf ihren Plan* Zwei blau.
Erzieherin: O stimmt, du brauchst nur zwei.

4. Bedingungen mathematischer Lerngelegenheiten beim Spielen

Folgende Bedingungen konnten aus den Daten in der Verknüpfung mit der Literaturlage entwickelt werden.

Mathematisches Potenzial

Das mathematische Potenzial eines Spiels stellt eine Grundvoraussetzung für die Entstehung mathematischer Lerngelegenheiten dar. Doch auch wenn ein Spiel mathematisches Potenzial aufweist, bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass mathematische Lerngelegenheiten entstehen. In obiger Spielsituation lassen sich sowohl inhaltsbezogene als auch allgemeine mathematische Aktivitäten beobachten (vgl. Abb. 3). So sagt Lisa nicht nur die *Zahlwortreihe* auf und bestimmt *Anzahlen*, sondern sie *vergleicht* ihre gewürfelte Anzahl mit der benötigten Anzahl blauer Steine. Darüber hinaus *argumentiert* sie gegenüber der Erzieherin, dass sie nur zwei blaue Steine benötigt, obwohl sie eine Drei gewürfelt hat.

Zahlbezogene mathemat. Aktivitäten	**Allgemeine mathemat. Aktivitäten**	
■ Verbale Zählfertigkeiten	■ Vergleichen	■ Beschreiben
■ Anzahlbestimmung durch Zählen	■ Ordnen	■ Vermuten
■ Anzahlbestimmung durch Erfassen	■ Sortieren	■ Prüfen
■ Mengen vergleichen	■ Strukturieren	■ Begründen
■ Mengen zerlegen		■ Argumentieren

Abb. 3: Mathematisches Potenzial in Spielsituationen

Aufforderungscharakter

Der Anreiz, sich am Spiel zu beteiligen, kann sowohl vom Material als auch von der Situation ausgehen: Es kann zwischen einem *materialbezogenen* (Steine setzen, versetzen und stapeln) und einem *sozialen Aufforderungscharakter* (Vergrößerung der Spielgruppe, vgl. Abb. 2) unterschieden werden. Beide Arten können in der obigen Situation beobachtet werden. Allerdings müssen für ein gemeinsames Spiel nach Regeln durch das Material nahegelegte Handlungen aufgeschoben bzw. in einer bestimmten Reihenfolge und Form ausgeführt werden.

Präsenz der Erzieherin

Erzieherinnen reagieren im Kontext der formalen Offenheit häufig mit geteilter Aufmerksamkeit, z.B. dann, wenn Kinder verschiedene Zugänge zum Material finden. Lisa spielt das Spiel nach Regeln, wohingegen sich bei Fabio der Aufforderungscharakter des Materials auf andere Weise zeigt: Er stapelt Steine. Die Erzieherin wendet sich beiden Kindern gesondert zu: Mit Lisa findet eine *inhaltlich ausgerichtete Kommunikation* statt, in der sowohl inhaltsbezogene als auch allgemeine mathematische Lerngelegenheiten entstehen, während sie Fabio auffordert, das Turmbauen zu beenden. Für ihn können durch die fehlende inhaltliche Ausrichtung und dem Bestreben der Erzieherin nach einem gemeinsamen Spiel entsprechend der Regeln in dieser Situation keine mathematischen Lerngelegenheiten entstehen. Die Präsenz in geteilter Aufmerksamkeit ermöglicht nicht für alle Kinder gleichermaßen Lerngelegenheiten.

Integration verschiedener Rollendimensionen

Die Erzieherin hat in der Spielsituation unterschiedliche Interaktionsmöglichkeiten. Sie spannen sich auf zwischen Beobachten und direktem Instruieren (vgl. z.B. Textor 2000). Diese Rollendimensionen müssen integriert werden, da sie in der Lernbegleitung unterschiedliche Funktionen übernehmen. Das *Vormachen* (Finger aufklappen, aufsagen der Zahlwortreihe) dient der Vermittlung von Konventionen bei Fehlern. *Enge Fragen* (Was hast du für ne Zahl?) bedingen inhaltsbezogene Lerngelegenheiten wie die Anzahlbestimmung. *Kommentare* (Drei blaue genau.) führen neben inhaltsbezogenen auch zu allgemeinen mathematischen Lerngelegenheiten, da sie eine *Kommunikation der wechselseitigen Bezugnahme* begünstigen.

Literatur

Dinkelaker, Jörg & Herrle, Matthias (2009): Erziehungswissenschaftliche Videographie. Eine Einführung. Wiesbaden: VS Verlag.

Oerter, Rolf (2006): Spielen und lernen. Elemente einer Spielpädagogik in der Schule. In: Schulmagazin 5 bis 10. 74, H. 7–8, S. 5–8.

Schuler, Stephanie (2012 i.Vorb.): Zur Gestaltung mathematischer Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen – eine Untersuchung am Beispiel von Materialien und Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs.

Stöckli, Georg & Stebler, Rita (2011): Auf dem Weg zu einer neuen Schulform. Unterricht und Entwicklung in der Grundstufe. Münster: Waxmann.

Strauss, Anselm L. & Corbin, Juliet (1996): Grounded Theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Beltz.

Textor, Martin R. (2000): Lew Wygotski – der ko-konstruktive Ansatz. Aus: Fthenakis, Wassilios E. & Textor, Martin R. (Hrsg.): Pädagogische Ansätze im Kindergarten. Weinheim, Basel: Beltz, S. 71–83.

Heinz SCHUMANN, Weingarten

Ungleichungen?

Ein Beispiel für den mathematischen Substanzverlust in den Curricula

Wir gehen aus von der These: Unter dem Einfluss gesellschaftlicher Verhältnisse (egalitaristische, populistische, hedonistische, konsumistische, wertrelativistische, egozentrische, … Tendenzen) entwickeln sich die Curricula des Faches Mathematik an allgemeinbildenden Schulen von substanziellen mathematischen Inhalten weg. – Man kann den Eindruck gewinnen, dass unsere Gesellschaft, einschließlich ihrer die Bildungspolitik bestimmenden bzw. beeinflussenden Kreise, sich endlich von den harten Fakten und Prozeduren der Elementarmathematik emanzipieren möchte. – Ein Beispiel für den damit verbundenen Verlust an elementarmathematischer Substanz ist der Unterrichtsgegenstand „Ungleichungen“. Das zeigen u. a. folgende Auszüge aus den **gymnasialen Lehrplänen/Bildungsplänen (Baden-Württemberg) über Ungleichungen**:

<u>(Vorläufiger) Lehrplan</u> **1978-1981**
Klasse 7: Lineare Ungleichungen
Klasse 8: Bruch-Ungleichungen, Lineare Optimierung
Klasse 9: Quadratische Ungleichungen
Klasse 10: Exponentielle und logarithmische Ungleichungen
<u>Bildungsplan</u> **1994**
Klasse 8: Lineare Ungleichungen, Bruch-Ungleichungen (fakultativ)
Klasse 9: Quadratische Ungleichungen (fakultativ)
<u>Bildungsplan</u> **2004**
Klasse 8: Lineare Ungleichungen mit einer Variablen.

Der Schwund ist offensichtlich. Möglicherweise verdankt der Verbleib der linearen Ungleichungen im Bildungsplan der Existenz von PISA-Testaufgaben zum Lösen solcher Ungleichungen. Ein verhängnisvolle Rolle spielt bei der Reduzierung der mathematischen Inhalte auch die 2004 eingeführte Trennung des Curriculums in das Kern-Curriculum und das Schul-Curriculum – ein allgemeiner curricularer ‚Sündenfall' – mit dem Effekt, dass die Unterrichtszeit für das Schul-Curriculum missbraucht wird zum Üben des Kerncurriculum-Stoffes.

Fazit: *Die aktuellen mathematischen Curricula allgemeinbildender Schulen in Deutschland (B.-W.) enthalten keine bzw. nicht konsistente Inhalte über „Ungleichungen“ im Gegensatz zu vielen anderen Ländern (z. B. USA, Japan, China, Russische Föderation, Griechenland).*

Es sei noch angemerkt, dass die in mathematischen Bundeswettbewerben und den deutschen Mathematik-Olympiaden gestellten Beweisaufgaben zu

Ungleichungen keinen Bezug zum Mathematikunterricht allgemeinbildender Schulen haben, also auch von dort keine vorbereitende Unterstützung erfahren.

Ungleichungen lösen - Leistungen deutscher Schüler/Studierender

Zu der Ungleichung $5x + 5/3 \leq -2x - 2/3$ (TIMSS/III-Mehrfachauswahlaufgabe, 1995) bestimmen nur 53% der Schüler der gymnasialen Abschlussklassen die richtige Lösung im Gegensatz zum internationalen Mittel von 73%. Zusammen mit weiteren entsprechenden TIMSS-Ergebnissen kann man feststellen:

Fazit: *Die Leistungen deutscher Schüler und Schülerinnen beim Lösen von linearen Ungleichungen sind im internationalen Vergleich als schwach zu bewerten.*

Einen Hinweis auf die Auswirkungen des Ungleichungsschwundes gibt eine Voruntersuchung zum Thema „Lösen von Ungleichungen durch Lehramtsstudierende“: Ca. Dreiviertel von 38 Studierenden des 4. Semesters im Studiengang Mathematik/Realschule an einer Pädagogische Hochschule in B.-W. (Teilnehmer einer Lehrveranstaltung zur Didaktik der Algebra, Wintersemester 2011/2012) lösen die Ungleichung $ax + b > 0$ für $a \neq 0$ wie die entsprechende lineare Gleichung, also ohne Fallunterscheidung!

Didaktik der „Ungleichungslehre“ heute und gestern

Als aktuelles Standardwerk für die Didaktik der Algebra ist das Werk von Vollrath & Weigand, 3. Aufl. 2007: „Algebra in der Sekundarstufe“ zu bezeichnen. Bereits auf S. 7 „Auswahl und Anordnung von Inhalten der Algebra – Gerüst des Lehrgangs“ wird die Ordnungsstruktur von $\mathbb{N}(+,\cdot,<)$, $\mathbb{B}^+(+,\cdot,<)$, $\mathbb{Z}(+,\cdot,<)$, $\mathbb{Q}(+,\cdot,<)$, $\mathbb{R}(+,\cdot,<)$ ausgeklammert und damit der Aspekt des Arbeitens mit bzw. Lösens von Ungleichungen. Fachinhaltlich kommt also zum Gleichungslösen gegenüber Leonhard Eulers „Vollständigen Anleitung zur Niederen und Höheren Algebra“, Teil 2, 1797, nicht viel Neues hinzu. Den Ungleichungsmangel findet man auch auf der zu diesem Buch passenden Website http://www.schulalgebra.de/. Obwohl die klassischen Argumente für die unterrichtliche Behandlung von Ungleichungen aufgeführt sind (S. 215), wird mit der nebulösen Begründung (S. 216) „In der Praxis wollten sich allerdings die erwarteten Folgen nicht einstellen.“ die Bedeutung von Ungleichungen herabgesetzt. Ist das ‚Praxisargument’ auch eines für die didaktische Nichtbehandlung eines Gegenstands? In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass ein junger Mathematikdidaktiker, angesprochen auf einen in seinem Mathematikdidaktik-Buch fehlenden Ungleichungsinhalt äußerte: ‚Das kommt doch nicht mehr in den Lehrplänen vor!’. Immerhin steht im gleichnamigen Vorläufer des Buches von Vollrath & Weigand noch: „Entsprechend dem unterschiedlichen Gewicht von Gleichungen und Ungleichungen in der Mathematik sollte man Ungleichungen gegenüber den Gleichungen wieder etwas zurücknehmen. Sie kommen vor allem als Kontrastbeispiele infrage, um deutlich zu machen, daß es mehrelementige Lösungsmengen gibt.“ (Vollrath 1994/1999 S. 191). In diesem Buch werden wenigstens noch die Bruchungleichungen und die quadratischen Ungleichungen behandelt – und auch das Lineare Optimieren, eine bedeutenden Methode des Operation Research (die komplexen linearen Optimierungsaufgaben passen wohl nicht in das Format der heutigen Sachaufgaben für Tests). Das Lineare Optimieren kommt auch in Greefrath 2010: Didaktik des Sachrechnens, einem ebenfalls aktuellen Werk für die Lehrerbildung, nicht vor. In diesem Buch fehlt zudem die vielfältige Nutzung bzw. Interpretation von „<“ und „>“ im Alltag und damit in Sachaufgaben.

– Problematisch wird die Behandlung von Wurzelgleichungen, wenn man „≥“ vermeiden will und dann nach sogenannten Gewinn-Umformungen durch eine Probe auf richtige Lösungen prüfen muss (Vollrath & Weigand, 2007, S. 258-259). Wie kann ein Schüler bei diesem Missbrauch der Probe unterscheiden, ob es sich um einen Umformungs- bzw. Rechenfehler oder eine falsche Lösung handelt? Im Vergleich mit der mathematisch angemessenen Methode der Äquivalenzumformung (Vollrath 1974: Didaktik der Algebra, S. 113) wäre hier eine didaktische Diskussion unter dem Motto: „Erst denken, dann umformen!“ angebracht.

Fazit: *Die aktuelle mathematikdidaktische Standardliteratur spiegelt den Verlust bzw. Mangel an „Ungleichungslehre“ wider.*

Folgerung: *Angehende Lehrer und Lehrerinnen erfahren wenig oder nichts über die betreffende Didaktik.*

Wie steht es mit der Thematisierung von Lernprozessen beim Lösen von Ungleichungen?

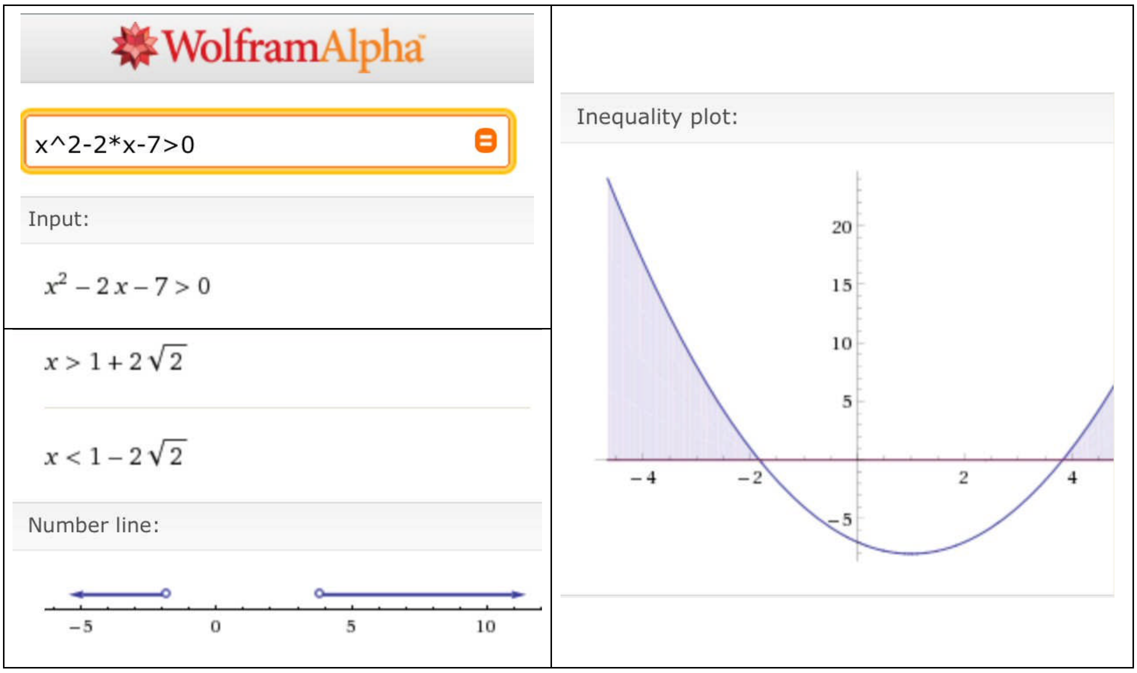
In Malle 1992: „Didaktische Probleme der elementaren Algebra“ findet sich keine Berücksichtigung des Lösens von Ungleichungen im Gegensatz zu den im Internet recherchierbaren Forschungsbeiträgen in entsprechenden internationalen Zeitschriften. Neuere deutsche Forschungsbeiträge darüber gibt es wohl nicht. – Also, kann und soll ein Thema beforscht werden, wenn es nicht mehr in der Schule behandelt wird?

Fazit: *Die lernprozessorientierte Erforschung des aspektreichen Unterrichtsgegenstandes „Ungleichungen“ weist in Deutschland erhebliche Defizite auf.*

Ungleichungen und Neue Medien

Wir beschränken uns hier auf die im Internet vorhandenen Neuen Medien, so wie sie auch auf Smartphones verfügbar sind. Google weist ca. 443 000 deutschsprachige Links zum Thema Ungleichungen auf (Februar 2012).

Fast komplette computeralgebraische Ungleichungslösungen bieten: web-Mathematica-widgets und WolframAlpha. Ein Smartphone-App-Beispiel:



Nicht professionelle Lösungsautomaten für Ungleichungen haben z. T. fehlerhafte Lösungsausgaben: z. B. gibt der Solver von WebMATH für $(7x - 4)/(x^2 + x - 6) > 0$ nur die Teillösung $x > 4/7$ aus.
Es gibt eine Vielzahl tutorieller Materialien u. a. YouTube-Instruktionsvideos über das Lösen von Ungleichungen.
Fazit: *Das Potenzial der im Internet verfügbaren didaktisch relevanten Materialien zum Thema „Ungleichungen" muss genutzt werden. Es ist eine mathematikdidaktische Aufgabe, die Online-Materialien zu sichten, auf ihre Eignung für den Mathematikunterricht hin zu bewerten, ihre Lernwirksamkeit zu untersuchen und Unterrichtskonzepte für ihre Nutzung zu entwickeln.*

Zusammenfassung: *Das Lösen, Beweisen und Anwenden von Ungleichungen ist ein wichtiger Gegenstand der Elementarmathematik (Arithmetik, Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik und Angewandte Mathematik). Die Inhalte der Elementarmathematik sind Bestandteil einer globalen (mathematischen) Kultur; als solche sind sie intersubjektiv und interkulturell vermittelbar; sie haben deswegen weltweit für den Mathematikunterricht normative Bedeutung.*

Folgerung: *Der Unterrichtsgegenstand „Ungleichungen" ist in den Curricula sowohl allgemeinbildender Schulen als auch der Lehrerbildung in Deutschland angemessen zu berücksichtigen. – Das bloße Lösen von Ungleichungen genügt nicht.*

Julia SCHWABE[1], Meike GRÜßING[2], Aiso HEINZE[2],
Frank LIPOWSKY[1], [1]Kassel/ [2]Kiel

Zeigen oder entdecken lassen? Eine experimentelle Studie zum halbschriftlichen Rechnen

Überblick über die Studie

In den letzten 15 Jahren wurden die Rechenstrategien von Schülerinnen und Schülern bei der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000 intensiv untersucht. Es besteht Konsens darüber, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht der Grundschule nicht nur schnell und korrekt rechnen lernen sollen, sondern dass sie darüber hinaus auch die Fähigkeit entwickeln sollen, verschiedene Rechenstrategien flexibel und adaptiv auf die jeweilige Aufgabe bezogen einzusetzen. Die Ergebnisse verschiedener Studien zeigen jedoch, dass die Fähigkeit zur Anwendung adaptiver Rechenstrategien in der Grundschule eher gering ausgeprägt ist (z. B. Carpenter et al., 1997; Selter, 2001; Benz, 2007; Torbeyns, de Smedt, Ghesquière & Verschaffel, 2009; Heinze, Marschick & Lipowsky, 2009). Gleichzeitig deuten die Ergebnisse einiger Studien darauf hin, dass sich positive Effekte für Unterrichtskonzepte ergeben, welche die adaptive Strategiewahl fördern (z.B. Carpenter et al., 1997; Blöte et al., 2000; Rathgeb-Schnierer, 2007). Allerdings handelt es sich bei den vorliegenden Studien oft um umfassende Unterrichtskonzepte, die sich nicht auf den Arithmetikunterricht beschränken. Darüber hinaus wurden die Studien überwiegend unter nicht standardisierten Rahmenbedingungen durchgeführt.

Die Frage, welche Instruktionsstrategien den Kompetenzerwerb im Bereich der adaptiven Strategiewahl möglichst effektiv fördern, ist bisher nicht hinreichend geklärt. Im Projekt „Instruktionsstrategien zur Förderung der individuellen Kompetenz zur adaptiven Wahl von Additions- und Subtraktionsstrategien im Zahlenraum bis 1000“ (Kurztitel: **Ti**pps zum **ge**schickten **R**echnen: TigeR) sollen die Effekte zweier moderner instruktionaler Ansätze auf den Kompetenzerwerb zur adaptiven Wahl von Additions- und Subtraktionsstrategien im Zahlenraum bis 1000 untersucht und verglichen werden.

Während der *explizierende Ansatz* die sukzessive Behandlung mit jeweiliger Automatisierung vorgegebener idealtypischer Strategien in Verbindung mit dem kontinuierlichen Aufbau von Metawissen über die Effizienz von Lösungswegen vorsieht, strebt der *problemlöseorientierte Ansatz* einen Kompetenzaufbau durch wiederholte aufgabenbezogene Generierung von individuellen Strategien an, ohne dass Strategien vorgegeben werden. In Tabelle 1 werden die entscheidenden Unterschiede der beiden Instruktionsstrategien dargestellt. Sie unterscheiden sich in der Vorstellung über die Strategieverwendung, den Strategieerwerb und den Erwerb der Kompetenz zur adaptiven Strategiewahl.

Tabelle 1: Gegenüberstellung der Instruktionsstrategien

„Explizierender Ansatz“	**„Problemlöseorientierter Ansatz“**
Grundlegende Annahmen zum Strategieerwerb	
– Strategien als prozedurales Wissen – Strategien werden beim Lösen von Aufgaben adaptiv gewählt	– kein Strategierepertoire – adaptive Rechenwege werden individuell generiert
Didaktische Umsetzung im Unterricht	
– Strategierepertoire aufbauen – Strategien automatisieren – Aufbau von Metawissen über die adaptive Strategiewahl	– Thematisierung von Aufgabencharakteristika, Adaptivität, Schulung des „Zahlenblicks“ – Aufbau von Zahlenwissen

Im *explizierenden Ansatz* stehen die Einführung und Automatisierung zentraler Strategien in Verbindung mit der Diskussion ihrer adaptiven Verwendung im Vordergrund. Im *problemlöseorientierten Ansatz* werden dahingegen keine Strategien vorgegeben und automatisiert. Nach Threlfall (2009) ist die Annahme, dass Strategien als Lösungsmethoden im Gedächtnis vorliegen, gewählt und angewendet werden, nicht adäquat. Er geht davon aus, dass bei jeder Aufgabe auf Basis des individuellen konzeptuellen Wissens über Zahlen ein Lösungsweg generiert wird (Strategieemergenz) und die Kompetenz zur adaptiven Strategiewahl über die kontinuierliche Diskussion verschiedener Lösungswege erworben wird. Demnach sollte sich der Unterricht durch das kontinuierliche Selbstentdecken von Lösungswegen gepaart mit einer Diskussion über die Effizienz dieser Lösungswege auszeichnen.

Im Rahmen des Projekts „TigeR“ fand in den Herbstferien 2011 ein außerschulisches mathematisches Ferienprogramm am IPN in Kiel statt, in welchem 81 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 3 in vier Gruppen unter kontrollierten Bedingungen entweder nach dem *explizierenden Ansatz* oder dem *problemlöseorientierten Ansatz* unterrichtet wurden. Der Unterricht wurde von zwei geschulten Projektmitarbeiterinnen durchgeführt, wobei – um Effekte der unterrichtenden Lehrperson kontrollieren zu können – jede Mitarbeiterin jede Instruktionsstrategie einmal unterrichtete.

Forschungsfragen

Ziel des Projektes ist die Untersuchung der Effektivität beider Instruktionsansätze im Hinblick auf die individuelle Kompetenz zur adaptiven Wahl von Additions- und Subtraktionsstrategien. Insbesondere wird untersucht, ob die Instruktionsstrategien unterschiedliche Effekte zeigen im Hinblick auf

- den individuellen Kompetenzerwerb von leistungsstarken und leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern,
- die individuellen Kriterien zur Wahl von Rechenstrategien,
- die Stabilität der erworbenen Kompetenz zur adaptiven Strategiewahl.

Design

Die Stichprobe besteht aus 81 Schülerinnen und Schülern aus 17 Klassen der Jahrgangsstufe 3, die unter Kontrolle der Mathematikleistung, des HISEIs und der Leistung in einem Strategie-Vortest zufällig den beiden Instruktionsbedingungen zugewiesen wurden. Als Kontrollgruppe werden die Mitschülerinnen und -schüler der 81 teilnehmenden Kinder herangezogen.

Die folgende Grafik zeigt den Verlauf der Studie mit den einzelnen Erhebungen sowie den beiden Auffrischungsinterventionen. Die Erhebungen im unteren Teil der Grafik (hellgrau hinterlegt) wurden sowohl in der Experimental- als auch in der Kontrollgruppe durchgeführt.

Tabelle 2: Schematische Darstellung des Ablaufs der Studie

Juni	**September**	**Herbstferien**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**Mai**
	Interviews	Intervention mit 81 SuS	Kurz-intervention		Kurz-intervention	
	CFT	Strategietest	Strategietest		Kurz-interviews	
	Eltern-FB	Interviews				
		Schüler-FB				
DEMAT 2+	Strategie-test			Strategie-test		Strategie-test
	Lehrer-FB					

Der zeitliche Umfang der Intervention in den Herbstferien 2011 betrug pro Instruktionsansatz und Lerngruppe umgerechnet etwa 16 Schulstunden. Bei den beiden Instruktionsansätzen, die im TigeR-Projekt gegenübergestellt werden, handelt es sich um idealtypische Unterrichtsansätze. Während in der Unterrichtspraxis wahrscheinlich eine Mischung unterschiedlichster Ansätze realisiert wird, um die Kompetenz der adaptiven Strategiewahl bei Schülerinnen und Schülern der unterschiedlichen Leistungsniveaus zu entwickeln, wurden die beiden Ansätze im TigeR-Projekt unter „laborähnlichen" Bedingungen getrennt unterrichtet. Für die praktische Durchführung lag ein streng vorgegebenes Unterrichtsskript vor.

Erwartete Ergebnisse

Für beide Ansätze werden unterschiedliche Vorteile vermutet: Aufgrund der Ergebnisse von Vorstudien (Heinze et al., 2009) wird in der Gruppe des *explizierenden Ansatzes* erwartet, dass mehr Aufgaben mit zielführenden Strategien (= Strategien, die prinzipiell zur korrekten Lösung führen können) bearbeitet werden und insbesondere leistungsschwächere Kinder profitieren. Für die Kompetenz der adaptiven Strategiewahl hingegen werden in der Gruppe des *problemlöseorientierten Ansatzes* signifikant bessere Werte erwartet, wenn nur die zielführenden Strategien betrachtet werden.

Literatur

Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100.* Hildesheim: Franzbecker.

Blöte, A. W., Klein, A. S., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction, 10,* 221-247.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal of Research in Mathematics Education, 29*(1), 3-20.

Heinze, A., Marschick, F., & Lipowsky, F. (2009). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: How adaptive is German 3rd-Graders' strategy use? *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 591-604.

Rathgeb-Schnierer, E. (2007). Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen: Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze. *Journal für Mathematik-Didaktik, 28*(2), 173-174.

Selter, C. (2001). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: German Elementary Children's Success, Methods and Strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 145-173.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 541-555.

Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction, 19*(1), 1-12.

Björn SCHWARZ, Hamburg

Zusammenhänge innerhalb der professionellen Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden

In den letzten Jahren wurden verschiedene nationale wie internationale Vergleichsstudien zur Wirksamkeit von Lehrerbildung und Lehrerausbildung durchgeführt, mit deutscher Beteiligung beispielsweise TEDS-M (für angehende Primarstufenlehrkräfte Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010a, für angehende Sekundarstufen-I-Lehrkräfte Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010b), MT21 (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2008) sowie COACTIV (Kunter et al., 2011). Vor diesem Hintergrund werden im Folgenden die Grundzüge einer nationalen qualitativen Vertiefungs- und Ergänzungsstudie zu MT21 vorgestellt, die auf die Rekonstruktion von Zusammenhängen zwischen verschiedenen Facetten professioneller Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden, das heißt angehenden Mathematiklehrerinnen und –lehrern in der erste Phase der Lehrerausbildung, ausgerichtet ist. Hierfür werden zuerst der theoretische Rahmen, anschließend das methodische Vorgehen und abschließend einige zentrale Resultate skizziert; für eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse sei auf Schwarz (2012, im Druck) verwiesen.

1. Theoretischer Rahmen der Studie

Theoretischer Ausgangspunkt der Untersuchung ist die Definition von Kompetenz nach Weinert (2001) und insbesondere die darin enthaltene Unterscheidung verschiedener Facetten von Kompetenz. Ausgehend von dieser Definition und unter Bezug auf Shulman (1986) und Bromme (1997) und deren Ausdifferenzierung des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern sowie des Weiteren unter einer mathematikdidaktischen Perspektive werden dafür im Rahmen der Studie zuerst das mathematische und das mathematikdidaktische Wissen der Mathematiklehramtsstudierenden berücksichtigt. Diese Analyse der kognitiv geprägten Komponenten der professionellen Kompetenz wird dann für die Untersuchung ergänzt um eine Betrachtung der mathematischen beliefs (Grigutsch, Raatz & Törner, 1998, Pehkonen & Törner, 1996), das heißt der beliefs zur Mathematik wie auch der beliefs zum Lehrern und Lernen von Mathematik. Die grundlegende Frage ist dann, wie diese Komponenten professioneller Kompetenz von angehenden Mathematiklehrerinnen und –lehrern in der ersten Phase ihrer Ausbildung verknüpft werden, das heißt, welche Zusammenhänge zwischen den Facetten professioneller Kompetenz rekonstruiert werden können. Ergänzend wird weiterhin untersucht, welche zusätzlichen Beobachtungen sich bei Berücksichtigung der schulischen wie außerschulischen Lehrerfahrungen der Studierenden machen lassen.

2. Methodisches Vorgehen

Es wurde eine qualitativ orientierte Studie durchgeführt. Zur Erhebung der Zusammenhänge innerhalb der professionellen Kompetenz der Mathematiklehramtsstudierenden wurde eine schriftliche Befragung durchgeführt mit offenen Fragen zu verschiedenen Facetten dieser professionellen Kompetenz. Alle Fragen waren genauer zuerst jeweils gruppenweise auf ein inhaltliches Thema, beispielsweise eine mathematische Aussage aus der Schulmathematik oder eine mathematische Aufgabe für Schülerinnen und Schüler, ausgerichtet. Übergreifend waren dabei alle inhaltlichen Themen entweder der mathematikbezogenen Aktivitäten des Argumentierens und Beweisens oder der mathematikbezogenen Aktivität des Modellierens zugeordnet. Innerhalb der Gruppen von Fragen waren dann die einzelnen Fragestellungen jeweils auf eine der verschiedenen berücksichtigten Kompetenzkomponenten bezogen. So war beispielsweise eine Aufgabengruppe auf eine Modellierungsaufgabe ausgerichtet. Innerhalb dieser Gruppe sollten die Studierenden dann mit Bezug auf ihr fachmathematisches Wissen die Aufgabe selber bearbeiten, mit Bezug auf ihr mathematikdidaktisches Wissen sollten die Studierenden Rückmeldungen zu Schülerlösungen zu der Aufgabe formulieren und mit Bezug auf ihre mathematischen beliefs wurden die Studierenden dazu befragt, ob solche Aufgaben Teil der Mathematik seien.

An der Erhebung nahmen insgesamt 79 Studierenden des Mathematiklehramts für verschiedene Schulformen teil. Die Daten wurden mithilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2008) ausgewertet, wobei größtenteils auf die Methode der skalierenden Strukturierung zurückgegriffen wurde. Dabei wurden zuerst in einer erste Phase der Datenauswertung alle Aufgaben unter Verwendung deduktiv definierter Codierleitfäden codiert, anschließend wurde das Material erneut in einer zweiten Phase unter Verwendung von induktiv definierten Codierleitfäden codiert. Aus den Zusammenhangsanalysen der Codierungen wurden anschließend die Hypothesen bezüglich der Zusammenhänge zwischen den Kompetenzkomponenten abgeleitet.

3. Ergebnisse

Auf eine ausführliche Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchung muss an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet werden, stattdessen werden im Folgenden lediglich einige zentrale Aspekte angedeutet.

Der erste Bereich der Ergebnisse fokussiert auf die Zusammenhänge innerhalb der kognitiven Komponenten der professionellen Kompetenz, hier also genauer auf Zusammenhänge zwischen dem mathematischen und dem mathematikdidaktischen Wissen der Studierenden. Hier kann unter Anderem der Einfluss des mathematischen auf das mathematikdidaktische Wissen untersucht werden, der einerseits deutlich wird, aber andererseits nicht ausreicht, um mathematikdidaktisches Wissen in vollem Umfang zu beschreiben. Weiterhin zeigt sich, dass nicht nur der Umfang des fachlichen, hier fachmathematischen, Wissens einen Einfluss auf das fachdidaktische, hier mathematikdidaktische, Wissen hat, sondern dass auch individuelle inhaltliche Schwerpunkte innerhalb der Wissensbestände die Beeinflussung des mathematikdidaktischen Wissens durch das mathematische Wissen mitprägen. So wird die Rückmeldung der Studierenden zu Schülerlösungen, die verschiedene Herangehensweisen an eine Aufgabe verdeutlichen, auch beeinflusst durch denjenigen mathematischen Zugang, den die Studierenden selber zu der Aufgabe wählen würden. Durch den Einbezug von einerseits Umfang und andererseits individueller inhaltlicher Ausprägung des Wissens sind die Ergebnisse der Untersuchung daher aus zwei Perspektiven auf strukturelle Zusammenhänge zwischen dem mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen ausgerichtet.

Hinsichtlich der Zusammenhänge zwischen den in der Untersuchung berücksichtigten Wissensbereichen und den mathematikbezogenen beliefs wird unter anderem die Notwendigkeit einer Unterscheidung zwischen fachbezogenen, hier also mathematikbezogenen, beliefs einerseits und lehrlernbezogenen beliefs andererseits deutlich. So unterteilt können dann beide Bereiche von beliefs auch insbesondere im speziellen Kontext der Ausbildungssituation der in der Studie befragten Lehramtsstudierenden diskutiert werden, das heißt vor dem Hintergrund der ersten, universitären Phase der Lehrerausbildung, die ebenfalls häufig bereits institutionell beziehungsweise auf Ebene der Veranstaltungen zwischen fachmathematischen und mathematikdidaktischen Lehr-Lernangeboten unterscheidet.

Abschließend wird in den Ergebnissen der Studie die besondere Bedeutung der schulischen wie außerschulischen Praxiserfahrungen der Lehramtsstudierenden für ihre Professionalisierung als zentrales Ziel von Lehrerausbildung deutlich. Es wird deutlich, dass Praxiserfahrung dazu beitragen kann, dass die Mathematiklehramtsstudierenden ihr berufsbezogenes Wissen, hier genauer ihr mathematikdidaktisches Wissen, bereits während der ersten Phase der Lehrerausbildung mit einer Vorstellung von Schule verknüpfen. Das heißt, dass Praxiserfahrung dazu beitragen kann, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer bereits während der universitär geprägten Phase der Lehrerausbildung ihr in dieser Phase erworbenes Wissen mit Vorstellungen ihres späteren beruflichen Umfeldes verknüpfen, was im Einklang steht mit dem Ziel der Entwicklung professioneller, hier also auf den Lehrerberuf bezogener, Kompetenz. Im Anschluss an die Beobachtung der deutlichen Beeinflussung des mathematikdidaktischen Wissens durch das mathematische Wissen zeigt sich weiterhin, dass Praxiserfahrung der Studierenden dazu beitragen kann, dass die angehenden Mathematiklehrkräfte diese Wissensbereiche besser verzahnen können, was ebenfalls als Beitrag zur Ausbildung einer professionellen Kompetenz von in diesem Falle Mathematiklehrerinnen und –lehrern aufgefasst werden kann.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2008): Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer: Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und -refendare; erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010a): TEDS-M 2008: Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010b): TEDS-M 2008: Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Bromme, R. (1997): Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln des Lehrers. In F. Emanuel Weinert (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie - Pädagogische Psychologie. Band 3: Psychologie des Unterrichts und der Schule. Göttingen, Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe Verl. für Psychologie, 177-212.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998): Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 19 (1), 3-45.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.) (2011): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Mayring, P. (2008): Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken (10., neu ausgestattete Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Pehkonen, E. & Törner, G. (1996): Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 28 (4), 101-108.

Schwarz, B. (2012, im Druck): Strukturelle Zusammenhänge der professionellen Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.

Shulman, L. S. (1986): Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. In: Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen - eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim, Basel: Beltz Verlag, 17-31.

Kathrin SIGL, Hedwig GASTEIGER, LMU München

Unterrichtliche Vorgehensweisen bei der Behandlung des kleinen Einmaleins

Idealtypisch kann man zwei grundsätzlich verschiedene Wege der Erarbeitung des kleinen Einmaleins unterscheiden: die isolierte Behandlung von Einmaleinsreihen und die ganzheitliche Erarbeitung der Einmaleinssätze. Seit einigen Jahren wird ein ganzheitliches Vorgehen propagiert, welches vorsieht, bekannte Einmaleinssätze zur Erschließung noch unbekannter Aufgaben zu nutzen (vgl. Wittmann & Müller, 1994). Ob und in welcher Ausprägung dieses Vorgehen von Lehrkräften in der Unterrichtspraxis umgesetzt wird, ist eine offene Frage. In diesem Beitrag erfolgt eine erste Annäherung an diese Fragestellung.

Lehrplanentwicklung

Analysiert man die Lehrplanentwicklung der verschiedenen Bundesländer in den letzten Jahrzehnten, so ist eine Verschiebung von einer isolierten Behandlung der Einmaleinsreihen zu einer ganzheitlichen Erarbeitung im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens zu erkennen. Im nicht mehr aktuellen Bildungsplan für die Grundschule von Baden-Württemberg von 1994 steht: „die Einführung von Einmaleinsreihen“ bildet einen „Schwerpunkt in Klasse 2.“ (Ministerium für Kultus und Sport, Baden-Württemberg, 1994, S. 82). Im hessischen Rahmenplan der Grundschule von 1995 heißt es: „Im 2. Schuljahr wird das Multiplizieren ... in den Einmaleinsreihen systematisiert.“ (Kultusministerium Hessen, 1995, S. 154). Diese Auszüge aus Lehr- und Bildungsplänen verdeutlichen, dass bei der Erarbeitung des Einmaleins zunächst der Reihengedanke im Vordergrund stand. Zwar wird auch bereits in früheren Lehrplänen auf Zusammenhänge zwischen Einmaleinsreihen hingewiesen, doch die Einführung war in der Regel erheblich durch ein Abarbeiten und Automatisieren der entsprechenden Reihen geprägt. Dies wird vor allem durch eine genauere Betrachtung von Schulbüchern ersichtlich (vgl. exemplarisch Altmann et al., 1997).

Im Vergleich dazu wird in aktuellen Lehrplänen der Reihengedanke mehr und mehr durch eine ganzheitliche Erarbeitung des kleinen Einmaleins abgelöst. Hierbei stehen von Anfang an alle Einmaleinssätze zur Verfügung. Lösungsstrategien werden entdeckt und deren Anwenden wird thematisiert, ohne dabei im engen Rahmen einer einzelnen Einmaleinsreihe zu bleiben (vgl. Padberg, 2005).

Forschungsergebnisse

Für die ganzheitliche Erarbeitung des kleinen Einmaleins unter Nutzung operativer Beziehungen sprechen eine Reihe von Forschungsergebnissen. Es gibt Untersuchungsergebnisse, die Kindern größere Erfolge bei der Bewältigung von Aufgaben zusprechen, wenn sie die Zusammenhänge zwischen Aufgaben erkennen und verstehen. Bei einem weniger ausgeprägten Verständnis zeigen sich vor allem Probleme, wenn erlernte Prozeduren vergessen werden. Es fehlen dann mitunter Ideen, wie Lösungen selbstständig erschlossen werden können (vgl. Anthony & Knight, 1999). Ein in erster Linie auf reinem Drill – und somit wenig auf Verständnis – ausgerichteter Unterricht kann zwar eine Effektivitätssteigerung zur Folge haben, führt allerdings nicht zwangsläufig zum Ablegen von wenig tragfähigen Strategien, wie z.B. der sukzessiven Addition als Lösungsstrategie für Multiplikationsaufgaben. Kinder lösen Aufgaben dann unter Umständen zwar schneller und sie haben eine geringere Fehlerquote, es zeigt sich, dass sie aber lediglich effektiver innerhalb ihrer Strategie werden und diese nicht zwangsläufig ablegen (Brownell & Chazal, 1935). Ein systematisches Lernen der Einmaleinsreihen kann darüber hinaus auch dazu führen, dass Kinder zu bestimmten Einmaleinsaufgaben falsche Ergebnisse assoziieren – zumeist Ergebnisse anderer Einmaleinsaufgaben (Campbell & Graham, 1985). Im Gegensatz dazu kann die Erarbeitung über operative Beziehungen und eine damit einhergehende Strategiethematisierung zu einer flexibleren Nutzung von Zahlen beitragen (Woodward, 2006).

Ob und vor allem welche Strategien letztendlich zum Einsatz kommen scheint vom Ausmaß der im Unterricht herausgestellten operativen Zusammenhänge und der Sicherung von Faktenwissen abhängig zu sein (Sherin & Fuson, 2005). Dabei zeigen Untersuchungsergebnisse, dass sich explizites Strategielernen positiv auf die Vielfalt und Angemessenheit der gewählten Strategien auswirken kann (Kroesbergen, v. Luit & Maas, 2004).

Eine Befragung von Lehrkräften – Forschungsfragen und Ergebnisse

Um einen Einblick darüber zu bekommen, inwieweit die ganzheitliche Erarbeitung des Einmaleins in der tatsächlichen unterrichtlichen Arbeit umgesetzt wird, wurden 37 Praktikumslehrkräfte in Bayern mithilfe eines Fragebogens zu ihren Vorgehensweisen im Zusammenhang mit dem kleinen Einmaleins interviewt. 18 dieser Lehrkräfte sind aufgrund ihres schulischen Einsatzes mit der Erarbeitung des Einmaleins befasst. Die Ergebnisse dieser Lehrkräfte werden im Folgenden berichtet. Der eingesetzte Fragebogen beinhaltet teils gebundene teils freie Aufgabenformate. So werden neben

Ratingskalen auch Multiple-Choice-Items sowie Kurzaufsätze eingesetzt. Unter anderem waren folgende Fragestellungen von Interesse:

- Werden im Unterricht Rechenstrategien zum Lösen von Einmaleinsaufgaben erarbeitet?
- Werden Beziehungen zwischen den einzelnen Einmaleinssätzen von den Lehrkräften und Kindern aufgezeigt bzw. genutzt?
- Werden Arbeitsmittel zur Erarbeitung und zum Entdecken von Strategien angeboten bzw. verwendet? Wie sieht ein konkreter Einsatz aus?

Auf das Item „In Ihrem Unterricht werden verschiedene Rechenstrategien zur Lösung von Einmaleinsaufgaben erarbeitet" antworteten 15 Lehrkräfte (83%) mit „trifft zu" bzw. „trifft eher zu". Nur 3 der Befragten (17%) gaben an, verschiedene Rechenstrategien „eher nicht" zu thematisieren. Einen Überblick über die Auskünfte auf die offene Anschlussfrage, welche Strategien konkret behandelt werden, erhält man in der folgenden Abbildung:

Rechenstrategien konkret	
Sukzessive Addition	4 Nennungen
Tauschaufgaben	4 Nennungen
Verdoppeln/Halbieren	8 Nennungen
Zerlegung eines Faktors	11 Nennungen

- 3 Lehrkräfte (27%): Zusammensetzung von Kernaufgaben
- 7 Lehrkräfte (64%): Zusammensetzung von Kernaufgaben + Nachbaraufgaben
- 1 Lehrkraft (9%): Nachbaraufgaben

Die Zerlegung eines Faktors war demnach die am häufigsten genannte Strategie, wobei bei dieser Frage auch viermal die langfristig nicht tragfähige ‚sukzessive Addition' als Strategie genannt wurde.

Die Antworten auf Fragen zum Arbeitsmitteleinsatz verdeutlichen, dass Arbeitsmittel, wie vor allem das Hunderterfeld aber auch Einmaleinstafel und Zahlenstrahl, häufig eingesetzt werden. Alle 18 Lehrkräfte nutzen Arbeitsmittel dazu, ihren Kindern Beziehungen zwischen den Einmaleinsaufgaben zu verdeutlichen bzw. bildlich zu veranschaulichen. Während 13 Lehrkräfte angaben, im Unterricht zu demonstrieren, wie man Arbeitsmittel zum Lösen von Einmaleinsaufgaben verwenden kann, legt nur die Hälfte der Lehrkräfte Wert darauf, dass Ihre Schülerinnen und Schüler selbst Einmaleinsaufgaben mithilfe von Arbeitsmitteln lösen. Dies legt den Schluss nahe, dass Arbeitsmittel von einigen Lehrkräften zwar als „Veranschaulichungsmittel" (Krauthausen, Scherer, 2007, S. 242) genutzt werden, allerdings weniger als Werkzeug der Kinder, um damit selbst Strategien zu entdecken bzw. verschiedene Lösungswege anschaulich nachzuvollziehen.

Eine Zusammenschau aller Ergebnisse der Befragung – hier konnten nur exemplarisch einige Ergebnisse berichtet werden – zeigt, dass sich im Wesentlichen drei verschiedenen Gruppen von Lehrkräften herauskristallisieren: Lehrkräfte, die eher dem ganzheitlichen Erarbeitungsweg folgen (6), solche, die das Einmaleins eher traditionell erarbeiten (4) und Lehrkräfte, die beide Vorgehensweisen vereinen bzw. sich mehrfach widersprüchlich geäußert haben (8).

Perspektiven

Diese Lehrerbefragung diente als Pilotstudie für einen Lehrerfragebogen, der im Rahmen eines größeren Forschungsvorhabens eingesetzt werden soll. Dabei soll untersucht werden, ob und inwieweit sich verschiedene unterrichtliche Vorgehensweisen in der Strategieverwendung von Kindern bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins bemerkbar machen.

Literatur

Altmann, W., Gierlinger, W., Kobr, R., Kraus, A., Kraus, E. & Langen, H. (1997). *Rechne mit uns.* 1. gemäß der Rechtschreibreform korrigierte Auflage. München: Oldenbourg.

Anthony, G. & Knight, G. (1999). Basic facts: The role of memory and understanding. *The New Zealand Mathematics Magazine*, *36(*3), 28-40.

Brownell, W.A. & Chazal, Ch.B. (1935). The effects of premature drill in third-grade arithmetic. *The Journal of Educational Research*, *29*(1), 17-28.

Campbell, J.I.D. & Graham, D.J. (1985). Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. *Canadian Journal of Psychology*, *39*(2), 338-366.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik.* 3. Auflage. Spektrum: München.

Kroesbergen, E.H., van Luit, J.E.H. & Maas, C.J.M. (2004). Effectiveness of explicit and constructivist mathematics instruction for low-achieving students in the Netherlands. *The Elementary School Journal*, *104*(3), 233-251.

Kultusministerium Hessen (1995). *Rahmenplan Grundschule.* 1.Auflage. Frankfurt/Main: Diensterweg.

Ministerium für Kultus uns Sport Baden-Württemberg (1994). *Bildungsplan für die Grundschule.* Villingen-Schwenningen: Neckar-Verlag.

Padberg, F. (2005). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung.* 3. Auflage. Spektrum: München.

Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36(*4), 347-395.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (1994). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins.* 2. überarb. Auflage. Stuttgart: Klett.

Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice drills. *Learning Disability Quarterly*, *29*, 269-289.

Hans-Dieter SILL, Rostock

Zum Verhältnis der Wissenschaften Mathematik und Didaktik des Mathematikunterrichts

Vorbemerkungen

Die im Beitrag wiedergegebenen Aussagen von Fachmathematikern sind kein Ergebnis repräsentativer Erhebungen, sondern Einzel- oder Gruppenmeinungen in unserem Institut, die im Zusammenhang mit aktuellen Bestrebungen zur Reform der Lehrerbildung geäußert wurden.

Es geht mir nicht darum, die Kollegen zu diskreditieren, sondern nach den tieferen Ursachen für die unterschiedlichen Ansichten und Meinungen zu einer berufsbezogenen Lehrerausbildung zu suchen und daraus entsprechende Konsequenzen abzuleiten. Nach vielen vergeblichen Versuchen, eine andere Sicht auf universitäre Lehre anzuregen, glaube ich, dass es weniger um subjektiv bedingte Vorstellungen geht, sondern um grundlegende objektive Unterschiede zwischen Denk- und Arbeitsweisen in beiden Wissenschaften, die sich aus ihren unterschiedlichen Gegenständen ergeben.

Die erfreulicherweise zunehmend engere Zusammenarbeit von Mathematikern und Didaktiker sollte auf der gegenseitigen Akzeptanz und Wertschätzung unterschiedlicher Sichtweisen und Kompetenzen erfolgen.

Kontrastierende Beispiele können vieles deutlicher machen.

1. Zu einigen Phänomenen

Eine Befragung von 115 Studienanfängern aller Lehrämter im Wintersemester 2011/12 ergab u. a. folgende Resultate:

- Ca. 70 % haben eine Abiturnote besser 2,5 und bis zu 90 % (LA GY) haben im Fach Mathematik 10 oder mehr Punkte erreicht.
- Mit einer fünfstufigen Skala von „trifft voll und ganz zu“ (1) bis „trifft überhaupt nicht zu“ (5) ergaben sich bei der Frage nach den Beweggründen für ein Lehramtsstudium im Fach Mathematik bei folgenden Aussagen die angegebenen Mittelwerte der Zustimmung:
    - Ich habe Mathematik in der Schule gern und leicht gelernt. (1,8)
    - Es macht Freude, wenn man ein Problem selbst gelöst hat. (1,9)
    - Mich interessiert die Mathematik in besonderem Maße. (2,0)

Dies zeigt, dass die überwiegende Mehrzahl der Studienanfänger mit guten Noten an die Universität kommt und Freude an der Mathematik und der Lösung mathematischer Probleme hat.

Im Wintersemester 2011/12 haben wir erstmalig ein Tutorensystem für fachmathematische Veranstaltungen im 1. Semester angeboten, das von Lehramtskandidaten höherer Semester unter Anleitung von erfahrenen Gymnasiallehrern durchgeführt wurde. Bei den Klausuren am Ende des Semesters stellte sich dann aber wie in den Jahren zuvor wieder heraus, dass teilweise weit über die Hälfte der Klausurteilnehmer weniger als 50 % der Punkte erreichte.

Die Befragung der Studienanfänger ergab weiterhin, dass die überwiegende Mehrzahl im ersten Schuljahr erwartet, dass Mathematik, die dem Schulstoff entspricht, tiefgründiger behandelt wird, sie viele interessante Aufgaben lösen und auch lernen wie man dem Schulstoff unterrichten kann. Eine Analyse der Übungs- und Klausuraufgaben zeigt, dass diese Erwartungen dadurch nicht erfüllt werden können.

In Diskussionen mit Fachkollegen über die erzielten Ergebnisse wurden als Ursachen ausschließlich die mangelnden Vorleistungen der Schule und die fehlende Anstrengungsbereitschaft der Studierenden genannt. Probleme in der eigenen Lehre wurden nicht gesehen

In Bezug auf die notwendigen Vorkenntnisse der Studierenden gab es auch unterschiedliche Meinungen. Ein Hochschullehrer für Algebra stellte fest, dass mathematische Vorkenntnisse aus der Schule zwar nützlich aber nicht wirklich wichtig seien, während ein Hochschullehrer für Analysis die Vorleistungen der Schule für absolut unzureichend hält.

Im Zusammenhang mit der Reform der Lehrerausbildung wurden in einem Thesenpapier einer Gruppe von Hochschullehrern u. a. folgende Standpunkte geäußert.

- Um die Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus betrachten zu können, … müssen die Studenten zunächst auf einen solchen höheren Standpunkt gebracht werden.
- Die Lehrerausbildung sollte als Hochschulstudium und nicht als berufliche Ausbildung verstanden werden.
- Eine Verwischung der Grenzen zwischen fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Veranstaltungen ist abzulehnen. Vorlesungen der Didaktiker etwa über „Elementarmathematik“ dürfen nicht als Ersatz von fachwissenschaftlichen Modulen fungieren.

Ein Gymnasiallehrerstudent sagte mir, dass er in der Geometrievorlesung im 5. Semester zum ersten Mal das Wort 'Schule' gehört hat.

2. Zu Ursachen der Missverständnisse

Zu den Ursachen für diese Phänomene zähle ich die unterschiedlichen Auffassungen zum Lernen. Diese zeigen sich unter anderem in mehr oder weniger explizit geäußerten Meinungen der folgenden Art.

- Zur Beschreibung der Ziele einer Lehrveranstaltung reicht es aus, die fachlichen Inhalte anzugeben.
- Die Lehre besteht wesentlich aus Vorträgen des Lehrenden.
- Lernen heißt, in der Vorlesung gut zuhören, sich alles einzuprägen und möglichst selbst die Übungsaufgaben lösen.
- Die Übungsaufgaben müssen anspruchsvoll sein.

Ein Ergebnis dieser Auffassung ist, dass die Module Analysis I und II (für Bachelor- und Gymnasiallehramtsstudierende) im ersten und zweiten Semester aus 6 SWS für Vorlesungen und nur 2 SWS für Übungen bestehen.

In der ersten Vorlesung zur linearen Algebra wurden folgende Themen behandelt: Aussagen und Aussageformen, Quantoren, Operationen mit Aussagen, Wahrheitstafeln, Gesetze der Aussagenlogik, Tautologie, Kontradiktion, der direkte Beweis, die vollständige Induktion, der indirekte Beweis.

Analysiert man die lerntheoretischen Grundlagen der Denkweisen, so ergibt sich, dass oft gegen grundlegende pädagogische und didaktische Prinzipien verstoßen wird.

- Es wird sich meist hauptsächlich an den Inhalten und ihrer "didaktischen" Aufbereitung und nicht an den Zielen orientiert.
- Es finden meist unvollständige Lernprozesse statt.
- Die Lernenden werden nicht dort abgeholt werden, wo sie sich befinden, d. h. es wird nicht an ihre kognitive Struktur angeknüpft.
- Die Anforderungen der Aufgaben werden nicht schrittweise gesteigert, es fehlen für das Lernen wesentliche Aufgabentypen.

Die tieferen Ursachen für die dargestellten Erscheinungen liegen allerdings in den grundlegenden Unterschieden im Wesen und im Gegenstand der beiden Wissenschaften und sind damit objektiv bedingt.

Die Mathematik ist, verkürzt dargestellt, ein theoretisches System im Kopf von Mathematikern. Der Mathematikunterricht ist im Wesen ein Prozess der Entwicklung psychischer Eigenschaften im Kopf von Lernenden.

Der Gegenstand der Mathematik sind abstrakte Zeichensysteme, Muster und Strukturen. Die Gegenstände der Didaktik des Mathematikunterrichts lassen grob in die folgenden drei Kategorien unterteilen:

A: Funktionen, Ziele und Stoffe von mathematischen Lehrgängen

B: Unterrichtsmethoden und -mittel in mathematischen Lehrgängen

C: Lokale und globale Entwicklungsprozesse mathematischer Leistungs- und damit verbundenen Verhaltenseigenschaften bei Lernenden in mathematischen Lehrgängen

Die Denk- und Arbeitsweisen in beiden Wissenschaften sind deshalb grundlegend verschieden. In der Mathematik wird vorwiegend analytisch gearbeitet. Es ein axiomatischer und deduktiver Aufbau der Theorie möglich. Begriffe werden durch Definitionen festgelegt. Ein wesentliches Ziel ist der Beweis aller Aussagen. Es ist eine sehr konzentrierte Darstellung der Theorie möglich.

In der Didaktik des Mathematikunterrichts wird vorwiegend synthetisch gearbeitet. Begriffe können nur durch Explikation im Wechselverhältnis inhaltlicher und formaler Aspekte erklärt werden. Es gibt kaum allgemeingültige Zusammenhänge. Die Erkenntnisse sind nicht deduktiv beweisbar. Es sind zur Darstellung von Erkenntnissen oder Formulierung von Problemen umfangreiche Erörterungen nötig.

Die Wissenschaften werden von unterschiedlichen Personengruppen genutzt. Mathematische Erkenntnisse werden von Mathematikern, vielen weiteren Wissenschaftler und Mathematiklehrern benötigt. Die Didaktik des Mathematikunterrichts ist die Berufswissenschaft von Mathematiklehrkräften.

3. Zu Konsequenzen

Bei einer vorurteilsfreien Anerkennung dieser objektiv gegebenen Unterschiede ergeben sich unter anderem folgende Konsequenzen für das Verhältnis der beiden Wissenschaften und der in ihnen tätigen Personen.

- Alle Hochschullehrer für Mathematik sind auch Lehrer und brauchen eine grundlegende pädagogisch-fachdidaktische Ausbildung.
- Die Fachdidaktiker müssen als Experten für das Lehren und Lernen von Mathematik auch an der Universität akzeptiert werden.
- Es sollte eine klare Abgrenzung der beiden Wissenschaften bei gegenseitiger Akzeptanz der spezifischen Kompetenzen erfolgen.

Zur Betonung der Spezifik der beiden Wissenschaften und Vermeidung von Missverständnissen sollte anstelle von „Didaktik der Mathematik“ die Bezeichnung „Didaktik des Mathematikunterrichts“ verwendet werden.

Rolf BIEHLER, Paderborn, Martin HÄNZE, Kassel, Reinhard HOCHMUTH, Lüneburg, Julia SONNTAG, Paderborn

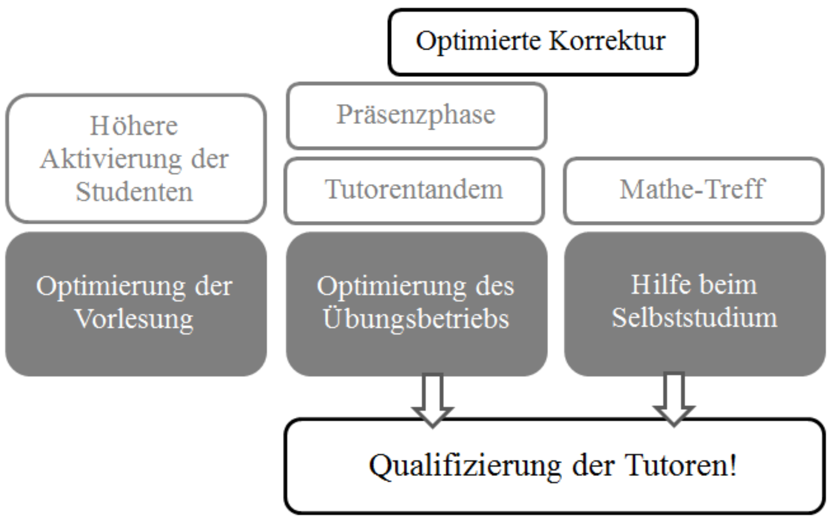
Semesterbegleitende Unterstützung von Tutoren zum feedbackorientierten Korrigieren von Übungsaufgaben in einer Erstsemestervorlesung

1. Über das Projekt LIMA

Das BMBF-Projekt LIMA (Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation) ist ein zum Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) assoziiertes Projekt der Universitäten Paderborn und Kassel (http://www.lima-pb-ks.de/), das vom BMBF gefördert wird (Förderkennzeichen 01PH08028B und 01PH08028A). Zentrale Komponenten des Projekts sind die Entwicklung und Implementierung einer Lehrinnovation im ersten Studiensemester im Studiengang Lehramt Mathematik für Haupt-und Realschulen und eine begleitende empirische Evaluationsstudie. Es wurden in einem quasi-experimentellen Design jeweils 2 Kohorten im Abstand von einem Jahr an den Universitäten Kassel und Paderborn verglichen. In den Experimentalgruppen wurden Lehrinnovationen im Übungsbetrieb durchgeführt.

2. Kurz-Überblick über die LIMA-Innovationen

Die folgende Darstellung zeigt eine Übersicht über die LIMA-Innovationen.



Im Folgenden beschränken wir uns auf die optimierte Korrektur (vgl. zur Tutorenschulung Biehler et al., 2012a, 2012b). Eine optimierte Korrektur wirkt sich für die Studierenden sowohl im Übungsbetrieb, wie auch auf das

Selbststudium aus. Sie erhöht aber auch die Anforderungen an die studentischen Tutoren. Im Projekt LIMA wurde daher ein umfangreiches Qualifizierungskonzept für studentische Tutoren entwickelt.

3. Ziele der optimierten Korrektur

Hintergrund war die Durchsicht eingescannter Übungszettelbearbeitungen nach Studierendenschwierigkeiten in der ersten Kohorte. Neben fachlichen Defiziten bei den (studentischen) Korrekteuren wurde klar, dass ein erheblicher Optimierungsbedarf der Korrektur bestand. Das beruht auf der Hypothese, dass Studierende zu wenig individualisiertes Feedback erhalten und Fehlvorstellungen sowie mangelhafte Darstellungs- und Argumentationsqualität nicht verändert werden. Es ergaben sich somit folgende Hauptziele: Ein gutes Feedback an die Studierenden zu gewährleisten und die Tutoren bei der Verbesserung ihrer Korrekturkompetenz zu unterstützen.

4. Tutorenqualifikation im Bereich Korrektur

Zur Tutorenqualifizierung im Bereich Korrektur gehören ein Workshop zu Semesterbeginn und semesterbegleitend Korrekturhinweise, ein Korrekturforum und eine sogenannte „Nachkorrektur“.

Workshop zur Korrektur

In dem vierstündigen Workshop werden zunächst die von den Teilnehmern zu Hause korrigierten, exemplarisch ausgewählten authentischen Studierendenbearbeitungen besprochen und nachkorrigiert. Anschließend werden „Grundregeln zur Korrektur von Hausaufgaben“ präsentiert und detailliert besprochen. Bei einem erneuten Korrigieren von Studierendenbearbeitungen sollen die Teilnehmer diese Grundregeln einhalten. Die Workshop-Inhalte sollten im Semester wieder aufgegriffen werden (in der Tutorenbesprechung oder durch Nachkorrektur).

Korrekturhinweise

Die wöchentlichen Korrekturhinweise bestehen aus einem ausführlichen Lösungsvorschlag zuzüglich Hinweisen auf Alternativlösungen oder typische Studierendenfehler. Am Standort Kassel enthielten die Korrekturhinweise außerdem ein genaues Bewertungsschema, da die Studierenden dort 50% der Aufgabenblätter richtig bearbeitet haben mussten, um zur Klausur zugelassen zu werden.

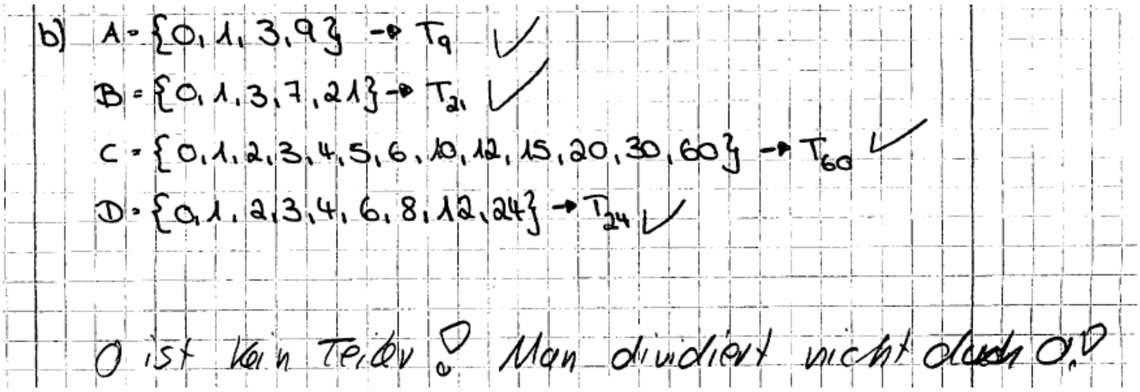
Korrekturforum

In einem Moodle-Kurs für die Lehrenden und studentischen Tutoren der Veranstaltung wurde ein Online-Korrekturforum eingerichtet. Dieses sollte dazu dienen, schwer verständliche oder stark von dem Lösungsvorschlag abweichende Studierendenbearbeitungen diskutieren zu können.

Nachkorrektur

Um die Qualität des Feedbacks zu überprüfen, wurden die korrigierten Übungsblätter jede Woche stichprobenartig eingescannt und von einem wissenschaftlichen Mitarbeiter nachkorrigiert. In Kassel erfolgte die Rückmeldung innerhalb der wöchentlichen Tutorenbesprechung an die ganze Gruppe. Es wurden also exemplarisch einzelne Korrekturen besprochen (ohne Nennung des Korrektors) und aufgrund dieser die Grundregeln erneut in Erinnerung gerufen. In Paderborn erfolgte die Rückmeldung individuell. Jeder Korrektor erhielt jede Woche zwei nachkorrigierte Übungszettel und eine Mail mit einer individuellen Rückmeldung über seine Korrekturkompetenz. Wir geben hier ein Beispiel eines korrigierten Übungsblatts (Blatt 1 der Veranstaltung)

Aufgabe: Ergänze die folgenden Mengen mit möglichst wenigen Zahlen zu Teilermengen in N_0 : A={3,9}, B={1,3,7}, C={1,2,3,4,5}, D={1,24}.


b) A = {0, 1, 3, 9} → T_9 ✓
B = {0, 1, 3, 7, 21} → T_{21} ✓
C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60} → T_{60} ✓
D = {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} → T_{24} ✓

0 ist kein Teiler! Man dividiert nicht durch 0.!

Fachliche Nachkorrektur: 0 ist ein Teiler nur von 0 denn es ist $T_0=\mathbb{Z}$. Für alle anderen $a\epsilon\mathbb{Z}$ kann 0 aber niemals ein Teiler sein, denn es gibt kein $q\epsilon\mathbb{Z}$, für das $0 \cdot q = a$ gilt. Diese Begründung wäre zu bevorzugen, denn der Hinweis „man teilt nicht durch 0" greift nur auf das intuitive Vorverständnis zur Teilbarkeit zurück. Die Studierenden sollten aber die „neue" Definition der Teilbarkeit erlernen. Eine übliche Vorgehensweise alle Teiler einer Teilermenge zu finden, ist die Beantwortung der Frage „Durch welche Zahlen kann ich die 60 ohne Rest teilen?" und dann das gleichzeitige Aufstellen der jeweiligen Komplementärteiler. Auch wenn der Hintergrund das Suchen zweier Faktoren ist, ermitteln die Studierenden diese oft durch Division (z.B. 60:2=30 liefert mir die Teiler 2 und 30). Der Hinweis, dass man durch 0 nicht teilen darf bezieht sich vielleicht auf diese Division.

Nachkorrektur zum Feedback: Die Korrektorin hakt trotz Fehler die gesamte Teilaufgabe b) ab. Sie hat damit weder die Korrekturhinweise beachtet, noch die Grundregel „Alle Fehler anstreichen (auch die, die nicht in Punktabzug resultieren)“ eingehalten. Da die gesamte Teilaufgabe als richtig abgehakt ist, ist denkbar, dass das Feedback gar nicht ankommt. Auch bezüglich Freundlichkeit ließe sich der Kommentar verbessern.

5. Fazit und Ausblick

Mit diesen Maßnahmen zur Korrekturverbesserung haben wir die folgenden Erfahrungen gemacht. Die Grundregeln der Korrektur müssen erst eingeübt und gezielt eingefordert werden (ein Korrekturworkshop und eine Nachkorrektur in den ersten Wochen ist somit notwendig). Die Qualität des Feedbacks und die Lesegenauigkeit der Korrektoren nehmen im Laufe des Semesters deutlich zu. Nach einer Anlaufzeit von einigen Wochen hätten die Tutoren hinsichtlich der Korrektur nicht weiter betreut werden müssen.

Den Tutoren ist die Korrektur trotz zunehmender Stoff-Schwierigkeit zunehmend leichter gefallen, der Zeitaufwand für die Korrektur sank. Der Workshop sowie die semesterbegleitende Betreuung wurden von den Tutoren als sehr hilfreich eingeschätzt.

Auf Seiten der Studierenden konnten wir in den Experimentalgruppen zwar keine signifikante Leistungssteigerung feststellen (vgl. Schreiber et al., 2012), die Studierenden schätzen jedoch die Übungsleiterkompetenz der geschulten Tutoren wesentlich besser ein. In einer Nacherhebung zum Umgang mit korrigierten Übungsblättern schätzten mehr als 90% der Studierenden die Kommentare (der Korrekteure) als hilfreich, freundlich und fachlich kompetent ein. In Arbeit ist zurzeit ein Korrektur-Booklet, welches die Grundregeln für eine verbesserte Korrektur angereichert mit zahlreichen Korrektur-Beispielen enthält.

6. Literatur

Biehler, R.; Hochmuth, R.; Klemm, J.; Schreiber, S.; Hänze, M. (2012a) : Fachbezogene Qualifizierung von MathematiktutorInnen – Konzeption und erste Erfahrungen im LIMA-Projekt. In: Zimmermann et al., 2012, S. 45-56

Biehler, R.; Hochmuth, R.; Klemm, J.; Schreiber, S.; Hänze, M. (2012b): Tutorenschulung als Teil der Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ (LIMA-Projekt). In: Zimmermann et al., 2012, S. 33-44.

Schreiber, S., Fischer, E., Biehler, R., Hänze, M., Hochmuth, R. (2012) Von der Schwierigkeit, Leistung zu steigern. Innovationen zu Beginn des Mathematik-Lehramtsstudiums. Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.

Zimmermann, M., Bescherer, C. & Spannagel, C. (2012). Mathematik lehren in der Hochschule - Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen, Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Susanne SPIES, Siegen, Gabriele WICKEL, Siegen

„Mathematik Neu Denken“: Impulse zur Neugestaltung der universitären Lernumgebung

Methoden Neu Denken!

Mathematik Neu Denken, ein Tandemprojekt an den Universitäten Gießen und Siegen (2005-2011), ist angetreten, die Ausbildung angehender Gymnasiallehrerinnen und -lehrer neu zu durchdenken und professionsbezogen zu gestalten (zu Motivation und Durchführung vgl. Beutelspacher u.a. 2011, S. 5-30). Neben klaren inhaltlichen Akzentverschiebungen in den fachmathematischen und fachdidaktischen Lehrveranstaltungen wurden auch die klassischen Lehr- und Lernformen des Mathematikfachstudiums in den Blick genommen: Ein Pfeiler der Projektidee bestand daher in der Neuorientierung der universitären Lernumgebung. Diese ist von der Überzeugung getragen, dass jedes Mathematiklernen der *Balance von Instruktion und Konstruktion* bedarf. Der methodische Ansatz beruht u.a. auf Grundsätzen der allgemeinen Lehr-Lern-Forschung (vgl. Reinmann u.a. 2006). In diesem Geiste wurden insbesondere die hochschulmathematischen Veranstaltungen, in denen traditionell instruktionsorientierte Lehrformen vorherrschen, zugunsten konstruktivistisch orientierter Lernformen verändert (vgl. Beutelspacher u.a. 2011, S. 149-173). Ziel dieser Veränderungen war zum einen, den Aufbau eines tragfähigen mathematischen Weltbilds im Spannungsfeld von *Produkt- und Prozessorientierung* zu unterstützen. Außerdem sollte die Lernumgebung das *Sprechen über Mathematik* ermöglichen und so den verstehensorientierten Umgang der Lernenden mit den mathematischen Gegenständen anbahnen. Ein dritter Punkt betrifft den erfolgeichenen Umgang der Studierenden mit der Hochschulmathematik: Lernumgebungen, die eine eigenaktive Konstruktion des Wissens bei den Studierenden unterstützen, können der identitätsstiftende Ort für die Thematisierung von fachlichen Lernprozessen werden.

Das Gruppenpuzzle in den Übungen zur Hochschulanalysis

Den Kernpunkt der methodischen Veränderung am Standort Siegen bilden die *klassischen Übungen* zu den Vorlesungen Analysis I/II. Hier wurden insbesondere im schulischen Kontext erprobte kooperative Methoden (vgl. z.B. Barzel u.a. 2007) für die Hochschullehre adaptiert. Gerade die Übungen, deren Methode im Gegensatz zum per se instruktionsorientierten Dozentenvortrag in Vorlesungen nicht festgelegt ist, stellen eine ausgezeichnete Möglichkeit dar, die *Balance von Instruktion und Konstruktion* beim Mathematiklernen herzustellen.

Die traditionelle Aufgabe von „Besprechungsübungen", jedem Teilnehmer Lösungen zu bearbeiteten und zur Korrektur abgegebenen Aufgaben zur Verfügung zu stellen, wurde also um die vorgestellten Zielsetzungen kooperativer Arbeitsformen ergänzt. Eine kooperative Methode, die dies unserer Erfahrung nach besonders gut leistet, ist das *Gruppenpuzzle*. Mit dessen Hilfe wurden im Projekt auch ganz klassische Aufgaben zur Hochschulanalysis besprochen. Insofern ergänzen die folgenden Projekterfahrungen die Ausführungen in Beutelspacher u.a. 2011, S. 152ff.

5 Min.	**Eingangsphase** (Plenum): Begrüßung, Rückgabe der korrigierten und zu besprechenden Übungszettel, Hinweise zum Ablauf der Übungsstunde, Gruppeneinteilung
30 Min.	**Expertenrunde** (4 Gruppen zu je 5 Personen): *„Erstellen Sie eine ausführliche Lösung zu Aufgabe xy. Klären Sie dabei auch individuelle Fragen zur eigenen Lösung (Warum gab es Punktabzug? Verstehe ich die Korrektur? usw.) zunächst untereinander. Wo bestehen weiterhin Probleme?* *Wichtig: Jedes Gruppenmitglied sollte die Ergebnisse so verstanden und festgehalten haben, dass es sie nachher anderen als Experte erklären kann!"* Mögliche „Hilfsmittel": Gruppenmitglied mit vollständiger Lösung, Lösungsskizze, Hinweise auf entsprechende Stellen im Skript o.ä.
40 Min.	**Unterrichtsrunde** (5 Gruppen zu je 4 Personen): *„Stellen Sie sich gegenseitig die Ergebnisse der Expertenrunde vor, so dass nachher jeder die Lösungen zu allen Aufgaben des Übungsblattes vorliegen und verstanden hat. Fragen sollten zuerst dem jeweiligen Experten gestellt und in der Gruppe diskutiert werden. Bleiben dabei Unklarheiten, formulieren Sie diese so präzise wie möglich, um sie anschließend im Plenum zur Diskussion zu stellen."*
15 Min.	**Abschlussphase** (Plenum): Klären offener Fragen aus der Unterrichtsrunde, Allgemeine Hinweise zum neuen Übungsblatt, Organisatorisches …

Abb. 1: Verlaufsplan einer idealtypischen Besprechungsübung in einer Gruppe mit 20 Personen

Die 90minütige Übung beginnt mit einer kurzen Eingangsphase im Plenum (vgl. Abb. 1). Hier besteht für die Studierenden die Möglichkeit, sich mit ihren Korrekturhinweisen zu beschäftigen und sich evtl. offene Fragen und Probleme zu den Aufgaben wieder ins Gedächtnis zu rufen. In der Eingangsphase werden außerdem die Gruppen für die folgende „Expertenrunde" eingeteilt. Ziel der Arbeit in der Expertenrunde ist, dass die Mitglieder jeder Gruppe zu Experten für genau eine der zu besprechenden (Teil-) Aufgaben werden (für mögliche Arbeitsgrundlagen vgl. Abb. 1). Für die folgende Unterrichtsphase werden die Studierenden so zusammengesetzt, dass es in jeder Gruppe einen Experten pro Aufgabe gibt. Diese präsentieren der Kleingruppe reihum „ihre“ Lösungen und stehen den anderen für Rückfragen zur Verfügung. In dieser Phase muss sich nun *jeder* Teilnehmer einmal in der Lehrerrolle erproben (vgl. Abb.1). Je nach Inhalt bieten sich für diese Phase auch andere Präsentationsformen, wie etwa ein Museumsrundgang an (vgl. Beutelspacher u.a. 2011, S. 156f). Fragen, die in der Unterrichtsrunde nicht geklärt werden können, oder Hinweise des Übungsleiters für alle können dann im abschließenden Plenum angesprochen werden.

Einige organisatorische Voraussetzungen tragen erfahrungsgemäß zum gelingen kooperativer Übungsformen bei: Um Konfusionen durch die Methode zu vermeiden, müssen wie beim schulischen Einsatz die Arbeitsaufträge für die Studierenden präzise formuliert werden und der Übungsleiter muss den Arbeits*prozess* stringent anleiten. Die Übungsgruppen sollten außerdem nicht zu groß sein (max. 25 Personen haben sich bewährt) und in flexiblen Seminarräumen stattfinden, wo sich zügig Gruppentische stellen lassen und in denen für das gemeinsame Ringen der Kleingruppen um die mathematischen Probleme Tafeln genutzt werden können. Der Übungsleiter muss ein Bild vom Stand der Übungsteilnehmer haben. Daher wird die Vorbereitung durch die gruppenweise Korrektur der Aufgaben durch den Übungsleiter selbst erleichtert.

Diskussion

Die wichtigste Grundvoraussetzung für die Umsetzung kooperativer Übungsformen ist das Vertrauen der Lehrenden auf die Fähigkeiten jedes einzelnen Gruppenmitglieds und auf die Selbstregulierungskräfte der Gruppe. Denn nur dann entsteht auch unter den Studierenden dieses Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten und die Lösungen und Erklärungen der Kommilitonen! Die Projekterfahrungen zeigen, dass im fehlenden Mut seitens der Übungsleiter und in einem starken Glauben an die „Autorität des Tafelanschriebs“ seitens der Studierenden ein offenes Problem des Konzepts liegt, was vermutlich auch mit der schulischen und universitären Sozialisation verbunden ist. Eine Möglichkeit, diesem zentralen Problem zu begegnen, könnten gezielte Rückmeldungen zu den Expertenergebnissen oder die wiederholte explizite Reflexion der Methode sein. Vertrauensbildend könnten außerdem der explizite Umgang mit „unfertigen“ Lösungen und das Reflektieren von Fehlern wirken. Daher muss sich nicht nur die Perspektive des Übungsleiters auf den Lernprozess verändern, sondern auch seine Rolle wandeln: Der Übungsleiter als Moderator von Lernprozessen und fachlicher Ratgeber benötigt eine größere fachliche Flexibilität, da diese Rolle eben nicht nur die Präsentation fertiger Lösungen erfordert. Das bedeutet ein verändertes Selbstbild, da er mit Fragen und abweichenden Wegen der Studierenden spontan und konstruktiv umgehen können muss. Dazu bedarf es eines Gespürs für die Prozesse in der Gruppe und etwa der Fähigkeit, in den Unterrichtsrunden gut zuhören und auf Schwierigkeiten angemessen reagieren zu können. Übungsleiter müssen demnach besonders geschult und in ihrer Arbeit während des Semesters begleitet werden. Die Tutoren-Schulung im Rahmen von *Mathematik Neu Denken* war nicht nur auf die Methodenkompetenz der Übungsleiter, sondern auch auf ihre Selbstreflexion ausgerichtet. Mit einer solchen Unterstützung trägt die Arbeit mit kooperativen Übungsmethoden zur Ausbildung von Schlüsselkompetenzen seitens der Tutoren bei, die insbesondere für Lehramtsstudierende eine wertvolle Qualifikation bedeuten. Gleichzeitig entlasten kooperative Arbeitsformen aber auch, da in der Regel keine ausführlichen Musterlösungen erstellt werden. Wir betrachten Musterlösungen generell kritisch, da ihre geschlossene Darstellung suggeriert, dass es nur diese eine Lösung gibt und sie außerdem weniger Anlässe zur individuellen Auseinandersetzung bieten. Damit stehen sie dem prozessorientierten Ansatz entgegen.

Die Umsetzung konstruktivistischer Lernumgebungen ist ein wichtiger Schritt auf dem Weg zu einer *Balance von Instruktion und Konstruktion* in der universitären Gymnasiallehrerbildung. Dies allein genügt nicht, sondern es bedarf der konsequenten Prozessorientierung in allen Bereichen. Dazu zählt neben der Integration von Geschichte und Philosophie der Mathematik und der Stärkung der Elementarmathematik auch die Neuorientierung der Leistungsbeurteilung. Im Rahmen des Projekts haben wir offene Aufgaben in den schriftlichen Leistungsüberprüfungen ebenso erfolgreich erprobt wie eine individuelle inhaltliche Rückmeldung und die Erweiterung des klassischen Spektrums von Studienleistungen (vgl. Beutelspacher u.a. 2011, S. 169ff).

Literaturauswahl

http://www.uni-siegen.de/fb6/didaktik/mathematikneudenken/

Barzel, B.; Büchter, A.; Leuders, T. (2007): Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Beutelspacher, A.; Danckwerts, R.; Nickel, G.; Spies, S.; Wickel, G. (2011): Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Reinmann; G.; Mandl, H. (2006): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: Krapp, A.; Weidenmann, B. (Hrsg.): Pädagogische Psychologie. 5. vollst. neu überarb. Aufl. Weinheim u.a.: Beltz Psychologie Verlags Union, S. 613 - 658.

Ute SPROESSER, Sebastian KUNTZE, Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Wissen zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ – Ergebnisse einer Studie mit Realschülerinnen und Realschülern

Das mathematische Beschreiben funktionaler Zusammenhänge und deren Nutzung in Problemlöse- und Modellierungskontexten sind mit Begriffswissenskomponenten wie Wissen zum Zuordnungs- und Kovariationsaspekt verknüpft (Malle, 2000; Vollrath, 1989, 2007). Solches Begriffswissen zu funktionalen Zusammenhängen erfordert es nicht nur, Funktionen als Zuordnungen aufzufassen, sondern es ist insbesondere für Modellierungssituationen, in denen mit realen Daten umgegangen werden muss, erforderlich, Funktionen als Entitäten aufzufassen, durch die die Kovariation zwischen variablen Größen beschrieben wird. Die Komplexität von Problemstellungen im Bereich der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (KMK, 2004) wird also – auch im Sinne der Stufen von Vollrath (2007) – davon mit beeinflusst, ob gegebene Zuordnungsvorschriften genutzt werden können oder ob ein zugrunde liegender funktionaler Zusammenhang etwa über mehrere Wertepaare hinweg erst anhand der Kovariation der beteiligten Größen beschrieben werden muss. Im Zusammenhang mit derartigen qualitativ bedeutsamen Stufen kann Komplexität auch durch die Anzahl auszuführender Denkschritte oder durch die Anzahl zu verknüpfender Wisseneinheiten (Neubrand, 2002) vorhergesagt werden. Beispielsweise erfordert ein explorierendes Abgleichen zwischen mehreren Wertepaaren mit dem Ziel des Beschreibens von Kovariation bzw. des Typs eines funktionalen Zusammenhangs in der Regel ein mehrschrittiges Vorgehen. Entstammen die Werte realen Daten, so muss ferner mit statistischen Abweichungen umgegangen werden, was das Beschreiben von Kovariation schwieriger macht und die Anzahl zu leistender Schritte in der Regel erhöht (Carlson et al., 2002). Begriffswissen zu funktionalen Zusammenhängen schließt ferner Wissen zu verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen und dem Wechseln zwischen Darstellungen mit ein (z.B. Vollrath, 1989 bzw. 2007). Auch diesbezüglich kann die Komplexität von Problemstellungen erhöht werden (vgl. z.B. Duval, 2006).

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, inwiefern Wissen zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ im Sinne hierarchisch gestufter Niveaus beschrieben werden kann. Mit Hilfe der oben überblicksartig skizzierten theoretischen Überlegungen wurde für eine empirische Untersuchung das in Tabelle 1 wiedergegebene Niveaumodell entwickelt.

Dieses Niveaumodell erstreckt sich von basalem Wissen im Sinne des „elementaren Nutzens gegebener Zuordnungsvorschriften“ bis hin zum

„Beschreiben und Nutzen funktionaler Zusammenhänge unter Einschluss von Kovariation mit realen Daten“. Beim Nutzen gegebener Zuordnungsvorschriften ist anders als auf den Niveaus III und IV ein Blick auf funktionale Zusammenhänge im Sinne einer Entität oder eines mehrschrittigen Explorierens bzw. Beschreibens von Kovariation nicht erforderlich. Auch ein kritisches Reflektieren von Abweichungen in Daten (wie es auf Niveau IV notwendig wird) oder das Durchlaufen von Modellierungskreisläufen spielt auf diesem elementaren Niveau noch keine Rolle. Auf Niveau II ist der funktionale Zusammenhang nicht explizit oder formal gegeben, sondern muss durch elementares Modellieren aus einer Sachsituation erschlossen werden. Hier spielt auch der Aspekt der Kovariation eine etwas größere Rolle, da elementare Sachkontexte hier Aufschluss zur gemeinsamen Variation zweier Größen geben können. Auf Niveau III ist es erforderlich, mit Hilfe von Aussagen über die Kovariation von Größen funktionale Zusammenhänge beschreiben zu können und diese auch im Sinne von Modellierungsschritten nutzen zu können. Auf Niveau IV tritt ein kritisches Reflektieren vor dem Hintergrund von Abweichungen hinzu, wie sie bei realen Daten oft vorkommen.

Niveau	*Beschreibung*
I	Elementares Nutzen gegebener Zuordnungsvorschriften
II	Elementares Modellieren durch Nutzen funktionaler Zusammenhänge in Sachkontexten (Zuordnungsvorschrift nicht explizit gegeben aber durch Sachkontext nahegelegt, Rückgriff auf elementares Begriffswissen zum Kovariationsaspekt denkbar)
III	Beschreiben und Nutzen funktionaler Zusammenhänge unter Einschluss von Kovariation, wobei mehrere Schritte in einem Modellierungskreislauf denkbar sind
IV	Beschreiben und Nutzen funktionaler Zusammenhänge unter Einschluss von Kovariation und dem Erfordernis des Reflektierens funktionaler Zusammenhänge anhand realer Daten

Tabelle 1: Niveaumodell zu Begriffswissen im Bereich der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“

Bezüglich dieses Modells ist von Interesse, inwiefern sich die Überlegungen zu Komplexitätsniveaus auch empirisch zeigen. Im Zentrum des Untersuchungsinteresses stand daher die folgende Fragestellung:

Kann das oben vorgestellte hierarchische Modell zu Wissen von Schülerinnen und Schülern zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ mit Hilfe eines geeigneten Testinstruments empirisch bestätigt werden?

Untersuchungsdesign

Um diese Forschungsfrage zu beantworten, wurde 204 Realschüler(inne)n der 9. Jahrgangsstufe (94 Schülerinnen und 109 Schüler, 1 ohne Angabe) ein Test vorgelegt, in dem Aufgaben im Bereich der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ enthalten waren. Die Aufgaben des Tests waren entspre-

Vervollständige die Tabelle:

x	x+16
1	17
4	
20	

Ergänze die folgende Preistabelle für Katzenfutter in Dosen

Anzahl Dosen	Preis in €
1	0,60
2	
	3,00
10	

Jana möchte herausfinden, wie die Höhe einer Kerze von ihrer Brenndauer abhängt. Allerdings kann sie mit ihrem Geodreieck die Höhe der Kerze nicht sehr genau messen. Das folgende Diagramm zeigt zu 6 verschiedenen Zeitpunkten (in Stunden) die Höhe der Kerze (in cm).

Kreuze an und begründe.

Lässt sich eine Voraussage über die Höhe der Kerze nach einer Brenndauer von 4 Stunden treffen?

☐ Ja ☐ Nein Begründung: *[…]*

Wenn du oben „ja“ angekreuzt hast: An welche Voraussage denkst du dabei?

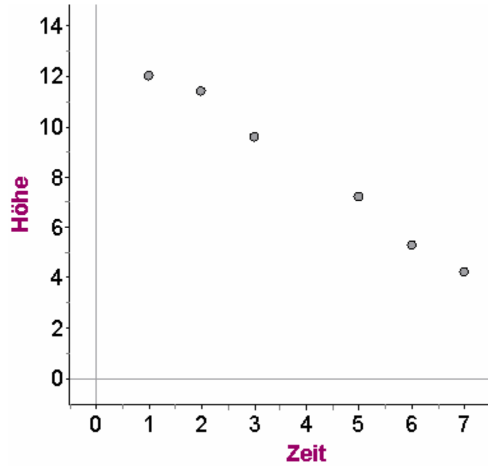


Abb. 1: Beispielaufgaben für die Niveaus I, II und IV

chend der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Niveaus konzipiert. Beispielaufgaben für die Niveaus A, B und D sind in Abb. 1 wiedergegeben. Der Test fand im Rahmen des Projekts RIKO-STAT (vgl. z.B. Kuntze, Engel, Martignon & Gundlach, 2010) statt.

Ergebnisse

In Abb. 2 sind die Lösungsraten der Schüler(innen) bezüglich der Niveaus dargestellt. Mit Ausnahme der Niveaus I und II fallen die Lösungsraten ab, was auf ein ansteigendes empirisches Komplexitätsniveau hindeutet.

Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass die Niveaus I und II entgegen der ursprünglichen Erwartung einen vergleichbaren empirischen Komplexitätsgrad aufwiesen. Nimmt man diese beiden unteren Niveaus jedoch zusammen, so sprechen die Befunde für ein hierarchisches Modell für Wissen zur Leitidee

„Funktionaler Zusammenhang“, das anhand dreier grober Stufen beschrieben werden kann.

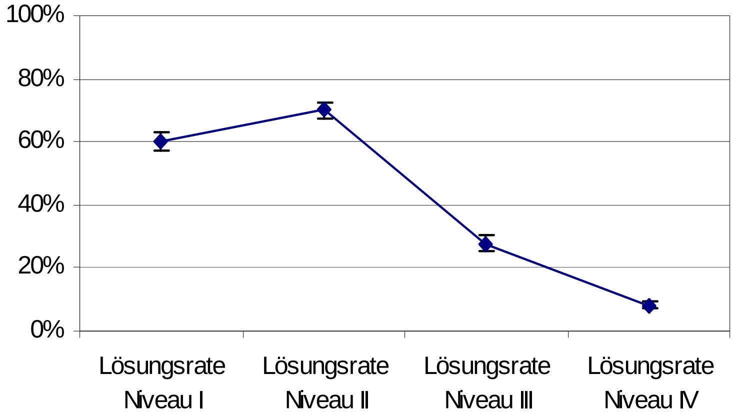


Abb. 2: Antworten von Realschüler(inne)n (9. Jahrgangsstufe, N=204)

Die Ergebnisse dieser Studie müssen jedoch mit Vorsicht interpretiert werden. Bedarf an Anschlussforschung besteht u. a. zu den Fragestellungen der empirischen Verbreiterung der Befunde auch anhand einer größeren Itemanzahl, der Übertragbarkeit des Modells über Altersstufen und Kulturgrenzen hinweg oder der Untersuchung von Verknüpfungen mit anderen Kompetenzmaßen und allgemeiner mathematischer Kompetenz.

Danksagung

Diese Studie wurde mit Forschungsmitteln der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg gefördert.

Literatur

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, T., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol.33, No.5,* 352-378.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

KMK (Kultusministerkonferenz). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss.* München: Wolters Kluwer.

Kuntze, S., Engel, J., Martignon, L. & Gundlach, M. (2010). Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – Empirical research in the project RIKO-STAT. *In C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of ICOTS8.* Voorburg: ISI. www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php [Refereed paper].

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen.* Hildesheim: Franzbecker.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren, 103,* 8-11.

Malle, G. (1993). *Did. Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Vollrath, H. & Weigand, H. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe.* München: Spektrum.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10,* 3-37.

Angela STACHELBERGER, Wien

Mathematik Lernen im bilingualen Diskurs – Problemlösen in zwei Sprachräumen

1. Hintergrund der Studie

Mathematikunterricht mit Englisch als Arbeitssprache (*Content and Language Integrated Learning*, CLIL) zielt darauf ab, integratives Sprach- und Inhaltslernen zu fördern. Die dafür konstitutiven Zielformulierungen beziehen sich auf die Bereiche Kultur, Sprache, Inhaltslernen und Kognition, wobei aktuell verstärkt inhaltliche und lerntheoretische Dimensionen Beachtung finden. So kamen einschlägige Studien zu dem Schluss, dass sich Lernen in der Fremdsprache positiv auf mathematisches Denken auswirkt (vgl. Dawe, 1983; Clarkson, 2006; Barwell, 2009).

Während die bisherigen Forschungen überwiegend Ergebnisstudien hinsichtlich der Wirkung bilingualen Unterrichts auf Lernerfolge in Mathematik, also bezüglich des *Lernprodukts*, hervorbrachten (vgl. Clarkson, 2006), fehlt es an Untersuchungen der tatsächlichen Denk- und Arbeitsvorgänge. Jedoch könnte eine genaue Analyse der *Prozesse* bilingualer Bedeutungskonstruktion wichtige Erkenntnisse hinsichtlich des Potentials dieser Unterrichtsform für das Mathematiklernen liefern. Diese Lücke möchte die vorliegende Arbeit schließen, indem sie versucht, den Einfluss der Fremdsprache auf Mathematiklernen zu untersuchen.

2. Methodik der Studie

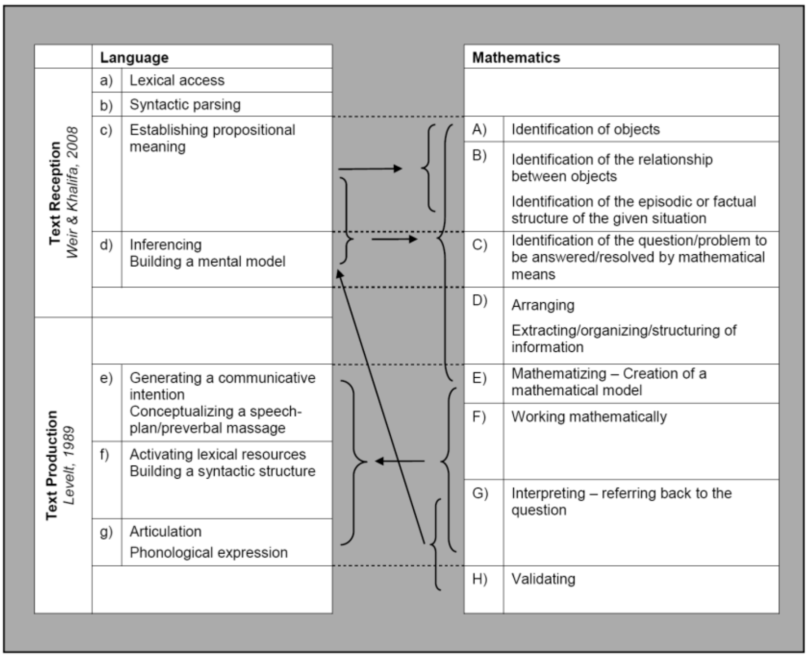
Die Datensammlung umfasst videografierte Einzelbeobachtungen von insgesamt 13 SchülerInnen der 6. Schulstufe an einem Bundesgymnasium bei Wien, welches als Teil des Schulprofils unter anderem *International Classes* mit Englisch als Arbeitssprache führt. Den SchülerInnen wurden Arithmetik- und Textaufgaben in der Fremdsprache zur Lösung vorgelegt, wobei sie den Bearbeitungsprozess gemäß Laut-Denk-Methode zu verbalisieren hatten. Das Protokoll der gedanklichen Formulierungen bietet Einsicht in den Prozess der Aufgabenbearbeitung und liefert Informationen über die Spezifika der Bedeutungskonstruktion in der Fremdsprache. Zum Vergleich wurde eine Kontrollgruppe von 16 SchülerInnen bei der Bearbeitung der gleichen Aufgaben in der Muttersprache videografiert.

Ausgangspunkt der Datenanalyse bildete der qualitative Grounded-Theory-Ansatz (Glaser und Strauss, 1967), der davon ausgeht, dass hinter den empirischen Indikatoren Konstrukte stehen, aus denen sich allmählich Theorien entwickeln lassen. Allerdings vermochten es die aus der Grounded-Theorie gewonnenen Ergebnisse nicht, die komplexen mentalen

Vorgänge bilingualer LernerInnen während der Aufgabenbearbeitung detailliert zu beschreiben. Um Aufschluss über die Besonderheiten bilingualen Mathematiklernens erlangen zu können, wurden sowohl kognitive Aktivitäten, die der inhaltlich-konzeptuellen Lösung von Textaufgaben zu Grunde liegen, als auch jene, die sich auf die Verwendung von Sprache in dieser Situation beziehen, aus den durch die Laut-Denk-Studie gewonnen Daten analytisch nachvollzogen, interpretativ herausgearbeitet und beschreibbar gemacht. Es bedurfte also eines Analyseinstruments, welches sowohl mathematische als auch sprachbezogene kognitive Prozesse integrativ zu erfassen und zu beschreiben vermochte.

3. Interaktion von Mathematik und Sprache

Zur Schaffung dieses theoretischen Rahmens zur Beschreibung inhaltlich-konzeptueller kognitiver Prozesse beim Lösen von fremdsprachlichen Textaufgaben wurden kognitive Modellierungskreisläufe von Borromeo Ferri (2011) und Blum und Leiß (2005) sowie kognitive Modelle des Lösens von Textaufgaben von Reusser (1997) und Novotna (2004) herangezogen. Um die bei der Aufgabenbearbeitung involvierten kognitiven Prozesse der Sprachrezeption und -produktion zu erfassen, diente Weir und Khalifas (2008) sowie Levelts (1989) Modell als Grundlage. Zwar lieferten die verschiedenen Ansätze theoretische Grundlagen zur Beschreibung kognitiver Vorgänge, doch waren sie für sich genommen unzureichend, um der Komplexität der Bearbeitung mathematischer Textaufgaben mit Englisch als Arbeitssprache gerecht zu werden. Vor allem die Beziehung zwischen mathematik- und sprachspezifischen Prozessen bleibt in den vorliegenden Modellen verborgen. Daher wurden aus den genannten Modellen jene Kernprozesse extrahiert, die sich aus den vorliegenden Daten erschließen lassen, gegebenenfalls modifiziert und ergänzt und darüber hinaus insbesondere die Sprachdimension und die Inhaltsdimension miteinander in Beziehung gesetzt. Der nachfolgende Entwurf ist der Versuch, erstmals die Interaktion von mathematikspezifischen und sprachbezogenen kognitiven Prozessen beim Lösen von Textaufgaben zu modellieren und in einem integrativen Modell zu beschreiben.



Das entworfene Interaktionsmodell bildete die Grundlage zur Analyse der Verbalprotokolle. Zunächst wurden die Transkripte durch die Beschreibung der SchülerInnenhandlungen bereichert um festzustellen, welche Tätigkeit im Zentrum der Aufmerksamkeit lag. Die Transkripte wurden dann in einzelne Units unterteilt, wobei die Begrenzungen multimodal, das heißt durch das Miteinbeziehen verschiedener Äußerungsmodalitäten (linguistische, prosodische, paralinguistische sowie inhalts- und handlungsorientierte) bestimmt wurden. Drittens wurde das genannte Modell herangezogen, um jede einzelne dieser Units in der jeweiligen Dimension zu charakterisieren. Die Synopse der kognitiven Prozesse zeigte sowohl ihre chronologische Abfolge innerhalb der beiden Dimensionen als auch über die Grenzen der Dimensionen hinweg parallele Abläufe, die wiederum Rückschlüsse über die Wechselwirkungen zwischen sprachlichen und inhaltlichen Prozessen ermöglichten.

4. Erste Ergebnisse und Ausblick

Die Analyse von 48 Aufgabenbearbeitungen zeigt, dass bilinguale SchülerInnen durchschnittlich deutlich länger mit der Bearbeitung der Textaufgabe befasst sind und ihre Arbeitsvorgänge eine weit höhere Bearbeitungsintensität aufweisen. Erwartungsgemäß zeigen bilinguale LernerInnen vermehrte Konzentration auf Vorgänge der Sprachrezeption bzw. -produktion. So greifen sie z. B. weitaus öfter auf den Angabetext zurück, und der erfolgreiche Aufbau des mentalen Modells des Textes scheint oft nur unter kognitivem Mehraufwand möglich. In Folge größerer Schwierigkeiten bezüglich Textrezeption kann mathematisch-inhaltliches

Arbeiten sogar behindert werden. Andererseits zeigt sich jedoch, dass die intensive Auseinandersetzung bilingualer LernerInnen mit dem Text der Angabe häufig zu einer Ausweitung des kognitiven Schwerpunkts auf mathematische Vorgänge, insbesondere des Zurechtlegens und des Erstellens des mathematischen Modells, führten. Das der Aufgabe zu Grunde liegende mathematische Modell wird also im Zuge intensiverer Textrezeption erarbeitet. Zudem weitet sich die mentale Aufmerksamkeit der SchülerInnen sowohl im Zuge des Mathematisierens als auch des mathematischen Arbeitens häufiger parallel auf Textproduktionsprozesse aus. Den größten Anteil zeitgleicher kognitiver Aufmerksamkeit auf Sprache und Inhalt scheint der Vorgang des Interpretierens hervorzurufen. Dabei treten vermehrt sowohl Vorgänge bewusster Textproduktion als auch -rezeption auf. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Verwendung der Fremdsprache eine intensivere Auseinandersetzung in beiden Dimensionen, sprachbezogen wie inhaltlich mathematisch, bewirkt.

5. Literatur

Barwell, R. (Hrsg.) (2009): Multilingualism in mathematics classrooms: Global perspectives (Bilingual education and bilingualism). Bristol: Multilingual Matters.

Blum, W. & Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. In: Mathematik Lehren 128. 18-21.

Borromeo Ferri, R. (2011): Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht. 1st edn. Wiesbaden: Vieweg+Teubner (GWV).

Clarkson, P. (2006): Australian Vietnamese students learning mathematics: High ability bilinguals and their use of their languages. In: Educational studies in mathematics 64(2), 191-215.

Dawe, L. (1983): Bilingualism and mathematics reasoning in English as a second language. In: Educational Studies in Mathematics 14(4), 325-353.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967): The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research. New York: Aldine de Gruyter.

Levelt, W. J. M. (1998): Speaking: From intention to articulation (ACL-MIT Press series in natural-language processing), 5th edn. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Novotna, J. (2004): Modelling the Word Problem Solving Process. An Instrument to Determine Places Suitable for Teacher's Intervention. In H.-W. Henn (ed.): Applications and modelling in mathematics education: Study conference in Dortmund, 2004; pre-conference vol. (ICMI study 14), 193–198. Dortmund: Univ. Dep. of Mathematics IEEM.

Reusser, K. (1997): Erwerb mathematischer Kompetenzen: Literaturüberblick. Mathematische Textaufgaben als Unterrichts- und Forschungsgegenstand. In F. E. Weinert & A. Helmke (eds.): Entwicklung im Grundschulalter, 141–155. Weinheim: Beltz Psychologie-Verl.-Union.

Weir, C. & Khalifa, H. (2008): A cognitive processing approach towards defining reading comprehension. Cambridge ESOL: Research notes (31). 2–10.

Carolina STAIGER, Weingarten

Lernprozesse anregen mithilfe von gestuftem elaboriertem Feedback. Entwicklung und Evaluierung einer Feedbackhierarchie im Bereich der Bruchrechnung.

Welche Rückmeldungen helfen Lernenden, Aufgaben im Bereich der Bruchrechnung zu bewältigen, die für sie zunächst ein Problem darstellen? Und wie lassen sich diese im Sinne von gestuften Hilfen hierarchisieren? Im Rahmen dieser Fragestellungen wurde auf Grundlage einer theoriebasierten Auseinandersetzung mit Fehlvorstellungen, (meta-)kognitiven Strategien, Vorzügen diverser Darstellungsformen sowie ausgewählter Feedbackstudien aufgabenadäquates elaboriertes Feedback entwickelt, kategorisiert und im Sinne des Prinzips der minimalen Hilfe nach Unterstützungsgrad hierarchisiert. Die hier erarbeitete Feedbackhierarchie soll als Testinstrument im Rahmen eines dynamischen Testverfahrens zur Abschätzung des Leistungspotentials im Bereich der Bruchrechnung (5./6. Klasse) eingesetzt werden.

1. Dynamisches Testen

Die Kernidee dynamischer Testverfahren geht auf Wygotski (1964) zurück. Nach ihm soll für die Abschätzung der Leistungsfähigkeit eines Individuums neben dem aktuellen Entwicklungsstand (*Zone der aktuellen Entwicklung*) zudem dessen Entwicklungspotenz (*Zone der proximalen Entwicklung*) erfasst werden, also die Fähigkeit einer Person, unter förderlichen Bedingungen Leistungsverbesserungen zu erzielen (Dörfler et al., 2008). Laut Wygotski ist somit eine zuverlässige Diagnose der Leistungsfähigkeit nur möglich, wenn neben dem Leistungsstand auch das Leistungspotential eines Lernenden[1] in den Blick genommen wird. Als förderliche Bedingungen soll im hier geplanten Forschungsvorhaben elaboriertes Feedback eingesetzt werden, welches u. a. strategische, fehlerspezifische und inhaltliche Hilfen beinhalten kann, die dem Lernenden bei der Lösung einer Aufgabe unterstützen und verständnisfördernd wirken sollen. Ein Schüler, der eine Aufgabe zunächst nicht allein bewältigen kann, hat eben dann die Zone der nächsten Entwicklung erreicht, wenn er diese mit Unterstützung lösen kann. Das Ausmaß an Potential soll genauer über den Grad, in dem der Lernende vom elaborierten Feedback profitiert, ermessen werden. Zudem

[1] Aufgrund der Vereinfachung u. besseren Lesbarkeit, wird auf die Nennung beider Geschlechter verzichtet u. nur die männliche Form benutzt, es sind jedoch stets beide Geschlechter gemeint.

soll bei der Bewertung differenziert werden, welche Unterstützungsstufe er benötigt, um zum Ziel zu kommen. (Sternberg & Grigorenko, 2002) Zur Umsetzung dieses Konzepts, wurde theoriebasiert eine Feedbackhierarchie entwickelt, die sich aus mäßigen bis starken Hilfen zusammensetzt. Diese soll nach einigen Begriffsklärungen dargestellt werden.

2. Feedback zur Schaffung förderlicher Bedingungen

Unter dem Begriff Feedback können im Kontext von Lehr- und Lernsituationen allgemein Informationen verstanden werden, die einem Lernenden während oder nach der Bearbeitung einer Aufgabe z.B. von einem Erwachsenen, fähigeren Peer oder einem computergestützten tutoriellen System angeboten werden. Dessen Ziel ist es, lösungsförderlich für die aktuelle oder eine folgende Aufgabe zu sein. (Narciss, 2006)
Hattie (2003) beschreibt es zudem als leistungsbezogene Information zu einer Aufgabe, welche die Lücke zwischen dem, was verstanden wurde und dem, was verstanden werden soll, schließt. Da der Schwerpunkt auf dem Informationsangebot liegt, spricht man hier von informativem Feedback.

Innerhalb dieses Begriffsverständnisses gibt es eine Vielzahl verschiedenster Feedbackarten. Zu den allgemein weitverbreitetsten und zentralen Typen dieser Arbeit gehören:

(1) Knowledge Of Result (KOR), das dem Lernenden mitteilt, ob seine Antwort richtig oder falsch ist; **(2) Knowlegde Of Correct Result (KCR)**, das dem Schüler nach Beantwortung der Aufgabe die Lösung präsentiert und **(3) Elaboriertes Feedback (EF),** das KOR oder KCR beinhaltet und zusätzlich Informationen bzw. Hinweise anbietet, die der Fehlerkorrektur dienen oder zur Lösung künftiger Aufgaben beitragen. Im Speziellen können innerhalb dessen z. B. fehlerspezifische Korrekturhinweise oder Hinweise auf (meta-)kognitive Strategien angeboten werden, die verständnisfördernd wirken sollen. (Narciss, 2006; Shute, 2008)

Da im geplanten Verfahren die Lernenden effektiv bei der Aufgabenbearbeitung unterstützt werden sollen, wird nicht allein die Rückmeldung richtig/falsch ausreichen, sondern das jeweilige Feedback muss zusätzlich Hilfestellungen beinhalten. Diesen Anforderungen kann lediglich das EF gerecht werden, das verspricht, lösungsförderliche Denkprozesse zu aktivieren. Hinweise darauf, dass KOR allein wenig zur Zielerreichung beiträgt, liefert bspw. die Meta-Analyse von Bangert-Drowns u. a. (1991). Sie ergab, dass KOR, nahezu genauso wenig Wirkung habe, wie kein Feedback. Im Gegensatz dazu kamen sie zur Erkenntnis, dass Feedbackarten, die mindestens die korrekte Antwort (KCR, EF) beinhalten, im Mittel eine höhere Effektstärke haben als KOR und somit effektives Feedback eine

Fehlerkorrektur beinhalten müsse. Andere Studien zeigten weiter die Überlegenheit des EF gegenüber dem KCR auf. In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeiten von Farquhar (1994) und Huth (2004) verwiesen.

3. Die theoriebasiert entwickelte Feedbackhierarchie

Der Einsatz des gestuften EF erfolgt im Sinne des *Train-Within-Test-Formats*. Direkt nach der Bearbeitung einer Aufgabe erfolgt ein Feedback. Im Falle einer fehlerhaften Antwort setzt eine Feedbackschleife ein, die nach jedem weiteren erfolglosen Versuch Hinweise oder Hilfen auf einem ansteigenden Unterstützungsgrad präsentiert. Die Feedbackhierarchie sieht zunächst den Einsatz von KOR vor. Kann der Lernende die Aufgabe nicht allein lösen, so wird er aufgefordert einen erneuten Versuch vorzunehmen: „Deine Antwort ist leider nicht richtig. Versuche es noch einmal.“ Dies greift auch die Empfehlung aus der Untersuchung von VanLehn (2003) aus dem Bereich des *Tutoring* auf, nämlich Lernende anfangs bewusst auf Schwierigkeiten stoßen zu lassen, um so Denkprozesse stärker zu aktivieren. Der Schüler hat dabei die Chance, seinen Lösungsprozess noch einmal zu überdenken und/oder eigene Fehler selbst zu entdecken. Folgt ein weiterer vergeblicher Versuch, bekommt er EF mit einem geringen Unterstützungsgrad, sprich eine strategische Hilfestellung. Diese kann z.B. ein Impuls zur Informationsverarbeitung der Aufgabe sein: „Was ist gegeben/gesucht?“ Findet der Schüler auch danach keine richtige Antwort, so wird er durch Fragen oder Aufforderungen dazu angeregt sich mit der Bedeutung z.B. gegebener Begriffe auseinanderzusetzen: „Versuche zu erklären, was ein Drittel bedeutet.“ Diese Impulse dienen der Aktivierung bestehender Grundvorstellungen, die für den weiteren Lösungsprozess förderlich sein können. Unterstützt werden kann dies (auf einer nachfolgenden Stufe) durch die Aufforderung es mithilfe einer Veranschaulichung zu versuchen („Versuche es mithilfe einer Veranschaulichung zu erklären.“) oder weiter durch das Vorlegen einer bildlichen Darstellung (z.B. Bruchstreifen). Das zuvor auf rein gedanklicher Ebene nicht zu Bewältigende soll somit in seiner kognitiv wahrgenommenen Komplexität reduziert werden. Können auch diese Anregungen nicht helfen, so werden stärker inhaltliche Hilfen im Sinne Zechs (2002) eingesetzt, die z.B. den ersten Schritt im Lösungsprozess darlegen oder auf Regeln und Begriffe verweisen können. Je nach Erfolg des EF erhält der Lernende eine niveauangepasste Folgeaufgabe.

4. Ausblick

Ein nächster Schritt im Arbeitsprozess ist die interviewgestützte Evaluierung, der hier dargestellten Feedbackhierarchie. Von Interesse ist dabei, ob das EF eine Wirkung auf die Aufgabenbewältigung der Lernenden hat und wenn ja, welche Hilfen sich innerhalb des EF als (besonders) wirksam erweisen. Zudem wird der Fragestellung nachgegangen, inwieweit sich die entwickelte Feedbackhierarchie empirisch ausdifferenzieren lässt.

Während der Interviews soll zusätzlich zur Offenlegung von Denkprozessen die Methode des *Lauten Denkens* eingesetzt werden. Weiter wird im Voraus ein Bruchrechentest zur Ermittlung des Leistungsstandes eingesetzt. Dadurch sollen die Teilthemen aufgedeckt werden, die der Lernende noch nicht kann. Zu diesen bekommt er im Anschluss gezielt feedbackgestützte Aufgaben (wie oben beschrieben). Ein genaueres Vorgehen wird noch ausgearbeitet und an anderer Stelle darüber berichtet.

Literatur

Bangert-Drowns, R.; Kulik, Ch.-L.; Kulik, J. & Morgan, M. (1991): The instructional Effect of Feedback in Test-like Events. Review of Educational Research, 61 (2), 213-238.

Dörfler, T. & Dislich, F. (2008): Leistungsdiagnostik. Klinische Diagnostik und Evaluation. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1. Jg., 61-83.

Farquhar, J. D. & Regian, J. W. (1994): The Type and Timing of Feedback within an Intelligent Console-Operations Tutor. Paper, Human Factors and Ergonomics Society 38th Annual Meeting, 1225-1228.

Hattie, J. (2003): Formative and summative interpretations of assessment information. Paper, University of Auckland.

Huth, K. (2004): Entwicklung und Evaluation von fehlerspezifischem informativem tutoriellem Feedback (ITF) für die schriftliche Subtraktion. Dissertation, Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Dresden.

Narciss, S. (2006): Informatives tutorielles Feedback. Münster u. a.: Waxmann.

Shute, V. J. (2008): Focus on formative feedback. In. Review Of Educational Research, 78 (1), 153-189.

Sternberg, R. & Grigorenko, E. (2002): Dynamic Testing. The Nature and measurement of learning Potential. Cambridge University Press.

VanLehn, K.; Siler, S., Murray, C.; Yamauchi, T. & Baggett, W. (2003): Why do only some events cause learning during human tutoring? Cognition and Instruction. 21 (3), 209-249.

Wygotski, L. S. (1964): Denken und Sprechen. Berlin: Akademie-Verlag.

Zech, F. (2002): Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren u. Lernen von Mathematik (10. Aufl.). Weinheim/Basel: Beltz.

Judith STANJA, Duisburg-Essen

Überlegungen zur Analyse elementaren stochastischen Denkens aus semiotischer Perspektive

1. Einleitung

Um die Komplexität stochastischer Begriffe repräsentieren zu können ist eine Vielfalt an semiotischen Darstellungsmitteln unerlässlich. Grundschulkindern stehen solche Mittel nur eingeschränkt zur Verfügung um stochastische Situationen beschreiben und verstehen zu können. Es stellt sich die Frage: Wie hängt die Verfügbarkeit und der (kompetente) Umgang mit bereitgestellten Mitteln mit dem Verstehen und Lernen stochastischer Konzepte zusammen? Es könnte sein, dass Kinder ein gutes Verständnis haben, es aber nicht mitteilen können. Zudem wäre denkbar, dass die Beschränkung der Mittel auch Einfluss auf die Konstruktion neuer Konzepte hat. In jedem Fall müssen die Einschränkungen bezüglich der Mittel berücksichtigt werden, wenn man (entstehendes) stochastisches Denken von Grundschulkindern untersuchen will. Im Rahmen einer empirischen Studie wurden Kinder (3. Klasse) ohne oder mit geringer Vorerfahrung in Stochastik interviewt, es folgte eine Intervention mit dem Schwerpunkt auf stochastischen Vorhersagen und im Anschluss eine Erhebung von Nachinterviews. Der Fokus wird auf das Kind und seine Nutzungsweisen und Interpretationen bereitgestellter Darstellungsmittel gelegt. Die videographierten und transkribierten Interviews sind die zentralen Forschungsdaten der Untersuchung. In diesem Beitrag wird der semiotische Ansatz Duvals vorgestellt und seine Anwendbarkeit zur Analyse von elementarem stochastischen Verstehen diskutiert.

2. Verstehen analysieren

Häufig wird Verstehen in der Stochastik „konzeptorientiert“ (aus Sicht der Mathematik) beschrieben und analysiert. D.h. wenn ein Kind Verständnisprobleme hat, dann wird dies mit der Komplexität der Konzepte erklärt. Duval (2011) kritisiert diese Vorgehensweise zur Beschreibung von Verstehen und Verständnisproblemen in Mathematik, da sie ausschließlich aufgabenspezifisch Antworten liefern kann und dazu tendiert Verständnisprobleme ausschließlich auf die Konzepte (und ihre Komplexität) zurückzuführen. Er unterbreitet den Vorschlag einer epistemologisch orientierten Charakterisierung, die der Besonderheit des Zugangs zu Objekten der Mathematik und mathematischer Arbeitsweisen und Denkweisen Rechnung trägt (Duval 2011). Für mathematisches

Denken sind semiotische Repräsentationen von großer Bedeutung. Sie dienen dazu mathematische Objekte zu bezeichnen, mit ihnen zu arbeiten und über sie zu kommunizieren (Vgl. auch Hoffmann 2003). Aus Sicht der Lernenden ergibt sich gewissermaßen ein Paradox bezüglich des Zugangs zu mathematischen Objekten: Nur durch Repräsentationen sind mathematische Objekte zugänglich. Aber diese dürfen nicht mit den mathematischen Objekten identifiziert werden (Duval 2006). In der Mathematik gibt es eine natürliche Vielfalt an semiotischen Repräsentationssystemen. Die verschiedenen Repräsentationen bieten verschiedene Möglichkeiten der Transformation. **Treatments** betreffen solche Transformationen, die innerhalb eines Registers vorgenommen werden. Es kann sein, dass ein Treatment ohne Rückgriff auf eine mathematische Eigenschaft durchgeführt wird. Daher haben für das Verstehen und für mathematisches Denken sogenannte **Conversionen** eine größere Bedeutung, bei der das Register gewechselt wird. Durch den Wechsel ändern sich die Eigenschaften des Objektes, die deutlich gemacht werden können. Es ist zu beachten, dass sich bei Vertauschung der Richtung der Conversion (Ausgangs- und Zielregister) die Anforderungen ändern können. Zum Beispiel kann die Frage nach einem Kreisel, bei dem lila wahrscheinlicher ist als orange in vielfältiger Weise beantwortet werden. Hierbei handelt es sich um eine nicht-kongruente Conversion, d.h. eine 1-1-Zuordnung zwischen allen bedeutungsvollen Komponenten ist nicht möglich, da die Wahl der bedeutungsvollen Komponenten der Zielrepräsentation nicht eindeutig ist. Für die relevanten Komponenten, die abgebildet werden können, ändert sich die Struktur (Abb. 1).

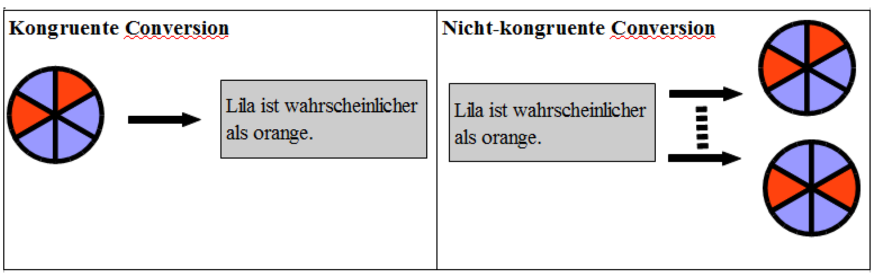


Abb.1 Kongruente und Nicht-Kongruente Conversion (Ausgangs- und Zielregister vertauscht)

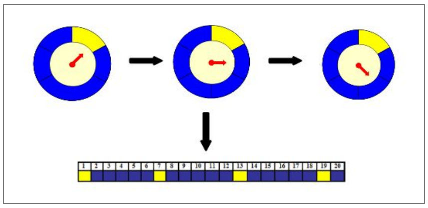
Der umgekehrte Fall – dass ausgehend von einem zweifarbigen Kreisel die richtige Aussage gefunden werden muss – ist eine kongruente Conversion. Nach Duval sind es gerade nicht-kongruente Conversionen, die für viele

Schüler eine unüberwindbare Barriere darstellen. Für Lernende besteht die Schwierigkeit beim Wechsel der Repräsentationen darin das Gleiche im Verschiedenen zu sehen und von Anderem zu unterscheiden. Das ist insbesondere dann relevant, wenn es um die Einführung neuer Konzepte geht. Verstehen setzt die Koordination von Registern voraus (Duval 2006, S.115). Die Stochastik nutzt Repräsentationen, die auch in anderen mathematischen Gebieten vorkommen: Bruchzahldarstellungen oder Flächen um z.B. Wahrscheinlichkeiten zu repräsentieren. Darüber hinaus können noch Listen, Diagramme oder Tabellen hinzukommen. Für die Mitteilung einer anderen Qualität (Stichwort „Unsicherheit“) von stochastischen Vorhersagen und die Angabe von Wahrscheinlichkeitsvergleichen stehen Grundschülern ausschließlich sprachliche Mittel (in Verbindung mit Listen/Diagrammen) zur Verfügung. Die Verwendung von Repräsentationen aus anderen mathematischen Gebieten birgt bei einigen Problemstellungen die Gefahr, dass Kinder Ersatzstrategien für die Lösung nutzen können. Um das stochastische Verstehen der Kinder zu erkunden, wurde versucht für die Interviews Aufgaben zu entwerfen, die keine Ersatzstrategien zulassen.

3. Eine Vorhersage machen und begründen

Soll ein Kind eine Vorhersage mit Hilfe einer Liste machen, dann werden als Repräsentationen der Kreisel, die Liste und sprachliche Ausdrücke benötigt und diese müssen aufeinander bezogen werden. Beim Kreisel sind die Anzahl der Farben, der Felder sowie die Größe der Felder relevant. Sprache ermöglicht die Unsicherheit des Ausgangs zu verdeutlichen, eine begründete Einordnung der Liste in eine Reihe von Listen vorzunehmen und den Bezug zum Kreisel zu herauszustellen. Die Verwendung der Liste kann die Mitteilung von Ideen erleichtern indem sie Zeigehandlungen in Kombination mit sprachlichen Erklärungen ermöglicht. Wie gehen Kinder tatsächlich mit den vorhandenen Repräsentationen um? Das folgende Beispiel von Andras zeigt, dass Kinder diese nicht unbedingt in derselben Weise nutzen wie Experten. Andras glaubt, dass der Ausgang des Experiments ganz sicher wie in Abbildung 2 dargestellt aussieht. In seiner Begründung wird deutlich, dass er die für ihn sichere Abfolge von Zeigerpositionen des Kreisels eindeutig den Positionen in der Liste (Abfolge) zuordnet. Andras' Koordination wird in seinen sprachlichen

Äußerungen in Verbindung mit Gesten deutlich (siehe Abb. 2).



„Ich habe mir (*räuspert sich*) so überlegt, dass der (*schaut auf den Kreisel*) dann immer einen weitergeht (*schaut den Interviewer an*).“

„Hier, (*zieht den Kreisel zu sich*) das ist ja, hier stand der auf gelb (*dreht am Kreisel*). Geht der auf blau (*schaut den Interviewer an*) und dann die nächste Runde (*macht kreisende Handbewegung über dem Kreisel und schiebt den Pfeil des Kreisels auf das nächste blaue Feld*) denke ich wird der auf, geht der wieder auf blau.”

„Wieder.”

„Wieder, wieder, wieder (*dreht den Pfeil immer ein Farbfeld weiter*) und dann wieder gelb.”

Abb.2 Darstellung der Koordination von Andras

Für Andras scheinen einzelne Positionen des Zeigers beim Kreisel relevant zu sein. Die Farben, die er in die Liste eingetragen hat ergeben sich aus den gedachten Zeigerpositionen. Es lassen sich keine Ausdrücke für Beziehungen zwischen den Anzahlen gelber und blauer Felder auf dem Kreisel finden. Auch sprachliche Ausdrücke für Unsicherheit, Wahrscheinlichkeiten usw. finden sich hier nicht.

4. Diskussion

Duvals Ansatz bietet Begrifflichkeiten für eine präzise Beschreibung dessen, was von den Kindern bei der Beantwortung von Fragen im Interview gefordert wird. Darüber hinaus ließen sich durch eine Modifikation von „Treatment“ und „Conversion“ genaue Beschreibungen dazu anfertigen, wie die Kinder mit den bereitgestellten Repräsentationen umgehen und diese koordinieren. Eine solche genaue Beschreibung kann dann zur Rekonstruktion von elementaren Verstehen und von möglichen stochastischen (Prä-)Konzepten dienen. Sie könnte eine Möglichkeit eröffnen, die Komplexität des Lernens von Stochastik aus einer semiotischen Perspektive heraus zu beleuchten. Das Aufdecken von Schwierigkeiten bei der Koordination von Repräsentationen kann eine Grundlage für das Entwerfen möglicher Lerngelegenheiten bieten.

Literatur

Duval, R. (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131.

Duval, R. (2011): Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l’apprentissage des mathématiques. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Hoffmann, M. H. G. (Hrsg.). (2003). Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven. Hildesheim, Franzbecker.

Tobias STECKEN, Münster

Diagrammkompetenz von Grundschülern – Eine empirische Erhebung

1. Problembeschreibung

Im Kontext des frühen schulisch-mathematischen Lernens sowie in internationalen Vergleichsstudien, wie beispielsweise der PISA-Studie oder der TIMS/III-Studie, kommt der Fähigkeit flexibel mit Achsendiagrammen umgehen zu können ein immer größer werdender Stellenwert zu [vgl. MSW NRW (2008), S. 66; MSW NRW (2007), S. 18, 22; OECD (2010), S. 87; Baumert et al. (2001), S. 14]. Stark im Kontrast zur Bedeutung des Diagrammverständnisses steht der aktuelle Forschungsstand der deutschen Mathematikdidaktik [vgl. u.a. Lachmayer (2008), S. 166].

2. Überblick über das Projekt

Aus diesem Anlass wurde ein Diagrammverständnistest mit dem Schwerpunkt „Säulendiagramm" entwickelt, mit dem sich das Konstrukt Diagrammkompetenz messen lässt. Zielgruppe des Tests sind Viert- und Fünftklässler. Die Entwicklung des Tests erstreckte sich über knapp ein Jahr (11/2010 – 9/2011) und bestand aus zwei Pre-Test-Phasen und einer Haupterhebung. In der ersten Pre-Test-Phase wurden 56 Items, auf vier Tests verteilt und inhaltlich sowie empirisch hinsichtlich verschiedener Kriterien selektiert, modifiziert und in einen 45-minütigen Test integriert.

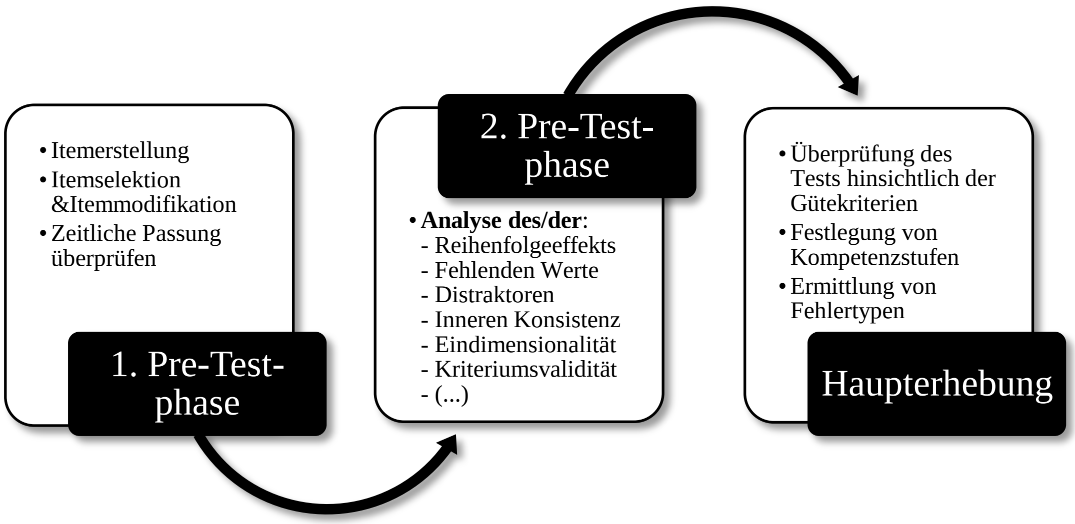


Abbildung 1: Überblick über die Testphasen

Die Itemkonstruktion orientierte sich dabei an einem neu entwickelten mathematisch ausgerichteten Diagrammkompetenzmodell, auf dessen Erörterung an dieser Stelle mit Verweis auf die 2012 erscheinende Dissertation verzichtet werden muss. In der zweiten Pre-Test-Phase wurde der 25 Items enthaltende Test anhand einer umfassenden Stichprobe (n = 1007) pilotiert, indem er statistisch überprüft und erneut überarbeitet wurde. Daran anschließend folgte die Haupterhebungsphase im September 2011, in der dieser in seiner Endfassung anhand einer für NRW repräsentativen Stichprobe ausgewertet und hinsichtlich der Hauptgütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität überprüft wurde [vgl. Bühner (2011), S. 58f]. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Zusammensetzungen der einzelnen Stichproben.

Testphase	Stichprobenumfang	Schulformen
Pre-Test-Phase I	800 SuS	7 GS, 4 RS, 7 Gym
Pre-Test-Phase II	1007 SuS	21 GS
Haupterhebung	2690 SuS	15 HS, 14 RS, 7 GeS, 9 Gym

Tabelle 1: Überblick über die Stichprobenzusammensetzungen

Im Folgenden sollen Einblicke in die Untersuchungen der zweiten Pre-Test-Phase sowie in die Ergebnisse der Hauterhebung gegeben werden. Es werden exemplarisch die Analysen der Antwortmöglichkeiten der Multiple-Choice-Aufgaben sowie ein diagnostizierter Fehlertyp vorgestellt.

3. Analyse der Antwortmöglichkeiten

In der zweiten Pre-Test-Phase wurden die neun Items, die in Multiple-Choice-Form gestellt wurden statistisch überprüft. Hierzu wurden u.a. die Trennschärfen der Antwortmöglichkeiten analysiert [vgl. Lienert, Raatz (1998), S. 124f]. Die Anzahl dieser war bei allen Aufgaben vier, von denen jeweils eine richtig war. Mathematisch betrachtet ist die Trennschärfe die Korrelation eines Items mit dem Summenwert der übrigen Items einer Skala, weshalb sie zwischen Minus Eins und Eins liegt [vgl. Bühner (2011), S. 171].

> „Der Begriff ‚Trennschärfe‘ ist so zu verstehen, dass Personen, die im Gesamtergebnis einen hohen Wert erreichen, auf einem trennscharfen Einzelitem ebenfalls eine hohe Punktzahl aufweisen. Umgekehrtes gilt für Personen mit niedrigem Testergebnis. Nach diesem Verständnis lässt sich an einem trennscharfen Einzelitem bereits ablesen, welche Personen […] hohe oder niedrige Ausprägungen besitzen. Beide Gruppen werden durch das Item also gut voneinander ‚getrennt‘.“ [Bortz, Döring (2006), S. 219]

Die richtige Antwortmöglichkeit sollte somit eine positive Trennschärfe größer als 0,25 aufweisen, während die falschen Möglichkeiten eine negative Trennschärfe besitzen sollten [vgl. Lienert, Raatz (1998), S. 124f]. In Tabelle 2 sind die zufriedenstellenden Ergebnisse der Items präsentiert. Dabei sind die fett gekennzeichneten Antwortmöglichkeiten die richtigen.

Aufgabe	Möglichkeit 1	Möglichkeit 2	Möglichkeit 3	Möglichkeit 4
4	-0,319	**0,381**	-0,035	-0,088
5	-0,175	-0,124	**0,354**	-0,120
6	-0,092	-0,062	-0,255	**0,279**
7	**0,335**	-0,179	-0,159	-0,056
8	-0,241	-0,084	-0,231	**0,463**
10	**0,374**	-0,184	-0,129	-0,123
11	-0,138	-0,142	**0,308**	-0,143
12	-0,188	**0,456**	-0,156	-0,167
13	-0,133	-0,074	**0,267**	-0,030

Tabelle 2: Überblick über die Trennschärfen der Antwortmöglichkeiten

4. Diagnostizierter Fehlertyp

In der Haupterhebung konnte eine große Anzahl an Fehlermustern in verschiedenen Bereichen diagnostiziert werden. Ein häufig auftretender Fehler war der Fehlertyp „ungleichmäßige Skalierung“.

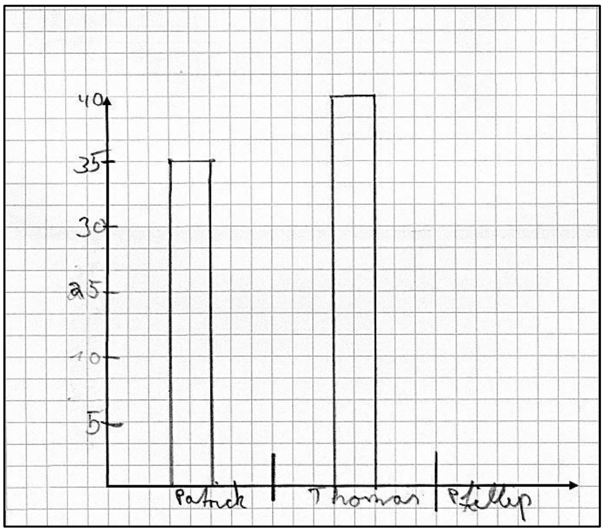


Abbildung 2: Fehlertyp „ungleichmäßige Skalierung“

Etwa 25% der Schüler unterlief beim Konstruieren eines Diagramms dieser Fehler. Wie in Abbildung 2 zu erkennen ist, zeichneten die Schüler die Skala mit ungleichmäßigen Abständen.

5. Fazit

Der vom Verfasser entwickelte Diagrammverständnistest mit 25 Aufgaben ist ein statistisch valides und effizientes Instrument zur Defizit- respektive Fehleranalyse. Für die Beurteilung der Schülerfähigkeiten ist die Möglichkeit bedeutsam, dass mithilfe der probabilistischen Testtheorie Kompetenzstufen entwickelt werden konnten, denen die Leistungen der Schüler zugeordnet werden können [vgl. Lüders, Wissinger (2007), S. 79]. Ziel des weiteren Projekts ist es, ein Testheft zu erstellen, so dass der Test unabhängig vom Testleiter im Unterricht sowie in weiterführenden wissenschaftlichen Untersuchungen eingesetzt werden kann.

Literatur

Baumert, J., Klieme, E., Bos, W. (2001): TIMSS-Ergebnisse zu Unterricht, Lehrerhandeln und mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung. In: Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.): TIMSS - Impulse für Schule und Unterricht. Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Videodokumente. Bonn, BMBF Publik.

Bortz, J., Döring, N. (2006): Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler. Heidelberg, Springer.

Bühner, M. (2011). Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion. München, Pearson Studium.

Lachmayer, S. (2008): Entwicklung und Überprüfung eines Strukturmodells der Diagrammkompetenz für den Biologieunterricht. Doctoral dissertation. Kiel, Christian-Albrechts-Universität.

Lienert, G. A., Raatz, U. (1998). Testaufbau und Testanalyse Weinheim, Beltz.

Lüders, M., Wissinger, J (2007): Forschung zur Lehrerbildung – Kompetenzentwicklung und Programmevalutation. Münster, Waxmann.

MSW NRW (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen) (2008): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in NRW. Deutsch, Sachunterricht, Mathematik, Englisch, Musik, Kunst, Sport, Evangelische Religionslehre, Katholische Religionslehre. Frechen, Ritterbach Verlag.

MSW NRW (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen) (2007): Kernlehrplan Mathematik für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen, Ritterbach Verlag.

OECD (2010): PISA 2009 Ergebnisse: Was Schülerinnen und Schüler wissen und können. Schülerleistungen in Lesekompetenzen, Mathematik und Naturwissenschaften (Band 1). Bielefeld, Bertelsmann Verlag.

Martin STEIN, Münster, Kathrin WINTER, Münster

Der Transfer zwischen Wissenschaft und Praxis verläuft in beide Richtungen: Das Projekt Mathe-Meister

1. Problemlage

Interessentinnen und Interessenten an Meisterlehrgängen des Handwerks weisen vor Lehrgangsbeginn oft große Defizite im Bereich der elementaren Schulmathematik auf, obwohl mathematische Grundkenntnisse eine unverzichtbare Grundlage in allen Bereichen der Meisterqualifizierung sind. Ebenso sind viele Personen aus dieser Zielgruppe nicht oder nur schlecht in der Lage, aus längeren mathematikhaltigen Texten die für die Lösung einer Aufgabe benötigten Zahleninformationen zu entnehmen oder Folgerungen aus aufbereitetem Datenmaterial zu ziehen. Diese Defizite sind fatal, denn Mathematik – sowohl im Bereich des Rechnens als auch im Bereich des Verständnisses zahlen- und mathematikhaltiger Texte – stellt eine unverzichtbare Grundlage in allen Bereichen der Meisterqualifizierung dar. Diese Problemlage führte zu einem von Prof. Stein im Rahmen der BMBF-Ausschreibung eQualification eingereichten Antrag, der 2007 bewilligt wurde. In Verfolgung der Antragsziele hat das Team von Mathe-Meister bis zum Projektende im Juni 2011

1. gemeinsam mit mehreren Industrie- und Handelskammern sowie Handwerkskammern Tests entwickelt, mit deren Hilfe Interessenten an Meisterlehrgängen überprüfen können, ob sie die Kenntnisse in Mathematik besitzen, die sie für einen erfolgreichen Einstieg in einen Meisterlehrgang benötigen;
2. eine Übungs-CD entwickelt, mit deren Hilfe das verständnisvolle Lesen zahlen- und mathematikhaltiger Texte geübt werden kann.

Über die im Antrag beschriebenen Ziele hinaus wurde einem weiteren Bedürfnis der Praxis folgend

3. ein Test zur Messung des mathematischen Textverständnisses entwickelt.

Die folgenden Ausführungen zeigen, dass sich aus den Anforderungen der Praxis Fragestellungen ergeben können, deren Beantwortung genuin wissenschaftlicher Methoden bedarf, deren Entwicklung und Ergebnisse auch für die wissenschaftliche Community bedeutsam sind. Es kann also guten Gewissens postuliert werden, dass die im Projekt Mathe-Meister vorgelegten wissenschaftlichen Ergebnisse weit über eine reine Auftragsforschung hinausgehen. Zugleich hat diese Forschung aber die aus der Praxis gemeldeten Bedürfnisse so weit im Auge, dass die gewonnenen Ergebnisse in relevante und in der Praxis einsetzbare Produkte umgewandelt werden können. Die im Folgenden vorgestellten Umsetzungen der zwei sich aus den obigen Ausführungen ergebenden Zielsetzungen des im Rahmen der BMBF-Ausschreibung eQualification eingereichten Antrags folgen der Gliederung

(1) Bedarfslage der Praxis

$\updownarrow$

(2) Wissenschaftlicher Ansatz

$\updownarrow$

(3) Wissenschaftliche Ergebnisse

$\updownarrow$

(4) Ergebnisse für die Praxis

Auch wenn der nachfolgende Text notwendigerweise einen linearen Aufbau verfolgt, sollte doch klar sein, dass – wie hier durch die Pfeile angedeutet – zwischen den einzelnen Stufen dieses Prozesses eine stete Wechselbeziehung herrscht.

Die sich ergebende dritte Zielsetzung, die Entwicklung eines Tests zur Erfassung des mathematischen Textverständnisses, wurde von R. Jordan im Rahmen seiner Dissertation ausführlich behandelt (Jordan 2011). Das Vorgehen bei der Umsetzung dieser Zielsetzung kann dort nachgelesen werden.

2. Zielsetzung I: Online-Assessment-Tests

Bedarfslage der Praxis

Im Projekt sollten für verschiedene Berufsfelder internetbasierte Tests entwickelt werden, mit deren Hilfe Interessenten/innen an Meisterlehrgängen prüfen können, ob sie die benötigten Basiskenntnisse in Mathematik besitzen. Bei Defiziten soll die Software Hilfestellungen zur Lösung der gestellten Aufgaben liefern und Hinweise zu geeigneten Fortbildungsmaterialien geben.

Wissenschaftlicher Ansatz

Die Entwicklung und Auswahl der Aufgaben für die internetbasierten Tests erfolgte in mehreren Phasen. Zunächst wurden Aufgabenpools mithilfe empirischer Daten zusammengestellt. Auf der Grundlage von Expertenbefragungen wurde zunächst ein Satz von ca. 250 Aufgaben entwickelt, der dann mithilfe von Faktoranalysen auf einen Pool von insgesamt 45 Aufgaben reduziert wurde, die die mathematischen Basiskompetenzen in verschiedenen Gruppen zusammenfassen (Bruchrechnung, Algebra, Dreisatz/Prozentrechnung …). Diese Untergruppen wurden mithilfe des Raschmodells validiert.

Wissenschaftliche Ergebnisse

Anschließend wurden besonders aussagekräftige Aufgaben auf Basis statistischer Auswertungen sowie inhaltlicher und diagnostischer Argumente ermittelt. Für diese Aufgaben wurden Antwortalternativen mit diagnostischem Potential entwickelt. Die wissenschaftlichen Grundlagen dieser Arbeit wurden in der mit *summa cum laude* bewerteten Dissertation von K. Winter zusammengefasst (Winter 2011).

Ergebnisse für die Praxis

Die daraus hervorgegangen Multiple-Choice-Aufgaben wurden in eine Online-Testplattform eingebettet, die sowohl Probandenantworten fehleranalytisch ausliest als auch ein Feedback über Defizite liefert. Diese Plattform ist Mathe-Meister.de. Dort kann der Nutzer / die Nutzerin nach Eingabe einer TAN ein differenziertes Testergebnis abrufen. Wurde die TAN von einer Kammer zur Verfügung gestellt, wird auf diese bei den Förderhinweisen hingewiesen. Das Testergebnis enthält ganz erheblich mehr als nur Hinweise über richtige und falsche Lösungen. Der Nutzer / die Nutzerin wird durch rot erscheinende Reiter auf die problematischen Themenbereiche hingewiesen und kann dort direkt ausführliche Hinweise auf Lehrmaterialien finden. Unter dem Button "Musterlösung" wird jede Aufgabe vorgerechnet und erklärt. Unter dem Button "Beispiel" wird für jede einzelne Aufgabe ein Beispiel aus einem Lehrbuch oder aus Ausbildungsmaterialien gegeben, das sich ganz spezifisch auf den am Anfang gewählten Beruf bezieht.

3. Zielsetzung II: Entwicklung einer CD zur Förderung des mathematischen Textverständnisses

Bedarfslage der Praxis

Angehende Meister/innen werden in der Ausbildung und in der Prüfung mit langen Informationstexten konfrontiert, die neben relevantem Datenmaterial – manchmal aufbereitet zu Tabellen oder Diagrammen – auch mancherlei irrelevante Informationen enthalten. Viele Meisterschüler/innen haben Probleme damit, einerseits die relevanten Informationen herauszufiltern. Darüber hinaus fehlt es häufig auch an der Fähigkeit, aus Tabellen oder Diagrammen die für die Lösung einer Aufgabe oder für die Bearbeitung eines Arbeitsauftrags notwendigen Schlussfolgerungen zu ziehen.

Wissenschaftlicher Ansatz

Auf der Grundlage der für die Fragestellung relevanten Literatur und eigener empirischer Untersuchungen wurden Kompetenzstufen für das mathematische Textverständnis herausgearbeitet. Eine Analyse von Lehrtexten und Prüfungstexten ermöglichte die Festlegung des Umfangs der Texte sowie ihrer Komplexität. Hieraus wurden in der Konzeptionsphase elf Aufgabenformate zur Lesekompetenz sowie mehrere Texte aus dem beruflichen Alltag entwickelt. In einer Reihe vergleichender Untersuchungen konnten acht Aufgabentexte für die Übernahme in eine Lern- und Übungs-CD herauspräpariert werden.

Ergebnisse für die Praxis

Zu diesen Aufgabenformaten wurden nun aufbauend auf eine Analyse aller gängigen Methoden zur Überprüfungen eines Textverständnisses (Zuordnungsaufgaben, Multiple-Choice-Aufgaben, …) und unter Berücksichtigung der Erkenntnisse zu den Kompetenzstufen des (mathematischen) Textverständnisses vielfältige Aufgabenformate entwickelt, die in eine Übungs-CD eingebracht wurden. Bei der Entwicklung der Software konnte auf vorhandene Programme von M. Stein zurückgegriffen werden, es war aber trotzdem eine äußerst umfangreiche konzeptionelle Eigenleistung zu erbringen. Als ein Detail von vielen sei genannt, dass bei fehlerhaften Zuordnungen die Anzeige des der Aufgabe zugrundeliegenden Informationstextes automatisch auf die relevante Textstelle springt und diese farbig unterlegt anzeigt.

Literatur

Jordan, R. (2011): Entwicklung und Validierung eines Testverfahrens zur Ermittlung der Lesekompetenz und des mathematischen Textverständnisses mit empirischer Untersuchung an allgemeinbildenden und berufsbildenden Schulen. Münster, WTM-Verlag.

Jordan, R. (2011): Die Lese-CD. CD zur Schulung des mathematischen Textverständnisses. Münster, WTM-Verlag.

Winter, K. (2011): Entwicklung von Item-Distraktoren mit diagnostischem Potential zur individuellen Defizit- und Fehleranalyse. Didaktische Überlegungen, empirische Untersuchungen und konzeptionelle Entwicklung für ein internetbasiertes Mathematik-Self-Assessment. Münster, WTM-Verlag.

Testmöglichkeiten

Zur Erprobung der Self-Assessment-Tests von Mathe-Meister geht man auf die Seite http://www.mathe-meister.de. Man wählt den Zugang zum online-Test. Als TAN kann verwendet werden dortstadt001. Nach Auswahl eines Zielberufs öffnet sich ein Informationsfenster. Man kann von dort den Test beginnen, oder – wenn man sich die Arbeit sparen will, direkt die Lösungen zufallsgesteuert simulieren. Im letzteren Fall gelangt man direkt zur Testauswertung, den Defizitanalysen, den Förderhinweisen etc.

Christine STREIT, Thomas ROYAR Nordwestschweiz

Förderung der diagnostischen Kompetenz angehender Lehrpersonen in der Vorschul- und Primarstufe

l. Diagnostische Kompetenz als Teil des Professionswissens

Diagnose und Förderung werden zunehmend als zentrale schulische Aufgaben gesehen, was entsprechende Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern erfordert. Dies bestätigen auch die Ergebnisse der empirischen Unterrichtsforschung: Demnach erhöht diagnostische Kompetenz die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Unterricht erfolgreiches Lernen stattfinden kann - nämlich im Sinne einer gelungenen Anpassung des Unterrichts an die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler (Helmke 2009; Lipowsky 2006; Baumert & Kunter 2006, Blömeke et al. 2008). Es ist daher nur konsequent, dass in den letzten Jahren der Erwerb diagnostischer Kompetenz in der Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern einen immer größeren Stellenwert einnimmt.

So einig man sich in Bezug auf die Bedeutung von diagnostischer Kompetenz ist, so uneinheitlich sind die Auffassungen darüber, wie diese zu definieren ist und wie sie sich zusammensetzt. Aufgrund bisheriger Studien ist davon auszugehen, dass es sich nicht um ein generalisierbares, sondern um ein domänenspezifisches Konstrukt handelt (Lorenz; Artelt 2009). Lehrpersonen, die über eine hohe diagnostische Kompetenz im mathematischen Bereich verfügen, sind nicht notwendigerweise auch gute Diagnostiker im sprachlichen Bereich und umgekehrt. Aus diesem Grund sollte auch in einem Generalistenstudium mit breiter Fächerpalette und nur geringer Spezialisierungsmöglichkeit der fachspezifischen diagnostischen Kompetenz eine zentrale Rolle beigemessen werden.

2. Das Projekt DiKoMa

Ausgehend von dieser Prämisse wurde an der Pädagogischen Hochschule der Fachhochschule Nordwestschweiz für den Studiengang Vorschul- und Primarstufe im Jahr 2010 das Lehrprojekt "**Di**agnostische **Ko**mpetenz im Bereich **Ma**thematik" (DiKoMa) implementiert, dessen Ziel die Förderung von mathematikspezifischer diagnostischer Kompetenz durch Verbindung von forschungs- und theoriebasierter Lehre mit berufspraktischer Orientierung ist. Die Rahmenbedingungen sind dabei ambivalent: Einerseits ermöglicht eine maximale Gruppengröße von 25 Studierenden eine engmaschige Betreuung, andererseits stehen im gesamten Studium für fachliche und didaktische Mathematikstudien nur 11 ECTS - Units zur Verfügung.

Wichtige Grundsätze des Lehrprojektes sind das Sprechen *über* Schüler (Horstkemper 2006, Staub 2006) und *mit* Schülern (Ruf 2003, Spiegel; Selter 1997) sowie die Förderung als Zielperspektive der Diagnose (Schrader 1989). Die Kompetenzziele wurden in Anlehnung an die Empfehlungen von DMV, GDM und MNU 2008 wie folgt festgesetzt:

Die Studierenden …

- beobachten, analysieren und interpretieren mathematische Lernprozesse auf der Grundlage der Kenntnis unterschiedlicher diagnostischer „Verfahren“.
- führen strukturierte Interviews und informelle Gespräche als individualdiagnostische Verfahren durch und werten sie aus.
- konstruieren diagnostische Aufgaben und analysieren bzw. interpretieren Schülerleistungen.
- beschreiben Unterrichtsarrangements und -methoden mit diagnostischem Potenzial.
- erstellen auf diagnostischen Ergebnissen beruhende Förderpläne für einzelne Schüler oder Lerngruppen.

3. Umsetzung

Die Umsetzung erfolgt in drei aufeinander bezogenen Phasen: Im ersten Seminar liegt der Schwerpunkt auf dem Wissenserwerb in Bezug auf die Entwicklung des mathematischen Denkens beim Kind, dem Konzeptaufbau und dabei typischer "Stolpersteine" sowie dem Kennenlernen verschiedener Diagnoseinstrumente und dem gemeinsamen Auswerten vorliegender Schülerprodukte und -interviews. Die sich anschließende Praxisphase fokussiert den Erwerb von Handlungskompetenz durch Erprobung verschiedener diagnostischer Instrumente und der "Nutzung" der Ergebnisse für die individuelle Förderung sowie die Unterrichtsgestaltung. Das folgende Seminar Fachdidaktik, partiell ergänzende Reflexionsseminare und eine anzufertigende Seminararbeit leisten dann einen Beitrag zur Analyse und Reflexion mit der Absicht, die Einstellung gegenüber diagnostischer Abklärung als Grundlegung angemessener Unterrichtsplanung nachhaltig zu beeinflussen.

Die erste Erprobungsphase fand vom Herbst 2010 bis Sommer 2011 statt, seit Herbst 2011 befinden wir uns im ersten regulären Durchlauf. Aus der Evaluation der Erprobungsphase traten einige Schwierigkeiten zu Tage, die in die Konzeptüberarbeitung eingeflossen sind. Weiter wird auch der aktuelle Zyklus begleitend formativ evaluiert - dabei liegen die Schwerpunkte zum einen auf der Akzeptanz und zum anderen auf dem Lernprozess bzw. dem Lernergebnis der Studierenden.

4. Ergebnisse der Zwischenevaluation

Erwartungsgemäß wurden in der Erprobungsphase Probleme auf unterschiedlichen Ebenen erkennbar. So zeigten sich bei zahlreichen Studierenden Schwierigkeiten, die eigene Rolle beizubehalten, was an belehrendem Vorgehen, Unterbrechungen oder problematischem Umgang mit dem Schweigen einzelner Kinder offenbar wurde. Eine klare Trennung zwischen Beobachtung und Interpretation war nicht immer gegeben. Zudem zeigte sich, dass die zielgerichtete Auswahl geeigneter Diagnoseinstrumente und die ergebnisbezogene Weiterarbeit zum Teil höhere Anforderungen stellten als erfüllt werden konnten. Entsprechend wurde bei der folgenden Kohorte im ersten Seminar ein Schwerpunkt auf das Rollenverhalten bei der Diagnose gelegt und die Studierenden bei der Auswahl der Diagnoseinstrumente stärker individuell unterstützt.

5. Ausblick: Vom Lehrprojekt zum Forschungsprojekt

Wie eingangs erwähnt besteht weiterer Forschungsbedarf hinsichtlich der Frage, wie sich diagnostische Kompetenz empirisch fassen lässt. Wir gehen von folgender Arbeitsdefinition aus: Mathematikspezifische diagnostische Kompetenz ist die Fähigkeit, Lernvoraussetzungen von Schülerinnen und Schülern differenziert zu erfassen und für die weitere Unterrichtsgestaltung bzw. eine individuelle Maßnahmenplanung zu "nutzen".

In einem Multi-Method-Design, das qualitative und quantitative Methoden einbezieht, kommen Vignetten (Mason 1994, Beck et al. 2008) zur Erfassung verfügbaren "handlungsnahen Wissens" (Riese & Reinhold 2010) und Fragebögen zur Beschreibung der Einstellung zur Bedeutung von Diagnose im Mathematikunterricht zum Einsatz.

Sie hospitieren in einer ersten Klasse zu Beginn des Schuljahres. Der Auftrag für die Kinder lautet: *Lege mit den bunten Plättchen Zahlbilder von 1 bis 10.* Anschließend sollen die Kinder ihre Zahlbilder zur 9 aufzeichnen. Einige Kinder werden zusätzlich befragt.

1.) Welche Aussagen zum Lernstand der vier Kinder können Sie auf der Grundlage der Schülerdokumente sowie der Interviewausschnitte machen?

2.) Sie erhalten den Auftrag, auf der Basis der Ergebnisse des Erstauftrags mit den Kindern der Klasse weiterzuarbeiten. Wie würden Sie vorgehen? Entscheiden Sie sich für einen Folgeauftrag und begründen Sie Ihr Vorgehen gegenüber Ihrer Ausbilderin / Ihres Ausbilders.

A.: …Ich hab` immer 3 genommen…
LP: Und woher weißt du, dass das 9 sind?
A.: … hmm … das weiß ich halt… *(12 Sek. Pause)* 3 blaue und 3 grüne und 3 gelbe.
LP: Könntest du die 9 auch anders legen?
A. *schiebt ein gelbes Plättchen zu den blauen…* Jetzt sind da 4…und da noch 3 und da 2.

Abb.1 Vignette mit einem von vier Schülerprodukten bzw. -interviews

Auch wenn diese Instrumente noch einer weiteren Schärfung zu unterziehen und die Ergebnisse entsprechend kritisch zu würdigen sind, zeichnen sich in der ersten Pilotierungsstudie mögliche Hypothesen ab, die empirisch genauer zu prüfen sind.

Die Lehre scheint zu einem Zuwachs des begrifflichen und inhaltlichen Wissens in Bezug auf die Analyse des Lernstandes zu führen. Während die Ausführungen der Studierenden zu Beginn der mathematikdidaktischen Studien häufig von einer oberflächlichen Betrachtung zeugten und die Alltagssprache dominierte, zeigte sich in der späteren Befragung eine deutliche begriffliche Präzisierung und eine Anbindung an theoretische Konzepte. Eine differenzierte Betrachtung beschreibender und interpretierender Bearbeitungssequenzen gibt Hinweise darauf, dass diese Elemente zunehmend miteinander verbunden werden.

Weniger klar sind Tendenzen bei der Entwicklung des handlungsnahen Wissens in Bezug auf die "Nutzung" der Diagnose auszumachen. Auf induktivem Weg konnten jedoch bereits drei Kategorien beschrieben werden (Vorwissen überprüfen, Intervention anpassen, Verständnis anregen), anhand derer sich das Handlungswissen zunächst genauer beschreiben und - bei Erweiterung des Datenmaterials - in unterschiedlichen Ausprägungen darstellen lässt.

Die Auswertung des Fragebogens, der offene und geschlossene Items enthielt, zeigt, dass der Stellenwert der Diagnose für gelingende Lehr- Lernprozesse nach der Intervention wesentlich höher eingeschätzt wird als vorher, wobei das Problem der sozialen Erwünschtheit dieser Einordnung noch genauer analysiert werden muss. Hierüber werden die Autoren in Zukunft weiter berichten.

Literatur (Auswahl)

Beck et.al. (2008): Adaptive Lehrkompetenz. Münster: Waxmann.

Helmke, A. (2009). Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Seelze: Kallmeyer.

Horstkemper, M (2004). Diagnosekompetenz als Teil pädagogischer Professionalität. In: Neue Sammlung 44(2), 201-214.

Lorenz, Ch & Artelt, C. (2009). Fachspezifität und Stabilität diagnostischer Kompetenz von Grundschullehrkräften in den Fächern Deutsch und Mathematik. Psychologie. German Journal of Educational Psychology. Themenheft: Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften. 23(3-4), 211-222.

Mason, J. (1994). Linking qualitative and quantitative data analyse. In: Bryman, A. & Burgess, R.G. (Ed.) Analyzing qualitative data (p. 89-110). London: Routledge.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). Wie Kinder rechnen. Leipzig: Klett.

Rudolf STRÄẞER, JLU Gießen, ACU Brisbane

Educational Interfaces between Mathematics and Industry eine ICMI-Studie

1 ICMI-Studien: Ablauf

ICMI-Studien, also Studien, die von der Internationalen Mathematik Unterrichts Kommission IMUK (engl.: ICMI) angeregt werden, laufen nach einem vorgegebenen Muster ab: Nach Berufung eines Internationalen Programmkomitees („IPC“) erstellt dieses ein Diskussionsdokument („DD“), welches dann möglichst breit publiziert wird, jedenfalls aber in der IMUK-Zeitschrift „Enseignement Mathématique“ und auf Anfrage im ZDM (für die EIMI-Studie vgl. Damlamian&Sträßer 2009). Interessierte KollegInnen senden dann Beiträge an das IPC, das eine Auswahl von Beiträgen zum DD trifft und die AutorInnen zu einer Konferenz („study conference“) einlädt. Aufgrund der Konferenz und weiterer Beiträg wird dann ein Buch zur Studie („study book“) produziert, das in der Reihe „New ICMI Study Series (NISS)“ erscheint (für die EIMI-Studie vgl. Damlamian u.a. 2012).

2 ICMI-ICIAM-Studie 20: Thematik

Im Jahre 2009 starteten die ICMI und die International Conference for Industrial and Applied Mathematics (ICIAM) gemeinsam eine Studie mit dem Titel „Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI)“. Motiv für diese erste -Studie von ICMI in Kooperation mit anderen Institutionen war die Bedeutung der Nutzung von Mathematik in der Industrie, in den Unternehemen, im öfffentlichen Sektor und den alltäglichen Verrichtungen der BürgerInnen, um den Lebensunterhalt zu sichern. Dabei wird von einem breiten Verständnis von Industrie ausgegangen: “... as any activity of economic or social value, including the service industry, regardless of whether it is in the public or private sector” (vgl. Damlamian&Sträßer 2009). Mathematik umfaßt für die Studie nicht nur das, was in der Öffentlichkeit unter Mathematik verstanden wird, sondern auch die verborgene, unsichtbare Mathematik (vgl. hierzu Abschnitt 5).

3 Erziehung – Industrie: Kontraste

Bei der Durchführung der Studie zeigten sich große Unterschiede zwischen den beteiligten Personenengruppen. Besonders auffällig war die Verschiedenheit der je verwendeten ***Sprechweisen.*** Selbst innerhalb einzelner Personengruppen zeigte sich ein so spezifischer Sprachgebrauch, dass man sinnvollerweise von einem besonderen „Jargon“ sprechen kann. Als Beispiel sei auf das Wort „Institutionalisierung“ verwiesen, das in der französisch-sprachigen Mathematikdidaktik eine von der in der Industrie verbreiteten Bedeutung deutlich verschieden ist.

Überdeutlich ist auch die Verschiedenheit der ***Zeit-Horizonte*** zwischen Industrie und Erziehung. In der industrie setzt man eher auf kurze Zyklen und Zeit-Horizonte, in denen ein Ergebnis erreicht werden soll, während im Erziehungswesen in der Regel auf eine längerfristige Entwicklung – zum Teil über mehrere Jahre - gesetzt wird.

Tatsächlich ist auch die ***Mathematik*** in der Industrie und im Erziehungswesen durchaus unterschiedlich. Handelt es sich um die sichtbare Mathematik (vgl. Abschnitt 5), so geht es in der Industrie oftmals um fortgeschrittene Teildisziplinen der Mathematik, wie etwa um partielle Differentialgleichungen oder komplexe lineare Algorithmen. Demgegenüber sollen im Erziehungswesen meist elementare Mathematik-Kenntnisse und Fähigkeiten vermittelt werden.

4 Mathematik – Industrie: Modellbildung

Es soll hier an das bekannte Kreislauf-Modell der Modellbildungnnert werden, das für MathematikdidaktikerInnen wie Personen aus der Industrie dazu diente, die Verwendung von Mathematik in industriellen Kontexten zu beschreiben und zu analysieren. Als Beleg aus der Industrie sei aus dem Hauptvortrag eines Mathematikers aus der Luftfahrt-Industrie zitiert: “The fundamental and familiar strategy is to use computer models to predict and optimize performance, validating these models with laboratory testing and analysis of existing products. In the aerospace industry the most promising approach is “multidisciplinary design optimization,” or MDO. At one time our work in optimization dealt primarily with gradient methods for solving very large problems. An example is computing the minimum fuel trajectory to move a satellite from one stable orbit to another, a problem which might have 250,000 variables and 400,000 constraints“ (Grandine at EIMI-study-conference).

In der Industrie ist die Modellbildung DER Weg in die Nutzung von Mathematik. Modellbildung wird mit einem strikt definierten Zweck außerhalb der Mathematik angewandt, um industrielle Probleme zu lösen. Mathematik ist Werkzeug. Demgegenüber ist die Modellbildung im Erziehungswesen ein wichtiges Ziel - man denke an die zentralen Kompetenzbereiche der “Standards“. Tatsächlich hat sich die Modellbildung im Erziehungswesen manchmal bereits zu einem Unterrichtsgegenstand entwickelt, der um seiner selbst willen unterrichtet wird und die Tasache der „Verzweckung“ der Mathematik eher verdeckt als öffentlich macht. Nach meiner

Meinung muss in Mathematik-Unterricht in einer allgemeinbildenden Schule die Verzweckung der Mathematik bei der Modellbildung zeigen.

5 Schwarze Kästen

Als Illustration zu diesem Abschnitt sei an die Entwicklung des Wiegens und der Preisberechnung erinnert, wie sie sich in den nachstehenden drei Bildern ausdrückt (vgl. Straesser 2002; die Bilder wurden von der Firma BIZERBA zur Verfügung gestellt).

Eine Erklärung für das Verschwinden der Mathematik aus der öffentlichen Wahrnehmung ist die zunehmende Nutzung „Schwarzer Kästen“ (von „black boxes“) als Verpackung und Versteck der Mathematik. In der EIMI-Studie wurden als Konsequenzen der zunehmenden Nutzung von Schwarzen Kästen benannt: Die Nutzung Schwarzer Kästen können industriellen Fortschritt behindern, weil die in ihm realisierte Problemlösung nicht mehr sichtbar und unzugänglich ist. Dies erschwert auch die Fehlersuche und die Fehlerbehebung. Wenn eine Problemlösung in einem Schwarzen Kasten versteckt ist, läßt sich diese Lösung in der Regel auch schwerer bewerten und kritisieren.

Für einen Lernprozess läßt sich eine ambivalente Wirkung der Nutzung von Schwarzen Kästen festhalten. Ein Schwarzer Kasten kann einerseits das Verständnis einer Problemlösung behindern, weil er die zugrundeliegenden Algorithmen verdeckt. Andererseits kann die Zusammenfassung einer Problemlösesequenz zu einer Einheit das Lernen dieser Problemlösung erleichtern (durch “encapsulation“). Zusätzlich fördert der Einsatz von Informationstechnologie den Einsatz Schwarzer Kästen und ermöglicht für Lehr-/Lernprozesse die Simulation von Problemlösungen, die so ohne Gefahr für Material und Mensch eingeübt werden können. Man denke nur an die

Simulation von Herstellungsprozessen unter Einsatz von CNC-Werkzeugen.

6 Persönlicher Schluß

Die EIMI-Studie hat einige allgemeinere Tatsachen ans Licht gebracht, auf die ich abschließend hinweisen möchte. So wurde überdeutlich, dass es keine institutionalisierte Forschung zur Nutzung der Mathematik in der Industrie gibt. Forschung zu diesem Thema ist individuelles Hobby von Einzelpersonen, die oft diskontinuierlich nach den persönlichen und beruflichen Möglichkeiten betrieben wird. Eine bedauerliche Konsequenz dieser Tatsache ist, dass Personen, die in diesem Feld arbeiten, immer wieder das „Rad neu erfinden". Es fehlt ein auch nur einigermaßen durch Praxis gesichertes Forschungsparadigma. Forschungsmethoden werden immer wieder den Nachbar-Disziplinen entliehen. Gegenstands-adäquate Forschungsmethoden sollten stattdessen langfristig entwickelt werden. Man kann nur hoffen, dass das 'Study Book' hier Fortschritte bringt

Literatur

Araújo, A., Fernandes, A., Azevedo, A., & Rodrigues, J. F. (Hrsg.). (2010). Proceedings EIMI 2010 Conference. Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Lisbon / Bedford, MA: CIM / Comap.

Damlamian, A., Rodrigues, J.-F. & R. Sträßer (Hrsg.) (erscheint 2012). Educational interfaces between mathematics and industry. ICMI Study 20. Berlin – Heidelberg: Springer.

Damlamian, A. – Straesser, R. (On behalf of the International Program Committee, 2009). ICMI-study 20: educational interfaces between mathematics and industry. ZDM Mathematics Education 41 (4), 525–533.

Organisation for Economic Co-operation and Development, Global Science Forum (2008) Report on Mathematics in Industry. http://www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf

Straesser, R. (2002). On the disappearance of Mathematics from society's perception. Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Bern, 1999. H.-G. Weigand u.a. (Hrsg.). Hildesheim - Berlin, Franzbecker: 124-133.

Kinga SZŰCS, Jena

„Mosaiken aus der Römerzeit“ und „Die Unendlichkeit“. Zwei Unterrichtseinheiten für den Einstieg in den deutschsprachigen[1] Mathematikunterricht

Durch die Erweiterung der Europäischen Union gewinnen bilinguale Unterrichtsformen in Europa immer mehr an Bedeutung, so auch in Italien, wo vor kurzem Maßnahmen eingeführt wurden, Schüler am bilingualen Unterricht verbindlich teilhaben zu lassen. Im Folgenden werden zwei Unterrichtseinheiten vorgestellt, die 2011 mit italienischen Schülern auf Deutsch durchgeführt wurden. Sie sollen als Beispiele dienen, auf welche Art und Weise eine echte Verzahnung von Fremdsprachen- und Mathematikunterricht möglich ist und die Planung bzw. Durchführung weiterer, für deutsche Schüler relevanter (also z.B. deutsch-englischer) Module anregen.

1. Hintergrund/Motivation

Innerhalb Italiens hat Deutsch insbesondere im nördlichen Teil des Landes lange Tradition. Laut der Initiative „PASCH“ des Auswärtigen Amtes gibt es in Italien drei deutsche Auslandsschulen und 17 sog. DSD-Schulen, davon zwei bzw. 13 in Norditalien. Während deutsche Auslandsschulen ins deutsche Bildungssystem integriert sind, sind DSD-Schulen Teil des jeweiligen nationalen Bildungssystems. Sie bieten erweiterten Deutschunterricht an und damit die Möglichkeit, das Deutsche Sprachdiplom am Ende der Schulzeit abzulegen. Überdies etabliert sich der CLIL-Unterricht an italienischen Schulen: Nach den Lehrplänen aus dem Jahr 2005 ist es an allen Gymnasien vorgesehen, in der Klassenstufe 5 (dies entspricht der Klasse 13 im deutschen Bildungssystem) ein nichtsprachliches Fach auf Englisch zu belegen. Darüber hinaus ist es an allen sog. neusprachlichen Gymnasien geplant, diesen bilingualen Unterricht bereits in der Klassenstufe 3 (Klasse 11) einzuführen und ab der Klasse 4 (in Dtl. Klasse 12) ein weiteres Fach in der zweiten Fremdsprache zu unterrichten. Durch diese Regelung entsteht insbesondere an den oben genannten DSD-Schulen die Notwendigkeit, geeignete Kontexte für den deutschsprachigen Fachunterricht zu finden. Ausführliche Beschreibungen solcher Kontexte für den bilingualen Fachunterricht sind z.B. in Carl et al., 2008 und Szűcs, 2011 formuliert.

[1] „Bilingualer Sachfachunterricht, auch Deutschsprachiger Fachunterricht (DFU) genannt, ist Fachunterricht in deutscher Sprache für Schüler, deren Muttersprache nicht Deutsch ist.“ (Leisen, 2004) Diese Auffassung vom deutschsprachigen Fachunterricht legt es nahe, diesen als eine Konkretisierung von CLIL (Content and Language Integrated Learning) zu betrachten, siehe hierzu European Commission, 2006.

2. Rahmenbedingungen

Die Unterrichtseinheiten, die hier vorgestellt werden, wurden für das Istituto d' istruzione Superiore "Vincenzo Capirola" Leno, einer DSD-Schule in Norditalien entwickelt und ebenfalls an dieser Schule erprobt. Hier gibt es in jedem Jahrgang eine Klasse, die Deutsch als zweite Fremdsprache lernt, von diesen wurde für das bilinguale Mathematikprojekt die Klasse 3 und die Klasse 5 ausgewählt. Ein erstes Treffen mit Schulleitung und Schülern fand im September 2010 statt, die Durchführung erfolgte im März 2011.

3. Mosaiken aus der Römerzeit: Unterrichtseinheit für die Klasse 3

Hierbei wurde zum Ziel gesetzt, dass Schüler zunächst ihnen bereits bekannte Begriffe der Geometrie (wie Kreis, Quadrat, Rechteck, Strecke, Gerade, aber auch Drehung, Spiegelung, punktsymmetrisch, achsensymmetrisch, Umfang, Flächeninhalt) auf Deutsch kennen lernen und durch das Begründen von Symmetrieeigenschaften geometrischer Objekte fachbezogene Argumentationen führen. Dabei sollen Schüler ihr Vorwissen bzgl. Kongruenzabbildungen aktivieren und dieses in einem außermathematischen Kontext anwenden. Darüber hinaus machen sie Erfahrungen mit Modellierungsaufgaben und reflektieren über Mathematik. Ablaufplan:

Stunde	**Inhalt**
1-2	Schüler bekommen ein Foto von einem römischen Mosaik und erarbeiten zur Beschreibung der daran erkennbaren geometrischen Objekte im fragend-entwickelnden Unterricht mit Lehrer gemeinsam einen grundlegenden Fachwortschatz und typische Satzmuster der Geometrie. Schüler entwickeln in Kleingruppen geometrische Beschreibungen zu vier weiteren Mosaikmustern. Ihre Ergebnisse präsentieren sie im Plenum und begründen dabei u.a. Symmetrieeigenschaften konkreter geometrischer Objekte.
3	Schüler vergleichen in Kleingruppen konkrete Flächeninhalte in den Mosaikmustern. Bei der Präsentation der Gruppenergebnisse im Plenum verwenden sie bewusst das erarbeitete Fachvokabular und führen fachbezogene Argumentationen.
4-5	Schüler bearbeiten eine Modellierungsaufgabe in Kleingruppen: Sie sollen den Boden eines Raumes von konkreter Größe mit dem Mosaikmuster der Gruppe auslegen und dabei die Anzahl der notwendigen schwarzen und weißen Steine abschätzen.

4. Unendlichkeit: Unterrichtseinheit für die Klasse 5

Hierbei wurde das (fach-)sprachliche Ziel verfolgt, dass Schüler Begriffe der Mengenlehre (Mengenbezeichnungen, Mächtigkeit, Kontinuum, liegt in, ein Element von, Teilmenge, echte Teilmenge, leere Menge etc.) auf Deutsch kennen lernen. Ein sowohl sprachliches als auch mathematisches Ziel bestand darin, durch den Vergleich der Mächtigkeit konkreter endlicher und unendlicher Zahlenmengen fachliche Argumentationen durchzuführen. Hierbei sollen Schüler auch ihr Vorwissen über das Unendliche aktivieren, systematisieren und reflektieren, was vor allem als ein mathematisches Ziel angesehen werden kann. Die Auseinandersetzung mit authentischen Fachtexten zum Thema Unendlichkeit, die Strukturierung und Reflexion der darin enthaltenen fachlichen Inhalte bzw. der hierzu verwendeten Fachsprache sollen wiederum als sprachliches und als mathematisches Ziel gelten. Die Präsentation von Gruppenergebnissen soll der bewussten Verwendung der Fachsprache und der Reflexion über die Fachsprache und über Mathematik dienen. Die Thematisierung des Beitrags von Cantor zur Mengenlehre soll als interkultureller Bezug gelten. Ablaufplan:

Stunde	Inhalt
1	Schüler notieren Vorstellungen über das Unendliche auf Zetteln. Diese werden gesammelt und im Plenum ausgewertet, wobei eine erste Einführung in das entsprechende Fachvokabular erfolgt. Schüler vergleichen mit Hilfe eines Arbeitsblattes in Partnerarbeit die Mächtigkeit von insgesamt 12 Zahlenmengenpaaren.
2-3	Die Auswertung des Arbeitsblattes erfolgt im Plenum, dabei wird die Bijektion als mögliches Vergleichsprinzip erarbeitet. Bei der Frage nach der Mächtigkeit der rationalen bzw. der irrationalen Zahlen werden das 1. und das 2. Cantorschen Diagonalverfahren thematisiert, hierzu werden eine Abbildung und ein kurzer Text (aus Richter, 2002) zur Hilfe genommen.
4-5	Schüler bearbeiten in Kleingruppen einen leicht gekürzten Text zu Hilberts Hotel (aus Casiro, 2005), entnehmen dem Text fachliche Inhalte, strukturieren und reflektieren diese, indem sie eine Tabelle hierzu ausfüllen. Die Auswertung erfolgt im Plenum.
6	Schüler setzen sich mit einem Hörtext und mit einem dazu erstelltem Arbeitsblatt zu Cantor und seinem Werk auseinander.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Beide Unterrichtseinheiten verliefen den vorgestellten Plänen entsprechend, lediglich mit einer zeitlichen Verschiebung, da Gruppenarbeiten, insbesondere deren Auswertung etwas mehr Zeit als geplant in Anspruch nahm. Aus diesem Grund musste in der Klasse 5 auf die Bearbeitung des Hörtextes verzichtet werden. Die Resonanz der Unterrichtseinheiten war durchaus positiv. Aus Lehrersicht kann zusammenfassend festgestellt werden, dass die Forderung an die Schüler sprachlich sowie fachlich angemessen war, der zeitliche Umfang und die zeitliche Verteilung der Inhalte sollten allerdings aus oben erwähnten Gründen noch optimiert werden.

Es soll abschließend angemerkt werden, dass solche „kurze" bilinguale Unterrichtseinheiten auch für die didaktische Forschung nicht irrelevant sind. In solchen Situationen kann man Fragen nachgehen, inwieweit sich z.B. die Einstellung der Schüler zur Mathematik/Fremdsprache/Kultur des zielsprachigen Landes durch den Einsatz des bilingualen Mathematikunterrichts ändert, oder inwieweit die Heranziehung der Fremdsprache das Verständnis der Kernbegriffe der bilingualen Unterrichtseinheit beeinflusst.

Literatur

Carl, S., Fehling, A. & Hämmerling, H. (2008): Konzept für die Implementierung bilingualer Module im Englischunterricht in den Klassenstufen 9 und 10 am Gymnasium. In Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien: Bilinguale Module in Thüringen. Impulse Heft 52, 58-60.

Casiro, F. (2005): Das Hotel Hilbert. Spektrum der Wissenschaft Spezial: Unendlich (Plus 1), 2-5.

European Commission (2006): Content and language integrated learning (CLIL) at school in Europe. Country reports. http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/thematic_studies_archives_en.php (31.01.2012)

Leisen, J. (2004): Der bilinguale Sachfachunterricht aus verschiedenen Perspektiven – Deutsch als Arbeitssprache, als Lernsprache, als Unterrichtssprache und als Sachfachsprache im Deutschsprachigen Fachunterricht (DFU). Fremdsprache Deutsch 30. 7-14.

Richter, K. (2002): Cantor fragt: unendlich=unendlich? Mathematik lehren 112, 9-13.

Szűcs, K. (2011): Internationales Einheitssystem vs. angloamerikanisches Maßsystem – Entwurf einer bilingualen Unterrichtseinheit. In Beträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM Verlag, 843-846.

Lehrpläne für Gymnasien in Italien: http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/2ciclo_quadriorario_19505.pdf (14.03.2012)

Weltkarte der Initiative „PASCH: Schulen: Partner der Zukunft" des Auswärtigen Amtes: http://weltkarte.pasch-net.de/ (16.03.2012)

Roman SZYMANSKI, Darmstadt

Lehrerprofessionalisierung online. –Effekte aus der Sicht der Teilnehmer/-innen

1. Fragestellung

Die Lehrerprofessionalisierung durch Fort- und Weiterbildung ist ein Weg die Bildungsqualität des Mathematikunterrichts an Schulen zu verbessern (vgl. Doll & Prenzel, 2004). Schwierigkeiten ergeben sich durch die Erreichbarkeit der Lehrkräfte und die zeitlichen Anforderungen neben dem beruflichen und privaten Alltag. Die Arbeitsgruppe „Fachdidaktik der Mathematik“ der Technischen Universität Darmstadt bietet seit September 2005 unter der Leitung von Prof. Dr. Regina Bruder Online-Fortbildungskurse für Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufen an. Diese Kurse gestatten es den teilnehmenden Mathematiklehrkräften, räumlich und zeitlich getrennt voneinander zu lernen. In der fortlaufenden Evaluation der Online-Fortbildungskurse wird der Frage nachgegangen, wie das Konzept der Kurse aus der Sicht der Teilnehmer bewertet wird. Vor allem soll aufgedeckt werden, welche Aspekte der Online-Fortbildungskurse einen Lernerfolg begünstigen und eine langfristige Anwendung des theoretisch erlernten Wissens in den beruflichen Alltag fördern.

2. Hintergrund

Den Online-Fortbildungskursen liegen Erfahrungen aus meist mehrjährigen Forschungs- und Entwicklungsprojekten zur Verbesserung der Unterrichtsqualität zugrunde, vgl. z.B. (Collet & Bruder, 2006). Durch die Teilnahme an den Online-Fortbildungskursen wird den Mathematiklehrkräften aktuelles forschungsbasiertes intelligentes Wissen und entsprechende Handlungskompetenz vermittelt, welche zur Gestaltung eines erfolgreichen kompetenzorientierten Mathematikunterrichts erforderlich sind. Der Fokus der einzelnen Online-Fortbildungskurse liegt auf folgenden Themen:

> „Basics – nachhaltige Entwicklung und permanentes Wachhalten von elementarem Grundkönnen im Mathematikunterricht (MU)“, „Excel im MU“, „Binnendifferenzierung im MU“, „Argumentieren im MU“, „Problemlösenlernen und Selbstregulation“, „Mathematisches Modellieren“ und „Langfristiger Kompetenzaufbau mit Aufgaben im MU“

Die halbjährlichen Online-Fortbildungskurse sind in 5-6 Module gegliedert, die jeweils kurze Instruktionen und Hintergrundinformationen mit erprobten Beispielen enthalten und aufeinander aufbauen. Am Ende jeder Moduleinheit wird an die Fortbildungsteilnehmer ein Arbeitsauftrag erteilt. Dazu sollen auch selbst Aufgaben und Materialien entwickelt und das Gelernte im eigenen Unterricht angewendet werden. Die Dauer eines Fortbildungskurses beträgt insgesamt 12 Wochen. Die Fortbildungsteilnehmer werden durch geschulte Tutoren betreut, die den Lernprozess der Fortbildungsteilnehmer begleiten, indem sie zeitnah auf mögliche Fragen eingehen und Arbeitsprodukte veröffentlichen und zur Diskussion stellen.

3. Methode

Stichprobe

Die Stichprobe bestand aus Teilnehmern der Online-Fortbildungskurse der Schulhalbjahre 2010/11 und 2011/2012. Insgesamt nahmen 48 (31 weibliche, 17 männliche) Mathematiklehrkräfte an der abschließenden Kursevaluation teil. Das waren 49% aller Kursteilnehmer im besagten Zeitraum. Als Anreiz bekamen die Fortbildungsteilnehmer nach erfolgreicher Teilnahme an der Evaluation für drei weitere Jahre einen kostenfreien Zugang zu der Aufgabendatenbank www.madaba.de, die eine Sammlung erprobter Materialien zur Unterrichtsvorbereitung bietet.

Messinstrument

Der „Fragebogen zur Evaluation von Online-Fortbildungskursen für Mathematiklehrkräfte" (FEOM) wird zur Evaluation der Online-Fortbildungskurse eingesetzt. Der erste Abschnitt des FEOM setzt sich aus einer allgemeinen Bewertung der Online-Fortbildungskurse (Vergabe einer Note von 1= „sehr gut" bis 6= „ungenügend"), den vier Skalen „Struktur und Didaktik", „Relevanz", „Kursleitung" und „Beteiligung" zur Messung der Akzeptanz und einer Skala zur Messung des Lernerfolgs zusammen. Die zusätzliche Skala „Online" nimmt eine Bewertung der Online-Veranstaltung im Vergleich zu einer Präsenzveranstaltung vor. Die Skala „Interaktion" erhebt, inwieweit den Teilnehmern der persönliche Kontakt zu den anderen Teilnehmern und den Tutoren gefehlt hat.

Der FEOM misst im zweiten Abschnitt, inwieweit eine Erprobung des Kursinhaltes im eigenen Unterricht stattgefunden hat. Zudem enthält der zweite Abschnitt die Skala Intention, welche mit zwei Items erhebt, inwieweit die erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten mittlerweile fester Bestandteil des eigenen Unterrichts sind und inwieweit das Vorhaben besteht, die erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten weiterhin im eigenen Unterricht einzusetzen.

4. Ergebnisse

Abb. 1 stellt die Skalenmittelwerte der sieben Skalen zur Messung der Akzeptanz und des Lernerfolgs einander gegenüber. Im Mittel wurden die Online-Fortbildungskurse mit der Note M= 2.01 (SD= .67) bewertet. Eine multiple Regressionsanalyse mit einer schrittweisen Regression zeigte an, dass eine Vorhersage der Benotung der Fortbildungskurse alleine anhand der Skalen „Struktur und Didaktik“, „Kursleitung“ und „Online“ möglich war. Diese drei Prädiktoren erklärten zusammen 79% der Kriteriumsvarianz (R^2= .79; F(3, 44)= 56.66; p< .001). Um die Frage zu beantworten, welche Aspekte der Online-Fortbildungskurse einen Einfluss auf den empfundenen Lernerfolg haben, wurden auch hierbei multiple schrittweise Regressionsanalysen durchgeführt. Der subjektiv empfundene Lernerfolg ließ sich besonders durch die zwei Variablen „Relevanz“ und „Erprobung im eigenen Unterricht“ vorhersagen. Die zwei Variablen erklärten zusammen 36% der Kriteriumsvarianz (R^2= .36; F(2, 45)= 12.59; p< .001).

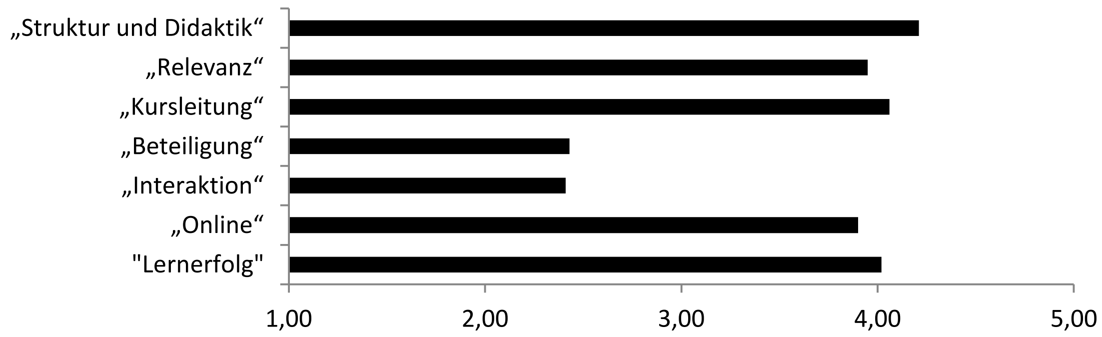


Abb. 1: Skalenmittelwerte der sieben Skalen des FEOM zur Messung der Akzeptanz und des Lernerfolgs (1= „trifft überhaupt nicht zu“ bis 5= „trifft voll und ganz zu“)

In welcher Höhe die einzelnen Aspekte der Online-Fortbildungskurse und die Erprobung der Kursinhalte im Unterricht mit der Skala „Intention“, und damit mit der festen Übernahme der Kursinhalte in den eigenen Unterricht und mit dem Vorhaben die Kursinhalte weiterhin in den eigenen Unterricht zu integrieren, zusammenhingen, ist in Abb. 2 dargestellt.

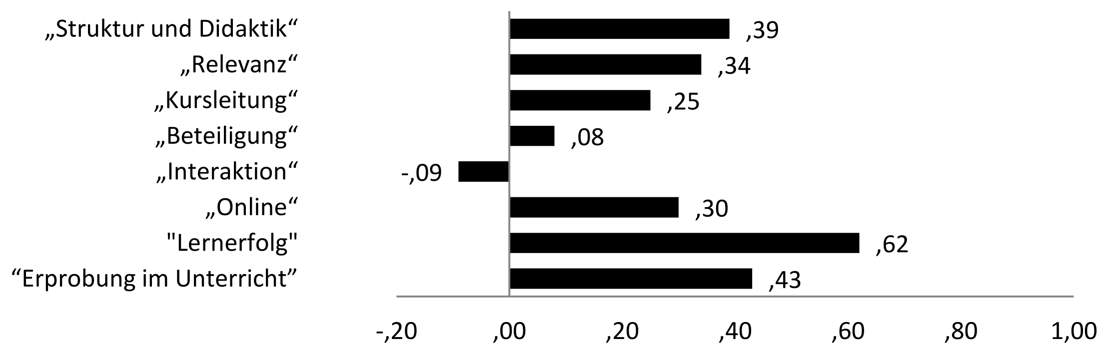


Abb. 2: Korrelationskoeffizienten zwischen den sieben Skalen zur Messung der Akzeptanz und des Lernerfolgs, der Erprobung im eigenen Unterricht und der Skala „Intention“

Eine schrittweise Regressionsanalyse ergab, dass sich die „Intention“ alleine durch den „Lernerfolg“ vorhersagen ließ, wobei durch die Skala 38% der Varianz aufgeklärt werden konnte.

5. Diskussion uns Ausblick

Aus den Ergebnissen lässt sich schließen, dass die Strukturierung und Gestaltung der Online-Fortbildungskurse von den Befragungsteilnehmern äußerst positiv aufgenommen wurde. So wurden die „Struktur und Didaktik“ und die „Relevanz“ der Online-Fortbildungskurse, sowie die „Kursleitung“ besonders hoch bewertet. Die Ergebnisse zeigen weiterhin, dass auch in einer Online-Fortbildung eine kooperative, praxisorientierte Lernsituation durch gezielte Arbeitsaufträge und Rückmeldungen durch Tutoren hergestellt werden kann. Der subjektive Lernerfolg hing neben der Struktur und Didaktik der Online-Fortbildungskurse auch mit der Praxisnähe und der praktischen Anwendung des Gelernten durch die Erprobung im eigenen Unterricht zusammen. Die Online-Befragung erfasst nur die subjektiven Einschätzungen der Befragungsteilnehmer. Schließlich soll neben dem, was den Lehrenden während der Online-Fortbildung vermittelt werden konnte, beurteilt werden, in welchem Umfang diese Kompetenzen an die Lernenden weitergegeben werden. Effekte solcher Fortbildungen sowohl bei den Lehrkräften als auch bei den unterrichteten Schülerinnen und Schülern über die Selbstwahrnehmung hinaus konnten bisher zum Thema Problemlösen und Selbstregulation in einer Langzeitstudie nachgewiesen werden (vgl. Collet & Bruder, 2006) und sind auch für die anderen Kursthemen von Interesse.

Literatur

Collet, C.& Bruder, R. (2006): Evaluation of a teaching concept for the development of problem solving competences in connection with self-regulation. In *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-NA 30). Vol. 2, p.345-352

Doll, J. & Prenzel, M. (2004). Das DFG-Schwerpunktprogramm “Bildungsqualität von Schule (BIQUA): Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen”. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung.* Münster: Waxmann

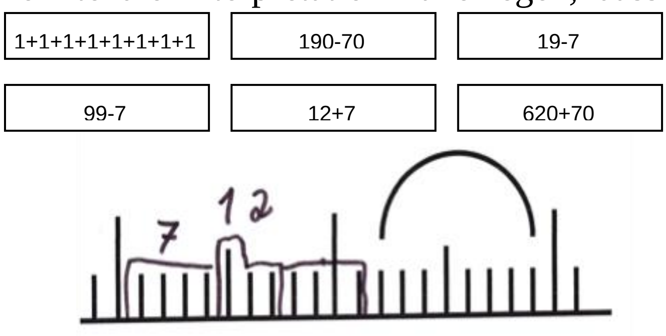
Elke SÖBBEKE, Essen, Anke STEENPASS, Essen

Erste Orientierungen für eine Testentwicklung auf der Grundlage kindlicher Rahmungskonzepte bei der Deutung von Anschauungsmitteln

Anschauungsmittel können im Mathematikunterricht der Grundschule genutzt werden, um Kinder darin zu unterstützen, mathematische Strukturen und Beziehungen zu erkunden. Neben der Funktion des methodischen Rechenhilfsmittels, haben Anschauungsmittel dann ebenso die Funktion eines epistemologischen Werkzeugs (Steinbring 2005, Söbbeke 2005). Die Fähigkeit mathematische Darstellungen mit einem „Strukturblick“ als Erkundungswerkzeuge zu nutzen, entwickelt sich im Mathematikunterricht nicht spontan, sondern kann nur in einer speziellen Unterrichtskultur gemeinsam entwickelt werden. Wie erste Ergebnisse des laufenden Forschungsprojektes KORA[1] (vgl. Steenpaß 2010) zeigen, wird die Kompetenz Strukturen in ein Anschauungsmittel hineinzusehen – die visuelle Strukturierungsfähigkeit (vgl. Söbbeke 2005) – maßgeblich beeinflusst durch Faktoren, die mehr oder weniger bewusst im Mathematikunterricht oder in anderen Zusammenhängen mitgelernt werden.

Kindliche Rahmungskonzepte bei der Deutung von Anschauungsmitteln – Ein Beispiel zum Zahlenstrahl

Nachfolgende Interviewszene ist im Rahmen klinischer Interviews im Projekt KORA entstanden. Die Drittklässlerin Sonja wurde gebeten, zu einer Zahlenstrahldarstellung eine Aufgabe auszuwählen, die besonders gut passt (Aufgabenauswahl: vgl. Abb. 1, oben). Sonja entscheidet sich für die Aufgabe „12+7“. Diese Auswahl könnte die Interpretation nahe legen, dass Sonja den Bogen im Sinne eines Operatorpfeils als „+7“ deutet und den ersten Summanden „12“ am Bogenanfang sieht. Vor diesem Hintergrund hätte sie wesentliche, didaktisch intendierte Strukturen erkannt. Sonjas Bearbeitung zeigt jedoch (Sonjas Einzeichnung und Begründung: vgl. Abb. 1, un-



„Wir haben das ja auch in Mathe gelernt, dass die kleinen (Striche) immer Einer sind, die Mittleren Fünfer oder Zehner und die ganz Großen Hunderter.“ Abb. 1

[1] KORA „Eine epistemologische **Ko**ntext- und **Ra**hmenanalyse zur Förderung der visuellen Strukturierungsfähigkeit“, gefördert durch das BMBF.

ten), dass sie die Zahlenstrahldarstellung überraschend anders deutet: Durch ihre Einzeichnung und Begründung im Verlaufe des Interviews wird deutlich, dass Sonjas Deutung von einer vielleicht unerwarteten „Rahmung“ (vgl. Krummheuer 1984) beeinflusst wird, die wir an dieser Stelle als „Rechenstäbe-Sicht“ bezeichnen möchten. Sie deutet die unterschiedlich langen Skalierungsstriche als diskrete, dingliche Einer-, Zehner- und Hunderterstäbe, die ähnlich wie Cuisenairstäbe zusammengerechnet werden müssen. So fasst sie einen mittellangen und zwei kleine Striche zu „Zwölf“ zusammen und die vier kleinen Striche links und die drei kleinen Striche rechts davon bündelt sie zu sieben. Auf diese Weise findet sie die geforderten Zahlen aus der Rechenaufgabe „12+7“ in der Darstellung wieder. Dieses Beispiel verdeutlicht eindrucksvoll, wie stark eine subjektive Rahmung die Deutung von Anschauungsmitteln beeinflussen kann. Soll in einer größeren Lerngruppe die Fähigkeit von Kindern, Anschauungsmittel strukturorientiert zu deuten erhoben und gefördert werden, ist es notwendig, diese Kenntnisse über kindliche Deutungsweisen aufzugreifen und auch für eine spätere Testkonzipierung zugrunde zu legen.

Deutung von Anschauungsmitteln: Bedingungen & Einflussfaktoren

Im Folgenden sollen die verschiedenen Bedingungen, die auf die Deutung von Anschauungsmitteln einwirken, genauer betrachtet und erläutert werden (vgl. Abb. 2).

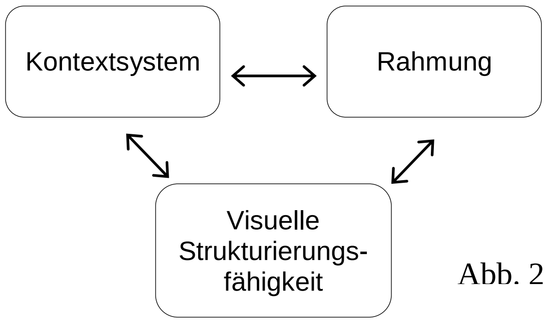


Abb. 2

Kontextsystem – Rahmung

Ein Anschauungsmittel, wie hier der unbeschriftete Zahlenstrahl, entspricht einem komplexen *Kontextsystem*, bestehend aus verschiedenen Kontextelementen, die nicht einzeln und isoliert nebeneinander stehen, sondern aufeinander bezogen werden. Die Kontextelemente (hier z.B. „*Skalierungsstriche*“, „*erster langer Skalierungsstrich*“, „*unterschiedliche Länge der Skalierungsstriche*“, „*Abstände zwischen den Strichen*“, „*Bogen*“) entsprechen dem, was aus der Sicht eines „Mathematikdidaktikers“, d.h. unter einer wissenschaftlich-didaktischen *Rahmung*, als wesentliche strukturierende Elemente erscheinen. Mit dieser Rahmung und dem Bewusstsein der Mehrdeutigkeit dieser Darstellung, könnte der erste lange Skalierungsstrich z.B. als „500“ gedeutet werden, der Strich am Bogenanfang würde dann „620“ repräsentieren und der Bogen selber „+70“. Genauso könnten flexibel andere Deutungen produzieren werden, indem etwa die grundlegende Schrittgröße umgedeutet würde. Die spezielle *Rahmung* des Betrachters bedingt somit, *welche* Kontextelemente als wesentlich betrachtet werden und in die Deutung des Anschauungsmittels einfließen. Durch Sonjas Rahmung sind beispielsweise der „*Bogen*" sowie die „*Abstände zwischen den Strichen*" nicht relevant und werden in keiner Weise in ihre Deutung einbezogen. An dieser Stelle wird die wechselweise Beziehung dieser beider Bedingungen deutlich.

Ob und welche Kontextelemente eines Anschauungsmittels ein Kind also nutzt, muss unter der Bedingung der „*Rahmung*" genauer untersucht werden (vgl. Goffman 1974, Krummheuer 1984). Mit Hilfe des obigen Beispiels von Sonja wird deutlich, dass die subjektiv eingenommene Rahmung (Sonjas „Rechenstäbe-Sicht") gleichzeitig eine objektive Struktur der mathematisch symbolischen Kontextelemente festlegt (vgl. Indurkhya 1994). Indem Sonja die Skalierungsstriche als Einer-, Zehner- und Hunderterstangen deutet, die zusammengerechnet werden müssen, kann eine Rechenaufgabe wie „620+70" *nicht* als passend akzeptiert werden. Im Interview begründet sie konsequent: „*...da muss man ja sechs Hunderter, also sechs ganz lange Striche haben. So viele große lange Striche hat man ja gar nicht.*" Diese Struktur könnte sich für Sonja nur dann ändern, wenn sie ihre Rahmung modulierte.

Visuelle Strukturierungsfähigkeit

Die Bedingung „*Visuelle Strukturierungsfähigkeit*" modelliert und charakterisiert die Art und Weise *WIE* sich die zuvor beschriebene Beziehung zwischen Rahmung und Kontext darstellt. Durch empirische Fallstudien (vgl. Söbbeke 2005) konnte gezeigt werden, dass sich die Deutungen von Kindern durch vier verschiedene Kompetenz-Ebenen charakterisieren lassen, die eine Spanne aufzeigen von eher konkret dinglichen Deutungen auf der einen Seite und strukturorientiert relationalen Deutungen auf der anderen Seite. Sonjas Nutzung der Kontextelemente entspricht einer konkret dinglichen Deutung: Sie nutzt die einzelnen Striche im Sinne konkreter Objekte, die zusammengezählt werden müssen. Der spezifische Ort jedes Striches in dem Zahlenstrahl, der strukturelle Gesamtzusammenhang des Diagramms, in dem auch Beziehungen zwischen einzelnen Kontextelementen hergestellt werden könnten, werden hier nicht beachtet. Auch werden keine strukturellen Umdeutungen vorgenommen, da Sonjas festgelegte, konkret dingliche Sicht der einzelnen Striche, dieses nicht zulässt.

Erste Orientierungen für Interviewaufgaben

Die bisherigen Analysen in dem Forschungsprojekt KORA verdeutlichen, dass ein bisher durch uns entwickelter Test mit seinen Items nicht dieser Komplexität gerecht wird. Vor diesem Hintergrund werden in einem neuen Forschungsprojekt Interviews konzipiert, die diese Anforderung auf einer Micro-Ebene sehr fein und sorgsam untersuchen. Die abgebildete Matrix

(Abb. 3) enthält solche Komponenten, die auf der Grundlage der bisherigen Forschungsarbeit als wesentlich für die Deutung des dargestellten Zahlenstrahldiagramms gelten. In klinischen Interviews sollen die Kinder zu diesen einzelnen Elementen und zum Zusammenhang des Kontextsystems befragt werden. Das nachfolgende (verkürzt dargestellte) Beispiel bezieht sich auf die Komponenten „Struktur“ und „1. langer Strich“. Im Interview werden Antwortmöglichkeiten angeboten, die Deutungen mit einem unterschiedlich starken Bezug zur Struktur des Diagramms widerspiegeln. Hierdurch kann zudem erhoben werden, ob das Kind das entsprechende Kontextelement (hier 1. langer Strich) auf das System bezogen deutet oder als isoliertes Einzelelement.

Kontextelemente	Visuelle Strukturierungsfähigkeit		
	Struktur	Beziehungen	Umdeutungen
Skalierungsstrich (S)			
Länge S			
1. langer S			
Bogen			
Abstände/Einheiten			

Abb. 3

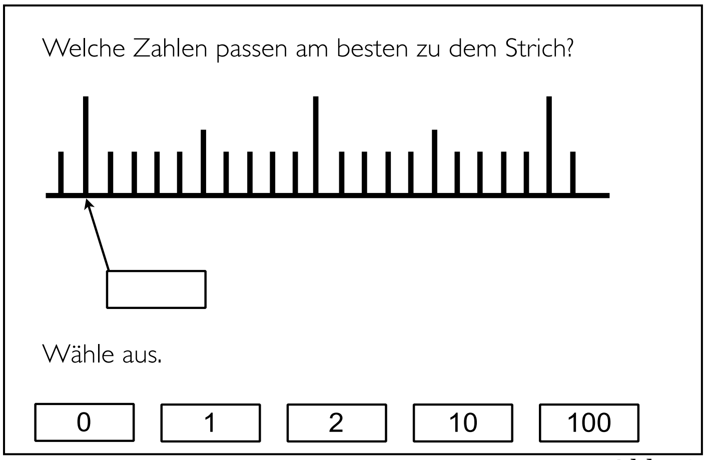


Abb. 4

Literatur

Goffman, E. (1974): Frame Analysis. New York: Harper & Row.

Indurkhya, B. (1994): Metaphor as change of representation. In: Jaakoo, H. (Eds.): Aspects of metaphor. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-150.

Krummheuer, G. (1984): Zur unterrichtlichen Dimension von Rahmungsprozessen. JMD 5(4), 285-306.

Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Steenpaß, A. (2010). Grundschulkinder deuten Anschauungsmaterialien: Ziele und Konzept des Forschungsprojektes KORA. In: BzMU, 819-822.

Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – an Epistemological Perspective. Mathematics Education Library (MELI). No.38. Berlin, Heidelberg: Springer.

Kathrin TALHOFF, Münster

Fallstudie zur Entwicklung einer mathematischen Begabung im Vorschulalter

In aktuellen Modellen zur Begabungsforschung geht man davon aus, dass die Entwicklung einer Begabung spätestens mit der Geburt einsetzt (vgl. Gagné 2000, Heller 2001, Käpnick & Fuchs 2009). Auch *„der Aspekt der Notwendigkeit einer möglichst frühen Diagnostik und sinnvollen Förderung begabter Kinder [wird] mehrheitlich akzeptiert“* (Benölken 2011, S. 2), obwohl man lange Zeit der Meinung war, dass es ausreiche, die Begabung eines Kindes erst im 9. Lebensjahr bzw. im 3. Schuljahr zu identifizieren (Kagan et al. 1958, Weinert 1992). In den letzten Jahren hat sich jedoch ein besonderes Interesse an einer früheren Diagnose und Förderung von begabten Kindern entwickelt (vgl. Urban 1990, Stapf 2010).

1. Erste theoretische Modellierung einer Kennzeichnung der speziellen Entwicklung einer mathematischen Begabung im Vorschulalter

Die bisher umfassendste Untersuchung zur mathematischen Begabung im Kindesalter stammt von Käpnick (1998). Sie bezieht sich auf das Grundschulalter. Das auf diesen Untersuchungen basierende „Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter“ (Fuchs & Käpnick 2009) bildet eine Grundlage der hier vorgestellten Studie zu frühkindlichen mathematischen Begabungen. Eine weitere Ausgangsbasis der Untersuchung stellte eine Analyse von Merkmalskennzeichnungen bzw. Beschreibungen zu frühkindlichen Begabungen (vgl. z. B. Roedell; Jackson; Robinson 2000, Stapf 2010) dar. Diese entstammen der klassischen Intelligenzforschung und sind demnach bereichsunspezifisch. Mathematische Kompetenzen sind in diesem Kontext allgemeinen intellektuellen Fähigkeiten zugeordnet worden. Die Merkmalskennzeichnungen bzw. Beschreibungen zu frühkindlichen Begabungen wurden hinsichtlich der ganzheitlichen und bereichsspezifischen Sicht (vgl. Käpnick & Fuchs 2009) analysiert. Im Ergebnis der Analyse und erste empirischer Befunde werden folgende wesentliche Besonderheiten mathematisch potenziell begabter Kinder im Vorschulalter hypothetisch angenommen:

- eine große Hingabe und ein reges Interesse der Kinder an spezifischen mathematischen Themen

(Die Kinder beschäftigen sich aus eigenem Antrieb, selbstständig und voller Hingabe über einen langen Zeitraum mit mathematischen Themen.),

- frühe Zähl- und Rechenkompetenzen

(Die Kinder sind sehr früh fähig zu zählen, auch in hohen Zahlenräumen. Sie eignen sich ebenso z.T. erstaunliche Rechenkompetenzen an.),

- hohe Gedächtnisfähigkeit

(Die Kinder verfügen über eine sehr hohe Gedächtnisfähigkeit. Sie sind fähig sich sehr schnell mathematische Sachverhalte, ebenso Texte, Lieder, Gedichte, Zahlen, verschiedene Informationen usw. zu merken.),

- und Intuition

(Die Kinder besitzen ein ausgeprägtes Gefühl für Zahlen und entdecken intuitiv Lösungsideen für verschiedenartige mathematische Probleme.).

2. Fallstudie Elias – ein mathematisch begabtes Kind im Vorschulalter

Die als wesentlich erachteten Begabungsbesonderheiten werden im Folgenden an einer Fallstudie zu Elias, einem mathematisch begabten Kind im Vorschulalter, vorgestellt.

- *Elias verfügt über eine große Hingabe und ein sehr frühes Interesse an mathematischen Themen.*

Im Alter von etwa zwei Jahren fing Elias an sich für Zahlen und mathematische Tätigkeiten zu interessieren. Mit etwa drei Jahren klassifizierte er Spielzeugautos nach selbst gewählten Kriterien. Mit fünf Jahren sah er sich Werbeprospekte an, um das günstigste und das teuerste Produkt herauszusuchen. Des Weiteren fordert er stets Aufgaben von seinen Eltern ein bzw. stellt sich auch selbst gerne Aufgaben mit denen er sich dann längere Zeit beschäftigt.

- *Elias weist frühe Zähl- und Rechenkompetenzen auf.*

Im Alter von drei Jahren konnte Elias sicher im Zahlenraum bis 50 zählen und erschloss sich dann schnell höhere Zahlenräume. Mit etwa vier Jahren eignete er sich selbstständig das Addieren an und bis zum Alter von sechs Jahren beherrschte er zudem sicher das Subtrahieren, auch zehnerübergreifend, sowie ein elementares Multiplizieren und Dividieren.

- *Elias verfügt über eine überdurchschnittliche hohe Gedächtnisfähigkeit.*

Von Geburt an konnte Elias sich sehr gut verschiedenste Dinge merken. Die Mutter berichtete, dass er Geschichten, die sie ihm vorlas, nach kurzer Zeit auswendig mitsprechen konnte. Bei Aufgaben, welche die Merkfähigkeit für mathematische Sachverhalte abverlangten, schnitt er stets überdurchschnittlich gut ab.

– *Elias verfügt über eine besondere Intuition bei der Problembearbeitung.*

Um diese Besonderheit anschaulich zu belegen soll eine von Elias bearbeitete Aufgabe vorgestellt werden. Elias war zu dem Zeitpunkt der Bearbeitung 6;9 Jahre alt und stand kurz vor dem Eintritt in die Schule.

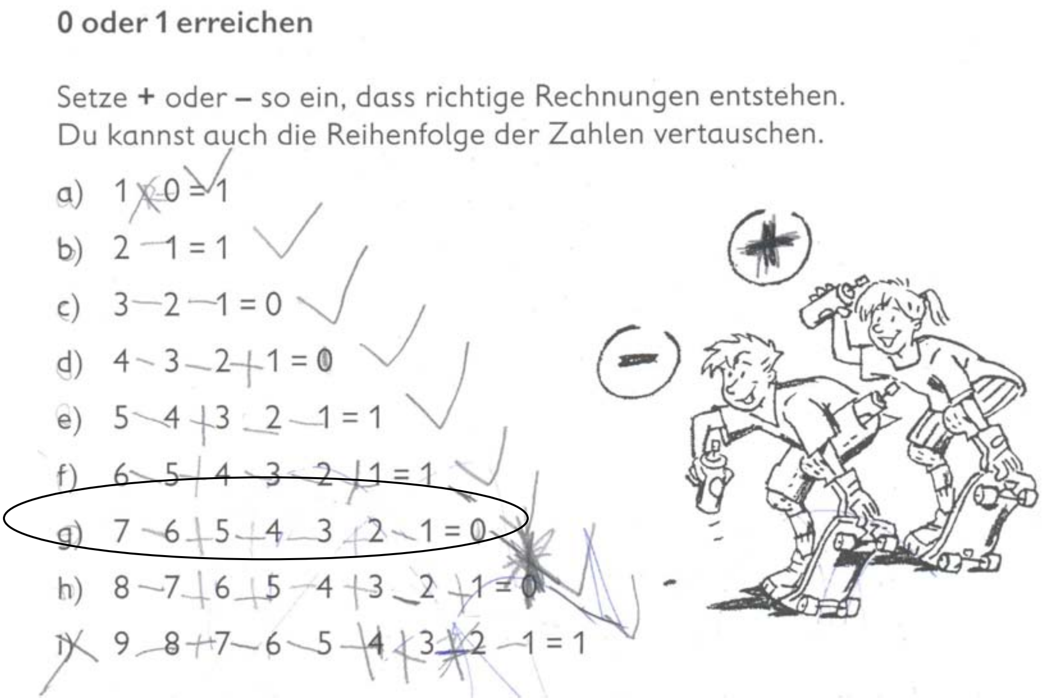


Abb. 1: Von Elias bearbeitete Aufgabe (vgl. Käpnick & Fuchs 2005, S. 83).

In dieser Aufgabe geht es darum Additions- und Subtraktionszeichen so in die vorgegebene Gleichung einzusetzen, dass man als Ergebnis 1 oder 0 erhielt. Besonders bemerkenswert war seine Vorgehensweise für die Teilaufgabe g, die Elias in 40 s löste. Elias setzte zuerst das Subtraktionszeichen zwischen der 7 und der 6 ein. Dann notierte er ohne Kommentar das Additionszeichen zwischen 6 und 5, rechnete im Kopf „7–6+5“ und sagte laut das Ergebnis „6“. Nun setzte er ein Additionszeichen zwischen 5 und 4 ein, bemerkte aber zehn Sekunden später, dass das nicht stimmen konnte und korrigierte sich dann selbst indem er ein Subtraktionszeichen notierte und laut sagte „sind 2“. Hierbei rechnete er „7–6 = 1; 1+5 = 6; 6–4 = 2“. Zwölf Sekunden später bemerkte Elias „Minus ist 0 und unter 1. Dann 2, ist 1, Minus ist 0“.

Mit „Minus“ ist das Subtraktionszeichen zwischen der 4 und der 3 gemeint und mit „Null und unter 1“ das Ergebnis von „2–3 = -1“, mit „dann 2“ las er laut die nächste Zahl in der Aufgabe vor, und mit „ist 1“ das Ergebnis seiner Rechnung „-1+2 = 1“, und mit „minus“ meinte er das nächste zu einzusetzende Rechenzeichen rechnete dann abschließend „1–1 = 0“.

Elias sehr kurze Bearbeitungszeit für eine recht komplexe Aufgabe verdeutlicht sein besonderes Gefühl für Zahlen sowie seinen intuitiven Problemlösestil. Elias erahnt die Rechenzeichen und hat dabei alle anderen Zahlen im Blick. Zudem operiert er hier korrekt mit negativen Zahlen.

3. Ausblick

Diese herausgestellten Begabungsbesonderheiten gilt es in weiteren Fallstudien zu prüfen, ggf. noch weitere Merkmale zu generieren, um hiervon ausgehend eine umfassende ganzheitliche Kennzeichnung mathematischer Begabungen im Vorschulalter vorzunehmen.

Die Fallstudien sollen im „Mathe für kleine Asse“ Projekt, einem Enrichment–Projekt zur Förderung mathematisch potenziell begabter Kinder im Vorschulalter durchgeführt werden. Außerdem soll mittels weiterer Fallstudien zu älteren, inzwischen nachgewiesenermaßen, mathematisch begabten Kindern aus unseren Projektgruppen für die dritte bis achte Klassenstufe erfasst werden, wie sich bei ihnen bereits im Vorschulalter ihre bereichsspezifischen Begabungen zeigten.

Literatur

Benölken, R. (2011): Mathematisch begabte Mädchen. Untersuchungen zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter. Münster: WTM.

Gagné, F. (2000): Understanding the Complex Cheorography of Talent Development through DMGT-Based Analysis. In Heller, K.; Mönks, J.; Sternberg, R. J.; Subotnik, R. F.: International Handbook of Giftedness and Talent. Amsterdam, Boston, London: Elsevier, 67-93.

Heller, K. A. (2001): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter (2. Auflage). Göttingen Hogrefe

Kagan, J.; Sontag, L.; Baker, C.; Nelson, V. (1958): Personality and IQ change. In Journal of Abnormal and Social Psychology, 56, 261-266.

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Käpnick, F.; Fuchs, M. (2005): Mathe für kleine Asse 1/2. Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F.; Fuchs, M. (2009): Mathe für kleine Asse 3/4, Band 2. Berlin: Cornelsen.

Roedell, W. C; Jackson, N. E.; Robinson, H. B. (2000). Hochbegabung in der Kindheit. Besonders begabte Kinder im Vor- und Grundschulalter (2. Auflage). Heidelberg: Asanger

Stapf, A.(2010): Hochbegabte Kinder. Persönlichkeit, Entwicklung, Förderung (2. Auflage). München: Beck.

Urban, K. K. (1990): Besonders begabte Kinder im Vorschulalter. Grundlagen, Erfahrungen und Untersuchungen der pädagogisch-psychologischen Arbeit. Heidelberg: HVA/Edition Schindele.Weinert, F. E. (1992): Wird man zum Hochbegabten geboren, entwickelt man sich dahin oder wird man dazu gemacht? In Hany, E.; Nickel, H. (Hrsg.): Begabung und Hochbegabung. Bern: Huber, 197-203.

Sandra THOM, Oldenburg

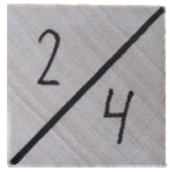
Geschichte(n) der Mathematik – in der Grundschule

Geschichte der Mathematik kann im Mathematikunterricht zur Förderung inhaltsbezogener wie allgemeiner Kompetenzen dienen. Jenseits dieser häufig impliziten Nutzung können zudem spezifische Zielsetzungen historisch-genetischen Lernens bei explizitem Einsatz (Menghini 2002, 86ff.) verfolgt werden. Kritisch muss dabei die bisherige Umsetzung in Form exemplarischen Lernens in den Blick genommen werden.

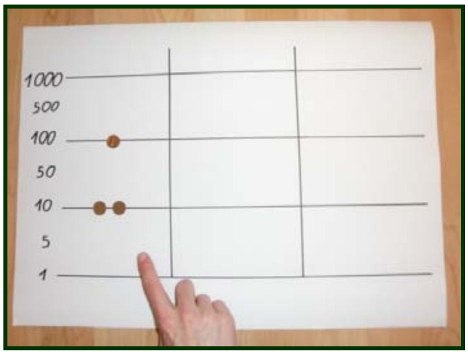
Facetten genetischen Lernens

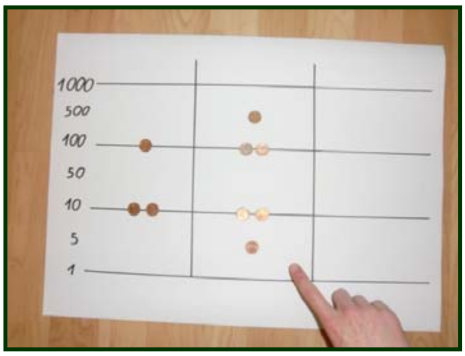
Genetisches Lernen hat den Lernprozess des Kindes im Blick; Unterricht muss die Phase der gegenwärtigen bzw. künftigen Entwicklung im Rahmen eines Spiralcurriculums berücksichtigen und geeignete Lernumgebungen bereitstellen, damit das Kind seine kognitive Struktur in aktiver Auseinandersetzung mit Aufgaben und Problemen auf zunehmend abstrakterer Ebene fortschreitend schematisierend konstruieren kann. Kinder müssen sich dazu an herausfordernden Problemen erproben, Entdeckungen machen, Zusammenhänge erkennen, was auch zur Verstärkung intrinsischer Motivation führt. Diese Form genetischen Lernens ist als psychologisch-genetisches Lernen im Rahmen des didaktischen Dreiecks mehr am Kind orientiert, während historisch-genetisches Lernen mehr an der Sache, der Mathematik, orientiert ist, jedoch daneben auch die psychologischen Prozesse im Kind im Blick hat. Es wird dabei im Sinne Schubrings (1978, 192ff.) auf einer Makroebene für curriculare Ablaufplanung genutzt. Ein Beispiel hierfür ist das an inzwischen als überholt zu betrachtende Kulturstufenmodelle von Größen angelehnte und aus u.a. psychologischer Sicht kritisch zu betrachtende Stufenmodell zur Erarbeitung von Größen in der Grundschule (Franke/Ruwisch 2010, 178ff.).

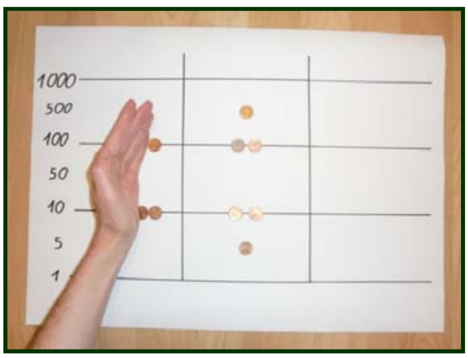
Bedeutung erhält die Verbindung historisch-genetischen und psychologisch-genetischen Lernens insbesondere durch eine produktive Spannung zwischen der Entwickelbarkeit des Stoffes und dem Entwicklungspotenzial des Kindes (Selter 1997, 3), die für entdeckendes Lernen, Problemlösen und fortlaufende Schematisierung im Rahmen des Spiralprinzips genutzt werden kann. So kann beispielsweise mit den an Napiers Rechenstäbe aus dem 16./17. Jahrhundert angelehnten Neperschen Plättchen gestützt aus dem Legen von Aufgaben des Kleinen Einmaleins heraus mittels Problemlösen das Verfahren der schriftlichen Multiplikation entdeckend-verstehend entwickelt werden (Thom 2011).

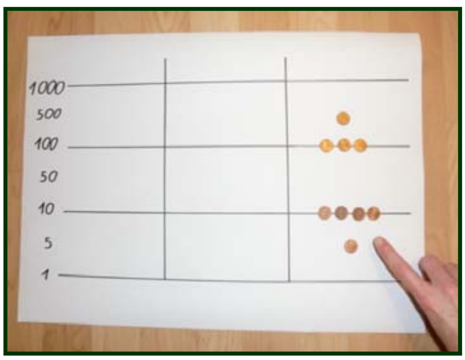


Eine zu geringe Durcharbeitung auf enaktiver und ikonischer Repräsentationsebene oder fehlender intermodaler Transfer können zu nicht oder zu gering für die weiterführende Arbeit ausgebildeten Vorstellungen führen. Auch hier kann im Sinne einer nachträglichen Förderung, d.h. im Rahmen selbst eines bereits im Rahmen des Spiralprinzips fortgeschrittenen Unterrichts, die handlungsorientierte Arbeit mit historischen Modellen Vorstellungs- und Verständnisförderung bewirken, wie u.a. die Interventionsstudie Meisner/Müllers (2012) zeigt, die mit Hilfe des Linienrechnens das Stellenwertverständnis bei lernschwächeren und lernstärkeren Kindern fördern konnten.









Neben dieser Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen können allgemeine Kompetenzen wie Argumentieren, Darstellen und Problemlösen durch die Nutzung historischer Probleme gezielt gefördert bzw. systematisch elaboriert werden. Hierzu werden im Sinne Roths „Sternstunden der Menschheit" herangezogen, also „die Ursituation der Entdeckungen und Erfindungen, Entscheidungen und Inspirationen [, die, S.T.] Hinweise für exemplarische Stoffe geben. Wir müssen sie im biographischen Bereich und im Gegenstandsbereich einer Wissenschaft suchen. Wir müssen uns erinnern, wo uns selbst das Licht aufging, müssen unsere Kinder beobachten, woran sie zu stutzen beginnen, müssen die Geschichte der Wissenschaften erforschen und die Gelenke des Wissenschaftsaufbaues selbst darauf hin bedenken." (Roth 1965, 169) Diese Möglichkeiten werden in der Grundschule genutzt, z.B. beim Königsberger Brückenproblem (Anfänge der Topologie) oder durch Probleme mit multikulturellem Hintergrund wie dem Wolf-Ziege-Kohl-Problem Alkuins aus dem 8. Jh. n. Chr., das in ungezählten Kulturen strukturgleich zu finden ist. Zahlreiche Probleme zur Förderung von Metakognition (Entwicklung von Modellen und Skizzen, systematisches Problemlösenlernen) stammen dabei aus der Blütezeit arabischer Mathematik im Mittelalter, werden bislang dessen ungeachtet in der Regel ohne Wissen über ihren historischen Hintergrund implizit für den Mathematikunterricht eingesetzt. Eine explizite Nutzung der Mathematikgeschichte im Unterricht kann dabei über die Förderung inhaltsbezogener und allgemeiner Kompetenzen hinaus zur Ausbildung von Einstellungen und Haltungen zur Mathematik und zum Mathematikunterricht, zu kreativen Lösungen, zu Fehlern, zu Misserfolgen usw. beitragen (Tzsanakis / Arcavi 2002; Tzanakis / Thomaidis 2011).

Exemplarisch – genetisch – sokratisch: Das „Kuriositätenkabinett" historisch-genetischen Lernens in der Grundschule

Im Sinne exemplarischen Lernens sollten Formen orientierenden Lernens Verbindungen zwischen und Überblick über die eingesetzten Beispiele aus der Mathematikgeschichte schaffen, vergleichbar Brückenpfeilern, die als Teil einer Brücke letztlich erst ihren Sinn erhalten (Wittenberg 1964, 141ff.; Roth 1965, 169ff.; Wagenschein 1989, 30ff., 70; Jahnke 1996, 174; Thom 2010, 415ff.). Dabei können und sollen Kinder die Geschichte der Mathematik nicht in Gänze nachvollziehen. Die Auswahl der für ein solches Konzept notwendigen Exemplare und Inhalte erfordert daher eine Bewertung der Zielsetzung historisch-genetischen Lernens im Rahmen kompetenzorientierten Unterrichts, bei der methodisch Ideen zur Ordnung und Strukturierung wie Mind-Maps oder Zeitstrahlen ebenso bedacht werden müssen wie die Möglichkeit langfristiger Sicherung und Evaluation durch etwa Portfolios und Lerntagebücher. Ein methodisch-didaktisches Konzept im Sinne exemplarischen historisch-genetischen Lernens besteht für die Grundschule bislang nicht; statt einer zielgerichteten Ausstellung bilden die einzelnen Beispiele eine ungeordnete Sammlung von Artefakten vergleichbar einem frühneuzeitlichen Kuriositätenkabinett.

Literaturverzeichnis

Marianne Franke / Silke Ruwisch: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II), Spektrum: Heidelberg ^{2}2010

Hans Niels Jahnke: Set and Measure as an Example of Complementarity, in: ders. / Norbert Knoche / Michael Otte (Hgg.): History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, Bd. 11), Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen 1996, 173-193

Heinrich Roth: Orientierendes und Exemplarisches Lehren, in: Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens, Hermann Schroedel: Hannover / Berlin / Darmstadt / Dortmund ^{8}1965, 169-178

Marta Menghini: On potentialities, limits and risks, in: John Fauvel / Jan van Maanen (Hgg.): History in Mathematics Education. The ICMI Study (New ICMI Study Series, Bd. 6), Kluwer Academic Publishers: Dordrecht / Boston / London ^{2}2002, 86-90

Kira-Vanessa Müller / Christin Meisner: Rechnen auf den Linien nach Adam Ries, in: Sandra Thom (Hg.): Historisch-genetisches Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. Forschen – Fördern – Fordern, Franzbecker: Hildesheim 2012 (im Dr.)

Gerd Schubring: Das genetische Prinzip der Mathematikdidaktik, Klett-Cotta: Stuttgart 1978

Christoph Selter: Vorwort, in: mathematik lehren 83 (1997) 3

Sandra Thom: Nepersche Plättchen – Multiplizieren mal genetisch, in: Grundschulunterricht Mathematik 3 (2011) 12-17

Sandra Thom: Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris, Diss., Franzbecker: Hildesheim 2010

Constantinos Tzanakis / Abraham Arcavi: Why should history of mathematics be integrated in mathematics education? In: John Fauvel / Jan van Maanen (Hgg.): History in Mathematics Education. The ICMI Study (New ICMI Study Series, Bd. 6), Kluwer Academic Publishers: Dordrecht / Boston / London ^{2}2002, 202-207

Constantinos Tzanakis / Yannis Thomaidis: Classifying the arguments and methods to integrate history in mathematics education: an example, in: Evelyne Barbin / Manfred Kronfellner / Constantinos Tzanakis (Hgg.): History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University ESU 6, Holzhausen: Wien 2011, 127-136

Martin Wagenschein: Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch (Pädagogische Bibliothek Beltz, Bd. 1), Beltz: Weinheim / Basel ^{8}1989

Alexander Israel Wittenberg Wittenberg: Genetischer Mathematikunterricht, in: Neue Sammlung. Göttinger Blätter für Kultur und Erziehung 4 (1964) 210-216

Kerstin TIEDEMANN, Siegen

Vorschulkinder auf dem Weg in die Mathematik – auch und gerade in der Familie!

Frühe mathematische Bildungsprozesse sind in ihrem Stattfinden nicht auf institutionelle Kontexte beschränkt; vielmehr finden sie auch und gerade in der Familie statt. Obgleich diese Einsicht in der mathematikdidaktischen Community weitestgehend akzeptiert ist, fehlten Beobachtungsstudien aus dem familialen Kontext bisher gänzlich. Mit meiner nun vorliegenden Dissertation ist ein Anfang gemacht: Es wurden zehn Mutter-Kind-Paare ein Jahr lang in offenen Vorlese- und Spielsituationen mit der Videokamera begleitet. Forschungsgegenstand war dabei die beobachtbare Unterstützung mathematischer Lernprozesse, welche ich interaktionistisch ausgedeutet und theoretisch als ein *Mathematics Acquisistion Support System* (MASS) gefasst habe (vgl. Tiedemann, in Vorb.). Anhand des vielfältigen Datenmaterials wurden zunächst drei unterschiedliche einander ergänzende Perspektiven auf Unterstützung in mathematischen Mutter-Kind-Gesprächen entwickelt, um anschließend unter jeder dieser Perspektiven eine Typenbildung vorzunehmen.

1. Perspektive: Support-Jobs

Um zu beschreiben, in welche mathematischen Gespräche Vorschulkinder im familialen Kontext eingebunden sind, ist die erste Perspektive eine allgemein sozialisationstheoretische. Es wird die Frage gestellt, worauf die Unterstützung, die Mutter und Kind in Vorlese- und Spielsituatione gemeinsam realisieren, ausgerichtet ist. In Anlehnung an eine linguistische Arbeit zur Entwicklung kindlicher Erzählkompetenz von Hausendorf & Quasthoff (1996) habe ich die Ausrichtung der Unterstützung als einen Support-Job untersucht. Support-Jobs sind interaktional etablierte, übergeordnete Aufgaben, die mit der Unterstützung bearbeitet werden (vgl. Tiedemann, in Vorb.). Mit der Unterstützung soll etwas erreicht werden; was aber ist dieses „etwas“? Als Antwort auf diese Frage konnten drei Typen rekonstruiert werden: So kann die Unterstützung erstens auf ein *Mitmachen* des Kindes ausgerichtet sein; dann wird mit der realisierten Unterstützung sichergestellt, dass das Kind entsprechend seinen Fähigkeiten in die möglichst rasch und reibungslos fortschreitende Situation eingebunden ist. Der Support-Job kann zweitens auch ein *Entwicklungsfortschritt* des Kindes sein; dann gerät der Situationsfluss phasenweise aus dem Blick, weil Mutter und Kind daran arbeiten, dass das Kind etwas lernt oder bereits Gelerntes zur Anwendung bringt und damit übt. Drittens die Unterstützung darauf fokussiert sein, dass das Kind eine *Erkundung* gemäß seiner eigenen Idee realisieren kann. Bei diesem Support-Job ist das Kind der Regisseur der Situation, der die Frage, den Weg und das Ziel bestimmt.

2. Perspektive: Alltagspädagogik

Unter der zweiten Perspektive wird die Frage gestellt, welche Vorstellungen vom Mathematiklernen und -lehren mit der jeweiligen Unterstützung realisiert werden. Wie bei der ersten Perspektive und der noch folgenden dritten geht es damit keinesfalls um Ideen oder Konzepte, die den Interaktionspartnern bewusst sein müssen und von ihnen intentional zur Anwendung gebracht werden. Stattdessen erfolgt im interaktionistischen Sinne eine Beschränkung auf das Beobachtbare; mit der zweiten Perspektive wird als die beobachtbare Unterstützung anders beleuchtet. Sie wird im Hinblick auf ein Mathematiklernen des Kindes ausgedeutet. Der theoretische Orientierungspunkt waren dabei das Konzept der Alltagspädagogik von Olson & Bruner (1996) sowie die Instruktionsmodelle von Rogoff et al. (1996). Sie beschreiben allgemein-pädagogische Konzepte, die an den beobachteten mathematischen Mutter-Kind-Diskursen rekonstruiert werden konnten. So wurde als erster Typ eine alltagspädagogische Vorstellung nachgezeichnet, gemäß der das Mathematiklernen ein kontinuierliches Hineinwachsen in die kulturelle Praktik Mathematik ist. Trotz der Orientierung an kulturell Überliefertem bleibt dabei Raum für eine eigene Sicht auf das Kanonische. Gemäß der zweiten rekonstruierten alltagspädagogischen Vorstellung ist Mathematiklernen hingegen primär die Aufnahme von Lernstoff. Mathematische Fakten, Regeln und Prinzipien werden von der Mutter aufbereitet und vermittelt, um vom Kind anschließend aufgenommen und gespeichert zu werden. Die dritte alltagspädagogische Vorstellung, die rekonstruiert werden konnte, zeichnet das Mathematiklernen als die Arbeit an inidviduellen mathematischen Deutungen aus. Dabei ist der Austausch mit anderen notwendig, um die eigenen Interpretation weiterentwickeln zu können.

3. Perspektive: Mathematische Sozialisation

Mit der dritten Perspektive wird schließlich der Blick darauf gerichtet, was Mathematik in Gesprächen zwischen Müttern und Vorschulkindern sein kann. In Orientierung an Schütz & Luckmann (2003) und an Bachmair (2007) wird gefragt: Wie binden Vorschulkinder und ihre Mütter in und mit der realisierten Unterstützung Mathematik in den Sinnbereich ihres Alltags ein? Als Antwort auf diese Frage wurden ebenfalls drei Typen rekonstruiert: Erstens kann die Mathematik als ein Werkzeug eingebunden werden, dem kulturelle Gebrauchsweisen eingeschrieben sind. Die Mathematik ist auf eine tradierte Weise zu nutzen und hilft dann, konkrete Probleme zu lösen. Zweitens kann die Mathematik in Mutter-Kind-Diskursen ein Lernstoff sein. Dann steht weniger ihr Nutzen im Mittelpunkt als vielmehr ihre gesellschaftlich festgelegte Relevanz. So wird von einem Vorschulkind beispielsweise erwartet, dass es lernt, die Zahlwortreihe bis 20 fehlerfrei aufzusagen – selbst wenn das Kind zunächst nicht zu erkennen vermag, worin dessen Nutzen besteht. Drittens kann die Mathematik als ein Beschreibungs- und Denkmittel eingebunden werden. Dann wird die Mathematik genutzt, um eigene Ideen zu beschreiben, um die Hinweise von anderen zu verstehen und um eigenen Pläne weiterzuentwickeln.

4. Zusammenschau der Perspektiven

Zunächst einmal strukturieren die beschriebenen Perspektiven den Forschungsgegenstand ‚Unterstützung' auf begrifflich-theoretischer Ebene. Sie sind nicht trennscharf, sondern ergänzen einander und ergeben gemeinsam ein differenziertes Bild von Unterstützung: Es werden sowohl die allgemeine Ausrichtung des Gespräches als auch die dabei realisierten Vorstellungen von Mathematiklernen und Mathematik in den Blick genommen und beschreibbar gemacht.

Abbildung 1: Typen von Support in mathematischen Mutter-Kind-Diskursen (herausgearbeitet an drei prototypischen Mutter-Kind-Paaren)

Die unter den drei Perspektiven vorgenommenen interpretativ orientierten Analysen und Typenbildungen, die in diesem Artikel nur angedeutet wurden, zeichnen ein Bild davon, wie unterschiedlich Unterstützung im familialen Kontext realisiert wird. Wie an den drei prototypischen Kindern Paco, Alina und Tonio in zahlreichen Szenen gezeigt werden konnte, erleben Vorschulkinder in ihren Familien ganz unterschiedliche Gespräche, geradezu gegensätzliche Vorstellungen von Mathematiklernen und offenbar auch ganz unterschiedliche Bilder von Mathematik (vgl. Tiedemann, in Vorb.). In solche familialen Mathematikkulturen sind Vorschulkinder eingebunden; solche Kulturen gestalten sie mit.

5. Weitere empirische Befunde

Mithilfe der dargelegten Perspektiven und Begrifflichkeiten wurde ferner untersucht, ob und, falls ja, wie sich die Unterstützung in mathematischen Mutter-Kind-Diskursen verändert. So erlaubte die längsschnittlich angelegte Studie beispielsweise die Bearbeitung der Frage, ob sich die Unterstützung in Abhängigkeit vom nahenden Schuleintritt verändert.

Es zeigte sich, dass sich die Unterstützung weder in Abhängigkeit vom Material (Bilderbuch oder Spiel) noch in Abhängigkeit von der Zeit (unterschiedliche Termine mit den Familien) verändert. Wohl aber verschiebt sich der Support-Job, sobald mindestens einer der Interaktionspartner die Situation offenbar als schwierig erlebt, sobald also die interaktiv etablierte Anforderung einen der Interaktionspartner überfordert. Zumeist ist das Kind derjenige Interaktionspartner, der sich überfordert zeigt. Das Datenmaterial enthält aber auch Szenen, in denen Mutter und Kind di Situation als schwierig erleben. In solchen Szenen besteht der Support-Job nicht länger in einem Mitmachen oder einem Entwicklungsfortschritt, sondern vielmehr in der *Ermöglichung von Teilhabe*. Dann steht im Mittelpunkt, die Teilhabe beider Interaktionspartner überhaupt zu sichern.

Literatur

Bachmair, B. (2007): Mediensozialisation – die Frage nach Sozialisationsmustern im Kontext dominanter Medienformen. In W. Sesink, M. Kerres & H. Moser (Hrsg.): Jahrbuch Medienpädagogik 6. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften, 118-143.

Hausendorf, H. & Quasthoff, U. (1996): Sprachentwicklung und Interaktion – Eine linguistische Studie zum Erwerb von Diskursfähigkeiten. Opladen: Westdeutscher Verlag.

Olson, D. & Bruner, J. (1996). Folk psychology and folk pedagogy. In D.R. Olson & N. Torrance (Hrsg.): The handbook of education and human development. Cambridge, Mass. (u.a.): Blackwell, 9-27.

Rogoff, B., Matusov, E. & White, C. (1996): Models of teaching and learning - participation in a community of learners. In D.R. Olson & N. Torrance (Hrsg): The handbook of education and human development. Cambridge, Mass. (u.a.): Blackwell, 388-414.

Schütz, A. & Luckmann, T. (2003): Strukturen der Lebenswelt. Konstanz: UVK.

Tiedemann, K. (in Vorb.): Mathematik in der Familie – Support früher mathematischer Lernprozesse in Vorlese- und Spielsituationen. Münster: Waxmann.

Christoph TILL, Ludwigsburg

Das Gummibärenkartell - Vorstellung einer Statistiksoftware für Primar- und Sekundarstufe

1 Die statistische Werkzeugsoftware Tinkerplots

Die statistische Werkzeugsoftware Tinkerplots bietet vielfältige Möglichkeiten bereits junge Lernende in die Welt der explorativen Datenanalyse und Inferenz einzuführen. Die Software wurde an der ´University of Massachusetts´ von Clifford Konold und Craig Miller entwickelt. Als Datenanalyse-, Simulations- und Visualisierungsinstrument erlaubt es Tinkerplots eigene oder schon vorhandene Datensätze spielerisch auszuwerten und graphisch darzustellen, wobei die Lernlandschaft sehr offen gestaltet ist (Biehler, 2007). Dadurch entstehen je nach Vorgehen verschiedene Repräsentationen ein und desselben Datensatzes. Dies wird der Tatsache gerecht, dass zu untersuchende Problemstellungen, zugunsten eines verbesserten Verständnisses, immer auch unter verschiedenen Perspektiven betrachtet werden können und sollten (Wagner, 2006). Bei der Arbeit mit Tinkerplots, das für die Stochastik-Statistikausbildung der Klassen 4-8 konzipiert wurde, lernen Schüler, wie sich das eigene Tun direkt auf die Darstellung der Daten auswirkt. Die Bedienung des Softwaretools ist intuitiv, so dass auch schon junge Lernende auf einfache Art und Weise Graphen erzeugen können.

2 Funktionsprinzip und Grundoperationen

Zu Beginn der Datenanalyse muss man sich entscheiden (je nach didaktischer Zielsetzung und Klassenstufe), ob Daten selbst erhoben und eingelesen oder Datensätze aus dem Internet importiert und untersucht werden sollen.[1] Anhand eines virtuellen Stapels von „Steckbriefen“ (ein Brief für jedes Individuum) oder einer Tabelle (Merkmale der Individuen und deren Ausprägungen) bekommt man die Information über den Datensatz. Graphisch wird der Datensatz in Form eines „Dotplots“ dargestellt - zunächst eine ungeordnete Punktwolke, in der jeder Punkt ein Individuum repräsentiert. Durch Klicken auf kategoriale Merkmale in der Tabelle färben sich die Punkte den entsprechenden Ausprägungen. Bei quantitativen Merkmalen nimmt die Farbintensität mit der Höhe der Merkmalsausprägung zu. Will man spezifische Information zu einer Person (Tier, Gegenstand etc.) einholen, kann man sich umgekehrt durch Klicken eines beliebigen Punktes dessen „Steckbrief“, sowie dessen Platz in der Tabelle anzeigen lassen.

[1] Eine große Bandbreite an echten Datensätzen aus verschiedenen Kontexten findet man auf http://lib.stat.cmu.edu/DASL/

Durch das Anwenden der Basisoperationen “stack” (stapeln), “order” (ordnen) und “separate” (trennen) auf die zunächst ungeordnete Punktwolke arrangieret sich der Datensatz neu. Die einzelnen “Icons” (Punkte) bewegen sich dynamisch im Fenster und formen sich zu (un-) konventionellen Diagrammen. Zusätzlich gibt es die Möglichkeit, verschiedene Merkmale durch „drag & drop“ auf die horizontale oder vertikale Achse zu legen. Tinkerplots bietet somit die Möglichkeit, multivariate Datensätze zu analysieren und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Merkmalen zu entdecken, ohne dass dabei auf für Schülerinnen und Schüler schwer nachvollziehbare Streudiagramme zurückgegriffen werden muss (Biehler, 2007).

3 Ikonische Repräsentationen

Neben den Aspekten der offenen Gestaltung von Lernwegen – v. a. speziell dem handelnden Aufbau eigener Graphen in Tinkerplots – zeichnet sich die Software durch einen weiteren Punkt aus, der mehr als nur ein ästhetisches Feature ist: Die Möglichkeit der ikonischen Darstellung eines einzelnen Datenpunktes in Form eines Piktogramms. Merkmalsträger im Dotplot können in Form von kleinen Bildern (Icons) dargestellt werden. Auf den ersten Blick mag dies den Anschein einer nutzlosen Spielerei machen, doch Kognitionspsychologen messen dieser *ikonischen Repräsentation* (vgl. Kurz-Milcke et al., 2011) einzelner Datenpunkte innerhalb größerer Datensätze einen hohen Stellenwert bei (vgl. Martignon et al. 2001). Experimente mit Erwachsenen zeigen, dass Häufigkeitsverteilungen in Form von sogenannten Populationsdiagrammen (Prinzip: One-Individual-One-Icon) im Vergleich zu anderen Repräsentationen oft besser verstanden werden (Brase, 2008). Sie sind intuitiv leicht zugänglich, da die ikonische Repräsentation numerischer Information menschlichen Informationsverarbeitungsprozessen nachempfunden ist (Gigerenzer et al., 1995; Kurz-Milcke et al., 2011).
Der Mehrwert bestimmter Repräsentationsformate kommt zum Tragen, wenn man Schülerinnen und Schüler für ein wesentliches statistisches Prinzip sensibilisieren will: Der Übergang vom einzelnen Individuum mit seinen spezifischen Merkmalen hin zum Kollektiv, in welchem nicht mehr zwischen den einzelnen Individuen unterschieden wird. Der Blick auf den Einzelnen verrät zwar spezifische Merkmale, doch erst der Blick auf die Verteilung des kompletten Datensatzes erlaubt es bestimmte Muster und Strukturen aufzudecken.

4 Beispielstunde – Erstellung eines Säulendiagramms

In zwei 5. Klassen einer Realschule wurde jeweils das Thema „Erstellen eines Säulendiagramms“ durchgeführt. Es handelte sich um eine Einführungsstunde zum Arbeiten mit Tinkerplots. Die Schülerinnen und Schüler kannten die Software nicht und hatten wenig statistisches Hintergrundwissen. Daher beschränkte ich mich auf basale Operationen in Tinkerplots, die die Klasse durch meine Anleitung durchführte. Die Lernenden sollten jeweils im Rahmen einer 90-minutigen Doppelstunde durch das Hantieren mit farbigen Gummibärchen das Säulendiagramm kennenlernen, um es dann schließlich mit Tinkerplots am Computer zu visualisieren: Angeleitet von der Lehrperson, bestand die Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler zunächst darin, den Inhalt von insgesamt fünf Gummibärchenpackungen zu untersuchen. Dazu wurden fünf Gruppen gebildet, die den Arbeitsauftrag erhielten, die Gummibärchen zunächst farbig zu bündeln und schließlich so darzustellen, dass mit einem Blick auf die Verteilung der Farben geschlossen werden kann. Somit entstanden (Vor-) Formen von Säulendiagrammen. Im nächsten Schritt sollten die Schülerinnen und Schüler in 2er-Gruppen am Computer ihr eigens erstelltes Säulendiagramm ´digitalisieren´, indem sie mithilfe eines Arbeitsblatts zu Tinkerplots Schritt für Schritt ihr Diagramm handelnd aufbauten (vgl. Abbildung 1).

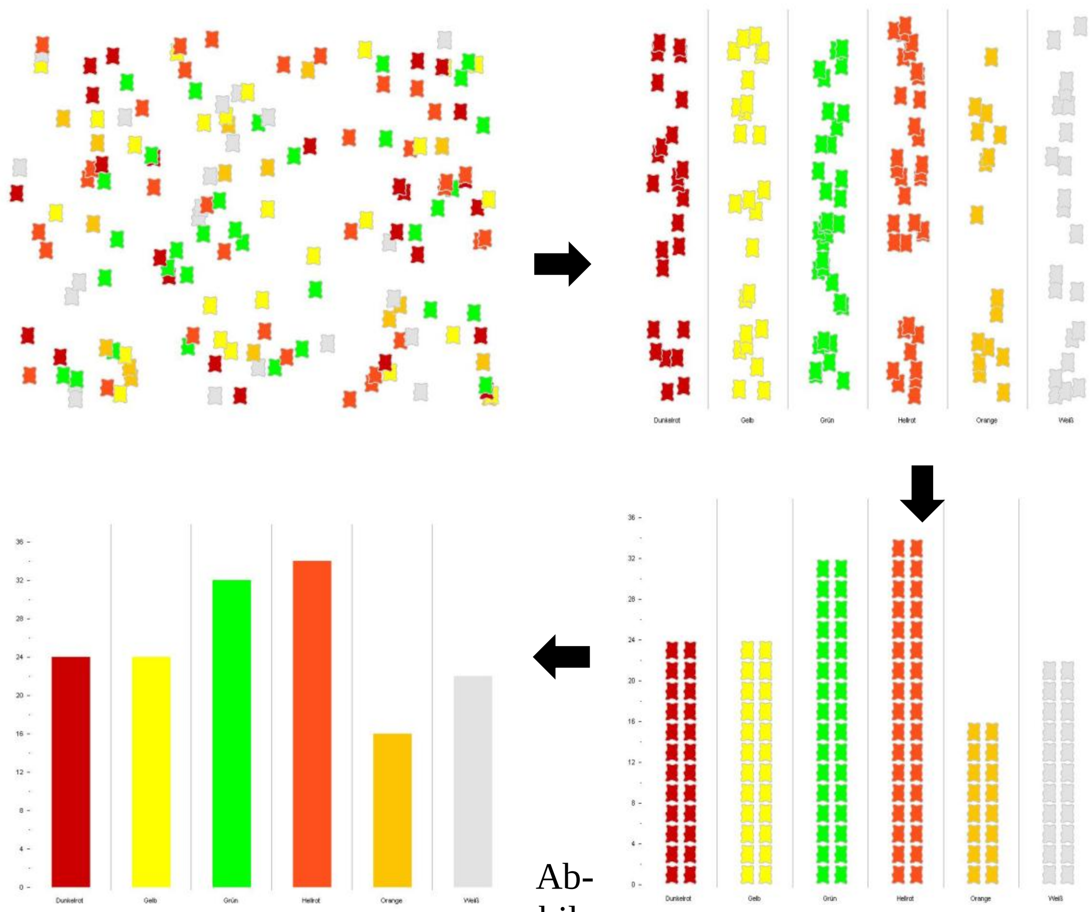


Abbildung 1: Der Weg von der Punktwolke zum Säulendiagramm

5 Diskussion

Die offene Gestaltung der Lernwege beim Arbeiten mit Tinkerplots und die Möglichkeit der ikonischen Repräsentation einzelner Datenpunkte sind Charakteristika, die wesentlich zum Verständnis statistischer Zusammenhänge beitragen können. Ihren Wert entfalten sie aber nur dann, wenn das Arbeiten mit der Software in ein größer angelegtes didaktisches Konzept eingebettet ist. Dazu gehören sowohl die vorgeschaltete Vermittlung fachlicher, inhaltsbezogener Kompetenzen zur Statistik als auch prozessbezogene Kompetenzen wie der sinnvolle Umgang mit der Computersoftware. So kann man der Gefahr entgehen, dass Lernende vom großen Handlungsspielraum der Software überfordert sind und entgegengesetzt der didaktischen Zielsetzung unreflektiert agieren. Graphiken in Tinkerplots zu erstellen, muss immer auch damit verbunden werden deren Sinnhaftigkeit und Aussagekraft zu hinterfragen. Insofern entfaltet sich der explorative Charakter der Software erst, wenn der Umgang mit Tinkerplots vertraut ist. Dies nimmt sicherlich viel Zeit in Anspruch, die es aber bei sinnvollem Einsatz und Anleitung über den Aufbau belastbarer Konzepte in der Tat wert ist!

Software

Tinkerplots. Dynamic Data Exploration. Cliff Konold & Craig Miller. Key Curriculum Press.

Literatur

Biehler, R. (2007). *Tinkerplots : Eine Software zur Förderung der Datenkompetenz in Primar- und früher Sekundarstufe.* In: Stochastik in der Schule (27), S. 34-42.

Brase, G. L. (2008). *Pictorial Representations in Statistical Reasoning*. http://www.k-state.edu/psych/research/documents/2009ACP.pdf [16.12.2011].

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik.* Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). *How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats*. In: Psychological Review, 102(4), S. 684-704.

Kurz-Milcke, E., Gigerenzer, G.& Martignon, L. (2011). *Risiken durchschauen: Grafische und analoge Werkzeuge*. In: Stochastik in der Schule. (31), S. 8–16.

Martignon, L. & Wassner, C. (2001). *Repräsentation von Information in der Wahrscheinlichkeitstheorie.* In: Manfred Borovcnik (Hg.): Anregungen zum Stochastikunterricht. Die NCTM-Standards 2000, klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich. S. 163–169. Berlin: Franzbecker.

Wagner, A. (2006). *Entwicklung und Förderung von Datenkompetenz in den Klassen 1-6*. KaDiSto (3). Kassel: Universität Kassel. https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214690/4/Kadisto3.pdf [20.03.2012].

Natalie TROPPER, Dominik LEISS, Lüneburg, Martin HÄNZE, Kassel

Vom Beispiel zum Schema – Strategiegeleitetes Modellieren durch heuristische Lösungsbeispiele

Empirische Befunde zu Schülerschwierigkeiten im Modellierungsprozess (z.B. Schukajlow 2011, Stillman et al. 2010) weisen darauf hin, dass mathematisches Modellieren eine sehr komplexe Tätigkeit ist. So zeigten Galbraith und Stillman (2006) auf, dass jeder Schritt im Modellierungsprozess eine potentielle kognitive Hürde für Lernende darstellt. Entsprechend stellt sich im Zusammenhang mit der Vermittlung von Modellierungskompetenz die Frage, wie Lernenden das Überwinden dieser Hürden sowie allgemein ein flexibles Herangehen an realitätsbezogene Problemstellungen ermöglicht werden kann.

Die dem Projekt MaMoS[1] (**Ma**thematisches **Mo**dellieren mit **S**trategien) zugrundeliegende Annahme ist, dass hierzu eine gezielte Vermittlung modellierungsbezogener kognitiver sowie metakognitiver Lernstrategien vonnöten ist. Im vorliegenden Beitrag wird ein Ansatz vorgestellt, ein modellierungsspezifisches Strategieinstrument implizit mithilfe heuristischer Lösungsbeispiele zu vermitteln.

1. Strategieinstrument Lösungsplan

Der im DISUM-Projekt entwickelte sog. Lösungsplan stellt eine vereinfachte und auf vier Schritte verdichtete Variante des siebenschrittigen Modellierungskreislaufs von Blum und Leiss (2005) dar. Er soll Lernenden als strategisches Instrument zur Bearbeitung von Modellierungsaufgaben dienen und stellt hierzu die Schritte *Aufgabe verstehen*, *Mathematik suchen*, *Mathematik benutzen* und *Ergebnis erklären* bereit. Die Reduktion auf diese vier Schritte soll den Lösungsplan zum einen für Lernende handhabbar machen, zum anderen ist er handlungsleitend formuliert, indem er für die einzelnen Phasen des Modellierungsprozesses konkrete kognitive Lernstrategien (z.B. Anfertigen einer Skizze, Aktivierung von Vorwissen) bereitstellt. Da der Lösungsplan in seiner Gesamtheit als Instrument zur Planung und Regulation des Bearbeitungsprozesses genutzt werden kann, kann er zudem das metakognitive Strategierepertoire der Schüler unterstützen.

Der Lösungsplan wurde bei DISUM im Rahmen einer Laborstudie erprobt, wo er den Lernenden als Arbeitsmaterial und der Lehrperson als Interven-

[1] Bei MaMoS handelt es sich um ein interdisziplinäres Projekt zwischen Fachdidaktik (Dominik Leiss, Lüneburg) und pädagogischer Psychologie (Martin Hänze, Kassel), welches zurzeit von der Leuphana Universität Lüneburg finanziert wird.

tionsgrundlage vorlag. Während sich auf quantitativer Ebene Hinweise für die positive Wirkung des Instruments auf die Entwicklung von Modellierungskompetenz ergaben, zeigte eine qualitative Betrachtung der im Rahmen der Studie entstandenen Unterrichtsvideos und Schülerlösungen, dass die Lernenden den Lösungsplan nur sehr selten verwendet und das durch ihn bereitgestellte Lösungsschema nicht erkennbar übernommen bzw. adaptiert haben. Die alleinige Bereitstellung des Instruments scheint also zur Vermittlung der zugrunde liegenden Strategien nicht auszureichen.

2. Lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen

Als Instruktionsmethode zur gezielteren Vermittlung des Lösungsplans wurde in MaMoS das Lösungsbeispiellernen gewählt. Bei Lösungsbeispielen handelt es sich um Aufgabenbeispiele, die neben der Aufgabenstellung auch eine schrittweise Lösungsdarstellung enthalten. Die Grundidee des Lernens mit Lösungsbeispielen ist, dass ein zu vermittelndes Schema einer Serie von Lösungsbeispielen zugrunde liegt und durch die Beschäftigung mit den Beispielen implizit vermittelt wird. In diesem Zusammenhang konnte bereits vielfach der sog. Lösungsbeispieleffekt (Sweller et al. 1998, S. 273) nachgewiesen werden: Die Konfrontation mit einer Reihe von Lösungsbeispielen führt bei Lernenden häufig zu besseren Leistungen beim Transfer auf verwandte Problemstellungen als das eigenständige Bearbeiten derselben Aufgaben. Der Effekt wurde bislang vor allem für algorithmische Lösungsbeispiele repliziert. Für nicht-algorithmische Kontexte wie mathematisches Modellieren haben Reiss und Renkl (2002) sog. heuristische Lösungsbeispiele entwickelt. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen realistischen statt eines idealtypischen Lösungsprozesses abbilden und auch tentative sowie explorative Elemente enthalten, sodass implizit problemlösendes Arbeiten und heuristischen Strategien vermittelt werden sollen (vgl. Zöttl et al. 2010). Für heuristische Lösungsbeispiele konnte der Lösungsbeispieleffekt noch nicht beim mathematischen Modellieren, aber bereits mehrfach im Bereich des mathematischen Argumentierens belegt werden.

3. Erste Pilotierungsergebnisse

Um zu untersuchen, wie sich der Lösungsplan, wenn er implizit durch eine Serie heuristischer Lösungsbeispiele vermittelt wird, auf die Aufgabenbearbeitung von Lernenden beim Lösen von Modellierungsaufgaben auswirkt, wurde im Rahmen von MaMoS eine Pilotierungsstudie in einer neunten Realschulklasse durchgeführt. In fünf Unterrichtsstunden bearbeiteten die Lernenden zunächst Lösungsbeispiele zu Modellierungsaufgaben aus dem Bereich Satz des Pythagoras, auf die nach einem sukzessiven Fading ausgearbeiteter Lösungsschritte das selbständige Bearbeiten von Aufgaben folgte. Eingerahmt wurde die Unterrichtseinheit von einem Vor- und Nachtest, die unter anderem je fünf Modellierungsaufgaben sowie eine Aufgabe zu explizitem modellierungsspezifischem Strategiewissen enthielten. Die zugehörigen Schülerlösungen wurden für eine qualitative Analyse der Aufgabenbearbeitungen bezüglich der Aspekte *Strategieanwendung* und *explizites Strategiewissen* genutzt.

Die Befunde zur *Strategieanwendung* sollen exemplarisch an drei ausgewählten Resultaten vorgestellt werden:
Lösungsstruktur: Die Analyse offenbarte zunächst, dass die Schüler bei den Modellierungsaufgaben des Nachtests erstaunlich häufig die Vierstruktur des Lösungsplans zur Strukturierung ihrer Lösung herangezogen haben. Bei der Aufgabe „Boje“ etwa konnte diese Struktur in 14 von 18 Schülerlösungen beobachtet werden (siehe hierzu beispielhaft die Lösung in Abb. 1).

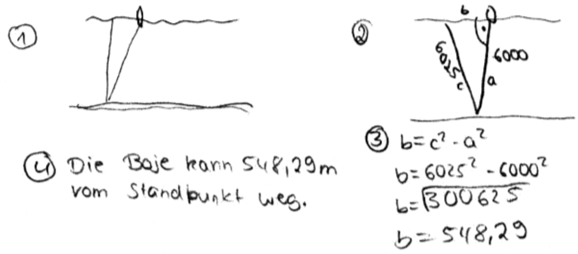


Abb. 1: Schülerlösung zu „Boje“

Skizzen: Der Anteil der Schülerlösungen, die eine Skizze enthalten, stieg von 60% im Vortest auf 87% im Nachtest. Eine genauere Betrachtung der Skizzen zeigt jedoch, dass sie von sehr unterschiedlicher Qualität sind: Während die Lernenden im Vortest ausschließlich Skizzen mit lösungsrelevanten Angaben erstellten, entstanden im Nachtest auch solche, die lediglich als externalisierte Vorstellung des Aufgabenkontextes verstanden werden können (siehe etwa die Skizzen aus Abb. 2). Die Auswertung mithilfe eines Ratingschemas zeigte schließlich, dass bei steigender Anzahl der Skizzen im Nachtest deren mittlere Qualität nahezu konstant geblieben ist.

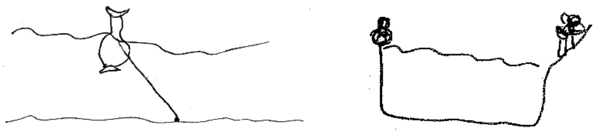


Abb. 2: Schülerskizzen zu „Boje“

Antwortsatz: Während im Vortest bezogen auf die Modellierungsaufgaben ca. 60% aller Schülerlösungen einen Antwortsatz enthielten, stieg dieser Anteil im Nachtest auf rund 95% an.

Zur Testung des *expliziten Strategiewissen* wurde ein spezifischer Aufgabentypus eingesetzt: Zunächst wurde eine Modellierungsaufgabe dargeboten, die aber nicht gelöst werden musste. Im Anschluss wurde eine konkrete Situation während der Aufgabenbearbeitung geschildert (z.B. „Sarah sagt, dass sie nicht versteht, um was es in der Aufgabe geht und was dort gefragt ist.“), zu der die Lernenden möglichst viele Hinweise, was als nächstes zu tun sei, formulieren sollten. Die Auswertung ergab hier zum einen, dass die Lernenden im Nachtest fast doppelt so viele problemadäquate Strategien (also solche, die unmittelbar den Teil im Lösungsprozess betreffen, der durch die Aufgabe angesprochen wurde) formulierten wie im Vortest. Zum anderen besitzen die im Nachtest formulierten strategischen Hinweise insgesamt ein höheres Allgemeinheitsniveau: Während sich die Hinweise im Vortest zumeist sehr stark auf die konkrete Aufgabensituation beziehen (z.B. „Die Dachsparren betrachten“), wurden im Nachtest deutlich mehr allgemein-strategische Hinweise formuliert, die auch auf andere Kontexte transferiert werden könnten (z.B. „Größenangaben notieren“).

4. Zusammenfassung

Einerseits lassen die häufigere Anwendung modellierungsrelevanter Strategien und die Verbesserung des expliziten Strategiewissens vermuten, dass sich die verwendete Kombination von Lösungsplan und heuristischen Lösungsbeispielen positiv auf die Aufgabenbearbeitung von Lernenden beim Umgang mit mathematischen Modellierungsaufgaben auswirken kann. Noch offen ist, ob die Methode tatsächlich effektiver ist als die eigenständige Bearbeitung derselben Aufgaben, sprich: ob hier ein Lösungsbeispieleffekt eintritt. Andererseits zeigen die Resultate zur Skizzenqualität exemplarisch, dass das strategische Verhalten der Lernenden zusätzlich unterstützt werden sollte, damit Strategien nicht nur häufiger, sondern zugleich auch zielführend angewendet werden. Speziell stellt sich hierbei die Frage, ob die beschriebene Instruktionsmethode sinnvoll durch die Lehrperson unterstützt werden kann.

Die weiteren Forschungsarbeiten im Projekt MaMoS werden vor allem darauf abzielen, diese beiden offenen Fragen zu beantworten.

Literatur

Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *Mathematik lehren, 128*, 18-21.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM, 38* (2), 143-162.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM, 34* (1), 29-35.

Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren*. Münster: Waxmann.

Stillman, G., Brown, J. & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at year 9. In R. Lesh et al. (eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 384-398). NY: Springer.

Sweller, J., van Merriënboer & J., Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, 10* (3), 251-296.

Zöttl, L., Ufer, S. & Reiss, K. (2010). Modelling with heuristic worked examples in the KOMMA learning environment. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31* (1), 143-165.

Philipp ULLMANN, Frankfurt

Mit Torten und Balken zur Revolution? „Visual literacy“ im Mathematikunterricht

Wir leben in einer visuell ausgerichteten Informationsgesellschaft. Wer nicht gelernt hat, mit der tagtäglich anstürmenden Bilderflut angemessen umzugehen, droht darin zu ertrinken.[1] Dennoch ist Schule nach wie vor stark auf die Schriftsprache ausgerichtet – auch (und zunehmend) der Mathematikunterricht. Die Zurücksetzung der Bildsprache in unserem Bildungssystems verdankt sich dessen historischer Verwurzelung: einmal im Bildungsbürgertum, das Hochkultur von Populär-/Popularkultur scheidet, zum Zweiten in den Idealen der Aufklärung, die das Denken/das Kognitive vom Sehen/Affektiven trennt.

Obwohl Sehen immer noch als täuschungsanfällig, gefühlsbeladen und kulturell minderwertig gilt, haben visuelle Darstellungen erhebliche Vorzüge: Indem sie sowohl einer unbewussten Betrachtung als auch einer bewussten Analyse zugänglich sind, schaffen sie Verbindungen zwischen Denken und Sehen, zwischen Affektivem und Kognitivem; so können sie zugleich Kreativität und kritisches Denken stimulieren. Zudem helfen sie dabei, komplexe Sachverhalte übersichtlich in den Blick zu nehmen; damit sind sie ein mögliches Werkzeug, um der Informationsflut Herr zu werden. Schule, will sie allgemeinbildend und lebensvorbereitend sein, kommt also nicht umhin, sich mit visuellen Darstellungen auseinanderzusetzen.

Visual literacy und Mathematikunterricht

Schüler/innen, so lassen sich die obigen Überlegungen zusammenfassen, müssen nicht nur die Schriftsprache lesen und schreiben lernen, sondern auch die Bildsprache: sie benötigen *visual literacy*.[2] Darunter verstehe ich mit Braden & Hortin (1982, 41) „die Fähigkeit, Bilder zu verstehen und zu verwenden, einschließlich der Fähigkeit, in Form von Bildern zu denken, zu lernen und sich auszudrücken.“ Aufgrund der gebotenen Kürze werde ich mich im weiteren Verlauf auf den Aspekt Verstehen („Lesen“) beschränken und dabei nur auf das Denken und Lernen eingehen.

[1] „Bilder“ meint hier und im Folgenden immer *intentionale* Visualisierungen.

[2] Während sich die Mathematikdidaktik dem Thema Visualisierung üblicherweise mit Begriffen wie Anschauung bzw. Veranschaulichung nähert und von der Mathematik aus denkt, nimmt *visual literacy* eine disziplinenübergreifende Perspektive ein, die in Konzepte wie *media literacy* bzw. *information literacy* eingebettet ist.

Soll der Mathematikunterricht an *visual literacy* mitwirken, benötigt er als Bildmaterial mathematisch informierte und gehaltvolle Darstellungen. Das Mathematikbuch als vielleicht nahe liegende Quelle ist oft problematisch. Die Beispiele darin fallen gern dem „Mythos des Verweisens“ oder dem „Mythos der Teilhabe“ zum Opfer: Sie verweisen auf die Mathematik und können ihre Bedeutung für eine Teilhabe am Alltag nicht glaubhaft aufzeigen (vgl. Dowling 1998, 4-11). Ein zweiter Weg – und übliches Aufgabenformat – ist die Suche in Zeitungen oder dem Internet. Hier finden sich zahlreiche geeignete (und oft auch weniger geeignete) Beispiele für den Unterricht. An dieser Stelle möchte ich für eine dritte, allzu selten genutzte Quelle werben: die Schulbücher anderer Fächer. Diese Quelle kann kaum überschätzt werden. Schüler/innen werden bei der fächerübergreifenden Wissensintegration nicht allein gelassen; und dass Mathematik dabei helfen kann, andere Fächer besser zu verstehen, erfreut gewiss nicht nur die entsprechenden Fachkolleg/innen.

Torten, Balken und die Revolution – zwei Beispiele

Abb. 1: Diagramm aus *Entdecken und Verstehen 3* (2006, 11)

Exemplarisch habe ich in Geschichtsbüchern der Sekundarstufe I zum Thema „Französische Revolution“ gesucht und bin an zahlreichen Stellen fündig geworden.

Das erste Beispiel stammt aus einem Buch für Realschulen der Klasse 7. Was gibt es hier im Sinne einer *visual literacy* zu lernen und zu denken? Der Lerngewinn zum Thema Visualisierung fällt denkbar mager aus: Das Säulendiagramm aus zwei Zahlen trägt nicht mehr zur Einsicht bei, als dass 629 Millionen Livres mehr sind als 503 Millionen Livres; es ist letztlich reine Illustration. Das gleiche gilt *cum grano salis* für das Kreisdiagramm aus vier Zahlen.

Wie steht es aber mit dem Lerngewinn zum Thema Französische Revolution? Der französische Staat gab 1788 mehr Geld aus als er einnahm – war das vielleicht der Grund für die Revolution? Leider zeigt ein Blick in die Geschichte, dass der französische Staatshaushalt im gesamten 17. und 18. Jahrhundert (fast) nie ausgeglichen war und es trotzdem zweihundert Jahre lang zu keiner Revolution kam. Der Versuch, dem Diagramm eine ernsthafte Aussage zu entnehmen, führt also in die Irre. Und wieder gilt: Das gleiche trifft auf das Kreisdiagramm zu.

Hier werden Sehgewohnheiten eingeübt, die eine *visual literacy* unterlaufen: Die komplexe Frage nach möglichen Ursachen der Französischen Revolution wird statistisch trivialisiert und historisch verfälscht. Anstatt zu zeigen, dass Diagramme das Denken anregen und zu neuen Einsichten führen können, wird hier ein gedankenloser und oberflächlicher Bilderkonsum bedient. Das ist keine Seltenheit in Schulbüchern und – auf Dauer jedenfalls – keine Nebensache.

Natürlich ist es prinzipiell möglich, die rein dekorative Funktion dieser Diagramme zu unterlaufen. Nimmt man sie als Ausgangspunkt für Fragen, ist viel über Frankreich zur Zeit des Absolutismus zu lernen. Zunächst einmal ist erst im ausgehenden 16. Jahrhundert die Zentralisierung der Macht und Verwaltung so weit fortgeschritten, dass die Krone die Finanzhoheit, und das heißt vor allem die Steuerhoheit, innehat. Erst unter dieser Voraussetzung kann man überhaupt sinnvoll von einem Staatshaushalt sprechen. Dann beruht die absolute Monarchie wesentlich auf einer expansiven Territorial- und Kolonialpolitik, die durch Staatsschulden finanziert wird. Das erklärt, warum die beiden Positionen Zinsen/Schuldentilgung und Militär den französischen Staatshaushalt zweihundert Jahre lang dominieren. In der Tat sichert das 1670 von Ludwig XIV. eingeführte Söldnerheer, mit ca. 200.000 Mann in Friedenszeiten die größte Armee Europas, sehr eindrucksvoll Frankreichs Vormachtstellung im 17. und 18. Jahrhundert (vgl. Middell & Höpel 2005, 47-53).

Das zweite Beispiel stammt aus einem Buch für Gymnasien der Klasse 7. Was gibt es hier im Sinne einer *visual literacy* zu lernen und zu denken? Man sieht unmittelbar, dass zum einen große Datenmengen (ca. 60 Zahlen) übersichtlich dargestellt werden können und zum anderen zwei Datenreihen – Einnahmen und Ausgaben – auf einen Blick verglichen werden können. Inhaltlich könnte man an diesem Diagramm die zweihundertjährige Geschichte des Absolutismus in Frankreich abhandeln, wie die folgende Abbildung nur andeuten kann.

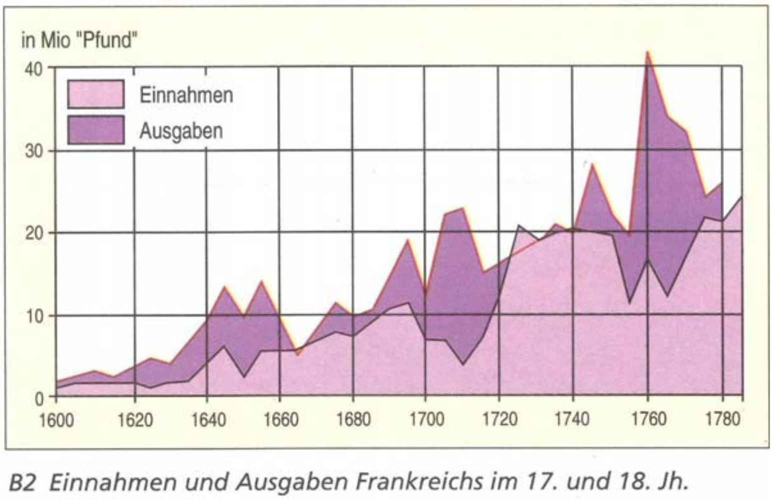


Abb. 2: Diagramm aus *Wir machen Geschichte 3* (1997, 74)

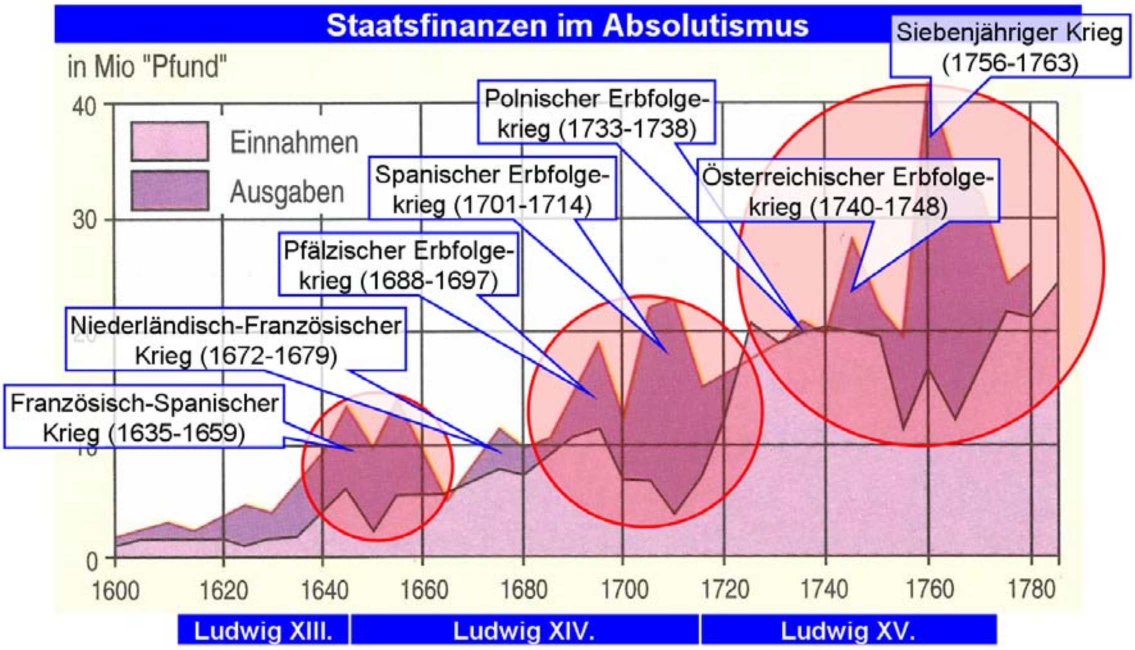


Abb. 3: Eigene Ergänzungen zu Abb. 2

Auch hier werden Sehgewohnheiten eingeübt, aber statistisch und inhaltlich redlich und im Sinne eines verantwortungsvollen Bilderkonsums. Weitere Beispiele, auch aus anderen Fächern, lassen sich leicht finden.

Fazit

Visualisierungen gehören selbstverständlich zum heutigen Medienalltag. Schule sollte im Sinne von *visual literacy* Schüler/innen dazu befähigen, Bilder zu lesen und zu schreiben; insbesondere der Mathematikunterricht kann und soll dazu beitragen, den kreativ-kritischen Umgang mit (mathematisch informierten) Visualisierungen einzuüben. Diagramme rein illustrativ zu verwenden vergibt die Möglichkeit, mit Bildern zu denken und zu lernen. Schulbücher anderer Fächer bieten reichhaltiges Material zur mathematischen wie auch inhaltlichen Auseinandersetzung. Das freilich setzt bei Lehrer/innen die Bereitschaft voraus, ggf. gemeinsam mit Kolleg/innen über das eigene Fachgebiet hinauszublicken.

Literatur

Braden, R. & Hortin, J. (1982): Identifying the Theoretical Foundations of Visual Literacy. Journal of Visual Verbal Languaging 2 (2), 37-42.

Dowling, P. (1998): The Sociology of Mathematics Education. London: Falmer.

Entdecken und Verstehen 3. Geschichtsbuch. Realschule (2006). Berlin: Cornelsen.

Middell, M. & Höpel, T. (2005): Einführung in die französische Geschichte 1500-1945. Leipzig: Leipziger Universitätsverlag.

Wir machen Geschichte 3. Gymnasium (1997). Frankfurt: Diesterweg.

Christian VAN RANDENBORGH, Bielefeld / Würzburg

Instrumentelle Wissensaneignung im Mathematikunterricht – Zur Bedeutung historischer Instrumente für die Verständnisentwicklung –

Einleitung

Immer wieder wurden in der Geschichte der Mathematik Zeichengeräte entwickelt, wie Zirkel & Lineal, Ellipsen- & Parabelzirkel und Pantographen.

Wann aber ist ein historisches Zeicheninstrument ein bedeutsames Instrument? Wie und zu welchem Zweck kann man ein derartiges Zeichengerät im heutigen Mathematikunterricht einsetzen?

Um diese und weitere Fragen beantworten zu können, sind ein theoretischer Rahmen für den Einsatz von Instrumenten und empirische Untersuchungen mit historischen Zeichengeräten erforderlich.

Ausgehend von den theoretischen Modellen der instrumentellen Genese (*instrumental genesis*) und der semiotischen Vermittlung (*semiotic mediation*) wird zunächst aufgezeigt, wie ein historisches Zeichengerät (Parabelzirkel) zu einem Instrument der Wissensaneignung im Mathematikunterricht werden kann.

Die sich daraus ergebenden Forschungsfragen wurden in einer empirischen Studie, die im Schuljahr 2010/11 durchgeführt wurde, untersucht. Dabei wurde der Einsatz des Parabelzirkels von Frans van Schooten (1615 – 1660) im Mathematikunterricht in der 11. Jahrgangsstufe (G9) untersucht. In einer früheren Untersuchung gelang es bereits, erste Einblicke in den Entdeckungsprozess der Schüler zu gewinnen [4]. Die in der aktuellen Studie gewonnen Ergebnisse wurden nun im Rahmen der instrumentellen Genese und der semiotischen Vermittlung analysiert und interpretiert.

Instrumentelle Genese

Für das theoretische Modell der instrumentellen Genese ist die Unterscheidung zwischen Artefakt (= Gerät) und Instrument (= Werkzeug) grundlegend. Dabei wird unter einem Artefakt ein von Menschen gemachtes Objekt verstanden. Instrument hingegen bezeichnet ein psychologisches Konstrukt.

Im Anschluss an Wygotski (1896 – 1934) kann man auch von technischen und psychologischen Werkzeugen sprechen.

Das theoretische Modell der instrumentellen Genese geht davon aus, dass es einen *wechselseitigen Beeinflussungsprozess* zwischen dem Gerät und dem Subjekt gibt. Dabei sind auf Seiten des Subjekts seine Kenntnisse (Vorwissen) und Fähigkeiten von entscheidender Bedeutung. Auf der Seite des Geräts haben die im Gerät enthaltenen Zwänge (Grenzen) und Möglichkeiten entscheidenden Einfluss auf den Prozess, in dessen Verlauf das Instrument als Werkzeug des Subjekts entsteht.

Wygotski bezeichnet die psychologischen Werkzeuge, die innerlich orientiert sind, also auf die Veränderung des Subjekts (Denkprozesse, Verhalten, Handlungsmuster etc.) zielen, auch als Zeichen. Dieser Begriff des Zeichens ist für das theoretische Modell der semiotischen Vermittlung fundamental.

Semiotische Vermittlung

Für meine Untersuchung ist v.a. der Ansatz interessant, dass das Gerät vom Lehrer im Unterricht als ein „tool of semiotic meditation" [3] eingesetzt wird.

Grundlegend für meine Analyse des Unterrichtsgeschehens beim Einsatz eines historischen Zeichengeräts ist der Zeichenbegriff von Peirce; insbesondere die triadische Zeichenrelation und die Vermittlungsfunktion von Zeichen.

„Ein Zeichen ... ist etwas, das für jemanden in einer gewissen Hinsicht ... für etwas steht. Es richtet sich an jemanden, d.h. es erzeugt im Bewusstsein jener Person ein äquivalentes oder vielleicht ein weiter entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den *Interpretanten* des ersten Zeichens. Das Zeichen steht für etwas, sein *Objekt*. Es steht für das Objekt nicht in jeder Hinsicht, sondern in Bezug auf eine Art von Idee ..." [2]

Diese sehr allgemeine Zeichendefinition wurde mit meine Auffassung des Zeichengeräts als Ideenkonglomerat verbunden. Dadurch gelang es, diese interpretationsfähige Zeichenauffassung zu konkretisieren.

Das historische Zeichengerät als Ideenkonglomerat

Doch nun zurück zu der Eingangsfrage: Wie und zu welchem Zweck kann man ein Zeichengerät im Mathematikunterricht einsetzen? Zur Beantwortung dieser Frage ist es wichtig, ein historisches Zeichengerät als „*Ideenkonglomerat*" anzusehen. Diese Auffassung, die ich in Anlehnung an Vollrath [5] entwickelt habe, bedeutet für den Parabelzirkel, dass dieser sechs Arten von Ideen enthält. Zunächst hat ein derartiges historisches Zeichengerät eine Einsatzidee. Es wird benutzt, um damit etwas zu zeichnen. Die mechanische Idee erlaubt die technische Umsetzung und ist somit für die Bauweise des Geräts verantwortlich. Darüber hinaus gibt es eine mathematische Idee, die sich in der Funktionsweise des Geräts wiederfindet. Ein Artefakt kann im Unterricht eingesetzt werden. Es wird dort mit einem bestimmten Ziel, einer bestimmten Absicht eingesetzt. Also kann man sagen, dass das Gerät eine didaktische Idee enthält. Die Schüler analysieren das Zeichengerät. Im Zuge dieses Prozesses entwickeln die Schüler Nutzungs- oder vielleicht besser: *Erklärungsideen*. Zu guter Letzt ist ein mathematisches Gerät bzw. speziell ein Zeichengerät immer in einer bestimmten Zeit und in einer bestimmten Situation entstanden. Daher ist es immer Ausdruck eines bestimmten Interesses an der Mathematik und eines bestimmten Blickes auf die Geometrie. Dieses verstehe ich unter der kulturell-historischen Idee.

Im Mathematikunterricht geht es v.a. darum, die mathematische Idee und die mechanische Idee zu entdecken und ihren Zusammenhang aufzudecken. So kann die im Zeichengerät implizite Mathematik explizit gemacht werden.

Die Entstehung von Zeichen

Bei der empirischen Studie stellte sich heraus, dass die Entwicklung vom Artefakt hin zum Instrument der Wissensaneignung, in bestimmten Phasen verläuft. In diesen Phasen treten bei den Schülern jeweils spezifische Zeichen [vgl. auch 1] auf, die man als verschiedene Zeichenebenen oder Zeichenkategorien auffassen kann: Artefaktzeichen, Schlüsselzeichen und Instrumentzeichen. Den in diesem Prozess, den ich als instrumentelle Wissensaneignung bezeichne, aufgetretenen Instrumentzeichen können dann die Mathematikzeichen entsprechen. Doch wie gelangen Schüler von der einen Zeichenebene zur nächsten? In der Untersuchung stellte sich heraus, dass es Übergangsphasen gibt, in denen eine bestimmte Frage schwerpunktmäßig untersucht wird. So geht es in der ersten Übergangsphase um die Frage, WAS zeichnet das Gerät? In der zweiten Übergangsphase konzentrieren sich die Beschäftigung der Schüler auf die Frage, WIE zeichnet das Gerät? In der letzten Übergangsphase geht es dann um die Frage, WARUM zeichnet das Gerät? Im Laufe dieses Prozesses traten bestimmte Zeichen auf, die über die aktuelle Zeichenebene hinausgingen und für die Beschäftigung in der nächsten Phase wichtig waren. Diese (Übergangs-)Zeichen nenne ich *Trägerzeichen*.

Instrumentelle Wissensaneignung

Dieser Weg, der mit den Artefaktzeichen beginnt und über die Trägerzeichen weiterführt, bildet die stattfindende Verständnisentwicklung ab. Die Schüler stellen in diesem Prozess auch immer wieder Rückbezüge zu den vorher erreichten Zeichenebenen her. Dieser Verständnisprozess, in dem aus dem Gerät (= Artefakt) ein Instrument der Wissensvermittlung wird, nenne ich *instrumentelle Wissensaneignung*.

Die hierbei festgestellten Zeichen ermöglichten es, die universelle Zeichendefinition von Peirce (s.o.) zu konkretisieren:

Im ersten Satz finde ich in der Bezeichnung „in einer gewissen Hinsicht“ die Erklärungsidee wieder. Unter den „äquivalenten Zeichen“ (Satz 2) verstehe ich die Artefaktzeichen. Ein „weiter entwickeltes Zeichen“ ist genau das, was ich als Trägerzeichen herausgefunden habe. Unter der Formulierung: „Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den *Interpretanten* des ersten Zeichens.“ verstehe ich die Kette von den Artefaktzeichen über die Schlüsselzeichen hin zu den Instrumentzeichen, wobei für den Übergang zu der nächsten Zeichenkategorie die Trägerzeichen die entscheidende Rolle spielen. Im letzten Teil des Peirce-Zitates sehe ich das Ideenkonglomerat angesprochen.

Darüber hinaus konnte ich in diesem Zitat auch die zwei Richtungen der instrumentellen Genese (Instrumentation – Satz 2 und Instrumentalisation – Satz 4 und 5) und vor allem auch die in diesem Prozess entstehenden Erklärungsideen (Satz 1 und 3) wiederfinden.

Literatur

[1]Bartolini Bussi, M.G. / Mariotti, M.A. (2008): Semiotic meditation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective; in: L. Englisch (Hrsg.): Handbook of international research in mathematics education, New York [2]2008, S. 746-783

[2]Hoffmann, M.H.G. (2003): Semiotik als Analyse-Instrument; in: M.H.G. Hoffmann (Hrsg.): Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven, Hildesheim/Berlin 2003, S. 34-77

[3]Machietto, M. / Trouche, L (2010): Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories; in: ZDM Mathematics Education (2010) 42, S. 33-47

[4]van Randenborgh, Chr. (2005): Van Schootens Ortslinienzirkel. Ein entdeckender Zugang zur geometrischen Definition der Parabel; in: PM Praxis der Mathematik in der Schule 47, Köln 2005, S. 36–39

[5]Vollrath, H.-J. (2003): Zur Erforschung mathematischer Instrumente im Mathematikunterricht; in: L. Hefendehl-Hebecker / S. Hußmann (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie, Festschrift für Norbert Knoche, Hildesheim 2003, S. 256-265

Ingrida VEILANDE, Riga

„Take Me to the Mathematical Circle! "

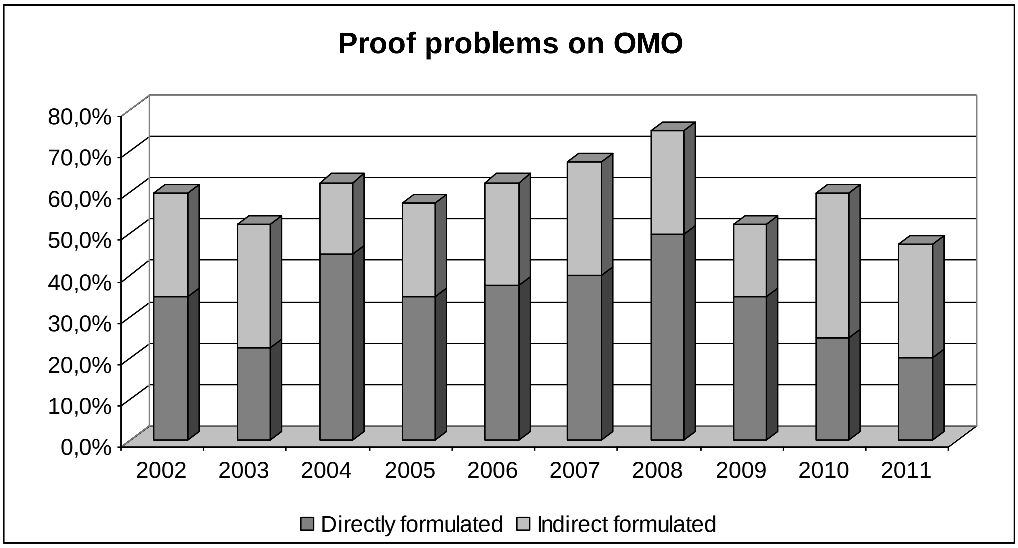
Introduction

Investigating challenging problems and preparing the students for various mathematical contests are the key goals of mathematical circles in Latvian schools. One of the reasons why mathematical circles for students of primary schools are organized rather seldom is that problem sets of Mathematics Olympiads are mainly created for students of 5^{th} to 12^{th} grades. Younger-grade students can participate in the Open Mathematical Olympiad. This opportunity points to the need of introducing some basic problem-solving principles to the children.

The activities of *Mathematical Circles* (**MC**) in Soviet times were the way of independent thinking. The problem sets of *Mathematics Olympiads* (**MO**) were widely used and researched to raise the mathematical competences of MC participants. A variation of this approach is extant in contemporary post-Soviet states. New, colorful ideas inspired by the significant work of Western education science and didactic scientists flow into the content of MCs for younger grade students. On the other hand, the phenomenon of MCs in Russia and post-Soviet republics is an established fact worldwide. We can now see how the MCs activities based on the aforementioned experience progress in the USA (web site of AMC).

Mathematical circles in Latvia

The MOs in Latvia have been taking place for more than 60 years. The content of problem sets has changed - the share of continuous mathematics has diminished, while the share of discrete mathematics has increased. This tendency is especially conspicuous in problems sets of the Open Mathematical Olympiad that is very popular in Latvia. About 40% of problems created for the young students do not need any special mathematical knowledge. This does not mean that there is no need for comprehension of some problem solutions strategies, reasoning and proofs. Looking at the past 10 years we can see that on average the problems of proof account for more than half of all problems for all grades. Proof problems are usually formulated directly. The indirectly formulated problems are existence or estimations problems (see graph 1). The problem set for the 5^{th} grade includes one or two such problems. When evaluating Olympiad works of younger-grade students, the most common mistakes in solutions of proof problems are identified. These are: misunderstanding the problem, guessing the answer, finding a particular example not the general solution, absence of investigation of given objects, and deficient argumentation. These results demonstrate the importance of the first steps of problem-solving: analysis and classification of objects given in the problem.



Graph 1. Proof problems on OMO.

The principles of lesson design for younger grade students

Problem solving (**PS**) takes the central place in the mathematical circle. This term includes deep content from the view point of teacher. When choosing a problem the teacher cogitates about the solution: its level of difficulty, creation of a solution plan, useful methods, additional sub-problems, comprehension of students, possible questions and explanations. The problem must be challenging and at the same time accessible.

Any MC lesson has been designed with consideration of two important guidelines: the ideas of psychology scientists and the basics of Olympiad mathematics.

According to Piaget studies, children aged 7 to 11 are in the operational stage of development and they can solve problems about the classification, arrangement and grouping, but they don't understand abstract rules. Vigotsky's research work in the field of epistemology shows that children's learning processes have to be assisted by a skilled teacher and be organized progressively. Having studied how students learn, Bruner recommended the „spiral-like" learning where mathematical concepts must be revisited time after time, extending the content of the subject (Gage, Berliner).

The content of MCs in general must be like a good textbook: for example „There must be a lot of problems of different nature and different level of difficulty" and „the deductive elements must be introduced step-by-step" (Bonka, Andzhans).

PS processes cover different steps of intellectual activities that include detailed analysis of the given objects, mastering various PS strategies, generalization competence, and intuition. This complex process can be structured. For example, Professor Tomas Teepe developed a scheme of the PS process that combines the mind map with the great ideas of George Polya, Arthur Engel and Paul Zeitz (Teepe). In accordance with the findings of psychologists, primary school children have to start with the first level – understanding and analysis of the given objects. Teachers have to provide many additional practical activities in MCs so that children can touch and investigate objects, research the properties of given objects, sort them and experiment. Physical properties of objects improve the comprehension of elements' inter-correlation and create the basis for the formation of abstract thinking in children. New PS strategies have to be introduced step by step.

Any MC lesson has to be designed combining such different components as topic, problem set, PS methods, students' work forms; the teacher has to provide an open, joyful and motivating ambience in the classroom as well.

Practical experience

In Latvian MCs for young grade students there are varied miscellaneous work forms to consider the mathematical topics on number theory, arithmetic, algebra, combinatorial geometry, graph theory and others. Discussions, work in pairs or in groups, problem solution using supporting aids and materials, and games are used to teach students many solution strategies: try and check, research simple special case, make a table, draw, paint, search extreme element, use the Dirichlet's box principle and others. Special attention is paid to investigation and classification of the objects described in the given problem.

<u>Example 1.</u> A lesson about the system of linear equations was held in Adazhi high school MC. There were demonstrated PS without introducing symbolic variables. The solution methods used were making a table, drawing a picture, complete enumeration, and the trial and error method. The children actively participated in discussions and found their own solutions:

Problem 1. Small things are set into two magic boxes. In the white box there are 4 more things than in the red one. If we take two equal white boxes and a red box, the total number of small things is 23. One of the girls, Laila, solved the problem very fast. She stated that in every box there is more than one thing. Then she observed that white boxes contain an even number of things, therefore the number of things in the red box is odd. She tried 3 that did not fit. Number 5 was the correct answer. In her solution Laila used the number theory results considered in previous classes.

Example 2. In another lesson only one problem was investigated:

Problem 2. A large cube is made from 27 unit cubes. The large cube is dipping into a pot of red paint so the whole outer surface is covered. Then we rearrange the large cube in a different way and dip it in paint again. How many times do we have to dip the large cube into paint for all faces of all unit cubes to be red?

Here the lesson plan was carried out starting with simple introductory cases when the large cube consists of 1 or 8 unit cubes. The children announced some hypotheses. Very serious attention was paid to discovering particular properties of unit cubes after the first paint. The minimal and maximal number of dipping of any unit cube was detected. Then children worked out an algorithm, checked the hypothesis and tried to prove the minimality of the solution. First perplexity happened when encountering the problem – "What do we have to do with the large cube after the first dipping in paint?". Other difficulties came to the front when the algorithm of rearranging had to be described. Children practiced with unit cubes and colored stickers as to "paint" the large cube, decompose it and experiment with the arrangement of the large cube.

Conclusions

Any teacher of young students has to take into account the fact that every child is an individual with their own thinking model. The teacher's responsibility is to comprehend the solution method discovered by the student and not to impose the spatial pattern of a solution. The teacher must facilitate the students' creativity and show different ways of solving the problem. Activities in MCs of elementary school not only improve and expand students' knowledge, but also increase the professional qualification of teachers.

Literature

AMC: History of the American Math Circles Experience. National Association of Math Circles. Web site. URL: http://www.mathcircles.org, revisited on March, 2012.

Bonka, D., Andzhans, A. (2008) First Little Steps on a God-Knows-How Long Route. Proceedings of the Discussing Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico, 6 – 13

Gage, N.L., Berliner, D.C. (1998) Educational Psychology. (in Latvian). Riga, Zvaigzne ABC.

Teepe, T. (2010) Solving Math problems. URL: http://heuristixx.wordpress.com, revisited on March, 2012.

Markus VOGEL, Heidelberg, Andreas EICHLER, Freiburg

Prognostische Entscheidungsmuster von Schülern in einfachen statistischen Situationen

Im Bereich der Leitidee *Daten und Zufall* sollen Schülerinnen und Schüler auch lernen, prognostische Entscheidungen zu treffen. Damit stellen sich u.a. Fragen danach, wie bzw. auf der Basis welcher mentalen Modelle Schülerinnen und Schüler Prognosen konstruieren und welche Situationen zur Aktivierung solcher Modellkonstruktionen geeignet scheinen. In diesem Beitrag werden Forschungsstand und Forschungsansatz, Theoriebausteine, theoriegeleitete Aufgabenkonstruktion und zentrale Ergebnisse bisheriger pilotierender Studien dargelegt.

1. Forschungsstand und Forschungsansatz

Nach Jones & Thornton (2005) lassen sich drei Phasen der Forschung im Bereich der Stochastikdidaktik unterscheiden: die Piaget-Periode, die Post-Piaget-Periode und die gegenwärtige Periode. Eine kurze Zusammenfassung dieser drei Phasen skizziert den bisherig vorhandenen Forschungsertrag, in die sich der hier beschriebene Forschungszugang einbettet.

In ihrer grundlegenden Arbeit untersuchten Piaget & Inhelder (1951/1975) das probabilistische Denken von Schülerinnen und Schülern, die in Regel zuvor keine stochastische Schulung genossen hatten. Hauptsächlich handelte es sich dabei um Zufallsexperimente mit einfachen Zufallsgeneratoren, die als Laplace-Experimente modelliert werden können. Die entscheidenden Thesen von Piaget & Inhelder (1951/1975) besagen in aller Kürze zusammengefasst, dass Wahrscheinlichkeiten entsprechend der Piaget'schen Stufentheorie der kindlichen Entwicklung erst ab einem bestimmten Alter gelernt werden können, da ohne die Voraussetzungen von reversiblem, kombinatorischen und proportionalen Denken kein stochastisches Denken ausgebildet werden kann.

Namhafte Vertreter der Post-Piaget-Phase sind Fischbein (1975) und Kahneman & Tversky (1972). Fischbein zeigte in seinen Arbeiten (ebenfalls mit Fokussierung auf Laplace-Experimente), dass primäre stochastische Intuitionen (bis zu einem gewissen Grad) durch Schulung in sekundäre Intuitionen überführt werden können. Dieser Lernprozess ist abhängig von der gewählten Aufgabe und den kognitiven Dispositionen des kindlichen Adressaten, ist also, wenigstens teilweise, unabhängig vom Alter. Dabei können Fehlkonzepte auftreten, wenn die Kinder sekundäre Intuitionen, die sie anhand einer Aufgabe ausgebildet haben, dahingehend übergeneralisieren, dass sie entsprechend bei anderen Aufgaben vorgehen. Solche Fehlkonzepte und fehlleitenden Heuristiken standen im Mittelpunkt der Arbeiten von Kahneman & Tversky (z.B. 1972). Sie belegten nachdrücklich, dass Stochastik kein originäres Feld für Intutionen ist und selbst in Stochastik geschulte Menschen leicht Fehlurteilen unterliegen.

Die gegenwärtige Phase der stochastikdidaktischen Forschung ist gekennzeichnet durch einen enormen Zuwachs an Forschung im Bereich der Probabilistik wie auch der Statistik, die in früheren Jahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung eher nachgeordnet war. Dabei konzentrieren sich gegenwärtige Forschungsarbeiten generell unmittelbarer auf das Unterrichtsgeschehen (vgl. Jones & Thornton, 2005). Dabei sind Untersuchungen von Kindern ohne stochastisches Vorwissen im Bereich von datenbasierten Zugängen, die sich in ihrer Problemphänomenologie nicht als Laplace-Experimente erfassen lassen, noch unterrepräsentiert (vgl. Mokros & Russel, 1995).

Hier setzt die vorliegende Forschungsarbeit mit dem Fokus darauf an, wie und auf welcher Grundlage Kinder der frühen Sekundarstufe in für sie einfachen bzw. vertrauten statistischen Entscheidungssituationen datenbasierte Prognosen anstellen.

2. Theoriebausteine

Der hier berichtete Forschungszugang fußt im Wesentlichen auf zwei Theoriebausteinen: der Theorie zur kindlichen Denkentwicklung von Siegler (1996) und der Theorie der mentalen Modelle (Johnson-Laird, 1983).

Siegler (1996) zitiert diverse Studien, deren empirischen Befunde das Piaget'sche Stufenmodell der kindlichen Denkentwicklung in Frage stellen. In seinen eigenen Studien findet Siegler (1996) zahlreiche Hinweise darauf, dass Kinder einer bestimmten Altersstufe beim Problemlösen auf eine Bandbreite an verschiedenen Strategien zurückgreifen – die Unterschiedlichkeit bezieht sich auf interindividuelle Unterschiede als auch auf intraindividuelle Unterschiede hinsichtlich der Elaboration von Strategien in verschiedenen Problemkontexten. Siegler stellt dem Piaget'schen Stufenmodell ein Denkentwicklungsmodell gegenüber, dessen Grundstruktur er in der Metapher von Wellen an verschiedenen Theorien und Strategien beschreibt, die sich in der individuellen kindlichen Denkentwicklung verschiedentlich auf- und abbauend überlappen („overlapping waves“).

Mentale Modelle (z.B. Johnson-Laird, 1983) sind ein theoretisches Konstrukt der Deskription, mit dem Referenzen dafür angegeben werden können, ob ein Individuum situativ über die wesentliche Strukturen eines mathematischen Sachverhalts und dem Umgang damit gedanklich verfügt: Es geht um die Analogie in Struktur („In welchem Maß sind relevante Strukturen des mathematischen Objekts und ihr kausaler Zusammenhang gedanklich repräsentiert?“) und Funktion („In welcher Weise kann damit flexibel operiert und argumentiert werden?“) eines mentalen Modells (vgl. Schnotz & Bannert, 1999). Die Tragfähigkeit mentaler Modelle lässt sich in der Reichweite ihrer Struktur- und Funktionsanalogie bemessen. Dadurch werden Güte und Reichweite der Schlussfolgerungen bestimmt, die mentale Modelle kennzeichnen (Johnson-Laird, 1983) und zu neuem Wissen führen können. Mit dem deskriptiven Charakter wird nicht der Anspruch erhoben, das individuelle situationsspezifische Konstrukt selbst zu beschreiben, sondern eine (oder mehrere) externe Repräsentation(en) des mentalen Modells.

3. Theoriegeleitete Aufgabenkonstruktion

Entsprechend dem o.g. Forschungsfokus und der Struktur- und Funktionsanalogie mentaler Modellbildung sind die in den pilotierenden Studien sukzessiv weiterentwickelten Aufgaben gekennzeichnet durch Merkmale der:

- *Situation-Struktur:* eine einfache, für Kinder dieser Altersstufe erwartbar leicht durchschaubare Entscheidungssituation, deren Struktur sich aus der Analyse von gegebenen Daten sowie involvierten Personen und Objekten ergibt (z.B. der Spielstand eines Münzwurfspiels zweier Spieler, bei dem derjenige Spieler gewinnt, der die Münzen am nächsten an einer Wand zu liegen bekommt).
- *Situation-Funktion:* die Notwendigkeit, auf der gegebenen Datenbasis probabilistische mentale Simulationen anzustellen, Daten abzuschätzen und auf dieser Grundlage prognostische Entscheidungen zu treffen (z.B. die prognostische Entscheidung auf der Basis des gegebenen Spielstandes, wer das Spiel bei einer vorgegebenen Anzahl weiterer Spielrunden gewinnen wird).

Die theoretische Analyse solcher Aufgaben (vgl. Eichler & Vogel, 2011) ergibt theoriegeleitet eine Abstufung von vier Schwierigkeitsgraden, die sich im gegebenen Informationsgehalt zu verfügbaren Daten (gegeben: ja/nein) und Objekten (gegeben: ja/nein) einerseits sowie den Erfordernissen von mentaler Simulation (erforderlich: ja/nein) und Datengenerierung (sichtbar: ja/nein) andererseits bemisst.

4. Forschungsmethodik, pilotierende empirische Befunde, Ausblick

Als Teil eines umfassenderen Forschungsprogramms (vgl. Eichler & Vogel, in prep.) wurde die theoriegeleitete Deduktion von Aufgabenschwierigkeitsgraden in zwei Studien mit zwei verschiedenen Schülerstichproben (n_1=134, n_2=44) in den Klassenstufen 4 und 6 (hier zusätzlich differenziert nach Hauptschule und Gymnasium) empirisch überprüft. Hierzu wurden einerseits die Lösungshäufigkeiten in entsprechenden Aufgabensettings anhand von Fragebogen quantitativ ausgewertet, andererseits wurden über Videoaufzeichnungen interviewbasierte Protokolle lauten Denkens einer zufälligen Auswahl von Schülerinnen und Schülern angefertigt und qualitativ analysiert. Ohne an dieser Stelle aufgrund des gebotenen Rahmens auf Details eingehen zu können (dazu Eichler & Vogel, in prep.) lässt sich zusammenfassend die theoriegeleiteten Aufgabenkonstruktion durch signifikant (auf 5%-Niveau) unterschiedliche Lösungshäufigkeiten und interpretative Evidenz von Transskriptanalysen als empirisch validiert betrachten.

Im Fokus der weiteren Forschung stehen Fragen zu Langzeiteffekten und unterrichtlicher Implementation. Dabei geht es zunächst um die Replikation und weitergehende Fundierung der bisherigen Befunde mit einem ausgebauten Aufgabenset und vergrößerter Stichprobe sowie der Fokussierung auf den Einfluss unterschiedlicher Repräsentationen auf die mentale Modellbildung in statistischen Kontexten. Das langfristige Ziel ist, Informationen darüber zu erhalten, wie statistische Primärintuitionen durch Unterricht zu tragenden Sekundärintutionen ausgebildet werden können.

Literatur

Eichler, A. & Vogel, M. (in prep.). Young students' mental modelling of statistical situations. Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Eichler, A. & Vogel, M. (2011). Mental models of basic statistical concepts. Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, University of Rzeszów, Poland (pp.787-796).

Fischbein, E. (1975). The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Johnson-Laird, P. N. (1983). Mental models. Cambridge: University Press.

Jones, G.A. & Thornton, C.A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. In G.A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 65-92). New York: Springer.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. Cognitive Psychology, 3, 430-454.

Mokros, J. & Russel, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 1, 20-39.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in children. London: Routledge & Kegan.

Schnotz, W. & Bannert, M. (1999). Einflüsse der Visualisierungsform auf die Konstruktion mentaler Modelle beim Text- und Bildverstehen. Zeitschrift für Experimentelle Psychologie, 46(3), 217–236.

Siegler, R.S. (1996). Emerging minds. The process of change in children's thinking. New York: Oxford University Press.

Rose VOGEL, Frankfurt am Main

Mathematisches und mathematikdidaktisches (Handlungs-) Wissen in inszenierten Bildern des Alltags zum Ausdruck gebracht

Eines der zentralen Ziele eines Lehramtsstudiums ist die Initiierung, Grundlegung und Entwicklung professioneller Kompetenz. Kompetentes Handeln wird im Sinne von Weinert (2001) in konkreten Situationen sichtbar und damit wird professionelle Kompetenz von Lehrkräften in der Bewältigung unterrichtlicher Situationen und Anforderungen erkennbar (vgl. Blömeke, Felbrich & Müller 2008, 17). Fachliches, fachdidaktisches und pädagogisches Professionswissen werden dabei als zentrale kognitive Komponenten eines solchen professionellen Handelns beschrieben (vgl. Baumert & Kunter 2006; Blömeke, Kaiser & Döhrmann 2011).

Mathematisches und mathematikdidaktisches (Handlungs-)Wissen

Mathematisches Wissen der Lehrkräfte wird im Mathematikunterricht unter anderem wirksam in fachlichen Entscheidungsprozessen. So bewerten z.B. Lehrkräfte auf der Basis ihres mathematischen Wissens Ergebnisse der Lernprozesse, erkennen mathematische Potentiale von Schülerinnen und Schülern oder leiten Unterstützungsmaßnahmen ein (vgl. Blömeke, Kaiser & Döhrmann 2011, 78). Mathematikdidaktisches Wissen hat Relevanz für die Planung von Unterricht wie auch für das konkrete Unterrichtshandeln (vgl. Blömeke, Kaiser & Lehmann 2008).

Neben der unterrichtlichen Bedeutsamkeit dieser Professionswissenskomponenten beschreibt Dubs (2008) in der Orientierung für die Reflexion eine weitere Funktion inhaltlichen Wissens.

Portfolioarbeit – Kontext der Studie

Die von den Studierenden „inszenierten Bilder des Alltags“ entstanden im Rahmen der Portfolioarbeit im Grundschullehramtsstudiengang im Fach Mathematik an der Goethe-Universität Frankfurt/Main. Die Portfolioarbeit beruht auf einem Konzept, das im Projekt „eLearning basiertes Portfolio“[1] (kurz „eLPort“) entwickelt wurde. Die Portfolioarbeit orientiert sich an den konzeptionellen Elementen der Lehrveranstaltung, d.h. an konkreten Lehr-

[1] Das Projekt „eLearning basiertes Portfolio“ (kurz „eLPort“) ist ein Projekt im Rahmen des Förderprogramms der Goethe-Universität Frankfurt am Main zur Verbesserung der Lehre. Projektverantwortliche: Prof. Dr. Rose Vogel und Prof. Dr. Götz Krummheuer, wissenschaftliche Mitarbeiter bis 1/2011: Anna-Katharina Schneider; bis 07/2011: Johannes Will.

Lern-Situationen (vgl. Vogel & Schneider 2012). Diese werden angereichert durch speziell für die jeweilige Lehr-Lern-Situation entwickelten Reflexionselemente im Sinne eines „reflexiven Portfolioansatzes“ (Gläser-Zikuda u.a. 2010, S. 11). Die Portfolioarbeit selbst kann als mehrstufiger Prozess beschrieben werden (vgl. Vogel & Schneider 2012).

Die durch die Reflexionselemente angeregten Reflexionsprozesse können explizit oder implizit dokumentiert werden. In den hier vorgestellten „inszenierten Bildern des Alltags“ sind die Reflexionsprozesse eher als implizit zu beschreiben. Durch den Arbeitsauftrag (siehe unten) wird mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen aktiviert und in Szene gesetzt. In der selbstständigen Auswahl bzw. Festlegung der Arbeitsgrundlage in Gruppen wird ein Lernraum geschaffen, in dem mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen im Diskurs mit Kommilitoninnen und Kommilitonen explizit wird und somit Anknüpfungspunkte für Reflexionsprozesse entstehen, die z.B. Stärken und Schwächen deutlich machen können.

„Inszenierte Bilder des Alltags“ – Konzeption der Studie

In den internationalen Studien zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften MT21 (Blömeke, Kaiser & Lehmann 2008) und TEDS-M 2008 (Blömeke, Kaiser & Lehmann 2010a; 2010b) wurde das mathematische und mathematikdidaktische Wissen mittels standardisierter Leistungstests erhoben. „Die Verknüpfung von Itemschwierigkeiten und Personenfähigkeiten über eine Rasch-Skalierung ermöglicht es, …“ (Blömeke, Buchholtz & Hacke 2010a, 191) unterschiedliche Niveaustufen mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen angehender Primarstufenlehrkräfte zu beschreiben.

Die hier vorgestellte Studie hat zum Ziel mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen von Studierenden des Lehramtsstudienganges Grundschule aus „inszenierten Bildern des Alltags“ zu rekonstruieren. Sie hat damit keinen normativen Charakter, sondern ist als Ergänzung zu standardisierter Erhebungen zu verstehen.

Es liegt Bild- und Textmaterial vor, das von Studierenden entlang von Arbeitsaufträgen in Gruppen erstellt wurde (siehe Arbeitsauftrag 1 und 2). Der Arbeitsauftrag ist Bestandteil der Lehr-Lern-Situation „Virtuelle Aufgabe“ und wird eLearning-basiert von den Studierenden in Gruppen erstellt. Das bisherige Datenmaterial entstand in drei mathematikdidaktischen Seminaren. Die „inszenierten Bilder des Alltags“ gehören zum Leistungsportfolio, das am Ende der Seminararbeit steht. Es ist geplant das Datenmaterial in den kommenden Semestern noch weiter auszudehnen.

Arbeitsauftrag 1

*E*s soll ein Foto (passend zum Thema der Veranstaltungen „Mathematik im Alltag begegnen" und „Bewegung und Raum") einer Alltagssituation oder eines Gegenstandes erstellt und mathematisch ausgedeutet werden. Die herausgearbeiteten mathematischen Bereiche sollen erläutert und mit grafischen Unterstützungselementen herausgearbeitet werden.

Arbeitsauftrag 2

Es soll ein Foto (passend zum Thema der Veranstaltungen „Multimodalität in mathematischen Äußerungen von Kindern") einer Alltagssituation oder eines Gegenstandes erstellt und mathematikdidaktisch ausgedeutet werden. Es soll der potentielle mathematische Lernanlass des Fotos bzw. dessen Unterstützung für den mathematischen Lernprozess herausgearbeitet werden.

Mittels Verfahren der qualitativen Inhaltsanalysen werden aus dem Datenmaterial Kategorien herausgearbeitet, mit denen sich Muster im rekonstruierten mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen von zukünftigen Grundschullehrinnen und -lehrern beschreiben lassen.

Erste Sichtung des Datenmaterials und Ausblick

Die erste Sichtung des Datenmaterials zeigt, dass die Studierenden für den „mathematischen Auftrag" häufig Fotos erstellen bzw. auswählen, die eher dem mathematischen Bereich der Geometrie zuzuordnen sind. Die mathematische Ausdeutung wird gemäß Auftrag mit grafischen Unterstützungselementen an den Fotos herausgearbeitet. Dieser Identifikationsprozess wird zum Teil an der mathematischen Normdarstellung orientiert, trägt aber auch sehr kreative Elemente. Sobald dieser Prozess abgeschlossen ist, werden Begriffsdefinitionen aus den identifizierten mathematischen Bereichen zusammengestellt. Diese Zusammenstellung zeigt eine Tendenz zur Vollständigkeit und stellt kaum noch Bezüge zum Ausgangsfoto her. Manche der Arbeitsgruppen beschreiben ihren Mathematisierungsprozess in der Gruppe, andere dagegen beschränken sich in der Dokumentation der identifizierten und als relevant angesehenen Begriffsdefinitionen.

Im Bereich des „mathematikdidaktischen Auftrags" werden vor allem Fotos erstellt bzw. ausgewählt, die sich eher dem arithmetischen Bereich zuordnen lassen. Die Auswahl der Fotos wird von mathematikdidaktischen Grundkonzepten geprägt und häufig ist eine Überinterpretation der Alltagssituation bzw. des Gegenstandes festzustellen.

Nach dieser ersten Sichtung steht nun die systematische Analyse aus, deren Ergebnisse mit Befunden aus der Studie TEDS-M und deren Folgestudien in Beziehung gesetzt werden sollen.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9, 469-520.

Blömeke, S, Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010a). TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, S, Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010b). TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Felbrich, A. & Müller, Chr. (2008). Theoretischer Rahmen und Untersuchungsdesign. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann, R. (Hrsg.), Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer (15-48). Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Döhrmann, M. (2011). Bedingungsfaktoren des fachbezogenen Kompetenzerwerbs von Lehrkräften. In W. Helsper & R. Tippelt (Hrsg.) Pädagogische Professionalität (77-103). 57. Beiheft der Zeitschrift für Pädagogik. Weinheim: Beltz.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2008). Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und –referendare. Münster: Waxmann.

Döhrmann, M., Kaiser, G. & Blömeke, S. (2010a). Messung des mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens: Theoretischer Rahmen und Teststruktur. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Hrsg.), TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich (169-251). Münster: Waxmann.

Dubs, R. (2008). Lehrerbildung zwischen Theorie und Praxis. In E.-M. Lankes (Hrsg.), Pädagogische Professionalität als Gegenstand empirischer Forschung (11-28). Münster: Waxmann Verlag.

Gläser-Zikuda, M., Rohde, J. & Schlomske, N. (2010). Empirische Studien zum Lerntagebuch- und Portfolio-Ansatz im Bildungskontext – ein Überblick. In M. Gläser-Zikuda (Ed.), Lerntagebuch und Portfolio aus empirischer Sicht (pp. 3-34). Erziehungswissenschaft, Band 27. Landau: Verlag Emirische Pädagogik.

Vogel, R. & Schneider, A.-K. (2012). Portfolioarbeit angehender Grundschullehrerinnen und –lehrer im Fach Mathematik. In M. Zimmermann, Ch. Bescherer & Ch. Spannagel (Eds.), Mathematik lehren in der Hochschule – Didaktische Innovationen für Vorkuse, Übungen und Vorlesungen (pp. 133-142). Hildesheim: Franzbecker.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F.E. Weinert (Hrsg.), Leistungsmessung in Schulen (17-31). Weinheim: Beltz.

Andreas VOHNS, Klagenfurt

Algebraisieren & Geometrisieren: Globale Ideen der Analytischen Geometrie?

Wenn man die Forderung erhebt, Mathematikunterricht in der Oberstufe müsse in allen Lernbereichen „an fundamentalen Ideen orientiert sein“(Borneleit, Danckwerts et al. 2001, S. 81), so wirft dies wenigstens zwei Fragen auf: Welche Ideen sollen dies sein und welche Konsequenzen ergeben sich aus einer Orientierung an diesen Ideen?

Wenn man, wie etwa Peschek 2005 „globale Ideen“ als Ausgangspunkte für Reflexionsprozesse begreift, in denen es darum geht, „Beziehungen zwischen lokalen mathematischen Konzepten wie auch zu Anwendungen (Lebenssituationen) und zum Alltagsdenken herzustellen, lokale Konzepte in einem Gesamtzusammenhang zu positionieren und in diesem zu bewerten“(S. 65), dann wird Orientierung des Unterrichts an globalen Ideen beinahe zwangsläufig ein wechselseitiger Anpassungsprozess: Man kann Inhalte auf gewisse Ideen hin fokussieren oder aber Ideen (bzw. deren Verständnis) den tatsächlichen curricularen Gepflogenheiten anpassen (vgl. ausführlicher Vohns 2010). Solange man weder die globalen Ideen noch die curricularen Gepflogenheiten als sakrosankt ansieht, bleibt allerdings die Frage offen, in welche Richtung solche Anpassungsprozesse vornehmlich zu verlaufen haben und inwiefern aus der Herstellung einer höheren Passung überhaupt ein wünschenswerter curricularer Zustand gefolgert werden kann. Einige Phasen eines solchen Anpassungsprozesses wurden im Vortrag für die Analytische Geometrie vorgestellt; allerdings weitgehend ergebnisoffen bezüglich der letzten Frage.

Dazu wurden mit „Algebraisieren“ und „Geometrisieren“ zunächst zwei Termini ausgewählt, die in der fachdidaktischen Auseinandersetzung mit der Analytischen Geometrie mehrfach implizit oder explizit als Vorschläge für globale Ideen eingebracht werden. In „nullter Näherung“ könnten diese Termini die Möglichkeit beschreiben, „Sachverhalte“ des einen Themenbereichs (z.B. geometrische Sachverhalte) mit „Mitteln“ des anderen Themenbereichs (z.B. algebraischen Mitteln) darzustellen und zu verarbeiten. Bereits eine sehr oberflächliche Konfrontation mit typischen Inhaltskatalogen der Analytischen Geometrie in der Oberstufe lassen allerdings erkennen, dass dem „Algebraisieren“ deutlich mehr Aufmerksamkeit gewidmet wird, als dem „Geometrisieren“. Im Vortrag wurde anhand der Verdichtung charakterisierender Merkmalszuschreibungen in einschlägigen Textstellen (Beutelspacher & Danckwerts et al. 2011, S. 121ff; IDM/AECC-M 2009, S. 15; Tietze, Klika, Wolpers 2000, S. 70f, Wittmann 2003, S. 47) herausgearbeitet, dass dies auch an einer nahezu diametral unterschiedlichen Wahrnehmung des Geometrischen und Algebraischen liegt (s. Abbildung 1).

Geometrisch	**Algebraisch**
Zeichnen	Rechnen
Anschauung, Visualisierung	Darstellung, Beschreibung
Heuristisch, Hilfsmittel	Beweis, Lösung
Einsicht gewinnen	Blind sein
Verstehen	Wissen absichern
Menschlich	Maschinell

Abbildung 1

Zugespitzt lässt sich formulieren: Mit „Algebraisieren“ wird in der Regel das „eigentliche Anliegen“(Tietze, Klika, Wolpers 2000, S. 71) der Analytischen Geometrie beschrieben und dieses wird als Wunsch konzeptualisiert, sich möglichst weitgehend von „anschaulich-geometrischen Betrachtungsweisen“(IDM/AECC-M 2009, S. 15) zu lösen, um symbolische Operieren zu können, d.h. „prinzipiell alle Aussagen durch Rechnen“(Beutelspacher, Danckwerts et al. 2011, S. 122) beweisen zu können. Während „Algebraisieren“ damit einen (weiteren) Mathematisierungsschritt darstellt, wird „Geometrisieren“ eher als heuristisches Hilfsmittel, als Veranschaulichung, als Mittel des besseren Verstehens und der erleichterten Kommunikation über abstrakte algebraische Sachverhalte konzeptualisiert – oder kurz: als Didaktisierungsschritt.

Im Vortrag wurde aus Zeitgründen im Folgenden nur mehr der Passung der obigen Konzeptualisierung des „Algebraisierens“ zum derzeitig üblichen Curriculum in Analytischer Geometrie nachgegangen. Dabei wurde problematisiert, dass „Algebraisieren“ als weitgehende Lösung vom geometrischen Kontext mit dem Ziel, bislang präformal geometrisches Arbeiten möglichst flächendeckend durch Rechnen abzulösen, auf wenigstens der Passungsprobleme relativ zum etablierten Curriculum stößt:

- eine (nahezu vollständige) Beschränkung auf lineare Gleichungen,
- die Dominanz vektorieller Darstellungsformen (samt Persistenz zunächst koordinatenfreier, geometrischer Vektorkonzepte),
- den Aufgabenkanon, mit seinem Schwerpunkt im systematischen Durchexerzieren weitgehend disjungiert behandelter Lage- und Abstandsbeziehung linearer geometrischer Objekte, zumeist in (partiell) prä-algebraisierter Form.

Tatsächlich passt eine Charakterisierung des „Algebraisierens“, wie sie oben gegeben wurde, mindestens genauso gut, wenn nicht besser, auf eine vektorfreie Koordinatengeometrie, die ihren Schwerpunkt gerade *nicht* in linearen Gleichungen hat, sondern sich gerade auf nichtlineare Gleichungen als gleichberechtigte geometrische Konstruktionsmöglichkeit konzentrieren würde (etwa den historischen Wurzeln bei Descartes und Fermat folgend).

Wenn man sich dennoch auf lineare Gleichungen beschränken möchte, so müsste man dies wohl als bewusste, pragmatische oder exemplarische Entscheidung offen legen. Zudem erschiene eine Konzentration auf vektorielle Darstellungsformen dann nachvollziehbarer, wenn der Gedanke einer eines möglichst flexiblen Wechsels zwischen geometrischer und algebraischer Ebene gegenüber dem vermeintlichen Wunsch möglichst weitgehender Lösung vom geometrischen Kontext in den Vordergrund gerückt würde. „Algebraisieren“ könnte dann für einen bestimmten Zugang zum Anschauungsraum stehen, der im Vortrag als *gezielt geometrisch enthaltsame Erkundung des Anschauungsraumes* bezeichnet wurde, in deren Zentrum folgende Leitfragen stehen könnten:

Welche geometrischen Sachverhalte kann ich beschreiben und bearbeiten,

- *wenn ich die quantifizierte relative Lage eines Punktes (bezüglich eines willkürlich gewählten Basispunktes) schon für alles halte, was ich über einen Punkt wissen muss (kann),*
- *ich von jedem geometrischen Gebilde nicht mehr für wissenswert erachte, als welche Punkte es enthält,*
- *ich mich dabei (zunächst) auf wenige, einfache Grundobjekte (Punkte, Geraden, Ebenen, ggf. Kreise und Kugeln) und aus ihnen zusammengesetzten Gebilden beschränke,*
- *ich (zur flexibleren Beschreibung) der Beziehung von Punkten untereinander außer Zahlen auch noch Vektoren zulasse?*

Eine solche Erkundung muss allerdings selbstzweckhaft bleiben, wenn sie nicht hinsichtlich ihrer Ziele, Leistungen und im Vergleich mit anderen Formen geometrisch nicht-enthaltsamer Erkundungen des Anschauungsraumes reflektiert wird. Dazu bedarf es wenigstens einfachster „Objektstudien“, hierzu wurden im Vortrag zwei Miniaturen andiskutiert:

- Inwiefern weiß man von einem Dreieck eigentlich schon alles, wenn man die Lage $A(3\,|\,0)$, $B(0\,|\,0)$,$(0\,|\,4)$ seiner Eckpunkte kennt? Inwiefern weiß man „mehr“ als durch geometrische Beschreibungen?
- In einem Buch zur Vektorrechnung steht: Genau dann, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Stimmt das so? Wenn

ja: Warum? Wenn nein: Was wäre zu ergänzen? Inwiefern weiß man dann schon alles, was man von einem Parallelogramm wissen kann?

Abschließend wurde der Frage nachgegangen, inwiefern die Probleme der Analytischen Geometrie überhaupt Probleme der elementaren Geometrie mit anderen Mitteln bearbeiten bzw. inwiefern Probleme und Methoden der elementaren Geometrie zu solchen der Analytischen Geometrie in Beziehung gesetzt werden können, um über Gemeinsamkeiten und Unterschiede, Kohärenzen und Differenzen reflektieren zu können. Die zur Gegenüberstellung genutzten Folien sind in Abbildung 2 wiedergegeben.

„Geometrische Probleme" der linearen Analytischen Geometrie

Kernbereich

- Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
- Schnitte von Geraden und Ebenen
- Skalarprodukt zum Nachweis der Orthogonalität

Erweiterter Bereich

- Abstandsprobleme
- Skalarprodukt zur Berechnung von Längen und Winkeln

Randbereich

- Beweise affiner und metrischer Sätze über „vollständige Vektorzüge"

Welche dieser „Probleme" hatte man eigentlich vorher schon?

Vorerfahrungen zu „Analytischen Probleme" in der Elementaren Geometrie

- Lagebeziehung von Geraden und Ebenen: Charakterisierung spezieller, idealisierter Figuren und Körper (häufig symmetrisch)
- Schnitte von Geraden: besondere (häufig symmetrische) Lagen gewisser „interessanter" Punkte.
- Nachweis der Orthogonalität: Winkelsumme, Pythagorassatz, Trigonometrie
- Berechnungen von Längen und Winkeln: Winkelsumme, Pythagorassatz, Trigonometrie

Reflexionswürdige Unterschiede:

- Lokale Perspektive: begrenzte lineare Objekte (Strecke, Begrenzungsfläche), Figuren, Körper, seltener offene Konfigurationen
- Wo Form und Gestalt im Fokus, Geometrie von Strecken*verhältnissen*, Lage*beziehungen*
- Elementare Geometrie: Ebene, Analytische Geometrie: Raum, Zufall?

Abbildung 2

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., Wickel, G. (2011): Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W., Weigand, H.-G. (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 22 (1), 73 - 90.

IDM/AECC-M (2009): Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik". http://www.aau.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf

Peschek, W. (2005): Reflexion und Reflexionswissen in R. Fischers Konzept der Höheren Allgemeinbildung. In: Lengnink, K. & Siebel, F. (Hrsg.): Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Darmstadt: Allgemeine Wissenschaft, 55-68.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.) (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Vohns, A. (2010): Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 31 (2), 227-256.

Wittmann, G. (2003): Zentrale Ideen der Analytischen Geometrie. In: mathematik lehren (119), 47- 51.

Alexandra WALTER, Sanjeeva DISSANAYAKE, Felix HORAK,
Kay SCHMITT & Philipp ULLMANN, Frankfurt

Mathematikunterricht: Mit der Welt der Schüler rechnen

In einem interdisziplinären Lehrprojekt an der Universität Frankfurt trafen im Wintersemester 2011/12 Studierende der Kulturanthropologie und des gymnasialen Mathematiklehramtes aufeinander, um unterschiedliche Sichtweisen von Mathematik kennen zu lernen und das eigene Fachverständnis zu hinterfragen. Ein Ziel des Forschungsseminars „Die kulturelle Macht mathematischer Darstellungen" war es, bei den angehenden Mathematiklehrer/innen ein Gefühl für die Eigenlogik der Mathematik wie auch für abweichende Argumentations- und Denkweisen zu entwickeln, um ihnen im späteren Berufsleben zu erleichtern, mit den (Denk-)Welten der Schüler/innen sensibel umzugehen. Stellvertretend für das Seminar referieren vier Studierende ihre Erkenntnisse.

Mathematik als objektive Wissenschaft? (Alexandra Walter)

In Schule und Studium wird Mathematik oft als ein Werkzeug inszeniert, das die Welt objektiv beschreiben kann. Alltagsgegenstände wie Landkarten oder Statistiken scheine n fortwährend zu bestätigen, dass mathematische Darstellungen die Wirklichkeit unverzerrt und unabhängig vom jeweiligen Kontext abbilden.

Die Mercatorkarte, die z.B. bei Google Maps, aber auch bei den meisten anderen Routenplanern verwendet wird, ist ein besonders populäres Beispiel. Vergleicht man auf dieser Karte die Flächen von Grönland und Afrika, erscheinen beide in etwa gleichgroß – doch in Wirklichkeit ist Afrika ca. 14-mal größer. Es stellt sich die Frage: Bildet die Karte die Erdoberfläche falsch ab? Ist sie *nicht* objektiv?

Abb. 1: Mercatorkarte
(Quelle: Wikipedia)

Auf der Suche nach der Herkunft der Karte stößt man rasch auf Gerardus Mercator (1512-1594), der das Ziel verfolgte, eine Karte *ad usum navigantium*, also für die Schiffsnavigation zu erstellen. Damals spielten Loxodrome (Kurven konstanten Kurses) eine besondere Rolle, weil solche Kurse mit dem Kompass leicht zu halten waren. Mercator stand vor dem Problem, die gekrümmte Erdoberfläche sinnvoll auf eine ebene Karte zu projizieren. Er wählte ein mathematisches Modell, bei dem Loxodrome auf der Karte als Geraden abgebildet werden – eine große Erleichterung für den Steuermann. Dafür nahm Mercator in Kauf, dass Flächen umso stärker verzerrt werden, je weiter sie vom Äquator entfernt sind – was Grönland in etwa so groß wie Afrika erscheinen lässt.

An diesem Beispiel lässt sich gut erkennen, dass mathematische Beschreibungen die Welt (hier ganz wörtlich) verzerren, und dass das Ergebnis einer Modellierung vom jeweiligen Zweck abhängt. Diese Subjektivität und Kontextgebundenheit von Mathematik, die den Alltag durchzieht, sollten Schüler/innen im Mathematikunterricht erfahren.

Mathematik als universelle Denkstruktur? (Sanjeeva Dissanayake)

„Wie ist es möglich, dass die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?“ Dieses Albert Einstein zugeschriebene Zitat unterstellt, dass Mathematik, Denken und Wirklichkeit eng miteinander zusammenhängen. Üblicherweise wird die Verbindung folgendermaßen hergestellt: Unsere Welt ist logisch strukturiert, und diese Logik findet sich sowohl im menschlichen Denken als auch in der Mathematik (als logischer Wissenschaft) wieder. Mathematik ist folglich in der Lage, die universellen Strukturen der Wirklichkeit zu erkennen und zu beschreiben. Aber gibt es wirklich nur *eine* Logik, und sind die Strukturen tatsächlich universell?

Der Entwicklungspsychologe Jean Piaget meldet in seinem Buch *Psychologie der Intelligenz* zumindest leise Zweifel an. Denken, so Piaget, gründet nicht in der Logik, sondern im Erfahrungshandeln. Handlungen werden verinnerlicht und damit „beweglich“. Die Beweglichkeit wird nach und nach operativ strukturiert und mündet am Ende in der Logik als formalisiertem Operieren. Doch obwohl jedes Kind unterschiedliche Erfahrungen macht, stehen am Ende der Entwicklung die für alle gleichen universellen Denkgesetze, die Piaget als die „fünf Bedingungen der Gruppierung“ in der axiomatischen Sprache der Mathematik formuliert.

Der Anthropologe Claude Lévi-Strauss bricht in *Das wilde Denken* radikaler mit der Universalität der Logik. Nach ihm liegt der Grund des Denkens darin, dass Menschen ihre Umwelt ordnen und strukturieren. Da diese Strukturierungen sich in verschiedenen Kulturen unterscheiden, schließt Lévi-Strauss daraus, dass Denken kulturspezifisch ist und es konsequenterweise mehrere Logiken gibt. Ganz kann sich allerdings auch er nicht vom Gedanken der Universalität trennen, und so findet er innerhalb der verschiedenen Logiken strukturelle Gemeinsamkeiten, die er im „totemistischen Operator“ mathematisch visualisiert.

Nimmt man im Mathematikunterricht ernst, dass es unterschiedliche Denkweisen, ja sogar unterschiedliche Logiken gibt, stellt das Lehrer/innen vor die hohe Anforderung einer größtmöglichen Sensibilität und Ergebnisoffenheit, um andere Denkweisen zuzulassen und zu fördern.

Mathematik als Hort sicheren Wissens? (Felix Horak)

Mathematisches Wissen gilt als einzigartig, sicher und unumstößlich. *Einzigartigkeit* bedeutet im strengen Sinn des Wortes, dass es nur eine einzige, universelle Form von Mathematik gibt. *Sicherheit* verbürgen vor allem die logisch-deduktiven Argumentations- und Beweistechniken. *Unumstößlichkeit* suggeriert Mathematik vor allem dadurch, dass mathematisches Wissen zeitlos gültig ist. Vor dem Hintergrund dieser drei Begriffe wird im Folgenden die Verbindung von Mathematik und Lebenswelt diskutiert.

Mathematisches Modellieren setzt in der Regel an einer komplexen und subjektiven Situation der Lebenswelt an. Bei deren Mathematisierung gerät man mit der Einzigartigkeit der Mathematik in Konflikt, denn es gibt keine universellen Regeln, was bei der notwendigen mathematischen Reduktion wegfallen darf und was nicht. Hat man diese Klippe umschifft, wird im nächsten Schritt innermathematisch gearbeitet. Die resultierende Kette mathematischer Schlüsse ist zwar sicher, aber ihre Zweckdienlichkeit für die Lebenswelt ist zumindest unklar, weil der Kontext der Situation unberücksichtigt geblieben ist. Zuletzt muss das mathematische Resultat interpretiert werden. Obwohl dieser Schritt den größten Einfluss auf die Lebenswelt ausübt, unterliegt er – im Gegensatz zum innermathematischen Arbeiten – keiner spezifischen Kontrollinstanz. Hier geht es eher um Vertrauen und Glaubwürdigkeit als um eine lückenlose Argumentationskette, was mit der Unumstößlichkeit mathematischen Wissens nur schwer zu vereinbaren ist.

Indem man diese Widersprüchlichkeiten des mathematischen Arbeitens ausblendet, vermittelt man ein schiefes und unproduktives Bild von Mathematik. Die vermeintliche Einzigartigkeit erschwert es, Vielfalt und Toleranz zuzulassen. Das Versprechen der Sicherheit befördert ein unreflektiertes, algorithmisches und kleinschrittiges Vorgehen. Verantwortung wird an die Mathematik abgegeben, das Bildungsziel der Mündigkeit und der Blick für das Ganze geraten in Gefahr. Die vorgebliche Unumstößlichkeit schließlich erstickt Kreativität, Intuition und Mut unter einem Ohnmachtsgefühl. Stattdessen sollte Mathematikunterricht das problematische Verhältnis von Mathematik und Lebenswelt stärker und ehrlicher betonen.

Mathematik als hegemoniales Wissen? (Kay Schmitt)

Dieser Teil setzt die vorangegangenen Überlegungen in einen theoretischen Rahmen. „Es ist allgemein akzeptiert, dass der einzige Zugang zur Moderne über das mathematische Wissen führt", schreibt der Ethnomathematiker Ubiratan D´Ambrosio. In der Tat ist die moderne Welt durchdrungen von Mathematik: Politische Statistiken, wirtschaftliche Analysen und (natur)wissenschaftliche Erkenntnisse greifen auf sie zurück, und als gesellschaftliches Subjekt wird man regelmäßig mit mathematischen Darstellungen konfrontiert. Mathematik wird dabei zumeist als objektiv und strikt apolitisch angesehen, weil sie Sachverhalte objektiv darstellt und oft (den) einen rationalen Schluss nahe legt.

Wenn wir aber als Prämisse akzeptieren, dass bei jedem Versuch, die Lebenswelt mit unseren Deutungsinstrumenten (wie Sprache, Religion oder eben auch Mathematik) zu interpretieren, ein Sachverhalt niemals als Ganzes dargestellt werden kann, dann stellt sich die Frage, wie mathematische Darstellungen mit diesem Problem umgehen. Dem soll anhand der drei Kategorien Macht, Interesse und Ideologie kurz nachgegangen werden.

Macht üben mathematische Darstellungen aus, indem sie die alleinige, einzig vernünftige Deutungshoheit über eine Situation beanspruchen. Die Kategorie des *Interesses* verweist darauf, dass mathematische Darstellungen manipulieren, und wirft die Frage nach den Profiteuren auf. Die *Ideologie* schließlich gründet in der Logik von Objektivität, Quantifizierung und Rationalität: Grundannahme einer jeden mathematischen Darstellung ist, dass die Welt aus wohlunterscheidbaren, schadlos aus ihrem Kontext lösbaren Objekten besteht. Durch den Prozess der Quantifizierung werden diese Objekte homogenisiert und innerhalb eines formalisierten Schemas verortet, um sie am Ende dem rationalen Schließen zu unterwerfen.

Der heutige Mathematikunterricht trägt nicht unerheblich dazu bei, eine unkritische Grundhaltung gegenüber mathematischen Darstellungen zu fördern. Zu selten wird gefragt, was bei der mathematischen Modellierung verloren geht oder welche Interessen damit verfolgt werden. Schüler/innen sollten die rhetorische Macht mathematischer Darstellungen im Unterricht thematisieren und sich eine kritische Perspektive erarbeiten: Mathematik ist (auch) eine Form hegemonialen Wissens, Mathematik ist (auch) politisch.

Weitere Informationen

www.math.uni-frankfurt.de/~ullmann/11ws/KulturelleMacht

Dr. Philipp Ullmann ♦ Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik

Dr. Ina Dietzsch ♦ Institut für Kulturanthropologie und Europäische Ethnologie

Das Lehrprojekt wurde gefördert von der Universität Frankfurt.

Nobuki WATANABE, Kyoto, Japan

“Division of Fractions” in Japanese elementary school

Today, many researchers and teachers point out that education of “Division of Fractions” is the issue in Japanese elementary school. The issue point is that children can’t understand the meaning of calculation of it though they can memorize calculation method of it easily. That is, the present contents of it are not enough for children to understand it. Therefore, we tried to make original teaching contents of Division of Fractions. And we tried to teach the contents for 6th grade elementary school children (Japanese elementary school system : from 1st grade (6 years old) to 6th grade(12 years old)). So, we would like to show the results in this paper.

Teaching Contents of Division of Fractions in Japan

Today, contents of Division of Fractions are taught at 6th grade in elementary school in Japan. The teaching contents in Japanese 6th grade textbooks are treated it as follows. (All Japanese text books are based on the course of study. Therefore, all Japanese children study very similar contents though school mathematics textbooks are published by six publishing companies.)

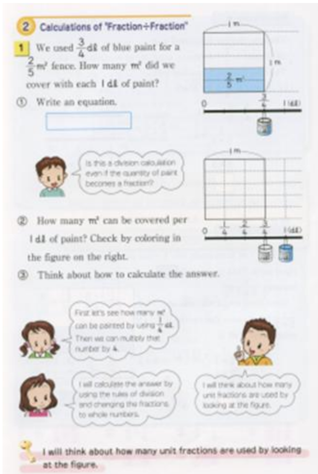


Fig.1 an introduction part & a part of hints for solving the question

The explanation of Division of Fractions in school textbook (Masakazu Aoyagi et al (ed.), (2005)) is as follows (the upper section of Fig.1).

(1)An introduction part: First, there is a question (Children try to found a good idea for solving it in this part).

The Question is "We used 3/4 dL of blue paint for a 2/5 m^2 fence. How many m^2 did we cover with each 1dL of paint?”

(As you know the question is very connected real life. So, many contents of mathematics are connected real life in Japanese school.)

(2)A part of hints for solving it: Next, there are three children’s ideas (the lower section of Fig.1) (Children try to understand each idea in this part).

(3)A part of solving the question: There are three methods are based on children's ideas for solving the question.

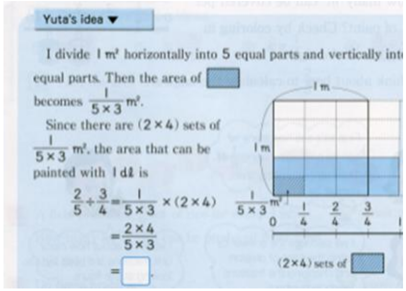
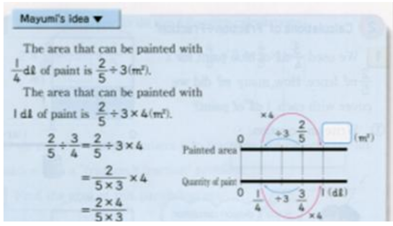


Fig.2 method 1

Method1 is as follows (Fig.2).

"I divide 1 m^2 horizontally into 5 equal parts and vertically into 3 equal parts. Then the area of ■ becomes 1/ (5×3) m^2. Since there are (2×4) sets of 1/(5×3)m^2, the area that can be painted with 1dL is 2/5÷3/4＝1/(5×3)×(2×4)＝(2×4)/(5×3)".



Method2 is as follows (Fig.3).

"The area that can be painted with 1/4dL of paint is 2/5÷3 (m^2). The area that can be painted with 1dL of paint is 2/5÷3×4(m^2).

2/5÷3/4＝2/5÷3×4＝2/(5×3)×4 ＝ (2×4)/(5×3)".

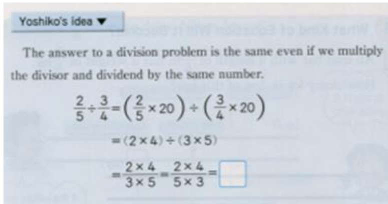


Fig.4 method 3

Method 3 is as follows (Fig.4).

"The answer to a division problem is the same even if we multiply the divisor and dividend by the same number.

2/5÷3/4＝(2/5×20)÷(3/4×20)＝(2×4)÷(3×5) =(2×4)/(3×5)=(2×4)/(5×3)".

These explanations are proof of calculation method of Division of Fractions. Method1 and 2 are very inductive and method3 is similar deductive (but it is not completing deductive). Thus there are detail explanations in a textbook. But many children can't understand these contents. That is, only few students can explain the method of calculation of Division of Fractions.

Original Teaching Contents of Division of Fractions

And the above issue point has been noted for a long time. Nevertheless, why do many teachers teach children these contents for a long time in Japan? The reason is as follows. The present school textbook has almost contents of inductive thinking. So, 5,6th graders (11, 12 years old children) seldom study the contents of deductive thinking in Japan.

But we think that 5,6th graders must study the contents of deductive thinking, because it is just time for them to acquire abstract thinking. In other words, they can probably understand contents of deductive thinking more easily than contents of inductive thinking.

For that reason, we made new contents of Division of Fractions to solve the issue. And it was based on deductive thinking. Then, we taught 6^{th} graders it. The practice of the teaching is as follows.

[Practice of the teaching]

1) Teaching object: Public elementary school 6^{th} graders (29 children) in Osaka, Japan

2) Practical side of the teaching: Date: May, 2003, Time: 5 school hours (1 school hour = 45 min.)

3) Teaching Contents

The teaching contents have 2 units. One is “Multiplication of fractions”. The other is “Division of fractions”.

Fig.5 algebraic property of multiplication

<Multiplication of fractions>

“unit fractions”,“a fraction×an integral number”,“a fraction×a unit fraction”,“a fraction×a fraction”,“a fraction×a fraction×a fraction”,“a reciprocal number”,“property of a reciprocal number”,“algebraic property of multiplication(Fig.5)”

Fig.6 relation of multiplication and division

<Division of fractions>

“relation of multiplication and division (Fig.6)”, “division of fractions ”

Explanation of method of Division of Fractions is as follows.

• $3/5 \div 1/3 = \square \rightarrow \square \times 1/3 = 3/5 \rightarrow \square \times 1/3 \times (3/1) = 3/5 \times (3/1)$
$\rightarrow \square = 3/5 \times 3/1 \quad \therefore 3/5 \div 1/3 = 3/5 \times 3/1$

4) Results

We tested the contents of Division of Fractions to the children after our last teaching on the same day. The results of the test are that over about 90% children could understand it. That is, many children became to be able to prove a calculate method of Division of Fractions. And many children became to be able to calculate numerical calculations of Division of Fractions too.

Discussion

In this paper, we tried to solve the issue of Division of Fractions in Japanese elementary school. So we made new contents that were based on deductive thinking. And we verified whether our made teaching contents is effective or not. And, we tried a practice for 6th graders by using our made contents.

The results clearly show the next points.

6th graders could understand our made contents that was based on deductive thinking. That is, 6th grader can understand more easily deductive proof than inductive proof. Therefore, the results should suggest that the issue point of Division of Fractions in Japanese elementary school is that the contents are not based on deductive thinking but based on inductive thinking.

But we couldn't test them after that. So, we don't know that they keep the understanding. Therefore, we must investigate it. And we would like to create new various another teaching contents for deductive thinking.

Acknowledgment

This work was supported by KAKENHI 2370095

Literature

Masakazu Aoyagi et al (ed.), （2005）: MATHEMATICS for Elementary School 6th grade Vol.2, Gakkohtosho CO., LTD

Nobuki WATANABE(2011): Syouchurenkei wo Ishikishita Daisukarikyuramu Kaihatsu no Tameno Kisokenkyu 2 (小中連携を意識した代数カリキュラム開発のための基礎研究(その2)), Journal of Mathematics Education Society of Japan,51 No.3・4,81-92

Christof WEBER, Berlin

Eine Grundvorstellung des Logarithmus: die verallgemeinerte Stellenanzahl

Der Logarithmus wirft für die meisten Gymnasiastinnen und Gymnasiasten große Verständnisprobleme auf. So sind am Ende der Schulzeit Aussagen wie folgende nicht selten: „Ich möchte endlich mal verstehen, was der Logarithmus *wirklich* ist.“ Oder: „Erklären Sie mir doch bitte: Was *ist* der Logarithmus eigentlich?“ Trotz wochenlanger Arbeit scheint der Logarithmus in den Köpfen der Lernenden nicht zur gleichen Selbstverständlichkeit – ja eigenständigen Existenz – gereift zu sein wie etwa die Quadratwurzel oder der Sinus. Offenbar verdichtet sich der Logarithmus nicht zunehmend zu einer gedanklichen Entität, mit der verständig argumentiert und gearbeitet werden kann, sondern bleibt bis zum Schluss eine *black box*, mit der ein Gefühl des Sperrigen oder gar der Bedeutungsarmut einhergeht. Woran könnte das liegen, und wie könnte diesem Missstand abgeholfen werden?

1. Ein sperriges Thema

Seit über zweihundert Jahren wird der Logarithmus in der Regel nach dem Vorbild von Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“ eingeführt. Nach der Umschreibung des Begriffs („der Logarithmus von b zur Basis a ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten“) folgen die zentralen Eigenschaften (Logarithmengesetze, Basiswechselsatz). Anschließend sind Exponential- und Logarithmusgleichungen zu lösen, bevor Anwendungen und Logarithmusfunktionen thematisiert werden.

Einige wenige Studien haben Schülerschwierigkeiten zum Logarithmus erhoben. So wird als eine der typischen *misconceptions* die Behandlung des Logarithmus als Objekt und die Übergeneralisierung von Gesetzen genannt (Boon Liang und Wood 2005). Dies kommt in Fehlern wie der Division „durch log“ ($\log(7x-12)=2\log x$ ® $7x-12=2x$) oder dem Ausmultiplizieren ($\log(7x-12)=\log 7x-\log 12$) zum Ausdruck.

Solche Schwierigkeiten werden gerne auf die *Schreibweise* zurückgeführt, ist doch $\log_a b$ ein „stark verdichtetes Informationsbündel“, das schwierig „aufzuschnüren und zu deuten“ ist (Appel 1992). So ist der Logarithmus nicht nur eine zweistellige Operation (Basis a, Numerus b), sondern auch ein Fachbegriff, dessen Bedeutung alles andere als selbsterklärend oder gar sinnstiftend ist: Wie kommt man dazu, einen Exponenten *Logarithmus* zu nennen, also „Verhältnis-Zahl“? (Siehe Wolff 1961, 118.)

Für die Schwierigkeiten mindestens so sehr verantwortlich dürfte aber auch die bereits zitierte *inverse Begriffsfassung* des Logarithmus sein. Ähnlich wie die Erklärung „blau ist das Gegenteil von nichtblau" eher eine logisch-korrekte Aussage ist denn einen Begriff aufschließt, ist die Definition des Logarithmus über das inverse Potenzieren kaum erkenntnisbefördernd.

2. Ein Blick in den benachbarten Garten

In der Unterrichtspraxis ist zu beobachten, dass einzelne Schülerinnen und Schüler nach einer Weile des Umgangs mit dem Logarithmus einen eigenen Sprachgebrauch ausbilden und davon sprechen, „den x-ten Logarithmus einer Zahl zu ziehen". Könnte dieser Fokus auf eine mit dem Logarithmus verbundenen Prozess, eine direkte *Handlung*, bewirken, dass ihnen der Logarithmus weniger sperrig und damit verständlicher wird?

Nicht von ungefähr erinnert diese handlungsorientierte Formulierung an das Radizieren – oder eben an das „Ziehen der Wurzel" (für den historischen Ursprung des Wurzel-Begriffs und -Zeichens siehe Felgner 2005). Aus mathematischer Sicht mag es zwar erstaunlich sein, dass sich das Wurzel-Thema als weniger sperrig erweist als das Logarithmus-Thema, sind doch beide mögliche Umkehrungen der Potenzrechnung. Aus lernpsychologischer Sicht sind jedoch eine ganze Reihe Gründe denkbar:

- Mit dem Quadrieren als Rechenart haben sich die Lernenden seit den ersten Jahren der Sekundarstufe *vertraut* machen können. Allgemeine Exponenten und das Exponentieren werden erst viel später thematisiert.
- Die Formulierung des „Wurzel-Ziehens" beschreibt eine *Handlung* und ist durch ihre Anknüpfung an „Alltagssprache" *suggestiv*.
- Quadratwurzeln natürlicher Zahlen lassen sich mit Zirkel und Lineal *geometrisch konstruieren* (zum Beispiel mit der Wurzel-Spirale).
- Mancherorts wird die Quadratwurzel einer Zahl noch *händisch berechnet* (schriftliches Wurzelziehen, näherungsweise: Heron-Verfahren).

Derart „konstruktive" Gründe scheinen dazu zu führen, dass das Radizieren von den Lernenden eher akzeptiert wird und kaum je Verständnisprobleme aufwirft (obschon Objekte wie $\sqrt[2,3]{4}$ alles andere als selbsterklärend sind).

3. Den Logarithmus verständlich machen

Zentrale fachliche Aspekte des Logarithmus sind der Logarithmus a) als Exponent, b) als Inversoperation (Wolff 1961), c) als Überführung einer multiplikativen in eine additive Struktur, d) als Funktion und e) als Wachstumsmodell (Büchter und Leuders 2005). Verglichen mit den konstruktiven

Seiten des Wurzel-Begriffs haben all diese Aspekte nur wenig Potenzial für Konstruktivität. Dennoch nimmt sich die Didaktik dieses Problems – so weit ich sehe – nicht an und macht nur punktuelle Vorschläge, wie der Logarithmus verständlich(er) gemacht werden könnte. Zum Beispiel:

- Nachzeichnen der historischen Entwicklung des Symbols (Appel 1992)
- Operatives Erarbeiten des Logarithmus (Büchter und Leuders 2005)
- Diskutieren typischer „misconceptions" (Boon Liang und Wood 2005)
- Verwenden eines anderen, suggestiven Begriffs (z.B. „*a*-box of" (Hammack und Lyons 1995), „Exponentensucher" (Bennhardt 2009)) oder einer anderen Begriffsfassung des Logarithmus-Symbols (Gallin 2011).

Ein didaktisches Konzept, welches das Ziel hat, zentrale Begriffe verständlich zu machen, ist das Konzept der *Grundvorstellungen* (vom Hofe 1995). Grundvorstellungen verknüpfen mathematische Inhalte und Begriffe mit adäquaten Sach- und Handlungssituationen und geben so wieder, was sie aus fachlicher Sicht bedeuten. Solcherart als Scharnier zwischen Mathematik und Lebenswelt fungierend, unterstützen Grundvorstellungen das Sinnerleben und ein verständiges Mathematikmachen. Für natürliche und gebrochene Zahlen und für die Grundrechenarten sind bereits verschiedene Grundvorstellungen bestimmt worden. Auch auf der Sekundarstufe kennt man Grundvorstellungen, zum Beispiel zum Begriff der Funktion oder zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Und wie könnte so eine Sach- und Handlungssituation zur Aufgabe „berechne den Zehnerlogarithmus von 50" aussehen?

Ähnlich wie bei der Bestimmung der Grundvorstellungen von Grundrechenarten ist eine geeignete Anwendung bzw. Handlungssituation zu finden. Eine solche ist die Berechung der Stellenanzahl einer Zahl, ohne dass sie dazu ausgeschrieben werden müsste. So hat eine Million im Dezimalsystem sieben Stellen, während der Zehnerlogarithmus einer Million gleich 6 ist. Und die derzeit größte Primzahl $2^{43112609}-1$ hat 12'978'189 Stellen, weil $\log_{10}(2^{43112609}) = 43112609 \cdot \log_{10}(2) \approx 12978188{,}5$ ist. Damit kann der Logarithmus als *verallgemeinerte Stellenanzahl* aufgefasst werden: *Der Logarithmus* $\log_a b$ *berechnet die Anzahl Stellen von b im System zur Basis a, vermindert um 1.*

4. Indizien für die Tragfähigkeit der Stellenanzahl-Grundvorstellung

Wie alle Grundvorstellungen hat auch die verallgemeinerte Stellenanzahl ihre Grenzen. So bleibt erklärungsbedürftig, wie die Stellenzahl bei nicht-natürlicher Basis *a* zu verstehen ist. Und selbstverständlich kann sie nur für gewisse Fragestellungen produktiv gemacht werden, für andere nicht.

Dennoch wohnt ihr eine große Überzeugungskraft inne, vermutlich aufgrund ihres handlungsorientierten Charakters. Sie wird nicht nur sehr gut angenommen, sondern auch noch nach Jahren erinnert. Zwei Indizien:

- Nach der Einführung des Logarithmus (über verschiedene Grundvorstellungen) und des Lösens von Exponentialgleichungen geht es nach den Weihnachtsferien um die Logarithmusfunktion und deren Anwendungen. Zur Erkundung bearbeitet die Klasse den Auftrag, wie hoch der Graph des Logarithmus über der x-Achse liegt, wenn die x-Achse ein- resp. zweimal um den in cm gemessenen Erdäquator geschlungen wird. Eine leistungsschwache, aber engagierte Schülerin berechnet den ersten y-Wert zu 9,6 cm. Für den zweiten Wert erwartet sie den doppelten Wert, erhält aber 9,9 cm. Zuerst wundert sie sich über die Nichtlinearität des Logarithmus, um dann zu argumentieren: *„Weshalb liegt er nicht beim 19,2 cm (dem doppelten)? Ich denke, dass dies mit der Anzahl der Stellen zusammenhängt. Diese ändern sich ja nicht. Also ist, wenn man die Zahlen* [gemeint sind die x-Werte, C.W.] *als Exponent mit Basis schreibt, nur die Basis unterschiedlich. Nicht aber der Exponent.“*
- Eine Schülerin soll in ihrer mündlichen Matura-Prüfung das uneigentliche Integral $\int_1^\infty 1/x \cdot \mathrm{d}x$ bestimmen. Zuerst notiert sie die Stammfunktion $\ln x$ und argumentiert dann: „$\ln x$ *geht für x gegen* ∞ *ebenfalls gegen* ∞*, denn mit zunehmendem x nimmt auch dessen Stellenanzahl zu!*“

Welche weiteren Grundvorstellungen des Logarithmus den Schülerinnen und Schülern eine solide Argumentationsbasis anbieten, um Mathematik verständig zu betreiben, wird an anderer Stelle zu klären sein.

Literatur

Appel, H. (1992): Zur Schreibweise der Logarithmusfunktion. In: PM 34, 16–18.

Bennhardt, D. (2009): Der Logarithmus – tradierte Fachbegriffe oder sinnstiftende Kreativität. In: Praxis der Mathematik in der Schule 51(29), 44–45.

Boon Liang, Ch., Wood, E. (2005): Working with Logarithms: Students’ Misconceptions and Errors. In: The Mathematics Educator 8(2), 53–70.

Büchter, A., Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Cornelsen.

Felgner, U. (2005): Über den Ursprung des Wurzelzeichens. In: Math. Sem.ber. 52, 1–7.

Gallin, P. (2011): Mathematik als Geisteswissenschaft. In: M. Helmerich et al. (Hrsg.): Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven. Vieweg und Teubner, 105–116.

Hammack, R., Lyons, D. (1995): A Simple Way to Teach Logarithms. In: Mathematics Teacher 88(5), 374–375.

vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum.

Wolff, G. (1961): Handbuch der Schulmathematik, Bd. 1. Schroedel Verlag.

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

Instruktion, Konstruktion und die Zone der nächsten Entwicklung

In Mathematikanfängervorlesungen spielen Definitionen und Bezeichnungen eine große Rolle. Im Unterschied zum Fremdsprachenunterricht, wo neues Vokabular durch verschiedene handlungsorientierte Kontexte eingeführt wird und Bedeutungen intuitiv durch Vorwissen aus der Muttersprache erfasst werden können, erfolgt in diesen Vorlesungen die Konstruktion der Begriffe vorwiegend anhand von Merkmalen der zu definierenden mathematischen Objekte. Dieser Spracherwerb fördert kaum Sensibilität und Verständnis bzgl. verschiedener Interpretationen, Kontexte und Bedeutungen mathematischer Konzepte. Erfahrung und Verständnis der Vielfalt von Darstellungs- und Umgangsmöglichkeiten mit mathematischen Begriffen sind jedoch eine notwendige Voraussetzung für differenzierte Diagnostik aktueller Wissensstände, Entwicklungspotentiale und darauf basierender angeleiteter Förderung. Diese Erfahrungen sollten sowohl die Perspektive des anleitenden Lehrenden, als auch des angeleiteten Lernenden einschließen.

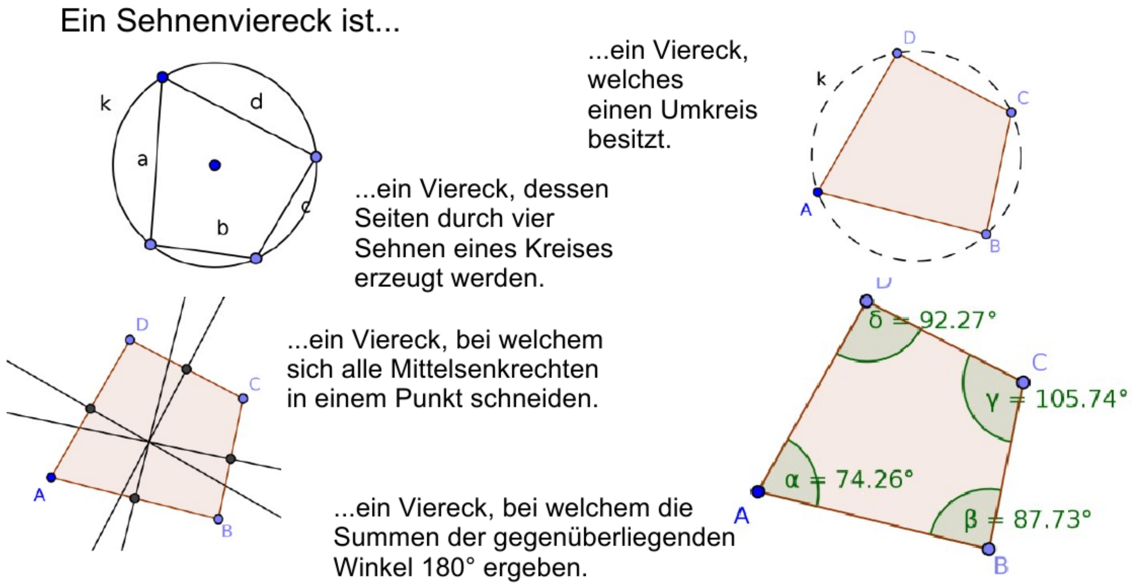
Die Lücke zwischen dem Niveau, auf dem Aufgaben unter Anleitung und unter Mithilfe gelöst werden und dem Niveau, auf dem man Aufgaben selbständig löst, wird durch den Begriff der Zone der nächsten Entwicklung konzeptualisiert. Das Konzept wurde 1934 von Vygotsky auf der Grundlage empirischer Ergebnisse eingeführt und seitdem sowohl theoretisch, als auch unter verschiedenen Anwendungsaspekten weiterentwickelt (für einen Überblick siehe Chaiklin, 2003). Entwicklungen im Bereich der Entwicklungs- und Lerntheorie sind z.B. die Konzeptualisierung der Lehrling-Meister-Beziehung im Fremdsprachenunterricht, Musik und Sport (Lantolf, Pavlenko, Gholson...) die Konzeptualisierung der Handlungsorientierung in der Sonderpädagogik und Begabtenförderung (Krutetski, Smith, Sternberg, Grigorenko…), Anwendungen in der Psychoanalyse (Wilson, Weinstein, …), der Psychotherapie (Leimann, Stiles, …) und der dialogischen Pädagogik (Bakthin, Feuerstein...). Dabei entwickelte Verfahren und Methoden wie gestaffelte Anleitung, Ko-Konstruktion (scaffolding, …), dynamische Kontrollverfahren (dynamic assessment) basieren jedoch weitgehend auf „sichtbarem“ Umgang mit Begriffen und Interpretationen von Verbalisierungen. Sie sind deshalb nur bedingt bei der Konzeptualisierung mathematischer Begriffe anwendbar.

Im tätigkeitstheoretischen Modell können mathematische Konzepte in einer Tätigkeit sowohl Werkzeuge (Problemlösemethode) als auch Untersuchungsgegenstand (Teil der mathematischen Sprache und Theorie) sein. Entwicklung kann dann als dialektische Interaktion und Wechsel entsprechender Tätigkeiten interpretiert werden. In (Weiss-Pidstrygach, 2011) steht die mathematische Umsetzung methodischer dialektischer Gegensätze in Lernumgebungen im Vordergrund. Ziele dieser Lernumgebungen sind u.a. angeleitete Betrachtung eines Problems in „gegensätzlichen“ Kontexten, „provozierter“ Perspektivwechsel und angeleitete Reflektion zu verschiedenen Interpretationen, Kontexten, Methoden und konzeptuellen Hintergründen. Begriffsentwicklung in dialektischen Gegensätzen zielt auf horizontale Vernetzung verschiedener Kontexte und Methodentransfer ab. Im Weiteren betrachten wir Möglichkeiten der vertikalen Entwicklung mathematischer Konzepte. Im Unterschied zur autoritativen Rolle der Anleitung in der beschriebenen dialektischen Positionierung basiert die Umsetzung der Anleitung bei vertikalen Entwicklungen (Vertiefung, Differenzierung, Exaktifizierung, Verallgemeinerung...) stärker auf Methoden der dialogischen Didaktik. Ausgehend von einem im Laufe des Mathematikstudiums erworbenen deduktiven, hierarchischen Aufbau der mathematischen Sprache und an enge Kontexte gebundenes Definieren zeigen wir im folgenden anhand einiger Beispiele, wie in Didaktikveranstaltungen durch Variation verschiedener, mit dem Definieren mathematischer Objekte zusammenhängender Aspekte solche Denkgewohnheiten geändert werden können.

1. Definition-Kontext

Viele mathematische Objekte treten in Grundkursen Mathematik in verschiedenen Kontexten auf. Ein Kreis kann als Resultat der Gärtnerkonstruktion, Menge aller Punkte mit gleichem Abstand von einem gegeben Punkt, als Untermenge der reellen Ebene, definiert durch Polarkoordinaten, als Untermenge der reellen Ebene, definiert durch kartesische Koordinaten, als reelle Lösungen der Gleichung: $x^2+y^2=1$, als Menge der komplexen Zahlen vom Betrag 1, als Bahn eines Punktes bei Drehung um einen Punkt, als Ortslinie eines nicht zentralen Punktes einer Drehscheibe, als spezieller Kegelschnitt, als geschlossene Kurve mit konstanter Krümmung…beschrieben werden. Das Anfertigen von Mind-Maps zu verschiedenen Kontexten, Verallgemeinerungen der Begriffe im entsprechenden Kontext, Entwicklung kontextspezifischer Werkzeuge (z.B. Koordinaten, Metrik, Gleichungen, Symmetrie), Wechsel zwischen Darstellungen und Kontexten sind Aktivitäten, welche die Sensibilisierung bzgl. Wortwahl, Umgang mit und Darstellung von Begriffen fördern.

2. Definition-Eigenschaften, Genese



Die in der Abbildung verschiedenen Definitionen eines Sehnenvierecks führen zu verschiedenen geometrischen Objekten, mit unterschiedlichen Hilfslinien, entsprechenden Problemlösemethoden und unterschiedlichen lokalen Ordnungen (Weiss-Pidstrygach, 2011). Durch Variationen in der Reihenfolge der Herleitungen geometrischer Zusammenhänge können während des Mathematikstudiums geförderte Vorstellungen von einem streng hierarchischen Aufbau der Mathematik in Zweifel gezogen werden.

3. Definition-Darstellungen

Das kanonische Beispiel der Schulmathematik für verschiedene Darstellungen sind die Standartdarstellungen Text, Graph, Wertetabelle und Term für funktionale Zusammenhänge. Diese Vorgaben, sowie Automatisierungen des Gebrauchs vernachlässigen die bewusste Wahl einer Darstellung als geeignetes Werkzeug. Ergänzung durch weitere Darstellungen (Polarkoordinaten, Nomogramme, Maschinchen,...) und die Förderung individueller, problemspezifischer Darstellungen (Parametrisierung, Schubladenprinzip, Darstellungen systematischen Zählens, Zoomen, Spur geometrischer Operation...) fördern ein problemorientiertes Verständnis von Darstellungen.

4. Definition-Interpretation, Denkgewohnheiten, Gegenbeispiele

Eine ausführlich ausgearbeitete Methodologie anhand eines Beispiels zur Begriffsentwicklung unter dem Aspekt der Variation der Interpretation von Definitionen gibt Lakatos (1979). Eine mögliche Anwendung der Methode ist die Hinterfragung „zulässiger“ Mengen für die Repräsentanten *a* und *b* im Bruch *a/b*. Die Standardantwort „ganze Zahlen“ kann durch Schulbeispiele wie *a* und *b* reelle Zahlen (Kontexte Steigung, Ähnlichkeit) und *a* und *b* Funktionen widerlegt werden. Stufenfunktionen, sowie Matrizen bilden schulrelevante Gegenbeispiele und Begriffe wie Nullteiler und Quotientenkörper werden motiviert.

Alle genannten Variationsbeispiele lassen sich gut durch Stationen darstellen. Der mit den Variationen angestrebte Perspektivwechsel wird dabei visuell unterstützt, die Anordnung und Systematik der Stationen sind durch die zugrunde liegenden, die Variationen initiierenden Probleme bestimmt.

Im Mathematikstudium ist das Verständnis der Vielfalt und Komplexität mathematischer Objekte oft in weiterführende Kurse verlagert. Variationen von Definitionen gestatten auch auf elementarem Niveau, die Aufmerksamkeit von Bezeichnungen und Merkmalslisten auf vielfältige Bedeutungen eines Objekts zu lenken.

Literatur

Chaiklin, S. (2003): The Zone of Proximal Development in Vygotsky’s Analysis of Learning and Instruction. In A. Kozulin (Ed.): Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1979): Beweise und Widerlegungen : die Logik mathematischer Entdeckungen. Braunschweig: Vieweg.

Weiss-Pidstrygach, Y. (2011): Umfängliches und Diametrales. In Kaenders R. & Schmidt, R. (Hrsg.): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Birgit WERNER, Pädagogische Hochschule Heidelberg

Gemeinsam besser lernen?! Inklusion als Herausforderung und Chance für den Mathematikunterricht

Inklusion als Weg und Ziel

Inklusion gilt allgemein als Konzept zur Förderung der Chancengleichheit von Menschen mit Behinderungen sowie zur Überwindung von Diskriminierungen aller Risikogruppen. Nach UN-Konvention Artikel 24 Artikel 24 (2) und (3) haben Menschen mit Behinderungen „einen Zugang zu einem integrativen [inklusiven], …Unterricht“. Dazu sind „angemessene Vorkehrungen für die Bedürfnisse des Einzelnen“ zu treffen sowie „wirksame individuell angepasste Unterstützungsmaßnahmen…“ anzubieten (UN-Konvention 2006/2009).

Gemeinsamer Untericht

Gemeinsamer Unterricht ist prädestiniert für die Umsetzung zieldifferenten Unterrichts. Unter Berücksichtigung der Vielfalt aller Schüler nicht mehr die Frage danach zentral, was ein Schüler lernen *soll*, sondern was er lernen *kann*. Daraus resultiert ein zieldifferenter Unterricht, in dem zielgenaue und differenzielle Förderung angeboten wird; didaktisch-methodische Entscheidungen orientieren sich an dem Kriterium der Individualisierung. Das Konzept des Gemeinsamen Unterrichts versucht gerade bei lernschwachen Kindern eine Bildungsbenachteiligung zu vermeiden und Chancengleichheit herzustellen (Balgo & Werning, 2003). Unter Wahrung individueller Bedürfnisse, die zeitlich begrenztes Lernen in Einzelarbeit oder auch kleinen homogen zusammengesetzten Gruppen erforderlich macht, wird die gemeinsame Arbeit an einem Inhalt soweit wie möglich aufrecht erhalten (Graumann 2002, 114).

Laut Befunden aus der Lehr- und Lernforschung sind für die Unterrichtsgestaltung insbesondere für lernschwache Schüler folgende Aspekte zentral:

- Klare Strukturierung und Transparenz des Unterrichts in den Unterrichtszielen, -stilen, -methoden und Bewertungsmaßstäben (Wember 2000; Helmke 2004).
- Hoher Anteil echter Lernzeit. Während Konzepte zur Förderung von Teilleistungen wie Wahrnehmung, Gleichgewicht u.a. keine Effekte bei der Vermittlung von Schulleistungen zeigen, erweisen sich im Gegensatz dazu direkte und Strategieinstruktionen gerade bei Förderung schulischer Fertigkeiten als hoch wirksam (Walter 2002;

Wember 2007; Grünke 2006). Baumert (2011) weist darauf hin, dass zur Verminderung sozialer Disparitäten besondere Förderung vor allem in den Kernbereichen Deutsch und Mathematik notwendig ist.

- Ein lernförderliches Klima zeichnet sich u.a. durch das Prinzip „Fördern durch Fordern“ (Scherer 2011), eine kritisch-konstruktive Feedback-Kultur und eine aktivierende Unterrichtsgestaltung aus (Wember 2007). Für den (fach)spezifischen Lernzuwachs ist das fachbezogene Vorwissen entscheidender als Intelligenz (Stern 2004; Krajewski 2003).

Fachdidaktische Diskussion

Die Integrationsdidaktik favorisiert mehrheitlich didaktische Modelle, die auf eine Spezifizierung und/oder eine Reduktion der Bildungsinhalte verzichten und auf ein anwendungsfähiges Basiswissen fokussieren. Dies charakterisiert auch die Bildungspläne für die Förderschule (2008) und der Schule für Geistigbehinderte (2009) in Baden-Württemberg, die eine hohe fachdidaktische Orientierung erkennen lassen. Diese fachdidaktische Orientierung erfährt jeweils eine zielgruppenspezifische, schwerpunktmäßig alltagsorientierte und berufsrelevante Modifizierung.

Annäherungen

In den jeweiligen Arbeitsfeldern (Fachdidaktik, Sonder- und Integrationspädagogik) lassen sich auf drei Ebenen fruchtbare Annäherungen erkennen:

- *Kompetenzorientierung:* Alle didaktischen Konzeptionen legen ihren Schwerpunkt auf die Anbahnung und Vermittlung von Kompetenzen. Die schriftsprachlichen und mathematischen Konzepte werden in den Vordergrund gestellt.
- *Situationsorientierung:* Das Lernen in Situationen und Zusammenhängen, die für Schüler subjektiv bedeutsam sind, Alltags- und Berufsrelevanz aufzeigen, wird curricular und didaktisch aufbereitet.
- *Natürliche Differenzierung:* Es sind Lern- und Erfahrungsräume bereitzustellen, in denen alle Kinder sich mit ihren individuell unterschiedlichen Lern- und Leistungsvoraussetzungen gemeinsam mit einem Unterrichtsgegenstand/-thema auseinandersetzen können.

Mathematikdidaktische Perspektive im Gemeinsamen Unterricht

Mathematische Kompetenz als domänenspezifisches Konstrukt beinhaltet wissens-, fähigkeits- und fertigkeitsbasierte Konzepte und ist charakterisierte durch deren Anwendungs- und Transferfähigkeit. Der Prozess des Modellierens (PISA-Konsortium 2001; Bildungsstandards 2004; Maaß 2007) wird leitend für inhaltlich und didaktisch-methodische Entscheidungen.

Konzepte

Von der Konzeption „mathe 2000" (www.mathe2000.de) profitieren auch lernschwache Kinder (Scherer 2011; Walter, Suhr & Werner 2001). Gerade die klare inhaltliche Struktur, die aufeinander abgestimmten, die wiederkehrenden Aufgabenformate und die Materialien, die zum Entdecken und Erforschen auffordern, kommen diesen Schülern besonders entgegen.

Das Lehrwerk NAVI Mathematik für Förderschulen (Förderschwerpunkt Lernen) fokussiert vor allem auf den Aspekt der Alltagsorientierung und rückt den Transfer mathematischer Wissens-, Fähigkeits- und Fertigkeitskonzepte in den Mittelpunkt. Diese alltags- und berufsrelevanten Situationen bieten Schülern die Möglichkeit, eigenständig mathematische Strukturen zu erkennen und zu konstruieren. Damit wird eine Brücke zwischen den curricularen Anforderungen der Grund- und der jeweiligen zieldifferent unterrichtenden Sonderschule geschlagen.

Eine solche situations- und kompetenzorientierte Herangehensweise ist nicht gebunden an eine bestimmte Schulform. Sie setzt die Kompetenz der Schüler und deren subjektiv bedeutsamen Probleme in den Mittelpunkt. Diese Perspektive leistet wertvolle Beiträge zur:

- Professionalisierung der Fachdidaktik,
- Verminderung von (Bildungs-)Benachteiligung speziell für Kinder aus erschwerten Lern- und Lebenssituationen,
- Konkretisierung einer Integrations- bzw. Inklusionsdidaktik,
- Prävention von Lernschwierigkeiten.

Literatur

Balgo, R. & Werning, R. (Hrsg.) (2003): Lernen und Lernprobleme im systemischen Diskurs. Dortmund: borgmann.

Baumert, J. (2011): Expertenrat „Herkunft und Schulerfolg". Empfehlungen für die bildungspolitischen Weichenstellungen in der Perspektive auf das Jahr 2010. URL: http://www.kultusportalbw.de/servlet/PB/show/1285001/ExpertenberichtBaW%FC_online.pdf. Entn. 20.10.2011

Bildungsplan Förderschule (2008) MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT Baden-Württemberg, Stuttgart (Hrsg.).

Bildungsplan G-Schule (2009): Bildungsplan für die Schule für Geistigbehinderte. MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT Baden-Württemberg, Stuttgart (Hrsg.).

Bildungsstandards Mathematik (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Herausgegeben vom Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. München: Luchterhand.

Graumann, O. (2002): Gemeinsamer Unterricht in heterogenen Gruppen: Von lernbehindert bis hochbegabt. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Grünke, M. (2006): Fördermethoden. Zur Effektivität von Fördermethoden bei Kindern und Jugendlichen mit Lernstörungen. In: Kindheit und Entwicklung 15, (4), 239 – 254. Göttingen: Hogrefe.

Helmke, A. (2004): Unterrichtsqualität erfassen bewerten verbessern. Seelze: Kallmeyer.

Krajewski, K. (2003): Vorhersage von Rechenschwäche. Hamburg: Kovac.

Maaß, K. (2007): Praxisbuch: Mathematisches Modellieren, Aufgaben für die Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen.

NAVI Mathematik. (o.J.) Feigl, W./ Werner, B. (Hrsg.): Köln; Bildungsverlag Eins http://www.bildungsverlag1.de/navi/downloads/Konzept%20navi%20Mathe.pdf Entn. 20.01.2012

PISA-Konsortium (Hrsg.) (2001): PISA 2000. Opladen: Leske + Budrich.

Scherer, P. (2011): Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen 1. Zwanzigerraum: Fördern durch Fordern. Buxtehude: Persen.

Stern, E. (2004): Lernen als der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: der Erwerb mathematischer Kompetenzen. Tätigkeitsbericht der Max- Planck-Gesellschaft. Berlin, 45-50.

UN-Konvention über die Rechte von Menschen mit Behinderungen (2006/2009): http://www.sovd.de/1465.0.html und http://de.wikipedia.org/wiki/UN-Konvention_%C3%BCber_die_Rechte_von_Menschen_mit_Behinderungen. Entn. 25.02.2012

Walter, J. (2002): Einer flog übers Kuckucksnest. In: Zeitschrift für Heilpädagogik, 53, 442 – 450.

Walter, J., Suhr, K. & Werner, B. (2001): Experimentell beobachtbare Effekte zweier Formen von Mathematikunterricht in der Förderschule. In: Zeitschrift für Heilpädagogik (52); 4/2001; 143 – 151.

Wember, F. (2000): Didaktische Prinzipien. In: Borchert, J. (Hrsg.): Handbuch sonderpädagogische Psychologie, 341 – 352. Göttingen: Hogrefe.

Wember, F. (2007): Direkter Unterricht. In: Walter, J. & Wember, F. (Hrsg.). Sonderpädagogik des Lernens, 437 – 45.

Lena WESSEL, Susanne PREDIGER, Dortmund

Fach- und sprachintegrierte Förderung für mehrsprachige Lernende am Beispiel von Anteilen und Brüchen

Ausgangspunkt und Ziel des Projekts

Ca. 20% der Schülerinnen und Schüler in Deutschland haben Deutsch als Zweitsprache. Sie erreichen in Leistungsstudien geringere Mathematikleistungen als diejenigen mit Deutsch als Erstsprache, und zwar besonders beim konzeptuellen Verständnis, da hier im Lernprozess fachliche und sprachliche Herausforderungen in spezifischer Weise ineinandergreifen (Überblick in Prediger & Özdil 2011). Für eine sprachsensible Unterstützung mehrsprachiger Lernender im Mathematikunterricht gibt es bislang allerdings nur isolierte Förderkonzepte aus Sprach- und Mathematikdidaktik, die die je andere Dimension nicht hinreichend einbeziehen.

In unserem (vom BMBF im Rahmen des Forschungsschwerpunktes „Empirische Fundierung der Fachdidaktiken“ geförderten) Entwicklungsforschungsprojekt verfolgen wir daher das Ziel, ein fach- und sprachintegriertes Förderkonzept für sprachlich und mathematisch schwache, mehrsprachige Lernende auszuarbeiten, empirisch zu erproben und die Wirkungen der entwickelten Fördereinheit quantitativ und qualitativ zu beforschen.

Inhalte der Förderung

Die Einheit zur Förderung konzeptuellen Verständnisses wurde exemplarisch für das Themengebiet „Anteile mit Brüchen beschreiben und vergleichen“ entwickelt. Die 6 Fördereinheiten à 90 Minuten umfassen

1./2. Anteile mit graphischen Darstellungen und Situationen erklären
3. Gleichwertigkeit von Anteilen
4. Vergleich von Anteilen mit graphischen Darstellungen & Situationen
5./6. Anteile von Mengen bestimmen.

Didaktische Gestaltungsprinzipien der Förderung

Die Förderung ist nach dem didaktischen Prinzip der *Vernetzung von Darstellungen und Sprachregistern* gestaltet (Prediger & Wessel 2011), denn einerseits gilt der Darstellungswechsel in der Mathematikdidaktik als zentral für den Aufbau konzeptuellen Verständnisses (Duval 2006), andererseits werden Darstellungsvernetzungen auch in der Didaktik eines sprachsensiblen Fachunterrichts wegen des Potentials zur Sprachförderung hervorgehoben (von Kügelgen 1994, Leisen 2005). Variiert werden die konkreten Vernetzungsaktivitäten: nicht nur Wechseln und Zuordnen von Darstellungen, sondern auch Ermitteln von Ordnungsbeziehungen durch Darstellungswechsel, Operatives Variieren in Darstellungen und Beschreiben der Auswirkungen u.v.m.

Zur konsequenten Integration sprachlicher und fachlich-konzeptueller Förderung werden durch Einfordern von Erklärungen immer wieder *reichhaltige Sprachproduktionen* der Lernenden forciert, sowie Gestaltungsprinzipien des *Scaffolding* (Gibbons 2006) und *Speicheraktivitäten* für (bildungs- und/oder fach-)sprachliche Strukturen eingebunden.

Methodologie und Forschungsfragen

Die Forschungsarbeit wird im Paradigma der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Gravemeijer & Cobb 2006) verortet, d.h. sie verfolgt einerseits die theoriegeleitete und empirisch gestützte Entwicklung von Materialien und Förderkonzepten, andererseits trägt die empirische Beforschung der initiierten Lehr-Lernprozesse zur empirisch begründeten Theoriebildung bei. Die Forschungsfragen beziehen sich auf die prozess- und effektbezogenen Wirkungen der Förderung in fach- und sprachintegrierter Hinsicht:

- Effekte: Inwiefern verbessert die Förderung die Leistungen mehrsprachiger Lernender beim verständigen Umgang mit Brüchen?
- Prozesse: Wie verlaufen die Lehr-Lern-Prozesse im Detail?
  Welche situativen Wirkungen zeigen welche der Lernangebote?

Forschungsdesign

Die quantitative Beforschung der Effekte wird im quasiexperimentellen Prä-Posttestdesign mit Warte-Kontrollgruppe untersucht. Aus einer Stichprobe mit N=303 Lernenden (Jahrgang 7, Haupt- & Gesamtschulen) wurden mathematisch schwache Lernende mit Einschränkungen in der Zweitsprache Deutsch ausgewählt. Experimental- und Kontrollgruppe (N=2x36) sind vergleichbar hinsichtlich Sprachstand, Familiensprachgebrauch, sozioökonomischem Status und Leistungen im Prätest zum verständigen Umgang mit Brüchen. Quantitativ erfassbare Lernzuwächse beim verständigen Umgang mit Brüchen zeigt der Vergleich zum Posttest.

Die qualitative Beforschung der Wirkungen der Lernangebote fokussiert auf die durch sie ausgelösten situativen Momente in den Lehr-Lernprozessen in fach- und sprachintegrierter Hinsicht. Datengrundlage dazu bilden Videodaten, Transkripte und Schülerdokumente aus den Förderprozessen, sowie Profilanalysen zur vertieften Erhebung des Sprachstands.

Erste quantitative Ergebnisse und qualitative Einblicke

Erste Auswertungen der *quantitativen* Daten zeigen signifikant höhere Lernzuwächse der Experimental- gegenüber der Kontrollgruppe (Varianzanalyse mit Messwiederholung $F\ [1;\ 71] = 10{,}78$, $p < .05$ $\eta^2 = .13$). Mit einer relativ kurzen Förderung sind also deutliche Lernfortschritte erreichbar und die Wirksamkeit nachgewiesen.

Die ersten *qualitativen Analysen der Wirkungen im Detail* zeigen komplexe und subtile Verknüpfungen sprachlicher und fachlicher Lernprozesse, wie das Fallbeispiel der Schülerinnen Nadja und Sitta (7. Klasse einer Dortmunder Hauptschule) zeigt. Die Szene entstand im Rahmen der ersten Förderstunde bei der Bearbeitung der Duploaufgabe (Abb. 1).

Beim Erforschen und Beschreiben operativer Veränderungen werden Beziehungen der Stammbrüche zueinander erarbeitet und über Veränderungen der entstehenden Anteile reflektiert. Die explizite Beschreibung der Veränderungen des Anteils, den das Aufgaben-Kind Can bekommt, ist für die Mädchen sprachlich und konzeptuell herausfordernd:

L: Was passiert mit dem Anteil, wenn man den jetzt anguckt?
S: Der wird immer kleiner.
L: Mmh, wie kommst du darauf?
S: Weil das hier immer, weil ... das hier sehen kann *(Zeigt mit dem Stift nacheinander auf die gefärbten Anteile in den Bruchstreifen in der Tabelle)* und mit den Brüchen *(Zeigt mit dem Stift auf die Brüche in der rechte Spalte in der Tabelle).*

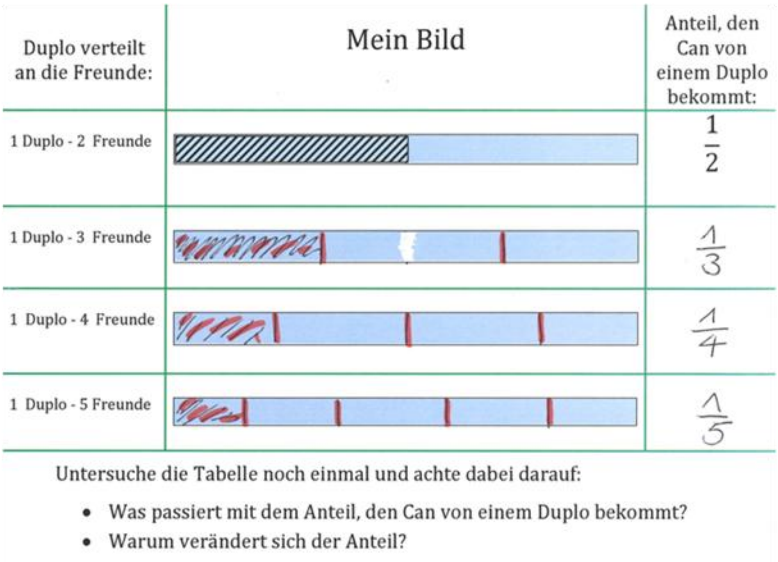


Abb. 1: Bearbeitung der Schülerin Sitta zur Duploaufgabe

Sitta kann ihre (mathematisch richtige) Idee durch Zeigen auf die graphische Darstellung und Nutzung deiktischer Mittel („das“ und „das“) trotz (für mündliche Kommunikation typisch) vager Sprache verständlich machen. Sittas Partnerin Nadja dagegen wechselt im anschließenden Gespräch mehrfach zwischen „größer“ und „kleiner“ als Beschreibung der Veränderung des Anteils und begründet schließlich, dass der Anteil größer werde, „weil es ja immer mehr Freunde werden“. Sitta stimmt dieser Aussage zunächst zu, obwohl sie gleichzeitig erklärt, dass die Duplostücke kleiner geschnitten werden müssen. Ihre Fähigkeit zur sprachlichen Präzisierung (die

Anzahl der Teile wird größer, aber der Anteil kleiner) scheint an einer für den Konzeptaufbau heiklen Grenze. Der Förderlehrer L expliziert die Diskrepanz und ermöglicht so die Überwindung der Unklarheit:

L: Okay, aber du sagst jetzt, er muss es kleiner schneiden, aber der Anteil wird größer?
S: Nein von den Freunden wird ja der Anteil größer und von'er zum Beispiel jetzt von der Schokolade wird das äh kleiner weil er das in mehreren Stücken schneiden muss, damit alle äh seine Freunde etwas davon bekommen.

Die Szene zeigt, wie bei Nadja und Sitta konzeptuelle und sprachliche Herausforderungen bei der Beschreibung der Veränderung des Anteils ineinandergreifen. Auch wenn Sittas Unterscheidung „Anteil der Freunde" versus „Anteil von der Schokolade" noch nicht ganz der Zielsprache entspricht, entwickeln sich Sittas sprachliche Mittel, die Veränderung des Anteils präzise zu beschreiben und eine Begründung für den kleiner werdenden Anteil zu formulieren, zunehmend im Prozess, in dem die Situation auch konzeptuell ausgeschärft werden kann. Während Sitta sich im ersten Zugriff der Erklärung noch mit deiktischen Mitteln und der graphischen Darstellung als Erklärungsansatz behilft, löst sie sich mehr und mehr von dieser kontextbezogenen Argumentation und präzisiert ihre Ausdrucksmittel. Nun sind beide Mädchen empfänglich für ein fachsprachliches Angebot zur Unterscheidung der Anzahl der Teile und dem Anteil am Ganzen.
Ähnlich wie in dieser Szene werden in den Förderprozessen viele Verflechtungen sprachlichen und konzeptuellen Lernens deutlich, die in den folgenden Projektjahren weiter analysiert werden sollen.

Literatur

Duval, R. (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 61, 103-131.

Gibbons, P. (2006): Unterrichtsgespräche und das Erlernen neuer Register in der Zweitsprache. In: Mecheril, P. & Quehl, T. (Hrsg.): Die Macht der Sprachen. Münster: Waxmann, 269-273.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006): Design research from the learning design perspective. In: Van den Akker, J. & al. (Hrsg.): Educational design research. London: Routledge, 45-85.

Kügelgen, R. von (1994): Diskurs Mathematik. Kommunikationsanalyen zum reflektierenden Lernen. Frankfurt: Lang.

Leisen, J. (2005): Wechsel der Darstellungsform. Ein Unterrichtsprinzip für alle Fächer. In: Der Fremdsprachliche Unterricht Englisch 78, 9-11.

Prediger, S. & Özdil, E. (2011) (Hrsg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung. Band 32 der Reihe Mehrsprachigkeit. Waxmann, Münster u.a.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011): Darstellen – Deuten - Darstellungen vernetzen: Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz, in: Prediger & Özdil, 163-184.

Katharina WESTERMANN, Nikol RUMMEL, Ruhr-Universität Bochum,
Lars HOLZÄPFEL, Pädagogische Hochschule Freiburg

Präkonzepte aufgreifen fördert den Verständniserwerb

1. Präkonzepte aufgreifen

Unterrichtskonzepte mit eigenständiger Bearbeitung sinnstiftender Probleme gewinnen zunehmend an Bedeutung (Leuders, Hußmann, Barzel & Prediger, 2011). Bei der eigenständigen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten greifen die Lernenden auf ihr Vorwissen und ihre Präkonzepte zurück. Dabei handelt es sich um Präkonzepte, die nicht unbedingt mit den in der Mathematik geltenden Normen übereinstimmen (Prediger & Wittmann, 2009). In einer anschließenden Instruktion können die Lernenden an ihrem individuellen Wissens- und Vorstellungsstand abgeholt werden (Lengnink, Prediger & Weber, 2011), indem diese Präkonzepte aufgegriffen und mit den mathematischen Konventionen in Verbindung gebracht werden. Durch diesen Prozess kann negatives Wissen (d.h. Abgrenzung kanonischer Lösungen und Konzepte von fehlerhaften Prozeduren und Ideen) gefördert werden (Oser, Hascher & Spychiger, 1999). Ein Ansatz, der selbstständiges Problemlösen mit anschließendem Aufgreifen der Schülerpräkonzepte untersucht, ist *Productive Failure* (Kapur, 2009): Lernende suchen zunächst eigenständig Lösungswege für ein Problem zu einem noch unbekannten Konzept. Dabei verfolgen die Schülerinnen und Schüler zwar in der Regel Wege, die nicht mit der Norm übereinstimmen, jedoch scheinen sie von der nachfolgenden Instruktion besonders gut zu lernen: Kapur (2009) konnte in mehreren Studien zeigen, dass Lernende, die zunächst selbstständig Lösungsansätze generierten, ehe die Lehrperson ihre Lösungsansätze mit der mathematischen Norm in Verbindung brachte, in Nachtests deutlich besser abschnitten als diejenigen der Kontrollgruppe, die zunächst eine Instruktion erhielten und anschließend Übungsaufgaben bearbeiteten. Die Studien von Kapur (2009) lassen jedoch offen, ob die Lernergebnisse auf das selbstständige Problemlösen an sich zurückzuführen sind oder ob das Aufgreifen und die Ausdifferenzierung der Präkonzepte in der anschließenden Instruktion der Schlüssel zum Erfolg ist. Mit anderen Worten, dient das Problemlösen vielleicht „nur“ dem Explizieren von Präkonzepten? Hier stellt sich die Frage, ob Lernen aus Fehlern und Präkonzepten anderer – advokatorisches negatives Wissen (Oser et al., 1999) – den Wissenserwerb in gleicher Weise fördern kann.

Vor dem Hintergrund der häufig geäußerten Bedenken, dass sich fehlerhafte Ansätze, die die Lernenden während der eigenständigen Arbeitsphase entwickeln (und seitens der Lehrkraft nicht unmittelbar korrigiert werden), negativ auf den Wissenserwerb auswirken könnte, stellt sich zudem die Frage, ob die Schülerinnen und Schüler während der eigenständigen Arbeitsphase unterstützt werden sollten um fehlerhafte Lösungsansätze aufzufangen. Während in frühen Productive Failure Studien die Lernenden nur motiviert wurden weitere Lösungsansätze zu entwickeln, erhielten sie in neueren Productive Failure Studien Gegenbeispiele zu ihren Lösungsansätzen, um unvollständige und fehlerhafte Aspekte der Lösungsideen zu verdeutlichen und so die Lernenden zum nächsten Schritt zu leiten. Ob sich der gezielte Einsatz von Gegenbeispielen in dieser Situation lernförderlich auswirkt wurde jedoch bislang nicht empirisch überprüft.

2. Studiendesign

In unserer Studie interessierten wir uns zunächst dafür, wie sich die eigenständige Erarbeitung mit anschließender Instruktion im Vergleich zur Instruktion mit anschließender Übung auf den prozeduralen (analoge Aufgaben) und konzeptuellen Wissenserwerb (fehlerhafte Lösungen erklären und Darstellungswechsel) auswirkt. Beide Ansätze variierten wir zudem hinsichtlich folgender Optimierungsfragen: Können prototypische Präkonzepte lernförderlich in einer Instruktion ohne vorangehende Problemlösephase aufgegriffen werden? Kann durch Gegenbeispiele während der eigenständigen, kooperativen Problemlösephase das Lernen weiter unterstützt werden? Zu Beantwortung dieser Fragen verglichen wir in einer quasi-experimentellen Studie mit 154 Zehntklässlern vier Bedingungen: In einer regulären *Productive Failure* Bedingung (PF) bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler während einer Schulstunde in Dreiergruppen ein Problem ohne vorangehende Instruktion. Dabei erhielten sie keine inhaltliche Unterstützung. In einer *unterstützten Productive Failure* Bedingung (PF+) erhielten die Lernenden Gegenbeispiele zu ihren Lösungsansätzen. In einer nachfolgenden Instruktionsphase (eine Schulstunde) wurden in beiden Productive Failure Bedingungen basierend auf typischen Schülerlösungen das Konzept und die Formel der Standardabweichung (bzw. des Mittleren absoluten Abstands zum Mittelwert) hergeleitet. In einer regulären *Direkte Instruktions*-Bedingung (DI) führte die Lehrperson in einer Schulstunde zunächst das Konzept und die Formel ein. Anschließend lösten die Lernenden eine Schulstunde lang Übungsaufgaben in Kleingruppen. In der Bedingung *Direkte Instruktion mit Schülerlösung* (DI-S) führte die Lehrperson das Konzept und die Formel vor dem Hintergrund typischer fehlerhafter Schülerlösungen ein. Die Instruktion stimmte folglich mit der Instruktion in den Productive Failure Bedingungen überein, fand aber zu Beginn der Lernphase statt. Anschließend lösten die Lernenden ebenfalls Übungsaufgaben in Kleingruppen.

3. Ergebnisse

Nur die Daten der 144 Lernenden, die in beiden Schulstunden anwesend waren, gingen in die Analysen ein. In einer MANCOVA mit dem Faktor Bedingung und der Kovariate Mathematiknote zeigten sich zwischen den Bedingungen signifikante Unterschiede. Bezüglich prozeduralem Wissen ergaben a priori Kontraste einen signifikanten Unterschied mit kleiner Effektstärke: Die Direkte Instruktions-Bedingungen zusammengenommen schnitten besser ab als die Productive Failure Bedingungen zusammengenommen ($F[1, 139] = 7.02$, $p = .01$, $\eta^2 = .05$). Bezüglich konzeptuellen Wissen ergaben a priori Kontraste signifikante Unterschiede mit großer und mittlerer Effektstärke: Die Productive Failure Bedingungen schnitten besser ab als die Direkte Instruktions-Bedingungen ($F[1, 139] = 26.67$, $p = .00$, $\eta^2 = .15$) und DI-S schnitt besser ab als DI ($F[1, 139] = 19.0$, $p = .00$, $\eta^2 = .12$). Es gab keinen signifikanten Unterschied zwischen PF+ und PF. Ein posthoc Scheffé Test ergab für konzeptuelles Wissen zwei homogene Subgruppen: DI unterschied sich signifikant von allen anderen Bedingungen; es gab keinen signifikanten Unterschied zwischen PF, PF+ und DI-S.

4. Diskussion und Fazit

In unserer Studie schnitten die Direkte Instruktions-Bedingungen beim *prozeduralen Wissen* besser ab als die Productive Failure Bedingungen. Dies könnte auf einen Übungseffekt zurückzuführen sein: Die Lernenden der Direkten Instruktions-Bedingungen lösten acht Übungsaufgaben, wogegen die Lernenden der Productive Failure Bedingungen nur eine Aufgabe bearbeiteten. Bei einer längeren Übungsphase könnte sich der Unterschied nivellieren. Beim *konzeptuellen Wissen* hingegen, führten die Productive Failure Bedingungen zu besserem Lernerfolg. Die selbstständige Problemlösephase ermöglichte es in der anschließenden Instruktion, Präkonzepte und Vorwissen der Lernenden aufzugreifen, auszudifferenzieren und in mathematische Normen zu überführen. Kognitive Unterstützung in Form von Gegenbeispielen zu den erstellten Lösungsansätzen während der Problemlösephase hatte dabei keinen zusätzlichen Lerneffekt. Dies stimmt mit Befunden von Weinberger, Ertl, Fischer und Mandl (2005) überein; in ihren Studien zeigte es keine positiven Effekte auf die Lernergebnisse, wenn die Aufmerksamkeit der Lernenden auf bestimme Aufgabenmerkmale gelenkt wurde. Unsere Studie zeigte weiterhin, dass das Aufgreifen typischer Präkonzepte für das konzeptuelle Wissen förderlich sein kann und zwar unabhängig davon, ob die Lernenden selbst in einer vorangehenden Problemlösephase Präkonzepte explizierten oder ob es sich um prototypische Präkonzepte handelte: In unserer Studien schnitten Bedingungen, in denen die Instruktion auf typische Präkonzepte aufbaute (PF, PF+, DI-S), besser ab als die DI Bedingung in der der Fokus der Instruktion auf kanonischen Lösungen lag. Dass Lernende nicht unbedingt ihre eigenen Präkonzepte explizieren müssen, sondern auch von Präkonzepten anderer profitieren können, ergaben auch ergänzende (vorläufige) Analysen von Videoaufnahmen der selbstständigen Problemlösephase in den Productive Failure Bedingungen: Die Anzahl eingebrachter eigener Ideen korrelierte nicht signifikant mit den Nachtestergebnissen ($r_{prozedural}$ = .21, p = .06; $r_{konzeptuell}$ = .11, p =.30). Ohne vorangehende Problemlösephase ist Abholen der Lernenden an ihrem Wissens- und Vorstellungsstand (Lengnink et al., 2011) allerdings nur dann möglich, wenn die Präkonzepte hinlänglich bekannt sind.

Da sich die Bedingungen mit oder ohne Präkonzepten in ihrem Umgang mit der Mathematik als Disziplin unterscheiden, ist zusätzlich das Bild der Lernenden vom Fach von Interesse. Wir erfassten das Mathematikbild der Lernenden mit dem Semantischen Differential nach Stahl & Bromme (2007). Es zeigte sich, dass von der rezeptiven DI Bedingung insbesondere Lernende profitierten, die Mathematik als objektiv ($r_{prozedural}$ = .69, p = .00) und statisch ($r_{prozedural}$ = .54, p = .02) ansahen, wogegen von der DI-S Bedingung Lernende am meisten profitierten, die Mathematik als dynamisch ($r_{prozedural}$ = .37, p = .02; $r_{konzeptuell}$ = .38, p =.02) betrachteten. Eine Instruktion, die Präkonzepte der Lernenden aufgreift, scheint demnach zu einem neueren Mathematikverständnis zu passen. Dieser Einfluss des Mathematikbilds kam allerdings nicht zum Tragen, wenn die Lernenden zuvor ihre Präkonzepte aktivierten (PF, PF+); weitere Analyse stehen hier noch aus.

Literatur

Kapur, M. (2009). Productive Failure in mathematical problem solving. *Instructional Science*, *38*(6), 523-550.

Lengnink, K., Prediger, S. & Weber, C. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen - Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53(40)*, 2-7.

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B. & Prediger, S. (2011). „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53(37),* 1-9.

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des negativen Wissens. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten* (S. 11–41). Opladen: Leske + Budrich.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? *Praxis der Mathematik in der Schule, 51(27*),1-8.

Stahl, E. & Bromme, R. (2007). The CAEB: An instrument for measuring connotative aspects of epistemological beliefs. *Learning and Instruction, 17* (6)*,* 773-785.

Weinberger, A., Ertl, B., Fischer, F. & Mandl, H. (2005). Epistemic and social scripts in computer-supported collaborative learning. *Instructional Science, 33*(1), 1-30.

Martin WINTER, Vechta

Die „Psychogeometrie“ Maria Montessoris – Impulse für den Unterricht?

Im Jahre 1934 erschien in spanischer Sprache „Psicogeometria. El estudio de la geometria basado en la psicologia infantil“ ein Buch Maria Montessoris mit ihren Vorstellungen zum Geometrieunterricht. Während die meisten ihrer Schriften längst in deutscher Sprache vorliegen, wird die „Psychogeometrie“ erst in diesem Jahr im Rahmen der Herausgabe der Gesammelten Werke Maria Montessoris in deutscher Sprache erscheinen (Herausgeber: Prof. em. Dr. Harald Ludwig, WWU Münster; Verlag: Herder).

1. Zum Buch und seiner Struktur

Die spanische Ausgabe aus dem Jahre 1934 (Barcelona) basiert auf einem italienischen Manuskript. Eine Edition einer deutschen Fassung war bereits geplant, auf der Grundlage von Vorarbeiten des niederländischen Mathematikdidaktikers Jan van de Kerkhoff (†) und Ingeborg Waldschmidt, publiziert wurde davon jedoch lediglich das Vorwort (Montessori, 2010). 2011 ist auf Englisch die „Psychogeometry“ erschienen, herausgegeben von Benedetto Scoppola, in der vor allem die Abbildungen einer Überarbeitung unterzogen wurden (Scoppola, 2011). Von Scoppola sind zuvor Beiträge erschienen, die auf der Auseinandersetzung mit der „Psychogeometrie“ basieren (Scoppola, 2010a und 2010b).

Der Aufbau des Buches zeigt, dass es nicht um eine systematische Darstellung der (euklidischen) Geometrie geht, obwohl sich Maria Montessori sowohl mit Fachvokabular als auch mit logischen Zusammenhängen geometrischer Inhalte auseinander setzt. Sie beginnt mit einem Kapitel „Allgemeines“, in dem sie vor allem auf die Psyche des Kindes und sein Lernen eingeht. Das Kapitel enthält Hinweise zu „sensiblen Perioden“, zur Geometrie im Kinderhaus sowie zu elementaren geometrischen Begriffen und Figuren. Es folgt ein Kapitel über die „Einführung in die Grundschulphase“, das stärker fachlich orientiert ist, mit Hinweisen auf das in der Montessori-Pädagogik eingesetzte Geo-Material, es behandelt Linien, Definitionen und das Dreieck. Das dritte Kapitel widmet sich mit dem „Vergleich von Figuren“ dem Quadrat und Zerlegungen. Es folgen Kapitel zum gleichseitigen Dreieck und zum Kreis mit Zugängen zu Brüchen und Dezimalbrüchen. Das folgende Kapitel mit „Anwendungen der Flächengleichheit“ enthält u. a. den Satz des Pythagoras und das abschließende Kapitel mit „Überlegungen zu den Winkeln“ führt zur näherungsweisen Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises.

2. Zum Stil und zu den Zielsetzungen

Wer Texte Maria Montessoris kennt, begegnet auch in diesem Werk einer farbigen, bildreichen Sprache, die dem Duktus und der Redundanz einer engagiert vorgetragenen Rede folgt. Dazu einige Beispiele:

„In den meisten Fällen blieb die Arbeit des Lehrers nur *äußerlich*, ….. Die verlangte Abstraktion war oftmals die erzwungene Antwort einer einfachen, unter großem Druck zustande gekommenen Erinnerungsfähigkeit. … Die Gesamtheit der Probleme, die sich den Erziehern stellen, löst sich nicht durch ein logisches Studium der Reihenfolge der Schwierigkeiten. … Das Lernen ist tatsächlich einer grundlegenden Bedingung unterworfen: dass der Schüler *willens ist*, Kenntnisse zu erwerben, dass er *aufmerksam* sein kann, kurz dass er *Interesse hat*. Seine *psychische Aktivität* ist die unabdingbare Voraussetzung für das Gelingen….“ (Montessori, 1934, S. 8/9)

„Das Kind ist in ganz besonderem Maße ein Forscher, der sich immer in Bewegung befindet …, es richtet sich auf bestimmte und genaue Ziele, mit einer Willenskraft, die für sich allein genommen schon ausreicht, um uns seine lebenswichtigen Bedürfnisse zu offenbaren. ... Der Lehrer denkt immer noch, dass das Kind, um zu lernen, jener geraden Linie folgen muss, die er als Erzieher gezogen hat. Das Kind hat jedoch seine eigene Art zu lernen, nämlich die spontane Wahl, die wiederholte Übung, die zugleich sensorische und motorische Aktivität, welche die Aktivität der Sensibilität und der Psyche begleitet …“. (Montessori, 1934, S. 12/13)

„Wir sagten zu Beginn, dass sich unsere Darlegungen nicht darauf beziehen, *wie man systematisch die Geometrie lernen lässt*. Sie sind nichts weiter als eine *geistige Gymnastik* zur Geometrie. Sie bereitet den Geist mehr auf das *Handeln* als auf das *Aufnehmen* vor und regt ihn zu einem stets lebendig bleibenden Interesse an. Der auf diese Weise vorbereitete Geist ist *aktiv* geworden. Wenn es an der Zeit ist, eine wirklich systematische Unterweisung in der Geometrie zu erhalten …, wird der Schüler über einen Intellekt verfügen, der ihr mit lebendigem Interesse und mit einem einzigartigen Auffassungsvermögen begegnet“. (Montessori, 1934, S. 65/66)

Diese Beispiele verdeutlichen die Zielsetzung des Buches, nämlich die Verknüpfung von Impulsen zum Lernen von Geometrie mit einer Fokussierung auf das Lernen des Kindes. Fachinhaltliche Darstellungen werden immer wieder unmittelbar mit Gedanken zur Psyche des Kindes verbunden. Die Darstellung ist damit auf die fachdidaktische Zielsetzung der Vermittlung von Geometrie ausgerichtet, obwohl sie keine systematische Darstellung eines Geometrie-Curriculums oder eines Geometrie-Kurses darstellt. Dies ist auch in dem oben skizzierten Aufbau des Buches zu erkennen.

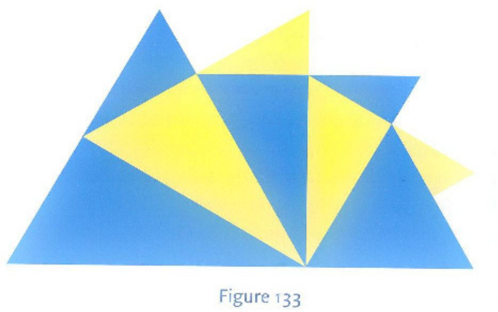
3. Ausgewählte besondere Details

Im Anschluss an die Einführung in geometrische Gegenstände regt Maria Montessori gern zur dekorativen Ausgestaltung der Figuren an.

„Das Kind wird angeregt zu einer genauen Betrachtung der Details, zu einer Analyse und zu Kombinationen, die mit den Eigenschaften der geometrischen Figuren verbunden sind. Das geschieht nicht durch die Aufforderung und die Lenkung eines Lehrers. Es ist die künstlerische Schöpfung, die hier zur Lehrerin der Geometrie wird. Die wunderschönen Werke, die sich daraus ergeben, sind die konstante Anregung und die ständige Belohnung eines Fortschreitens, das durch den unwiderstehlichen Impuls der Seele eines jeden hervorgerufen wird.“ (Montessori, 1934, S. 28/29)

Die Anregungen zur dekorativen Verwendung von geometrischen Objekten eröffnen zugleich Freiräume zur kreativen Gestaltung.

„Jedes Kind stellt eine Sammlung von geometrischen und dekorativen Konstruktionen des Dreiecks zusammen …. Es beginnt ein Album der Geometrie zu gestalten, das allmählich wächst.“ (Montessori, 1934, S. 45)



„Figure 133“ aus Scoppola, 2011, S.114

Selbst die Darstellung von Zusammenhängen wird gelegentlich eingebettet in eine dekorativ erscheinende Gestaltung. Die nebenstehende Figur veranschaulicht die Zusammenhänge einer Abfolge von rechtwinkligen Dreiecken.

Ein Beispiel zu einem inhaltlichen Argumentationsstrang: Die Vorstellung zum Flächeninhalts eines Kreises wird durch Annäherung des Kreises durch Polygone mit zunehmender Eckenzahl entwickelt. Für die (regelmäßigen) Polygone, etwa das Fünfeck wird dazu zunächst der Flächeninhalt aus der Zerlegung in Teildreiecke um den Mittelpunkt des umschreibenden Kreises hergeleitet.

Für die Ermittlung von π wird eine experimentelle Bestimmung vorgeschlagen: Die Abwicklung des Kreisumfangs führt bei entsprechender Genauigkeit zu einer Näherung auf 3,14. Neben der Herleitung des Verhältnisses von Umfang und Flächeninhalt wird eine konstruktive (angenäherte) „Quadratur des Kreises“ gezeigt. Dazu wird eine Näherung des Umfangs für ein Rechtecks aus U und r verwendet. Dieses wird nach dem Höhensatz in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat umgewandelt.

4. Kritische Anmerkungen

Maria Montessori verfolgt in der „Psychogeometrie" auch die Vermittlung der Fachsprache, etwa durch explizit formulierte Definitionen und Listen geometrischen Vokabulars. Gleichwohl verwendet sie häufig eher umgangssprachliche Formulierungen, deren präzise mathematische Bedeutung sich oft nur aus dem Kontext erschließt. Erkennbar haben Ideen und kreative Impulse Vorrang vor fachlicher Systematik, dies führt gelegentlich auch zur Verwendung unbrauchbarer Begriffe. Durchgehend begegnet dem Leser eine blumige Sprache und sehr redundante Darstellung.

5. Resümee

Zusammenfassend stellt die „Psychogeometrie" zunächst einmal eine historische Quelle für die Montessori-Pädagogik dar. Damit ist sie eine wichtige Grundlage für einen Geometrieunterricht im Sinne der Montessori-Pädagogik. Allerdings muss man diese Quelle kritisch lesen – dann wird sie auch zu einem Fundus konkreter Anregungen für die Unterrichtsgestaltung. In diesem Unterricht steht das lernende Kind im Vordergrund, das in aktiver Auseinandersetzung mit den Gegenständen die Gelegenheit zu entdeckendem Lernen hat. Das Kind erwirbt seine Kompetenzen auf individuellem Wege und in individuellem Lerntempo.

Aus der Perspektive der Mathematikdidaktik mag die Montessori-Pädagogik immer noch fremd, evtl. auch unzugänglich erscheinen, womöglich sogar fachlich und fachdidaktisch isoliert. Gleichwohl muss man zur Kenntnis nehmen, dass die Montessori-Pädagogik in der Praxis (zunehmend) gefragt ist, daher stellt sich mit ihr auch eine Aufgabe für die Mathematikdidaktik. Die deutschsprachige Version der „Psychogeometrie" wird hoffentlich zur Kommunikation beitragen.

Literatur

Montessori, Maria (1934): Psicogeometria. Barcelona

Montessori, Maria (2010): Vorwort zur Psico Geometría. In: Das Kind, 47/48, S. 10-16

Scoppola, Benedetto (2010a): Montessori-Mathematik: Eine neurowissenschaftliche Perspektive. In: Das Kind, 47/48, S. 32-47

Scoppola, Benedetto (2010b): Das Kind und die Konstruktion von Geometrie nach der Psico-Geometria. In: Das Kind, 47/48, S. 48-67

Scoppola, Benedetto (Hrsg.) (2011): Maria Montessori: Psychogeometry. Amsterdam, Montessori-Pierson Publishing Company

Gerald WITTMANN, Freiburg

Zur Konsistenz von Fehlermustern in der Bruchrechnung – Ergebnisse einer empirischen Studie

Ein Fehlermuster liegt dann vor, wenn sich bei strukturell gleichen Aufgaben auch strukturell gleiche Fehler zeigen (Prediger & Wittmann 2009). In der Bruchrechnung sind die Fehlermuster wohl bekannt und gut dokumentiert (Hennecke 1999; Padberg 2008). Offen bleibt aber die Frage, ob die Fehlermuster auch konsistent sind. Mit anderen Worten: Wenn ein(e) Schüler(in) mehrere strukturell gleiche Aufgaben innerhalb eines Tests löst, lässt sich dann bei allen Aufgaben auch dasselbe Fehlermuster oder – allgemeiner formuliert – derselbe Lösungsweg beobachten?

Ältere Studien zur Bruchrechnung zielen in erster Linie auf die Identifikation von Fehlermustern und die Häufigkeit ihres Auftretens. Jüngere Studien zeigen hingegen die Vielfalt individueller Lösungswege (Hennecke 1999 mittels Rechengraphen) und weisen nach, dass die Bruchrechnung für die meisten Schüler(innen) in disjunkte Aufgabenklassen zerfällt (Herden & Pallack 2000 mittels Cluster- und Faktorenanalysen). Ferner liefern Studien zum Lösen linearer Gleichungen in der Algebra die Hypothese, dass Fehlermuster vielfach nicht konsistent sind (Tietze 1988; Stahl 2000).

Design der Studie

Ein *Aufgabenset* zu jedem der vier Bereiche Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Brüche sowie Addition eines Bruchs und einer natürlichen Zahl besteht aus jeweils sechs Aufgaben. Das Aufgabenset zur Multiplikation beispielsweise umfasst drei Aufgabenpaare, die sich untereinander nur in den gegebenen Zahlen unterscheiden – zwei Aufgaben mit ungleichnamigen Brüchen, zwei Aufgaben mit gleichnamigen Brüchen (bei verschiedenen Zählern) sowie zwei Aufgaben mit gleichen Brüchen:

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2} \text{ und } \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{7},\ \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} \text{ und } \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{13} \text{ sowie } \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} \text{ und } \frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15}$$

Jeder *Testbogen* umfasst 21 Aufgaben, also drei der vier Aufgabensets sowie drei weitere Füllaufgaben (ohne inhaltliche Bedeutung). Von jedem Testbogen gibt es wiederum neun Varianten, die sich in der Reihenfolge der Aufgaben unterscheiden, um Serieneffekte ausschließen zu können. An der Studie nahmen N = 428 Schüler(innen) der Jahrgangsstufen 6 und 7 von Real- und Werkrealschulen teil.

Während bei traditionellen Fehleranalysen in der Bruchrechnung die Lösungs*quoten* im Vordergrund stehen und erst in einem zweiten Schritt häufige Fehlermuster extrahiert werden, zielt die Kodierung in dieser Studie auf Lösungs*wege* und nicht auf korrekte oder falsche Lösungen; sie blendet gezielt Einmaleins-Fehler oder ähnliche Fehler aus. Für die Multiplikation zweier Brüche ergibt sich beispielsweise folgendes *Kodierschema*:

0 Nicht bearbeitet

1 Richtiger Lösungsweg (im Kopf oder schriftlich; es kann eine richtige, aber auch eine falsche Lösung sein, z. B. Einmaleins-Fehler).

3 Hauptfehlermuster „Nenner beibehalten" (bei ungleichnamigen Brüchen nach vorherigem Gleichnamigmachen; es können auch weitere Fehler wie Einmaleins-Fehler auftreten).

9 Sonstiges (andere, seltenere Fehlermuster wie „Multiplizieren mit dem Kehrbruch" oder nicht erklärbare Bearbeitungen).

Ergebnisse: Multiplikation zweier Brüche

Tabelle 1 bezieht sich auf die Häufigkeiten der Lösungswege für die sechs Multiplikationsaufgaben (N = 315). Bei ungleichnamigen Brüchen ist der richtige Lösungsweg häufiger als bei gleichnamigen. Im Falle gleicher Nenner wiederum zeigt sich das Hauptfehlermuster in jedem der beiden Aufgabenpaare dann häufiger, wenn der Nenner größer ist. Ferner macht ein kleiner Teil der Schüler(innen) ungleichnamige Brüche zunächst gleichnamig und behält dann den Nenner bei.

Kodierung	$\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{7}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{13}$	$\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}$	$\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15}$
0 Nicht bearbeitet	24	31	14	21	13	21
1 Richtiger Lös.weg	226	228	199	167	207	176
3 Nenner beibehalt.	30	25	74	102	53	91
9 Sonstiges	35	31	28	25	42	27

Tabelle 1: Multiplikation zweier Brüche – Häufigkeitstabelle

		$\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15}$ („große Zahlen")				
		0	1	3	9	
$\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}$ („kleine Zahlen")	0	11	1	0	1	13
	1	7	159	31	10	207
	3	0	2	50	1	53
	9	3	14	10	15	42
		21	176	91	27	315

Tabelle 2: Multiplikation zweier Brüche – Kreuztabelle

Tabelle 2 stellt den Zusammenhang der Lösungswege für die beiden Aufgaben zur Multiplikationen gleicher Brüche dar. 235 von 315 Schüler(innen) lösen beide Aufgaben auf dieselbe Weise, während 80 unterschiedlich vorgehen. Insbesondere rechnen 31 Schüler(innen) bei der Aufgabe mit „kleinen“ Zahlen gemäß einem richtigen Lösungsweg, während sie bei der Aufgabe mit „großen“ Zahlen den Nenner beibehalten. Nach dem Test von McNemar-Bowker (Bortz u. a. 2008) ist die Asymmetrie der Kreuztabelle signifikant ($\chi^2 = 39{,}015$; df = 5; $\alpha < 0{,}001$).

In Tabelle 3 werden die Lösungswege der Schüler(innen) bei den vier Aufgaben mit gleichem Nenner betrachtet. Diese vier Aufgaben lassen sich vorab als strukturgleich einordnen. Die Lösungswege sind jedoch nur bedingt konsistent: 135 Schüler(innen) rechnen alle vier Aufgaben entsprechend dem korrekten Weg, 35 drei von vier, 38 zwei von vier und 28 eine von vier. Ein ähnliches Bild ergibt sich auch für das Beibehalten des Nenners: Bei 40 Schüler(innen) tritt es jedes Mal auf, bei jeweils 28 in drei oder zwei von vier und bei 20 in einer von vier Aufgaben. Ergänzend hierzu: 11 der 40 Schüler(innen), die bei allen vier Aufgaben mit gleichnamigen Brüchen den Nenner beibehalten, bearbeiten auch die beiden Aufgaben mit ungleichnamigen Brüchen nach vorherigem Gleichnamigmachen auf dieselbe Weise (Konsistenz des Fehlermusters im gleichnamigen und ungleichnamigen Fall), während weitere 11 die beiden Aufgaben mit ungleichnamigen Brüchen entsprechend dem richtigen Lösungsweg rechnen (Konsistenz des Lösungswegs jeweils nur innerhalb des gleichnamigen und ungleichnamigen Falls).

	So viele Schüler(innen) rechnen *x*-mal …				
	0	1	2	3	4
Richtiger Lösungsweg	79	28	38	35	135
Nenner beibehalten	199	20	28	28	40

Tabelle 3: Multiplikation zweier Brüche – Häufigkeit gleicher Lösungswege

Diskussion und Folgerungen

Während ein erheblicher Teil der Schüler(innen) alle Multiplikationsaufgaben entsprechend einem korrekten Lösungsweg bearbeitet und sich diesbezüglich konsistent verhält, trifft dies in Bezug auf das Hauptfehlermuster „Nenner beibehalten“ nur für einen kleinen Teil zu. Ob die in einer Aufgabe gegebenen Zahlen „groß“ oder „klein“ sind, beeinflusst die auftretenden Lösungswege: Ein Fehlermuster tritt häufiger auf, wenn „große“ Zahlen gegeben sind und das Fehlermuster rechnerisch einfacher ist als der korrekte Lösungsweg. (Es besteht allerdings die Vermutung, dass dies nicht die Größe der Zahlen an sich ist, sondern der Umstand, ob die entsprechenden Einmaleins-Sätze automatisiert bzw. leicht zu bewältigen sind.)

In Konsequenz bedeutet dies, dass Lösungswege zumindest teilweise nicht gezielt gewählt, sondern *ad hoc generiert* werden, auch in Reaktion auf die gegebenen Zahlen (*Emergenzansatz*, vgl. Rathgeb-Schnierer 2010). Letztlich lässt sich dies als eine *unkontrollierte Aufgabenadaptivität* einordnen. Die verbreitete Bezeichnung als „Fehlerstrategie“ (vgl. Herden & Pallack 2000; Padberg 2008) ist deshalb kritisch zu sehen, da es sich eben nicht um eine Strategie entsprechend der in der Psychologie üblichen Bedeutung handelt (vgl. Zimbardo 1992).

Während die Konsistenz von Lösungswegen plausibel mit falsch gelernten (oder zumindest automatisierten) Verfahren erklärt werden kann, ist dies in Bezug auf die Inkonsistenz schwieriger. Zeigen Schüler(innen) bei einer Aufgabe ein Fehlermuster und ansonsten korrekte Lösungswege, so deutet dies auf einen Flüchtigkeitsfehler hin, der durch die intuitive Form der Fehlermuster begünstigt wird. Wenn Schüler(innen) innerhalb eines Aufgabensets zahlreiche unterschiedliche Lösungswege ausführen, lässt sich dies als „Ziffernrechnen“ interpretieren, als weitgehend unreflektiertes Verarbeiten von in der Aufgabe gegebenen Zahlen gemäß bekannter Schemata.

Literatur

Bortz, J., Lienert, G. A. & Boehnke, K. (2008): Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik. Springer: Heidelberg (3. Auflage)

Hennecke, M. (1999): Online-Diagnose in intelligenten mathematischen Lehr-Lern-Systemen. Dissertation: Universität Hildesheim

Herden, G. & Pallack, A. (2000): Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung. Empirische Erhebung über 244 SchülerInnen der Klassen sieben von Gymnasien. In: Journal für Mathematik-Didaktik 21, S. 259–279

Padberg, F. (2008): Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Spektrum: Heidelberg (4. Auflage)

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009): Lernen aus Fehlern im Mathematikunterricht – (wie) ist das möglich? In: Praxis der Mathematik in der Schule 51(3), S. 1–8

Rathgeb-Schnierer, E. (2010): Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahres. In: Journal für Mathematik-Didaktik 31, S. 257–283

Stahl, R. (2000): Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern bei einfachen linearen Gleichungen. Eine empirische Untersuchung im 9. Schuljahr und eine Entwicklung eines kategoriellen Computerdiagnosesystems. Dissertation: TU Braunschweig

Tietze, U.-P. (1988): Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik – Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. In: Journal für Mathematik-Didaktik 9, S. 163–204

Zimbardo, P. G. (1992): Psychologie. Springer: Berlin u. a. (5. Auflage)

Ingo WITZKE, Köln

Mathematik – eine (naive) Naturwissenschaft im Schulunterricht?

1. Einleitung

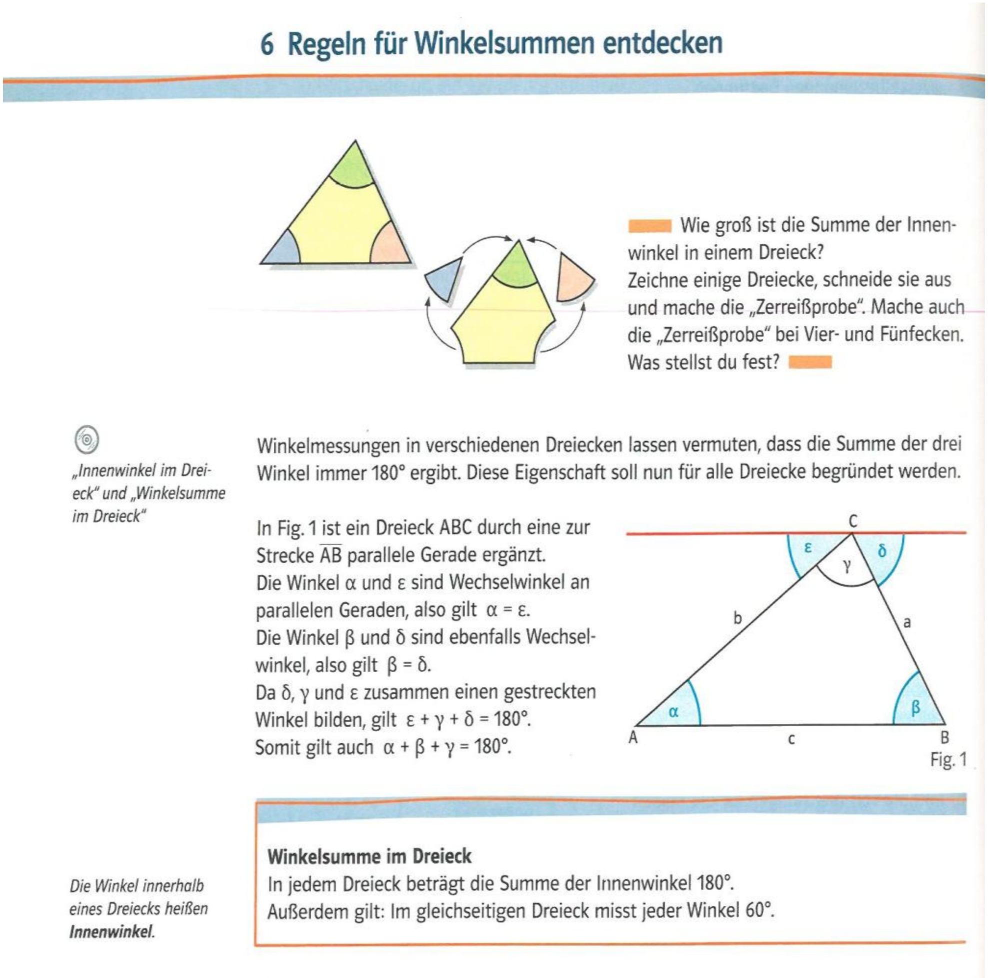
Ein beinahe klassisches Problem der didaktischen Forschung ist der gemeinhin als problematisch bezeichnete Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik. Aktuelle Forschungsstudien zeigen, dass Schülerinnen und Schüler diesen Übergang als besonders schwierig empfinden, da er mit einem Auffassungswechsel, der mit der Andersartigkeit der zu besprechenden Gegenstände einhergeht, verbunden ist.

In einer Vorstudie haben wir Studierenden des Studienganges GHR (Ende Grundstudium) sowie des gymnasialen Lehramtes (Hauptstudium) zu den von ihnen erlebten Gemeinsamkeiten und Unterschieden der Schul- und Hochschulmathematik befragt. Dabei ergab sich tendenziell ein Bild, dass auch L. Hefendehl-Hebeker im Rahmen des Projektes „Mathematik Besser Verstehen" beschrieben hat: „Die Studierenden fühlen sich zu Beginn ihres Studiums oft durch die Umstellung von der Schul- zur Universitätsmathematik – vor allem durch den sprunghaft ansteigenden Abstraktionsgrad – überfordert."

Die Studierenden machen, so die Deutung unserer Fragenbögen, eine klaren Unterscheidung zwischen Schule und Hochschule hinsichtlich der vermittelten Auffassung von Mathematik. Sie machen den Unterschied dabei an Begriffen wie Anschauung, Abstraktionsgrad, Beweisführung, formaler Strenge und axiomatischem Aufbau fest.

2. Schulbuchbeispiele

Eine Untersuchung von Schulbüchern im Vergleich zu Hochschultexten zeigt nun, dass der von den Studienanfängern zu vollziehende Auffassungswechsel ein erheblicher ist, der den Rang einer epistemischen Hürde zu haben scheint. Geht man mit der modernen Lernpsychologie davon aus, dass das mathematische Wissen von Individuen in einem konstruktiven Prozess der Auseinandersetzung mit den dargebotenen Lehrinhalten entsteht, erscheint es sinnvoll für diesen Zweck Mathematikbücher zu untersuchen. Bestimmt wird die Analyse dabei nicht von inhaltlichen Detailfragen sondern von der Frage nach der Auffassung von Mathematik die in modernen Schulbüchern vermittelt wird.



6 Regeln für Winkelsummen entdecken

Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck?
Zeichne einige Dreiecke, schneide sie aus und mache die „Zerreißprobe". Mache auch die „Zerreißprobe" bei Vier- und Fünfecken.
Was stellst du fest?

„Innenwinkel im Dreieck" und „Winkelsumme im Dreieck"

Winkelmessungen in verschiedenen Dreiecken lassen vermuten, dass die Summe der drei Winkel immer 180° ergibt. Diese Eigenschaft soll nun für alle Dreiecke begründet werden.

In Fig. 1 ist ein Dreieck ABC durch eine zur Strecke $\overline{AB}$ parallele Gerade ergänzt.
Die Winkel α und ε sind Wechselwinkel an parallelen Geraden, also gilt $\alpha = \varepsilon$.
Die Winkel β und δ sind ebenfalls Wechselwinkel, also gilt $\beta = \delta$.
Da δ, γ und ε zusammen einen gestreckten Winkel bilden, gilt $\varepsilon + \gamma + \delta = 180°$.
Somit gilt auch $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Fig. 1

Die Winkel innerhalb eines Dreiecks heißen ***Innenwinkel****.*

Winkelsumme im Dreieck
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.
Außerdem gilt: Im gleichseitigen Dreieck misst jeder Winkel 60°.

Im aktuellen Lambacher Schweizer der Klasse 7 wird Mathematik augenscheinlich (hier am Beispiel der Innenwinkelsumme in Dreiecken) im Sinne einer naturwissenschaftlichen Theorie an Objekten der Empirie entwickelt. Die Objekte der Theorie sind hier Falt- und Zeichenblattfiguren, wie in der einleitenden „Zerreißprobe". Die Wissenssicherung – also die Einsicht, dass ein mathematischer Sachverhalt gilt (hier: Innenwinkelsumme = 180°) – geschieht durch Experimente an den Objekten der Empirie. Die Wissenserklärung erfolgt schließlich durch einen deduktiven Beweis (hier: Wechselwinkel) d.h. das neue Wissen wird innerhalb des Bezugsrahmens einer zusammenhängenden Theorie erklärt.

Dies ist ein Vorgehen das typisch ist für die benachbarten experimentellen Naturwissenschaften – man denke nur an die Wissensentwicklung z.B. im Rahmen der Newtonschen Mechanik. Das oben besprochene Schulbuchbeispiel erscheint uns dabei für den Charakter der im Schulunterricht vermittelten Auffassung von Mathematik durchaus typisch zu sein – selbst in der Oberstufe wird mathematisches Wissen an Objekten der Empirie entwickelt, so z.B. im Analysisunterricht an gegebenen Kurven (als Graphen von Funktionen).

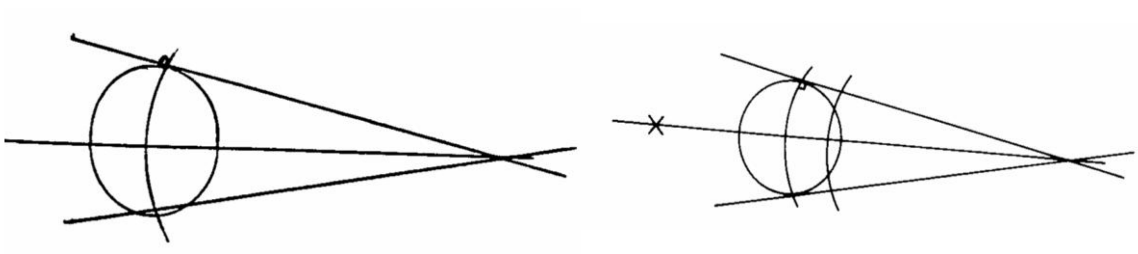
Ein Blick in die Geschichte zeigt, dass eine naturwissenschaftliche Auffassung im obigen Sinne eine tragfähige ist für einen großen Teil von Mathematik – so entwickelten z.B. Gottfried Wilhelm Leibniz, Johann Bernoulli u.a. herausragende Mathematiker den Differentialkalkül an Hand und zur Diskussion von Objekten der Empirie, für auf dem Zeichenblatt durch Konstruktion gegebene Kurven. Noch Ende des 19. Jhdts. sieht Moritz Pasch in „[…] der Geometrie nichts weiter […] als einen Theil der Naturwissenschaft.“

Es spricht vieles nicht nur aus historischer, sondern auch aus bildungstheoretischer und kognitionspsychologischer Sicht dafür, dass die Schülerinnen und Schüler im Unterricht eine tragfähige naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik erwerben sollten – die sich grundsätzlich von der modernen formalistischen Auffassung von Mathematik unterscheidet die wir gemeinhin in fachmathematischen Veranstaltungen der Hochschulen vermitteln: Dort werden Aussagen über formal - abstrakte Entitäten getroffen, die sich gerade dadurch auszeichnen keinen Bezug zur Empirie zu brauchen. Veranschaulichungen sind hier höchstens heuristische Hilfsmittel, nicht aber Gegenstände der mathematischen Theorie.

3. Eine naiv-naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik

Wichtig für eine tragfähige naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik erscheint nun, dass es Wissenserklärungen (vgl. Oben) bedarf, da wir ansonsten die Schülerinnen und Schüler der Möglichkeit zur Argumentation berauben. Dies sei an einem Beispiel von A. Schoenfeld kurz illustriert:

A) B)



Figuren A) und B) zeigen zwei Lösungsvorschläge aus demselben Lösungsprotokoll. Die Aufgabe lautete zwischen zwei gegebenen sich in einem Punkt schneidenden Geraden einen Kreis zu konstruieren für den die beiden Geraden Tangenten sind. Dabei war ein Tangentialpunkt auf der oberen Gerade gegeben.

Im logischen Sinne sind die beiden obigen Lösungsvorschläge gleich (falsch): Die beiden Schüler nehmen als Kreismittelpunkt den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit einem Kreisbogen (Mittelpunkt = Schnittpunkt der Geraden) an. Die Schüler hingegen werten Lösung (A) als falsch und Lösung (B) als richtig, da sie entsprechend „aussehen“ – in (A) schneidet der Kreis die untere Gerade in zwei Punkten.

4. Fazit

Erwerben Schülerinnen und Schüler im Unterricht eine tragfähige – also nicht-naive – naturwissenschaftliche Auffassung von Mathematik, so erscheint auf erkenntnistheoretischer Ebene eine Diskussion der Wissensentwicklung in der Geschichte sinnvoll und notwendig. Beispielhaft haben wir eine systematische Diskussion der Regel von l’Hôpital – einem klassischen Lehrinhalt der Differential- und Integralrechnung – im Originalkontext angelegt, die in Kürze in den *Elementen der Mathematik* erscheinen wird. Hier wird klar, dass Leibniz und Bernoulli eine empirische Differential- und Integralrechnung entwickelten mit anderem Fokus als in einer modernen fachmathematischen Vorlesung. Schließlich legt unsere Analyse nahe, dass Schulmathematik – im naturwissenschaftlichen Sinne vermittelt und aufgefasst – eine vernünftige Mathematik ist. Diese ist aber wegen der empirischen Verortung der Grundbegriffe eine andere als die moderne Hochschulmathematik. Der „Abstraktionsschock“ ist mithin eine fast logische Konsequenz der sich nicht vermeiden aber (z. B. historisch) erklären lässt. Versuche einer Angleichung erscheinen beim Blick auf die historische Entwicklung problematisch. Wichtiger erschiene eine klare Diskussion der Auffassungsunterschiede und den damit verbundenen Konsequenzen.

Literatur

Hefendehl-Hebeker, L., Ableitinger, C., & Herrmann, A. (2010): Mathematik Besser Verstehen, In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Bd. I, S. 93-94.

Greulich, D., Jörgens, T. et al. (2008), Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien (NRW), Stuttgart & Leipzig, Klett Verlag.

Pasch, M. (1882), Vorlesungen über neuere Geometrie (Reprint), Verlag Dr. Müller.

Struve, H. & Witzke, I. (Erscheint in Kürze): Zur historischen Entwicklung der Auffassung von Analysis am Beispiel der Regel von l’Hôpital, In: Elemente der Mathematik.

Schoenfeld, A., Mathematical Problem Solving (1985), Orlando, Academic Press.

Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik, Hildesheim, Verlag Franzbecker.

Jan WÖRLER, Würzburg

Analyse & Simulation von Kunstwerken: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung

Die Werke der Gattung „Konkrete Kunst“ haben eine besondere inhaltliche Nähe zur Mathematik: häufig werden Zahlenreihen, Elemente der Kombinatorik oder der Geometrie als ästhetische Muster in den Kunstwerken umgesetzt (vgl. z. B. Lauter/Weigand 2007). Wie diese Bezüge im Mathematikunterricht gewinnbringend eingesetzt werden können, wurde etwa in Wörler 2009b ausführlich dargelegt. Darin werden Analyse und Simulation der Kunstwerke als Vorstufe und Übungsfeld für die Modellierung von Realsituationen angesehen. Das Arbeiten mit den Werken kann im Mathematikunterricht demnach in zwei Phasen erfolgen (vgl. Wörler 2009a): In der Phase I identifizieren die Schülerinnen und Schüler unter der Leitfrage „*Was steckt an Mathematik in diesem Bild?*“ die bildbestimmenden mathematischen Faktoren, was im Vergleich zu Modellierungsaufgaben mit Alltagskontext hier – aufgrund des vom Künstler zugrunde gelegten mathematisch-logischen Konstruktionsschemas – deutlich einfacher ist. In der Phase II werden die gefundenen Zusammenhänge dann auf Papier oder mittels Computersimulationen variiert, wodurch neue Muster entstehen, die wiederum unter mathematischen Gesichtspunkten analysiert werden können und damit tiefere Einblicke in das modellierte System, seine Elemente und Strukturen erlauben.

Forschungsfragen

Im Rahmen einer explorativen empirischen Studie sollte untersucht werden, inwieweit derartige Aufgaben im Unterricht eingesetzt werden können und wie Schülerinnen und Schüler mit ihnen umgehen. Genauer sollte den folgenden Forschungsfragen nachgegangen werden:

- **Frage I:** Können Lernende im regulären Schulunterricht ein mathematisches Modell zu einem Bild aufstellen? (*Ergebnis*)
- **Frage IIa:** Können einzelne Arbeitsschritte des 2-Phasen-Modells beobachtet werden, wenn sie ein Kunstwerk modellieren (Phase I)? (*Prozess*)
- **Frage IIb:** Treten im Arbeitsprozess der Lernenden Rückkopplungsschleifen auf, in denen das Modell schrittweise verfeinert wird (Phase I)? (*Prozess*)

- **Frage III:** Finden die Schülerinnen und Schüler durch Variation oder Simulationen eines Kunstwerkes (Phase II) mathematische Zusammenhänge, die sich aus dem statischen Bild nicht ergeben?
- **Frage IV:** Wie hoch ist die Bereitschaft der Lehrenden, derartige Aufgaben im MU einzusetzen?

Untersuchungsdesign und -methoden

Die oben genannten Fragstellungen legen eine Zweiteilung der Untersuchung nahe: Zur Klärung der Fragen I-III wurden 100 Schülerinnen und Schüler der 9. und 10. Jahrgangsstufe zweier Gymnasien bei der Analyse von Kunstwerken der Konkreten Kunst videographiert. Dazu standen in allen Klassen mindestens drei Unterrichtsstunden zur Verfügung, in denen die Schülerinnen und Schüler zunächst einzeln, danach weitgehend selbstständig in Kleingruppen zu 5–6 Personen aufgabengeleitet Modelle zu den Bildern aufstellten und anschließend – teils am Computer, teils direkt auf den Aufgabenbögen – variierten. Es wurden jeweils drei bis vier dieser Gruppen bei ihrer Arbeit mit den Aufgaben aufgezeichnet und die Videos anschließend transkribiert. Zusätzlich wurden Vorkenntnisse in den Fächern Mathematik und Kunst, sowie die Einstellungen der Schülerinnen und Schüler (Beliefs) zu diesen Themenbereichen über einen Fragebogen erhoben.

Zur Beleuchtung der Forschungsfrage VI wurde die Teilstudie „Lehrende" im Rahmen einer Veranstaltung der Fortbildungsreihe „TiMu – Technologien im Mathematikunterricht" (http://timu.dmuw.de) an der Universität Würzburg durchgeführt. 16 Lehrerinnen und Lehrer unterfränkischer Realschulen und Gymnasien nahmen daran teil. Um ihnen das Thema „Konkrete Kunst im Mathematikunterricht" nahe zu bringen, bearbeiteten die Lehrenden nach einem Impulsvortrag zunächst Aufgabenbeispiele – analog zur Teilstudie „Lernende" in Kleingruppen. Sie untersuchten dabei dieselben Kunstwerke, wie vorher die Schülerinnen und Schüler, und hielten sich im Wesentlichen auch an dieselben Aufgabenstellungen. Allein die Bearbeitungszeit, die für die einzelnen Aufgaben zur Verfügung gestellt wurde, war gegenüber dem „Schüler-Teil" reduziert. Über eine nachgeschaltete Onlinebefragung ($n = 9$) hatten die Lehrkräfte dann die Möglichkeit, die Aufgaben aus ihrer Sicht kritisch auf die Eignung für den Mathematikunterricht zu hinterfragen.

Erste Ergebnisse der Untersuchung

Eine erste Auswertung der Transkripte und Dokumente aus beiden Teilen der Untersuchung zeigt keine wesentlichen Unterschiede in der Qualität der

Aufgabenbearbeitung zwischen Lernenden und Lehrenden und auch keine zwischen den unterschiedlichen Jahrgangsstufen der Lernenden. Die folgenden Ergebnisse der Teiluntersuchung der Lernenden lassen sich also analog auch auf die Gruppe der Lehrenden übertragen.

Die Schülerdokumente belegen, dass Lernende ein Modell zu einem Kunstwerk aufstellen können, wenn sie sich auf die Aufgaben einlassen (zu **Frage I**); ausnahmslos jede der Gruppen hat eine mathematische Beschreibung der Kunstwerke oder zumindest von wesentlichen Teilbereichen der jeweiligen Bilder gefunden.

Dass bei der mathematischen Analyse die Arbeitsschritte des 2-Phasen-Modells auftreten, hat sich bereits in der Voruntersuchung gezeigt (zu **Frage IIa**) und wurde bei der hier vorgestellte empirische Untersuchung bereits in die Aufgabenstellungen integriert. Daher stand im Hinblick auf den Zusammenhang zwischen der Modellierung von Kunstwerken und der Modellierung von Realsituationen die **Frage IIb** nach Rückkopplungsschleifen im Arbeitsprozess im Fokus, ist doch die schrittweise Optimierung eines bereits gefundenen Modells eines der wesentlichen Charakteristika jeder Modellierung. Die Transkripte aus beiden Teiluntersuchungen dokumentieren, dass im Verlauf des Analyseprozesses immer wieder Vermutungen der Bauart „*XYZ könnte eine Rolle beim Aufbau des Bildes spielen*“ aufgestellt werden, die dann direkt am Bild – etwa durch nachmessen, abzählen, einzeichnen – überprüft und schließlich verworfen oder zur Basis der weiteren Analyse angenommen werden. Nach und nach arbeiteten die einzelnen Gruppen auf diese Weise bildbestimmende Einflussgrößen heraus, die in ihrer Gesamtheit als Modell des Bildes angesehen werden können (je nach Kunstwerk gibt es drei bis fünf derartiger Faktoren). Diese Beobachtung zeigt, dass die einzelnen Teilschritte der Modellierungsphase (vgl. 2-Phasen-Modell, s. o.) kreislaufartig mehrfach hintereinander durchlaufen werden, und sie spiegelt auch den hohen Differenzierungsgrad der Aufgaben wider: während einige Gruppen nur wenige Einflussgrößen identifizierten und so vergleichsweise einfache Modellbeschreibungen zu den Bildern fanden, konnten leistungsfähigere Schülerinnen und Schüler durch eine intensivere Analyse deutlich feinere Modelle vorlegen. In diesem Zusammenhang gibt es keine Anzeichen dafür, dass eine positive individuelle Einstellung gegenüber der „Kunst“ einen Einfluss auf die Qualität der Modellierung hat.

Während die Lernenden bei der Variation der gefundenen Zusammenhänge (Phase II) auf Papier interessante Lösungswege zeigten, fiel ihnen das Arbeiten an computergestützten Simulationen der Kunstwerke (**Frage III**) schwer. Es scheint für den „alltäglichen“ Mathematikunterricht nicht zielführend zu sein, Simulationen zu Kunstwerken im Unterricht erst zu entwickeln. Zwar ist dies möglich (etwa mit der Software SCRATCH), doch der enorme Aufwand legt nahe, derartige Vorhaben in gesonderten Projekten oder – fächerübergreifend – im Informatikunterricht anzugehen. Werden den Schülerinnen und Schülern dagegen fertige Simulationen zu einzelnen Kunstwerken mit dann notwendigerweise vordefinierten Variationsmöglichkeiten an die Hand gegeben, so können weiterführende mathematische Fragestellungen von ihnen nur dann gefunden und erfolgreich angegangen werden, wenn das zugrunde liegende Kunstwerk und seine Struktur vorher eingehend von ebendiesen Lernenden analysiert wurde. Eine genauere Auswertung der Schülerarbeiten steht hier allerdings noch aus.

Für die Lehrerinnen und Lehrer, die an der Untersuchung teilgenommen haben, gelten diese Aussagen analog. Zwar bearbeiteten sie die Aufgaben i. d. R. schneller erfolgreich und drückten sich mathematisch präziser aus, als die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Teilstudie „Lernende“, kamen aber letztlich zu den gleichen Ergebnissen. Die Befragung der Lehrkräfte hat ergeben, dass sie Aufgaben im Kontext der „Konkreten Kunst“ als motivationsfördernd einstufen und im eigenen Unterricht einsetzen würden. Sie sahen dabei vor allem den „ungewohnten Zugang zur Mathematik“ und die gute Möglichkeit zur – sogar jahrgangsstufenübergreifenden – Differenzierung als didaktisch relevant an. Der Einbettung von Simulationen zu Kunstwerken in den Mathematikunterricht stand zumindest gut die Hälfte der befragten Lehrenden positiv gegenüber.

Zusammenfassung

Die Analyse und Simulation von Kunstwerken der Konkreten Kunst kann ein geeigneter Einstieg oder eine Übungsumgebung für das Modellieren von Realsituationen sein. Einzelne Schritte der Modellierung sind dabei durch direkten Vergleich mit dem vorgelegten Kunstwerk visuell überprüfbar. Eine Einbettung in den realen Unterricht ist ohne weitere Vorbereitung als dreistündige Einheit möglich und bietet interessante Anlässe zur Binnendifferenzierung.

Literatur

Lauter, M.; Weigand, H-G. (Hrsg.) (2007): Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst, Spurbuchverlag, Baunach.

Wörler, Jan (2009a): Konkrete Kunst: Mathematik in Bildern finden und dynamisch erforschen. In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, WTM-Verlag, Münster, 2009, S. 955–958

Wörler, Jan (2009b): Folgen in der Konkreten Kunst: Gesetzmäßigkeiten erkennen und fortsetzen. In: Mathematik lehren, Heft 157, Dezember 2009, S. 20–26

Matthias ZELLER, Freiburg, Bärbel BARZEL, Freiburg

Erst Computeralgebra nutzen, dann technologiefrei Umformen lernen?

Nach der Durchführung zweier explorativer Erhebungszyklen kristallisierte sich diese Frage für den Einsatz von Computeralgebra (CAS) in der Sekundarstufe I heraus. Auf der Basis bisher gewonnener Erkenntnisse wird nun in einer weiteren Studie untersucht, inwiefern vor dem Lernen von Prozeduren, Variablenkonzepte vertieft werden können und der Erwerb von Konzepten zu Term- und Gleichungsumformungen angeregt werden kann. Im Mittelpunkt steht die Rolle von mit CAS durchgeführten automatischen symbolischen Umformungen beim Modellieren und Problemlösen.

1. Theoretischer Hintergrund

CAS ermöglicht es Ausdrücke mit Variablen einzugeben, automatisch verarbeiten zu lassen und auszugeben. Beim Lernen mit CAS muss sowohl der Erwerb von mathematischen, als auch der Erwerb von technologischen Kompetenzen angestrebt werden. Allerdings stellt eine disjunkte Zweiteilung des Kompetenzbereichs kein tragfähiges Modell dar, da es Kompetenzen gibt, die eine komplexe Mischung aus technologischem und mathematischem Wissen darstellen (Artigue 2004). Diese Mischung wird instrumentales Wissen genannt. Soll beispielweise beim Modellieren CAS eingesetzt und ausgenutzt werden, so ist beim Mathematisieren eines Kontextes bereits instrumentales Wissen nötig. Wenn schon beim Aufstellen des Modells geplant wird mit CAS zu arbeiten, so kann das Modell wesentlich andere Gestalt haben, als wenn CAS nicht zur Verfügung steht. Reine technologische Kompetenzen spiegeln sich beispielsweise beim Speichern von Dokumenten wider. Beispiele für reine mathematische Kompetenzen sind zum einen Prozeduren, wie das zielgerichtete Umformen von Termen und Gleichungen. Diese machen Algebra zu einem mächtigen Werkzeug. Zum anderen sind auch Konzepte zu algebraischen Objekten wie Variable, Operator, Term und Gleichung reine mathematische Kompetenzen. Sie sind nötig um Algebra in Problemen und realitätsbezogenen Aufgaben anzuwenden und geben der Arbeit mit Algebra ihren Sinn. Die Denkhandlungen, die durch Konzepte ermöglicht werden sind beispielsweise Strukturieren, Verallgemeinern und Darstellen (Fischer et al. 2010).

Wenn Algebraunterricht CAS-gestützt ist, dann kann nicht nur der Erwerb algebraischer Kompetenzen verfolgt werden, sondern auch der Erwerb instrumentaler Kompetenzen. Für den Erwerb dieser bietet sich der Einsatz von CAS als Werkzeug (tool) an. Dabei entscheidet der Lernende selbst, ob und wie er CAS einsetzt (Barzel et al. 2005).

2. Design und Ergebnisse der abgeschlossenen Erhebungen

In zwei explorativen Erhebungszyklen wurden jeweils zwei gymnasiale siebte Klassen beim Einstieg in das Arbeiten mit Gleichungen in einem Zeitraum von fünf Wochen beobachtet und gefilmt. Ziel war es Hypothesen zu bilden und Erhebungsinstrumente auszuschärfen. Der Fokus lag dabei auf dem Lernen und Lehren von Algebra. Wichtigste Bestandteile des Datensatzes sind Videoaufzeichnungen von Frontalphasen, Interviews mit Lehrern und Lösungsprotokolle von Gruppen zu je drei Lernenden. Diese Lösungsprotokolle beinhalten jeweils Hefteinträge, CAS-Dateien und Videoaufzeichnungen zu ausgewählten Aufgaben.

In den Aufgaben wurden den Schülerinnen und Schülern realitätsbezogene Kontexte vorgestellt, die mit linearen Modellen zu beschreiben waren. CAS wurde als Werkzeug eingesetzt, stand bei diesen Aufgaben jederzeit zur Verfügung und der Einsatz wurde durch eine Kurzanleitung unterstützt. Den Lehrern wurden als Leitgedanken der Unterrichtseinheit vorgestellt, algebraische Objekte mit Leben zu füllen und keine persönlichen Präferenzen zu den Darstellungen Graph, Tabelle und Gleichung zu äußern. Der Einbezug aller drei Darstellungen hatte zur Folge, dass in manchen Phasen Tabelle oder Graph im Vordergrund standen und die für den Einsatz von Algebra relevanten Zeitpunkte einer genaueren Auswertung mit einem größeren zeitlichen Abstand auftraten. Dem Beobachtungszeitraum ging eine Unterrichtsphase voraus, in welcher Vorstellungen zu Graphen und Tabellen aufgebaut wurden. Lernziele der beobachteten Phase waren in erster Linie Konzepte in der Algebra, wobei von den Lehrern auch schon das technologiefreie Durchführen von Prozeduren angesprochen wurde. Die verwendeten CAS-Handhelds (TI-nspire) wurden ohne Algebrabefehle bereits seit einem halben Jahr eingesetzt, wodurch der Erwerb von technologischen Kompetenzen als Moderatorvariable verringert wurde. Nach der Datenreduktion und Auswertung nach Grounded Theory, lassen sich folgende Ergebnisse zusammenfassen, die für die Gestaltung der Folgestudie von Bedeutung sind (ausführlich in Zeller und Barzel 2010).

Aus den Lösungsprotokollen zum Lernen mit CAS:

1. Die schnelle Verfügbarkeit von Ergebnissen von Umformungen, das Arbeiten mit Befehlen und die Notation in CAS, regen Lernende zum Erwerb von konzeptuellem Wissen an.

2. Experimentieren mit symbolischen Ausdrücken wird mit CAS angeregt.

3. Lernende entwickeln individuelle Arbeitsweisen mit CAS in Verbindung mit Papier und Stift.

4. Lernende nutzen alternative Strategien zum Lösen linearer Probleme.

5. In den Lösungen zu Vor- und Nachtest konnten an einer kleinen Stichprobe keine signifikanten Unterschiede gefunden werden.

Aus den Frontalphasen und Interviews zum Lehren mit CAS:

6. CAS-Einsatz wird oft nach dem Lernen von Prozeduren angeregt.

7. CAS-Einsatz wird hauptsächlich am Ende der Bearbeitung einzelner Aufgaben angeregt.

8. Konzeptuelles Wissen wird von den Lehrern nicht als grundlegende Kompetenz wahrgenommen.

9. Der Einsatz von Algebra wurde wenig über Sinnstiftung angeregt.

3. Design der geplanten Erhebung

In dem auf der Basis der Ergebnisse entwickelten Unterrichtsmaterial für die geplante Erhebung steht der Erwerb von Konzepten zu algebraischen Objekten an erster Stelle. Es wird bereits vor dem Erwerb von Prozeduren, also bevor die Lernenden einfache Gleichungen mit einem Lösungsalgorithmus lösen können, eingesetzt. Da lineare Probleme durch alternative Strategien bearbeitet werden können (Ergebnis 4), werden von Beginn an auch Probleme höheren Grades und exponentielle Probleme eingebunden. Dies stiftet dem Einsatz von Algebra einen tiefen Sinn (vgl. Ergebnis 9), denn die Schülerinnen und Schüler lernen Probleme kennen, die sie ohne Algebra nicht lösen könnten. Unter didaktischen Gesichtspunkten ist der starke Einbezug von Graph und Tabelle unumgänglich, trotzdem wird dieser Weg für die geplante Erhebung nicht beschritten. Dies ist den Erhebungsmethoden geschuldet. Zum Ersten wird der organisatorische Aufwand verringert, da alle Erhebungszeitpunkte hintereinander in einem Zeitraum von ca. 6 Unterrichtsstunden liegen. Zum Zweiten können damit Veränderungen der Kompetenzen, den durch den CAS-Einsatz ermöglichten Aufgaben, deutlicher zugeschrieben werden. Zum Dritten kann ausgeschlossen werden, dass das Lernen von Algebra durch den Einbezug anderer Repräsentationen erfolgte. Insgesamt wird also angestrebt, auf Kosten der ökologischen Validität, prägnantere Effekte zu erzielen, welche evtl. sogar mit quantitativen Methoden nachgewiesen werden können (vgl. Ergebnis 5). Die konzeptuellen Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern der Intervention und von Schülerinnen und Schülern höherer Klassenstufen, welche auf dem traditionellen Lernweg Prozeduren vor Konzepten erworben haben, sollen miteinander verglichen werden. Geplant ist zudem die Aufnahme von qualitativen Daten, wie sie bereits in den bisherigen Erhebungen stattgefunden hat. Der Fokus der Studie liegt auf dem Lernprozess, während der Einfluss der Lehrperson durch strenge Vorgabe des Unterrichtsmaterials, Handbücher und Schulungen möglichst stark kontrolliert wird.

Die Gestaltung der Intervention stellt konzeptuelles Wissen als grundlegende Kompetenz heraus (vgl. Ergebnis 1 und 8). CAS wird von Beginn an in den Lernprozess des Arbeitens mit Gleichungen eingebunden, wodurch ein Experimentieren mit algebraischen Objekten induziert wird (vgl. Ergebnis 2 und 7). Die beobachteten Lernmöglichkeiten zum Erwerb von instrumentalem Wissen (vgl. Ergebnis 3) und zum Aufbau konzeptuellen Wissens (vgl. Ergebnis 1) sollen in den Aufgabenstellungen explizit angeregt werden. Mit dieser Anknüpfung an die Ergebnisse der vorherigen Erhebungen soll ein natürlicher Lernweg angeregt werden, der den Bedürfnissen der Lernenden auf ihrem individuellen Lernstand gerecht wird.

Der folgende Ausschnitt einer Aufgabe soll exemplarisch die von den Lernenden geforderten Handlungen illustrieren: *Damit ein Bild schön wirkt, soll sein Passepartout überall die gleiche Breite haben. Die Fläche des Passepartouts soll genau so groß sein wie die Fläche des Bildes.* Der Lösungsansatz führt auf eine quadratische Gleichung: $(a+2\cdot x)\cdot(b+2x)-a\cdot b=a\cdot b$ (Mit x als Breite des Passepartouts sowie a und b als Seitenlängen eines Bildes). Fragen sind, ob Lernende diese Modelle aufstellen, in CAS umformen und die Ergebnisse interpretieren können, obwohl sie weder mit den in CAS durchgeführten Prozeduren, noch mit in Zwischenschritten von CAS ausgegebenen Ausdrücken vertraut sind. Zudem ist gefragt, welche Kompetenzen sie bei solchen Handlungen erwerben. Die benötigten Prozeduren auch technologiefrei durchführen zu können, ist Ziel späterer Unterrichtseinheiten zur Algebra, was allerdings nicht mehr untersucht wird.

Literatur

Artigue, M. (2004): The integration of computer technologies in secondary mathematics education. In: Wang Jianpan et al. (Hg.): *Trends and challenges in mathematics education.* Shanghai: East China Normal University Press, S. 209–222.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. (Hg.) (2005): *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 52 (33), S. 1-7.

Zeller, M., Barzel, B. (2010): Influences of CAS and GC in early algebra. *In: The International Journal on Mathematics Education (ZDM Mathematics Education)* 42 (7), S. 775–788.

Marc ZIMMERMANN, Christine BESCHERER, Ludwigsburg

Zur Hochschullehre in der Lehramtsausbildung

Die Lehramtsausbildung ist vor allem in Mathematik in der universitären Phase zurzeit verstärkt in der Diskussion. Während fertige Lehrerinnen und Lehrer angehalten sind, einen prozessorientierten, aktivierenden und motivierenden Unterricht für ihre Schülerinnen und Schüler zu gestalten, erleben sie in der Ausbildung selbst v.a. instruktionsorientierte und eher rezeptive Formen der Wissensvermittlung (Beutelsbacher et al., 2011; Holton, 2001). Gemäß dem Zitat „teachers teach as they were taught, not as they were taught to teach ” (Altman, 1983) ist es also schwer vorstellbar, dass spätere Lehrerinnen und Lehrer den Erwartungen an den Unterricht gerecht werden.

Auf der GDM 2011 in Freiburg wurden erste Ergebnisse eines neu entwickelten Konzepts vorgestellt (Zimmermann & Bescherer, 2011). Dieses wurde im Rahmen des vom BMBF geförderten Projektes SAiL-M entwickelt und im Studiengang Lehramt für Realschulen an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg implementiert und umgesetzt.

1. Die SAiL-M[1] Veranstaltungskonzeption

Das SAiL-M Veranstaltungskonzept, das in erster Linie für Mathematikveranstaltungen in der Studieneingangsphase entwickelt wurde, wird seit dem Wintersemester 2007/08 sukzessive an der Pädagogischen Hochschule in Ludwigsburg umgesetzt. Auf der GDM-Jahrestagung 2008 hatten Bescherer und Spannagel (2008) bereits Teile des Konzeptes vorgestellt, welches die Aktivität der Studierenden innerhalb Vorlesungen mit hohen Teilnehmerzahlen erhöhen soll. Weitere Maßnahmen wurden 2009 auf der GDM-Jahrestagung in Oldenburg vorgestellt (Spannagel & Bescherer, 2009). Allen Maßnahmen liegen das Handlungsmodell von Marzano und Kendall (2007) zu Grunde. Dieses besagt, dass die aktiven und engagierten Handlungen vor allem von der jeweiligen Person selbst ausgehen müssen. Dabei spielen die eigenen Einstellungen und Überzeugungen (Selbstwirksamkeitserwartung; Bandura, 1997) sowie Emotionen und Motivation (Deci und Ryan, 1993; Prenzel et al., 2001) eine wichtige Rolle. Eine genaue Beschreibung der jeweiligen Maßnahmen findet sich z. B. in Bescherer, Spannagel und Zimmermann (2012).

[1] BMBF-Projekt „Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik“, www.sail-m.de

2. Ergebnisse der Evaluation der Veranstaltungskonzeption

Wie schon ein Jahr zuvor betrug der Untersuchungszeitraum die ersten beiden Semester (Wintersemester 2010/11 und Sommersemester 2011) des Studiengangs für Lehramt an Realschulen (vgl. Zimmermann & Bescherer, 2011). Neben den Studierenden an der Pädagogischen Hochschule in Ludwigsburg, die das Konzept erfahren haben (Treatmentgruppe), wurden parallel die Studierenden der Pädagogischen Hochschulen in Karlsruhe, Weingarten und Heidelberg untersucht (Kontrollgruppe). Die Messzeitpunkte der zu untersuchenden Variablen mathematische Selbstwirksamkeit und Motivation waren: (1) zu Beginn des ersten Semesters, (2) und (3) jeweils am Ende der Semester. Als Messinstrumente wurden wiederum Fragbogen eingesetzt (vgl. Zimmermann & Bescherer, 2011).

Auch bei diesem Untersuchungsdurchlauf ist die Ausfallquote sehr hoch. Dies liegt insbesondere daran, dass nur das erste Semester für die akademische Zwischenprüfung erforderlich ist, die Veranstaltungen im 2. Semester werden häufig von den Studierenden eher später besucht. Die jeweilige Stichprobengröße kann Tabelle 1 entnommen werden.

Folgende Hypothesen waren leitend bei der Unersuchung des Konzeptes. Der Untersuchung liegt der Ansatz der Aktionsforschung (Altrichter und Posch, 1983) zu Grunde.

> H1: Durch aktivierende Veranstaltungen wird die Selbstwirksamkeitserwartung erhöht, insbesondere bei Studierenden mit niedriger mathematischer Selbstwirksamkeit.
>
> H2: Durch aktivierende Veranstaltungen ist die Motivation der Studierenden höher als bei traditionellen Mathematikveranstaltungen.

Tabelle 1. Stichprobengrößen der untersuchten Gruppen im Zeitraum..

	Treatmentgruppe		Kontrollgruppe	
	n	Mittelwert MaSE-T[1]	n	Mittelwert MaSE-T[1]
Messzeitpunkt 1	97	53,9	252	54,7
Messzeitpunkt 2	69	62,3	73	58,0
Messzeitpunkt 3	43	59,8	22	57,1

[1]) Minimum: 15; Maximum: 75

Zu H1: Eine Varianzanalyse mit Messwiederholung ergab einen signifikanten Unterschied über die drei Messzeitpunkte in beiden Gruppen und zwischen den Gruppen (Messzeitpunkt 2; vgl. Tabelle 1). Sowohl die Treatmentgruppe als auch die Kontrollgruppe steigerten im Untersuchungszeitraum ihre mathematische Selbstwirksamkeitserwartung ($p<0.001$). Die leichte Abnahme von Messzeitpunkt 3 gegenüber dem Messzeitpunkt 2 (Tabelle 1) ist jedoch nicht signifikant. Die beiden Gruppen unterscheiden sich zudem zum Messzeitpunkt 2 hinsichtlich der mathematischen Selbstwirksamkeit signifikant ($p<0.001$). Studierende, die das SAiL-M Konzept erfahren haben, weisen einen höheren Wert bzgl. der mathematischen Selbstwirksamkeit auf, als die Kontrollgruppe.

Zu H2: Die Motivation wurde nur am Ende des ersten(Messzeitpunkt 2) und des zweiten Semesters (Messzeitpunkt 3) erhoben. Die Ergebnisse einer multivariaten Varianzanalyse müssen auf Grund der kleinen Stichprobengröße vorsichtig betrachtet werden ($n=22$ bei der Kontrollgruppe; vgl. Tabelle 1). Vergleicht man die erhobenen Daten, so zeigen sich hinsichtlich der Motivation insgesamt keine Unterschiede. Tendenziell ergeben sich jedoch Unterschiede bei der Kompetenzerlebung und bei negativen Emotionen. Studierenden, die das Veranstaltungskonzept erfahren haben, erleben sich kompetenter, haben aber mehr negative Emotionen.

3. Diskussion und Fazit

Die relativ hohe Ausfallquote (ca. 81%) kommt vor allem dadurch zu Stande, dass die Studierenden ab dem zweiten Semester nicht gezwungen sind, entsprechende Veranstaltung zu belegen. Viele Studierende entscheiden sich, diese Veranstaltung erst am Ende des Studiums zu belegen.

Trotz der Ausfallquote können jedoch die Tendenzen des letzten Jahres bestätigt werden. Demnach hat die Veranstaltungskonzeption eine positive Auswirkung auf das Zutrauen, mathematische Handlungen selbst auszuführen. Der „leichte“ Abfall der mathematischen Selbstwirksamkeit kann durch den verwendeten Fragebogen erklärt werden, der in erster Linie Fragen zu arithmetischen Problemen beinhaltet. Im zweiten Semester ist der Studienschwerpunkt die Geometrie, so dass dieses Gebiet nicht abgefragt wird.

Eine Diskussion hinsichtlich der Motivation ist an dieser Stelle nur schwer zu führen, da hier die vorliegende Stichprobengröße für quantitative Untersuchungen zu gering war. Der tendenzielle Unterschied bei den negativen Emotionen kann daher stammen, dass ein zu hohes Autonomieerleben sich wieder negativ auf die Studierenden auswirkt.

Literatur

Altrichter, H. & Posch, P. (1998). *Lehrer erforschen ihren Unterricht. Eine Einführung in die Methoden der Aktionsforschung*. Verlag Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn.

Altman, H. B. (1983). Training foreign language teachers for learner-centered instruction: Deep structures, surface structures and transformations. In J. E. Alatis; H. H. Stern; & P. Strevens (Hrsg.). *Applied Linguistics and the Preparation of Second Language Teachers: Toward a Rationale (GURT 1983)*. Washington, D.C.: Georgetown University Press.

Bandura, A. (1997). Self-efficacy. The exercise of control. New York: Freeman.

Bescherer, C. & Spannagel, C. (2008). Aktivierendes Mathematik-Lernen zum Studienbeginn. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: WTM.

Bescherer, C.; Spannagel, C. & Zimmermann, M. (2012). Neue Wege in der Hochschulmathematik – Das Projekt SAiL-M. In: M. Zimmermann; C. Bescherer & C. Spannagel (Hrsg.): *Mathematik lehren in der Hochschule – Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Beutelsbacher, A.; Danckwerts, R.; Nickel, G.; Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken: Impulse für die Gymnasiallehrerausbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag,

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihr Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik, 39*(2), 223-238.

Holton, D. (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic.

Marzano, R. J., & Kendall, J. S. (2007). *The new taxonomy of educational objectives*. (2. Auflage). Thousands Oaks, CA: Corwin Press.

Prenzel, M., Kramer, K. & Drechsel, B. (2001). Selbstbestimmt motiviertes und interessiertes Lernen in der kaufmännischen Erstausbildung - Ergebnisse eines Forschungsprojekts. In: K. Beck & V. Krumm (Hrsg.). *Lernen und Lehren in der beruflichen Erstausbildung. Konzepte für eine moderne kaufmännische Berufsqualifizierung*. Opladen: Leske und Budrich.

Spannagel, C. & Bescherer, C. (2009). Didaktische Entwurfsmuster für technologieunterstützte Übungen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*, Münster: WTM Verlag.

Zimmermann, M. & Bescherer, C. (2011). (Um-)Wege in der Ausbildung von Mathematiklehrkräften. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster: WTM-Verlag.

Zimmermann, M. & Bescherer, C. (2010). Lernen für 2030 – Möglichkeiten in der Lehramtsausbildung. In: U. Kortenkamp; H.-G. Weigand, T. Weth (Hrsg.): *Tagungsband der Arbeitstagungen des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik (AK MU&I) 2010*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Larissa ZWETZSCHLER, Dortmund

„Häh? Das geht doch gar nicht. (…) Man kann aber nicht einfach andere Werte einsetzen.“ – Erforschung eines Lernwegs zur Gleichwertigkeit von Termen

Zahlreiche Studien belegen Schwierigkeiten im Umgang mit und beim Verständniserwerb von Termen (Malle 1993, Rosnick / Clement 1980, u.v.a), dies gilt auch für die Gleichwertigkeit von Termen, der inhaltlichen Verstehensbasis für das spätere Termumformen (Prediger 2009, u.v.a.). Vorgelegt wurden auch vielfältige Vorschläge für vorstellungsorientierte Unterrichtskonzepte hin zur Gleichwertigkeit von Termen (Wellstein 1978, Mason 2005 u.v.a.).

Wenig ist dagegen bisher über die tatsächlichen Lernprozesse bekannt: Wie entwickeln sich bei den Lernenden inhaltliche Vorstellungen zur Gleichwertigkeit? Welche Lernangebote brauchen die Lernenden, um die intendierten Vorstellungen zu entwickeln, und wie wirken diese Lernangebote?

1. Methodologischer Rahmen: Fachdidaktischer Entwicklungsforschung

Diese Fragestellungen werden im Rahmen der hier vorgestellten Studie im Programm der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Cobb & Gravemeijer 2006, Prediger & Link 2012) verfolgt, bei der das Design von Lehr-Lernarrangements mit der Beforschung der initiierten Lernprozesse eng verknüpft wird. Den methodischen Kern bilden Design-Experimente in Labor- und Klassensituationen in iterativen Entwicklungszyklen. Diese werden videographiert, transkribiert und interpretativ ausgewertet.

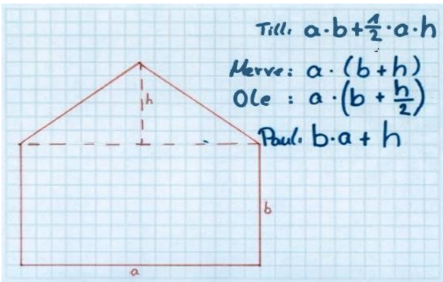
Die Studie wird im Rahmen des Dortmunder Forschungs- und Nachwuchskollegs FUNKEN (Fachdidaktische Entwicklungsforschung zu diagnosegeleiteten Lehr-Lernprozessen) durchgeführt.

2. Entwicklung des Lehr- Lernarrangements

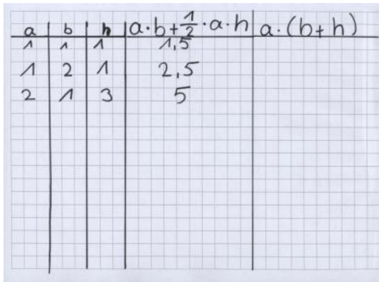
Die Konstruktion des Lehr- Lernarrangements für Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse des mittleren Schulabschlusses orientiert sich an bereits in der Theorie skizzierten Lernwegen zur Gleichwertigkeit von Termen (Wellstein 1978, Mason 2005 u.v.a.): die gleichen geometrischen Figuren werden durch unterschiedliche Terme beschrieben (vgl. Aufgabe 1). Der Vergleich der Terme führt auf die inhaltliche Vorstellung der *Beschreibungsgleichheit*. Aus dieser Vorstellung wird anschließend die inhaltliche Vorstellung der *Einsetzungsgleichheit* und das Kalkül, die *Umformungsgleichheit* entwickelt (Prediger 2009 in Anlehnung an Malle 1993).

Typisch sind für die ersten beiden Schritte etwa folgende kognitive Aktivitäten aus Aufgaben, deren kontextuelle Einbindung hier aus Platzgründen ausgespart wird (aus Prediger, Zwetzschler, Schmidt 2011):

(1) Welche Kinder berechnen den zu gleichen Flächeninhalt? Prüfe, ob die gegebenen Terme den Flächeninhalt der Graphik berechnen.



(2) Setze Zahlen in die Terme ein, um prüfen, welche gleichwertig sind. Was stellst du fest?



Im Folgenden soll ein exemplarischer Einblick in die Empirie an dieser inhaltlich bedeutsamen Übergangsstelle von der Beschreibungsgleichheit zur Einsetzungsgleichheit gegeben werden.

3. Rekonstruierte Hürde im Lernprozess: Allgemeinheit von Term und Figur

Fallbeispiel Paula und Daniel

Paula und Daniel (Klasse 8 Gesamtschule) bearbeiten in einem Design-Experiment die Aufgabe 1. Dabei berechnen sie den Flächeninhalt der Figur zunächst auf einem eigenem Weg und bestimmen dazu die konkreten Seitenlängen durch Zählen der Kästchen in der Figur und orientieren sich somit nicht an den gegebenen Termen. Um anschließend zu prüfen, welche der gegebenen Terme den gleichen Flächeninhalt beschreiben, setzen sie ihre konkreten Zahlen in diese ein und überprüfen die Ergebnisse anhand ihres errechneten Referenzwertes. Einzelne Teilterme ordnen Paula und Daniel durch das Wiederfinden der Termstruktur in der Graphik zu.

Nach der Bearbeitung der Aufgabe 1 erhalten Paula und Daniel die Tabelle aus Aufgabe 2, in der die Passung von zwei der gegebenen Terme durch das Einsetzen geprüft werden soll. Die Lernenden sind allerdings irritiert durch die Aufgabenstellung und bearbeiten diese zunächst nicht.

Paula: Wir haben die richtigen Zahlen eingesetzt und er hat irgendwelche genommen?

Daniel: Häh? Das geht doch gar nicht. (…) Man kann aber nicht einfach andere Werte einsetzen.

Paulas und Daniels Irritation über die Herangehensweise blockiert den intendierten Lernweg von der Beschreibungsgleichheit zur Einsetzungsgleichheit. Sie zeigen ein - in vielen Episoden der Design-Experimente rekonstruierbares - Verständnis von den Variablen als konkreten Seitenlängen, das bereits von Küchemann (1980) dokumentiert wurde.

Analyse der Hürde und ihrer Ursachen

Bei genauerer Analyse dieser Hürde zeigt sich das zugrundeliegende geometriedidaktische Problem: die Lernenden interpretieren die gegebene Graphik als eine *Zeichnung* mit konkreten Längen, und nicht als allgemeine *Figur* (zum Beispiel repräsentiert in Form einer Figurenschar). Variablenterme als Ausdruck von Allgemeinheit werden hier also deshalb nicht verstanden, weil die Figuren in ihrer Allgemeinheit nicht erfasst werden, sondern lediglich von der konkreten Zeichnungen auf das Objekt geschlossen wurde (Parzysz 1988).

Dieser Hürde steht eine wichtige Ressource gegenüber, dass nämlich viele Lernende wie Paula und Daniel mit großer Selbstverständlichkeit das Einsetzen *einer* Zahl als Weg zum Überprüfen der Beschreibungsgleichheit nutzen.

Zu erarbeiten ist folglich nicht die Einsetzungsgleichheit insgesamt, sondern die *Allgemeinheit* des Einsetzens: Zwei Terme sind nur dann gleichwertig, wenn sie für alle Einsetzungen denselben Wert ergeben. Besonderer Aufmerksamkeit bedarf also der allgemeine Term, da Schülerinnen und Schüler ihre Erfahrungen aus konkreten Berechnungen nicht direkt in Beziehung zu allgemeinen Termen setzen (können) (Lee / Wheeler 1989).

4. Konsequenzen für das Lehr-Lernarrangement: Aufbau inhaltlicher Vorstellungen zur Beschreibungsgleichheit

Unter Ausnutzung der Ressource der Schülerinnen und Schüler, das Einsetzen einzelner Zahlen zum Überprüfen zu nutzen, lässt sich die Hürde der Allgemeinheit von Term und Figur durch eine Veränderung im Design des Lehr-Lernarrangements als überwindbar gestalten: Ein verständiger Vorstellungsaufbau zur Beschreibungsgleichheit, im Rahmen eines hier beschriebenen Lehr- Lernarrangements, bedarf besonderer Lerngelegenheiten, um eine Figur und einen allgemeinen Term zunächst zu identifizieren und anschließend vergleichen zu können.

In einem ersten Schritt deuten die Lernenden einen gegebenen Term an der graphischen Darstellung (Zeichnung). Um anschließend die Allgemeinheit sowohl der Figur, als auch des Terms zu erfahren, soll eine Figurenschar, in der Rolle eines bridging tools, die bisher unverstandenen und unvereinten

Vorstellungen aufbauen und versöhnen. Schülerinnen und Schüler nähern sich dabei einer allgemeinen Vorstellung, durch das wiederholte zeichnen und berechnen der Figur mit unterschiedlichen Werten. Anschließend sind Lernende in der Lage, unterschiedliche Terme als allgemeine Beschreibungen einer allgemeinen Situation oder Figur zu erkennen und somit Vorstellungen zur Beschreibungsgleichheit aufzubauen.

Diese Veränderung des Lernweges wurden konkretisiert im Design und erprobt in weiteren Design-Experimenten in Klassen- und Laborsituationen im Winter 2011/12, deren Auswertung nun weiter verfolgt wird .

5. Literatur

Cobb, P. / Gravemeijer, K. (2006): Design research from a learning design perspective. In: Akker van den, J. / Gravemeijer, K. / McKenney, S. / Nieveen, N. (2007): Educational design research. London [u.a.], Routledge. S. 17-51.

Küchemann, D. E. (1980): The Understanding of Generalized Arithmetic by Secondary School children. Unveröffentliche Dissertation. Chelsa College, University of London, London.

Lee, L. / Wheeler, D. (1989): The Arithmetic Connection. Educational Studies in Mathematics 20 (1). S. 41-54.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig [u.a.], Vieweg.

Mason, J. (2005): Developing Thinking in Algebra. Paul Chapman.

Parzysz, B. (1988): «Knowing» vs «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures. In: Educational Studies in Mathematics 19(1). S. 79 -92.

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz, Weinheim 2009, 213-234.

Prediger, S. / Zwetzschler, L. / Schmidt, U. (2011): Preise des Fensterbauers – Flächenberechnungen automatisieren und Terme vergleichen. Kapitel in Erprobungsfassung aus Leuders, T. / Hußmann, S. / Barzel, B. (Hrsg.): Mathewerkstatt 8, Cornelsen. Berlin.

Prediger, S. / Link, M. (2012): Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. Erscheint in: Bayrhuber, H. et al. (Hrsg.): Formate Fachdidaktischer Forschung. Waxmann, Münster.

Rosnick, P. / Clement, J. (1980): Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. In: The Journal of Mathematic Behavior 3(1), S. 3-27.

Wellstein, H. (1978): Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen. In: Didaktik der Mathematik 6(1), 54-64.

Johanna ZÖLLNER, Karlsruhe,

Längenverständnis[1] bei 4- bis 6jährigen Kindern

In der Auseinandersetzung mit Größen und dem systematischen Unterricht zu diesem Thema, spielt die didaktische Stufenfolge, welche die „Entwicklung menschlichen Wissens im Laufe der Menschheitsgeschichte widerspiegelt“ (Peter-Koop 2001, S. 9) eine entscheidende Rolle. In der mathematikdidaktischen Literatur wird allerdings das enge Befolgen dieser auf verschiedenen Ebenen kritisiert (z.B. Nührenbörger 2002; Clements & Sarama 2009). Ein häufig genannter Kritikpunkt bezieht sich auf die fehlende Berücksichtigung der Vorerfahrungen der Kinder (z.B. Peter-Koop 2001; McDonough &Sullivan 2011) und zeigt damit gleichzeitig ein Forschungsdesiderat auf. Es ist zu klären, welche Erfahrungen und Kenntnisse Kinder im Bereich der Längen haben, bevor sie in die Schule kommen.

Forschungsleitende Fragen

1. Welche Prozeduren und Konzepte beschreiben ein Längenverständnis?
2. Welche individuellen Prozeduren und Konzepte zeigen Kinder beim Vergleichen und Messen vor einem systematischen Unterricht in diesem Bereich.

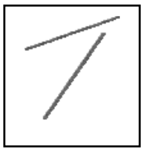
Der Beantwortung der ersten Frage wird sich auf normativer Ebene genähert, hierauf wird in diesem Beitrag nicht näher eingegangen. Teile der deskriptiven Analyse, die zur Beantwortung der zweiten Frage führen sollen, werden im Folgenden dargestellt.

Untersuchungsdesign

Bei der folgenden Untersuchung handelt es sich um eine Querschnittuntersuchung (N=40) mit 4-6jährigen Kindern. Da es sich um ein hypothesengenerierendes Verfahren handelt, bietet sich eine Methodentriangulation an. Es wurden qualitative Interviews geführt und videographiert. Ergänzend wurde anhand eines standardisierten Tests (OTZ; van Luit et al 2001) die Zahlbegriffsentwicklung der Kinder erhoben. Der Umgang mit Größen in Kindergarten und Elternhaus wurde mit Hilfe eines Fragebogens erhoben.

Im Rahmen dieses Beitrags wird eine Aufgabe der Interviews beschrieben und es werden erste Ergebnisse dazu gezeigt.

[1] Auf eine Begriffsklärung und Diskussion dieser wird im Rahmen dieses Beitrags verzichtet (vgl. dazu z.B. Nührenbörger, 2002).



Auf dem Boden wurden zwei Streifen (1,30m und 1,20m) angebracht (vgl. Abb.). Die Kinder beurteilten zunächst, welcher der beiden Streifen länger ist. Danach wurden eine Begründung und eine „Beweisidee“ gefordert. In einem zweiten Schritt wurden den Kindern verschiedene „Hilfsmittel“ zum Beweis ihrer ersten Aussage angeboten: verschiedene Stöcke und Schnüre, ein 30cm langes Lineal, ein Zeichendreieck, zwei Maßbänder und ein Gliedermaßstab.

Erste Ergebnisse

Entsprechend der Fragestellung wurden folgende Analysebereiche festgelegt: **erster Längenvergleich ohne Hilfsmittel; Auswahl des Mittlers; Verwendung des Mittlers** und **Schlussfolgerung**. Im Folgenden werden Teile des Kategorienschemas, welches zur Analyse der Kinderhandlungen gebildet wurde, vorgestellt, anhand des Beispiels von Luka (weiblich, 5 Jahre, 4 Monate) konkretisiert und anschließend interpretiert.

Erster Längenvergleich ohne Hilfsmittel

Folgende Vorgehensweisen und Begründungen können beobachtet werden: Die Endpunkte werden wie bei einem direkten Vergleich in Beziehung gesetzt (N=8); es werden imaginäre Einheiten gezählt (N=4); als Begründung wird angegeben: „Ich habe es gesehen“ (N=8). Von N=18 Kindern wurde keine Erklärung abgegeben.

Luka tippt bei dieser Frage mit dem Finger in der Luft und zählt, was sie auch verbal bestätigt: „Weil ich gezählt habe“. Sie hat imaginäre Einheiten entlang der Streifen gezählt und entschieden, dass der Streifen, bei welchem sie mehr gezählt hat, der längere ist.

Peter-Koop (2001) kritisiert unter anderem an einem unterrichtlichen Vorgehen nach der didaktischen Stufenfolge, dass durch die Betonung des Messens mit kürzeren, willkürlichen Mittlern (z.B. Büroklammern) und das damit verbundene wiederholte Abtragen und Zählen, der Eindruck entstehen kann, dass Messen mit Zählen gleichzusetzen ist. In der vorliegenden Studie zeigte sich jedoch, dass es einige Kinder (N=4) gibt, die selbst vor der unterrichtlichen Behandlung des Themas den Messprozess mit einem Zählprozess gleichsetzen, so wie es Luka scheinbar tut.

Auswahl der Mittler

In der vorliegenden Studie greifen 33 Kinder zu einem Maßband, Gliedermaßstab oder Lineal. Nur vier Kinder verwenden einen nichtstandardisierten Mittler, einen Stock oder eine Schnur.

Luka verwendet ein Maßband.

Wie in anderen Studien (Nunes et al. 1993) konnte auch hier festgestellt werden, dass die meisten Kinder bei Durchführung eines indirekten Vergleichs zu standardisierten Messgeräten greifen. Es ist zu vermuten, dass die Kinder den indirekten Vergleich mit einem Messprozess gleichsetzen und deshalb die standardisierten Messgeräte verwenden. Betrachtet man die Verwendung der Mittler, so kann man feststellen, dass die Kinder mit einem standardisierten Messgerät in der Regel erfolgreicher indirekt vergleichen als mit einem willkürlichen Mittler (vgl. auch Nunes et al.1993).

Verwendung des Mittlers

Hier können unterschiedliche Vorgehensweisen beobachtet werden. Die Grafik fasst die gebildeten Kategorien zusammen. Die Zahlen in Klammern geben die Anzahl der Kinder an, die dieser Kategorie zugeordnet werden und die Kategorien, welchen Luka zugeordnet wurde sind hervorgehoben.

Streifen 1			Streifen 2		
Anlegen	Verlauf	Ablesen	Anlegen	Verlauf	Ablesen
bei 0 (14)	genau(6/21)	Markierung (6)	konsistent (20)	konsistent (26)	konsistent (16)
ungefähr (13)	beachtet (6)	Zahl (13)	inkonsistent (5)		inkonsistent (3)
Mitte (4)	k. Beachtung (2)	Ende (2)			
Ende (4)					

Luka legt das Maßband sehr sorgfältig bei 0 an und achtet darauf, dass es gerade und genau auf dem Streifen liegt. Damit wird sie beim Analysepunkt „Verlauf“ der Kategorie „genau“ zugeordnet. Sie beginnt die Zentimeter zu zählen. Offensichtlich nutzt sie auch hier das Konzept „Messen durch Zählen“. Sie zählt flüssig bis 30, verzählt sich im größeren Zahlbereich einige Male und fordert Hilfe. Sie zeigt auf den Punkt auf dem Maßband, der dem Endpunkt des Streifens entspricht, und will die betreffende Zahl vorgelesen bekommen.

An dem zweiten Streifen legt Luka das Maßband auch exakt und routiniert an und fordert gleich das Vorlesen der entsprechenden Zahl.

Luka scheint eine klare Vorstellung von dem Aufbau der Skala des Maßbandes zu haben und nutzt dieses sinngemäß, auch wenn der nötige Zahlbereich ihren eigenen aktiven Zahlbereich übersteigt.

Schlussfolgerung

Die unterschiedlichen Begründungen nach dem erneuten Einschätzen der Längenrelation wurden in folgenden Kategorien zusammengefasst:

Transitiver Schluss (N=10): Die Kinder begründen ihr Urteil mit Hilfe der Transitivität.

Rückgriff auf die erste Entscheidung (N=8): Die Kinder greifen auf ihre Erklärung von dem Vergleich ohne Hilfsmittel zurück.

Zahlen vergleichen (N=7): Die Kinder urteilten aufgrund der Größer-Relation bei Zahlen. Dieser Kategorie wurde Luka zugeordnet.

keine (N=10): Diese Kinder begründeten ihr Urteil nicht.

Luka fragt nach dem Anlegen des Maßbandes an beide Streifen, nach der größeren Zahl, da die Zahlengröße (130 und 120) ihren aktiven Zahlbereich übersteigt. Für sie entspricht der größeren Zahl der längere Streifen.

Luka scheint einen „transfer within“ (Schmidt & Weiser, 1986) von den Zahlen zu den Längen zu vollziehen.

Zusammenfassende erste Wertung nach der deskriptiven Analyse

- Kinder greifen zu standardisierten Messgeräten, um einen indirekten Vergleich durchzuführen.
- Kinder führen einen indirekten Vergleich erfolgreicher mit standardisierten Messgeräten aus.
- Kinder verwenden selten kürzere Mittler für einen indirekten Vergleich.
- Ein wiederholtes Abtragen eines kürzeren Mittlers ist in dieser Untersuchung nicht zu beobachten.
- Einige Kinder zeigen die Vorstellung: Messen ist Zählen.

In einem weiteren Schritt sollen Zusammenhänge, wie z.B. zwischen der Zahlbegriffsentwicklung und dem Längenkonzept oder zwischen angewandten Prozeduren und Konzepten und der Situation analysiert werden.

Literatur

Clements, D. H.; Sarama, J. (2009): Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach. New York, London: Routledge.

Luit, J. E. H. van; Rijt, B. A. M. van de; Hasemann, K. (2001): OTZ. Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Göttingen: Hogrefe.

McDonough, A.; Sullivan, P. (2011): Learning to measure length in the first three years of school. In: Australasian Journal of Early Childhood 36 (3), S. 27–35.

Nührenbörger, M. (2002): Denk- und Lernwege von Kindern beim Messen von Längen. Theoretische Grundlegung und Fallstudien kindlicher Längenkonzepte im Laufe des 2. Schuljahres. Hildesheim: Franzbecker.

Nunes, T.; Light, P.; Mason, J. (1993): Tools for Thought: The Measurement of Length and Area. In: Learning and Instruction (3), S. 39–54.

Peter-Koop, A. (2001): Authentische Zugänge zum Umgang mit Größen. In: Die Grundschulzeitschrift (141), S. 6–11.

Schmidt, S.; Weiser, W. (1986): Zum Maßzahlverständnis von Schulanfängern. In: Journal für Mathematikdidaktik 7 (2/3), S. 121–154.

Teil 4: Poster

Dagmar BÖNIG, Anne PIETSCH, Bremen

Anschlussfähigkeit der mathematikdidaktischen Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen - Kurzvorstellung eines Verbundprojekts

Die Anschlussfähigkeit der pädagogisch-didaktischen Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen wird als eine wesentliche Bedingung für die Kooperation und Vernetzung von Elementar- und Primarbereich angesehen. Anschlussfähigkeit steht dabei zwischen den beiden Polen Reduktion von Unterschiedlichkeiten und Erhöhung der Kontinuität einerseits sowie Unterschiedlichkeiten und Diskontinuitäten als entwicklungsfördernde Herausforderungen andererseits (Dunlop, Fabian 2002; Faust 2008; Heinze, Grüßing 2009, Carle, Hegemann-Fonger 2012). Eine bedeutsame Differenz vermuten wir insbesondere im Bereich der mathematischen Bildung.

Daher sollen in dem vom BMBF geförderten Verbundprojekt der Universitäten Bremen und Freiburg[1] (Laufzeit: Dezember 2011 – November 2013) die bei ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen vorherrschenden Überzeugungen und Praktiken der frühen mathematischen Bildung im Elementarbereich und der mathematikdidaktischen Arbeit im Anfangsunterricht des Primarbereiches erfasst und analysiert werden.

Ziel des Forschungsvorhabens ist einerseits die Entwicklung eines empirisch fundierten Kompetenzstrukturmodells anschlussfähiger Denk- und Handlungsweisen. Andererseits will das Forschungsprojekt aufzeigen, woran realistischerweise angeknüpft werden kann, wenn die Zusammenarbeit der PädagogInnen in beiden Bereichen intensiviert und die Qualifikationen einander angenähert sowie gemeinsam weiter entwickelt werden sollen.

Das Projekt gliedert sich in drei Phasen.

- In der ersten Phase (Dezember 2011 – Februar 2012) wurden ErzieherInnen und LehrerInnen in ihrer Alltagspraxis beobachtet und anschließend interviewt. Gruppendiskussionen mit TeilnehmerInnen beider Professionen erbrachten Aufschluss über unterschiedliche und gemeinsame Vorstellungen, wie Anschlussfähigkeit hergestellt wer-

[1] Verbundprojekt: Anschlussfähigkeit der mathematikdidaktischen Überzeugungen und Praktiken von ErzieherInnen und GrundschullehrerInnen als Bedingung der Vernetzung von Elementar- und Primarbereich – eine repräsentative Studie in zwei Bundesländern (AnschlussM) - Verbundleitung und Projektleitung Bremen: Prof. Dr. U. Carle, Projektleitung Freiburg: Prof. Dr. G. Wittmann. URL: www.anschluss-M.de

den kann (erste Ergebnisse vgl. Kröger 2012). Beides wurde videografiert und inhaltsanalytisch ausgewertet. Ergänzend folgte die Analyse der Rahmen- und Orientierungspläne beider Bundesländer, sowie der Schulbücher und vorherrschender mathematischer Konzepte für den Kindergarten.

- Die Ergebnisse der ersten Projektphase sind eine Basis für die Generierung der Items für eine repräsentative Fragebogenerhebung (September 2012 – Februar 2013), die zur Entwicklung eines Kompetenzstrukturmodells dient. Hier werden die Motive, die mathematikdidaktischen Einstellungen sowie die Selbst- und Fremdwahrnehmung der Befragten in ihrer Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen ermittelt. Die Erhebung wird in den Bundesländern Bremen und Baden-Württemberg durchgeführt.
- Die Videosequenzen aus den Vorstudien werden ebenso für die Entwicklung des Technology Based Assessment (TBA) genutzt. Hierdurch können die per Fragebogen erhobenen mathematikdidaktischen Überzeugungen bei einer Teilstichprobe auf mathematikdidaktisch relevante Situationen bezogen werden, was das Herstellen eines generalisierten Handlungsbezugs erlaubt und auch die Prüfung des entwickelten Kompetenzstrukturmodells ermöglicht.

Regelmäßige Fachgespräche mit ausgewiesenen ExpertInnen begleiten die gesamte Untersuchung im Sinne einer kommunikativen Validierung.

Literatur

Carle, U., Hegemann-Fonger, H. (2012): Die Unterstützung von Übergängen im Elementarbereich. Handreichungen zum Berufseinstieg von Elementar- und KindheitspädagogInnen – Heft B03. Download: http://www.fruehpaedagogik.uni-bremen.de/handreichungen/B03Unterstuetzung(CA+HHF).pdf

Dunlop, A.-W.; Fabian, H. (2002): Conclusions. Debating transitions, continuity and progress in the early years. In: Fabian, H.; Dunlop, A.-W. (Eds.): Transition in the early years. London: Routledge Falmer, 146-154.

Faust, G. (2008): Übergänge gestalten – Übergänge bewältigen. Zum Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. In: Thole, W. u.a. (Hrsg.): Bildung und Kindheit. Opladen: Barbara Budrich, 225-240

Heinze, A.; Grüßing, M. (Hrsg.) (2009): Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht. Münster, Waxmann Verlag.

Kröger, R. (2012): Anschlussfähigkeit mathematikdidaktischer Überzeugungen von Erzieherinnen und Grundschullehrkräften. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster, WTM Verlag.

Ina DIETZSCH & Philipp ULLMANN, Frankfurt

Die kulturelle Macht mathematischer Darstellungen

In einem interdisziplinären Lehrprojekt an der Universität Frankfurt haben sich im Wintersemester 2011/12 Studierende der Kulturanthropologie und des gymnasialen Mathematiklehramtes einem gemeinsamen Gegenstand zugewandt: der Untersuchung der Frage, was die kulturelle Macht mathematischer Darstellungen ausmacht, woher sie kommt und woraus sie sich speist.

Ziel der Veranstaltung war es, bei den Studierenden ein Gefühl für die Eigenlogik der Mathematik wie auch für abweichende Argumentations- und Denkmuster zu entwickeln und ihnen theoretisches Rüstzeug an die Hand zu geben, um sich in diesem Spannungsfeld hegemonialer Weltdeutung begründet zu positionieren. Der didaktische Schwerpunkt lag auf der Zusammenarbeit zweier Wissenskulturen, um ein disziplinäres Selbstverständnis, aber auch dessen Kritik und Überschreitung zu befördern.

Die Ergebnisse des Forschungsseminars wurden von vier Studierenden in einem Vortrag vorgestellt (siehe den Beitrag von Alexandra Walter et al. in diesem Tagungsband) und auf einem gemeinsam gestalteten Ergebnis-Poster dokumentiert.

Weitere Informationen

www.math.uni-frankfurt.de/~ullmann/11ws/KulturelleMacht

Kontakt

Dr. Philipp Ullmann
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik
Universität Frankfurt
Senckenberganlage 9
60325 Frankfurt
ullmann@math.uni-frankfurt.de

Dr. Ina Dietzsch
Institut für Kulturanthropologie und Europäische Ethnologie
Universität Frankfurt
Grüneburgplatz 1
60323 Frankfurt am Main
dietzsch.ethnologie@web.de

Angela HERRMANN, Essen

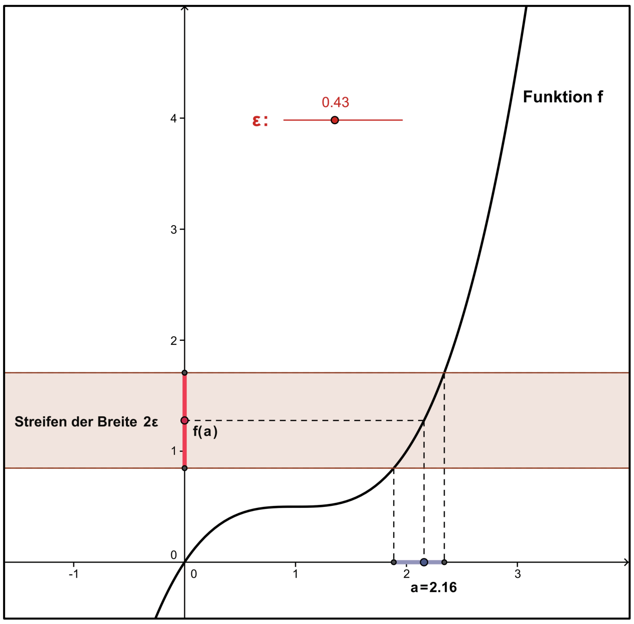
Mathematik besser verstehen

Bei dem Projekt „Mathematik besser verstehen“ handelt es sich um ein für drei Jahre durch die *Deutsche Telekom Stiftung* gefördertes Projekt (Leitung: L. Hefendehl-Hebeker). Es richtet sich an Studierende des gymnasialen Lehramts im ersten Studienjahr an der Universität Duisburg-Essen. Dem zyklischen Charakter des *Design Researchs* folgend, wurden in den Studienjahren 2009/10 und 2010/11 gemeinsam mit Ch. Ableitinger Unterstützungsmaterialien entwickelt, erprobt, analysiert und verbessert. Ziel war es dabei, eine Brücke zwischen Schul- und Universitätsmathematik zu schlagen, um somit der von Felix Klein proklamierten *doppelten Diskontinuität* und dem *Abstraktionsschock* zu Studienbeginn entgegenzutreten.

Im Gegensatz zu Projekten, die auf eine Neukonzeption des Lehrbetriebes ausgerichtet sind, versucht das Projekt „Mathematik besser verstehen“ möglichst wenig Einfluss auf den bestehenden Lehrbetrieb zu nehmen. Es werden vielmehr Ideen und Hilfsmittel entwickelt, wie auch Universitäten, die nicht die Möglichkeit separater Veranstaltungen für Lehramtsstudierende haben, die Studieneingangsphase stärker phänomenologisch orientiert und verständnisgeleitet gestalten können. Ausgewählte Materialien, die begleitend zu den Vorlesungen Analysis und Lineare Algebra im Projekt entwickelt wurden, sollen hier vorgestellt werden.

1. Visualisierungen

Visualisierungen dienen der Entwickelung von Grundvorstellungen zu den Begriffen und Konzepten der Vorlesungen. Umgesetzt wurde dies im Projekt mit haptisch zu bedienenden Applets. Diese wurden stets in der Theorie der Vorlesung verankert und von Bedienungsanweisungen und Aufgaben zur sinnvollen Nutzung begleitet. Im Bild rechts ist ein Beispiel einer Visualisierung mithilfe von GeoGebra zur Veranschaulichung der Stetigkeit zu sehen. Die Studierenden können hier beobachten, wie die in der Definition vorkommenden Größen voneinander abhängen.



2. Spezielle Übungsaufgaben

Es wurden Aufgaben entwickelt, die eine Brücke zum Schulstoff schlagen, zusätzliche Veranschaulichung liefern, Grundverständnis neuer Konzepte vermitteln und/oder den Fokus auf den späteren Lehrberuf richten. Eine Aufgabe aus der Linearen Algebra war beispielsweise das Lösen einer Schulbuchaufgabe (Baum et al. 2001, S. 193 Nr. 3), in der die Eigenwerte und Eigenvektoren affiner Abbildungen (z. B. Spiegelung an einer Achse) sowohl mithilfe geometrischer Überlegungen auf Schulniveau als auch mithilfe theoretischer Konzepte der Eigenwerttheorie der Vorlesung.

3. Ausführliche Musterlösungen und Vorführaufgaben

An die Studierenden ausgegebene Musterlösungen sind oft recht prägnant formuliert. Studienanfänger haben häufig Probleme diese Lösungen nachzuvollziehen und für sich nutzbar zu machen. Dies führte im Projekt zu der Idee, ausführliche Musterlösungen anzufertigen, die zusätzlich impliziertes Wissen explizieren und die für die Aufgabe bzw. das Themengebiet typischen Lösungsstrategien herausarbeiten. Sie dienten dabei als vorausgeschickte Impulse zur Bewältigung neuer Aufgabentypen oder zum Nacharbeiten der eigenen Aufgabenlösung. (Vgl. Ableitinger & Herrmann 2011)

4. Weitere Maßnahmen

Weitere Maßnahmen waren u. a. Selbstdiagnosetests in Form von Multiple-Choice- Aufgaben, zusätzliche Beispiele zur Illustration der Inhalte der Vorlesungen, Anleitungen zum Durcharbeiten und Nachvollziehen des Vorlesungsstoffes, die Umstellung des Übungsbetriebes auf Präsenzübungen und eine spezielle Betreuung der Studierenden durch die Projektmitarbeiter im Lern- und Diskussionszentrum.

5. Ergebnisse

Neben den obligatorischen speziellen Übungsaufgaben wurden auch die freiwilligen Angebote des Projekts auf einer E-Learning-Plattform von den Studierenden gut angenommen. Eine genauere Auswertung erfolgt noch im Laufe des Jahres 2012.

Literatur

Ableitinger, Ch., Herrmann, A. (2011): Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Ein Arbeits- und Übungsbuch. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.

Baum, M., Lind, D., Schermuly, H., Weidi, I., Zimmermann, P. (2001): Lambacher Schweizer. Lineare Algebra mit analytischer Geometrie (Leistungskurs). Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Martin Erik HORN, Frankfurt/Main

Surreale Zahlen: Reisen über die Unendlichkeit hinaus

Beginnen wir unsere Reise in die Unendlichkeit mit dem Wettlauf von Achilles und einer still stehenden Schildkröte. Für den ersten sehr großen Schritt der Länge von 1 km benötigt Achilles 1 h. Für den folgenden Schritt der Länge von 0,5 km benötigt er ½ h. Da er mit konstanter Geschwindigkeit läuft und sich seine Schrittweite jeweils halbiert, halbiert sich auch die Zeit, die Achilles pro Schritt benötigt. Nach genau zwei Stunden erreicht er die Schildkröte. Dabei hat er unendlich viele Schritte zurück gelegt:

$$\omega = (\{1, 2, 3, 4, \ldots\}; \{\ \})$$

Doch Achilles rennt weiter. Wo aber ist er, wenn er einen weiteren Schritt

$$\omega + 1 = (\{1, 2, 3, 4, \ldots, \omega\}; \{\ \})$$

gemacht hat? Und wie viele Schritte muss er machen, um 3 h zu laufen?

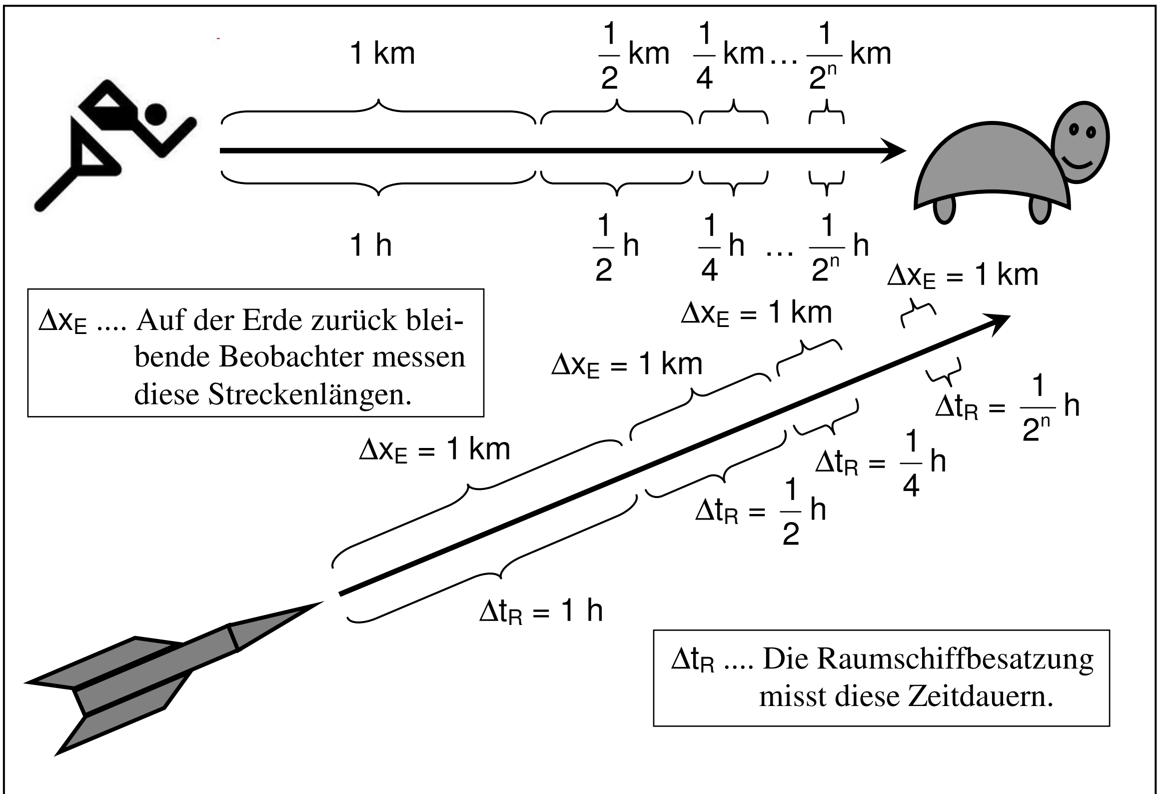


Abb. 1: Das Wettrennen des Achilles mit der Schildkröte (oben) und ein Flug eines Raumschiffs in die Unendlichkeit (unten).

Mit diesem Paradoxon des Xenon gelingt es, Diskussionsanlässe zur Erörterung der Surrealen Zahlen zu schaffen. Mit den reellen Zahlen kommen wir hier nicht weiter, denn wir befinden uns in einem Bereich, bei dem es um Größen geht, die größer als unendlich sind. Das wird noch klarer, wenn dieses Paradoxon speziell-relativistisch modifiziert wird (Horn 2012).

Setzen wir also unsere Reise ins Unendliche und darüber hinaus fort und betrachten ein Raumschiff, das von der Erde aus beobachtet wird. Zwar kann die Geschwindigkeit dieses Raumschiffs aus Erdsicht nie größer als die Lichtgeschwindigkeit c werden. Für Beschleunigungen gibt es im Kontext der speziellen Relativitätstheorie jedoch keine solche Grenze.

Deshalb beschleunigt die Raumschiffbesatzung in diesem Gedankenexperiment das Raumschiff jeweils so, dass sie für jeden im System der Erde gemessenen Kilometer genau halb so viel Zeit im eigenen Bezugssystem benötigt wie für den vorangegangenen Kilometer. Die Distanzangaben von jeweils einem Kilometer erfolgen hier also aus Erdsicht und die Zeitangaben von $1/2^n$ h aus Sicht der Raumschiffbesatzung. Sie können aber natürlich problemlos ineinander umgerechnet werden.

Wo also befindet sich das Raumschiff, wenn die Besatzung eine Gesamtzeit von zwei Stunden misst? Die Antwort erfolgt analog zum Wettrennen des Achilles. Das Raumschiff hat nach zwei Stunden eine Entfernung von

$$\omega\,\text{km} = (\{1\,\text{km}, 2\,\text{km}, 3\,\text{km}, 4\,\text{km}, \ldots\}; \{\ \})$$

zur Erde zurück gelegt. Aus Erdsicht ist es unendlich weit entfernt, und es fliegt weiter. Wo also befindet sich das Raumschiff, wenn es $\omega + 1$ Beschleunigungsphasen durchlaufen hat? Und wo befindet es sich nach 3 h?

Rota (2008, S. 217) beschreibt eindrücklich: „Surreal numbers are an invention of the great John Conway. They will go down in history as one of the great inventions of the century. (…) Thanks to Conway's discovery, we have a new concept of number." Die Vermittlung eines konzeptuellen Verständnisses von Zahlensystemen stellt eine originäre Aufgabe der Mathematikdidaktik dar. Sie gelingt wahrscheinlich besser, wenn dabei kontextbezogen vorgegangen wird. Und möglicherweise können dabei sogar „the most serious shortcomings in our present educational system" (Knuth 1974, S. 113) überwunden werden.

Literatur

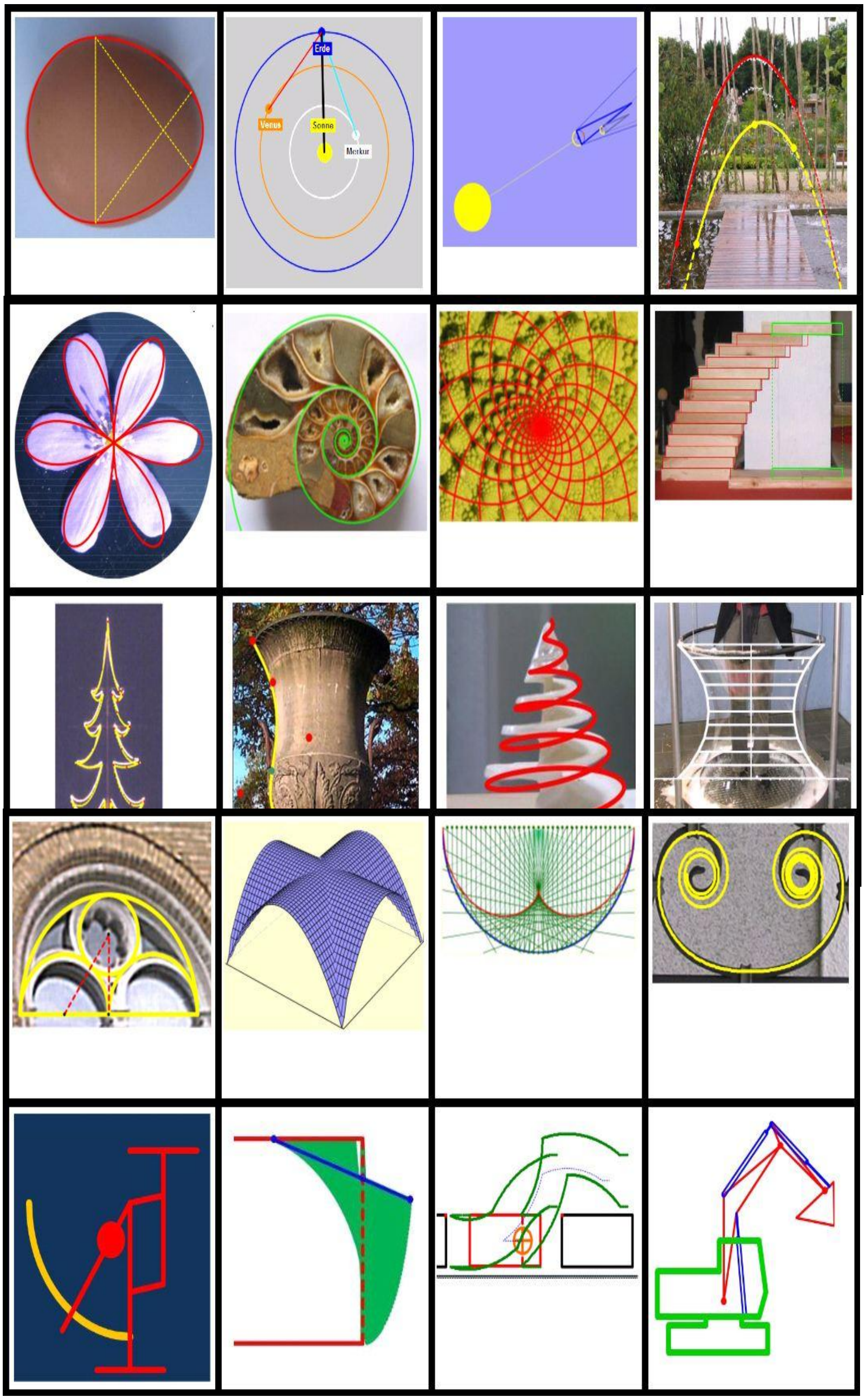
Horn, M. E. (2012): Vorstellungen zum Licht – Eine surreale Erweiterung. In S. Bernholt (Hrsg.): Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht. GDCP-Band 32. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 149 – 151.

Knuth, D. E. (1974): Surreal Numbers. How two Ex-Students turned on to pure Mathematics and found total Happiness. Upper Saddle River, NJ: Addison Wesley.

Rota, G.-C. (2008). Indiscrete Thoughts. Reprint of the 1997 Edition, Basel: Birkhäuser.

Bodo von PAPE, Oldenburg

Geometrisches Modellieren



„Ich meine wirklich,
dass das Buch der Wissenschaft uns immerfort offen vor Augen liegt.
Aber die Zeichen, in denen es geschrieben ist,
sind nicht die Buchstaben unseres Alphabets.
So kann nicht jeder es lesen.
Dies sind die Zeichen, besonders geeignet für eine solche Lektüre:
Dreiecke, Quadrate, Kreise,
Kugeln, Kegel, Pyramiden
und andere mathematische Figuren.“

Galilei 1641

»Ma io veramente stimo,
il libro della filosofia esser quello che perpetuamente ci sta innanzi a gli occhi;
ma perché è scritto in caratteri diversi da quelli del nostro alfabeto,
non può esser da tutti letto:
e sono i caratteri di tal libro triangoli, quadrati, cerchi,
sfere, coni, piramidi et altre figure matematiche,
attissimo per tal lettura.»

Maike VOLLSTEDT, Silke RÖNNEBECK, Aiso HEINZE, Kiel

Das EU-Projekt „MaP: Mathematik mit Perspektive/matematik med perspektiv“

1. Hintergrund und Ziele

Mathematische Kompetenz ist neben den Kompetenzen im Lesen und Schreiben die grundlegende Voraussetzung für eine erfolgreiche Berufstätigkeit. Im Gegensatz zum Lesen und Schreiben wird Mathematik vor allem innerhalb von Bildungsinstitutionen durch Erzieherinnen und Erzieher sowie Schul- und Hochschullehrkräfte erlernt. Das Projekt MaP strebt an, die Qualität mathematischer Lernangebote in Süddänemark und Schleswig-Holstein durch Professionalisierung und Weiterentwicklung von Aus- und Weiterbildungsangeboten für diese Lehrpersonen zu verbessern. Grundlage dafür ist ein grenzüberschreitender Zusammenschluss aller zentralen wissenschaftlichen Bildungsinstitutionen der Region, durch den erfolgreiche Konzepte beiderseits der Grenze aufgegriffen, weiterentwickelt und integriert werden können. Dadurch soll die mathematische Bildung nachhaltig verbessert und die Professionalisierung der Weiterbildung im Bildungsbereich vorangetrieben werden.

2. Zielgruppen

Das Projekt MaP fokussiert auf Lehrpersonen aller Bildungseinrichtungen und erreicht damit Multiplikatoren, die eine große Zahl von Kindern und Jugendlichen langfristig mathematisch fördern. Die Aktivitäten richten sich u. a. an pädagogische Fachkräfte in Kindertageseinrichtungen, Lehrkräfte aller Schulstufen sowie Lehramtsstudierende mit Unterrichtsfach Mathematik bzw. Lehrkräfte in Ausbildung. Zudem spricht MaP Ausbildungslehrkräfte, Mentorinnen und Mentoren, Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler der Mathematikdidaktik, Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter der Bildungsadministration sowie Bildungspolitikerinnen und -politiker an.

3. Projektpartner und Netzwerkpartner

Leadpartner ist das Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) Kiel. Ferner sind sieben Projektpartner und elf Netzwerkpartner an MaP beteiligt. Darunter sind alle zentralen wissenschaftlichen Bildungsinstitutionen der Region Süddänemark/Schleswig-Holstein: die Universitäten Kiel und Flensburg, Lillebælt, Odense und Syddanmark, die FH Kiel sowie das Landesinstitut IQSH.

4. Ziele der Arbeitspakete

Alle Aktivitäten der sieben Arbeitspakete (AP) sind grundsätzlich grenzüberschreitend ausgerichtet und wenden sich zu gleichen Teilen an deutsche und dänische Lehrkräfte.

Die Aktivitäten in AP1 fokussieren auf die akademische Aus- und Weiterbildung im Bildungsbereich. Sie haben die strukturelle Verbesserung von akademischen Ausbildungsangeboten für Mathematiklehrkräfte, pädagogische Fachkräfte in Kindertageseinrichtungen und den wissenschaftlichen Nachwuchs in der Mathematikdidaktik sowie die konzeptionelle Entwicklung akademischer Qualifikationsmaßnahmen für Weiterbildnerinnen und Weiterbildner von Mathematiklehrkräften zum Ziel. AP2 verfolgt die nachhaltige Qualitätssteigerung der berufspraktischen Ausbildung von Lehrkräften durch eine Verbesserung der Ausbildungssituation, eine bessere Qualifizierung der Ausbildungslehrkräfte sowie eine bessere Abstimmung der Ausbildungskonzepte zwischen der theoretischen und der berufspraktischen Ausbildungsphase. Das dritte AP zur berufsbegleitenden Fort- und Weiterbildung von Lehrkräften strebt eine Öffnung der bestehenden Weiterbildungsangebote für Mathematiklehrkräfte aus Syddanmark/Schleswig-Holstein und darauf aufbauend die Entwicklung und Etablierung von neuen grenzüberschreitenden Weiterbildungsmaßnahmen für die Region an. AP4 richtet sich an Lernende mit risikobehafteten Lernbiografien. Es nimmt zum einen die nachhaltige Kooperation zwischen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern, Lehrkräften und anderen pädagogischen Fachkräften, die auf die Förderung von leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern spezialisiert sind, in den Blick. Zum anderen werden grenzüberschreitende Maßnahmen für die Förderung der mathematischen Kompetenzen dieser Lernenden etabliert. Das fünfte AP widmet sich besonders begabten und interessierten Lernenden und bildet Lehrkräfte in der Förderung dieser Schülerinnen und Schüler weiter, z.B. durch die Entwicklung mathematischer Trainingswerkstätten. Hierzu wird ein grenzüberschreitender Schulverbund etabliert. AP6 entwickelt Fort- und Weiterbildungsangebote für Mathematiklehrkräfte zur Vermittlung von Orientierungswissen über neue Trends der mathematischen Forschung und über moderne Berufsbilder für Mathematikerinnen und Mathematiker und führt diese durch. Das letzte AP ist verantwortlich für die administrative Unterstützung der Projektaktivitäten in den AP 1-6, für eine fundierte Evaluation der durchgeführten Maßnahmen sowie für die Öffentlichkeitsarbeit.

Das Projekt MaP wird gefördert aus INTERREG 4 A Syddanmark-Schleswig-K.E.R.N. mit Mitteln des Europäischen Fonds für regionale Entwicklung. Weitere Informationen finden Sie unter www.project-map.eu.

Teil 5: Arbeitskreise der GDM

Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Katja EILERTS, Berlin, Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, Nürtingen

AK HochschulMathematikDidaktik:

1. Einleitung

In der dritten Sitzung des Arbeitskreises in Rahmen der GDM-Tagung standen drei Punkte auf der Tagesordnung:

Zuerst stellten Reinhard Hochmuth (Leuphana Universität, Lüneburg) und Rolf Biehler (Universität Paderborn) die aktuellen Struktur des *kdhm - Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik* – an den beteiligten Hochschulen sowie die derzeit dort laufenden Forschungsprojekte vor.

Danach präsentierte Claudia Böttinger (Universität Duisburg-Essen) erste Ergebnisse einer Untersuchung zu mathematikdidaktischem Wissen und Überzeugungen von Lehramtsstudierenden.

Abschießend wurden noch kurz einige Aspekte der Herbsttagung des Arbeitskreises HochschulMathematikDidaktik Ende Oktober 2012 diskutiert.

Die Sitzung des Arbeitskreises war sehr gut besucht. Mit über 60 Teilnehmerinnen und Teilnehmern war der Senatssaal der Pädagogischen Hochschule ziemlich überfüllt. Sehr erfreulich war auf der GDM-Tagung 2012 die Vielzahl und Bandbreite der Vorträge, die sich mit Themen des universitären Mathematiklehrens und –lernens befassten. Das Thema Hochschulmathematikdidaktik scheint tatsächlich in der „Mitte der Mathematikdidaktik“ angekommen zu sein.

Im Folgenden werden erst kurz die beiden Vorträge vorgestellt, bevor im letzten Teil weitere Informationen zusammengestellt sind.

2. Vorträge

Die Folien zu den beiden Vorträgen finden Sie online unter http://madipedia.de/index.php/Arbeitskreis_Hochschulmathematikdidaktik.

In dem Vortrag „Ein Jahr khdm“ stellte Reinhard Hochmuth zuerst kurz eine Sammlung von Problemen beim Übergang von der Schule zur Hochschule, einige Lösungsansätze sowie den entsprechenden Forschungsbedarf vor und erläuterte dann die Struktur des khdm.

Rolf Biehler ging anschließend genauer auf laufende Forschungsprojekte am khdm im Bereich des Mathematiklehrens im Rahmen des Studiums von Grund-, Haupt- und Realschullehramt und gymnasialen Lehramt ein.

Claudia Böttinger stellte erste Ergebnisse einer Untersuchung bei Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- und Realschulen an der Universität Duisburg-Essen vor. Dabei verwendete sie einen „two-tier"-Fragebogentest zur Erfassung sowohl des professionellen Wissens zur (Schul-)Mathematik als auch der mathematikdidaktischen Überzeugungen.

3. Publikationen

Rolf Biehler berichtete, dass es eine neue Schriftenreihe bei Springer gibt:

„Hochschulmathematik und Mathematiklehrerbildung unter didaktischer Perspektive" Hrsg: Biehler (Geschf.), Beutelspacher, Hefendehl-Hebeker, Hochmuth, Kramer, Prediger, Ziegler (2 Bände in Arbeit)

Der Band zum Symposium des Projekts SAiL-M im November 2009, auf dem der Entschluss zur Gründung des Arbeitskreis HochschulMathematik-Didaktik gefasst wurde, ist endlich erschienen und zwar unter

Zimmermann, M., Bescherer, C. & Spannagel, C. (2012). Mathematik lehren in der Hochschule - Didaktische Innovationen für Vorkurse, Übungen und Vorlesungen, Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

4. Tagungen

Herbsttagung des Arbeitskreis HochschulMathematikDidaktik

Es gibt zwei Themenbereiche, die auf der nächsten Tagung diskutiert werden sollen:

1. Welche Mathematik brauchen Nicht-Mathematiker?

Hierbei wird es darum gehen, die fachlichen Inhalte von Mathematikveranstaltungen für z. B. Ingenieurstudiengänge oder Wirtschaftswissenschaften zu analysieren.

Typische Fragen könnten sein:

- Müssen im Zeitalter von Computeralgebrasystemen die Studierenden noch eine klassische „Höhere Mathematik I bis III" hören?

- Wie viel Kontext brauchen Wirtschaftswissenschaftler?

- Welche Sichtweise auf die Mathematik brauchen Anwender?

2. Mathematikdidaktikveranstaltungen sinnvoll gestalten

Beispiel für einen Impuls in diesem Themenbereich könnte sein: In einer Vorlesung mit über 300 Studierenden lässt sich „entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht" nur sehr schwer umsetzen. Wie also kann man Studierenden trotzdem einen Einblick – und Erfahrungsmöglichkeiten – in aktivierende Szenarien zum Mathematiklernen ermöglichen?

Die Tagung soll Ende Oktober 2012 im Großraum Stuttgart stattfinden. Es ist daran gedacht, weniger mit Vorträgen zu arbeiten, sondern mehr in Richtung eines „Open Space“, also einer „institutionalisierten Kaffeepause“. (Weitere Infos zur Methode Open Space z.B. online unter http://www.openspaceworld.org/german/index.html, Zugriff 24.4.2012)

Aktuelle Informationen zur Herbsttagung finden sich wie immer auf der madipedia-Seite des Arbeitskreises.

khdm Arbeitstagung "Mathematik im Übergang von Schule zur Hochschule und im ersten Studienjahr“

Diese Tagung wird vom 20.02. - 23.02.2013 an der Universität Paderborn durchgeführt zusammen mit der gemeinsamen Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule der DMV, GDM, MNU und dem MNU-Projekt „Basiskompetenzen Mathematik in der Sek. 2“.

Informationen dazu unter http://www.khdm.de/khdm-veranstaltungen/, Zugriff 24.4. 2012

Astrid BRINKMANN, Münster, Michael BÜRKER, Freiburg

Bericht des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“

Im Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der GDM, gegründet 2009, wird eine altbekannte und zentrale Forderung an das Lernen von Mathematik neu betrachtet: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voreinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

Die Sitzung des Arbeitskreises auf der GDM-Tagung 2012 wurde durch einen Vortrag von Michael Bürker eingeleitet. Anschließend wurde über bisherige und geplante Aktivitäten des Arbeitskreises berichtet, insbesondere über den Stand der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ sowie Tagungen des Arbeitskreises einschließlich gebotener Lehrerfortbildungen.

Wir geben nachfolgend Kurzfassungen zu den einzelnen Tagungsordnungspunkten:

Top 1. Michael Bürker: „Zur Behandlung des Gaußschen Minimumprinzips bei linearer Regression“

In vielen Bundesländern ist im Mathematikunterricht ein grafischer oder sogar CAS-Rechner zugelassen bzw. gefordert. Im Rahmen des Seminars „Medieneinsatz im Mathematikunterricht“, das ich für Studierende des gymnasialen Lehramts an der Uni Freiburg anbiete, diskutieren wir öfters über den Einsatz der im Mathematikunterricht zur Verfügung stehenden Software wie z. B. Tabellenkalkulation oder Geometrie-Software bzw. den Einsatz der erwähnten grafischen Taschenrechner. Dabei zeigt sich oft auch eine kritische Meinung zum Medieneinsatz, der sich in etwa folgendermaßen äußert: Einerseits kann man solche Rechner sehr gut zur Modellierung von realitätsnahen Problemen einsetzen, denn sie entlasten die Schüler von „Rechenknechtaufgaben“. Die Schüler können sich auf die wesentlichen Elemente der Modellierung stützen und die manchmal lästige und fehleranfällige Ausführung von Rechnungen den Kleinrechnern überlassen. Andererseits verführt das mathematische Potential dieser Rechner dazu, auch die kleinsten und einfachsten Rechnungen nicht mehr selbst „von Hand“ durchzuführen, sondern vom Rechner machen zu lassen, z. B. die Ableitung von x^2 oder das Ausmultiplizieren von $(a + b)^2$. Dementsprechend wird auch die lineare, quadratische, kubische oder exponentielle Regression vom Rechner als „Black-Box“ durchgeführt, ohne dass die Lernenden darauf hingeführt werden, Einblick in das Innere dieser Black-Box zu bekommen.

In diesem Vortrag wird gezeigt, wie man an Hand eines einfachen Beispiels von 4 Datenpunkten, denen ein linearer Zuammenhang zu Grunde liegt, zur Ausgleichsgeraden nach dem „Gauß'schen Prinzip der kleinsten Quadrate“ kommt. Im Mathematikunterricht kann man dies als Beispiel für eine Extremalaufgabe mit Hilfe der Differentialrechnung (Ableitung gleich 0 setzen usw.), aber auch ohne jede Differentialrechnung als Scheitelbestimmung einer quadratischen Funktion behandeln. Als Beispiel nehmen wir 4 Punkte $P_1(0|2)$, $P_2(2|3)$, $P_3(4|5)$ und $P_4(6|6)$. Die Ausgleichsgerade hat die Form $y = mx + c$. Die Summe der Residuenquadrate führt zum Term

$$(0m + c - 2)^2 + (2m + c - 3)^2 + (4m + c - 5)^2 + (6m + c - 6)^2 \qquad (1).$$

Das didaktische Problem ist nun noch, dass in diesem Term zwei Variable, nämlich m und c vorkommen. Da die Minimumbestimmung für Funktionen zweier Variablen in der Schule nicht zur Verfügung steht, müssen wir versuchen, eine der beiden Variablen durch eine weitere Bedingung zu eliminieren. Diese besteht darin, dass **der arithmetische Mittelpunkt der 4 Datenpunkte auf der Ausgleichsgeraden liegt**. Eine schülergerechte Begründung dafür werden wir untenstehend angeben. Der arithmetische Mittelpunkt M, dessen Koordinaten sich durch das arithmetische Mittel der x-Werte bzw. der y-Werte der 4 Punkte ergeben, hat bei den gegebenen 4 Datenpunkten die Koordinaten (3|4). Die Punktprobe mit M(3|4) ergibt die Gleichung $4 = 3m + c$ oder $c = 4 - 3m$. Setzt man dies in Gl. (1) ein, so ergibt sich als zu minimierender Term $2(3m - 2)^2 + 2(m - 1)^2$ bzw. ausmultipliziert und vereinfacht $20m^2 - 28m + 10$. Mit Hilfe der Differentialrechnung oder der Scheitelbestimmung einer quadratischen Funktion ergibt sich $m = 0,7$ und damit $c = 1,9$, d. h. die Ausgleichsgerade hat die Gleichung $y = 0,7x + 1,9$. Dies sind einfache Zahlenwerte, mit denen sich die Ausgleichsgerade gut zeichnen lässt.

Warum liegt der arithmetische Mittelpunkt einer Punktwolke auf der Ausgleichsgeraden?

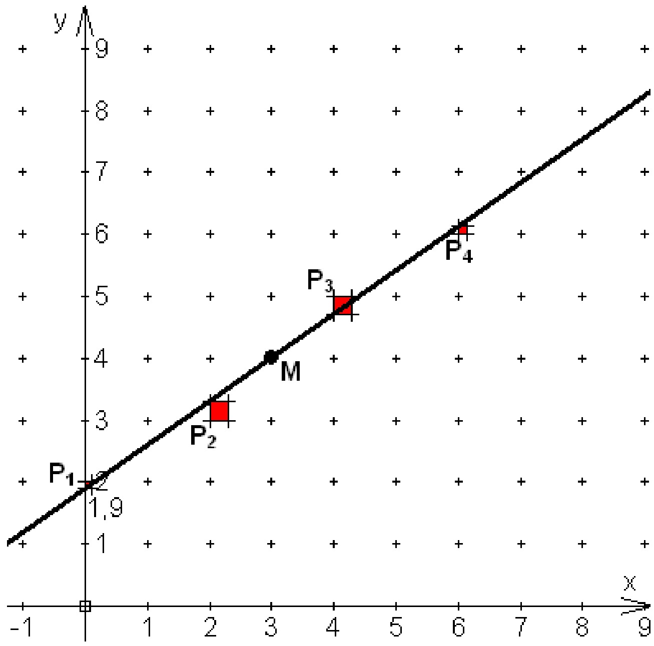
Wir betrachten dazu zunächst das „eindimensionale“ Problem:

Auf der y-Achse sind n Punkte gegeben. Bestimme den Punkt $P_0(0|y)$ auf der y-Achse, für dessen y-Wert die Summe der Abstandsquadrate zu den n Punkten minimal wird. Das bedeutet, dass der Term

$$(y - y_1)^2 + \dots + (y - y_n)^2$$

zu minimieren ist. Leitet man nach y ab und setzt die Ableitung gleich 0, so ergibt sich $2(ny - (y_1 + \dots + y_n)) = 0$ und damit $y = 1/n(y_1 + \dots + y_n)$.

Das bedeutet: Der y-Wert des optimalen Punkts auf der y-Achse ergibt sich als arithmetisches Mittel der y-Werte der n Punkte. Eine entsprechende Betrachtung für n Punkte auf der x-Achse liefert: Der Punkt, dessen x-Wert das arithmetische Mittel der x-Werte der n Punkte auf der x-Achse ist, ist der optimale Punkt. Zusammen genommen hat im obigen Beispiel der Punkt M(3|4) die optimale Lageeigenschaft hinsichtlich der Abstandsquadrate der 4 Punkte $P_1, \dots, P_4$ und liegt daher auf der Ausgleichsgeraden.



Top 2. Astrid Brinkmann:
Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“

Die Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (Verlag Aulis) ist eine Publikation des GDM-Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“. Herausgeberin der Reihe ist Astrid Brinkmann.

Nachdem Anfang 2011 der erste Band der Reihe erschienen ist, wurde nun auch der zweite Band pünktlich vor der Didacta fertiggestellt. Die Herausgeber des zweiten Bandes sind Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß und Hans-Stefan Siller.

Die Autor/innen der Schriftenreihe präsentieren Ideen und Vorschläge zum Mathematikunterricht, die im Arbeitskreis diskutiert, verbessert und angereichert worden sind. Die Schriftenreihe richtet sich an Mathematiklehrende an Schulen. Die einzelnen Artikel sind daher so aufbereitet, dass Lehrende sie möglichst unmittelbar und gewinnbringend in ihrem Unterricht einsetzen können. Für weitere Details, insbesondere zum zweiten Band, verweisen wir auf den Artikel von Astrid Brinkmann in diesen Beiträgen zum Mathematikunterricht 2012.

Der dritte Band der Schriftenreihe (Hrsg.: Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Michael Bürker) ist in Arbeit und soll Anfang 2013 vorliegen. Zudem wird noch ein Materialband mit Kopiervorlagen zu den Bänden 1–3 erstellt.

Wir möchten ausdrücklich auch Nicht-Mitglieder unseres Arbeitskreises ermuntern, uns passende Beiträge für die Schriftenreihe einzureichen! (An: astrid.brinkmann@math-edu.de)

Top 3. Astrid Brinkmann:
Kurzbericht über die 3. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung an der Humboldt-Universität zu Berlin, 13.–14. Mai 2011

Die dritte Tagung des Arbeitskreises wurde von Andreas Filler, Katharina Klembalski und Swetlana Nordheimer organisiert. Die Tagung hat ein reichhaltiges Programm geboten und war sehr gut besucht. Die Rückmeldungen von den teilnehmenden Lehrer/innen waren sehr erfreulich. Kurzfassungen der Tagungsbeiträge findet man unter: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html

Top 4. Astrid Brinkmann:
Einladung zur 3. Tagung des AKs mit Lehrer/innen-Fortbildung an der Universität Passau, 27.–28. April 2012

Die vierte Tagung des Arbeitskreises wird von Matthias Brandl organisiert. Das Tagungsprogramm steht bereits fest (siehe: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html); Flyer hierzu wurden auf der GDM-AK-Sitzung 2012 ausgeteilt.

Literatur

Brinkmann, A. (Reihenhrsg.). Schriftenreihe: Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. München: Aulis Verlag. http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Brinkmann, A., Maaß, J., Siller, H.-S. (Hrsg.) (2011): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 1. Aulis Verlag. ISBN 987-3-7614-2836-8.

Brandl, M., Brinkmann, A., Maaß, J., Siller, H.-S. (Hrsg.) (2012): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Band 2. Aulis Verlag. ISBN 987-3-7614-2859-7.

AK-Tagungen: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html

Nils BUCHHOLTZ, Gabriele KAISER, Hamburg

Zur Konzeptualisierung des mathematikdidaktischen Wissens – Beitrag im Rahmen des AK Vergleichsuntersuchungen im Mathematikunterricht

Der Bereich der Erfassung und die Messung von professionellem Wissen im Bereich der Mathematiklehrerbildung beschäftigt seit jeher auch die Mathematikdidaktik. Die Sitzung des Arbeitskreises Vergleichsuntersuchungen im Mathematikunterricht fokussierte diese Frage auf den Bereich des fachdidaktischen Wissens von Mathematiklehramtsstudierenden und die Konzeptualisierung dieser Wissensdomäne. Bisherige einschlägige Studien konzeptualisieren das fachdidaktische Wissen stark stoffdidaktisch, so dass es nicht verwunderlich scheint, dass in der Regel starke Zusammenhänge zum fachlichen Wissen diagnostiziert werden. Im Folgenden sollen diese Zusammenhänge auf der Basis der Erfahrungen der Studie TEDS-LT infrage gestellt werden, in der das mathematikdidaktische Wissen alternativ konzeptualisiert wurde.

1. Die Studie TEDS-LT

Ziel der von 2008-2011 vom BMBF geförderten Studie **T**eacher **E**ducation **D**evelopment **S**tudy – **L**earning to **T**each (TEDS-LT) ist es, die im Bereich des Fachs Mathematik inzwischen deutlich fortgeschrittene Forschung im Bereich der Kompetenzentwicklung im Lehramtsbereich auf die Fächer Deutsch und Englisch zu übertragen, sowie den Kompetenzerwerb der Studierenden unter den neuen Studienbedingungen Bachelor und Master zu untersuchen. Die in Form einer Längsschnittstudie mit zwei Messzeitpunkten und additiven Querschnitten angelegte Studie untersucht Studierende verschiedenster Lehramtsstudiengänge an acht deutschen Hochschulen. Die Zielgruppe des ersten Messzeitpunktes im WS 2009/2010 lag bei Studierenden der Fächer Deutsch, Englisch und Mathematik, die sich im 3. – 5. Semester in Lehramtsstudiengängen mit angestrebter Lehrbefähigung für die Sekundarstufe I befinden. Insgesamt nahmen 1568 Studierende an der Studie teil, davon 500 im Fach Mathematik. Am zweiten Messzeitpunkt im SS 2011 mit der Zielgruppe der Lehramtsstudierenden des 6. – 8. Semesters nahmen insgesamt 1856 Studierende teil, 641 davon im Fach Mathematik.

Die Studie fokussiert zentrale Aspekte des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern, wie sie von Shulman (1986) herausgearbeitet wurden und wie sie den theoretischen Rahmen der Konzeptualisierung des professionellen Wissens in TEDS-LT bilden:

- fachwissenschaftliches Wissen
- fachdidaktisches Wissen
- pädagogisches Wissen

Erste Ergebnisse der Studie zum ersten Messzeitpunkt zeigen einen hohen Zusammenhang zwischen dem Fachwissen und dem fachdidaktischen Wissen im Fach Mathematik, wohingegen diese Korrelationen in Deutsch und Englisch deutlich niedriger ausfallen. Die Anlage der Studie TEDS-LT sowie detaillierte Ergebnisse des ersten Messzeitpunkts finden sich in Blömeke et al. (2011).

2. Konzeptualisierung des mathematikdidaktischen Wissens

Die Befunde führten innerhalb der Studie zu der weiterführenden Frage, ob es sich bei diesen Unterschieden um systematische Unterschiede zwischen den Fächern handelt, oder ob die Unterschiede einer verschiedenen Konzeptualisierung der Wissensdomänen, speziell im Bereich der Fachdidaktik unterliegen. Betrachtet man, wie das Konstrukt des fachdidaktischen Wissens in einschlägigen vorangegangenen Studien wie TEDS-M 2008 (Blömeke, Kaiser & Lehmann 2010) oder COACTIV (Kunter et al. 2011) auf Ebene der eingesetzten Testitems operationalisiert wird, so fällt selbst unter Vorbehalt der unterschiedlichen Designs der Studien immer wieder der allgemeine starke Einfluss des mathematischen Wissens auf, der die Lösung der als mathematikdidaktischen Items eingesetzten Aufgaben im Einzelfall maßgeblich beeinflussen dürfte. Im Folgenden findet sich ein exemplarisches Itembeispiel aus der COACTIV-Studie:

> Beispielaufgabe: Gleichung
>
> Bitte stellen Sie sich folgende Situation vor: Eine Schülerin berechnet für die Gleichung $(x-3)(x-4) = 2$ die Lösungen $x = 5$ oder $x = 6$. Was hat diese Schülerin vermutlich gerechnet?
>
> (entnommen aus Krauss et al. 2011)

Die Grenzen der Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissens bei COACTIV (aber genauso bei TEDS-M 2008) sind daher bekannt: „Die Beispielitems machen deutlich, dass die Konzeptualisierung sehr fachnah umgesetzt wurde und somit ganz in der Tradition der deutschsprachigen „Stoffdidaktik“ steht […].“ (Krauss et al. 2011). Die Studien diagnostizieren (wie ebenfalls TEDS-LT) hohe Korrelationen zwischen Fachwissen und Fachdidaktik. Vor dem Hintergrund, dass sich TEDS-LT im ersten Messzeitpunkt noch an der Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissens in der Studie TEDS-M 2008 orientierte, sehen wir mehrere mögliche

Ursachen für den starken Zusammenhang zwischen Fachwissen und fachdidaktischem Wissen in TEDS-LT:

- die stärkere Kanonisierung der Fachinhalte im Bereich Mathematik im Gegensatz zu Deutsch und Englisch (dort auch weitere Ausdifferenzierung Linguistik – Literaturwissenschaft, Anglistik - Amerikanistik),
- die Konzeptualisierung der Konstrukte über die zentrale Stellung von Mathematikaufgaben,
- die „Rekonstruierbarkeit" von fachdidaktischem Wissen über die Bezugswissenschaft Mathematik
- sowie letztlich die Konstruktion der Testitems.

Für den zweiten Messzeitpunkt wurde daher das mathematikdidaktische Wissen noch stärker an den an vier allgemeinen Perspektiven der Bezugswissenschaften der Disziplin orientiert. Diese sind:

- eine mathematisch geprägte Perspektive;
- eine psychologisch geprägte Perspektive;
- eine erziehungswissenschaftlich geprägte Perspektive;
- eine allgemein-didaktisch geprägte Perspektive;

Dies führte zu einer zweifachen Konzeptualisierung in zwei unterschiedlichen Subdimensionen, die einerseits zwar erneut stoffdidaktische Fragestellungen („stoffdidaktisches Wissen") wie etwa die fachliche Beurteilung von Schülerlösungen behandelt, aber auch mathematikdidaktisches Wissen jenseits des mathematischen Fachwissens („erziehungswissenschaftlich-psychologisches Wissen") in den Blick nimmt, das sich mehr auf mathematikunterrichtliche Fragestellungen wie Leistungsmessung, Heterogenität und Curricula des Mathematikunterrichts konzentriert. Dabei wurde auf der Ebene der eingesetzten Testaufgaben berücksichtigt,

- spezifisch didaktische Inhalte, die auf den Mathematikunterricht konzentriert sind, und pädagogische Fragestellungen stärker einzubinden,
- fachdidaktische „Einkleidungen" mathematischer Aufgaben zu vermeiden
- sowie eine stärkere Differenzierung der Testitems anhand der Bezugswissenschaften für eine differenzielle Diagnostik des Wissens zu realisieren.

Im Vortrag wurden einige eingesetzte Testaufgaben präsentiert. Die Ergebnisse dieser Konzeptualisierung versprechen ein differenziertes Bild des fachdidaktischen Wissens von Lehramtsstudierenden und werden derzeit ausgewertet. Insbesondere erwarten wir von den Auswertungen detaillierte Ergebnisse bezüglich des Zusammenhangs zwischen Fachwissen und fachdidaktischem Wissen.

3. Diskussion im Arbeitskreis Vergleichsuntersuchungen im Mathematikunterricht

Im Arbeitskreis wurde der Zusammenhang zwischen Konzeptualisierung von fachdidaktischem Wissen und Ergebnissen in den Vergleichsuntersuchungen intensiv diskutiert und angeregt, eine Aktualisierung des Verständnisses von fachdidaktischem Wissen im Rahmen von Vergleichsuntersuchungen durch Experteneinschätzungen oder Untersuchungen im Rahmen von Delphi-Methoden durchzuführen. Da in wissenschaftlichen Studien in der Regel die untersuchten Konstrukte in Abhängigkeit von der Fragestellung konzeptualisiert werden, geriet neben dem in TEDS-LT fokussierten Wissenserwerb im Lehramtsstudium darüber hinaus auch die Untersuchung von fachdidaktischen Kompetenzen im Unterricht in den Blick. So ist fraglich, ob die bislang eingesetzten paper-and-pencil-Tests in der Lage sind, handlungsbezogene fachdidaktische Kompetenzen von Lehrkräften in der Praxis zu erfassen, da davon ausgegangen werden muss, dass die verschiedenen eher getrennt betrachteten Facetten des Lehrerprofessionswissens hier stärker ineinandergreifen. Zukünftige Konzeptualisierungen der fachdidaktischen Kompetenz von Lehrkräften sollten daher sowohl die Möglichkeit anderer Untersuchungsdesigns wie auch anderer Erhebungsmethoden nicht ausschließen.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann R. (Hrsg.) (2010): TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Bremerich-Vos, A., Haudeck, H., Kaiser, G. , Nold, G., Schwippert, K. & Willenberg, H. (Hrsg.) (2011): Kompetenzen von Lehramtsstudierenden in gering strukturierten Domänen. Erste Ergebnisse aus TEDS-LT. Münster: Waxmann.

Krauss, S., Blum, W. Brunner, M., Neubrand, M., Baumert, J., Kunter, M., Besser, M. & Elsner, J. (2011): Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In: Kunter et al. (Hrsg.), Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand M. (Hrsg.) (2011): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann.

Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. In: Educational Researcher, 15(2), S. 4–14.

Silke LADEL, Karlsruhe & Christof SCHREIBER, Frankfurt

AK PriMaMedien: Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe

Zum Treffen am Donnerstag waren die folgenden Tagesordnungspunkte vorgesehen:

- TOP 1: gemeinsame Veröffentlichung der Arbeitsgruppe
- TOP 2: Planung einer weiteren Veröffentlichung
- TOP 3: Resumée der moderierten Sektion in Weingarten
- TOP 4: Planung der Arbeitsgruppe für Tabarz (Nov. 2012)
- TOP 5: Sonstiges

Zu TOP 1: Veröffentlichung der Arbeitsgruppe

Einige der Aktivitäten von Mitgliedern der Arbeitsgruppe PriMaMedien sind in einem gemeinsamen Band im Rahmen einer neu begonnenen Reihe mit dem Titel „Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz“ im Verlag Franzbecker veröffentlicht. Die einzelnen Beiträge sind im Folgenden kurz beschrieben:

Im ersten Beitrag geht Nicole Wellensiek auf den eher ‚traditionellen‘ Computereinsatz ein und beschreibt, welche Möglichkeiten für einen verantwortungsvollen und reflektierten Umgang mit dem Computer im Arithmetikunterricht bestehen. Dabei steht das Üben im Vordergrund. Ergebnisse einer empirischen Studie stellen die Besonderheiten beim Lernen mit ausgewählten Übungen am Computer heraus und lassen didaktische Konsequenzen schlussfolgern.

Bernhard Rauh beschäftigt sich mit dem Einsatz digitaler Medien im Arithmetikunterricht. Im Zentrum seines Beitrags steht die Frage nach dem ‚Didaktischen Mehrwert‘. Er bezieht sich auf Erkenntnisse aus der Forschung zur kognitiven Entwicklung und rückt die Förderung des ‚Höheren Lernens‘ mit Hilfe von Lernsoftware in den Fokus. Seine Arbeit fand im Rahmen des Forschungsprojekts COLEM statt, in welchem auch der darauf folgende Artikel von Urff zu verorten ist.

Christian Urff geht darin auf die Möglichkeiten und didaktischen Potentiale virtueller Arbeitsmittel für das mathematische Lernen ein. Anhand eines Beispiels legt er dar, welche Handlungs- und Erfahrungsmöglichkeiten virtuelle Arbeitsmittel zur Unterstützung des Lernens bieten können. Er bezieht sich dabei insbesondere auf Kinder mit besonderem Förderbedarf und stellt Ergebnisse einer qualitativen Videostudie vor.

Im Beitrag von Silke Ladel steht die Verknüpfung unterschiedlicher Darstellungsformen im Vordergrund. Bei der Unterstützung mentaler Modelle hat die Gestaltung multipler externer Repräsentationen einen großen Einfluss. Eine Analyse und Untersuchung zum Umgang von Schülerinnen und Schülern mit ausgewählter Software mündet in die Formulierung von Gestaltungsprinzipien, welche in diesem Beitrag anhand des Prototypen DOPPELMOPPEL aufgezeigt werden.

Auf computergestützte Ansätze des kooperativen Lernens im Rahmen selbstorganisierter Lernaktivitäten geht der Beitrag von Alexandra Merkel ein. Im Rahmen der Lernumgebung wiLM@ sind unterschiedliche Lernszenarien entstanden, deren Entwicklung und Einsatz genauer beschrieben werden. Die Darstellung und Analyse von Beispielen im konkreten Unterrichtseinsatz zeigen zukünftige Möglichkeiten von wiLM@ auf.

Abschließend geht Christof Schreiber auf Möglichkeiten des Forschens mit Neuen Medien im Bereich des mathematischen Lernens in der Primarstufe ein. Im Spannungsfeld von Schriftlichkeit und Mündlichkeit wird das Forschungsprojekt ‚Mathe-Chat' von Grundschülern erstellten mathematischen Podcasts gegenüber gestellt. Dabei werden die besonderen Möglichkeiten für die Verwendung von digitalen Medien im Mathematikunterricht im Bereich schriftlicher und mündlicher Kommunikation und Darstellung aufgezeigt.

Zu TOP 2: Planung einer weiteren Veröffentlichung

Im Rahmen der Arbeitskreissitzung wurden dann erste Schritte für eine weitere gemeinsame Veröffentlichung angekündigt, die vor dem Treffen in Tabarz in 2013 erscheinen soll. Bereits jetzt sind alle aufgerufen, mögliche Beiträge zu planen. Silke Ladel und Christof Schreiber werden dann wieder auf potentielle Autoren zugehen. Gerne können sich aber Autoren auch mit einem Vorschlag melden. Die Veröffentlichung hat wieder als Zielgruppe Mathematikdidaktiker, Lehrende im Bereich der Lehrerbildung, Studierende, Referendare und Referendarinnen. Es wird für die Beiträge wieder ein ‚Peer-Review Verfahren' geben. Je Beitrag werden dies wie gewohnt zwei Reviews sein, eines von einem Mitautor, eines von einem der Herausgeber.

Zu TOP 3: Resümee der Sektion in Weingarten

Die Organisation der Vorträge als gemeinsame selbstmoderierte Sektion findet allgemein positive Rückmeldung. Die Abfolge der Vorträge in einem Raum, das gemeinsame Auftreten und die Moderation wurden positiv erfahren. Eine selbstmoderierte Sektion der Arbeitsgruppe ‚Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe' ist auch für die nächste GDM-Tagung gewünscht.

Zu TOP 4: Planung der Arbeitsgruppe für Tabarz (Nov. 2012)

Die Arbeitsgruppe wird auf der Tagung des Arbeitskreises Grundschule in Tabarz wieder vertreten sein. Aufgrund der zeitlichen Begrenzung wird es einen Einzelvortrag geben, so dass genügend Zeit für eine Diskussion und anschließend noch für Organisatorisches bleibt. Vorschläge für den Vortrag wurden bereits unterbreitet.

Zu TOP 5: Sonstiges

Die Teilnehmer des Treffens stellen sich kurz mit ihren aktuellen Projekten vor. So kann eine ertragreiche Vernetzung verschiedener Hochschulstandorte gelingen. Dabei sind trotz der wenigen Teilnehmer/innen Deutschland, die Schweiz und Österreich vertreten.

Silke Ladel weist nochmals auf den aktuellen Stand des Auftrittes in Madipedia hin. Alle Mitglieder und Interessenten der Arbeitsgruppe sind aufgerufen, den Auftritt weiterhin zu ergänzen, sich selbst zu verlinken. Gerne kann die Eintragung auch auf Anfrage von Silke Ladel übernommen werden, die die Seite pflegt.

Außerdem betreibt Silke Ladel eine Seite, auf der die Arbeitsgruppe und weitere interessante Informationen rund um die Arbeitsgruppe bereitgestellt werden: http://www.ladel-online.net/NeueMedienPrimar/Aktuelles.html Hinweise auf Ergänzungen auch für dieses Angebot sind sehr willkommen.

Literatur:

Ladel, Silke & Schreiber, Christof (2012) (Hrsg.) Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe. Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz. Band 1. Herausgegeben von Ulrich Kortenkamp. Franzbecker Verlag: Hildesheim.

Grit KURTZMANN, Hans-Dieter SILL, Rostock

AK Stochastik: Vorschläge zu Zielen und Inhalten stochastischer Bildung in der Primarstufe sowie in der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften

1. Zu stochastischen Inhalten in den Bildungsstandards und Plänen der Bundesländer

Als eine Grundlage für die Entwicklung von Zielen einer Aus- bzw. Fortbildung von Lehrkräften im Bereich Stochastik werden die Bildungsstandards im Fach Mathematik der Primarstufe und die einzelnen Pläne der 16 Bundesländer betrachtet. Die Bildungsstandards enthalten in dem Bereich der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen einen eigenen Abschnitt zum Thema „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“. Im Bereich der Statistik sollen die Schüler aus einfachen Beobachtungen und Untersuchungen Daten sammeln, strukturieren und darstellen und aus Darstellungen Informationen entnehmen können. Im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es um die Kenntnis von Grundbegriffen wie sicher, unmöglich, wahrscheinlich und das Einschätzen von Gewinnchancen.

In den 16 Bundesländern gelten 13 verschiedene Pläne für das Fach Mathematik der Primarstufe. In der folgenden Tabelle sind die Pläne mit dem Jahr der Veröffentlichung dargestellt.

Bundesländer	*Jahr*
Schleswig Holstein	1997
Bayern	2000
Rheinland-Pfalz	2002
Baden-Württemberg	2004
Berlin, Brandenburg, Bremen, Mecklenburg-Vorpommern	2004
Niedersachsen	2006
Sachsen-Anhalt	2007
Nordrhein-Westfalen	2008
Saarland	2009
Sachsen	2004/2009
Thüringen	2010
Hamburg	2011
Hessen	2011

Im Folgenden soll auf Besonderheiten einzelner Pläne eingegangen werden. Aus dem Jahr der Veröffentlichung ist zu erkennen, dass die Bundesländer Schleswig-Holstein, Bayern und Rheinland-Pfalz die Inhalte der

Bildungsstandards noch nicht in die Pläne einarbeiten konnten. In Schleswig-Holstein und Bayern finden sich einige Inhalte für den Teilbereich Statistik und keine bzw. keine verbindliche Inhalte für den Bereich Wahrscheinlichkeitsrechnung. In Baden-Württemberg ist das Teilgebiet Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht extra ausgewiesen, ein Hinweis auf Themen bzw. fächerübergreifenden Unterricht und Umsetzung der Bildungsstandards finden sich aber in dem Plan wieder. In Thüringen sind die Inhalte aus den Standards im Bereich Arithmetik eingeordnet. In den Plänen von Nordrhein-Westfalen und Sachsen sind explizit Klassenstufen angegeben, ab denen stochastische Bildung einer Primarstufe beginnen soll (z. B. Wahrscheinlichkeitsrechnung ab Klasse 3). Sehr ausführlich sind die Ziele der Stochastik in den Plänen von Niedersachsen Saarland und Sachsen-Anhalt dargestellt. Hier gibt es Überprüfungsmöglichkeiten für Lehrer durch vorgegebene Fragestellungen oder zusätzliches Material mit niveaubestimmenden Aufgaben. Auch in den Plänen von 2011 aus Hamburg und Hessen findet sich die Stochastik ausführlich wieder.

Im Ergebnis der Sichtung der Pläne der einzelnen Bundesländer kann man feststellen, dass das Teilgebiet Statistik in allen Lehrplänen enthalten ist und dass Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung z. T. gar nicht oder erst ab Klasse 3 oder 4 vorhanden sind.

2. Konzept einer Lehrerfortbildung zur Entwicklung der fachlichen Kompetenz der Lehrkräfte

Durch die Bildungshoheit der Länder existiert in der Grundschullehrerausbildung eine sehr große Heterogenität mit deutschlandweit 88 verschiedenen Ausbildungsvarianten. Dabei ist die stochastische Ausbildung der zukünftigen Lehrkräfte mit einem oft sehr geringen Anteil vertreten. Durch fachliche Unsicherheiten entsteht bei Lehrkräften in der Schule häufig eine ablehnende Haltung gegenüber dem Stoffgebiet Stochastik. Mit diesem Hintergrund wollen wir für Mecklenburg-Vorpommern eine Fortbildung für Grundschullehrkräfte entwickeln. Mit Biehler 2008 sehen wir auch „eine vielversprechende Perspektive besteht darin, Fortbildungskurse mit Learning“-Komponenten anzureichern, … “ (S. 5). Von einem erfolgreich evaluierten Fortbildungskurs übernehmen wir dabei u. a. die folgenden Rahmenbedingungen.

- Der Kurs wird mit der Internetplattform moodle unterstützt.
- Es finden vier Arbeitstreffen über das Schuljahr verteilt statt, in denen fachliche Inhalte verbunden mit didaktischen Umsetzungsmöglichkeiten vermittelt werden.

- Zwischen den Arbeitstreffen gibt es Arbeitsphasen, in denen die Lehrkräfte ihr fachliches Wissen durch Übungsaufgaben vertiefen, Aufgaben mit Schüler im Unterricht ausprobieren und Ergebnisse im Forum diskutieren sollen.
- Es gibt ein Begleitmaterial mit wesentlichen fachlichen Grundlagen, Übungsaufgaben, Aufgabenvorschlägen, Umsetzungsmöglichkeiten und (späteren) Erfahrungsberichten für den Unterricht.

3. Prinzipien einer stochastischen Bildung in der Primarstufe

Bei der Entwicklung des Stochastikunterrichts in der Primarstufe kann man zahlreiche Analogien zur Entwicklung des Geometrieunterrichts in dieser Schulstufe erkennen, wie etwa die späte Integration propädeutischer Elemente, ein langes Ringen um Konzepte und die häufige Vernachlässigung dieser Bildungsbestandteile in der Schule sowie in der Lehrerbildung. Seit den 60iger Jahren gibt Forderungen von Didaktikern nach Elementen der Stochastik in der Grundschule (Engel, Heitele, Jäger u. Schupp, Winter, Varga, Kütting, Bohrisch u. Mirwald). Als Beispiel seien Schupp und Jäger (1983) zitiert: „Ähnlich der Entwicklung des Zahlbegriffs wird das Verständnis für stochastische Phänomene, verbunden mit einem Konzept für Wahrscheinlichkeit, in einem langfristigen, phasenweise verlaufenden Prozess ausgebildet. Die Entwicklung stochastischen Denkens fällt weitgehend in die Zeitspanne, in welcher der Schüler die Primarstufe und Sekundarstufe I besucht.“ (S.15). Wir sehen die aktuellen Bildungsstandards als einen Zwischenstand auf dem Weg zu einem elaborierten Konzept an.

Nach unserer Auffassung sollte der Stochastikunterricht in der Primarstufe durch folgende Prinzipien gekennzeichnet sein.

- Der Unterricht bewegt sich im Wesentlichen auf der Ebene der Phänomene, also der realen Vorgänge, die zu den Daten bzw. den Ergebnissen führen.
- Es erfolgen keine expliziten Formalisierungen durch Begriffe bzw. Modelle wie Zufallsexperiment, Ereignis, Urne u. a.
- Es werden inhaltliche Vorstellungen und Prototypen zu allen wesentlichen Inhalten des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe I vermittelt.
- Dem Unterricht liegt ein spiralförmiges Curriculum von Klasse 1 bis 4 zugrunde, das mit dem übrigen Unterricht eng verzahnt ist.

- Zu den spezifischen Zielen des Stochastikunterrichts gehören nicht Kompetenzen im Bestimmen von Anzahlen, diese werden in der Leitidee Zahlen und Operationen ausgebildet.
- Das Wissen und Können im Anfertigen und Lesen grafischer Darstellungen wird vor allem im Rahmen des Sachrechnens und im Sachkundeunterricht gefestigt.
- Statistische Untersuchungen werden vor allem zu Vorgängen durchgeführt, deren Verlauf und Faktoren für die Lernenden fassbar sind.
- Bei Betrachtungen zur Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen werden neben Vorgängen aus dem Bereich der Glücksspiele vor allem Vorgänge in der Natur und dem Alltag untersucht.

4. Zum Entwurf von Standards für die Lehrerausbildung

In Präzisierung und Weiterführung der Empfehlungen der Gemeinsamen Kommission Lehrerbildung von GDM, DMV und MNU wurden Standards für die Stochastikausbildung von Grundschullehrkräften vorgestellt und auf der Arbeitskreissitzung diskutiert. Diesen Standards liegen folgende Gedanken zu Grunde.

- Als zeitlicher Rahmen wird von 4 LP, also 120 h ausgegangen.
- Der stoffliche Inhalt bezieht sich im Wesentlichen auf die Empfehlungen des AK von 2003 für das Abschlussniveau in der Sekundarstufe I.
- Es werden Mindeststandards und Exemplarisches ausgewiesen.
- Statistische und stochastische Phänomene sollen mit einer gemeinsamen Methode strukturiert werden, die aus aufeinander aufbauenden Betrachtungen zu einem einzelnen Vorgang, zu Verteilungen und zu stochastischen Zusammenhängen besteht (Sill, 1992).

Der Entwurf der Standards wird nach einer Überarbeitung im Ergebnis der Diskussionen allen Mitgliedern des Arbeitskreises zu weiteren Stellungnahmen übersandt.

Literatur

Biehler, R. (2008): Stochastik/Statistik in der Schule. Status Quo und Quo Vadis? In: *DAGStat-Bulletin* 2008, Dezember (2), S. 3–6.

Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. Arbeitskreis Stochastik der GDM. In: Stochastik in der Schule 23 (2003)3 S. 21–26

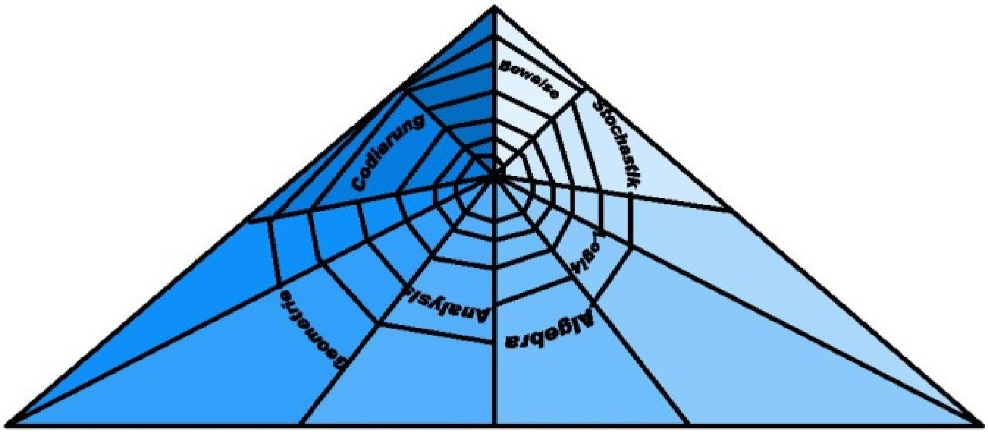
Schupp, H.; Jäger, J. (1983): Curriculum "Stochastik in der Hauptschule". Paderborn: Ferdinand Schöningh

Sill, H.-D. (1992): Zum Verhältnis von stochastischen und statistischen Betrachtungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 443 – 446

Teil 6: Sektionsbeschreibungen

Astrid BRINKMANN, Münster, Michael BÜRKER, Freiburg

Sektion: „Vernetzungen im Mathematikunterricht“



Die Sektion „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ greift das Anliegen des gleichnamigen GDM-Arbeitskreises auf: Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten sollen nicht isoliert voreinander, sinnlos und beziehungslos nebeneinander gelehrt und gelernt werden, sondern in ihrer Wechselbeziehung zueinander, also vernetzt.

Ähnlich wie in der Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (herausgegeben von Astrid Brinkmann, Verlag Aulis) werden in den Beiträgen der Sektion Beziehungen sowohl zwischen Teilgebieten innerhalb der Schulmathematik als auch übergreifend zu anderen Schulfächern aufgezeigt, Methoden für einen vernetzenden Mathematikunterricht vorgestellt und Beiträge für eine Förderung des vernetzten Denkens geliefert.

Ein Beitrag befasst sich zudem mit interkulturellen Vernetzungen.

Die Vorträge im Rahmen der Sektion sind:

- *Brinkmann, Astrid*
  „Mathe vernetzt“ – Band 2
- *Humenberger, Hans*
  Problemlösen und Vernetzen bei „Zerlegungen in summengleiche und gleichmächtige Teilmengen“
- *Bürker, Michael*
  Zur Modellierung von Spar- und Tilgungsvorgängen

- *Götz, Stefan*
  Geraden, Kreise und Dreiecke: Vorschläge zur Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft
- *Borys, Thomas*
  Mathematische Interkulturalität erleben

Der erste Vortrag von *Astrid Brinkmann* stellt die Zielsetzung und das Konzept der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ vor und gibt einen Überblick über die Artikel im kürzlich erschienenen zweiten Band der Schriftenreihe.

Hans Humenberger befasst sich mit einem innermathematischen Problem, das vernetzungsreich gelöst wird, und umreißt damit seinen zusammen mit Berthold Schuppar verfassten Artikel aus „Mathe vernetzt“, Band 2.

Michael Bürker zeigt in seinem Vortrag einen anschaulichen Zugang zu expliziten Darstellungen von Spar- und Tilgungsvorgängen. Als Neuerung präsentiert er das so genannte Drei-Säulen-Modell, das es erlaubt, ausgehend von der Kapitalformel algebraische und visuell-geometrische Aspekte zu vernetzen. Dabei stellt die 1. Säule das Anfangskapital, die 2. Säule den Jahreszins und die 3. Säule den Zinseszins dar. Ein ausführlicher Artikel zu diesem Vortrag wird im dritten Band der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ erscheinen.

Stefan Götz zeigt in seinem Vortrag, wie durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems elementargeometrische Aussagen neu verstanden und mit Methoden der analytischen Geometrie untersucht werden können. Resultierende algebraische Beweise werden mit elementargeometrischen verglichen.

Die Sektion schließt mit einem Vortrag von *Thomas Borys* zu interkulturellen Aspekten des Mathematikunterrichts, die Gegenstand eines Seminars in der Lehrerausbildung sind und zum Reflektieren und Erweitern eigener Vorstellungen anregen. Insbesondere werden japanische und deutsche Vorgehensweisen im Geometrieunterricht der Sek. I verglichen und über das Potenzial nachhaltigen Lernens diskutiert. Die Kommunikation zwischen den deutschen und den japanischen Studierenden geschieht über Videokonferenzen und -präsentationen. Bei der GDM-Tagung waren auch Professoren der japanischen Studierendengruppen anwesend.

Anne FELLMANN, Frankfurt

Grundgedanken der Sektion „Professionalisierung“

Kompetenzorientierung und Lehrerprofessionalität

Die Kultusministerkonferenz hat 2004 nach den internationalen Studien TIMSS, PISA und IGLU Standards zur Lehrerausbildung erarbeitet und vorgegeben. In den allgemeinen Grundlagen verweisen die Standards darauf, welche Anforderungen an das Berufsbild der Lehrkraft gestellt werden.

In den Professionsstandards der KMK werden Schlüsselkompetenzen auf der Grundlage der Anforderungen beruflichen Handelns im Rahmen der Lehrertätigkeit in fünf Bereichen beschrieben: Unterrichten, Erziehen, Beraten, Beurteilen und Innovieren (vgl. Helmke 2008, S. 46). Diese ergänzt Weinert um persönliche Eigenschaften wie Sensibilität, Frustrations- und Misserfolgstoleranz (vgl. Weinert 1998, S. 17). Auf dieser Perspektive sind Gelingensbedingungen eines kompetenzorientierten Unterrichts anzustellen. Dazu hat Helmke ein Rahmenmodell (vgl. Helmke 2009, S. 36) entwickelt, anhand dessen er die Verflechtung von Merkmalen der Unterrichtsqualität (Kompetenzorientierung) und der Lehrerprofessionalität (Professionswissen in den Bereichen Diagnostik und Fachdidaktik) verdeutlicht.

In ihm stellen die Aspekte Lehrperson, Unterricht, Lernaktivitäten, fortlaufende Diagnostik und Bildungsziele die wesentlichen Säulen dar, dessen multiplen Bedingungsgefüge u.a. der Kompetenzerwerb der Lehrkräfte unterliegt (vgl. Helmke 2009, S. 71). Ein Dreh- und Angelpunkt stellt nach Helmke dabei die Diagnostik des Lernprozesses und des eigenen Unterrichts dar. In der DESI Videostudie (vgl. Helmke 2007 u. 2008) und in der Videostudie des Grundschulunterrichts „VERA – Gute Unterrichtspraxis“ (vgl. ebenda) wurde u.a. festgestellt, dass Lehrkräfte ihren Unterricht oft anders einschätzen als dieser bei Schülerinnen und Schülern ankommt. Des Weiteren haben Lehrkräfte oft unzutreffende Vorstellungen von ihrem Unterricht. Diese Ergebnisse zeigen, dass eine Diagnostik des eigenen Unterrichts unbedingt einen fremden Blick erfordert, wie z.B. durch videobasierte Diskurse über Unterricht, kollegiale Hospitationen, teilnehmende Beobachtungen oder andere Szenarien. Hier bieten sich z.B. Übergänge zur interpretativen Unterrichtsforschung an.

Insofern ist die Allgemeine Didaktik

> „grundlegend für die Professionalität und Berufsidentität der Lehrer und Lehrerinnen. Als Unterrichtsexperten brauchen sie didaktisches Grundwissen und entsprechende Reflexions- und vor allem Handlungskompetenz. Sie sollen Unterricht professionell vorbereiten und

planen, durchführen und gestalten, analysieren und auswerten können" (Huwendiek/Bovet 2000, S.11).

Die zu dieser Sektion gehörenden Vorträge wollen einen Beitrag leisten, um die multiplen Bedingungen der Merkmale von Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität zu beleuchten.

Literatur

Bovet, G./Huwendiek, V. (200).(Hrsg.): Leitfaden und Schulpraxis. Pädagogik und Psychologie für den Lehrberuf. Berlin: Cornelsen Verlag

Helmke, A.: Mit Kompetenzen und Bildungsstandards unterrichten. In: Klinger, U. (2009):. Mit Kompetenz Unterricht entwickeln. Fortbildungskonzepte und -materialien. Speyer: Bildungsverlag EINS

Helmke u.a.: Standards – Motor oder Bremse der Unterrichtsentwicklung. In: Kompetenzerwerb in der Lehrerbildung. SEMINAR – Lehrerbildung und Schule 1/2008

Helmke, A. (u.a.) (2008): Zeitnutzung im Grundschulunterricht: Ergebnisse der Unterrichtsstudie „VERA – Gute Unterrichtspraxis". Zeitschrift für Grundschulforschung

Helmke, A. (u.a.) (2007): Die DESI-Videostudie. Unterrichtstranskripte für die Lehrerausbildung nutzen

Weinert, F. E. (1998): Guter Unterricht ist ein Unterricht, in dem mehr gelernt wird. In: Freund, J. (Hrsg.): Guter Unterricht – Was ist das? Aspekte von Unterrichtsqualität. Wien: ÖBV Pädagogischer Verlag

Torsten FRITZLAR, Halle, Friedhelm KÄPNICK, Münster

Zur Moderierten Sektion „Mathematische Begabungen“

Fragen der Identifikation und fachspezifischen Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler besitzen eine hohe unterrichtspraktische Relevanz. Aber auch aus wissenschaftlicher Sicht handelt es sich um ein hochinteressantes Gebiet.
Nach einer mehr als neunjährigen Untersuchung zur Diagnose mathematischer Begabungen im Grundschulalter fasste Nolte kürzlich zusammen, dass anhand von Intelligenztests nicht differenziert genug festgestellt werden kann, ob bei Grundschülern mit sehr guten Schulleistungen im Fach Mathematik auch sehr hohe Leistungen in anspruchsvollen mathematischen Problemlöseprozessen zu erwarten sind (Nolte, 2011). Damit wurden noch einmal langjährige Erfahrungen einschlägig engagierter Fachdidaktiker und bereits vorliegende vielfältige Forschungsergebnisse beispielsweise von Krutetskii (1976) oder Käpnick (1998) bestätigt, dass es mathematikspezifische (oder allgemeine kognitive, im Verlauf der vorausgegangenen Entwicklung jedoch mathematikspezifisch ausgerichtete) Fähigkeiten gibt, die gewisse Schülerinnen und Schüler auch noch in mathematisch besonders reichhaltigen Situationen zu deren erfolgreicher Bewältigung nutzen können.
Allgemeine intellektuelle Begabungen und mathematische Begabungen sollten also voneinander unterschieden werden. Seit einigen Jahren werden letztere gerade für den Grundschulbereich durch mehrere facettenreiche mathematikdidaktische Forschungsprojekte intensiv untersucht. Ein wichtiges Ziel dieser Sektion ist es daher, einen Einblick in einige ausgewählte aktuelle Untersuchungen zu gewähren.

In aktuellen Modellen zur Begabungsforschung wird davon ausgegangen, dass die Entwicklung einer Begabung (spätestens) mit der Geburt einsetzt und diese schon frühzeitig bereichsspezifisch geprägt sein kann. Wie sich eine solche Entwicklung im Vorschulalter im Spannungsfeld zwischen intra- und interpersonalen Katalysatoren zeigt, wird im Vortrag von *Kathrin Talhoff* anhand einer Fallstudie zu einem mathematisch potenziell begabten Kind vorgestellt.

Mathematisch begabte Grundschulkinder entwickeln, wie mehr oder weniger alle Kinder, unbekümmert und kreativ intuitive Theoriekonstrukte zu Zahlen u.Ä. Solche Konstruktionen erscheinen Erwachsenen oft fehlerhaft, den Kindern aber sinnvoll, korrekt und wertvoll. Im Vortrag von *Friedhelm Käpnick* werden hierfür authentische Beispiele und theoretische Erklärungsansätze vorgestellt.

Von *Daniela Aßmus* und *Frank Förster* werden Ergebnisse einer kleinen Videostudie zur Analogieerkennung und zum Transfer mathematischer Strukturen vorgestellt, die mit potentiell mathematisch begabten Dritt- und Viertklässlern durchgeführt wurde. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Analyse möglicher Zusammenhänge zwischen Vorgehensweisen bei der Bearbeitung der Quellaufgabe und der Analogieerkennung in der Zielaufgabe.

In einem Werkstattbericht von *Torsten Fritzlar* und *Nadja Karpinski-Siebold* werden Überlegungen darüber zur Diskussion gestellt, was unter algebraischem Denken von Grundschulkindern verstanden werden kann und wie sich dieses erkunden lässt. Darüber hinaus präsentieren sie ausgewählte Ergebnisse einer ersten Fallstudie, mit der durch eine spezifische Konstruktion der Untersuchungsgruppe gleichzeitig versucht wurde, mögliche Zusammenhänge zwischen „algebraischem Denken" und „mathematischer Begabung" zu erkunden.

Im Vortrag von *Ralf Benölken* werden theoretische Erkenntnisse zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten mathematischer Begabungsentwicklungen und sich daraus ergebende praktische Implikationen vorgestellt. Der Fokus liegt hauptsächlich auf mathematisch begabten Mädchen, die vergleichsweise selten an Projekten und Wettbewerben für mathematisch begabte Kinder teilnehmen, sodass hier Verbesserungspotenziale hinsichtlich Diagnostik und Förderung zu vermuten sind.

Ein wichtiges Ziel der Lehramtsausbildung ist es, die zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer so zu qualifizieren, dass sie besondere Begabungen der Schüler früh erkennen können und befähigt werden, Talente zum Beispiel durch besondere Formen des Unterrichts zu fördern. Im Vortrag von *Elena Klimova* wird MatBoj, ein spezifischer mathematischer Wettkampf, vorgestellt, der einer weitere effektive Möglichkeit zur Förderung des Interesses an der Mathematik bei Schülern der Klassenstufen 7 bis 13 bietet.

Literatur

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter.* Frankfurt am Main: Lang Verlag.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Nolte, M. (2011). „Ein hoher IQ garantiert eine hohe mathematische Begabung! Stimmt das?" – Ergebnisse aus neun Jahren Talentsuche im PriMa-Projekt Hamburg. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 611–614). Münster: WTM.

Thomas GAWLICK, Hannover

Hannoveraner Studien zum Problemlösen

Diese Sektion berichtet über stoffdidaktische und empirische Analysen zur Heuristik (Problemlösekunst). Bindeglied sind die Leitfragen

– Was macht eine Aufgabe schwierig?
– Welche Heurismen helfen bei der Lösung?

Sie sind auch Leitfragen für das Projekt *HeuRekAP* (***Heu**ristische **Rek**onstruktion von **A**ufgaben zum **P**roblemlösen*). ***Heuristische Rekonstruktion*** (HR) „gibt dem einen Begriff, was wir – Polya seit Referendarszeiten im Hinterkopf – bei etlichen unserer Aufgaben intendierten" (Elschenbroich): ein systematisches Vorgehen, um die „heuristic literacy" der SuS zu fördern. Gawlick (2012) entwarf dafür angelehnt an Polyas bekanntes Problemlöseschema dieses ***Rekonstruktionsschema*** und erläuterte es an Beispielen:

1. Analysieren Sie das zu rekonstruierende Problem und seine Lösung. Beachten Sie, dass Aufgaben aus (Schul)-Büchern oft recht geschlossen sind. Wie explizit müssen Sie Gegebenes und Gesuchtes vorgeben? Was können SuS selbst erschließen?
2. Stellen Sie sich zur unterrichtlichen Aufbereitung die folgenden *Schlüsselfragen*:
   a. Welche (Teil-)Ziele sollen die SuS erreichen?
   b. Welche Heurismen können an verschiedenen Stellen des Problemlöseprozesses hilfreich sein?
   c. Welche Heurismen können die SuS eigenständig finden, für welche benötigen sie Hinweise? Sollen die Hinweise schon in der Aufgabenstellung enthalten sein oder situativ ergänzt werden?
   d. Welche Vorkenntnisse benötigen die SuS zur Lösung des Problems? Was davon kann als bekannt vorausgesetzt werden, was muss mitgeliefert werden?
3. Nutzen Sie die Antworten auf diese Schlüsselfragen, um das ursprüngliche Problem zu überarbeiten und heuristisch anzureichern.
4. Reflektieren Sie die Bearbeitung des modifizierten Problems durch die SuS und ziehen Sie aus Ihren Beobachtungen Schlüsse für weitere Verbesserungen.

Das Schema spricht drei Aspekte von Schoenfelds Problemlösemodell an:

– Fachliche Ziele und Ressourcen
– Heurismen (heuristische Hilfsmittel Strategien und Prinzipien)
– Steuerung durch die SuS oder durch die Lehrperson

Hinzu tritt die ***Heuristische Instrumentation*** *(HI)*: Die passgenaue Auswahl von lösungsförderlichen Medien und Sozialformen (vgl. ebd.).

Im Projekt HeuRekAP werden (Schulbuch-)Aufgaben für ein Heuristik-Training rekonstruiert und instrumentiert: zwei achte Klassen eines Hannoveraner Gymnasiums bearbeiten sie mit DGS-Arbeitsblättern (nach Elschenbroich/Seebach) und einem Argumentationsschema aus „Neue Wege“ – die eine mit explizitem, die andere mit implizitem Heurismentraining.

Brockmann-Behnsen berichtet erste Trainingserfolge: Nach 3 Monaten verzeichneten die Versuchs- gegenüber den Parallelklassen eine deutlich erhöhte Fähigkeit, Argumente zu deduktiven Ketten zu verknüpfen.

Um später die Überlegenheit des expliziten über das implizite Heurismentraining nachweisen zu können, braucht es ein herausforderndes Problem – etwa den Satz von Pappus, der den Pythagoräischen Lehrsatz auf Parallelogramme über den Seiten eines beliebigen Dreiecks verallgemeinert.

Gawlick zeigt eine anspruchsvolle HR: Der Satz wird so rekonstruiert, dass die Behauptung nicht mehr vorgegeben werden muss, sondern selbst gefunden werden kann. Hierbei spielt die HI eine tragende Rolle: im Zugmodus wird Pythagoras‘ Satz als Spezialfall in seiner Besonderheit erkennbar. Durch Analogisieren und Umstrukturieren des Scherungsbeweises erhalten die SuS das „Baumaterial“ zur Verallgemeinerung der Flächenaussage.

Elschenbroich bietet eine alternative Rekonstruktion, die auf den Spuren von Botsch und Henrici/Treutlein den Pappusschen Flächensatz für SuS durch einfache Verschiebung eines Dreiecks entdeckbar macht, da bei der Verschiebung die Dreiecksseiten Parallelogramme überstreichen, die die bekannte Summenformel erfüllen! Die alten Ideen werden mit dem modernen Werkzeug DGS dynamisiert und schülergemäß aufbereitet (HI) und es wird ein Weg zum Satz des Pythagoras als Spezialfall aufgezeigt.

Rott und Lange erforschen videographierte Problemlöseprozesse von Fünftklässlerpaaren beim Bearbeiten mathematischer Problemaufgaben in der MALU-Förderung. Solche empirische Studien lassen sich der vierten Phase der HR zuordnen, in der die Wirksamkeit der HR anhand der Interaktion von Problemlösern mit rekonstruierten Aufgaben untersucht wird.

Rott zeigt, wie heuristische Elemente in den Problemlöseprozessen identifiziert und kodiert werden und geht der Frage nach, inwiefern der Heurismeneinsatz mit dem Problemlöseerfolg zusammenhängt.

Lange identifiziert mittels QIA in den Prozessen verschiedene Typen von Kooperationshandlungen und untersucht, inwiefern ein Paarsetting i.A. und bestimmte Kooperationsarten i.B. dem Bearbeitungserfolg förderlich sind.

Literatur

Gawlick, Th (2012): „Click, drag, think!“ Posing and Exploring Conjectures with Dynamic Geometry Software, in Habre, S. (ed.): *Dynamical mathematical software and visualization in the learning of mathematics*. Hershey: IGI Global 2012. Vorfassung, weitere Literatur und Anhänge: www.idmp.uni-hannover.de/downloads.html

Andreas EICHLER, Freiburg, Boris GIRNAT, Aarau

Sektion: Individuelle Curricula

„Es ist das subjektive, schulbezogene Wissen des Lehrers – ob ihm mehr oder weniger klar –, das weitgehend die Realität in den Klassenzimmer bestimmt“ (Hofer, 1981, S. 5). Diese Aussage kann man als die Leitidee ansehen, die der Erforschung subjektiver Curricula zugrunde liegt.

Das subjektive, schulbezogene Wissen umfasst *alle* Ansichten, Einstellungen und Haltungen, die Lehrpersonen über ihre berufliche Tätigkeit haben können. Für zielführende Forschungsprojekte erscheint eine solche Gesamtheit zu weit gefasst. Individuelle Curricula richten sich daher nur auf den Teil des schulbezogenen Wissens, der vom *Inhalt*, der *Struktur* und der *Funktion* her auf *individueller* Ebene dasselbe leistet, was *offizielle* Curricula für die institutionelle Steuerung des Unterrichts erfüllen: Sie rechtfertigen die Auswahl von Inhalten und Methoden durch Lernziele und legen die Grundlage für die Planung und Durchführung des Unterrichts fest (vgl. Sill, 2000).

Zur Erhebung, Auswertung und Darstellung individueller Curricula wird eine qualitative Methode aus der Sozialpsychologie eingesetzt, nämlich das Forschungsprogramm Subjektive Theorien, das – allgemein gesehen – dazu entwickelt wurde, komplexe kognitive Strukturen mit einer zumindest impliziten Argumentationsstruktur zu erheben (vgl. Groeben u. a., 1988). Bei individuellen Curricula ist insbesondere die Ziel-Mittel-Argumentation von Interesse, die eine Verbindung von Inhalten und Methoden zu den Lernzielen des Unterrichts bildet (vgl. Eichler, 2005).

Mit der Erhebung individueller Curricula als Subjektive Theorien ist nur der erste Schritt zu einer curricularen Gesamtanalyse des Lehrerhandelns getätigt, insofern nur die *Planung* oder das *intendierte* Curriculum einer Lehrperson betrachtet worden ist. Ob diese Planung im Unterricht tatsächlich durchgeführt wird und ob das intendierte Curriculum aufseiten der Schülerinnen und Schüler tatsächlich zu den Lernergebnissen führt, die im intendierten Curriculum beabsichtigt worden sind, werden dabei noch nicht betrachtet. Diese Fragen können in weiteren Erhebungsschritten betrachtet werden, die durch Unterrichtsbeobachtungen das *tatsächliche* Curriculum analysieren bzw. durch Analyse von Schülerlösungen oder durch Befragung von Schülern, das *realisierte* Curriculum, also die Lernergebnisse, mit in die Untersuchung einbeziehen. Dieses mehrschrittige Verfahren beruht auf einer Theorie der Curriculumstransformation nach Stein u. a. (2007). Welche Teile dieser Analyse durchgeführt werden, hängt vom jeweiligen Forschungsinteresse ab. Für einen Vergleich individueller curricularer Vorstellungen mit fachdidaktischen Ansichten oder als „vorbereitende Feldstudie“ zu einer repräsentativen quantitativen Erhebung curricularer Vorstellungen reicht der erste Schritt; um Einflüsse curricularer Überzeugungen auf den Lerneffekt zu untersuchen müssen hingegen alle Stufen durchlaufen werden.

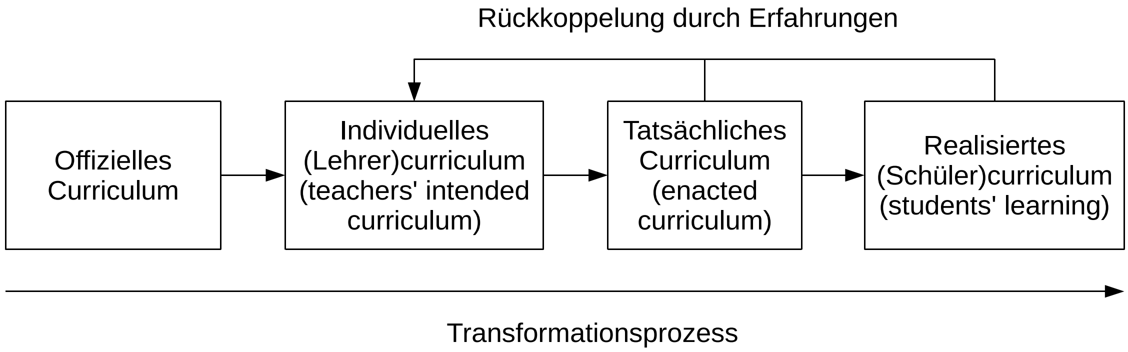


Abb. 1: Curriculumstransformation nach Stein u. a. (2007)

Die diesjährige Sektion zum Thema „Individuelle Curricula“ bestand aus drei Vorträgen:

1) Boris Girnat: „Individuelle Curricula zu Geometrie in den beiden Sekundarstufen“.
2) Ralf Erens: „Curriculare Überzeugungen von Lehrkräften zum Analysisunterricht“ im Rahmen des Projektes Stella II.
3) Andreas Eichler und Katinka Bräunling: „Individuelle Curricula von Lehrkräften zur Arithmetik“, im Rahmen des Projektes Stella I.

Literatur

Eichler, A. (2005). *Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern*. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Groeben, N., Scheele, B., Schlee, J. & Wahl, D. (1988). *Das Forschungsprogramm Subjektive Theorien – Eine Einführung in die Psychologie des reflexiven Subjekts*. Tübingen: Francke Verlag GmbH.

Hofer, M. (1981). *Informationsverarbeitung und Entscheidungsverhalten von Lehrern. Beiträge zu einer Handlungstheorie des Unterrichtens*. München: Urban & Schwarzenberg.

Sill, Hans-Dieter (2000). Ziele und Methoden der Curriculumsforschung. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 79, S. 611–614.

Stein, M. K., Remillard, J. & Smith, M. S. (2007). How Curriculum Influences Student Learning. In: Lester, F. (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: The Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Charlotte: Information Age Publishing, S. 319–369.

Andrea HOFFKAMP, Berlin und Ludwigsburg

Sektion: Hochschullehre – Neue Wege?

Die Hochschul-Mathematikdidaktik gewinnt derzeit immer größere Bedeutung und Aufmerksamkeit. Aktuell werden Veränderungen der Hochschullehre verstärkt diskutiert, vielfältige Konzepte hierzu entwickelt und in diversen Projekten umgesetzt. Ein Ziel der Sektion bestand in dem Austausch und der gegenseitigen Bereicherung bezüglich der verschiedenartigen Ideen und Ansätze. Die in der Sektion vorgestellten theoretischen Grundannahmen und Maßnahmen der Konzeptionen sind vielfältig und ergänzen sich. Allen Ansätzen gemein ist aber der Anspruch, eine aktivierende Mathematikausbildung an den Hochschulen zu etablieren, die der Instruktion weniger Gewicht und dem Shift *vom Lehren zum Lernen* mehr Raum gibt.

Susanne SPIES und Gabriele WICKEL berichteten aus dem Projekt „Mathematik Neu Denken“ – einem Tandemprojekt zur Neuorientierung der universitären Gymnasiallehrerbildung der Universitäten Gießen und Siegen (2005-2011). Hierbei werden Fachmathematik, Schulmathematik vom höheren Standpunkt, Geschichte/Philosophie der Mathematik und Mathematikdidaktik von Studienbeginn an konsequent miteinander verzahnt. Ein weiterer Pfeiler der Projektidee ist die Neugestaltung der universitären Lernumgebung. Im Kern handelt es sich um einen prozessorientierten Ansatz, der sich in der methodischen Gestaltung der Veranstaltungen und insbesondere in der kooperativen Gestaltung der Arbeit in Übungsgruppen auswirkt.

Irmin MENTZ stellte einen dialogischen Ansatz zur Gestaltung der Veranstaltung Lineare Algebra in der Studieneingangsphase im Rahmen des Projektes „MINT – Lehrerbildung Neu Denken“ an der FU Berlin vor. Die Grundidee ist die Öffnung der Vorlesungen durch dialogische Elemente und eine veränderte Aufgabenkultur, so dass ein Shift von Instruktion zu Dialog stattfinden kann. Die Ansätze werden derzeit weiterentwickelt und in den Veranstaltungen erprobt.

Marc ZIMMERMANN berichtete von dem hochschuldidaktischen Projekt SAiL-M (2008-2012), in dessen Rahmen unter anderem ein aktivierendes Veranstaltungskonzept an der PH Ludwigsburg entwickelt, umgesetzt und evaluiert wurde. Das Konzept ist durch ein vielfältiges Maßnahmenbündel charakterisiert. Ziel ist unter anderem die Erhöhung der Motivation und der Selbstwirksamkeitserwartung der Studierenden beim Mathematiklernen. Es wurden Ergebnisse aus den Erhebungen präsentiert und diskutiert.

Sandra REBHOLZ ist ebenfalls Mitarbeitern im Projekt SAiL-M. Sie gab einen Einblick in einen Teil des SAiL-M-Maßnahmenpaketes – der Unterstützung von großen Veranstaltungen durch Computerwerkzeuge, die semiautomatisches Feedback geben. Im Rahmen des Projektes wurden mehrere Computerlernumgebungen entwickelt und eingesetzt. Diese Lernwerkzeuge sind dadurch gekennzeichnet, dass sie den gesamten Lösungsweg berücksichtigen, Standardlösungen und -fehler erkennen können und auf Anforderung der Lernenden semi-automatische Rückmeldungen geben. Um den Lehrenden einen Einblick in den Bearbeitungsprozess der Lernenden zu ermöglichen, wurde eine Logging-Komponente integriert, die die Lernaktivitäten aufzeichnet und diese in geeigneter Form darstellt.

Andrea HOFFKAMP bildete mit einem Vorschlag dazu, wie innovative Ansätze in der Hochschullehre verbreitet werden können, den Abschluss der Sektion. Ebenfalls im Rahmen des Projektes SAiL-M werden seit 2010 Fortbildungen für Hochschullehrende konzipiert und durchgeführt. Die Fortbildungen sind ebenso wie die vorgestellten Veranstaltungskonzeptionen von der Grundhaltung *wenig Instruktion – viel Konstruktion* getragen. Sie sind offen gestaltet und zeichnen sich durch eine Kombination von Mathematikdidaktik und Coachingprinzien aus. Die Durchführung der Fortbildungsveranstaltungen ermöglicht zum einen den Einblick in die Anliegen Hochschullehrender und zum anderen wird dadurch ein Pool von Methoden generiert, der im Rahmen von Mathematiklehre ausgeschöpft und individuell angepasst werden kann.

Silke LADEL, Karlsruhe & Christof SCHREIBER, Frankfurt

Sektion PriMaMedien: Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe

Seit 2007 tagt regelmäßig die Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien' im Arbeitskreis Grundschule der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Die Mitglieder dieser Arbeitsgruppe teilen das Interesse an der Entwicklung, der Konzeption, dem Einsatz und der Bewertung digitaler Medien für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Dabei wird auch die Lehrerbildung für diesen Bereich berücksichtigt. Unter dem aktuellen Namen ‚PriMa-Medien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe', werden regelmäßige Treffen im Rahmen der Jahrestagung der GDM, des Arbeitskreises Grundschule und darüber hinaus organisiert. Für die GDM in Weingarten konnten fünf Vortragende gewonnen werden. Es folgen die Vorträge in der Sektion in ihrer Reihenfolge:

Christof Schreiber zeigte, wie durch Projekte, in denen die schriftlich-grafische Darstellung im Mathematikunterricht im Fokus stand, sich die Frage herausbildete, wie mathematische Lernprozesse mit digitalen Medien auch mündlich stattfinden können. Dazu wurden PriMaPodcasts erstellt: Audio-Podcasts zu mathematischen Themen in der Primarstufe. Die Erfahrungen mit den Projekten zur schriftlichen Kommunikation sowie die Entwicklung und die Erstellung der PriMaPodcasts wurden an unterschiedlichen Beispielen gezeigt.

Andreas Obersteiner hat in einer Interventionsstudie mit Schülerinnen und Schülern im ersten Schuljahr computerbasierte Tests eingesetzt. Unter anderem am Beispiel der quasisimultanen Anzahlerfassung am Zwanzigerfeld zeigte er auf, dass Reaktionszeitexperimente zur empirischen Fundierung mathematikdidaktischer Theorien beitragen können. Es wurde diskutiert, inwieweit die Methode geeignet ist, Aussagen nicht nur auf Gruppenebene, sondern auch auf individueller Ebene zu machen.

Christian Dohrmann stellte Geräte mit Multi-Touch Bildschirmen (u.a. Tablets) vor, welche ausschließlich durch die Berührung eines oder mehrerer Finger gesteuert werden und die aufgrund ihrer intuitiven Bedienkonzepte weit verbreitet sind. Sein Vortrag beschäftigte sich unter anderem mit der Frage, welche Bedeutung diese „neue" Form der Bedienung für das geometrische Begriffsverständnis haben kann, indem geometrische Zusammenhänge, Grundformen und Objektrelationen über eine solche Benutzerschnittstelle quasi „greifbar" gemacht werden.

Günter Krauthausen ging speziell auf die Verwendung von Tablet-Apps ein. Deren Verkaufsprognosen können den tatsächlichen Absatzzahlen nicht folgen. App-Hersteller haben die Altersgruppe von 2-10 Jahren fest im Blick. Auch für das Mathematiklernen (oder was man dafür hält) stehen tausende der kleinen Programme zum Download bereit. Ein neuer Hype? Wo gibt es denn Tablets in Grundschulen, wer soll das auch bezahlen? Und macht das überhaupt Sinn? Im Vortrag hat sich Günter Krauthausen diesen und weiteren Fragen aus mathematikdidaktischer Perspektive genähert.

Silke Ladel ging in ihrem Vortrag darauf ein, dass inhaltliche Kompetenzen häufig eine Voraussetzung für den Erwerb allgemeiner mathematischer Kompetenzen darstellen. Kinder bei denen die inhaltlichen Kompetenzen nur ungenügend ausgebildet sind, haben aus diesem Grund kaum die Chance, entdeckend tätig zu werden. In ihrem Vortrag wurde der Frage nachgegangen inwiefern ein computational offloading inhaltlicher Kompetenzen zu einer Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen für alle Kinder beitragen kann. Dies wurde an konkreten Beispielen und ersten Erkenntnissen einer Erprobung erörtert.

Die Diskussionen waren durchweg sehr anregend und konnten sowohl für die Arbeitsgruppe als auch für Interessierte neue Impulse geben. Im Rahmen der einzelnen Vorträge konnte die neue Veröffentlichung aus der Arbeitsgruppe (Ladel & Schreiber 2012) vorgestellt werden.

Literatur:

Ladel, Silke & Schreiber, Christof (2012) (Hrsg.) Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe. Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz. Band 1. Herausgegeben von Ulrich Kortenkamp. Franzbecker Verlag: Hildesheim.

Jürgen ROTH, Landau

Sektion: Lernumgebungen zur Geometrie

Aktuell wird die Bezeichnung „Lernumgebung“ in der Literatur häufig verwendet. Allerdings ist der damit gemeinte Begriff nicht einheitlich. Reinmann und Mandl (2006) verstehen unter einer „Lernumgebung“ ein zur Unterstützung von Lernprozessen planvoll gestaltetes Gesamtarrangement und geben folgende Definition dafür an:

„Eine durch Unterricht hergestellte Lernumgebung besteht aus einem Arrangement von Unterrichtsmethoden, Unterrichtstechniken, Lernmaterialien, Medien. Dieses Arrangement ist durch die besondere Qualität der aktuellen Lernsituation in zeitlicher, räumlicher und sozialer Hinsicht charakterisiert und schließt letztlich auch den jeweiligen kulturellen Kontext mit ein.“ (Reinmann und Mandl 2006, S. 615f)

Eine erfahrene Lehrkraft wird sich nach dieser sehr allgemein gehaltenen Definition fragen, welcher Unterricht nicht als Lernumgebung zu bezeichnen wäre. Aus der Perspektive der Mathematikdidaktik müssen Lernumgebungen einer Reihe von weiteren Aspekten genügen. Die folgende Zusammenstellung stellt den Versuch dar, wesentliche Aspekte explizit zu benennen, die bei der Entwicklung und Beurteilung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht von Bedeutung sind. Gerade auch mit Blick auf die Definition von Lernumgebungen bei Reinmann und Mandl (2006, S. 615f) sind die ersten beiden Punkte als einschränkende Spezifizierung zu sehen. Im Folgenden wird ausschließlich von Lernumgebungen gesprochen, wenn sie auf das selbständige Arbeiten von Schülerinnen und Schülern abgestellt sind und entdeckendes Lernen ermöglichen. Darüber hinaus sind aber auch die weiteren Punkte sehr wesentlich für eine gelungene mathematische Lernumgebung.

Lernumgebungen für den Mathematikunterricht

- Bilden den Rahmen für das selbstständige Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden,
- sollen entdeckendes Lernen ermöglichen,
- umfassen geeignete Medien, Materialien sowie Aufgabenstellungen, die hinreichend offen sind, um differenzierend zu wirken,
- sind inhaltlich sinnvoll strukturiert und fachlich korrekt,
- bieten vielfältige Zugänge zu einem mathematischen Phänomen,
- setzen einen methodischen und sozialen Rahmen,

- fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus,
- enthalten Aufforderungen zur Dokumentation der Ergebnisse und
- bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen an.

(vgl. Vollrath und Roth, 2011, S. 150ff)

Gerade die Geometrie bietet sich für den Einsatz von Lernumgebungen an, weil hier u. a. sehr gut gestützt auf verschiedenste Medien wie etwa gegenständliche Modelle, computergestützte Simulationen und natürlich Papier und Bleistift gearbeitet werden kann. In der Sektion werden verschiedene Ansätze zur Gestaltung solcher Lernumgebungen zur Geometrie vorgestellt und diskutiert:

Renate Rasch stellt Module für den Geometrieunterricht der Grundschule vor. Da Grundschulkinder vielfach ein unsicheres Begriffswissen zeigen, verfolgt sie das Ziel, geometrisches Wissen so aufzubereiten, dass es beziehungshaltig erworben werden kann. Dazu wurden modulare Lernumgebungen entwickelt, die gegenwärtig im Rahmen eines Schulversuchs erprobt werden.

Jürgen Roth verdeutlicht am Beispiel einer Lernumgebungen zu den Strahlensätzen, wie Geometrie selbständig von Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden kann. Ihm geht es dabei um die Unterstützung der Entwicklung eines vertieften Begriffsverständnisses und darum, den Schülerinnen und Schülern die Erfahrung echten „Mathematiktreibens“ zu ermöglichen.

Martin Dexheimer berichtet von ersten empirischen Ergebnissen einer Pilotstudie an vier 9. Klassen, die die von Jürgen Roth beschriebene Lernumgebung zu den Strahlensätzen im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ (www.mathe-labor.de) der Universität Koblenz-Landau durchlaufen haben.

Michael Schmitz möchte mit seinem Beitrag dazu beitragen das Papierfalten auch im Geometrieunterricht zu verankern. Es geht also um mathematisches Origami (Mathegami). An Hand von Beispielen werden Einsatzmöglichkeiten von derartigen Lernumgebungen im Mathematikunterricht aufgezeigt und Begründungen für ein solches Vorgehen gegeben.

Literatur

Reinmann, G.; Mandl, H. (2006): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: Bernd Weidenmann, Andreas Krapp (Hrsg.): Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch. Weinheim: Beltz, S. 613–658.

Vollrath, H.-J.; Roth, J. (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.