

Subnormale Lösungen der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

Dem Fachbereich Mathematik
der TU Dortmund
vorgelegt von

Dipl.-Mathematiker
Christopher Claßen
im September 2015

Christopher Claßen
Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund
Dortmund, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2015

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 2015

Vorsitzender:	Prof. Dr. Ch. Meyer
Erster Gutachter:	Prof. Dr. N. Steinmetz
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. W. Bergweiler
Dritter Prüfer:	Prof. Dr. R. Brück

Veröffentlichte Version vom Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	6
2.1	Die vierte PAINLEVÉsche	6
3	Reskalierung	10
3.1	Vorbemerkung	11
3.2	Normalität der Reskalierten $(w_n)_{ n \geq 1}$	11
3.3	Die Clustermenge CL	18
3.4	Verteilung der Polstellen	25
3.5	Subnormale Lösungen erster Art	26
3.6	Subnormale Lösungen zweiter Art	32
4	Asymptotik	36
4.1	Der Beginn einer Asymptotik	37
4.2	Asymptotische Entwicklung der Lösung	38
4.3	Sätze vom Phragmén-Lindelöf Typ	44
4.4	Nichtexistenz subnormaler Lösungen zweiter Art	51

5	Klassifikation	53
5.1	Vorbemerkung	53
5.2	Verhalten der Asymptotiken unter Bäcklundtransformationen .	57
5.3	Kombinatorik - Ein kleiner Ausflug	63
5.4	Hermite-Weber Lösungen	63
6	Anhang	71
6.1	Nevanlinna-Theorie	71
6.2	Asymptotische Entwicklung	75

Kapitel 1

Einleitung

Die PAINLEVÉschen Differentialgleichungen wurden zwischen 1895 und 1910 von Painlevé und Gambier hergeleitet, motiviert durch die Fragestellung von Picard nach gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$w'' = R(z, w, w'), \quad (1.1)$$

mit $R(z, w, w')$ rational in w und w' sowie analytisch in z , deren Lösungen *keine beweglichen Singularitäten mit der Ausnahme von Polstellen besitzen*. Sie zeigten, dass es 50 kanonische Gleichungen der Form (1.1) mit der sogenannten PAINLEVÉ *Eigenschaft* gibt. Unter diesen fünfzig Gleichungen stehen die folgenden sechs besonders hervor, die heute als die PAINLEVÉschen Differentialgleichungen bekannt sind. Sie lauten mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$:

$$w'' = 6w^2 + z, \quad (P_1)$$

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \quad (P_2)$$

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} - \frac{w'}{z} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}, \quad (P_3)$$

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}, \quad (P_4)$$

$$w'' = \frac{(3w-1)(w')^2}{2w(w-1)} - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2(\alpha w^2 + \beta)}{z^2 w} + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \quad (P_5)$$

$$w'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) (w')^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) w' + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left(\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2} \right) \quad (P_6)$$

Elf weitere Gleichungen lassen sich durch Lösungen der sechs obigen Gleichungen ausdrücken, genauer gesagt durch (P_1) , (P_2) sowie (P_4) , wohingegen die verbleibenden 33 Gleichungen Lösungen in Form von Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter bzw. dritter Ordnung sowie in Form von elliptischen Funktionen besitzen. Die Untersuchungen von Boutroux Anfang des 20. Jahrhunderts zum Wachstum sowie dem asymptotischen Verhalten der Lösungen der PAINLEVÉschen beeinflussten und motivierten bis heute die Arbeit auf dem Gebiet. Der Nachweis der Meromorphie der Lösungen begann schon zu PAINLEVÉs Zeiten, wurde aber erst später vervollständigt. Aufgrund der Meromorphie der Lösungen (P_1) bis (P_5) war es nur naheliegend, weitere Untersuchungen bezüglich des Wachstums und der Werteverteilung der Lösungen anzustellen. Einen großen Beitrag dazu leisteten Schubart und Wittich [26] in den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts sowie Steinmetz zu Beginn des Jahrhunderts. So gelang es Steinmetz via Reskalierungsmethode zu zeigen, dass alle PAINLEVÉschen Transzendenten von endlicher Ordnung sind.

Die PAINLEVÉschen Differentialgleichungen lassen sich im Allgemeinen nicht in Form von Lösungen linearer Differentialgleichungen lösen, das heißt ihre Lösungen, die sogenannten PAINLEVÉschen Transzendenten, definieren auf ihre Art neue transzendente Funktionen, die als spezielle Funktionen verstanden werden können. Für spezielle Parameter lassen sich die PAINLEVÉschen in Form elementarer Funktionen lösen, das heißt in Form von klassischen transzendenten Funktionen (Airy/ (P_2) , Bessel/ (P_3) , Hermite-Weber (parabolische Zylinderfunktionen)/ (P_4) oder hypergeometrische Funktionen/ (P_6)).

Aktuelle Arbeiten, wie [8] und [22], zur Präzisierung der Wachstumsordnung der Lösungen der zweiten PAINLEVÉschen bilden die Grundlage der vorliegenden Arbeit. In Analogie zu Steinmetz [22] werden die dort für die zweite PAINLEVÉsche zur Anwendung gekommenen Methoden und Techniken auf die vierte PAINLEVÉsche übertragen. Steinmetz betrachtet die subnormalen Lösungen, das heißt die Lösungen der Wachstumsordnung $\frac{3}{2}$, und zeigt, dass außer den sogenannten Airy-Lösungen keine subnormalen Lösungen der zweiten PAINLEVÉschen existieren. Aufgrund des engen Zusammenhangs zwischen der zweiten und vierten PAINLEVÉschen liegt es nahe, die Erkenntnisse auf die vierte PAINLEVÉsche zu übertragen. In diesem Fall übernehmen die sogenannten Hermite-Weber Lösungen die Rolle der Airy-Lösungen und sind ebenfalls die einzigen subnormalen Lösungen der vierten PAINLEVÉschen.

Die Lösungen w der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung

$$2ww'' = (w')^2 + 3w^4 + 8zw^3 + 4(z^2 - \alpha)w^2 + 2\beta \quad [IV]_{\alpha,\beta}$$

sind entweder rationale Funktionen oder transzendente meromorphe Funktionen endlicher Ordnung. Genauer gesagt gilt für die Wachstumsordnung der sogenannten vierten PAINLEVÉschen *Transzendenten* (siehe Hinkkanen und Laine [7], Shimomura [16], [17] und Steinmetz [20],[21])

$$2 \leq \rho(w) \leq 4.$$

Immer noch eine offene Vermutung ist die Dichotomie der Lösungen, das heißt $\rho(w) \in \{2, 4\}$. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Lösungen der Wachstumsordnung 2, den sogenannten *subnormalen Lösungen*.

Dazu wird in Kapitel 2 - *Grundlagen* ein Überblick über die wesentlichen Eigenschaften der vierten PAINLEVÉschen sowie die der Arbeit zu Grunde liegenden Methoden und Techniken gegeben. Dazu zählen vor allem die Bäcklundtransformationen. Es handelt sich dabei um spezielle Transformationen, die Lösungen der vierten PAINLEVÉschen zueinander in Beziehung setzen.

Eine besondere Rolle spielen die sogenannten *Hermite-Weber* Gleichungen

$$w' = -2 \pm (w^2 + 2zw - 2\alpha). \quad [HW]$$

Die Lösungen von [HW] haben Wachstumsordnung 2 und lösen die vierte PAINLEVÉsche $[IV]_{\alpha, -2(1\pm\alpha)^2}$. Unter dem Begriff der *Hermite-Weber* Lösung werden alle Lösungen zusammengefasst, die sich aus Lösungen von [HW] via Bäcklundtransformationen ergeben.

In Kapitel 3 - *Reskalierung* werden die Lösungen der vierten PAINLEVÉschen einem Reskalierungsprozess unterzogen und die Normalität der Familie der Reskalierten nachgewiesen. Die Beschreibung und Klassifikation der Lösungen ist eng verbunden mit dem ersten Integral W von $[IV]_{\alpha, \beta}$

$$w'^2 = w^4 + 4zw^3 + 4(z^2 - \alpha)w^2 - 2\beta - 4wW, \quad (W' = w^2 + 2zw). \quad (1.2)$$

Dies wird deutlich, da die Frage nach der Ordnung $\rho(w)$ einer Lösung w von der Clustermenge \mathbf{CL}_ϵ der Funktion $W(z)z^{-3}$ für $z \rightarrow \infty$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_\epsilon$ abhängt. Dabei bezeichnet \mathcal{P} die Menge der von Null verschiedenen Polstellen von w , und mit \mathcal{P}_ϵ wird die entsprechende Menge von ϵ -Umgebung bezeichnet,

$$\mathcal{P}_\epsilon = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \Delta_\epsilon(p), \quad \Delta_\epsilon(p) = \{z : |z - p| < \epsilon|p|^{-1}\}. \quad (1.3)$$

Im Zuge der Untersuchung stellen sich zwei Typen subnormaler Lösungen heraus, die sich durch die Clustermengen

$$\mathbf{CL}_\epsilon = \{0\} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{CL}_\epsilon = \{-8/27\}$$

auszeichnen und entsprechend als Lösungen *erster* respektive *zweiter* Art bezeichnet werden. Die Untersuchung der Polstellen zeigt, dass sie regulär verteilt liegen und sogenannte Polketten bilden, von denen die Lösungen nur endlich viele besitzen. Die Regularität der Polverteilung führt in den polstellenfreien Bereichen auf Anfänge einer asymptotischen Entwicklung.

In Kapitel 4 - *Asymptotik* werden die im Zuge der Reskalierung gewonnenen Anfänge der asymptotischen Entwicklungen diskutiert. Dabei werden asymptotische Entwicklungen der Lösung w und des zugehörigen ersten Integrals W gewonnen sowie gezeigt, dass subnormale Lösungen zweiter Art nicht als transzendente meromorphe Lösungen, sondern nur als rationale Funktionen auftreten.

Die gewonnenen Erkenntnisse bilden die Grundlage für die sich in Kapitel 5 anschließende *Klassifikation* der subnormalen Lösungen. Dabei kommt den bereits erwähnten Hermite-Weber Lösungen eine besondere Bedeutung zu. Dank des Wissens über das Verhalten der asymptotischen Entwicklungen sowie die Veränderung der Anzahl an Polketten unter Bäcklundtransformationen lassen sich Bäcklundtransformationen angeben, die auf die identisch verschwindende Lösung $w \equiv 0$ führen. Dies bedeutet, dass w im Schritt zuvor bereits eine Hermite-Weber Lösung gewesen sein muss. Da dies für alle subnormalen Lösungen gelingt, lässt sich das Hauptresultat wie folgt formulieren:

Satz 1.1. *Jede subnormale Lösung w der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ ist eine Hermite-Weber Lösung.*

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Die vierte PAINLEVÉsche

In dieser Arbeit werden, ausgehend von der sogenannten Reskalierungsmethode, die subnormalen Lösungen der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung charakterisiert. Die vierte PAINLEVÉsche Differentialgleichung $[IV]_{\alpha,\beta}$ ist bekannt als eine der sechs PAINLEVÉschen Differentialgleichungen, charakterisiert durch die sogenannte PAINLEVÉ Eigenschaft, die grob gesprochen soviel bedeutet, *dass es außer Polstellen keine beweglichen Singularitäten* gibt, mit anderen Worten, dass sich jede Lösung unbeschränkt analytisch in die ganze Ebene fortsetzen lässt (abgesehen von festen Singularitäten, die hier aber nicht auftreten). Die Lösungen der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ mit den freien Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sind meromorphe Funktionen (siehe [4], [19]). Als Konsequenz aus dem Beweis der Meromorphie ergibt sich die Tatsache, dass alle Polstellen einer Lösung w von $[IV]_{\alpha,\beta}$ einfach sind mit Residuum ± 1 . Jede transzendente Lösung w besitzt unendlich viele Polstellen p mit einer Laurentreihenentwicklung der Form

$$w(z) = \frac{\mu}{z-p} - p + \frac{\mu}{3}(p^2 + 2\alpha - 4\mu)(z-p) + \mathbf{h}(z-p)^2 + \dots \quad (2.1)$$

mit $\mu^2 = 1$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}(p) \in \mathbb{C}$ beliebig und allen anderen Koeffizienten eindeutig bestimmt durch α, β, p und \mathbf{h} . Eine Lösung w ist genauso eindeutig bestimmt durch die Vorgabe des Pols p sowie α, β und \mathbf{h} , wie durch die Anfangswerte $w(z_0)$ und $w'(z_0)$. Ebenso besitzt das erste Integral W eine Entwicklung der Form

$$W(z) = -\frac{1}{z-p} + (2\mathbf{h} + 2(\alpha \mp 1)p) + \frac{1}{3}(4\alpha - p^2 \mp 2)(z-p) + O(|z-p|^2).$$

Eine für die Arbeit wichtige Abschätzung liefert die folgende Proposition.

Proposition 1 (Proposition 3.7 aus [21]). *Sei w eine transzendente meromorphe Lösung der vierten PAINLEVÉschen so gilt*

$$w(z) = O(|z|) \quad \text{und} \quad w'(z) = O(|z|^2)$$

für $z \rightarrow \infty$ außerhalb von \mathcal{P}_ϵ .

Bei der Untersuchung von Differentialgleichungen ist es ein probates Mittel, Zusammenhänge zwischen Differentialgleichungen bzw. zwischen Lösungen von Differentialgleichungen herzustellen und somit Informationen über die Beschaffenheit der Lösungen zu gewinnen. Im Falle der vierten PAINLEVÉschen übernehmen diese Rolle die sogenannten *Bäcklundtransformationen*. Aufgrund der Invarianz der vierten PAINLEVÉschen unter Rotationen um eine vierte Einheitswurzel erhält man für die vierten PAINLEVÉschen die folgenden trivialen Bäcklundtransformationen.

Lemma 1 (Triviale Bäcklundtransformationen). *Für $\lambda^4 = 1$ erhält man die trivialen Bäcklundtransformationen $\tilde{w}(z) = \lambda w(\lambda z)$ mit $\tilde{\alpha} = \alpha \lambda^2 = \pm \alpha$.*

Beweis. Sei w eine Lösung der vierten PAINLEVÉschen und $\lambda^4 = 1$, so gilt

$$2\lambda w \lambda^2 \lambda w = \lambda^4 (w')^2 + 3(\lambda w)^4 + 8\lambda z \lambda^3 w^3 + 4(\lambda^2 z^2 - \alpha \lambda^2) \lambda^2 w^2 + 2\beta.$$

Somit ist $\tilde{w}(z) = \lambda w(\lambda z)$ ebenfalls eine Lösung der vierten PAINLEVÉschen mit $\tilde{\alpha} = \alpha \lambda^2 = \pm \alpha$. □

Ausgeklügeltere Bäcklundtransformationen, die einen Zusammenhang zwischen Lösungen w von $[IV]_{\alpha,\beta}$ herstellen, lassen sich mittels eines zu $[IV]_{\alpha,\beta}$ äquivalenten Systems von zwei gekoppelten Riccati-Differentialgleichungen gewinnen. Die vierte PAINLEVÉsche Gleichung $[IV]_{\alpha,\beta}$ lässt sich nach [3] wie folgt als System von Riccati-Differentialgleichungen schreiben

$$\begin{aligned} w' &= q + 2\epsilon zw + \epsilon w^2 + 2\epsilon wu \\ u' &= p - 2\epsilon zu - \epsilon u^2 - 2\epsilon wu \end{aligned} \tag{2.2}$$

mit $q^2 = -2\beta$, $\epsilon^2 = 1$ und $p = -1 - \alpha\epsilon - q/2$. Die Bäcklundtransformation, das heißt die Beziehung, mit der man aus bekannten Lösungen neue Lösungen erhält, kann wie folgt beschrieben werden.

Satz 2.1 ([3] Bäcklundtransformation). *Sei $w = w(z, \alpha, \beta) \neq 0$ eine Lösung der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung mit Parametern α und β , so liefern die Transformationen $T : w \mapsto \tilde{w}$ und $\Lambda : (\alpha, \beta) \mapsto (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ mit*

$$\tilde{w} = R(w)/2\epsilon w = \frac{w' - q - 2\epsilon zw - \epsilon w^2}{2\epsilon w}$$

und $\epsilon^2 = 1$, $q^2 = -2\beta$ eine Lösung $\tilde{w} = \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ mit Parametern $\tilde{\alpha} = \frac{1}{4}(2\epsilon - 2\alpha + 3\epsilon q)$ und $\tilde{\beta} = -\frac{1}{2}(1 + \alpha\epsilon + \frac{q}{2})^2$.

Aus obigem System erhält man ebenso die inverse Bäcklundtransformation $T^{-1} : \tilde{w} \mapsto w$ und $\Lambda^{-1} : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \mapsto (\alpha, \beta)$ mit $p^2 = -2\tilde{\beta}$, $\epsilon^2 = 1$ als

$$w = \tilde{R}(\tilde{w})/2\epsilon \tilde{w} = -\frac{\tilde{w}' - p + 2\epsilon z\tilde{w} + \epsilon \tilde{w}^2}{2\epsilon \tilde{w}}$$

und

$$4\alpha = -2\epsilon - 2\tilde{\alpha} - 3\epsilon p, \quad 2\beta = -(\tilde{\alpha}\epsilon - 1 - p/2)^2.$$

Für festes ϵ und einen festgewählten Zweig der Wurzel von $\sqrt{-2\beta}$ erhält man eine eins-zu-eins Relation, das heißt eine eindeutige Beziehung zwischen einer Lösung w mit $R(w) \neq 0$ und einer Lösung \tilde{w} (für geeignete Wahl von ϵ und q).

Mit Hilfe der Bäcklundtransformationen gelang es Gromak in [3], spezielle Lösungen der vierten PAINLEVÉschen zu charakterisieren. Zu diesen speziellen Lösungen zählen zum einen rationale Funktionen, die die sogenannten 0-Parameterfamilien bilden, sowie die 1-Parameterfamilien von Lösungen. Den Prototyp der 1-Parameterfamilien bildet eine spezielle Riccati-Differentialgleichung, die sogenannte Hermite-Weber Differentialgleichung

$$w' = \mu w^2 + 2\mu zw - 2(1 + \alpha\mu)^2 \quad (2.3)$$

mit $\mu^2 = 1$, deren Lösungen für Parameter $(\alpha, -2(1 + \alpha\mu)^2)$ der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ genügen. Sämtliche Polstellen der Lösungen w von (2.3) sind einfach mit Residuum $-\mu$, somit existiert eine ganze Funktion u mit $w = -\mu \frac{u'}{u}$, die der linearen Hermite-Weber Differentialgleichung

$$u'' - 2\mu zu' - 2(\alpha + \mu)u = 0 \quad (2.4)$$

genügt. Ausgehend von (2.4) lassen sich 1-Parameterfamilien von Lösungen der vierten PAINLEVÉschen bestimmen, die sich in Form von Hermite-Weber Funktionen ausdrücken lassen (siehe [4]). Abschließend lässt sich über die 1-Parameterfamilien festhalten.

Satz 2.2 ([4]). *Die vierte PAINLEVÉsche Differentialgleichung $[IV]_{\alpha,\beta}$ besitzt eine 1-Parameterfamilie von Lösungen, die einer algebraischen Differentialgleichung $P(z, w, w')$ erster Ordnung genügen, genau dann, wenn die Parameter α und β entweder $\beta = -2(\alpha\mu + 2n - 1)^2$, ($n \in \mathbb{N}, \mu^2 = 1$) oder $\beta = -2n^2$, $n \in \mathbb{N}$ genügen. Sämtliche solcher Lösungen lassen sich aus der Hermite-Weber Differentialgleichung (2.3) mit Parametern $\beta = -2(1 + \alpha\mu)^2$ durch wiederholte Anwendung von Bäcklundtransformationen gewinnen.*

Kapitel 3

Reskalierung

Es werden die Lösungen w der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ reskaliert. Die sich ergebende Familie der Reskalierten $(w_h)_{|h|\geq 1}$ bildet eine normale Familie im Sinne von Montel, deren Grenzlösungen $\lim_{h_n \rightarrow \infty} w_{h_n} = \mathfrak{w}$ der entsprechend reskalierten Grenzdifferentialgleichung genügen.

$$2\mathfrak{w}\mathfrak{w}'' = \mathfrak{w}'^2 + 3\mathfrak{w}^4 + 8\mathfrak{w}^3 + 4\mathfrak{w}^2$$

Diese Grenzlösungen sind entweder konstante, elliptische oder trigonometrische Funktionen. Anhand der Clustermenge \mathbf{CL} der Funktion $W(z)z^{-3}$ für $z \rightarrow \infty$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_\epsilon$ lassen sich die subnormalen Lösungen w der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung $[IV]_{\alpha,\beta}$ charakterisieren. Dabei unterteilen sich die subnormalen Lösungen entsprechend ihrer Clustermenge von $\mathbf{CL} = \{0\}$ und $\mathbf{CL} = \{-\frac{8}{27}\}$ in zwei Subtypen, den sogenannten Lösungen erster respektive zweiter Art. Ausgehend von der Grenzgleichung lassen sich Erkenntnisse über die Polstellenverteilung der Grenzlösung \mathfrak{w} gewinnen, die sich auf die reskalierten Lösungen w_h sowie die Ausgangslösung w vererben. Man erhält erste Eigenschaften der subnormalen Lösungen sowie die Anfänge einer asymptotischen Entwicklung.

3.1 Vorbemerkung

Die Reskalierung einer Lösung w der vierten PAINLEVÉschen führt zu einer Familie von Funktionen. Bei der Betrachtung von Familien von Funktionen besteht ein zentrales Interesse am Konvergenzverhalten innerhalb der Familie. Dazu seien hier der Begriff der Normalität einer Familie von Funktionen sowie zwei klassische Konvergenzsätze erwähnt.

Definition 1 (Normale Familie [1]). Eine Familie holomorpher Funktionen in einem Gebiet Ω heißt normal, falls jede Folge eine lokal gleichmäßig konvergente, das heißt gleichmäßig konvergent auf jeder kompakten Teilmenge $E \subset \Omega$, Teilfolge besitzt oder eine Teilfolge lokal gleichmäßig gegen ∞ konvergiert.

Satz 3.1 (Satz von Weierstraß). *Konvergiert eine Folge meromorpher Funktionen lokal gleichmäßig in der sphärischen Metrik, so ist die Grenzfunktion meromorph oder identisch ∞ .*

Satz 3.2 (Satz von Hurwitz). *Seien die Funktionen f_n holomorph, $\neq 0$ im Gebiet Ω und konvergieren die f_n lokal gleichmäßig gegen f auf Ω , so ist f entweder identisch null oder nirgends null in Ω .*

3.2 Normalität der Reskalierten $(w_h)_{|h|\geq 1}$

Sei w eine Lösung der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung und bezeichne $(w_h)_{|h|\geq 1}$ mit

$$w_h(\zeta) = h^{-1}w(h + h^{-1}\zeta) \tag{3.1}$$

die Familie der Reskalierten, so bildet diese eine normale Familie in der Ebene im Sinne von Montel.

Proposition 2. Für eine Lösung w der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ ist die Familie $(w_h)_{|h|\geq 1}$ der Reskalierten normal in der Ebene im Sinne von Montel, und jede Grenzfunktion $\lim_{h_n \rightarrow \infty} w_{h_n} = \mathfrak{w}$ genügt der Differentialgleichung

$$2\mathfrak{w}\mathfrak{w}'' = \mathfrak{w}'^2 + 3\mathfrak{w}^4 + 8\mathfrak{w}^3 + 4\mathfrak{w}^2. \quad (3.2)$$

Beweis. Ein Blick auf die Reskalierten ergibt für die ersten beiden Ableitungen

$$w'_h(\zeta) = h^{-2}w'(h + h^{-1}\zeta) \text{ und } w''_h(\zeta) = h^{-3}w''(h + h^{-1}\zeta).$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung w''_h zusammen mit der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung $[IV]_{\alpha,\beta}$ und $z = h + h^{-1}\zeta$ Folgendes:

$$\begin{aligned} w''_h(\zeta) &= h^{-3}w''(h + h^{-1}\zeta) \\ &= h^{-3} \left(\frac{w'^2}{2w} + \frac{3w^3}{2} + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w} \right) (h + h^{-1}\zeta) \\ &= \frac{w_h'^2}{2w_h} + \frac{3}{2}w_h^3 + \frac{8(h + h^{-1}\zeta)}{2h}w_h^2 + \frac{2((h + h^{-1}\zeta)^2 - \alpha)}{h^2}w_h + \frac{\beta}{h^4w_h} \end{aligned}$$

und damit

$$2w_h w_h'' = w_h'^2 + 3w_h^4 + 8 \frac{(h + h^{-1}\zeta)}{h} w_h^3 + 4w_h^2 \left(\frac{(h + h^{-1}\zeta)^2 - \alpha}{h^2} \right) + \frac{2\beta}{h^4}.$$

Diese Gleichung konvergiert (formal) für $h \rightarrow \infty$ und $\lim_{h \rightarrow \infty} w_h = \mathfrak{w}$ gegen

$$2\mathfrak{w}\mathfrak{w}'' = \mathfrak{w}'^2 + 3\mathfrak{w}^4 + 8\mathfrak{w}^3 + 4\mathfrak{w}^2$$

wegen $(h + h^{-1}\zeta)/h \rightarrow 1$ sowie $(h^2 + 2\zeta + h^{-2}\zeta^2)/h^2 \rightarrow 1$ für $h \rightarrow \infty$.

Diese Konvergenz lässt jedoch keinerlei Schlüsse auf die Konvergenz einer Folge (w_{h_n}) zu, stellt aber dennoch einen wichtigen Bestandteil des Beweises dar. Differentiation von Gleichung (3.2) liefert

$$2\mathfrak{w}''' = 12\mathfrak{w}'\mathfrak{w}'' + 24\mathfrak{w}'\mathfrak{w} + 8\mathfrak{w}'. \quad (3.3)$$

Anschließende Integration liefert das erste Integral der Form:

$$\mathfrak{w}'' = 2\mathfrak{w}^3 + 6\mathfrak{w}^2 + 4\mathfrak{w} + 2c \quad (3.4)$$

$$\mathfrak{w}'^2 = \mathfrak{w}^4 + 4\mathfrak{w}^3 + 4\mathfrak{w}^2 + 4\mathfrak{w}c \quad (3.5)$$

Der weitere Beweis wird sich in mehrere Schritte unterteilen. Zuerst wird der Nachweis erbracht, dass jede Folge (w_{h_n}) für $h_n \rightarrow \infty$ in einer Umgebung von $\zeta = 0$ normal ist und jede Grenzfunktion der Gleichung (3.2) genügt. Dazu unterscheidet man die folgenden drei Fälle.

a) „Abseits der Polstellen“

Betrachtet wird eine Reskalierungsfolge (h_n) mit $|h_n| \text{dist}(h_n, \mathcal{P}) \geq \varepsilon$, das heißt eine Folge, die von der Menge \mathcal{P} der Polstellen fortbleibt. Bezogen auf die Menge (1.3) entspricht dies gerade einer Umformulierung von $h_n \notin \mathcal{P}_\varepsilon$. Damit bleiben dann nach dem Wissen aus Proposition 1 über die außerhalb von \mathcal{P}_ε geltenden Asymptotiken von $w(z)$ sowie $w'(z)$ die Ausdrücke $w_{h_n}(0) = h_n^{-1}w(h_n)$ und $w'_{h_n}(0) = h_n^{-2}w'(h_n)$ beschränkt und konvergieren zumindest für eine Teilfolge gegen \mathfrak{w}_0 sowie \mathfrak{w}'_0 . Im Folgenden bezeichne (w_{h_n}) eine ebensolche Teilfolge, damit strebt (w_{h_n}) gegen die Lösung von Gleichung (3.2) mit Anfangswerten $\mathfrak{w}(0) = \mathfrak{w}_0$ und $\mathfrak{w}'(0) = \mathfrak{w}'_0$ auf $|\zeta| < \varepsilon$ bzgl. der euklidischen Metrik. Normalität liegt vor, da sofern man von den Polstellen von w fortbleibt, die Folgen $|w_{h_n}| \leq M$ gleichmäßig beschränkt bleiben auf $B_\varepsilon(0)$.

b) „Auf den Polstellen“

Betrachtet wird der Fall $(h_n) = (p_n)$, einer Folge von Polstellen. Dort ist die Laurentreihenentwicklung von w bekannt, das heißt, es gilt

$$\begin{aligned} w_{p_n}(\zeta) &= w_{h_n}(\zeta) = p_n^{-1}w(p_n + p_n^{-1}\zeta) \\ &= p_n^{-1} \left(\frac{\mu_n}{p_n + p_n^{-1}\zeta - p_n} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(p_n)(p_n + p_n^{-1}\zeta - p_n)^k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p_n^{-1} \left(\frac{\mu_n}{p_n^{-1}\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(p_n)(p_n^{-1}\zeta)^k \right) \\
 &= \frac{\mu_n}{\zeta} + p_n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(p_n)(p_n^{-1}\zeta)^k \\
 &= \frac{\mu_n}{\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(p_n)p_n^{-k-1}\zeta^k \\
 &= \frac{\mu_n}{\zeta} + \mathfrak{h}_n(\zeta) \quad (\mu_n = \pm 1).
 \end{aligned}$$

Die Funktion

$$\mathfrak{h}_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(p_n)p_n^{-k-1}\zeta^k$$

ist auf der Kreisscheibe $|\zeta| < K^{-1}$ beschränkt. Denn nach [20] lässt sich zu $0 < \theta < 1$ die Konstante $M := K \max\{|p_n|, \mathbf{h}_n^{1/3}\}$ definieren, mit K geeignet gewählt, so dass sich mit θ hinreichend klein, für die Koeffizienten c_k die Abschätzung $|c_k| \leq \theta M^k$ ($\forall k \geq 1$) ergibt. Ebenso nach [20] gilt $\mathbf{h}_n = O(|p_n|^3)$, mit $c_0 = \pm 1$ und $|p_n| \geq 1$ ergibt sich dann

$$|\mathfrak{h}_n(\zeta)| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta M^k |p_n^{-k-1}\zeta^k| \leq 1 + \left| \frac{\theta}{p_n} \sum_{k=1}^{\infty} (K\zeta)^k \right| \leq \frac{1}{1 - K|\zeta|}.$$

Die Folge der (w_{p_n}) ist demnach lokal gleichmäßig beschränkt. Für die Wahl einer konvergenten Teilfolge ergibt sich nach Hurwitz für die Residuenfolge η_n , dass diese aufgrund der Konvergenz ab einem n_0 konstant ist, das heißt es gilt $\eta_n = \eta \forall n \geq n_0$.

c) „Annäherung an die Menge der Polstellen \mathcal{P} “

Abschließend betrachtet man den Fall, dass sich die Folge (h_n) an die Menge der Polstellen \mathcal{P} annähert, das heißt zur Folge (h_n) lässt sich eine Polstellenfolge (p_n) finden mit $h_n = p_n + o(|p_n|^{-1})$, was gleichbedeutend ist mit $(h_n - p_n)p_n \rightarrow 0$ für $(n \rightarrow \infty)$. Die grundlegende Idee dabei ist es, das Ganze auf den Fall b) zurückzuspielen, das heißt, w_{h_n} auf w_{p_n} zurückzuführen.

Aus dieser Überlegung heraus ergibt sich für

$$\begin{aligned}
 w_{h_n}(\zeta) &= h_n^{-1}w(h_n + \zeta h_n^{-1}) \\
 &= (p_n + o(|p_n|^{-1}))^{-1}w(p_n + o(|p_n|^{-1}) + \zeta(p_n + o(|p_n|^{-1}))^{-1}) \\
 &= \frac{1}{p_n}(1 + o(|p_n|^{-2}))^{-1}w(p_n + p_n^{-1}\zeta(1 + o(|p_n|^{-2}))^{-1} + o(|p_n|^{-1})) \\
 &= (1 + o(|p_n|^{-2}))\frac{1}{p_n}w(p_n + p_n^{-1}\zeta((1 + o(|p_n|^{-2})) + o(|p_n|^{-1}))) \\
 &= (1 + o(|p_n|^{-2}))w_{p_n}(\zeta + o(|p_n|^{-1})).
 \end{aligned}$$

Somit verhält sich w_{h_n} bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler der Größenordnung $o(|p_n|^{-1})$ wie w_{p_n} , das heißt, dass die Folge (w_{h_n}) eine auf $|\zeta| < K^{-1}$ bezüglich der sphärischen Metrik lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, die gegen eine Lösung von (3.2) konvergiert.

Im zweiten Schritt soll nun die Normalität von (w_{h_n}) in jedem Punkt ζ_0 , genauer gesagt in einer Umgebung von ζ_0 , nachgewiesen werden. Zum Nachweis der Normalität von (w_{h_n}) in ζ_0 bedient man sich einer Verschiebung der Reskalierung um den Punkt ζ_0 im lokalen Maßstab und setzt dazu $k_n = h_n + \zeta_0 h_n^{-1}$ bzw. $h_n = k_n - \zeta_0 h_n^{-1}$. Hier wie auch in noch folgenden Nachweisen macht man sich die Tatsache zu nutze, dass eine Verschiebung der Reskalierungsfolge zu einer Verschiebung im Argument führt.

$$\begin{aligned}
 w_{h_n}(\zeta) &= h_n^{-1}w(h_n + h_n^{-1}\zeta) \\
 &= (k_n - \zeta_0 h_n^{-1})^{-1}w(k_n + h_n^{-1}(\zeta - \zeta_0)) \\
 &= \frac{1}{k_n} \left(\frac{1}{1 - (\zeta_0/(h_n k_n))} \right) w(k_n + h_n^{-1}(\zeta - \zeta_0)) \\
 &= \frac{1}{k_n}(1 + O(|k_n|^{-2}))w(k_n + \frac{1}{k_n}(\zeta - \zeta_0)(1 + O(|k_n|^{-2}))) \\
 &= (1 + o(1))w_{k_n}(\zeta - \zeta_0 + o(1))
 \end{aligned}$$

Denn es gilt

$$\frac{1}{1 - \zeta_0/(h_n k_n)} = \frac{1}{1 - (k_n - h_n)h_n/(k_n h_n)} = \frac{k_n}{h_n} = 1 + \frac{\zeta_0}{h_n^2}.$$

Da sich die Folgen (h_n) und (k_n) für $n \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich verhalten, das heißt $h_n \sim k_n$ für $n \rightarrow \infty$ folgt, dass für den Quotienten $k_n/h_n = 1 + O(|k_n|^{-2}) = 1 + o(|k_n|^{-1})$ gilt. Die Folge (w_{k_n}) stimmt, bis auf eine kleine Störung, in einer Umgebung um die Null mit der Folge (w_{h_n}) in einer Umgebung um ζ_0 überein. Nach dem ersten Schritt gilt für die Folge (v_{k_n}) , gegeben durch

$$v_{k_n}(\zeta) = w_{k_n}(\zeta + O(|k_n|^{-1})),$$

dass diese normal in einer Umgebung von $\zeta = 0$ ist. Somit ist die Folge (w_{h_n}) normal in einer Umgebung von ζ_0 . Und wiederum genügt jede Grenzfunktion der Gleichung (3.2). Im Falle einer Folge (h_n) mit $h_n \rightarrow h_0 \in \mathbb{C}$ ist die Normalität unmittelbar klar. \square

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Reskalierten $(w_h)_{|h|\geq 1}$ eine normale Familie in \mathbb{C} bilden. Das heißt, jede Folge (w_h) besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge mit $\lim_{h_n \rightarrow \infty} w_{h_n} = \mathfrak{w}$, deren Grenzfunktion \mathfrak{w} der Differentialgleichung (3.2) genügt.

Proposition 3. *Die Grenzfunktion $\mathfrak{w} = \lim_{h_k \rightarrow \infty} w_{h_k} \equiv \infty$ tritt nicht auf.*

Beweis. Anderenfalls würde man für die Funktionen $u_{h_k} = 1/(w_{h_k})$ als Grenzfunktion gerade $\lim_{h_k \rightarrow \infty} u_{h_k} = 0$ erhalten. Dazu im Widerspruch jedoch steht, dass für die Ableitungen (u'_{h_k})

$$\lim_{h_k \rightarrow \infty} (u'_{h_k})^2 = 1$$

gilt. Es ist

$$u'_{h_k} = -\frac{w'_{h_k}}{w_{h_k}^2}$$

und zusammen mit dem ersten Integral (1.2) ergibt sich dann für die quadrierten Ableitungen $(u'_{h_k})^2$.

$$\begin{aligned}
 (u'_{h_k})^2 &= \frac{(w'_{h_k})^2}{w_{h_k}^4} = \frac{h_k^{-4}w'(h_k + h_k^{-1}\zeta)^2}{h_k^{-4}w(h_k + h_k^{-1}\zeta)} \\
 &= \frac{(w^4 + 4zw^3 + 4(z^2 - \alpha)w^2 - 2\beta - 4wW)(h_k + h_k^{-1}\zeta)}{w^4(h_k + h_k^{-1}\zeta)} \\
 &= 1 + \frac{4(h_k + h_k^{-1}\zeta)w^3 + 4((h_k + h_k^{-1}\zeta)^2 - \alpha)w^2 - 2\beta - 4wW}{w^4(h_k + h_k^{-1}\zeta)} \\
 &= 1 + \frac{4(1 + h_k^{-2}\zeta)}{h_k^{-1}w(h_k + h_k^{-1}\zeta)} + \frac{4((1 + h_k^{-2}\zeta)^2 - h_k^{-2}\alpha)}{h_k^{-2}w^2(h_k + h_k^{-1}\zeta)} \\
 &\quad + \frac{-h_k^{-4}2\beta}{h_k^{-4}w^4(h_k + h_k^{-1}\zeta)} - \frac{4h_k^{-3}W}{h_k^{-3}w^3(h_k + h_k^{-1}\zeta)} \\
 &= 1 + u_{h_k}O(1) + O(1)u_{h_k}^2 + O(|h_k^{-4}|)u_{h_k}^4 + 4(h_k^{-3}W(h_k + h_k^{-1}\zeta))u_{h_k}^3
 \end{aligned}$$

Da der Ausdruck $(h_k^{-3}W(h_k + h_k^{-1}\zeta))$ für $h_k \rightarrow \infty$ mit $h_k \notin \mathcal{P}_\epsilon$ beschränkt bleibt, erhält man

$$\lim_{h_k \rightarrow \infty} (u'_{h_k})^2 = 1.$$

□

Die Folge der Reskalierten konvergiert in der chordalen Metrik lokal gleichmäßig gegen die Grenzfunktion \mathfrak{w} . Abseits der Polstellen ist die chordale Konvergenz äquivalent zur euklidischen Konvergenz, so dass nach dem Satz von Weierstraß die Ableitungen der Reskalierten lokal gleichmäßig außerhalb der Polstellen konvergieren. Die Reskalierung von (1.2) führt wie oben gesehen auf den Term $W(z)z^{-3}$, der für $z \notin \mathcal{P}_\epsilon$ beschränkt bleibt und somit zumindest für Teilfolgen einen Grenzwert besitzt. Die Gesamtheit all dieser Grenzwerte bildet die sogenannte *Clustermenge*, die im folgenden Abschnitt untersucht werden soll.

3.3 Die Clustermenge \mathbf{CL}

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die subnormalen Lösungen zu charakterisieren und zu identifizieren. Ein entscheidendes Werkzeug dabei stellt die Clustermenge¹ \mathbf{CL}_ϵ dar, die aus allen Grenzwerten

$$\lim_{h_n \rightarrow \infty} h_n^{-3} W(h_n)$$

für $\inf_n |h_n| \text{dist}(h_n, \mathcal{P}) \geq \epsilon$ besteht. Anhand von ihr lassen sich die Lösungen der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung charakterisieren (siehe auch [18]). Als Ausgangspunkt dient die reskalierte vierte PAINLEVÉsche Differentialgleichung (3.2), für deren Ableitung gilt

$$\mathfrak{w}''' = 6\mathfrak{w}'\mathfrak{w}^2 + 12\mathfrak{w}'\mathfrak{w} + 4\mathfrak{w}'.$$

Dies führt auf

$$\mathfrak{w}'' = 2\mathfrak{w}^3 + 6\mathfrak{w}^2 + 4\mathfrak{w} + 2c,$$

erweitert mit $2\mathfrak{w}'$ und anschließende Integration liefert

$$\mathfrak{w}'^2 = \mathfrak{w}^4 + 4\mathfrak{w}^3 + 4\mathfrak{w}^2 + 4\mathfrak{w}c.$$

Nach Reskalierung von (1.2) mit einer Folge (h_n) und $h_n \notin \mathcal{P}_\epsilon$ erhält man

$$\mathfrak{w}'^2 = \mathfrak{w}^4 + 4\mathfrak{w}^3 + 4\mathfrak{w}^2 + 2\mathfrak{w} \cdot \left(-2 \lim_{h_n \rightarrow \infty} h_n^{-3} W(h_n + h_n^{-1}\zeta)\right). \quad (3.6)$$

In Anlehnung an die Situation für die zweite PAINLEVÉsche (siehe [22]) lassen sich die folgenden Eigenschaften der Clustermenge \mathbf{CL}_ϵ festhalten.

¹ Der Begründer der Theorie der *Clustersets* war PAINLEVÉ, der ihr im Jahre 1895 zuerst den Namen *domaine d'indétermination* gab sowie den Status einer gesonderten mathematischen Bezeichnung für die Menge der Grenzpunkte einer Funktion in einem Randpunkt ihres Definitionsgebietes. Diese Menge nennt man nun *cluster set* der Funktion im entsprechenden Punkt. Entstanden ist die Theorie im Zusammenhang mit analytischen Funktionen, jedoch hat die breite Anwendbarkeit dazu geführt, dass sie zu einem festen Bestandteil der topologischen Funktionentheorie geworden ist (siehe [2]).

3.3. Die Clustermenge \mathbf{CL}

Proposition 4. Die Clustermenge \mathbf{CL}_ϵ , bestehend aus allen Grenzwerten

$$\lim_{h_n \rightarrow \infty} h_n^{-3} W(h_n), \quad h_n \notin \mathcal{P}_\epsilon,$$

ist abgeschlossen, zusammenhängend und beschränkt durch ein $K = K(\epsilon)$.

Beweis. Die Beschränktheit ergibt sich unmittelbar aus $W(z) = O(|z|^3)$ für $z \rightarrow \infty$ und $z \notin \mathcal{P}_\epsilon$. Außerhalb von \mathcal{P}_ϵ gilt somit für eine Folge $h_n \notin \mathcal{P}_\epsilon$

$$h_n^{-3} W(h_n) = h_n^{-3} O(|h_n|^3) = O(1).$$

Sei (c_k) eine Folge in \mathbf{CL}_ϵ , konvergent in \mathbb{C} . Wähle dazu eine Folge $h_k \notin \mathcal{P}_\epsilon$ mit $|c_k - W(h_k)h_k^{-3}| < \frac{1}{k}$ sowie $|h_{k+1}| > 2|h_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ergibt sich für den Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$ aus

$$|c - W(h_k)h_k^{-3}| \leq \frac{1}{k} + |c - c_k|,$$

dass dieser Element der Clustermenge ist und diese somit abgeschlossen ist. Der Nachweis, dass die Clustermenge \mathbf{CL}_ϵ zusammenhängend ist, erfolgt mittels eines Zusammenhangsschlusses. Dazu sei für den Moment angenommen, dass sich die Clustermenge \mathbf{CL}_ϵ als disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen A, B schreiben lässt. Betrachte zu $\Phi(z) := z^{-3}W(z)$ je zwei Folgen (h_n') sowie (h_n'') mit

$$\Phi(h_n') \rightarrow a \in A \text{ für } (h_n' \rightarrow \infty) \text{ und}$$

$$\Phi(h_n'') \rightarrow b \in B \text{ für } (h_n'' \rightarrow \infty).$$

Dies führt auf Verbindungskurven γ_n , die jeweils h_n' und h_n'' miteinander verbinden, mit der Zusatzeigenschaft, dass jeder Punkt $z \in \gamma_n$ der Verbindungskurve wegen

$$\min_{z \in \gamma_n} |z| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

ebenfalls nach Unendlich strebt. Als Kurve bedient man sich einer modifizier-

3.3. Die Clustermenge \mathbf{CL}

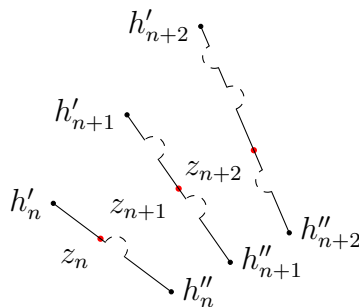


Abbildung 3.1: Verbindungskurven γ_n

ten Geraden, die die Polstellenumgebungen $\Delta_\epsilon(p)$ umläuft. Dies ist möglich, da \mathcal{P}_ϵ aus disjunkten² Kreisscheiben besteht. Betrachtet man die Abstände $\text{dist}(\Phi(z), A)$ sowie $\text{dist}(\Phi(z), B)$ für $z \in \gamma_n$, so stellt man mit dem Zwischenwertsatz fest, dass Punkte z_n auf den Kurven γ_n existieren, in denen Gleichheit herrscht. Gemeinsam mit der Dreiecksungleichung und der Abgeschlossenheit der Mengen A und B ergibt dies

$$\text{dist}(\Phi(z_n), A) = \text{dist}(\Phi(z_n), B) \geq \frac{1}{2} \text{dist}(A, B) > 0.$$

Mit Hilfe dieser Folge (z_n) mit $z_n \notin \mathcal{P}_\epsilon$ und $z_n \rightarrow \infty$ führt man abermals eine Reskalierung durch. In diesem Fall ergibt sich mit

$$\Phi(z_n) = z_n^{-3} W(z_n) \rightarrow c \notin A \cup B$$

der gewünschte Widerspruch. □

Des Weiteren lässt sich festhalten, dass die Clustermenge \mathbf{CL}_ϵ für $0 < \epsilon < \epsilon_0$ unabhängig von ϵ ist und alle Grenzwerte der Form

$$-c = \lim_{p_n \rightarrow \infty} p_n^{-3} [2\mathbf{h}(p_n) + 2(\alpha \mp 1)p_n] = \lim_{p_n \rightarrow \infty} 2p_n^{-3} \mathbf{h}(p_n)$$

enthält.

²Die Disjunktheit der Polstellenumgebungen $\Delta_\epsilon(p)$ ergibt sich im Zuge der Reskalierung aus der Disjunktheit der Polstellen der Lösungen von Gleichung (3.5) (siehe dazu nachfolgenden Abschnitt 3.4 *Verteilung der Polstellen*).

3.3. Die Clustermenge \mathbf{CL}

Proposition 5. Die Clustermenge $\mathbf{CL} = \mathbf{CL}_\epsilon$ ist für $0 < \epsilon < \epsilon_0$ unabhängig von ϵ . Jeder Grenzwert der Form

$$\lim_{p_n \rightarrow \infty} p_n^{-3} [2\mathbf{h}(p_n) + 2(\alpha \mp 1)p_n] = \lim_{p_n \rightarrow \infty} 2p_n^{-3} \mathbf{h}(p_n), \quad (3.7)$$

wobei (p_n) eine passende Folge von Polstellen bezeichnet, gehört ebenfalls zur Clustermenge \mathbf{CL} . Für $|h_n^{-1}| \text{dist}(h_n, \mathcal{P}) \rightarrow \infty$ strebt $h_n^{-3}W(h_n)$ gegen 0 oder $-\frac{8}{27}$.

Beweis. Die Idee besteht darin, dass, sofern der Grenzwert $\lim_{h_n \rightarrow \infty} w_{h_n} = \mathfrak{w}$ existiert und den Gleichungen (3.4) bzw. (3.5) genügt und falls (k_n) eine Folge mit $|h_n||h_n - k_n| \leq M$ ist, so existieren Teilfolgen von (w_{k_n}) mit $\lim_{k_{n_j} \rightarrow \infty} w_{k_{n_j}} = \mathfrak{w}(\zeta_0 + \zeta)$, deren Grenzlösung derselben autonomen Differentialgleichung genügt wie $\mathfrak{w}(\zeta)$. Demnach besitzen beide dieselbe Integrationskonstante $-c \in \mathbf{CL}$. Wähle $\eta > \epsilon > 0$, so gilt $\mathbf{CL}_\eta \subset \mathbf{CL}_\epsilon$, denn durch $\eta > \epsilon$ werden mehr potentielle Folgen (h_n) und zugehörige Grenzwerte ausgeschlossen. Es bleibt die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Im lokalen Maßstab

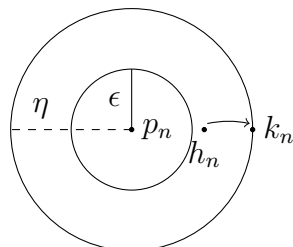


Abbildung 3.2: Verschiebung im lokalen Maßstab $|p_n|^{-1}$

betrachtet man die h_n in den Kreisringen $\epsilon|p_n|^{-1} \leq |h_n - p_n| \leq \eta|p_n|^{-1}$ und versucht, diese nach *Außen* zu schieben. Betrachte dazu $k_n = h_n + |p_n|^{-1}\eta_n$ mit η_n beschränkt und konvergent $\eta_n \rightarrow z_0$, zumindest für eine Teilfolge nach Bolzano-Weierstraß. Statt um h_n zu reskalieren, reskaliert man nun um k_n mit $k_n^{-1} = h_n^{-1}(1 + o(1))$. Es gilt ebenso $h_n^{-1} = k_n^{-1}(1 + o(1))$. Es ist $h_n = k_n - |p_n|^{-1}\eta_n = k_n - k_n^{-1}(1 + o(1))\eta_n$, das heißt, p_n , k_n und h_n verhalten sich asymptotisch ähnlich.

3.3. Die Clustermenge \mathbf{CL}

Analog zum Normalitätsnachweis aus Abschnitt 3.2 *Normalität der Reskalierten* $(w_h)_{|h| \geq 1}$ erhält man eine Verschiebung im Argument

$$\begin{aligned} w_{h_n}(\zeta) &= k_n^{-1}(1 + o(1))w(k_n^{-1} - k_n^{-1}(1 + o(1))\eta_n + k_n^{-1}(1 + o(1))\zeta) \\ &= k_n^{-1}(1 + o(1))w(k_n^{-1} + k_n^{-1}(1 + o(1))(\zeta - \eta_n)) \\ &= (1 + o(1))w_{k_n}(\zeta - \eta_n + o(1)). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist η die Variable der Reskalierung. Beide Reskalierten konvergieren nun gegen eine Grenzfunktion \mathfrak{w}_h sowie \mathfrak{w}_k mit $\mathfrak{w}_h(\zeta) = \mathfrak{w}_k(\zeta + \eta_0)$. Darüber hinaus genügen beide Lösungen einer autonomen, das heißt, zeitunabhängigen Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_h'' &= 2\mathfrak{w}_h^3 + 6\mathfrak{w}_h^2 + 4\mathfrak{w}_h + 2c \\ \mathfrak{w}_k'' &= 2\mathfrak{w}_k^3 + 6\mathfrak{w}_k^2 + 4\mathfrak{w}_k + 2\tilde{c}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun, dass, egal wie klein man das ϵ wählt, Verschiebung samt Reskalierung auf denselben Grenzwert führen. Zwei identische Lösungen mit einer gemeinsamen, verschiebungsinvarianten Differentialgleichung liefern $c = \tilde{c}$ und somit $\mathbf{CL}_\epsilon = \mathbf{CL}$.

Im Fall der Polstellen verfährt man ähnlich, verschiebt und reskaliert abermals und erhält ebenfalls eine Verschiebung. Damit stimmen alle Grenzwerte $\lim_{h_n \rightarrow \infty} h_n^{-3}W(h_n)$, die der Relation $\epsilon|p_n|^{-1} \leq |h_n - p_n| \leq \eta|p_n|^{-1}$ genügen, das heißt

$$0 < a \leq |h_n| \operatorname{dist}(h_n, \mathcal{P}) \leq b < \infty,$$

mit einem Grenzwert (3.7) überein, wobei $a = 0$ gerade dem Fall der Polstellen entspricht. Falls $|h_n| \operatorname{dist}(h_n, \mathcal{P})$ gegen ∞ strebt, so konvergiert (w_{h_n}) gegen $\mathfrak{w} \in \{0, -2/3, -2\}$ und somit $h_n^{-3}W(h_n)$ gegen 0 bzw. $-8/27$. Dies liegt daran, dass Polstellen der Grenzfunktion nur als Häufungswerte der Polstellen der Reskalierten auftreten können. Bleiben diese von den Polen fern, so ist die Grenzfunktion polstellenfrei, in diesem Falle also konstant. \square

3.3. Die Clustermenge \mathbf{CL}

Damit lassen sich nun die subnormalen Lösungen charakterisieren.

Proposition 6. *Sei w eine subnormale Lösung der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$, so gilt für ihre Clustermenge $\mathbf{CL} = \{0\}$ oder $\mathbf{CL} = \{-8/27\}$.*

Beweis. Sei w eine subnormale Lösung der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ und enthalte die Clustermenge \mathbf{CL} einen von 0 und $-8/27$ verschiedenen Parameter $c = \lim_{h_n \rightarrow \infty} h_n^{-3}W(h_n)$. Der Ausdruck $W(z)z^{-3}$ variiert nur schwach aufgrund von

$$\frac{d}{dz}W(z)z^{-3} = -3W(z)z^{-4} + (w^2 + 2zw)(z^{-3}) = O(|z|^{-1}) \text{ außerhalb von } \mathcal{P}_\epsilon.$$

Dies bedeutet, dass, wenn man mit einer Folge \tilde{h}_n in der Nähe der h_n bleibt, man von den kritischen Werten 0 und $-8/27$ fernbleibt.

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ hinreichend klein existiert ein $1 \geq \eta > 0$, so dass die Reskalierung mit einer Folge \tilde{h}_n mit $|\tilde{h}_n - h_n| < \eta|h_n|$ auf eine Lösung \mathfrak{w} der Gleichung (3.5) führt. Der zugehörige Parameter c genügt

$$\min\{|c|, |c + 8/27|\} \geq \epsilon, |c| \leq 1/\epsilon$$

und bleibt demnach von den kritischen Punkten fern. In diesem Fall lässt sich Gleichung (3.5) nach ([20]) auf die Weierstraßsche Normalform³ bringen:

$$v'^2 = 4v^3 - g_2(c)v - g_3(c) \tag{3.8}$$

mit nicht verschwindender Diskriminante $\Delta(c) \neq 0$ für $c \neq 0, -8/27$. Das heißt, \mathfrak{w} löst nach Anwendung einer Möbiustransformation Gleichung (3.8) und ist somit eine elliptische Funktion mit zugehörigem Fundamentalparallelogramm P_c , dessen Perioden ω_i gleichmäßig beschränkt und von Null weg beschränkt bleiben:

$$0 < |\omega_i(c)| \leq K.$$

³(siehe nachfolgenden Abschnitt 3.4 *Verteilung der Polstellen*)

3.3. Die Clustermenge \mathbf{CL}

Damit bleiben auch Durchmesser und Fläche des Periodenparallelogramms gleichmäßig beschränkt und ebenfalls von Null entfernt.

Aufgrund der Beschränktheit der Perioden existiert ein $R > 0$, so dass für alle $|h_n| > h_0$ und jeden Punkt $p_0 \in |z - h_n| < \eta|h_n|$ die Kreisscheiben $\Delta_R(p_0) = \{z : |z - p_0| < R|p_0|^{-1}\}$ mindestens eine Polstelle enthalten. Damit lässt sich die Frage nach einer unteren Abschätzung der Polstellenanzahl interpretieren als Frage nach der Anzahl an Kreisscheiben $\Delta_R(p_0)$, der es bedarf, um die Kreisscheibe $K := |z - h_n| < \eta|h_n|$ zu überdecken. Aufgrund der Kompaktheit der Kreisscheibe K kann man um jede Polstelle $p \in K$ eine Kreisscheibe $\Delta_R(p)$ legen und ggf. den Radius R vergrößern bis $\bigcup_{p \in K} \Delta_R(p) \supset K$ gilt. Damit ergibt sich eine untere Abschätzung der Polstellenzahl als Quotient der Kreisflächen. Da sich die Polstellen p asymptotisch wie h_n verhalten⁴, das heißt $p \asymp h_n$ (für $z \rightarrow \infty$), ergibt sich als untere Abschätzung für die Anzahl an Polstellen \mathbf{p} in K

$$\mathbf{p} \geq \frac{\text{Area}(K)}{\text{Area}(\Delta_R(p))} \geq \frac{\text{Area}(K)}{\max_{p \in K}(\text{Area}(\Delta_R(p)))} = \frac{\pi\eta^2|h_n|^2}{\pi R^2|p|^{-2}} = \text{const.}|h_n|^4.$$

Somit enthält die Kreisscheibe $|z - h_n| \leq \eta|h_n|$ mindestens $\text{const.}|h_n|^4$ Polstellen von w . Dies liefert für $n(r, w)$ mit $r = 2|h_n|$

$$n(2|h_n|, w) \geq \text{const.}|h_n|^4.$$

Gemeinsam mit $n(r, \mathcal{P}) = O(r^4)$ liefert dies $n(r_k, \mathcal{P}) \asymp r_k^4$, zumindest für eine Teilfolge $r_k \rightarrow \infty$ und somit den Widerspruch zur Subnormalität der Lösung. □

Man bezeichnet die subnormalen Lösungen mit Clustermenge $\mathbf{CL} = \{0\}$ als subnormale Lösungen *erster Art* und entsprechend mit $\mathbf{CL} = \{-8/27\}$ als subnormale Lösungen *zweiter Art*.

⁴ Hier und im Folgenden bedeutet $\Phi(z) \asymp \Psi(z)$ auf einem reellen oder komplexen Gebiet: $|\Phi(z)| = O(|\Psi(z)|)$ und $|\Psi(z)| = O(|\Phi(z)|)$.

3.4 Verteilung der Polstellen

Um die globale Verteilung der Polstellen subnormaler Lösungen zu beschreiben, bedarf es Resultaten über die lokale Verteilung der Polstellen. Diese hängt von den Polstellen der Grenzfunktion $\mathfrak{w} = \lim_{p_n \rightarrow \infty} w_{p_n}$ ($p_n \in \mathcal{P}$) ab. Die Grenzgleichung (3.5) der reskalierten Differentialgleichung in \mathfrak{w} ist vom Typ

$$w'^2 = Q(w), \quad Q \text{ ist ein Polynom vom Grad 3 oder 4,} \quad (3.9)$$

die sich via Möbiustransformation der Form $v(z) = M(w(az))$ für eine passende Konstante a auf die Weierstraßsche Normalform $v'^2 = 4v^3 - g_2v - g_3$ bringen lassen. Deren Lösungen sind konstant, nicht-konstant rational, einfach-periodisch oder doppelt-periodisch, abhängig davon, ob ihre zugehörige Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ verschwindet oder nicht (siehe [15] und [20]). Die konstanten Lösungen treten als Nullstellen des Polynoms $Q(c) = 4c^3 - g_2c - g_3$ auf. Verschwinden $g_2 = g_3 = 0$, so treten nicht konstante rationale Lösungen der Form $v(z) = 1/(z - z_0)^2$ auf. Im degenerierten Fall $\Delta = 0$, mit $g_2g_3 \neq 0$, treten einfach-periodische Lösungen auf. Für $v'^2 = 4(v + 2c)(v - c)^2$, $c \neq 0$ ergibt sich als allgemeine nicht konstante Lösung $v(z) = -2c - 3c \tan^2(z_0 + \sqrt{-3c}z)$. Im allgemeinen Fall sind die Lösungen elliptische Funktionen bzw. Weierstraßsche \wp -Funktionen, sie treten auf für von Null verschiedene Diskriminanten $\Delta \neq 0$. Aufgrund der vorangegangenen Diskussion sowie motiviert durch die Diskriminante $\Delta(\mathfrak{w}) = -256c^3(27c - 8)$ der Gleichung (3.5), werden zusätzlich zu den konstanten Lösungen noch einfach-periodische trigonometrische Lösungen auftreten.

Beispiel 1. Im Falle der subnormalen Lösungen zweiter Art liegt der degenerierte Fall vor. Denn es lässt sich (3.5) mit $c = \frac{8}{27}$ via Möbiustransformation auf die Normalform

$$v'^2 = 4v^3 - \frac{12}{81}v - \frac{8}{729}$$

bringen, mit $\Delta(v) = 0$, $g_2 = \frac{12}{81}$ und $g_3 = \frac{8}{729}$.

3.5 Subnormale Lösungen erster Art

Für subnormale Lösungen erster Art mit Clustermenge $\mathbf{CL} = \{0\}$ und $\Delta(\mathfrak{w}) = 0$ ergibt sich als Differentialgleichung für die Grenzfunktion \mathfrak{w}

$$\mathfrak{w}'^2 = \mathfrak{w}^2(\mathfrak{w} + 2)^2 \quad (3.10)$$

mit den trivialen Lösungen $\mathfrak{w} = 0$ sowie $\mathfrak{w} = -2$. Die weiteren (trigonometrischen) Lösungen von Gleichung (3.10) sind von der Form

$$\mathfrak{w}(z) = \frac{2ce^{\pm 2z}}{1 - ce^{\pm 2z}} = \frac{2e^{\pm 2z + \eta}}{1 - e^{\pm 2z + \eta}}, \quad (c = e^\eta).$$

Beweis. Aus der Gleichung (3.10) ergibt sich direkt die Gleichung

$$\mathfrak{w}' = \pm \mathfrak{w}(\mathfrak{w} + 2). \quad (3.11)$$

Da die Variable z in der Gleichung (3.11) nicht explizit auftritt, lässt sich die Gleichung elementar integrieren (siehe [6] und [10]) und man erhält

$$\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w} + 2} = ce^{\pm 2z}.$$

Insgesamt erhält man als Lösung

$$\mathfrak{w} = \frac{2e^{\pm 2z + \eta}}{1 - e^{\pm 2z + \eta}}$$

mit Polstellen in

$$p_k = \mp \frac{\eta}{2} + k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

und zugehörigen Residuen, die für alle Pole p_k konstant sind, das heißt

$$\text{Res}(\mathfrak{w}, p_k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ resp. } \text{Res}(\mathfrak{w}, p_k) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

□

Polverteilung der reskalierten Lösung sowie der Ausgangslösung

Ziel ist es nun, von den Polstellen der Grenzlösung \mathfrak{w} der Reskalierten $(w_h)_{|h|\geq 1}$ auf die Polstellen der approximierenden reskalierten Lösung w_h und final auf die Polverteilung der Ausgangslösung w zu schließen. Dabei erbt die Ausgangslösung w die Regularität der Polstellenverteilung der Grenzlösung \mathfrak{w} wie folgt.

Lemma 2. *Sei w eine transzendente subnormale Lösung erster Art, dann existiert zu $\epsilon > 0$ und $R > 0$ ein $r_0 > 0$, so dass für jede Polstelle p mit $|p| > r_0$ die Polstellen von w in $\Delta_R(p) = \{z : |z - p| < R|p|^{-1}\}$ wie folgt bezeichnet werden können:*

$$|p_k - (p + k\pi ip^{-1})| < \epsilon|p|^{-1} \quad (-k_1 \leq k \leq k_2, k_1 \text{ und } k_2 \text{ nur von } R \text{ abhängig})$$

Beweis. Aufgrund der Normalität der Familie der Reskalierten $(w_p)_{|p|\geq 1}$ ergeben sich nach Satz 3.2, dem Satz von Hurwitz, die Polstellen der Grenzfunktion als Grenzwerte von Folgen von Polstellen einer Approximierendenfolge. Somit existiert zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ und $R > 0$ ein $r_0 > 0$, so dass w_p in $B_R(z)$ für $|p| > r_0$ genauso viele Polstellen besitzt wie \mathfrak{w} . Das heißt, für die Polstellen \tilde{p}_k von w_p in $B_R(0)$ gilt $\tilde{p}_k \in \Delta_\epsilon(k\pi i)$ bzw. $\tilde{p}_k = k\pi i + \delta_k$ und $|\delta_k| < \epsilon$. Damit erhält man für die Polstellen p_k von w , dass sie $p_k = p + k\pi ip^{-1} + \delta_k p^{-1}$ genügen. Somit enthält $\Delta_R(p)$ gerade alle Polstellen p_k von w mit

$$|p_k - (p + k\pi ip^{-1})| < \epsilon|p|^{-1}, \quad (-k_1 \leq k \leq k_2)$$

und keine weiteren. Die Konstanten k_1 und k_2 hängen nur von R ab und ergeben sich als $k_i = \lfloor R/|\omega| \rfloor$, wobei ω die Periode der Polstellen der Grenzfunktion \mathfrak{w} bezeichnet (z.B. $R = 1000$ mit $k_i = 318 \sim \frac{1000}{\pi}$).

□

Somit lassen sich die Polstellen als Teil einer eindeutig bestimmten Kette auffassen. Diese Regularität der Polstellen p_k führt zum Begriff der *Polkette*.

Definition 2. Eine Polkette in einem Sektor

$$S_0 : |\arg z - \pi/4| \leq \pi/4, \quad |z| \geq r_0 > 0$$

ist eine Folge von Polstellen $(p_k)_{k=0,1,2,\dots}$ mit

$$p_{k+1} = p_k + \pi i p_k^{-1} (1 + o(1)) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Man nennt p_0 die Wurzel der Polkette $(p_k)_{k=0,1,2,\dots}$ und eine Polkette maximal, falls $p_{-1} \notin S_0$.

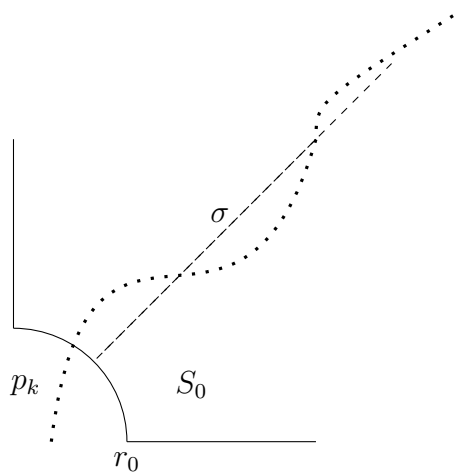


Abbildung 3.3: Beispiel einer zum Strahl σ asymptotischen Polkette $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Bemerkung. Für ein $p_{-1} \in S_0$ lässt sich die zugehörige Kette eindeutig *nach links* fortsetzen mit $(p_k)_{k > -k_0} \subset S_0$ und $p_{-k_0} \notin S_0$. Nach entsprechender Umbenennung bzw. Shift der Bezeichnung, kann man o.B.d.A. immer davon ausgehen, dass die Polkette $(p_k)_{k=0,1,2,\dots} \subset S_0$ maximal ist.

Proposition 7. Für $r_0 > 0$ hinreichend groß, ist jeder Pol p_0 im Sektor S_0 die Wurzel einer eindeutig bestimmten Polkette $(p_k)_{k=0,1,2,\dots}$ in S_0 mit den folgenden Eigenschaften

- a) *w hat konstante Residuen entlang der Polkette;*

b) $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg p_k = \pi/4;$

c) Die Anzahlfunktion der Polkette genügt:

$$n(r) = \frac{r^2}{2\pi}(1 + o(1)).$$

Beweis.

a) Die konstanten Residuen entlang der Polketten ergeben sich direkt aus der Reskalierung via Hurwitz. Die Grenzlösung \mathfrak{w} hat konstante Residuen und w hat ± 1 als mögliche Residuen, somit ergibt sich aufgrund der Konvergenz, dass die Residuen konstant sind für $|\tilde{p}_k| > r_0$.

b) Die Konstruktion der Folge (p_k) ist offensichtlich, vgl. dazu Lemma 2. Sei $c_n = r_0$, der zu $\epsilon = \epsilon_n = 10^{-n}$ und $R = 4 > \pi$ gehörende Parameter. Sei $p_0 \in S_0$. Für p_k ist nach Lemma 2 p_{k+1} eindeutig bestimmt. Es bleibt zu zeigen, dass das Procedere nicht abbricht, das heißt $p_{k+1} \in S_0$. Sei $p_k = |p_k|e^{i\theta_k}$ mit $p_{k+1} = p_k + \pi i p_k^{-1}(1 + o(1))$. Betrachte die dazu konjugierte Folge bzw. das durch Rotation konjugierte Problem, das heißt $\tilde{p}_k = p_k e^{-i\pi/4}$. Zu zeigen ist dann, dass $\tilde{p}_{k+1} \in \tilde{S}_0 = \{|\arg z| < \frac{\pi}{4}\}$ gilt.

i) Für den Realteil ergibt sich die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{p}_{k+1} &= \operatorname{Re}(p_{k+1} e^{-i\pi/4}) = \operatorname{Re}((p_k + \pi i p_k^{-1}(1 + o(1)))e^{-i\pi/4}) \\ &= \operatorname{Re} \tilde{p}_k + \operatorname{Re} \left(\pi i |p_k|^{-1} e^{-i\theta_k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) (1 + o(1)) \right) \\ &= \operatorname{Re} \tilde{p}_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}} |p_k|^{-1} \operatorname{Re}((i + 1)(\cos \theta_k - i \sin \theta_k)(1 + o(1))) \\ &\geq \operatorname{Re} \tilde{p}_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}} |p_k|^{-1} (\cos \theta_k + \sin \theta_k - \epsilon_1) \\ &\geq \operatorname{Re} \tilde{p}_k + \frac{3}{2} |p_k|^{-1} \end{aligned}$$

ii) Für den Imaginärteil ergibt sich die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 |\operatorname{Im} \tilde{p}_{k+1}| &= |\operatorname{Im} p_{k+1} e^{-i\pi/4}| \\
 &= |\operatorname{Im}(p_k + \pi i p_k^{-1}(1 + o(1))) e^{-i\pi/4}| \\
 &\leq |\operatorname{Im} \tilde{p}_k| + |p_k|^{-1} \left(\epsilon_1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} (\cos \theta_k - \sin \theta_k) \right) \\
 &\leq |\operatorname{Im} \tilde{p}_k| + |p_k|^{-1} \epsilon_1
 \end{aligned}$$

Mit $\frac{a+b}{c+d} \leq \max\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\}$ für $a, b, c, d > 0$, erhält man für den Winkel $\tilde{\theta}_{k+1}$

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\theta}_{k+1}| &= \arctan \frac{|\operatorname{Im} \tilde{p}_{k+1}|}{\operatorname{Re} \tilde{p}_{k+1}} \\
 &\leq \arctan \left(\max \left\{ \frac{|\operatorname{Im} \tilde{p}_k|}{\operatorname{Re} \tilde{p}_k}, \frac{2\epsilon_1}{3} \right\} \right) \leq \max\{|\tilde{\theta}_k|, \epsilon_1\}.
 \end{aligned}$$

Für den Realteil ergibt sich somit: $\operatorname{Re} \tilde{p}_k \rightarrow \infty$ und für den Betrag des Imaginärteils $|\operatorname{Im} \tilde{p}_k|$ gilt, dass er fällt, solange $|\tilde{\theta}_k| \geq \epsilon_1$ ist, das heißt $|\theta_k - \pi/4| > \epsilon_1$. Aufgrund von $|\tilde{\theta}_k| \leq \frac{|\operatorname{Im} \tilde{p}_k|}{\operatorname{Re} \tilde{p}_k}$ folgt, dass ein k_0 existiert mit $|\tilde{\theta}_{k_0}| < \epsilon_1$ und somit $|\tilde{\theta}_k| < \epsilon_1$ für alle $k \geq k_0$ nach obiger Ungleichungskette. Sei k_n der erste Index, so dass $\operatorname{Re} \tilde{p}_k > r_n$ gilt, so zeigt obiges Argument, dass ein $k_{n_0} \geq k_n$ existiert, so dass $|\tilde{\theta}_k| \leq \epsilon_n$ gilt für $k \geq k_{n_0}$, das heißt $|\theta_k - \pi/4| < \epsilon_n$ für $k \geq k_{n_0}$.

c) Man betrachte die konjugierte Folge $q_k = p_k^2$. Dies zusammen mit $p_{k+1} = p_k + \pi i p_k^{-1}(1 + o(1)) = p_k + \pi i p_k^{-1} + o(|p_k|^{-1})$ liefert

$$\begin{aligned}
 q_{k+1} &= p_{k+1}^2 = (p_k + \pi i p_k^{-1}(1 + o(1)))^2 \\
 &= p_k^2 (1 + \pi i p_k^{-2}(1 + o(1)))^2 \\
 &= q_k (1 + 2\pi i p_k^{-2}(1 + o(1))) \\
 &= q_k + 2\pi i + o(1) = 2k\pi i + o(k) = k(2\pi i + o(1)).
 \end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt dann $p_k = \pm(k(2\pi i + o(1)))^{1/2}$ für $(k \rightarrow \infty)$.

Dies liefert für das Argument $\arg p_k$ der Polkette

$$s_\nu : \arg p_k = \frac{2\nu + 1}{4}\pi + o(1) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Für die Anzahl $n(r, (p_k))$ an Polstellen einer Polkette (p_k) im Sektor S_0 , geschnitten mit dem Kreis $|z| < r$, ergibt sich aus $|p_k| = |\pm(k(2\pi i + o(1)))^{1/2}| < r$:

$$n(r, (p_k)) = \frac{r^2}{2\pi}(1 + o(1)).$$

□

Allgemein lässt sich nun für die Polverteilung subnormaler Lösungen erster Art festhalten.

Satz 3.3. *Sei w eine subnormale Lösung erster Art, so lassen sich, bis auf endlich viele, die Polstellen von w aufteilen auf eine endliche Anzahl $\mathbf{n}(w)$ maximaler Ketten $\sigma = (p_k)$ mit Zählfunktion $n(r, w) = \mathbf{n}(w)\frac{r^2}{2\pi}(1 + o(1))$, so dass das Folgende gilt*

- a) w hat konstante Residuen entlang der Polkette σ
- b) σ ist asymptotisch zu einem der Stokesstrahlen

$$s_\nu : \arg z = \theta_\nu = \frac{(2\nu + 1)\pi}{4}, \quad \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$$

- c) je zwei solcher maximalen Ketten $\sigma = (p_k)$ und $\tilde{\sigma} = (\tilde{p}_k)$ sind getrennt voneinander, das heißt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |p_k| \operatorname{dist}(p_k, \tilde{\sigma}) = \lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{p}_k| \operatorname{dist}(\tilde{p}_k, \sigma) = \infty.$$

Für die Nevanlinnacharakteristik von w gilt $T(r, w) = \mathbf{n}(w)\frac{r^2}{\pi}(1 + o(1))$ und w genügt einer Asymptotik der Form $w = -2z + o(z)$ bzw. $w = o(z)$ für $z \rightarrow \infty$ auf den Sektoren $S'_0(\delta) = \{z : |\arg z| < \pi/4 - \delta\}$ und $S'_j = e^{\pi ij/2} S'_0$ mit $j \in \{1, 2, 3\}$.

Beweis. Aus $n(r, w) = O(r^2)$ folgt gemeinsam mit der Zählfunktion $n(r, w) = \mathbf{n}(w) \frac{r^2}{2\pi} (1 + o(1))$ direkt die Beschränktheit von $\mathbf{n}(w)$

$$\mathbf{n}(w) = O\left(\frac{n(r, w)}{r^2}\right) = O(1),$$

dass heißt, dass es nur endlich viele maximale Polketten σ geben kann. Des Weiteren ergibt sich aus der Zählfunktion $n(r, w) = \mathbf{n}(w) \frac{r^2}{2\pi} (1 + o(1))$ für die Anzahlfunktion $N(r, w) = \mathbf{n}(w) \frac{r^2}{\pi} (1 + o(1)) + O(\log r)$. Gemeinsam mit dem Wissen über die Schmiegunsfunktion $m(r, w) = O(\log r)$ (vgl. Thm. 5 auf S. 61 in [4]) folgt damit für die Charakteristik $T(r, w) = \mathbf{n}(w) \frac{r^2}{\pi} (1 + o(1))$.

Die Aussagen a) und b) folgen direkt aus Proposition 7. Die Disjunktheit zweier solcher maximaler Ketten erhält man, da zu gegebenem $R > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $k \geq k_0$ die Kreisscheibe $\Delta_R(p_k)$ nur Pole der zugehörigen Kette enthält. Somit gilt $|p_k| \text{dist}(p_k, \tilde{\sigma}) \geq R$ für jede Kette $\tilde{\sigma} \neq \sigma$. Die Anfänge der Asymptotik von w ergeben sich unmittelbar aus dem Reskalierungsprozess mit einer Folge (h_n) mit $|h_n| \text{dist}(h_n, \mathcal{P}) \rightarrow \infty$. In diesem Fall führt die Reskalierung auf eine konstante Grenzfunktion $\mathfrak{w} = -2$ bzw. $\mathfrak{w} = 0$ und zusammen mit $\lim_{h_n \rightarrow \infty} w_{h_n} = \mathfrak{w} = \text{const.}$ und $w_{h_n}(\zeta) = h_n^{-1} w(h_n + h_n^{-1} \zeta)$ erhält man die Anfänge der Asymptotik. \square

3.6 Subnormale Lösungen zweiter Art

Für subnormale Lösungen zweiter Art mit Clustermenge $\mathbf{CL} = \{-8/27\}$ ergibt sich als Differentialgleichung für die Grenzfunktion \mathfrak{w}

$$\mathfrak{w}'^2 = \mathfrak{w}^4 + 4\mathfrak{w}^3 + 4\mathfrak{w}^2 + \frac{32}{27}\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{w}}{27}(27\mathfrak{w}^3 + 108\mathfrak{w}^2 + 108\mathfrak{w} + 32).$$

Die Faktorisierung der rechten Seite mit Hilfe von maple führt auf

$$\mathfrak{w}'^2 = \frac{\mathfrak{w}}{27}(3\mathfrak{w} + 8)(3\mathfrak{w} + 2)^2 \tag{3.12}$$

mit den trivialen Lösungen $\mathfrak{w} = 0$, $\mathfrak{w} = -\frac{8}{3}$ sowie $\mathfrak{w} = -\frac{2}{3}$.⁵ Die weiteren (trigonometrischen) Lösungen von Gleichung (3.12) ergeben sich als

$$\mathfrak{w}(z) = \frac{8}{9 \tan^2(z/\sqrt{3} + \eta) - 3}.$$

Beweis. Zur Lösung der Differentialgleichung (3.12) bedient man sich der Methoden, die einem die Theorie der Integration binomischer Gleichungen zur Verfügung stellt (siehe [10]). Der Ansatz

$$t^2 = \frac{3\mathfrak{w} + 8}{\mathfrak{w}} = 3 + \frac{8}{\mathfrak{w}}$$

mit

$$\mathfrak{w} = \frac{8}{t^2 - 3}$$

liefert dann

$$\mathfrak{w}' = -\frac{16tt'}{(t^2 - 3)^2}.$$

Eingesetzt in (3.12) führt dies auf eine Differentialgleichung in t der Form

$$t'^2 = \frac{1}{27}(9 + t^2)^2$$

bzw.

$$t' = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}(9 + t^2) = \pm\sqrt{3}(1 + (t/3)^2).$$

Diese Differentialgleichung entspricht bis auf Faktoren und Vorzeichen der des Tangens. Die Substitution $u = \frac{t}{3}$ führt auf die Gleichung

$$u' = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1 + u^2).$$

Mit dem Ansatz $u = \tan(az + c)$ erhält man $u(z) = \tan(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}z + \frac{1}{\sqrt{3}}c) = \pm \tan(\frac{1}{\sqrt{3}}z + \eta)$ und damit für $t = \pm 3 \tan(\frac{1}{\sqrt{3}}z + \eta)$.

⁵ Da die Lösungen $\mathfrak{w} = -\frac{8}{3}$ sowie $\mathfrak{w} = 0$ nicht als Grenzfunktionen auftreten, sind sie für die Untersuchung irrelevant.

Insgesamt erhält man als Lösung der Grenzdifferentialgleichung (3.12)

$$\mathfrak{w} = \frac{8}{9 \tan^2(z/\sqrt{3} + \eta) - 3}$$

mit Polstellen in

$$p_k = \eta \pm k\pi\sqrt{3} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

und dazugehörigen alternierenden Residuen, das heißt

$$\text{Res}(\mathfrak{w}, p_{k+1}) = -\text{Res}(\mathfrak{w}, p_k).$$

□

Polverteilung der reskalierten Lösung sowie der Ausgangslösung

Man erhält für die Polverteilung der reskalierten Lösung sowie der Ausgangslösung, analog zum Fall der subnormalen Lösungen erster Art, Aussagen über Polketten, Asymptotiken und Charakteristik.

Lemma 3. *Sei w eine transzendente subnormale Lösung zweiter Art, dann existiert zu $\epsilon > 0$ und $R > 0$ ein $r_0 > 0$, so dass für jede Polstelle $|p| > r_0$ die Polstellen von w in $\Delta_R(p) = \{z : |z - p| < R|p|^{-1}\}$ wie folgt bezeichnet werden können ($p_0 = p$):*

$$|p_k - (p + k\pi\sqrt{3}p^{-1})| < \epsilon|p|^{-1} \quad (-k_1 \leq k \leq k_2) \quad (3.13)$$

Beweis. Analog zu Lemma 2. □

Für subnormale Lösungen zweiter Art ergibt sich das folgende Analogon zu Satz 3.3.

Satz 3.4. *Sei w eine subnormale Lösung zweiter Art, so lassen sich, bis auf endlich viele, die Polstellen von w aufteilen auf eine endliche Anzahl $\mathfrak{n}(w)$ maximaler Ketten $\sigma = (p_k)$ mit Zählfunktion $n(r, w) = \mathfrak{n}(w) \frac{r^2}{2\pi\sqrt{3}}(1 + o(1))$, so dass das Folgende gilt*

3.6. Subnormale Lösungen zweiter Art

a) w hat alternierende Residuen entlang der Polkette σ

b) σ ist asymptotisch zu einem der Stokesstrahlen

$$s_\nu : \arg z = \theta_\nu = \frac{\nu\pi}{2}, \quad \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$$

c) je zwei solcher maximalen Ketten $\sigma = (p_k)$ und $\tilde{\sigma} = (\tilde{p}_k)$ sind getrennt voneinander, das heißt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |p_k| \operatorname{dist}(p_k, \tilde{\sigma}) = \lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{p}_k| \operatorname{dist}(\tilde{p}_k, \sigma) = \infty.$$

Für die Nevanlinncharakteristik von w gilt $T(r, w) = \mathbf{n}(w) \frac{r^2}{\pi\sqrt{3}}(1 + o(1))$ und w genügt einer Asymptotik der Form $w = -2/3z + o(z)$ für $z \rightarrow \infty$ auf allen Sektoren $S_0''(\delta) = \{z : |\arg z - \pi/4| < \pi/4 - \delta\}$ und $S_j'' = e^{\pi ij/2} S_0''(\delta)$ mit $j \in \{1, 2, 3\}$.

Beweis. Der Nachweis erfolgt analog zu Proposition 7 und Satz 3.3. In diesem Fall erhält man für die konjugierte Folge $q_k = p_k^2$ gemeinsam mit der Relation $p_{k+1} = p_k + \pi\sqrt{3}p_k^{-1} + o(|p_k|^{-1})$ die Beziehung

$$q_{k+1} = q_k^2 + 2\pi\sqrt{3} + o(1) = 2k\pi\sqrt{3} + o(k) = k(2\pi\sqrt{3} + o(1)).$$

Rücksubstitution liefert dann $p_k = \pm(k(2\pi\sqrt{3} + o(1)))^{1/2}$ für $k \rightarrow \infty$. Dies ergibt für das Argument des Stokesstrahles

$$s_\nu : \arg p_k = \frac{\nu\pi}{2} + o(1) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Des Weiteren lässt sich über die Polstellen festhalten, dass für die Anzahl $n(r, (p_k))$ an Polstellen einer Polkette (p_k) gilt:

$$n(r, (p_k)) = \frac{r^2}{2\pi\sqrt{3}}(1 + o(1)).$$

□

Kapitel 4

Asymptotik

Die Diskussion der reskalierten Lösungen führte auf zwei Typen subnormaler Lösungen, den Lösungen erster bzw. zweiter Art. Ausgehend von der Familie der Reskalierten (3.1), zusammen mit den konstanten Grenzlösungen $\mathfrak{w} = -2, -2/3, 0$ der Gleichung (3.2), erhält man einen ersten Hinweis auf die Art und Gestalt der Asymptotik. Für großes z , das heißt, für $z \rightarrow \infty$ verhält sich die Ausgangslösung w abseits der Polstellen wie $w(z) = -2z + o(z)$, $w(z) = -2z/3 + o(z)$ oder $w(z) = o(z)$. Hier und im Folgenden wird gezeigt, dass die Anfänge der sich bei der Reskalierung ergebenden Asymptotiken die Asymptotik in Gänze festlegen. Die sich unmittelbar anschließende Frage betrifft die Gültigkeit der Asymptotik. Dort lässt sich zeigen, dass diese jeweils bis zu den Polketten gilt, das heißt von Stokesstrahl zu Stokesstrahl. Ähnlich verhält es sich, wenn dieselbe Asymptotik in benachbarten Sektoren anliegt, so gilt die Asymptotik im gemeinsamen Sektor und es liegen keine Polstellen entlang des Stokesstrahls. Abschließend lässt sich festhalten, dass Lösungen zweiter Art nicht im Sinne transzendenter meromorpher Funktionen auftreten, da sie aufgrund einer global geltenden Asymptotik rationale Funktionen sind.

4.1 Der Beginn einer Asymptotik

Der formale Ansatz für die asymptotische Entwicklung⁶ einer subnormalen Lösung in einem Sektor S lautet

$$w(z) = az + \sum_{\nu=0}^n c_\nu z^{-\nu} + o(|z|^{-n}) \quad (a \in \mathbb{C}, z \rightarrow \infty).$$

Somit wählt man als Ansätze für die Entwicklungen

$$w(z) = -2z + \sum_{\nu=0}^n c_\nu z^{-\nu} + o(|z|^{-n}),$$

sowie

$$w(z) = -2z/3 + \sum_{\nu=0}^n c_\nu z^{-\nu} + o(|z|^{-n}).$$

Im Falle der verschwindenden Grenzlösung $\mathfrak{w} = 0$ mit $w(z) = o(z)$ ergibt sich im weiteren Verlauf als Ansatz für die asymptotische Entwicklung

$$w(z) = \frac{\sqrt{-\beta/2}}{z} + \sum_{\nu=2}^n c_\nu z^{-\nu} + o(|z|^{-n}). \quad (4.1)$$

Im Folgenden betrachtet man jeweils nur den Anfang der Entwicklung

$$\Psi_n(z) = az + \sum_{\nu=0}^n c_\nu z^{-\nu},$$

für dessen Fehler trivialerweise $|w(z) - \Psi_n(z)| = o(|z|^{-n})$ gilt, sowie die zugehörigen Ableitungen Ψ'_n und Ψ''_n . Mit Hilfe dieser Ansätze lässt sich via Induktion zeigen, dass schon der erste Term der jeweiligen Entwicklung die gesamte asymptotische Entwicklung bestimmt.

⁶ Zur Definition des Begriffs der asymptotischen Entwicklung und grundlegender algebraischer sowie analytischer Eigenschaften siehe Anhang 6.2 Asymptotische Entwicklung bzw. [25]

4.2 Asymptotische Entwicklung der Lösung

Sei w eine transzendente meromorphe Lösung der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$. Sofern die Lösung w in einem Sektor $S : |\arg z - \theta| < \epsilon, |z| > r_0$ keine Polstellen besitzt, führt die Reskalierung aus Kapitel 3 *Reskalierung* mit einer Folge (h_n) im Sektor $S_\delta : |\arg z - \theta| < \epsilon - \delta$ auf eine Lösung ohne Polstellen, das heißt auf eine konstante Grenzlösung \mathfrak{w} . Für die möglichen konstanten Lösungen kommen $0, -2$ sowie $-2/3$ in Frage, somit genügt die Lösung w in diesen polstellenfreien Sektoren S einer Anfangsasympptotik der Form $w = -2z + o(z)$, $w(z) = o(z)$ oder $w(z) = -2/3z + o(z)$ für $z \rightarrow \infty$. Dieser Anfang trägt die gesamte asymptotische Entwicklung des zugehörigen polstellenfreien Sektors in sich. Die wesentliche Idee besteht darin zu zeigen, dass, wenn man auf Polstellen trifft, diese zum einen nicht zu einem regulären Gitter, ähnlich dem einer elliptischen Funktion, gehören können und zum anderen, dass, wenn man auf sie trifft, sie schon der bereits bekannten Asymptotik der Polketten genügen.

Satz 4.1. *Sei w eine subnormale Lösung zweiter Art und genüge $w = -2/3z + o(z)$ für $z \rightarrow \infty$ entlang eines Strahls $\sigma : \arg z = \theta \not\equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$, dann besitzen w und W eine asymptotische Entwicklung der Form:*

$$w(z) \sim -\frac{2}{3}z + \frac{\alpha}{z} + \frac{-9\beta - 2 - 6\alpha^2}{8z^3} + \dots \quad (4.2)$$

sowie

$$W(z) \sim -\frac{8}{27}z^3 + \frac{2\alpha z}{3} + \frac{2 - 6\alpha^2 + 9\beta}{12z} + \dots \quad (4.3)$$

für $z \rightarrow \infty$ im Sektor $S''_\nu : |\arg z - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}| < \frac{\pi}{4}$, der den Strahl σ enthält.

Beweis. Die Reskalierung entlang einer Folge (h_n) auf dem Strahl σ führt auf eine Grenzfunktion \mathfrak{w} mit

$$\mathfrak{w}'^2 = \mathfrak{w}^4 + 4\mathfrak{w}^3 + 4\mathfrak{w}^2 + \frac{32}{27}\mathfrak{w}, \quad \mathfrak{w}(0) = -\frac{2}{3}$$

und somit auf die konstante Grenzfunktion $\mathfrak{w} \equiv -\frac{2}{3}$. Demnach existieren polfreie Umgebungen $\Delta_\kappa : |z - re^{i\theta}| < r^{-1}\kappa(r)$ mit $\kappa(r) \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow \infty$. Um den maximalen polstellenfreien Sektor zu bestimmen (sofern existend), der den Strahl σ enthält, beginnt man mit einem hinreichend großen $r_0 > 0$ und definiert induktiv eine Folge von Radien (r_n) durch $r_{n+1} = r_n + cr_n^{-1}$ und $c = 6 > \pi\sqrt{3}$. Mit θ_n sei der größte Winkel bezeichnet, so dass

$$A_n = \{z : r_n \leq |z| \leq r_{n+1}, \theta \leq \arg z < \theta_n\}$$

keine Polstellen $p \in \mathcal{P}$ enthält.⁷

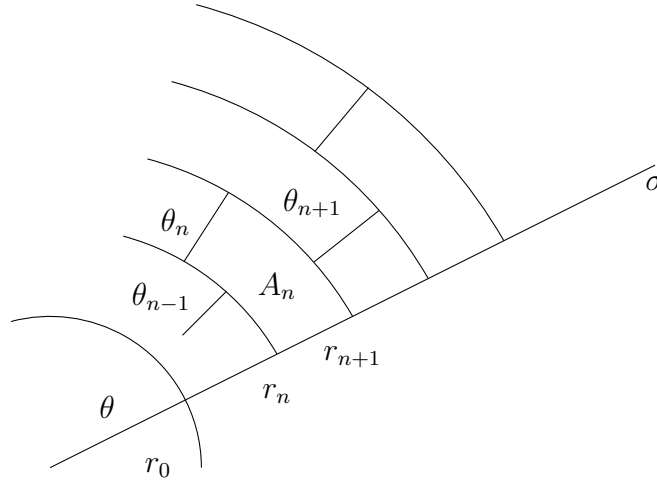


Abbildung 4.1: Illustration der Radien und Winkel

Angenommen, es läge ein Pol p_0 auf dem Rand ∂A_0 mit $\arg p_0 = \theta_0$. Das gleiche lässt sich dann auch zumindest für eine Teilfolge von Randstücken ∂A_{n_k} annehmen. Setzt man nun eine Reskalierung entlang dieser Folge von Polstellen (p_{n_k}) an, so erhält man eine Grenzlösung $\tilde{\mathfrak{w}}$, die einfache Polstellen in $\zeta = 0$ besitzt und der Grenzdifferentialgleichung $\tilde{\mathfrak{w}}'^2 = \tilde{\mathfrak{w}}^4 + 4\tilde{\mathfrak{w}}^3 + 4\tilde{\mathfrak{w}}^2 + 4\tilde{\mathfrak{w}}c$ genügt. Da die Kreisringstreifen A_{n_k} bezüglich der Metrik $ds = |z||dz|$ groß sind und keine Polstellen enthalten, kann $\tilde{\mathfrak{w}}$ keine elliptische Funktion sein, denn andernfalls läge mindestens eine weitere Polstelle in A_n , was der

⁷ Dabei sei angemerkt, dass $r_n\theta_n \sim \kappa(r_n) \rightarrow \infty$ in Asymptotik gilt.

4.2. Asymptotische Entwicklung der Lösung

Minimalität der gewählten Polstelle widerspräche. Dies und $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-3}W(z) = -\frac{8}{27}$ auf $\bigcup_n A_n$ impliziert $c = 8/27$. Nach Satz 3.2, dem Satz von Hurwitz, erhält man für die Grenzfunktion, dass zu jeder Polstelle \tilde{p}_{n_k} 5 Polstellen

$$z_{k,\nu} = \tilde{p}_{n_k} + \nu(\pi\sqrt{3} + o(1))\tilde{p}_{n_k}^{-1} \quad (-2 \leq \nu \leq 2)$$

auf $|z - \tilde{p}_n| < 11|\tilde{p}_n|^{-1}$ existieren und keine weiteren. Da die Polstellen $z_{k,\pm 2}$ nicht zum Kreisring A_{n_k} mit $r_{n_k} \leq |z| \leq r_{n_k+1}$ gehören, folgt, dass die entsprechenden Kreisringe $A_{n_{k-1}}$ und $A_{n_{k+1}}$ und somit jeder Kreisring A_n einen Pol \tilde{p}_n auf seinem Rand enthält. Diese Folge (\tilde{p}_n) von Polstellen ist eine Teilfolge einer entsprechenden Polfolge (p_n) , die der approximativen Rekursion (3.13) genügt. Das heißt nun, dass sich sowohl $\arg p_n$ als auch θ_n für ein passendes ν , einem Winkel $\psi = \frac{\nu\pi}{2} > \theta$ annähern. Dasselbe Argument lässt sich für die entsprechenden Kreisringstreifen $\{z : r_n \leq |z| \leq r_{n+1}, \theta_n < \arg z \leq \theta\}$ wiederholen und man erkennt, dass die Sektoren $S''_\nu : |\arg z - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}| < \frac{\pi}{4}$ die natürlichen polstellenfreien Sektoren sind, in dem Sinn, als dass für jedes $\delta > 0$ der Sektor $|\arg z - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}| \leq \pi/4 - \delta$ nur endlich viele Polstellen enthält.

Man betrachte die vierte PAINLEVÉsche Differentialgleichung wie folgt notiert

$$2ww'' - w'^2 - 2\beta = 3w^4 + 8zw^3 + 4(z^2 - \alpha)w^2 =: P(z, w). \quad (4.4)$$

Gelte $w = -\frac{2}{3}z + o(|z|)$ für $z \rightarrow \infty$ in einem Sektor S , des Weiteren sei die Aussage

$$w(z) + \frac{2}{3}z = \sum_{\nu=0}^n c_\nu z^{-\nu} + o(|z^{-n}|) \text{ für } z \rightarrow \infty,$$

für $n = -1$ gezeigt, das heißt, es gilt $w + \frac{2}{3}z = \sum_{\nu=0}^{-1} c_\nu z^{-\nu} + o(|z|) = o(|z|)$.

Betrachtet man nun $w = -\frac{2}{3}z + \sum_{\nu=0}^n c_\nu z^{-\nu} + o(|z^{-n}|) = \Psi_n(z) + o(|z|^{-n})$, wobei Ψ_n eine rationale Funktion ist, so gilt nach Wissen über asymptoti-

sche Entwicklungen und ihre Ableitungen (vgl. Anhang 6.2 Asymptotische Entwicklung)

$$w' = \Psi'_n + o(|z|^{-n-1}) \quad \text{und} \quad w'' = \Psi''_n + o(|z|^{-n-2}).$$

Eingesetzt in die linke Seite von Gleichung (4.4) erhält man eine rationale Funktion R_n inklusive Störterm der Größenordnung $o(|z|^{-n})$, das heißt, man erhält eine Gleichung n -ter Stufe für die Lösung w der Form

$$R_n(z) + o(|z|^{-n}) = P(z, w).$$

Sei $y = -\frac{2}{3}z + \sum_{\nu=0}^{\infty} c'_\nu z^{-\nu}$ um $z = \infty$ die Lösung der ungestörten algebraischen Gleichung

$$R_n(z) = P(z, y),$$

so besteht der Clou darin, dass man nun eine Aussage über y und w machen kann. Es gilt $P(z, w) - P(z, y) = o(|z^{-n}|)$ und somit ergibt sich für die Differenz der rechten Seiten aus Gleichung (4.4)

$$\begin{aligned} P(z, w) - P(z, y) &= 3w^4 + 8zw^3 + 4(z^2 - \alpha)w^2 - 3y^4 - 8zy^3 - 4(z^2 - \alpha)y^2 \\ &= (w^2 - y^2) \underbrace{(3(w^2 + y^2) + 8z \frac{w^2 + wy + y^2}{w + y} + 4(z^2 - \alpha))}_{=O(|z|^2)} \\ &= (w^2 - y^2)O(|z|^2). \end{aligned}$$

Das heißt für den Fehler

$$o(|z|^{-n}) = (w^2 - y^2)O(|z|^2) = (w - y)O(|z|^3).$$

Somit erhält man für die Differenz der beiden Lösungen

$$w - y = o(|z|^{-(n+3)})$$

bzw.

$$w = y + o(|z|^{-(n+3)}) = -\frac{2}{3}z + \sum_{\nu=0}^{n+3} c_{\nu}z^{-\nu} + o(|z|^{-(n+3)}).$$

Für die ersten $0 \leq \nu \leq n$ stimmen die Koeffizienten $c_{\nu} = c'_{\nu}$ überein und man erhält die Existenz einer asymptotischen Entwicklung. In jedem Durchlauf erhöht sich die Präzision um entsprechend 3 Stellen:⁸

$$w = \Psi_{n+3}(z) + o(|z|^{-(n+3)}).$$

Die asymptotische Entwicklung von W ergibt sich direkt aus

$$-2W = w'' - 2w^3 - 6zw^2 - 4(z^2 - \alpha)w \quad (4.5)$$

zusammen mit dem Wissen über die Asymptotik von w .⁹ □

Für die Lösungen erster Art erhält man ähnliche Resultate.

Satz 4.2. *Sei w eine subnormale Lösung erster Art und genüge einer asymptotischen Entwicklung $w = -2z + o(z)$ oder $w = o(z)$ für $z \rightarrow \infty$ entlang eines Strahls $\sigma : \arg z = \theta \not\equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}$, dann besitzen w und W eine asymptotische Entwicklung der Form*

1.

$$w(z) = -2z - \frac{\alpha}{z} + \frac{2 + \beta + 6\alpha^2}{8z^3} + O(|z|^{-5})$$

sowie

$$W(z) = 2\alpha z + \frac{2\alpha^2 + 2 + \beta}{4z} - \frac{\alpha(2\alpha^2 + 6 + \beta)}{8z^3} + \dots$$

⁸ Da jedoch für den gewonnenen Koeffizienten $c_{n+3} = c_{n+1} = 0$ und nur $c_{n+2} \neq 0$ gilt, wie sich bei entsprechenden Rechnungen herausstellt, entspricht dies einer effektiven Genauigkeit von

$$w = \Psi_{n+2}(z) + o(|z|^{-(n+2)}).$$

⁹ Ein Großteil der Berechnungen erfolgte mit der Hilfe von maple.

2.

$$w(z) = \frac{\sqrt{-\beta/2}}{z} + \frac{\beta(\sqrt{-2\beta} - \alpha)}{2\sqrt{-2\beta}z^3} + \dots$$

sowie

$$W(z) = \sqrt{-2\beta}z - \frac{\beta + \alpha\sqrt{-2\beta}}{2z} + O(|z|^{-3})$$

3.

$$w(z) = -\frac{\sqrt{-\beta/2}}{z} + \frac{\beta(\sqrt{-2\beta} + \alpha)}{2\sqrt{-2\beta}z^3} + \dots$$

sowie

$$W(z) = -\sqrt{-2\beta}z + \frac{\beta - \alpha\sqrt{-2\beta}}{2z} + \dots$$

für $z \rightarrow \infty$ im Sektor $S'_\nu : |\arg z - \frac{(\nu-1)\pi}{2}| < \frac{\pi}{4}$, der den Strahl σ enthält.

Beweis. Ausgehend von den asymptotischen Entwicklungen aus Abschnitt 4.1 *Der Beginn einer Asymptotik* lässt sich analog zu Satz 4.1 argumentieren und man erhält nach Reskalierung mit einer Folge (h_n) entlang des Strahles σ ebenso konstante Grenzfunktionen $\mathfrak{w} = -2$ und $\mathfrak{w} = 0$. Die Asymptotiken entlang der Strahlen σ gelten abermals in den entsprechenden Sektoren der Form $S'_\nu : |\arg z - \frac{\nu\pi}{2}| < \frac{\pi}{4}$. Der Nachweis der asymptotischen Entwicklung verläuft im Fall $\mathfrak{w} = -2$ vollkommen analog und man erhält

$$w = \Psi_{n+3}(z) + o(|z|^{-(n+3)}) = -2z - \frac{\alpha}{z} + \dots$$

Im Fall der Grenzlösung $\mathfrak{w} = 0$ stellt sich zunächst die Frage nach der asymptotischen Entwicklung. Damit ergibt sich für die Folge der Reskalierten $w_h(\zeta) = h^{-1}w(h + h^{-1}\zeta) \rightarrow 0 (h \rightarrow \infty)$ und somit für die Ausgangslösung $w(h) = o(|h|)$ für $|h| \rightarrow \infty$, bzw. $w(z) = c_0 + c_1z^{-1} + \dots$ für $z \rightarrow \infty$. Einsetzen der Anfänge der Entwicklung in die vierte PAINLEVÉsche $[IV]_{\alpha,\beta}$ liefert $4z^2c_0^2 + O(|z|) = 0$ und damit $w(z) = o(1)$ und $w'(z) = o(|z|^{-1})$ für $z \rightarrow \infty$. Abermaliges Einsetzen führt auf

$$o(|z|^{-1}) = 4c_1^2 + 2\beta$$

und mit $c_1^2 = -\beta/2$ ergibt sich gemeinsam mit

$$o(|z|^{-n}) = (w^2 - y^2)(k^2 + dz + o(1)) = (w - y)z(C + o(1))$$

für die bereits vorweggenommene asymptotische Entwicklung

$$w = \pm \frac{\sqrt{-\beta/2}}{z} + \dots = \Psi_{n+1}(z) + o(|z|^{-(n+1)}).$$

Wie zuvor ergibt sich die Asymptotik des ersten Integrals W . □

4.3 Sätze vom Phragmén-Lindelöf Typ

Polfreie Sektoren und Asymptotiken in polfreien Sektoren

Der folgende Abschnitt legt den Grundstein für die Nichtexistenz transzender subnormaler Lösungen zweiter Art, indem gezeigt wird, dass, sofern die Asymptotik in zwei aneinander angrenzenden Sektoren dieselbe ist, sie im gemeinsamen größeren Sektor gilt. Im Wesentlichen fußt die Methode auf dem Satz von Phragmén und Lindelöf, das heißt der Verallgemeinerung des Maximumprinzips auf den Fall einer holomorphen Funktion f auf einem unbeschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, die auf dem (endlichen) Teil des Randes ∂D beschränkt bleibt (siehe [1], [13] oder [24]). Es zeigt sich dabei, dass, sofern die Funktion f in D für $z \rightarrow \infty$ nicht zu schnell anwächst, der Betrag $|f|$ der gleichen Abschätzung in D genügt wie auf dem Rand ∂D . Der Grund, warum man gerade Sätze des Phragmén-Lindelöf-Typs verwendet, liegt darin, dass zum einen die Strukturen, das heißt Sektoren, Asymptotiken und Wachstumsordnung, passen und zum anderen ein Zusammenhang zwischen dem Öffnungswinkel des Sektors und der Wachstumsordnung der Funktion in Unendlich besteht. Denn je größer der Öffnungswinkel θ des Sektors ist, desto kleiner muss die Ordnung der Funktion sein, damit der Satz Gültigkeit behält. Die grundlegende Aussage dazu lautet wie folgt:

Satz 4.3 ([13]). *Sei f holomorph im Sektor D_α mit Öffnungswinkel π/α ($\alpha > 1/2$) und stetig auf dem Abschluß. Sei $|f(z)| \leq M$ beschränkt auf dem Rand ∂D_α des Sektors (bestehend aus den beiden Strahlen) und für ein $\beta < \alpha$ gelte des Weiteren*

$$f(re^{i\theta}) = O(e^{r^\beta}) \quad \text{gleichmäßig in } \theta \text{ für } r \rightarrow \infty,$$

so gilt $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in D_\alpha$.

Im Folgenden sei noch eine zweite Variante des Satzes erwähnt, die jenseits der Aussage über die Beschränktheit noch Aussagen über das asymptotische Verhalten innerhalb des Sektors beziehungsweise des Gebietes macht:

Satz 4.4 ([9],[24]). *Sei f holomorph und beschränkt in einem Sektor S . Gelte $f(z) \rightarrow a$ für $z \rightarrow \infty$ auf einem Randstrahl von S sowie $f(z) \rightarrow b$ für $z \rightarrow \infty$ entlang des anderen, so gilt $a = b$ und $f(z) \rightarrow a$ für $z \rightarrow \infty$ gleichmäßig im Sektor.*

Mit Hilfe der Sätze vom Phragmén-Lindelöf Typ lässt sich folgende Aussage über Asymptotiken in benachbarten Sektoren tätigen:

Satz 4.5 (Asymptotik in benachbarten Sektoren). *Gilt ein und dieselbe Asymptotik aus Satz 4.1 bzw. Satz 4.2 auf benachbarten Sektoren S''_ν und $S''_{\nu+1}$ bzw. S'_ν und $S'_{\nu+1}$, so gilt die Asymptotik in $(S''_\nu \cup S''_{\nu+1})^\circ$ bzw. $(S'_\nu \cup S'_{\nu+1})^\circ$.*

Beweis. Ausgehend vom ersten Integral W , das nur einfache Polstellen mit denselben Residuen $\text{Res}(W, p) = -1$ für alle $p \in \mathcal{P}$ besitzt, lässt sich $W = \frac{-h'}{h}$, bis auf das Vorzeichen als logarithmische Ableitung einer ganzen Funktion h endlicher Ordnung $\rho(h) \leq 4$ schreiben. Formal lässt sich h schreiben als

$$h(z) = \exp\left(-\int W(z)dz\right)$$

mit einfachen Nullstellen in den Polstellen von w . Aufgrund der Asymptotiken der ersten Integrale W

i)

$$W(z) = -\frac{8}{27}z^3 + \frac{2\alpha}{3}z + \frac{2 - 6\alpha^2 + 9\beta}{12z} + O(|z|^{-3})$$

und

$$\int W(z) = -\frac{2}{27}z^4 + \frac{\alpha}{3}z^2 - \kappa + \frac{2 - 6\alpha^2 + 9\beta}{12} \log z + O(|z|^{-2})$$

ii) und entsprechend

$$\int W(z) = \alpha z^2 - \kappa + \frac{(2\alpha^2 + 2 + \beta)}{4} \log z + O(|z|^{-2})$$

iii) bzw.

$$\int W(z) = \pm \frac{\sqrt{-\beta/2}}{2} z^2 - \kappa + \frac{\beta \pm \alpha\sqrt{-2\beta}}{2} \log z + O(|z|^{-2})$$

liefert dies in jedem Fall für h mit $z \notin \mathcal{P}_\epsilon$ eine Abschätzung der Form

$$|h(z)| \leq Ae^{B|z|^4}.$$

Da h eine ganze Funktion ist, gilt obige Abschätzung sogar in ganz \mathbb{C} , insbesondere in den ausgelassenen Kreisscheiben $\Delta_\epsilon(p)$ um die Polstellen. Bevor man den Satz von Phragmén-Lindelöf anwenden kann, muss man noch die Beschränktheit auf den Strahlen sicherstellen. Betrachte dazu

i)

$$\int W(z)dz = \underbrace{-\frac{2}{27}z^4 + \frac{\alpha}{3}z^2 + \frac{2 - 6\alpha^2 + 9\beta}{12} \log z - \kappa}_{=:g(z)} + O(|z|^{-2}),$$

ii) und entsprechend

$$\int W(z)dz = \underbrace{\alpha z^2 + \frac{(2\alpha^2 + 2 + \beta)}{4} \log z}_{=:g(z)} - \kappa + O(|z|^{-2}),$$

iii) bzw.

$$\int W(z)dz = \underbrace{\pm \frac{\sqrt{-\beta/2}}{2} z^2 + \frac{\beta \pm \alpha\sqrt{-2\beta}}{2} \log z}_{=:g(z)} - \kappa + O(|z|^{-2}).$$

Dies liefert in jedem Fall für die Hilfsfunktion $H(z) := h(z) \exp(g(z))$ folgendes Verhalten:

$$H(z) = e^\kappa(1 + O(|z|^{-2})) \quad (z \rightarrow \infty).$$

Sei θ das Argument des Strahles, der die beiden Sektoren S_ν und $S_{\nu+1}$ trennt, so beträgt die Wachstumsordnung von H auf $|\arg z - \theta| \leq \frac{\pi}{10}$ höchstens vier

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\log \log |H(z)|}{\log |z|} \leq 4, \quad \left(|\arg z - \theta| \leq \frac{\pi}{10} \right)$$

und H genügt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H(re^{i(\theta \pm \epsilon)}) = e^{\kappa \pm} \quad \text{für} \quad \left(0 < \epsilon \leq \frac{\pi}{10} \right).$$

Damit ergibt sich nach Phragmén-Lindelöf, dass H entweder auf dem Sektor $|\arg z - \theta| \leq \epsilon$ beschränkt ist oder einer Abschätzung

$$\sup\{H(z) : |z| = r, |\arg z - \theta| \leq \epsilon\} \geq e^{\lambda r^{\pi/(2\epsilon)}}$$

genügt. Letzteres kann nicht sein, da es für hinreichend kleines ϵ , das heißt, für $\epsilon \leq \frac{\pi}{8}$ einen Widerspruch zu $|H(z)| \leq Ae^{B|z|^4}$ liefert. Das Phragmen-Lindelöf Prinzip in der zweiten Version (Satz 4.4) liefert dann $e^{\kappa-} = e^{\kappa+} = e^\kappa \neq 0$ und somit $H(z) = e^\kappa + o(1)$ für $z \rightarrow \infty$ in $|\arg z - \theta| < \epsilon$.

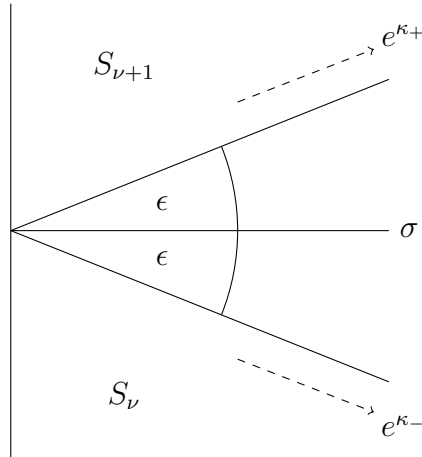


Abbildung 4.2: Benachbarte Sektoren

Somit kann H nur endlich viele Nullstellen besitzen, was wiederum heißt, dass auch h nur endlich viele Nullstellen besitzt. Dies bedeutet jedoch, dass W bzw. w nur endlich viele Polstellen besitzen und somit nach dem Wissen über den Zusammenhang zwischen polstellenfreien Sektoren und Asymptotik eine asymptotische Entwicklung in dem kleineren Sektor $|\arg z - \theta| < \epsilon$ besitzen, die mit der Entwicklung auf den Sektoren S_ν und $S_{\nu+1}$ übereinstimmt. Demnach gilt die Asymptotik in jedem Fall im gemeinsamen größeren Sektor $(\overline{S''_\nu \cup S''_{\nu+1}})^\circ$. \square

Zusammenhang zwischen Asymptotik und Residuen

Die Wechselwirkung von Asymptotik und Polketten sowie der Residuen drückt sich wie folgt aus. Sei w eine subnormale Lösung erster Art mit zugehörigen Polketten σ_ν . Zu diesen Polketten σ_ν denke man sich Polygonzüge $\pi_\nu = \pi(\sigma_\nu)$ mit Knoten in den Polstellen der Kette. Diese Polygonzüge zerlegen $|z| > r_0$ in endlich viele Gebiete D_1, D_2, \dots, D_n mit $(D_{n+1} = D_1)$, jeweils berandet durch einen Polygonzug $\pi_\nu, \pi_{\nu+1}$ sowie einen Kreisbogen von $|z| = r_0$. Die Reskalierung entlang einer Folge (h_n) entlang der Mittellinie γ_ν in D_ν mit $|h_n| \text{dist}(h_n, \mathcal{P}) \rightarrow \infty$ führt auf eine konstante Grenzfunktion $\mathfrak{w} = -2$ bzw.

$\mathfrak{w} = 0$ und damit auf eine Asymptotik τ_ν .¹⁰ Dies ist möglich, da nach Satz 3.3 zwei Polketten im lokalen Maßstab beliebig weit auseinanderlaufen.

Es gelte o.B.d.A. für die Asymptotik der Kette $\arg \sigma_\nu = \theta_\nu \sim \frac{\pi}{4}$, so liefert die Integration der Lösung w entlang der Mittellinie $\gamma_\nu(r) := re^{i(\theta_\nu + \epsilon_\nu(r))}$ mit $\epsilon(r) \rightarrow 0$ für $(r \rightarrow \infty)$ in D_ν von $r_0 e^{i(\theta_\nu + \epsilon(r_0))}$ bis $re^{i(\theta_\nu + \epsilon(r))}$ ($\epsilon(r) > 0$ klein und r_0 groß)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} w(z) dz &= \frac{\tau_\nu}{2\pi i} \frac{r^2}{2} e^{2i(\theta_\nu + \epsilon(r))} + o(r^2) \\ &\xrightarrow{\epsilon(r) \rightarrow 0} \frac{\tau_\nu}{2} \frac{r^2}{2\pi} + o(r^2) \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ lässt sich mit Hilfe von γ_ν und $\gamma_{\nu-1}$ sowie zweier Teilbögen s_{r_0} und s_r der Kreise K_{r_0} und K_r eine geschlossene Kurve Γ_ν um $\sigma_\nu \cap \{z : r_0 < |z| < r\}$ erklären (siehe Abbildung 4.3). Der Residuensatz liefert dann für w entlang Γ_ν mit Residuen $\rho \in \{\pm 1\}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} w(z) dz = \rho_\nu \frac{r^2}{2\pi} + o(r^2). \quad (4.6)$$

Für die Länge der Teilbögen s_{r_0} und s_r gilt ϵr_0 beziehungsweise $O(\epsilon r)$. Entlang der Kurve Γ_ν gilt als Folge der Normalität der Familie der Reskalierten $w_h(\zeta) = h^{-1}w(h + h^{-1}\zeta)$ und somit für die Lösung $w = O(|z|)$. Damit ergibt sich gemeinsam mit $w(z) = \tau_{\nu-1}z + o(|z|)$ entlang $\gamma_{\nu-1}$ in $D_{\nu-1}$ sowie $w(z) = \tau_\nu z + o(|z|)$ entlang γ_ν in D_ν für $z \rightarrow \infty$ für die Beiträge der einzelnen Kurven zum Integral (4.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{r_0}} w(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{s_r} w(z) dz &= O(\epsilon r^2) + o(r^2), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\nu-1}} w(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} w(z) dz &= \frac{\tau_{\nu-1} - \tau_\nu}{2} \frac{r^2}{2\pi} + O(\epsilon r^2) + o(r^2). \end{aligned}$$

¹⁰ Dies bedeutet jedoch nicht, dass w auf D_ν eine asymptotische Entwicklung besitzt.

Des Weiteren bedeutet dies, sofern man den Zusammenhang zwischen Asymptotik und Polstellen auf subnormale Lösungen zweiter Art überträgt, bei denen jeweils dieselben Asymptotiken in benachbarten Sektoren S_ν und $S_{\nu-1}$ anliegen, dass es keine Polketten entlang des Stokestrahls σ_ν geben kann. Somit besitzen die subnormalen Lösungen zweiter Art nur endlich viele Polstellen und sind demnach rationale Funktionen.

4.4 Nichtexistenz subnormaler Lösungen zweiter Art

Gemeinsam mit dem neu gewonnenen Wissen über Asymptotiken in benachbarten Sektoren und dem Wissen, dass meromorphe Funktionen f mit Charakteristik $T(r, f) = O(\log r)$ notwendigerweise rationale Funktionen sein müssen, lassen sich subnormale Lösungen zweiter Art ausschließen. Für nicht konstante Funktionen f lässt sich

$$c := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} \quad (4.7)$$

mit $c > 0$ erklären. Es ist nach [14] bekannt, dass c endlich und positiv ganzzahlig ist, genau dann, wenn f eine rationale Funktion ist. In diesem Fall wird der Limes inferior zu einem Limes.

Korollar 1 (Nichtexistenz subnormaler Lösungen zweiter Art). *Es existieren keine transzendenten meromorphen Lösungen w zweiter Art von $[IV]_{\alpha, \beta}$.*

Beweis. Sei w eine transzendente meromorphe Lösung zweiter Art, so besitzt w in allen 4 Sektoren die asymptotische Entwicklung (4.2) und damit nach Satz 4.5 für große z in der gesamten Ebene \mathbb{C} . Zugleich fehlt es an Polketten, somit besitzt w nur endlich viele Polstellen, das heißt, es gilt $n(r, \infty, w) = m$ für $r > |p_m|$ und damit

$$m \log r \leq N(r, \infty, w) \leq m \log r + c.$$

Dies liefert $N(r, \infty, w)/\log r = m$. Für die Schmiegungsfunktion $m(r, \infty, w)$ ergibt sich aus (6.3) gemeinsam mit der Asymptotik $w = -\frac{2}{3}z + o(1)$

$$\begin{aligned} m(r, \infty, w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| -\frac{2}{3}re^{i\theta} + o(1) \right| d\theta \\ &= \log^+ \left(\frac{2}{3}r|1 + o(r^{-1})| \right) = \log r + O(1). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit für die Charakteristik

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, w)}{\log r} = m + 1 \in \mathbb{N}.$$

□

Lösungen zweiter Art sind rationale Funktionen

Aufgrund der Tatsache, dass im Falle rationaler Lösungen die asymptotischen Entwicklungen (4.2) und (4.3) konvergieren, lässt sich noch folgender Zusammenhang herstellen. Bezeichne n^ρ die Polstellen mit Residuum ρ von w , so erhält man mittels Integration von w und W über einen großen Kreis $|z| = r$, für die Parameter $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $\beta = -\frac{2}{9}(1 + 6n_2 - 3\alpha^2)$ mit $n_2 \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{\rho^2=1} \rho n^\rho = \alpha, \text{ sowie } - \sum_{\rho^2=1} n^\rho = -n_2 = \frac{2 - 6\alpha^2 + 9\beta}{12}.$$

Damit verbleiben als mögliche transzendente meromorphe Lösungen der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha, \beta}$ nur noch die subnormalen Lösungen erster Art.

Kapitel 5

Klassifikation

Abschließend folgt die Diskussion der verbliebenen Klasse der subnormalen Lösungen erster Art, an deren Ende die vollständige Klassifikation der subnormalen Lösungen der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung steht. Die wesentliche Idee besteht darin eine Art Extremalproblem bzw. Minimierungsproblem zu lösen, das heißt, ausgehend von einer Lösung w mittels sukzessiver Anwendung von Bäcklundtransformationen die Anzahl an Polketten zu reduzieren. Da eine Lösung nur endlich viele solcher Polketten besitzt, gelangt man schlußendlich zu einer rationalen Lösung, die gar identisch verschwindet. Damit muss die Lösung im Schritt zuvor Lösung einer algebraischen Differentialgleichung gewesen sein, genauer gesagt einer Hermite-Weber Differentialgleichung und aufgrund der Umkehrbarkeit der Bäcklundtransformationen die Ausgangslösung w ebenfalls eine Hermite-Weber-Lösung.

5.1 Vorbemerkung

Die subnormalen Lösungen w erster Art, ausgewiesen durch die Clustermenge $\mathbf{CL} = \{0\}$, besitzen endlich viele maximale Polketten σ_ν , jede davon asymptotisch zu einem Strahl mit Argument $\arg z = \nu\frac{\pi}{4}$ und Zählfunktion

Bäcklundtransformationen

$$\begin{aligned}
 BL_1 : \quad w &\mapsto \frac{w' - \sqrt{-2\beta} - 2zw - w^2}{2w} \\
 BL_2 : \quad w &\mapsto \frac{w' + \sqrt{-2\beta} - 2zw - w^2}{2w} \\
 BL_3 : \quad w &\mapsto -\frac{w' - \sqrt{-2\beta} + 2zw + w^2}{2w} \\
 BL_4 : \quad w &\mapsto -\frac{w' + \sqrt{-2\beta} + 2zw + w^2}{2w}
 \end{aligned}$$

$n(r, \sigma_\nu) \sim \frac{r^2}{2\pi}$. Des Weiteren besitzen die subnormalen Lösungen w erster Art sowie die zugehörigen ersten Integrale W nach Satz 4.2 in den durch die Stokesstrahlen berandeten polstellenfreien Sektoren

$$S_\nu : \frac{(2\nu - 3)\pi}{4} + \epsilon < \arg z < \frac{(2\nu - 1)\pi}{4} - \epsilon \quad (|z| > r_0(\epsilon), \epsilon > 0)$$

asymptotische Entwicklungen. Zur einfacheren Handhabung der Asymptotiken sei mit $\delta := \sqrt{-2\beta}$ eine feste Wurzel bezeichnet. Damit lassen sich die Anfänge der Asymptotiken der subnormalen Lösungen erster Art schreiben als, $w \sim -2z$ mit erstem Integral $W \sim 2\alpha z$, $w \sim \frac{\delta}{2z}$ mit erstem Integral $W \sim \delta z$ und $w \sim -\frac{\delta}{2z}$ mit erstem Integral $W \sim -\delta z$. Die vier zu einer Lösung w beziehungsweise zum ersten Integral W gehörenden Asymptotiken, lassen sich zusammenfassen zu einer *Signatur* Σ , die die entsprechenden Anfänge der Asymptotiken τ_ν auf den zugehörigen Sektoren S_ν enthält.

Definition 3 (Signatur). Für eine subnormale Lösung w erster Art heißt $\Sigma_w = \Sigma(w) = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$ die Signatur der Lösung w und ebenso bezeichne $\Sigma_W = \Sigma(W) = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$ die Signatur des ersten Integrals W .

Die zentrale Frage lautet, wie verändern sich die Asymptotiken und Polketten der subnormalen Lösungen unter Bäcklundtransformationen. Um einen Einblick in diesen Zusammenhang zu bekommen, sei an die Bäcklundtransformationen aus Abschnitt 2.1 *Die vierte PAINLEVÉsche* erinnert. Gemeinsam

mit der Ableitung des ersten Integrals $W' = w^2 + 2zw$ lassen sich diese auch schreiben als

$$\tilde{w} = \frac{w' - q - \epsilon W'}{2\epsilon w} \quad \text{und} \quad w = -\frac{\tilde{w}' - p + \epsilon \tilde{W}'}{2\epsilon \tilde{w}}.$$

Dies führt unmittelbar auf

$$w' - q - \epsilon W' = 2\epsilon w \tilde{w} = -\tilde{w}' + p - \epsilon \tilde{W}'$$

und somit direkt auf

$$W' - \tilde{W}' = \epsilon(w' + \tilde{w}' - q - p).$$

Integration liefert dann die Stammfunktion

$$W(z) - \tilde{W}(z) = \epsilon(w(z) + \tilde{w}(z) - (q + p)z) + c_0.$$

Im Folgenden findet der Residuensatz Anwendung. Da sämtliche Residuen der ersten Integrale -1 sind, liefert dieser die Differenz der Anzahl an Polstellen von \tilde{W} und W . Zur Berechnung dieser Veränderung bedarf es des Wissens über die Signatur der Summe $\Sigma(W + \tilde{W})$, bzw. des Verhaltens von w unter nicht-trivialen Bäcklundtransformationen. Kennt man dieses Verhalten, so lassen sich Bäcklundtransformationen angeben, die zur Reduktion der Polkettenanzahl führen. Sollte es gelingen, für alle möglichen Signaturen jeweils eine Bäcklundtransformation anzugeben, unter der sich die Anzahl an Polketten reduziert, so erhält man eine Folge von Bäcklundtransformationen, an deren Ende eine rationale Lösung steht, frei von Polketten. Von dort aus ist es nicht mehr weit bis zur vollständigen Charakterisierung der subnormalen Lösungen. An dem nachfolgenden Beispiel bekommt man eine Idee für solch eine *gutartige* Bäcklundtransformation.

Beispiel 2. Der Residuensatz wird angewendet auf eine einfach geschlossene Kurve C_r , die man aus der Kreislinie $K_r = \{z : |z| = r\}$ gewinnt, indem man die Schnitte der Kreislinie K_r mit den Polstellenumgebungen $\Delta_\epsilon(p) = \{z : |z - p| < \epsilon|p|^{-1}\}$ durch einen geeigneten Teilbogen von $\partial\Delta_\epsilon(p)$ ersetzt ($\epsilon > 0$ hinreichend klein, p Polstelle von $w + \tilde{w}$).

$$w : \begin{array}{c} \delta/2z \\ \diagup \quad \diagdown \\ -2z \quad -2z \\ \diagdown \quad \diagup \\ -\delta/2z \end{array} \xrightarrow{BL_1} \tilde{w} : \begin{array}{c} -2z \\ \diagup \quad \diagdown \\ \delta_1/2z \quad \delta_1/2z \\ \diagdown \quad \diagup \\ -\delta_1/2z \end{array}$$

Abbildung 5.1: Motivierendes Beispiel - BL_1 mit $\epsilon = 1$ und $q = \sqrt{-2\beta}$.

Unter Vorgriff auf das Abbildungsverhalten der Bäcklundtransformation BL_1 ergibt sich für die Signatur unter besagter Bäcklundtransformation¹¹

$$[-2z, \delta/2z, -2z, -\delta/2z] \xrightarrow{BL_1} [\delta_1/2z, -2z, \delta_1/2z, -\delta_1/2z]$$

und für die Signatursumme $\Sigma(w + \tilde{w}) = [-2z, -2z, -2z, -(\delta + \delta_1)/2z]$.

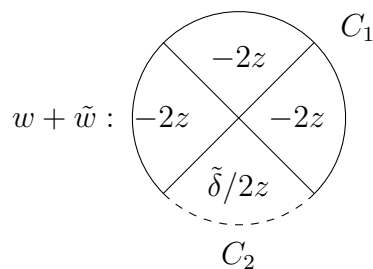


Abbildung 5.2: Signatur der Summe $w + \tilde{w}$

Für die Differenz der Polstellen ergibt sich Folgendes:

$$n(r, \tilde{w}) - n(r, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} W - \tilde{W} dz$$

¹¹ Mit δ_i werden die entsprechenden Wurzeln der sich unter der Bäcklundtransformation BL_i ergebenden Lösungen \tilde{w} bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \epsilon(w + \tilde{w} - (q+p)z + c_0) dz \\
 &= \frac{\epsilon}{2\pi i} \int_{C_r} (w + \tilde{w}) dz + \underbrace{\frac{\epsilon}{2\pi i} \int_{C_r} -(q+p)z + c_0 dz}_{= 0, \text{ Cauchyscher Integralsatz}} \\
 &\stackrel{\epsilon=1}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} (w + \tilde{w}) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} (w + \tilde{w}) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} (w + \tilde{w}) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} -2z - \frac{\alpha}{z} + O(|z|^{-3}) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\pm \sqrt{-\beta/2}}{z} + O(|z|^{-3}) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} (-z^2 - \alpha \log z + O(|z|^{-2})) \Big|_{re^{-i\frac{\pi}{4}}}^{re^{i\frac{5\pi}{4}}} + \frac{1}{2\pi i} (\pm \sqrt{-\beta/2} \log z + O(|z|^{-2})) \Big|_{re^{-i\frac{\pi}{4}}}^{re^{-i\frac{3\pi}{4}}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(-r^2 (e^{\frac{10\pi i}{4}} - e^{-\frac{\pi i}{2}}) + O(\log r) \right) \\
 &= -\frac{r^2}{\pi} (1 + o(1)) = -2\frac{r^2}{2\pi} (1 + o(1))
 \end{aligned}$$

Demnach besitzt die Transformierte $\tilde{w} = BL_1(w)$ weniger Polketten als die Ausgangslösung w . Gemeinsam mit Satz 3.3 ergibt sich mit der Zählfunktion $n(r, w) = \mathbf{n}(w) \frac{r^2}{2\pi} (1 + o(1))$ für die Polkettendifferenz

$$\mathbf{n}(\tilde{w}) - \mathbf{n}(w) = -2.$$

5.2 Verhalten der Asymptotiken unter Bäcklundtransformationen

Wesentlich für das weitere Vorgehen ist nicht nur, dass Bäcklundtransformationen Lösungen w der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha, \beta}$ wieder in Lösungen \tilde{w} der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}$ überführen, sondern die Struktur der Lösungen erhalten, das heißt die Klasse der Funktionen mit $T(r, f) = O(r^2)$. Die Rotationen, als triviale Bäcklundtransformationen, erhalten sowohl Charakteristik als auch Ordnung einer Lösung.

Proposition 8. *Sei w eine subnormale Lösung erster Art und BL_i eine Bäcklundtransformation mit $BL_i(w) = \tilde{w} \neq 0$, dann gilt*

$$T(r, \tilde{w}) = O(T(r, w)) = O(r^2).$$

Beweis. Für die Charakteristik subnormaler Lösungen w erster Art gilt nach Satz 3.3 $T(r, w) = O(r^2)$ und somit für die Bäcklundtransformierte

$$BL_i(w) = \tilde{w} = R(w, w') = \frac{w' - q - 2\epsilon zw - \epsilon w^2}{2\epsilon w} \quad (q^2 = -2\beta, \epsilon^2 = 1)$$

ebenfalls $T(r, \tilde{w}) = O(r^2)$. Denn nach [12] und [14] ergibt sich zusammen mit $T(r, w') \leq 2T(r, w) + S(r, w)$ ¹² für die Charakteristik der Bäcklundtransformierten

$$\begin{aligned} T(r, \tilde{w}) &= T(r, R(w, w')) \\ &\leq T\left(r, \frac{w'}{w}\right) + T\left(r, \frac{1}{w}\right) + O(1) + T(r, w) + \log(4) \\ &\leq 4T(r, w) + S(r, w) \end{aligned}$$

und somit für die Charakteristik $T(r, \tilde{w}) = O(T(r, w))$. Da nach Wissen über die Bäcklundtransformationen ebenso $w = \tilde{R}(\tilde{w}, \tilde{w}')$ gilt, ergibt sich analog $T(r, w) \leq 4T(r, \tilde{w}) + S(r, \tilde{w})$ und damit $T(r, w) = O(T(r, \tilde{w}))$. \square

Korollar 2. *Sei w eine subnormale Lösung der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha, \beta}$ und $BL(w) = \tilde{w} \neq 0$ eine Bäcklundtransformierte, so ist die Wachstumsordnung $\rho(w) = \rho(\tilde{w}) = 2$ eine Invariante unter Bäcklundtransformationen.*

Bäcklundtransformationen überführen Lösungen w von $[IV]_{\alpha, \beta}$ in entsprechende Lösungen \tilde{w} mit Parametern $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$. Da die transformierten Lösun-

¹² $S(r, w)$ übernimmt die Rolle eines eher unwichtigen Fehlerterms, dessen Abschätzung jedoch zentraler Bestandteil des Beweises des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes ist. Für transzendente meromorphe Funktionen w von endlicher Wachstumsordnung gilt $S(r, w) = O(\log r)$. (Siehe dazu Anhang 6.1 Nevanlinna-Theorie oder [5] S.34 ff.)

gen \tilde{w} ebenfalls Asymptotiken besitzen, heißt dies auf Ebene der Asymptotiken gesprochen, dass Bäcklundtransformationen Asymptotiken in Asymptotiken überführen. Dabei genügt es zu wissen, wie sich der Anfang einer Asymptotik unter der Bäcklundtransformation ändert, da, wie schon in Abschnitt 4.2 *Asymptotische Entwicklung der Lösung* gesehen, die Asymptotik im entsprechenden Sektor dadurch eindeutig festgelegt ist. Vielmehr lässt sich festhalten, dass die Bäcklundtransformationen mit $\beta \neq 0$ die Asymptotiken *permutieren*. Im Fall des Parameters $\beta = 0$ kollabieren die $\pm\delta/2z$ -Asymptotiken zu 0-Asymptotiken und lassen sich auf den ersten Blick nicht mehr unterscheiden. Es stellt sich heraus, dass das Verhalten der 0-Asymptotiken unter Bäcklundtransformationen vom jeweiligen Sektor S_ν abhängt.

Lemma 4. *Sei w eine subnormale Lösung erster Art der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$, so sind für das Verhalten unter Bäcklundtransformationen zwei Fälle zu unterscheiden:*

$\beta \neq 0$: Die nicht-trivialen Bäcklundtransformationen BL_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ permutieren die Asymptotiken, das heißt:

$$BL_1 = \begin{pmatrix} -2z & \delta/2z & -\delta/2z \\ \delta_1/2z & -2z & -\delta_1/2z \end{pmatrix}, \quad BL_2 = \begin{pmatrix} -2z & \delta/2z & -\delta/2z \\ \delta_2/2z & -\delta_2/2z & -2z \end{pmatrix},$$

$$BL_3 = \begin{pmatrix} -2z & \delta/2z & -\delta/2z \\ -\delta_3/2z & \delta_3/2z & -2z \end{pmatrix} \text{ und } BL_4 = \begin{pmatrix} -2z & \delta/2z & -\delta/2z \\ -\delta_4/2z & -2z & \delta_4/2z \end{pmatrix}.$$

$\beta = 0$: Für die erste und zweite Bäcklundtransformation BL_1 und BL_2 gilt:

$$BL_i(-2z) = \delta_i/2z \text{ sowie } BL_i(\delta/2z) = -2z \text{ auf den Sektoren mit } \operatorname{Re} z^2 > 0 \text{ und } BL_i(\delta/2z) = -\delta_i/2z \text{ auf den Sektoren mit } \operatorname{Re} z^2 < 0.$$

Für die dritte und vierte Bäcklundtransformation BL_3 und BL_4 gilt:

$$BL_i(-2z) = -\delta_i/2z \text{ sowie } BL_i(\delta/z) = \delta_i/2z \text{ auf den Sektoren mit } \operatorname{Re} z^2 > 0 \text{ und } BL_i(\delta/2z) = -2z \text{ auf den Sektoren mit } \operatorname{Re} z^2 > 0.$$

Beweis. Sei w eine subnormale Lösung der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ mit $\beta \neq 0$, so lassen sich, ausgehend von den Asymptotiken $w = -2z + o(|z|)$ und $w = \pm\delta/2z + o(|z|)$, die asymptotischen Entwicklungen der Bäcklundtransformierten direkt berechnen. So ergibt sich für die Asymptotik der

5.2. Verhalten der Asymptotiken unter Bäcklundtransformationen

Lösung $w = -2z - \frac{\alpha}{z} + o(|z|)$ mit Ableitung $w' = -2 + \frac{\alpha}{z^2} + o(|z|)$ unter der ersten Bäcklundtransformation BL_1 :

$$\begin{aligned}\tilde{w} = BL_1(w) &\sim \frac{-2 + \frac{\alpha}{z^2} - \sqrt{-2\beta} + 4z^2 + 2\alpha - (4z^2 + 4\alpha + \frac{\alpha^2}{z^2})}{-4z - \frac{-2\alpha}{z}} \\ &\sim \frac{-2 - \sqrt{-2\beta} - 2\alpha}{-4z} = \frac{2 + \delta + 2\alpha}{4z} = \frac{\delta_1}{2z}\end{aligned}$$

Einen Überblick über das Permutationsverhalten sowie die Transformation sämtlicher Asymptotiken gibt die nachfolgende Übersicht.¹³

Im Fall $\beta = 0$ gilt für die 0-Asymptotiken der Lösung w : $w = o(|z|^{-n}) \forall n \in \mathbb{N}$. Betrachte dazu $y = \frac{w'}{w}$ mit $y' = \frac{w''}{w} - y^2$. Beides eingesetzt in die vierte PAINLEVÉsche $[IV]_{\alpha,\beta}$ liefert dann

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2} \frac{w'^2}{w^2} + \frac{3}{2} w^2 + 4zw + 2(z^2 - \alpha) - y^2 \\ &= \frac{1}{2} y^2 - y^2 + 2(z^2 - \alpha) + o(|z|^{-n}) \\ &= -\frac{y^2}{2} + 2z^2 - 2\alpha + o(|z|^{-n}).\end{aligned}$$

Dies führt auf eine gestörte Riccati-Differentialgleichung, selbige transformiert via $\omega = \frac{y}{2}$ ergibt

$$\omega' = -\omega^2 + z^2 - \alpha + o(|z|^{-n}). \quad (5.1)$$

In [23] wurden die Riccatischen mit polynomiellen Koeffizienten der Form

$$\omega' = a_0(z) + a_1(z)\omega + a_2(z)\omega^2$$

ebenfalls mittels Reskalierung auf asymptotische Entwicklungen untersucht. Demnach erhält man für die Asymptotik der Lösung der Riccati-Differentialgleichung (5.1): $\omega/z \sim \pm 1 - \frac{1 \pm \alpha}{2z}$ und somit für $y \sim \pm 2z - \frac{1 \pm \alpha}{z}$. Für w ergibt

¹³ Die Berechnungen wurden mit Hilfe von maple durchgeführt.

5.2. Verhalten der Asymptotiken unter Bäcklundtransformationen

sich aufgrund des Ansatzes $w = \exp \int y$ mit $y \sim \pm 2z$

$$w = e^{\pm z^2 + O(z)}.$$

Da w für $|z| \rightarrow \infty$ verschwindet, muss in den entsprechenden Sektoren $\operatorname{Re} \pm z^2 < 0$ gelten, damit ergibt sich für die Signatur $\Sigma(y) = [-2z, 2z, -2z, 2z]$. Das heißt, je nachdem in welchem Sektor die 0-Asymptotik anliegt, ergibt sich das Verhalten unter einer Bäcklundtransformation gemäß des betroffenen Sektors S_ν . Damit ergibt sich für die Bäcklundtransformierte einer Lösung w mit $q^2 = -2\beta = 0$

$$BL(w) = \frac{w' - q - 2\epsilon zw - \epsilon w^2}{2\epsilon w} = \frac{y}{2\epsilon} - z - \frac{w}{2}.$$

Insbesondere gilt für die 0-Asymptotik unter den ersten beiden Bäcklundtransformationen mit $\epsilon = 1$:

$$\begin{aligned} BL_{1/2}(w) &= \frac{y}{2} - z = -2z + \dots \sim -2z \text{ auf den Sektoren } S_1 \text{ und } S_3 \text{ sowie} \\ BL_{1/2}(w) &= \frac{y}{2} - z = -\frac{1+\alpha}{2z} + \dots \sim \frac{-\delta_i}{2z} \text{ auf den Sektoren } S_2 \text{ und } S_4. \end{aligned}$$

Für die dritte und vierte Bäcklundtransformierte mit $\epsilon = -1$ ergibt sich analog:

$$\begin{aligned} BL_{3/4}(w) &= -\frac{y}{2} - z = \frac{1+\alpha}{2z} + \dots \sim \frac{\delta_i}{2z} \text{ auf den Sektoren } S_1 \text{ und } S_3 \text{ sowie} \\ BL_{3/4}(w) &= -\frac{y}{2} - z = -2z + \dots \sim -2z \text{ auf den Sektoren } S_2 \text{ und } S_4. \end{aligned}$$

□

$w = -2z + O(|z|^{-1})$ **unter Bäcklundtransformationen**

$$BL_1(w) : \quad \frac{2 + 2\alpha + \delta}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_2(w) : \quad \frac{2 + 2\alpha - \delta}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_3(w) : \quad \frac{-2 + 2\alpha - \delta}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_4(w) : \quad \frac{-2 + 2\alpha + \delta}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$w = \frac{\delta}{2z} + O(|z|^{-1})$ **unter Bäcklundtransformationen**

$$BL_1(w) : \quad -2z - \frac{3\delta - 2\alpha + 2}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_2(w) : \quad -\frac{2 + 2\alpha - \delta}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_3(w) : \quad -\frac{-2 + 2\alpha - \delta}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_4(w) : \quad -2z - \frac{3\delta - 2\alpha - 2}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$w = -\frac{\delta}{2z} + O(|z|^{-1})$ **unter Bäcklundtransformationen**

$$BL_1(w) : \quad -\frac{2 + 2\alpha + \delta}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_2(w) : \quad -2z + \frac{3\delta + 2\alpha - 2}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_3(w) : \quad -2z + \frac{3\delta + 2\alpha + 2}{4z} + O(|z|^{-3})$$

$$BL_4(w) : \quad -\frac{-2 + 2\alpha + \delta}{4z} + O(|z|^{-3})$$

5.3 Kombinatorik - Ein kleiner Ausflug

Bei vier Sektoren und drei potentiellen Asymptotiken liegt der **worst-case** bei $3^4 = 81$ Möglichkeiten. Durch Bildung von Lösungsklassen (bzw. Äquivalenzklassen) und unter Berücksichtigung der Rotation kann man sich im ersten Schritt auf 24 Lösungstypen einschränken. Legt man noch normierende Bäcklundtransformationen zugrunde, so lassen sich diese im zweiten Schritt auf 6 Typen reduzieren.

Lösungstyp	Signatur $\Sigma(w)$	Kombinationen
1	$[\tau_1, \tau_1, \tau_1, \tau_1]$	3
2	$[\tau_1, \tau_1, \tau_1, \tau_2]$	24
3	$[\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3]$	24
4	$[\tau_1, \tau_2, \tau_1, \tau_3]$	12
5	$[\tau_1, \tau_2, \tau_1, \tau_2]$	12
6	$[\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2]$	6

Tabelle 5.1: Lösungstypen modulo normierender Bäcklundtransformationen

Für diese 6 Subtypen gilt es nun, sofern möglich, Bäcklundtransformationen anzugeben, die die Polkettenanzahl reduzieren. Dabei liefert die Konfiguration aus Beispiel 2 ein gutes Ziel für die gemeinsame Signatur $\Sigma(w + \tilde{w})$, die es zu erreichen gilt, um die Anzahl zu reduzieren.

5.4 Hermite-Weber Lösungen

Ausgehend von diesen sechs Normalfällen stößt man mit Ausnahme des Typ 1, der nach Satz 4.5, dem Wissen über die globale Gültigkeit der Asymptotik, nicht auftreten kann, auf einen weiteren Spezialfall, den Typ 6 der Form $[\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2]$. Dieser kann jedoch, ähnlich wie der Typ 1, nicht auftreten für transzendente meromorphe Lösungen.

Beide Fälle lassen sich in Anlehnung an [23] in einer Aussage subsummieren, die besagt, dass für subnormale Lösungen der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ keine Signatursumme von 0 auftritt.

Proposition 9. *Sei w eine subnormale Lösung der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha,\beta}$ mit Signatur $\Sigma(w) = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]$, so gilt:*

$$\sum_{\nu=1}^4 (-1)^\nu \tau_\nu \neq 0.$$

Beweis. Der Fall $\sum_{\nu=1}^4 (-1)^\nu \tau_\nu = 0$ ist nicht-trivial nur möglich für Lösungen des sechsten Typs, denn sei τ_1 beliebig, so folgt mit $\tau_2 = \tau_1$ direkt die Behauptung. Andernfalls sei $\tau_2 \neq \tau_1$ beliebig, somit muss $\tau_4 = \tau_1$ und $\tau_3 = \tau_2$ gelten. Das heißt, das zur subnormalen Lösung w gehörende erste Integral W besitzt o.B.d.A. nach Rotation und Anwendung geeigneter Bäcklundtransformationen eine Signatur der Form $[\delta z, \delta z, -\delta z, -\delta z]_W$. Nach Satz 4.2 gilt für die asymptotische Entwicklung des ersten Integrals:

$$W(z) \sim \begin{cases} \sqrt{-2\beta}z - \frac{\beta + \alpha\sqrt{-2\beta}}{2z} + \dots & (\operatorname{Im}(e^{-i\frac{\pi}{4}}z) > 0) \\ -\sqrt{-2\beta}z + \frac{\beta - \alpha\sqrt{-2\beta}}{2z} + \dots & (\operatorname{Im}(e^{-i\frac{\pi}{4}}z) < 0). \end{cases}$$

Das folgende Lemma 5 ergibt, dass sowohl W als auch w rationale Funktionen sind und damit den Widerspruch zur Transzendenz der Lösung w .

□

Lemma 5. *Sei w eine subnormale Lösung und gelte für die asymptotische Entwicklung des ersten Integrals W :*

$$W(z) \sim \begin{cases} \sqrt{-2\beta}z - \frac{\beta + \alpha\sqrt{-2\beta}}{2z} + \dots & (\operatorname{Im}(e^{-i\frac{\pi}{4}}z) > 0) \\ -\sqrt{-2\beta}z + \frac{\beta - \alpha\sqrt{-2\beta}}{2z} + \dots & (\operatorname{Im}(e^{-i\frac{\pi}{4}}z) < 0). \end{cases}$$

so ist w eine rationale Funktion.

Beweis. Bezeichne mit $\widetilde{W}(z) := W(e^{-i\frac{\pi}{4}}z)$ das rotierte Problem, so genügt \widetilde{W} einer asymptotischen Entwicklung der Form

$$\widetilde{W}(z) \sim \begin{cases} az + a_0 + \alpha/z + \dots & (\operatorname{Im} z > 0) \\ bz + b_0 + \beta/z + \dots & (\operatorname{Im} z < 0), \end{cases}$$

Dazu betrachtet man die ganze Hilfsfunktion $g(z) = \exp(\int \widetilde{W}(z) dz)$, deren Wachstumsordnung höchstens vier beträgt und ebenfalls zwei asymptotischen Entwicklungen genügt

$$g(z) \sim \begin{cases} Ae^{az^2} z^\alpha (1 + o(1)) & (z = re^{i\epsilon} \rightarrow \infty) \\ Be^{bz^2} z^\beta (1 + o(1)) & (z = re^{-i\epsilon} \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (0 < \epsilon < \pi),$$

mit $AB \neq 0$ und $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Es lässt sich in zwei Schritten zeigen, dass $a = b$ gelten muss. Damit besäße die Hilfsfunktion g in ganz \mathbb{C} diesselbe Asymptotik, mit $g(z) \rightarrow c \neq 0 (z \rightarrow \infty)$, das heißt nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen nur endlich viele Nullstellen, da sie sich nicht in Unendlich häufen können. Also besitzt die Lösung w analog zu Satz 4.5 im Gegensatz zur Annahme nur endlich viele Polstellen.

- i) ($\operatorname{Re} a \leq \operatorname{Re} b$): Angenommen es gelte $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b$, so gilt für eine weitere Hilfsfunktion $H(z) = e^{-az^2} z^{-\alpha} g(z)$

$$H(re^{i\epsilon}) \rightarrow A \neq 0 \text{ und } |H(re^{-i\epsilon})| = O(e^{(\operatorname{Re} b - \operatorname{Re} a)r^2 \cos 2\epsilon} r^M) \rightarrow 0$$

für $r \rightarrow \infty$, was für hinreichend kleines $0 < \epsilon < \epsilon_0$ einen Widerspruch zum Satz von Phragmén-Lindelöf darstellt. Somit gilt $\operatorname{Re} a \leq \operatorname{Re} b$.

- i*) ($\operatorname{Re} a \geq \operatorname{Re} b$): Die Betrachtung von $h(z) := \overline{H(\bar{z})}$ anstelle von H

$$h(z) \sim e^{-\bar{a}z^2} z^{-\bar{\alpha}} \begin{cases} \bar{A}e^{\bar{a}z^2} z^{\bar{\mu}} (1 + o(1)) & (\bar{z} = re^{-i\epsilon} \rightarrow \infty) \\ \bar{B}e^{\bar{b}z^2} z^{\bar{\beta}} (1 + o(1)) & (\bar{z} = re^{i\epsilon} \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (0 < \epsilon < \pi),$$

mit (\bar{b}, \bar{a}) statt (a, b) führt dann nach i) auf $\operatorname{Re} b \leq \operatorname{Re} a$, bzw. zur

Wiederholung mit $H(z) = e^{-bz^2} z^{-\beta} g(z)$ und $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a$.

- ii) ($\operatorname{Im} a \leq \operatorname{Im} b$): Mit demselben Argument lässt sich zeigen, dass für den Imaginärteil $\operatorname{Im} a \leq \operatorname{Im} b$ gilt. Dazu kann man annehmen, dass $\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b$ und $\operatorname{Im} a > \operatorname{Im} b$ gelten. So ergibt sich wie in i) für H und $r \rightarrow \infty$

$$H(re^{i\epsilon}) \rightarrow A \neq 0 \text{ und } |H(re^{-i\epsilon})| = O(e^{-(\operatorname{Im} a - \operatorname{Im} b)r^2 \sin 2\epsilon r^M}) \rightarrow 0.$$

Dies wiederum steht für hinreichend kleines ϵ abermals im Widerspruch zum Phragmén-Lindelöf Prinzip.

- ii*) ($\operatorname{Im} a \geq \operatorname{Im} b$): Dasselbe Argument gelingt mit $g(-z)$ im Sektor $|\arg z| < \epsilon_0$ mit (b, a) statt (a, b) .

□

Zu den verbleibenden vier Lösungstypen lassen sich Bäcklundtransformationen angeben, die die Anzahl der Polketten reduzieren. Mit Hilfe dieser sich so ergebenden Folge von Bäcklundtransformationen gelangt man nach endlich vielen Schritten zwangsläufig zur Nulllösung, da Bäcklundtransformationen nach Proposition 8 die Klasse der Funktionen mit $T(r, f) = O(r^2)$ invariant lassen.

Proposition 10. *Zu jeder subnormalen Lösung w erster Art der vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{\alpha, \beta}$ mit $\beta \neq 0$ vom Typ 2, Typ 3, Typ 4 oder Typ 5 existiert eine Bäcklundtransformation, die die Polkettenzahl verringert.*

Beweis. Sei w eine subnormale Lösung erster Art des Typ 2, das heißt mit Signatur $\Sigma(w) = [\tau_1, \tau_1, \tau_1, \tau_2]$, so gilt es modulo Rotation 6 Fälle zu diskutieren. Im ersten Fall erhält man für die Signatur $\Sigma(w) = [-2z, -2z, -2z, \delta/2z]$, nach Anwendung der zweiten Bäcklundtransformation BL_2 , als Signatur der Transformatierten

$$\Sigma(\tilde{w}) = \Sigma(BL_2(w)) = [\delta_2/2z, \delta_2/2z, \delta_2/2z, -\delta_2/2z]$$

und damit für die Signatursumme

$$\Sigma(w + \tilde{w}) = [-2z, -2z, -2z, (\delta - \delta_2)/2z].$$

Analog zur Rechnung aus Beispiel 2 ergibt sich für die Differenz der Polketten $\mathbf{n}(\tilde{w}) - \mathbf{n}(w) = -2$ und damit die Reduktion um zwei Polketten. Dabei leistet eine $-2z$ -Asymptotik in den Sektoren S_1 und S_3 je einen Beitrag von -2 zur Polkettendifferenz von $\mathbf{n}(\tilde{w}) - \mathbf{n}(w)$ und in den Sektoren S_2 und S_4 den Beitrag $+2$.

Im zweiten Fall ergibt sich für die Signatur $\Sigma(w) = [-2z, -2z, -2z, -\delta/2z]$ unter Anwendung der ersten Bäcklundtransformation eine Signatursumme von

$$\Sigma(w + \tilde{w}) = [-2z, -2z, -2z, -(\delta + \delta_1)/z]$$

und damit ebenfalls eine Reduktion um zwei Polketten. Analog ergeben sich in den Fällen 3 und 4 für die Signaturen $\Sigma(w) = [\delta/2z, \delta/2z, \delta/2z, -\delta/2z]$ und $\Sigma(w) = [-\delta/2z, -\delta/2z, -\delta/2z, \delta/2z]$ unter Anwendung der ersten bzw. der zweiten Bäcklundtransformation die Signaturen der Transformierten als $\Sigma(\tilde{w}) = [-2z, -2z, -2z, -\delta_1/2z]$ sowie $\Sigma(\tilde{w}) = [-2z, -2z, -2z, -\delta_2/2z]$. Die Signatur der Summe besitzt auch in diesen Fällen in den Sektoren S_1 bis S_3 eine $-2z$ -Asymptotik, das heißt, es erfolgt eine Reduktion um zwei Polketten. In den Fällen fünf und sechs mit Signaturen $\Sigma(w) = [-2z, \delta/2z, \delta/2z, \delta/2z]$ und $\Sigma(w) = [-2z, -\delta/2z, -\delta/2z, -\delta/2z]$ erhält man, unter Anwendung der zweiten beziehungsweise der ersten Bäcklundtransformation, für die Signatur der Transformierten $\Sigma(\tilde{w}) = [\delta_2/2z, -\delta_2/2z, -\delta_2/2z, -\delta_2/2z]$ sowie $\Sigma(\tilde{w}) = [\delta_1/2z, -\delta_1/2z, -\delta_1/2z, \delta_1/2z]$. Aufgrund der Signatur der Summe, mit nur einer $-2z$ -Asymptotik im ersten Sektor S_1 , wird in beiden Fällen die Anzahl der Polketten unter Bäcklundtransformation um zwei reduziert.

Entsprechend lässt sich für die Typen 3 bis 5 und alle Signaturen Σ modulo Rotationen mittels der ersten beziehungsweise der zweiten Bäcklundtransformation die Polkettenzahl verringern (siehe Tabellen 5.2, 5.3 und 5.4). \square

Abschließend lässt sich nun zeigen, dass jede subnormale Lösung der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung eine Hermite-Weber Lösung ist.

Satz 5.1 (Klassifikation). *Zu jeder subnormalen Lösung w der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung $[IV]_{\alpha,\beta}$ existieren Bäcklundtransformationen \mathcal{T} und \mathcal{S} mit*

$$\mathcal{T}(w) = 0 \text{ und } \Lambda_{\mathcal{S}}(\beta) = -2(1 \pm \Lambda_{\mathcal{S}}(\alpha))^2,$$

das heißt $\mathcal{S}(w)$ löst $[IV]_{(\Lambda_{\mathcal{S}}(\alpha), \Lambda_{\mathcal{S}}(\beta))}$. Insbesondere ist jede subnormale Lösung der vierten PAINLEVÉschen eine Hermite-Weber Lösung.

Beweis. Sei w eine subnormale Lösung der vierten PAINLEVÉschen Differentialgleichung $[IV]_{\alpha,\beta}$. Genügen die Koeffizienten der Lösung w mit $\alpha \in \mathbb{C}$ der Relation $\beta = -2(1 \pm \alpha)^2$, so ist w eine Hermite-Weber Lösung von $[HW]$. Andernfalls lässt sich ggf. nach einer Rotation, zu einer subnormalen Lösung w mit $\beta \neq 0$ nach Proposition 10 eine Bäcklundtransformation $T_1(w) = \tilde{w}_1$ finden, unter der sich die Polkettenanzahl um mindestens 2 Polketten verringert. Für den Fall einer Lösung w mit $\beta = 0$, sei es als Ausgangslösung oder im Zuge der Iteration, reduzieren sich die Fälle aller vier Lösungstypen auf fünf Fälle. In all diesen Fällen existieren nach einer eventuellen Rotation ebenfalls Bäcklundtransformationen, die die Polkettenzahl reduzieren (siehe Tabelle 5.5). Die Wiederholung des Arguments führt auf eine Lösung ohne Polketten mit endlich vielen Polstellen, das heißt eine rationale Lösung $\tilde{w} = \mathcal{T}(w)$ mit $\mathcal{T} := T_n \circ \dots \circ T_1$. Da die Bäcklundtransformationen nach Proposition 8 die Wachstumsordnung erhalten, kann dies jedoch nur der Fall sein, wenn die rationale Lösung bereits die Nulllösung $\tilde{w} = 0$ ist. Damit folgt aus $y := \mathcal{S}(w)$ mit $\mathcal{S} := T_{n-1} \circ \dots \circ T_1$ und

$$0 = \mathcal{T}(w) = T_n(y) = \frac{y' - q - 2\epsilon zy - \epsilon y^2}{2\epsilon y} \quad (q^2 = -2\Lambda_{\mathcal{S}}(\beta), \epsilon^2 = 1),$$

dass y der Riccati-Differentialgleichung

$$y' = \epsilon y^2 + 2\epsilon zy + q \quad (5.2)$$

genügt. Das heißt, die $(n - 1)$ -Iterierte y der Ausgangslösung w genügt zum einen der Riccati-Differentialgleichung (5.2) und zum anderen einer vierten PAINLEVÉschen $[IV]_{(\Lambda_S(\alpha), \Lambda_S(\beta))}$ mit zugehörigen Parametern $\Lambda_S(\alpha)$ und $\Lambda_S(\beta)$. Dies führt auf die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2yy'' &= 4y^4 + 12zy^3 + (8z^2 + 4\epsilon + 4\epsilon q)y^2 + 4q\epsilon zy \\ &= 4y^4 + 12zy^3 + (8z^2 + 2\epsilon q - 4\Lambda_S(\alpha))y^2 + 4q\epsilon zy. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert dann

$$\Lambda_S(\beta) = -2(1 + \epsilon\Lambda_S(\alpha))^2 = -2(1 \pm \Lambda_S(\alpha))^2.$$

Das heißt, y genügt mit $q = -2(1 \pm \Lambda_S(\alpha))$ der Riccati-Differentialgleichung (5.2) und damit der Hermite-Weber Differentialgleichung $[HW]$

$$y' = -2 \pm (y^2 + 2zy - 2\Lambda_S(\alpha)).$$

Damit ist w als Bäcklunditerierte einer Lösung der Hermite-Weber Differentialgleichung $[HW]$ eine Hermite-Weber Lösung. \square

5.4. Hermite-Weber Lösungen

Typ 3		
$\Sigma(w)$	BL_i	$\mathbf{n}(\tilde{w}) - \mathbf{n}(w)$
$[-2z, -2z, -\delta/2z, \delta/2z]$	BL_2	-2
$[-2z, -2z, -\delta/2z, \delta/2z]$	BL_1	-2
$[-2z, -\delta/2z, \delta/2z, \delta/2z]$	BL_1	-2
$[-2z, \delta/2z, \delta/2z, -\delta/2z]$	BL_1	-2
$[-2z, \delta/2z, -\delta/2z, -\delta/2z]$	BL_2	-2
$[-2z, -\delta/2z, -\delta/2z, \delta/2z]$	BL_2	-2

Tabelle 5.2: Lösungen des Typ 3 modulo Rotation

Typ 4		
$\Sigma(w)$	BL_i	$\mathbf{n}(\tilde{w}) - \mathbf{n}(w)$
$[-2z, -\delta/2z, -2z, \delta/2z]$	BL_2	-2
$[-2z, \delta/2z, -2z, -\delta/2z]$	BL_1	-2
$[\delta/2z, -2z, \delta/2z, -\delta/2z]$	BL_1	-2
$[\delta/2z, -\delta/2z, \delta/2z, -2z]$	BL_1	-2
$[-\delta/2z, -2z, -\delta/2z, \delta/2z]$	BL_2	-2
$[-\delta/2z, \delta/2z, -\delta/2z, -2z]$	BL_2	-2

Tabelle 5.3: Lösungen des Typ 4 modulo Rotation

Typ 5		
$\Sigma(w)$	BL_i	$\mathbf{n}(w) - \mathbf{n}(\tilde{w})$
$[-2z, \delta/2z, -2z, \delta/2z]$	BL_2	-4
$[-2z, -\delta/2z, -2z, -\delta/2z]$	BL_1	-4
$[\delta/2z, -\delta/2z, \delta/2z, -\delta/2z]$	BL_1	-4
$[-\delta/2z, \delta/2z, -\delta/2z, \delta/2z]$	BL_2	-4

Tabelle 5.4: Lösungen des Typ 5 modulo Rotation

Typen 2 bis 4 im Spezialfall $\beta = 0$			
$\Sigma(w)$	BL_i	$\Sigma(w + \tilde{w})$	$\mathbf{n}(\tilde{w}) - \mathbf{n}(w)$
$[-2z, -2z, -2z, 0]$	BL_1	$[-2z, -2z, -2z, -\delta_1/2z]$	-2
$[-2z, -2z, 0, 0]$	BL_1	$[-2z, -2z, -2z, -\delta_1/2z]$	-2
$[-2z, 0, -2z, 0]$	BL_1	$[-2z, -\delta_1/2z, -2z, -\delta_1/2z]$	-4
$[-2z, 0, 0, 0]$	BL_1	$[-2z, -\delta_1/2z, -2z, -\delta_1/2z]$	-4
$[0, 0, 0, 0]$	BL_1	$[-2z, -\delta_1/2z, -2z, -\delta_1/2z]$	-4

Tabelle 5.5: Lösungen im Spezialfall $\beta = 0$ mit $\delta = 0$ modulo Rotation

Kapitel 6

Anhang

6.1 Nevanlinna-Theorie

In den Zwanzigerjahren des 20. Jahrhunderts entwickelten die Brüder Frithiof und Rolf Nevanlinna, Schüler von Ernst Lindelöf, eine umfangreiche Theorie der Werteverteilung von ganzen und meromorphen Funktionen, mit dem erklärten Ziel, den Satz von Picard zu präzisieren. In 1933 brachte Kôsaku Yosida die Theorie bei nichtlinearen Differentialgleichungen zur Anwendung, indem er einen neuen Beweis und Erweiterungen des Malmquistschen Theorems lieferte. Eine systematische Untersuchung der Implikationen der Nevanlinna-Theorie für die Theorie der Differentialgleichungen unternahm Wittich ab 1950. Die Nevanlinna-Theorie hat ihren Ursprung in der Jensenschen Formel und wird in [5], [11], [12] und [14] dargelegt.

Satz 6.1 (Jensensche Formel). *Sei f eine meromorphe Funktion mit $f(0) \neq 0, \infty$ und bezeichnen a_1, a_2, \dots (resp. b_1, b_2, \dots) die Nullstellen (resp. Polstellen) von f , jeweils mit ihrer Vielfachheit gezählt, dann gilt*

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{|b_j| < r} \log \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i| < r} \log \frac{r}{|a_i|}. \quad (6.1)$$

Der erste Hauptsatz der Nevanlinnaschen Theorie kann als eine Reformulierung von (6.1) verstanden werden. Zu diesem Zweck bedarf es einiger wichtiger Begriffe. Für eine in der komplexen Ebene meromorphe Funktion $w \not\equiv a$ (d.h. holomorph bis auf Polstellen) bezeichnet man mit $n(r, a, w) = n(r, a)$ die Anzahl an a -Stellen von w im Kreis $|z| \leq r$, jeweils mit entsprechender Vielfachheit gezählt. Im Fall $a = \infty$ zählt $n(r, a)$ gerade die Polstellen von w . Die *Nevanlinnasche Anzahlfunktion* $N(r, a, w)$ der a -Stellen, kurz *Anzahlfunktionen*, ist für eine meromorphe Funktion f definiert als

$$N(r, a, w) = N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, \infty) \log r. \quad (6.2)$$

Eine Antwort auf die Frage nach der Verteilung der Lösungen der Gleichung $w(z) = a$ für verschiedene a und w sowie eine obere Schranke für die Anzahl der Lösungen liefert der erste Hauptsatz. Um den ersten Hauptsatz formulieren zu können, bedarf es zweier weiterer fundamentaler Größen, die von R. Nevanlinna eingeführt wurden.

Definition 4 (Schmiegunfunktion). Für eine meromorphe Funktion f ist die *Nevanlinnasche Schmiegunfunktion* $m(r, a)$, kurz *Schmiegunfunktion*, mit $\log^+ \alpha := \max(0, \log \alpha)$ und $(a \in \mathbb{C}, f \not\equiv a)$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} m(r, \infty) &= m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, \\ m(r, a, f) &= m(r, a) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - a} \right| d\theta. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Definition 5 (Charakteristik). Sei f eine meromorphe Funktion, so ist die *Nevanlinnasche charakteristische Funktion*, kurz *Charakteristik*, definiert als

$$T(r, f) := m(r, f) + N(r, f).$$

Damit lässt sich der erste Hauptsatz der Nevanlinna-Theorie formulieren, der besagt:

Satz 6.2 (Erster Hauptsatz). *Sei f eine in \mathbb{C} meromorphe und nicht konstante Funktion, so gilt für alle $a \in \mathbb{C}$ und $r \rightarrow \infty$*

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r, f) + O(1).$$

Das bedeutet, dass bei einer meromorphen Funktion eine Balance besteht zwischen der Anzahl an a -Stellen (inklusive $a = \infty$) und der Annäherung der Funktion an den Wert a . Wird ein Wert a selten angenommen, so wächst $N(r, a)$ langsam, so dass $m(r, a)$ schneller wachsen muss, das heißt, die Funktion f weicht im Mittel nur sehr wenig vom Wert a ab, damit die Summe aus Anzahlfunktion und Schmiegunsfunktion ihren charakteristischen Wert $T(r, f)$ erreicht. Die Charakteristik ermöglicht es, ein Maß für das Wachstum einer meromorphen Funktion zu erklären.

Definition 6 (Wachstumsordnung). Die Wachstumsordnung $\rho(f)$ einer meromorphen Funktion f ist definiert als

$$\rho(f) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Gibt der erste Hauptsatz eine obere Abschätzung für die Anzahlfunktion $N(r, a)$ und somit für die Lösungen der Gleichung $f(z) = a$, so kann der zweite Nevanlinnasche Hauptsatz als eine Antwort auf die Frage nach einer unteren Abschätzung verstanden werden. Nach dem ersten Hauptsatz ist die Summe der Schmiegunsfunktion und der Zählfunktion $m(r, a) + N(r, a) = T(r, f) + O(1)$ von der gleichen Größenordnung. Jedoch bleibt die Frage nach der Größenordnung der einzelnen Summanden m und N unbeantwortet. Darauf liefert der zweite Hauptsatz die Antwort und besagt, dass im Allgemeinen die Anzahlfunktion in der Summe dominiert. Ebenso enthält der zweite Hauptsatz als Spezialfall den Satz von Picard, dass eine transzendente meromorphe Funktion jeden Wert in der Ebene unendlich oft annimmt, bis auf höchstens zwei Ausnahmen.

Satz 6.3 (Zweiter Hauptsatz). *Sei f eine nicht konstante meromorphe Funktion in \mathbb{C} und seien $a_1, a_2, \dots, a_q \in \mathbb{C}$ ($q > 2$), so gilt*

$$m(r, \infty) + \sum_{\nu=1}^q m(r, a_\nu) \leq 2T(r, f) - N_1(r) + S(r, f)$$

mit $N_1(r)$ positiv und von der Form

$$N_1(r) = N(r, 1/f') + 2N(r, f) - N(r, f')$$

und

$$S(r, f) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left\{r, \sum_{\nu=1}^q \frac{f'}{f - a_\nu}\right\} + O(1).$$

Der Nachweis des zweiten Hauptsatzes hängt im Wesentlichen von der Abschätzung der Schmiegunsfunktion der logarithmischen Ableitung ab.

Satz 6.4 ([12]). *Sei f eine transzendente meromorphe Funktion von endlicher Wachstumsordnung, so gilt*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r)$$

und damit

$$S(r, f) = O(\log r).$$

6.2 Asymptotische Entwicklung

Der Vollständigkeit halber seien an dieser Stelle kurz die verwendeten Begriffe der Theorie der asymptotischen (Potenz-)Reihen (siehe [25]), insbesondere die asymptotische Entwicklung gewöhnlicher Differentialgleichungen sowie ihrer Lösungen, gemeinsam mit ihren analytischen und algebraischen Eigenschaften aufgeführt.

Definition 7 (Asymptotische Entwicklung). Sei f eine holomorphe Funktion im Sektor $S := \{\varphi_1 < \arg z < \varphi_2, |z| > r_0\}$, dann besitzt f in S eine asymptotische Entwicklung bzw. eine asymptotische Darstellung der Form

$$f \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{-\nu}, \quad (6.4)$$

$$\text{falls } f(z) - \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{-\nu} = o(|z|^{-n}) \text{ für } z \rightarrow \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gleichmäßig in $S_{\delta} := \{\varphi_1 + \delta < \arg z < \varphi_2 - \delta, |z| > r_0\}$ gilt.

Anhand obiger Definition erkennt man, dass Polstellen und Asymptotiken in einem speziellen Zusammenhang stehen, das heißt, man muss die Polstellen beherrschen, um Aussagen über die Asymptotik tätigen zu können. Die asymptotische Entwicklung einer Funktion ist immer eindeutig bestimmt, jedoch können verschiedene Funktionen durchaus die gleiche Asymptotik aufweisen (z.B. besitzen die 0-Funktion und e^{-z} in $S = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ dieselbe Entwicklung). Des Weiteren bedeutet die Konvergenz einer asymptotischen Entwicklung einer Funktion f in einem Sektor S nicht direkt, dass sie auch gegen die Funktion f konvergiert (z.B. $e^{-1/z}$). Die Ableitung einer im Sektor S holomorphen Funktion f mit asymptotischer Entwicklung (6.4) besitzt gerade die Ableitung der asymptotischen Entwicklung der Funktion als Asymptotik, das heißt, es gilt $f'(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\nu a_{\nu}) z^{-\nu-1}$. Für eine im Sektor S holomorphe Funktion f mit $|f(z)| = O(|z|^{-2})$ und Entwicklung $f(z) \sim \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{\nu} z^{-\nu}$ führt die gliedweise Integration in S auf $\int_z^{\infty} f(\zeta) d\zeta \sim \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{1-\nu} z^{-\nu+1}$.

Literaturverzeichnis

- [1] AHLFORS, L.: *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3. Auflage, 1966.
- [2] COLLINGWOOD, E. F. und A. J. LOHWATER: *The theory of cluster sets*. Cambridge University Press, 1966.
- [3] GROMAK, V. I.: *Theory of the fourth Painlevé equation*. *Differential Equations*, 23:506–513, 1987.
- [4] GROMAK, V. I., I. LAINE und S. SHIMOMURA: *Painlevé differential equations in the complex plane*, Band 28 der Reihe *Studies in mathematics*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2002.
- [5] HAYMAN, W.: *Meromorphic Functions*. Oxford University Press, 1964.
- [6] HILLE, E.: *Ordinary differential equations in the complex domain*. Dover Publications, New York, 1997.
- [7] HINKKANEN, A. und I. LAINE: *Growth results for Painlevé transcendents*. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 137:645–655, 2004.
- [8] HINKKANEN, A. und I. LAINE: *Growth of second Painlevé transcendents*. preprint, 2011.
- [9] HOLLAND, A. S. B.: *Introduction to the theory of entire functions*. Academic Press, Inc., 1973.
- [10] INCE, E. L.: *Ordinary differential equations*. Dover Publications, New York, 1956.

- [11] JANK, G. und L.VOLKMANN: *Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen*. Birkhäuser, 1985.
- [12] LAINE, I.: *Nevanlinna theory and complex differential equations*, Band 15 der Reihe *Studies in mathematics*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1993.
- [13] LAX, P. D. und L. ZALCMAN: *Complex proofs of real theorems*, Band 58 der Reihe *University lecture series*. American Mathematical Society, 2012.
- [14] NEVANLINNA, R. H.: *Eindeutige analytische Funktionen*. Springer-Verlag, 1953.
- [15] RELICH, F.: *Elliptische Funktionen und die ganzen Lösungen von $y'' = f(y)$* . *Mathematische Zeitschrift*, 47:153–160, 1942.
- [16] SHIMOMURA, S.: *Growth of the first, the second and the fourth Painlevé transcendents*. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 134:259–269, 2003.
- [17] SHIMOMURA, S.: *Lower estimates for the growth of the fourth and the second Painlevé transcendents*. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 47:231–249, 2004.
- [18] SRIPONPAEW, B.: *The order of Growth of the fourth Painlevé transcendents*. Doktorarbeit, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2012.
- [19] STEINMETZ, N.: *On Painlevé's equations I, II and IV*. *Journal d'Analyse Math.*, 82:363–377, 2000.
- [20] STEINMETZ, N.: *Value distribution of the Painlevé Transcendents*. *Israel J. Math.*, 128:29–52, 2002.
- [21] STEINMETZ, N.: *Global properties of the Painlevé transcendents. New results and open questions*. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math*, 30:71–98, 2005.

- [22] STEINMETZ, N.: *Sub-normal solutions to Painlevé's second differential equation*. Bulletin of the London Mathematical Society, 45:225–235, 2013.
- [23] STEINMETZ, N.: *Complex Riccati differential equations revisited*. Annales Academiae Scientiarum Fennicae, 39:503–511, 2014.
- [24] TITCHMARSH, E. C.: *The Theory of Functions*. Oxford University Press, 1939.
- [25] WASOW, W.: *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Dover Publications, New York, 1987.
- [26] WITTICH, H.: *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen*, Band 8 der Reihe *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, 1968.