



Zentrum für  
Synchrotronstrahlung

**Entwicklung eines  $TM_{110}$ -HF-Deflektors  
zur longitudinal aufgelösten  
transversalen Strahldiagnose von  
Pikosekunden-Elektronenbunchen im  
MeV-Bereich**

**Alessandro Vincente Ferrarotto**

Dissertation  
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften  
der Fakultät Physik der Technischen Universität Dortmund

September 2015

Tag der mündlichen Prüfung: 27.11.2015

1.Gutachter: Prof. Dr. Thomas Weis

2.Gutachter: Prof. Dr. Carsten Westphal

Vertreterin der wissenschaftlichen Mitarbeiter: Dr. Bärbel Siegmann

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>1. Einleitung / Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2. Phasenraum und Emittanz</b>	<b>4</b>
2.1. Der Phasenraum eines Elektronenpakets . . . . .	4
2.2. Die Emittanz . . . . .	5
2.3. Eigenschaften der transversalen Phasenraumellipse . . . . .	9
2.4. Projizierte Emittanz und Scheibenemittanz . . . . .	11
<b>3. Methoden zur experimentellen Bestimmung der Emittanz</b>	<b>12</b>
3.1. Methoden zur Messung der projizierten Emittanz . . . . .	12
3.1.1. Schlitz- und Lochmasken . . . . .	12
3.1.2. Die Quadrupolscan-Technik . . . . .	13
3.2. Methoden zur Messung der Scheibenemittanz . . . . .	16
<b>4. Grundlegende Eigenschaften von Hohlraumresonatoren</b>	<b>18</b>
4.1. Die freie elektromagnetische Welle . . . . .	18
4.2. Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern . . . . .	19
4.3. Elektromagnetische Wellen in Quaderresonatoren . . . . .	22
4.4. Elektromagnetische Wellen in Zylinderresonatoren . . . . .	25
4.5. Ersatzschaltbilder und Güte $Q$ eines Hohlraumresonators . . . . .	31
4.5.1. Unbelasteter elektrischer Schwingkreis . . . . .	31
4.5.2. Belastete elektrische Schwingkreise / Schwingkreise mit externer An- regung . . . . .	34
4.5.3. Einkoppeln von elektromagnetischen Wellen in einen Hohlraumreso- nator . . . . .	36
<b>5. Anwendung von Zylinderresonatoren als Deflektor</b>	<b>38</b>
5.1. Der Laufzeitfaktor $\Lambda$ . . . . .	38
5.2. Das Panofsky-Wenzel Theorem . . . . .	39
5.3. Die Shuntimpedanz . . . . .	42
5.3.1. Die longitudinale Shuntimpedanz $R_{\parallel}$ . . . . .	42
5.3.2. Die transversale Shuntimpedanz $R_{\perp}$ . . . . .	42
5.4. Auswahl der Betriebsmode . . . . .	44

5.5.	Die Felder der $TM_{110}$ -Mode . . . . .	45
5.6.	Anwendung der $TM_{110}$ -Mode eines Zylinderresonators als Deflektor . . . . .	48
<b>6.</b>	<b>Entwicklung des <math>TM_{110}</math>-HF-Deflektors</b>	<b>51</b>
6.1.	Die CST STUDIO SUITE . . . . .	52
6.2.	Zylinderresonatoren als HF-Deflektor . . . . .	52
6.3.	Der erste $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototyp . . . . .	56
6.3.1.	Entwurf des ersten $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen . . . . .	57
6.3.2.	Ergebnisse der Simulationen mit CST MICROWAVE STUDIO . . . . .	62
6.3.3.	Bau des ersten Prototypen . . . . .	66
6.4.	Der zweite $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototyp . . . . .	68
6.4.1.	Entwurf des zweiten $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen . . . . .	68
6.4.2.	Ergebnisse der Simulationen mit CST MICROWAVE STUDIO . . . . .	70
6.4.3.	Bau des zweiten Prototypen . . . . .	72
6.5.	Der $TM_{110}$ -HF-Deflektor . . . . .	73
6.5.1.	Entwurf des $TM_{110}$ -HF-Deflektors . . . . .	73
6.5.2.	Ergebnisse der Simulationen mit CST MICROWAVE STUDIO . . . . .	75
6.5.3.	Ablenkspannung im $TM_{110}$ -HF-Deflektor . . . . .	76
6.5.4.	Ergebnisse der Simulationen mit CST PARTICLE STUDIO . . . . .	79
<b>7.</b>	<b>Theoretische Grundlagen der Störkörpermessung</b>	<b>82</b>
7.1.	S-Parameter . . . . .	82
7.2.	Bestimmung der Koppelfaktoren $\kappa_i$ und der unbelasteten Güte $Q_0$ . . . . .	84
7.3.	Die Störkörpermessmethode . . . . .	86
7.3.1.	Die Störkörpergleichung . . . . .	86
7.3.2.	Berechnung der elektrischen Störkörperkonstanten einer dielektrischen Kugel im homogenen äußeren Feld . . . . .	89
7.3.3.	Experimentelle Bestimmung der Störkörperkonstanten . . . . .	89
7.3.4.	Bestimmung der Feldstärken $E_0$ und $H_0$ . . . . .	95
7.3.5.	Bestimmung der longitudinalen Shuntimpedanz $R_{\parallel}$ . . . . .	96
7.3.6.	Bestimmung der transversalen Shuntimpedanz $R_{\perp}$ . . . . .	97
<b>8.</b>	<b>Messung charakteristischer Größen der <math>TM_{110}</math>-HF-Deflektor-Prototypen</b>	<b>98</b>
8.1.	Der Störkörpermessstand . . . . .	98
8.1.1.	Aufbau des Störkörpermessstands . . . . .	98
8.1.2.	Steuerung des Störkörpermessstandes . . . . .	101
8.2.	Messung der Resonanzfrequenzen und der Güten . . . . .	104
8.2.1.	Messungen am ersten Deflektorprototyp . . . . .	104
8.2.2.	Messungen am zweiten Deflektorprototyp . . . . .	106
8.3.	Auswahl der Störkörper und Messung der Störkörperkonstanten . . . . .	109

8.4. Störkörpermessungen . . . . .	112
8.4.1. Messungen am ersten Deflektorprototyp . . . . .	112
8.4.2. Messungen am zweiten Deflektorprototyp . . . . .	114
<b>9. Vergleich der Computersimulationen mit den Messergebnissen</b>	<b>115</b>
9.1. Vergleich der Simulations- und Messergebnisse des ersten Prototyp . . . . .	115
9.2. Vergleich der Simulations- und Messergebnisse des zweiten Prototypen . . . . .	122
9.3. Vergleich der einzelnen Entwicklungsschritte . . . . .	124
<b>10. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>126</b>
<b>A. Danksagung</b>	<b>129</b>
<b>B. Literaturverzeichnis</b>	<b>130</b>



# 1. Einleitung / Motivation

Synchrotronstrahlung hat sich als ein wichtiges Werkzeug in Forschung, Industrie und Medizin etabliert. Synchrotronstrahlung ist diejenige elektromagnetische Strahlung, welche von elektrisch geladenen Teilchen, die sich mit relativistischen Geschwindigkeiten bewegen, tangential zu ihrer Bewegungsrichtung abgestrahlt wird, wenn sie aus einer geradlinigen Bewegung abgelenkt werden.

Eine moderne, zur Zeit in der Entwicklung befindliche, Möglichkeit Synchrotronstrahlung zu erzeugen, sind Linearbeschleuniger mit Energierückgewinnung<sup>1</sup>. In diesen beschleunigt man Teilchenpakete in einem Stehwellen-Linearbeschleuniger und führt sie, ähnlich wie bei Speicherringen, durch eine Magnetstruktur wieder zurück in den Linearbeschleuniger. Geschieht dies gegenphasig zum beschleunigenden Hochfrequenzfeld, wird den Teilchen ihre Energie wieder entzogen, im Hochfrequenzfeld zwischengespeichert und für die Beschleunigung neuer Teilchen zur Verfügung gestellt.

Es wurden unter anderem am Jefferson Lab [ JLab ] Anlagen gebaut, die das ERL-Prinzip erfolgreich umsetzen konnten. Beim Betrieb dieser Anlagen zeigte sich, dass Wechselwirkungen zwischen dem Strahl und dem Linearbeschleuniger zu Strahlinstabilitäten führten, welche den Strahlstrom begrenzen. Die nächsten, wesentlichen Schritte in der Weiterentwicklung der ERL-Technologie besteht darin, diesen Strahlinstabilitäten entgegen zu wirken und den mittleren Strahlstrom zu vergrößern.

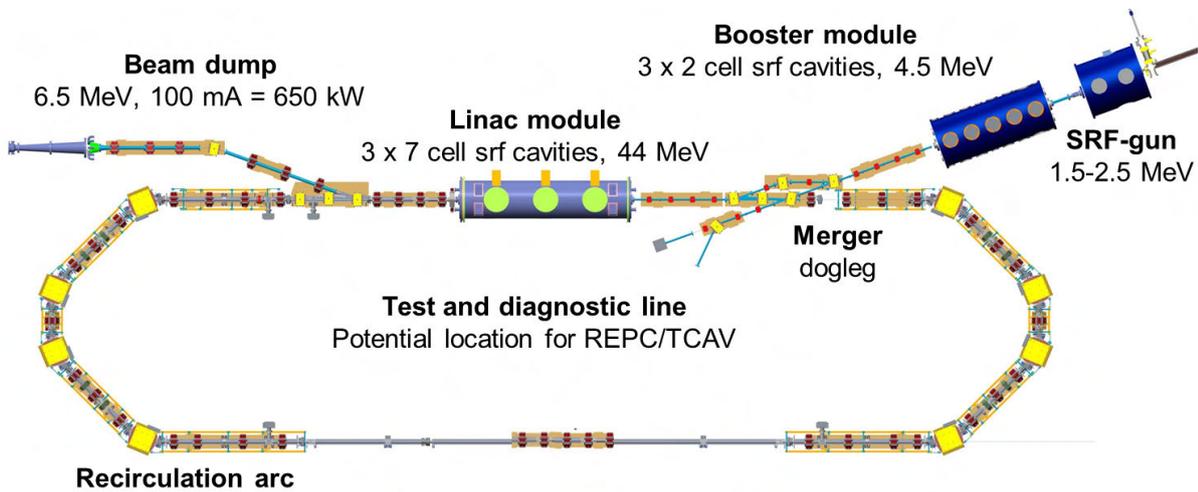
Das Berlin Energy Recovery Linac Project (*BERLinPro*) soll am Helmholtz-Zentrum Berlin [ HZB ] die ERL-Technologie bei hohen Strahlströmen demonstrieren. Geplant ist der Bau und Betrieb eines ERL mit einem Strahlstrom von 100 mA und einer normalisierten Emittanz von weniger als 1 mm mrad bei einer Energie von bis zu 50 MeV [ Jankowiak u. a. (2010) ] [ Knobloch u. a. (2012) ]. Abbildung 1.1 zeigt schematisch den geplanten Aufbau von *BERLinPro*.

Um den durch den Strahl verursachten Resonanzen im Linearbeschleuniger erfolgreich entgegen zu wirken, ist es erforderlich, die einzelnen Strahlparameter zum Zeitpunkt der Injektion möglichst genau zu kennen. Diese Strahlparameter werden maßgeblich von der Elektronenquelle bestimmt.

Es ist geplant, *BERLinPro* mit einem supraleitenden Radiofrequenz (SRF) Photo - Elektronen - Injektor zu betreiben, welcher Elektronenpakete (Bunche) mit einer Länge von wenigen Pikosekunden und 77 pC Ladung mit einer Wiederholrate von 1,3 GHz erzeugen soll. Die Entwicklung, der Bau und die Charakterisierung dieses Injektors sind wesentliche Teile der Arbeiten an *BERLinPro* [ Barday u. a. (2011) ] [ Neumann u. a. (2011) ] [ Neu-

---

<sup>1</sup>Englisch: Energy Recovery Linac (ERL)



**Abbildung 1.1.:** schematische Darstellung des geplanten Aufbaus von BERLinPro mit möglichem Einbauplatz für einen transversal ablenkenden Hohlraumresonator (TCAV) [ HZB - private Kommunikation ]

mann u. a. (2013) ]. Um die Eigenschaften dieses Injektors zu bestimmen, zu optimieren und zu überwachen, wird zurzeit eine Diagnosebeamline aufgebaut [ Völker u. a. (2014) ]. Hierzu enthält das zweite Kapitel eine ausführliche Beschreibung des theoretischen Formalismus zur Beschreibung von Elektronenstrahlen.

Bei den geplanten Bunchlängen von wenigen Pikosekunden und Elektronenenergien im Bereich von einigen MeV, gestaltet sich die longitudinal aufgelöste transversale Diagnose schwierig. Eine qualitativ hochwertige Messung über optische Verfahren wie Tscherenkow-Strahlung oder Übergangsstrahlung, sowie der Einsatz einer Streakkamera, sind bei diesen Energien nur schwer möglich. Daher ist als Teil dieser Beamline ein transversal ablenkender Hohlraumresonator zur Bunchprofilmessung geplant. Mit diesem ist es, wie in Kapitel drei beschrieben wird, möglich, auch bei Elektronenenergien im Bereich von einigen MeV und Bunchlängen von wenigen Pikosekunden, zuverlässige Aussagen über die Eigenschaften der Bunche zu machen.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Hohlraumresonators der Teilchenpakete, unter den oben genannten Bedingungen, wahlweise in einer der beiden transversalen Ebenen ablenken kann.

Erste Schritte dieses Ziel zu erreichen wurden bereits in der Diplomarbeit [ Ferrarotto (2011) ] unternommen. Die in dieser Diplomarbeit erzielten Ergebnisse bilden die Grundlage für den im Rahmen dieser Doktorarbeit dargestellten Entwicklungsprozess.

Die nach dieser Einleitung folgenden Kapitel geben einen detaillierten Überblick über die für diesen Entwicklungsprozess nötigen theoretischen Grundlagen. Nachdem im zweiten Kapitel ein Formalismus zur Beschreibung von Teilchenpaketen in Phasenräumen eingeführt wurde, erläutert das dritte Kapitel experimentelle Möglichkeiten, die in Kapitel zwei definierten Größen zur Beschreibung von Teilchenpaketen zu messen. Das vierte Kapi-

tel beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen der Eigenschaften von Hohlraumresonatoren, während das fünfte Kapitel die Anwendung von Hohlraumresonatoren zur transversalen Ablenkung von Teilchenstrahlen erläutert. Aufbauend auf diesen Grundlagen beschreibt das sechste Kapitel die Entwicklung des transversal ablenkenden Hohlraumresonators unter Verwendung von numerischen Methoden bis zum Bau zweier Prototypen. Anschließend werden im siebten Kapitel die notwendigen Messmethoden und deren praktische Umsetzung zur Messung, der in den Theoriekapiteln beschriebenen charakteristischen Größen eines Hohlraumresonators, vorgestellt. Nachdem das achte Kapitel die Anwendung dieser Messmethoden auf die beiden Prototypen erläutert, vergleicht das neunte Kapitel die Ergebnisse dieser Messungen mit den numerischen Berechnungen aus Kapitel sechs. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick schließen diese Arbeit ab.

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen des BMBF-Verbundforschungsprojekts 05K10PEA durchgeführt.

## 2. Phasenraum und Emittanz

Im folgenden Kapitel wird ein Formalismus zur Beschreibung von Elektronenpaketen in Phasenräumen eingeführt. Es wird die in dieser Arbeit verwendete statistische Definition der Emittanz vorgestellt. Anschließend werden die Eigenschaften der transversalen Phasenraumellipse erläutert. Um den Zusammenhang zu den Twiss-Parameter zur Beschreibung von Teilchenstrahlen herzustellen wird die geometrische Emittanz definiert.

Die Herleitungen lehnen sich an die von [Hinterberger (2008)] an, gehen aber an Stellen, die wesentlich zum Verständnis dieser Arbeit beitragen, darüber hinaus.

### 2.1. Der Phasenraum eines Elektronenpakets

Ein Elektronenpaket kann als eine orts- und impulsabhängige Dichteverteilung von Elektronen

$$\rho(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$$

in einem sechsdimensionalen Phasenraum beschrieben werden. Hierbei ist

$$V_6 = \int \rho \, dx \, dy \, dz \, dp_x \, dp_y \, dp_z$$

das Phasenraumvolumen, welches diese Elektronen einnehmen. Projiziert man diese Dichteverteilung auf zweidimensionale Unterräume, welche durch je eine Komponente des Ortsvektors und die zugehörige Komponente des Impulsvektors gebildet werden, erhält man drei zweidimensionale Phasenräume:

$$V_x = \int \rho_x \, dx \, dp_x$$

$$V_y = \int \rho_y \, dy \, dp_y$$

$$V_z = \int \rho_z \, dz \, dp_z$$

mit den zugehörigen Dichteverteilungen

$$\rho_x(x, p_x) \, , \, \rho_y(y, p_y) \, \text{ und } \, \rho_z(z, p_z) \, .$$

Nach dem Liouville'schen Theorem ist das sechsdimensionale Phasenraumvolumen unter dem Einfluss von konservativen Kräften eine Erhaltungsgröße. Unter der Voraussetzung,

dass die Bewegung in allen Unterräumen unabhängig voneinander ist, bleibt das Liouville'sche Theorem für jeden dieser Unterräume einzeln gültig. Wählt man das Koordinatensystem so, dass sich das Elektronenpaket in  $z$ -Richtung bewegt, nennt man  $V_z$  den longitudinalen Phasenraum sowie  $V_x$  und  $V_y$  die transversalen Phasenräume. Da die Winkel  $x'$  und  $y'$  der Teilchen zur Sollbahn messtechnisch leichter zugänglich sind als die Teilchenimpulse, hat es sich für viele praktische Anwendungen als geeigneter erwiesen folgende äquivalenten Definitionen der transversalen Phasenräume zu verwenden:

$$V_x = m_0 \gamma \beta c \int \rho_x dx dx'$$

$$V_y = m_0 \gamma \beta c \int \rho_y dy dy'$$

Hierbei ist  $m_0$  die Ruhemasse des Teilchens und  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  der relativistische Faktor.

Die Äquivalenz dieser beiden Definitionen der transversalen Phasenräume soll im Folgenden am Beispiel von  $V_x$  gezeigt werden:

Für die  $x$ -Komponente des relativistischen Impuls  $p_x$  gilt:

$$p_x = m_0 \gamma v_x = m_0 \gamma \frac{dx}{dt} = m_0 \gamma \frac{dx}{dz} \frac{dz}{dt}$$

Mit  $v_x$  als  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsvektors des Teilchens und  $dz/dt = v_z = \beta c$  findet man:

$$p_x = m_0 \gamma \frac{dx}{dz} \frac{dz}{dt} = m_0 \gamma \beta c \frac{dx}{dz}$$

Für kleine Winkel  $x'$  des Teilchens zur Sollbahn, wie sie üblicherweise bei Geschwindigkeiten  $v_z \approx c$  auftreten, ist  $dx/dz = \sin(x') \approx x'$ .

Damit lässt sich

$$p_x = m_0 \gamma \beta c x'$$

für die  $x$ -Komponente des relativistischen Impulses schreiben.

Eine analoge Rechnung lässt sich für  $V_y$  durchführen.

## 2.2. Die Emittanz

Wie im vorherigen Kapitel beschrieben, sind die Phasenraumvolumina unter den genannten Voraussetzungen, nach dem Liouville'schen Theorem, Erhaltungsgrößen. Man nutzt diese Erhaltungsgrößen, um die geometrische Emittanz

$$\epsilon_x = \frac{V_x}{\pi m_0 \gamma \beta c} = \frac{1}{\pi} \int \rho_x dx dx'$$

als formunabhängiges Maß für das Phasenraumvolumen zu definieren. Da die geometrische Emittanz von der Teilchenenergie abhängt, definiert man zusätzlich die normierte Emittanz

$$\epsilon_{x,n} = \beta\gamma\epsilon_x = \frac{\beta\gamma}{\pi} \int \rho_x dx dx'$$

als eine von der Teilchenenergie unabhängige Größe.

Die im vorangegangenen Kapitel, zur Beschreibung der Elektronenpakete, eingeführten zweidimensionalen Dichteverteilungen  $\rho_x$  und  $\rho_y$  lassen sich mit den Methoden der multivarianten Statistik beschreiben und führen zu einer weiteren möglichen Definition der Emittanz. Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, dass jede hinreichend große Zahl  $N$  von unabhängigen Zufallsvariablen einer stetigen Verteilung genügt. Existiert die Varianz dieser Verteilung und ist diese endlich, folgt außerdem aus dem zentralen Grenzwertsatz, dass sich diese Verteilung für große  $N$  asymptotisch einer Normalverteilung annähert. Eine Normalverteilung wird vollständig durch ihre ersten beiden zentralen Momente, den Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$ , beschrieben. Im Fall der multivarianten Normalverteilung bildet man aus den Erwartungswerten der eindimensionalen Größen einen Vektor  $\vec{\mu}$  und verwendet anstelle der Varianz die Kovarianzmatrix  $\Sigma$ . Wählt man das Koordinatensystem so, dass der Vektor der Erwartungswerte  $\vec{\mu} = 0$  ist, enthält die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  die vollständige Information über die Verteilung. Abbildung 2.1 zeigt diese Verteilung. Es werden die folgenden Definitionen für den Erwartungswert  $\mu$ , die Varianz  $\sigma^2$ , die Kovarianz  $\text{cov}$  und die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  verwendet:

$$\begin{aligned} E(x) = \mu(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ \text{var}(x) = \sigma^2(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu(x))^2 \\ \text{cov}(x, x') &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu(x))(x'_i - \mu(x')) \\ \Sigma(x, x') &= \begin{pmatrix} \text{cov}(x, x) & \text{cov}(x, x') \\ \text{cov}(x', x) & \text{cov}(x', x') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{var}(x) & \text{cov}(x, x') \\ \text{cov}(x', x) & \text{var}(x') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die hier betrachtete Normalverteilung ist die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  auf Grund der Eigenschaften der Kovarianz und der Normalverteilung reell, symmetrisch, regulär und positiv definit.

Ein  $n$ -dimensionaler Ellipsoid

$$E = \left\{ x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x^T Q x = 1 \right\}$$

ist Lösungsmenge einer quadratischen Form, welche durch Matrizen  $Q$  mit den oben genannten Eigenschaften der Kovarianzmatrix, erzeugt wird. Jede Matrix der Dimension  $n$ , mit diesen Eigenschaften, lässt sich als  $n$ -dimensionaler Ellipsoid darstellen. Um eine Ellipsengleichung mit physikalisch sinnvollen Einheiten zu erhalten, verwendet man anstelle der Kovarianzmatrix  $\Sigma$  die inverse Kovarianzmatrix

$$\Sigma^{-1}(x, x') = \frac{1}{\det \Sigma} \begin{pmatrix} \Sigma_{22} & -\Sigma_{21} \\ -\Sigma_{12} & \Sigma_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \Sigma} \begin{pmatrix} \text{var}(x') & -\text{cov}(x', x) \\ -\text{cov}(x, x') & \text{var}(x) \end{pmatrix}.$$

Da die Kovarianzmatrix regulär ist, existiert ihr Inverses und enthält dieselben Informationen über die betrachtete Normalverteilung. Durch Einsetzen von  $\Sigma^{-1}$  findet man

$$\Sigma_{22}x^2 + \Sigma_{21}xx' + \Sigma_{12}x'x + \Sigma_{11}x'^2 = \det \Sigma$$

und nach Umformen erhält man durch Ausnutzen der Symmetrie von  $\Sigma^{-1}$

$$\frac{-\Sigma_{11}x^2 - 2\Sigma_{12}xx' - \Sigma_{22}x'^2}{\det \Sigma} + 1 = 0$$

als implizite Gleichung einer Ellipse mit der Fläche

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\Sigma_{11}\Sigma_{22} - 4\Sigma_{12}^2}{\det^2 \Sigma}}} = \pi \sqrt{\det \Sigma} = \pi \sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22} - \Sigma_{12}^2} \\ &= \pi \sqrt{\text{var}(x) \text{var}(x') - \text{cov}^2(x, x')}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis nutzt man, um analog zur geometrischen Emittanz die sogenannte rms-Emittanz (root mean square)

$$\epsilon_x^{\text{rms}} = \frac{A_x}{\pi} = \sqrt{\text{var}(x) \text{var}(x') - \text{cov}^2(x, x')}$$

zu definieren. Und analog zur normierten Emittanz die normierte rms-Emittanz

$$\epsilon_x^{\text{rms}} = \beta \gamma \frac{A_x}{\pi} = \beta \gamma \sqrt{\text{var}(x) \text{var}(x') - \text{cov}^2(x, x')}.$$

Auf die gleiche Weise lassen sich diese Beziehungen auch für den Phasenraum  $V_y$  herleiten. Die Twiss-Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bieten eine weitere Möglichkeit, die im vorangegangenen Kapitel eingeführte Phasenraumellipse zu beschreiben. Sie sind die Elemente der auf die geometrische Emittanz  $\epsilon_x$  normierten Kovarianzmatrix  $\Sigma$ . Für den transversalen Phasen-

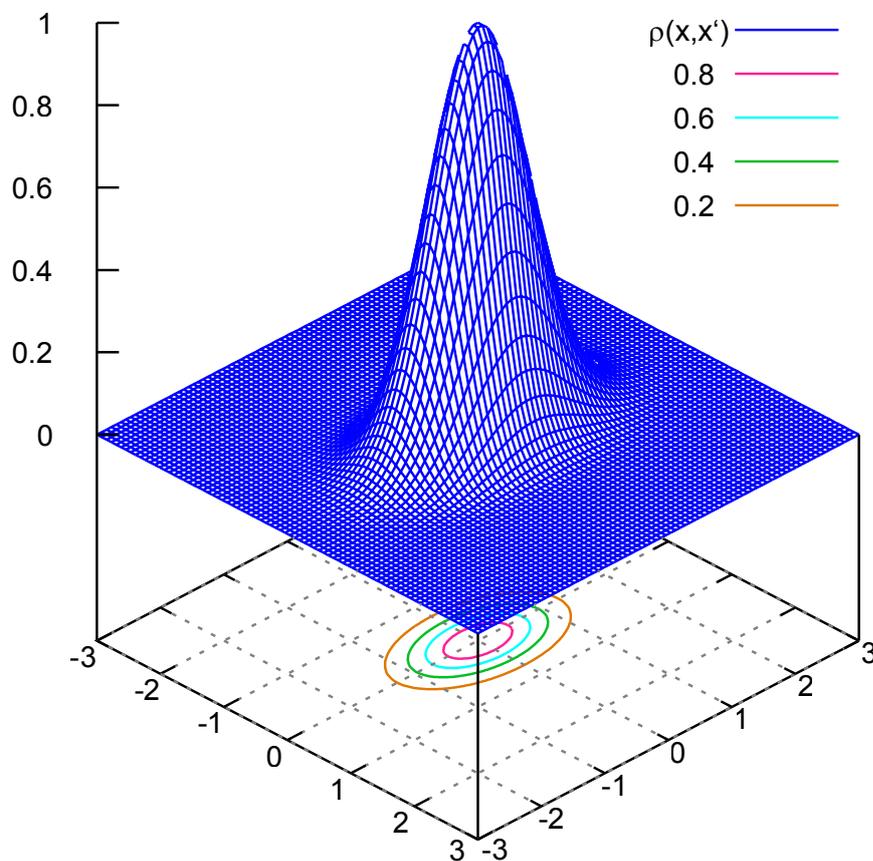
raum  $V_x$  sind

$$\alpha_x = -\frac{\Sigma_{12}}{\epsilon_x} = -\frac{\Sigma_{21}}{\epsilon_x}, \quad \beta_x = \frac{\Sigma_{11}}{\epsilon_x}, \quad \gamma_x = \frac{\Sigma_{22}}{\epsilon_x}$$

die entsprechenden Twiss-Parameter und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \epsilon_x \begin{pmatrix} \beta_x & -\alpha_x \\ -\alpha_x & \gamma_x \end{pmatrix}$$

die Kovarianzmatrix.



**Abbildung 2.1.:** Dichteverteilung der Teilchen im zweidimensionalen Phasenraum.  
(zweidimensionale Gaußverteilung)

## 2.3. Eigenschaften der transversalen Phasenraumellipse

Mit der, in den vorangegangenen Kapiteln eingeführten statistischen Beschreibung der Elektronenpakete durch Dichteverteilungen in Phasenräumen, lassen sich neben der Fläche weitere Aussagen über die Phasenraumellipse treffen.

Die auf der Hauptdiagonalen der Kovarianzmatrix eingetragenen Varianzen enthalten Informationen über die jeweiligen Maximalwerte bzw. Minimalwerte der Phasenraumellipse in den beiden Phasenraumachsen.

Die Phasenraumellipse liegt zwischen

$$x_{\max} = \sigma_x = \sqrt{\Sigma_{11}} = \sqrt{\beta_x \epsilon_x} \quad \text{und} \quad x_{\min} = -\sigma_x = -\sqrt{\Sigma_{11}} = -\sqrt{\beta_x \epsilon_x}$$

sowie

$$x'_{\max} = \sigma'_x = \sqrt{\Sigma_{22}} = \sqrt{\gamma_x \epsilon_x} \quad \text{und} \quad x'_{\min} = -\sigma'_x = -\sqrt{\Sigma_{22}} = -\sqrt{\gamma_x \epsilon_x}.$$

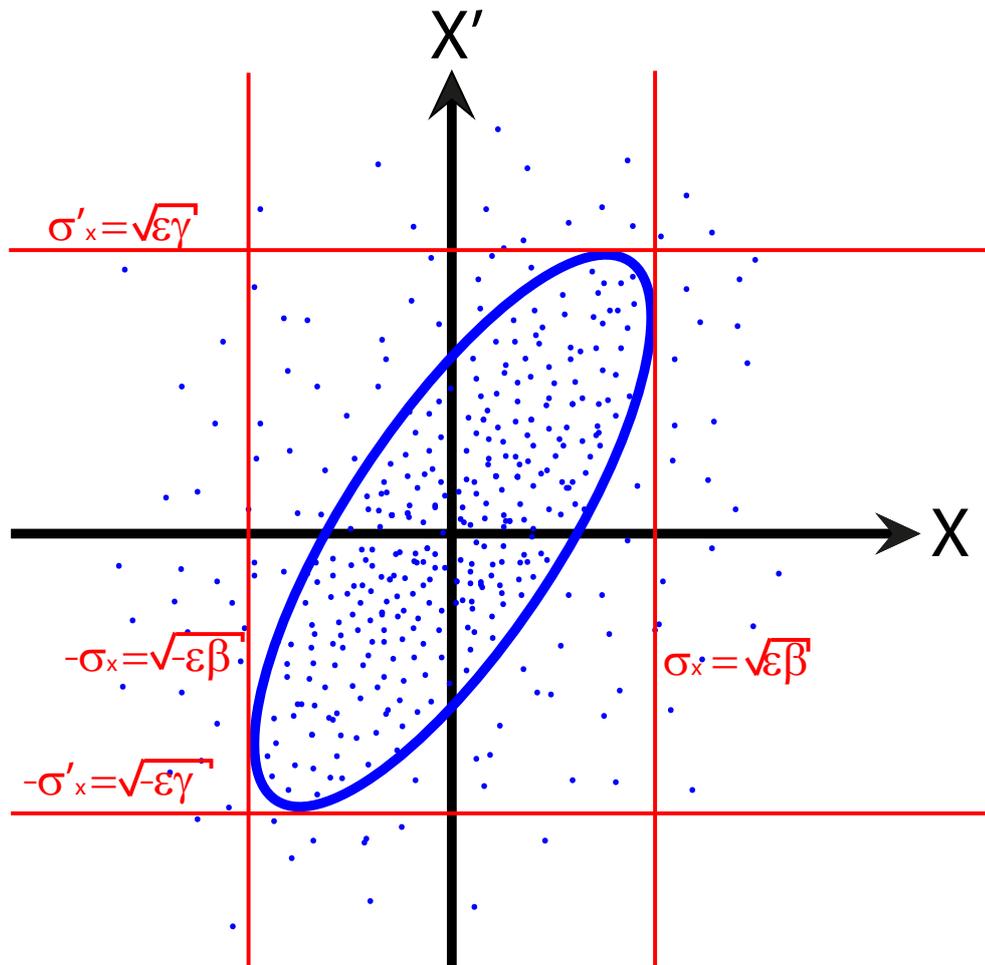


Abbildung 2.2.: transversale Phasenraumellipse

Die Nebendiagonalelemente der Kovarianzmatrix sind Kovarianzen und liefern Informationen über die Ausrichtung der Phasenraumellipse im Phasenraum. Die Kovarianz ist eine

symmetrische Bilinearform und stellt ein Maß für den monotonen Zusammenhang zweier statistischer Größen dar. Dies bedeutet, dass die Kovarianz genau dann positiv ist, wenn große Werte der einen mit großen Werten der anderen oder wenn kleine Werte der einen mit kleinen Werten der anderen statistischen Größe einhergehen. Die Kovarianz ist genau dann negativ, wenn kleine Werte der einen mit großen Werten der anderen statistischen Größe einhergehen.

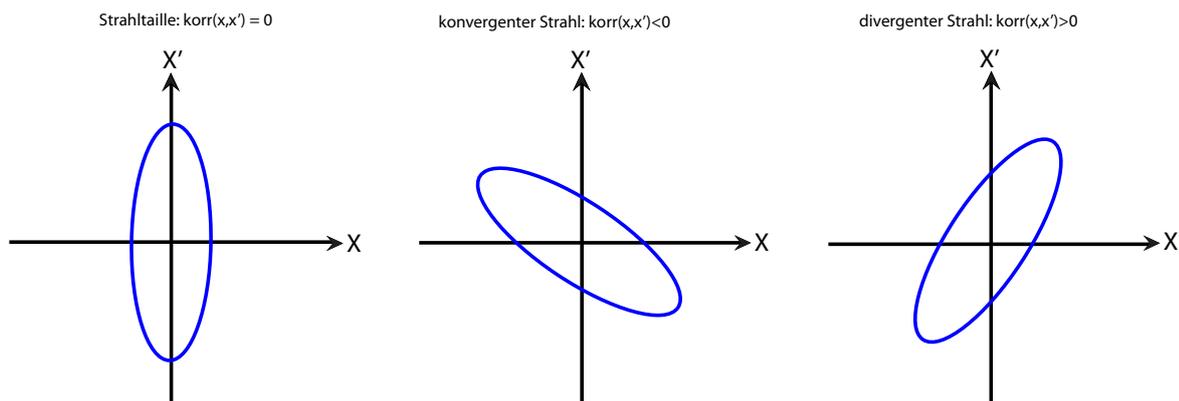
Da die Kovarianz vom Maßstab der betrachteten Größen abhängt, definiert man den Korrelationskoeffizient

$$\text{kor}(x, x') = \frac{\text{cov}(x, x')}{\sqrt{\text{var}(x) \text{var}(x')}}$$

als ein normiertes Maß für den monotonen Zusammenhang zweier statistischer Größen. Der Korrelationskoeffizient nimmt Werte zwischen minus eins und eins an:

$$\text{kor}(x, x') \in \{-1, 1\}.$$

Aus der Ausrichtung der Phasenraumellipse lassen sich unmittelbar Rückschlüsse auf die Eigenschaften des Elektronenpakets ziehen. Ist der Korrelationskoeffizient positiv, gehen also überwiegend positive Ablagen zur Sollbahn mit überwiegend positiven Winkeln zur Soll-Bahn bzw. überwiegend negative Ablagen mit überwiegend negativen Winkeln einher, entfernt sich die Mehrzahl der Teilchen von der Soll-Bahn. Das Elektronenpaket läuft auseinander. Ist der Korrelationskoeffizient negativ, gehen also überwiegend negative Ablagen zur Soll-Bahn mit überwiegend positiven Winkeln bzw. überwiegend positive Ablagen mit überwiegend negativen Winkeln zur Soll-Bahn einher, bewegt sich die Mehrzahl der Teilchen in Richtung Sollbahn. Das Elektronenpaket wird fokussiert.

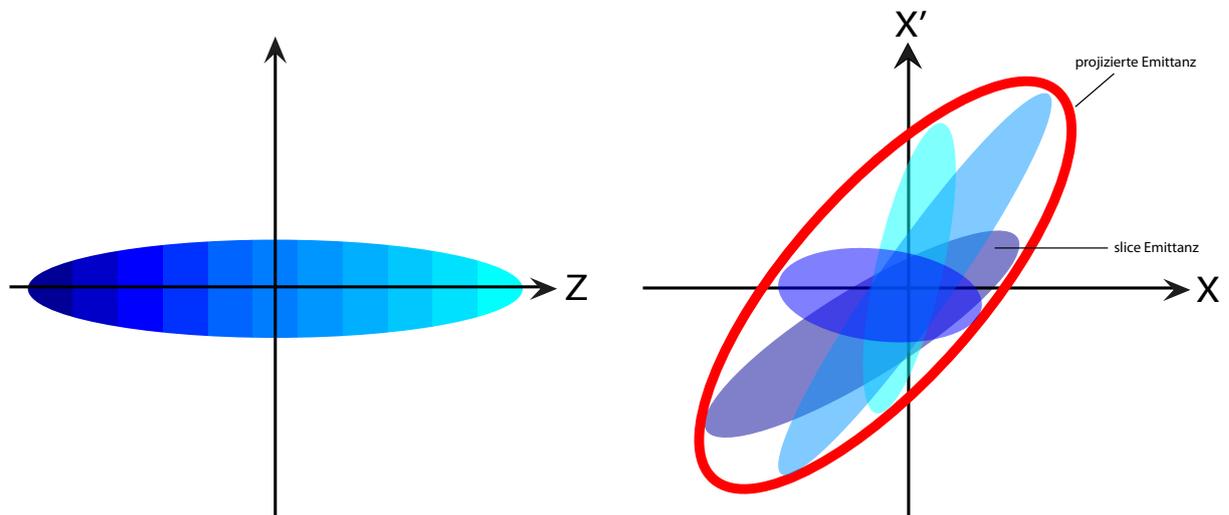


**Abbildung 2.3.:** Zusammenhang zwischen dem Korrelationskoeffizienten und der Ausrichtung der Phasenraumellipse. Die Größe und die Ausrichtung der Ellipse im Phasenraum gibt wesentliche Eigenschaften des Teilchenstrahls / des Teilchenpakets wieder.

## 2.4. Projizierte Emittanz und Scheibenemittanz

Die Beschleunigung von Elektronenpaketen in Hochfrequenzfeldern, führt aufgrund der endlichen Ausdehnung der Elektronenpakete, zu leicht unterschiedlichen Elektronenenergien, abhängig von der longitudinalen Position der Elektronen im Paket. In der Regel entstehen sowohl in longitudinaler, als auch in transversaler Richtung, Energieunterschiede. Da die longitudinale Ausdehnung der Elektronenpakete in der Regel deutlich größer als ihre transversale Ausdehnung ist, sind die Energieunterschiede durch die Hochfrequenzbeschleunigung in longitudinaler Richtung meist deutlich größer als die transversalen Energieunterschiede.

Durch diese Energieunterschiede und durch Raumladungseffekte, haben die nachfolgenden magnetischen Elemente entlang der Strahlführung unterschiedliche Wirkungen auf einzelne Teile des Elektronenpakets. Um diese Unterschiede zu beschreiben, teilt man das Elektronenpaket entlang der longitudinalen Richtung in so genannte Scheiben (engl. slices). Dies führt auf die Konzepte der projizierten Emittanz und der Scheibenemittanz.



**Abbildung 2.4.:** Projizierte- und Scheibenemittanz

Die Scheibenemittanz hat, als ein Maß für die longitudinal aufgelöste transversale Dichteverteilung der Elektronen im Phasenraum, eine zentrale Bedeutung für den Betrieb von Energie Recovery Linacs (ERLs) und Freien-Elektronen-Lasern (FELs).

Das folgende Kapitel beschäftigt sich daher mit experimentellen Methoden, um sowohl die projizierte- als auch die Scheibenemittanz zu messen.

## 3. Methoden zur experimentellen Bestimmung der Emittanz

Nachdem im vorigen Kapitel ein theoretischer Formalismus zur Beschreibung von Elektronenpaketen in Phasenräumen eingeführt und mit der Emittanz eine charakteristische Größe von Elektronenpaketen definiert wurde, beschreibt das folgende Kapitel experimentelle Möglichkeiten die Emittanz zu messen. Ausführlichere Darstellungen findet man unter anderem bei [ Alesini (2005) ], [ Hinterberger (2008) ] und [ Rudolph (2012) ]

### 3.1. Methoden zur Messung der projizierten Emittanz

Lässt man Elektronenpakete auf einen Szintillatorschirm prallen, kann man auf diesem die Projektion des sechs-dimensionalen Phasenraums, auf den durch die beiden transversalen Raumkomponenten gebildeten, zweidimensionalen Unterraum beobachten.

Durch Schlitz- und Lochmasken ist es möglich, Teile des Elektronenpakets abzuschirmen und die Messung auf einen oder mehrere Teile des Elektronenpakets zu beschränken.

Kombiniert man solche Masken in geeigneter Weise mit einem Szintillatorschirm, ist es möglich aus der gemessenen Projektion des sechs-dimensionalen Phasenraums Informationen über die Winkelverteilung zu rekonstruieren.

#### 3.1.1. Schlitz- und Lochmasken

Im Wesentlichen haben sich drei Verfahren etabliert, um mit Schlitz- und Lochmasken Elektronenstrahlen mit Energien bis zu einigen MeV zu vermessen: die Verwendung einer Maske mit einem einzelnen Schlitz, einer Maske mit mehreren Schlitzern und einer Maske mit mehreren kleinen Löchern. Da alle drei prinzipiell gleich funktionieren, werden im Folgenden am Beispiel der Einzelschlitzmaske die physikalischen Zusammenhänge erklärt.

Auf einem Szintillatorschirm lassen sich die Projektionen auf die beiden transversalen Raumkomponenten des sechs-dimensionalen Phasenraums beobachten. Aus dieser Messung lässt sich für beide transversalen Phasenräume das  $\Sigma_{11}$ -Element der zugehörigen  $\Sigma$ -Matrix bestimmen.

Durch eine Einzelschlitzmaske lässt sich eine transversale Raumkomponente des sechs-dimensionalen Phasenraums am Ort der Schlitzmaske auf ein durch die Schlitzbreite festgelegtes Intervall beschränken. Stellt man in einem bekannten Abstand zur Schlitzmaske einen Schirm, auf kann aus den beiden Informationen über die Raumkomponenten Informationen über die Winkelverteilung rekonstruieren. Fährt man mit dem Schlitz die ganze

transversale Ausdehnung des Elektronenpakets ab, kann man nach und nach die zugehörige Winkelverteilung bestimmen. Wiederholt man dasselbe Verfahren mit einer um  $90^\circ$  gedrehten Schlitzmaske, lässt sich die zu anderen transversalen Raumkomponente gehörende Winkelverteilung vermessen.

### 3.1.2. Die Quadrupolscan-Technik

Die Quadrupolscan-Technik bietet eine verhältnismäßig leicht umzusetzende Möglichkeit die Emittanz von nicht raumladungsdominierten Elektronenstrahlen zu messen. Sie beruht darauf die Stärke  $k$  eines Quadrupols und damit die Optik einer Beamline zu ändern.

Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode besteht darin, dass sie die vorhandenen Beschleunigerkomponenten nutzt und über einen weiten Energiebereich zuverlässige Ergebnisse liefert. Für die Umsetzung dieser Methode ist neben einem Quadrupol und einer Driftstrecke lediglich ein Szintillatorschirm erforderlich.

Verwendet man zur Beschreibung der Dichteverteilung der Elektronen den Formalismus aus Kapitel 2 transformiert sich  $\Sigma$  durch eine Beamline gemäß

$$\Sigma(s) = M \cdot \Sigma(0) \cdot M^T \quad (3.1.1)$$

Wobei die Transfermatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

der Beamline die Strahloptik beschreibt.

Kennt man die  $\Sigma$ -Matrix an einer beliebigen Stelle  $s$ , lässt sich mit der Transfermatrix und Gleichung 3.1.1 die  $\Sigma$ -Matrix an jeder Stelle der Beamline berechnen.

Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, ist  $\Sigma_{11}$  das experimentell am leichtesten zugängliche Element der  $\Sigma$ -Matrix.

Nach Gleichung 3.1.1 transformiert sich  $\Sigma_{11}$  wie folgt durch eine Beamline:

$$\Sigma_{11}(s) = m_{11}^2 \Sigma_{11}(0) + 2m_{11}m_{12} \Sigma_{12}(0) + m_{12}^2 \Sigma_{22}(0). \quad (3.1.2)$$

Wie man dieser Gleichung entnimmt, ist es möglich die (unbekannten) anfänglichen Strahlparameter  $\Sigma(0)$  aus drei Messungen  $\{a, b, c\}$  von  $\Sigma_{11}$  an einer festen Stelle  $s$  in der Beamline zu rekonstruieren, indem man die Optik der Beamline und damit die Transfermatrix  $M$  bei jeder Messung verändert.

Man erhält

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{(a)}(s) \\ \Sigma_{11}^{(b)}(s) \\ \Sigma_{11}^{(c)}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^{2(a)} & 2m_{11}^{(a)}m_{12}^{(a)} & m_{12}^{2(a)} \\ m_{11}^{2(b)} & 2m_{11}^{(b)}m_{12}^{(b)} & m_{12}^{2(b)} \\ m_{11}^{2(c)} & 2m_{11}^{(c)}m_{12}^{(c)} & m_{12}^{2(c)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(0) \\ \Sigma_{12}(0) \\ \Sigma_{22}(0) \end{pmatrix}$$

als ein System aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

Für eine funktionierende Beamline ist die Koeffizienten-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} m_{11}^{2(a)} & 2m_{11}^{(a)}m_{12}^{(a)} & m_{12}^{2(a)} \\ m_{11}^{2(b)} & 2m_{11}^{(b)}m_{12}^{(b)} & m_{12}^{2(b)} \\ m_{11}^{2(c)} & 2m_{11}^{(c)}m_{12}^{(c)} & m_{12}^{2(c)} \end{pmatrix}$$

immer regulär und das Gleichungssystem damit sicher lösbar.

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11}(0) \\ \Sigma_{12}(0) \\ \Sigma_{22}(0) \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{(a)}(s) \\ \Sigma_{11}^{(b)}(s) \\ \Sigma_{11}^{(c)}(s) \end{pmatrix}$$

Für eine Beamline aus einem Quadrupol und einer Driftstrecke, wie sie in Abbildung 3.1 dargestellt ist,

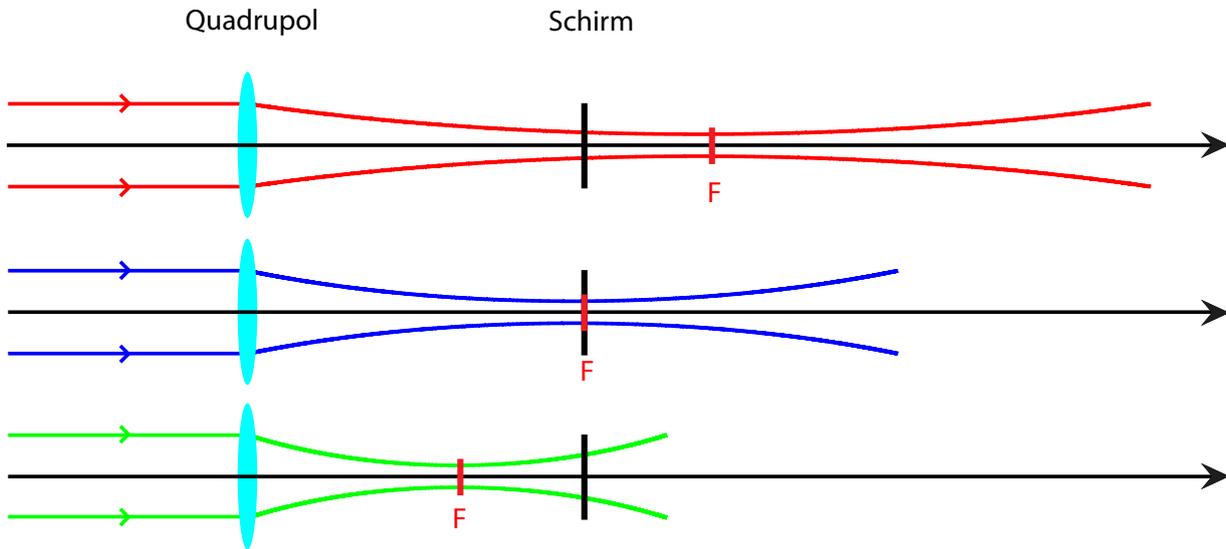


Abbildung 3.1.: Prinzip des Quadrupolscans

erhält man mit der Transfermatrix einer Driftstrecke der Länge  $d$

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Transfermatrix eines Quadrupols der Stärke  $k$  und der Länge  $l$  in dünner Linsen-Näherung

$$M_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kl & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = M_d \cdot M_q = \begin{pmatrix} 1 - kld & d \\ -kl & 1 \end{pmatrix}$$

als Transfermatrix.

Setzt man dies in Gleichung 3.1.2 ein, findet man

$$\Sigma_{11}(s) = (1 - kld)^2 \Sigma_{11}(0) + 2d(1 - kld) \Sigma_{12}(0) + d^2 \Sigma_{22}(0)$$

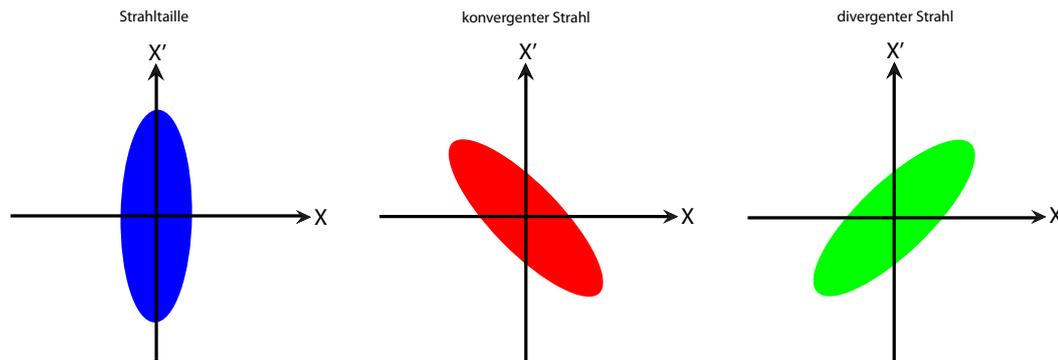
für die Änderung von  $\Sigma_{11}$  entlang der Beamline.

Formt man dies um, erhält man mit

$$\Sigma_{11}(s) = \Sigma_{11}(0) l^2 d^2 \cdot k^2 + (-2ld\Sigma_{11}(0) - 2ld^2\Sigma_{12}(0)) \cdot k + \Sigma_{11}(0) + 2d\Sigma_{12}(0) + d^2\Sigma_{22}(0)$$

eine quadratische Funktion für die Änderung von  $\Sigma_{11}(s)$  in Abhängigkeit von der Quadrupolstärke  $k$ .

Wählt man die Quadrupolstärken  $k$  so, dass der Fokus, so wie in Abbildung 3.1 gezeigt, einmal vor, einmal hinter und einmal genau auf dem Schirm liegt, hat die zugehörige transversale Phasenraumellipse jeweils die in Abbildung 3.2 gezeigt Ausrichtung.



**Abbildung 3.2.:** Transversaler Phasenraum beim Quadrupolscan an der Schirmposition in Abhängigkeit der Quadrupolstärke  $k$

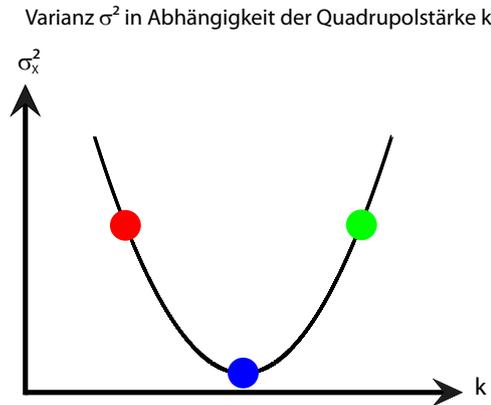
Die Messergebnisse liegen wie in Abbildung 3.3 gezeigt, auf einer Parabel. Nach einem Fit der Messergebnisse an eine Funktion der Form

$$y(k) = ak^2 + bk + c$$

lassen sich mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(0) &= \frac{a}{l^2 d^2} \\ \Sigma_{12}(0) &= -\frac{b - 2d\Sigma_{11}(0)}{2d^2} \\ \Sigma_{22}(0) &= \frac{c - \Sigma_{11}(0) - 2d\Sigma_{12}(0)}{d^2} \end{aligned}$$

die anfänglichen Strahlparameter rekonstruieren.



**Abbildung 3.3.:** Zusammenhang zwischen der Quadrupolstärke  $k$  und der gemessenen Strahlquerschnitten  $\sigma^2$  beim Quadrupolscan (vgl. Kap. 2.2)

## 3.2. Methoden zur Messung der Scheibenemittanz

Lässt man ein Elektronenpaket eine lineare, mit der Zeit wachsende, transversale Spannung  $U_{\perp}$  ausreichender Stärke durchlaufen, welche ihren Nulldurchgang genau in der Mitte des Elektronenpakets hat, erfahren die Elektronen in Abhängigkeit von ihrer longitudinalen Position  $z$  im Paket unterschiedliche transversale Impulsänderungen  $\Delta\vec{p}_{\perp}(z)$ . Das Elektronenpaket beginnt sich zu drehen. Folgt dieser Spannung eine Driftstrecke, setzt sich diese Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit fort. Bei einer Drehung um  $\theta=90^{\circ}$  wird der longitudinale Phasenraum in den der Richtung der Spannung entsprechenden, transversalen Phasenraum überführt und umgekehrt. Durch diese Drehung des Elektronenpakets wird eine Messung der ursprünglich longitudinalen Komponenten des Phasenraums durch eine Messung der transversalen Komponenten möglich.

Kombiniert man also eine solche Spannung, mit den oben beschriebenen Methoden zur Bestimmung der projizierten Emittanz, werden Messungen der in Kapitel 2 beschriebenen Scheibenemittanz möglich.

Für den Drehwinkel  $\theta(z)$  findet man in Abhängigkeit vom longitudinalen Teilchenimpuls  $\vec{p}_{\parallel}$  und der durch die lineare Spannung  $U_{\perp}(z)$  hervorgerufenen transversalen Impulsänderung  $\Delta\vec{p}_{\perp}(z)$ :

$$\tan \theta(z) = \left( \frac{|\Delta\vec{p}_{\perp}(z)|}{|\vec{p}_{\parallel}|} \right)$$

Da im Allgemeinen die longitudinalen Teilchenimpulse sehr viel größer, als die durch die Spannung verursachten transversalen Teilchenimpulse sind, gilt:

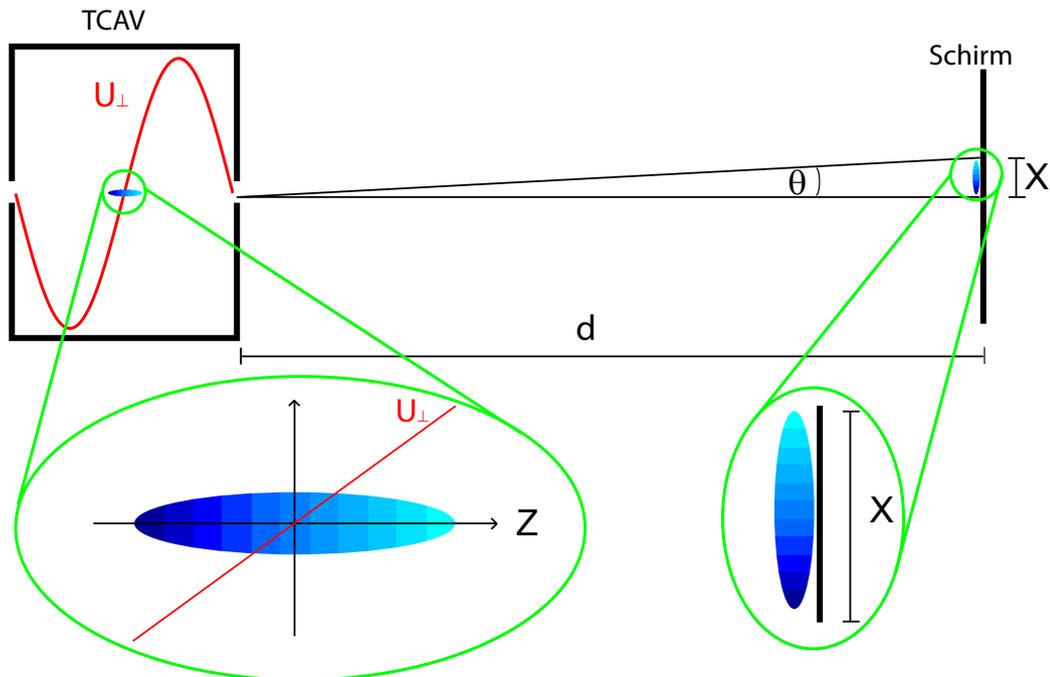
$$\theta(z) = \arctan \left( \frac{|\Delta\vec{p}_{\perp}(z)|}{|\vec{p}_{\parallel}|} \right) \approx \frac{|\Delta\vec{p}_{\perp}(z)|}{|\vec{p}_{\parallel}|} = \frac{\frac{qU_{\perp}(z)}{\beta c}}{|\vec{p}_{\parallel}|}.$$

Stellt man, wie zur oben beschriebenen Messung der projizierten Emittanz, im Abstand  $d$  zum Deflektor einen Schirm auf, besteht zwischen der ursprünglichen  $z$ -Koordinate des

Elektrons im Paket und der  $x$ -Koordinate auf dem Schirm, folgender Zusammenhang:

$$x(z) = d \frac{q}{\beta c |\vec{p}_{||}|} U_{\perp}(z)$$

Für die praktische Anwendung dieser Methode, stellt sich das Problem eine solche lineare, mit der Zeit wachsende, transversale Spannung auf den benötigten Zeitskalen mit den benötigten Wiederholraten und mit ausreichender Stärke zu erzeugen.



**Abbildung 3.4.:** schematische Darstellung der Ablenkung von Teilchenpaketen mit einem transversal ablenkenden Hohlraumresonator. Die Kombination, der im Hohlraumresonator erzeugten transversalen Spannung mit einer Driftstrecke  $d$ , bewirkt eine Drehung des Elektronenpakets.

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, stellen Hohlraumresonatoren eine Möglichkeit dar, diese Anforderungen zu erfüllen. Abbildung 3.4 zeigt schematisch den Aufbau für eine oben beschriebene Messung. Ein Hohlraumresonator ist, bei entsprechender Dimensionierung und passender Auswahl der Betriebsmode, in der Lage, eine transversale, sinusförmige Spannung mit Frequenzen bis zu mehreren GHz zu liefern. Nutzt man von dieser sinusförmigen Spannung nur einen kleinen Bereich um den Nulldurchgang, erhält man in sehr guter Näherung eine lineare Spannung.

Bei der, in der Einleitung genannten Betriebsfrequenz von  $f = 1,3 \text{ GHz}$ , ergibt sich eine Periodendauer von  $T = 770 \text{ ns}$ . Somit ist für Elektronenpakete mit einer Länge von wenigen Pikosekunden die oben genannte Näherung erfüllt.

Um zuverlässige Aussagen über die konkreten Eigenschaften, eines für diese Anwendung geeigneten Hohlraumresonators, machen zu können, beschäftigt sich das folgende Kapitel ausführlich mit den grundlegenden Eigenschaften von Hohlraumresonatoren.

## 4. Grundlegende Eigenschaften von Hohlraumresonatoren

Im folgenden Kapitel wird zuerst die Wellengleichung einer freien elektromagnetischen Welle und deren Lösungen vorgestellt. Anschließend wird von der freien Welle ausgehend, die Wellenausbreitung in Hohlleitern beschrieben und darauf aufbauend das Modenspektrum eines Quader- und eines Zylinderresonators hergeleitet. Es werden Ersatzschaltbilder zur Beschreibung von Hohlraumresonatoren vorgestellt und anhand derer die Güte  $Q$  eingeführt.

Die Herleitungen lehnen sich an die von [ Jackson (2006) ] und [ Rebhan (1999) ] an, sind aber an Stellen, die wesentlich zum Verständnis dieser Arbeit beitragen, ausführlicher. Die Notation folgt weitgehend der von [ Jackson (2006) ].

### 4.1. Die freie elektromagnetische Welle

Aus den Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1.1a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.1.1b)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (4.1.1c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}, \quad (4.1.1d)$$

die im Vakuum (keine Ladungsträger und damit auch keine Ströme sowie  $\mu_r = 1$  und  $\epsilon_r = 1$ ) in

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (4.1.2a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.1.2b)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (4.1.2c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (4.1.2d)$$

übergehen, findet man auf allgemein bekannte Weise, wie z.B. bei [ Jackson (2006) ], die Gleichungen einer freien elektromagnetischen Welle.

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (4.1.3a)$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (4.1.3b)$$

Als Lösungen dieser Differentialgleichungen erhält man:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t \pm i\vec{k}\vec{r}} \quad (4.1.4a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cdot e^{i\omega t \pm i\vec{k}\vec{r}} \quad (4.1.4b)$$

Hierbei ist  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz der Welle,  $\vec{k} = |k| \cdot \vec{e}_k = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{e}_k$  ihr Wellenvektor und  $\vec{r}$  der Ortsvektor.

## 4.2. Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern

In diesem Abschnitt wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Hohlleitern betrachtet.

Die Felder einer Welle in einem Hohlleiter müssen, anders als die freie elektromagnetische Welle, die Randbedingungen

$$\vec{B}_\perp = 0 \Leftrightarrow \vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.2.1a)$$

$$\vec{E}_\parallel = 0 \Leftrightarrow \vec{E} \times \vec{n} = 0 \quad (4.2.1b)$$

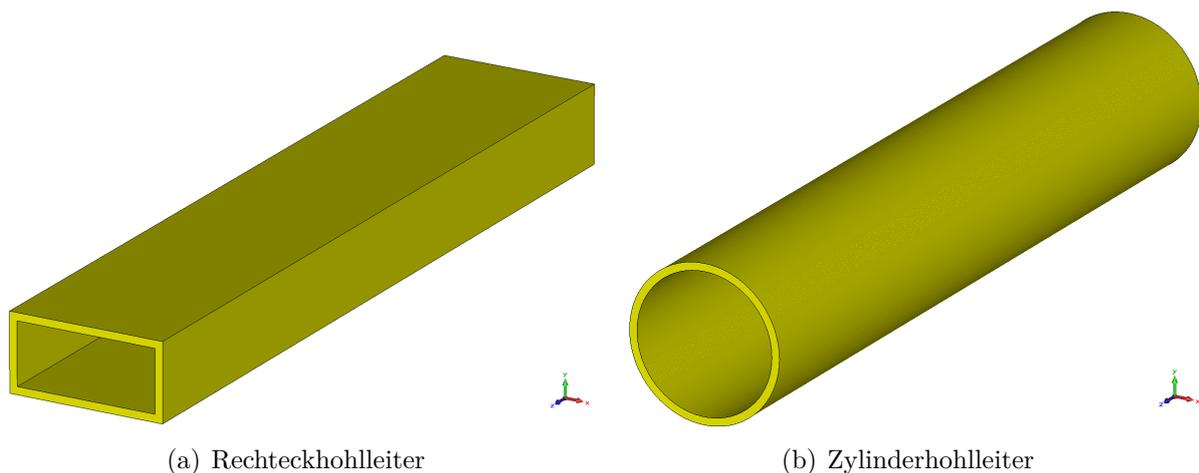
an den leitenden Innenflächen des Hohlleiters erfüllen [ Jackson (2006) ]. Hierbei ist  $\vec{n}$  der Normalenvektor der Innenfläche.

Dies schränkt die Lösungen 4.1.4 der Wellengleichungen 4.1.3 auf diskrete Lösungen, die als Eigenschwingungen oder Eigenmoden des Hohlleiters bezeichnet werden, ein. Die Gesamtheit aller Eigenmoden wird Modenspektrum genannt.

Für die folgenden Betrachtungen wird angenommen, dass die Innenflächen des Hohlleiters perfekt leitend sind. Dies bedeutet, dass die elektrischen Ladungen in den Innenflächen so beweglich sind, dass sie auf Änderungen der äußeren Feldverteilung so schnell reagieren, dass sich die elektrischen und magnetischen Felder im Inneren der Hohlleiterwände nicht ändern.

Betrachtet man einen in z-Richtung ausgerichteten Hohlleiter, in dem sich die Wellen folglich in z-Richtung ausbreiten und nimmt eine harmonische Zeitabhängigkeit an, findet man mit dem Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E} \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$



**Abbildung 4.1.:** Beispiele für verschiedene Hohlleitertypen

und dem transversalen Nablaoperator

$$\vec{\nabla}_{\perp} = \vec{\nabla} - \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

für die longitudinalen Felder

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 E_z + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_z &= 0 \\ \nabla_{\perp}^2 B_z + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) B_z &= 0 . \end{aligned}$$

Man nennt

$$k_c = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \quad (4.2.2)$$

die kritische Wellenzahl des Hohlleiters. Sie ist eine wichtige Kenngröße, die angibt, bis zu welcher Wellenlänge sich Wellen im Hohlleiter ausbreiten können<sup>1</sup>.

Man unterscheidet die Ausbreitungsmoden ( $k_z \leq \frac{\omega}{c}$ ) im Hohlleiter in transversal elektrische (TE) und transversal magnetische (TM) Moden<sup>2</sup>. Für die TE-Moden gilt  $E_z = 0$  und für die TM-Moden gilt  $B_z = 0$ .

Die transversalen Felder  $\vec{E}_{\perp}$  und  $\vec{B}_{\perp}$  lassen sich aus den Maxwell-Gleichungen 4.1.2c und 4.1.2d berechnen. Dazu bildet man zunächst die Rotation der Felder (hier am Beispiel von  $\vec{E}_{\perp}$ ):

<sup>1</sup>Moden mit größeren Wellenlängen werden aperiodisch gedämpft.

<sup>2</sup>Transversal elektromagnetische (TEM)-Moden können sich in den hier betrachteten einfachen Hohlleitern nicht ausbreiten. Dafür ist ein Hohlleiter mit Innen- und Außenleiter, wie zum Beispiel ein Koaxialkabel, erforderlich

Für die transversalen Komponenten gilt:

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp\right)_x &= ik_z E_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp\right)_y &= -ik_z E_x \\ \Rightarrow \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp\right)_\perp &= ik_z \vec{E}_\perp \times \vec{e}_z \end{aligned}$$

für die longitudinale Komponente gilt

$$\vec{\nabla} \times (E_z \cdot \vec{e}_z) = \vec{\nabla} E_z \times \vec{e}_z = \vec{\nabla}_\perp E_z \times \vec{e}_z = \vec{\nabla}_\perp \times (E_z \cdot \vec{e}_z)$$

fasst man dies zusammen, erhält man

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_\perp = \left(ik_z \vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z\right) \times \vec{e}_z.$$

Auf die gleiche Weise findet man:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)_\perp = \left(ik_z \vec{B}_\perp + \vec{\nabla}_\perp B_z\right) \times \vec{e}_z$$

und schließlich mit Gleichung 4.1.2c

$$\left(ik_z \vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z\right) \times \vec{e}_z = -i\omega \vec{B}_\perp \quad (4.2.3a)$$

$$\Leftrightarrow ik_z \vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z = -i\omega \vec{B}_\perp \times \vec{e}_z \quad (4.2.3b)$$

und zusammen mit Gleichung 4.1.2d ergibt sich:

$$\left(ik_z \vec{B}_\perp + \vec{\nabla}_\perp B_z\right) \times \vec{e}_z = i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_\perp \quad (4.2.4a)$$

$$\Leftrightarrow ik_z \vec{B}_\perp + \vec{\nabla}_\perp B_z = -i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_\perp \times \vec{e}_z. \quad (4.2.4b)$$

Setzt man nun Gleichung 4.2.3a in Gleichung 4.2.4b und Gleichung 4.2.4a in Gleichung 4.2.3b ein, erhält man nach Umformen zusammen mit 4.2.2:

$$ik_c^2 \vec{E}_\perp = k_z \vec{\nabla}_\perp E_z + \omega \vec{\nabla}_\perp B_z \times \vec{e}_z \quad (4.2.5a)$$

$$ik_c^2 \vec{B}_\perp = k_z \vec{\nabla}_\perp B_z - \omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla}_\perp E_z \times \vec{e}_z. \quad (4.2.5b)$$

Für die TE-Moden ist  $E_z = 0$  und man erhält die transversalen Felder aus

$$\vec{B}_\perp = -i \frac{k_z}{k_c^2} \vec{\nabla}_\perp B_z.$$

Für die TM-Moden ist  $B_z = 0$  und man erhält die transversalen Felder aus

$$\vec{E}_\perp = -i \frac{k_z}{k_c^2} \vec{\nabla}_\perp E_z.$$

Den Gleichungen 4.2.3 und 4.2.4 entnimmt man, dass die transversalen elektrischen und magnetischen Felder durch die Wellenimpedanz  $Z$  wie folgt verknüpft sind:

$$\vec{B}_\perp = \frac{\mu_0}{Z} \vec{e}_z \times \vec{E}_\perp. \quad (4.2.6)$$

Für TE-Moden ist die Wellenimpedanz  $Z_{\text{TE}} = \frac{\mu_0 \omega}{k_z}$  und für TM-Moden ist die Wellenimpedanz  $Z_{\text{TM}} = \frac{k_z}{\epsilon_0 \omega}$ .

Fasst man dies zusammen, gilt für die TE-Moden eines Hohlleiters

$$\vec{E}_\perp = -i \frac{\omega}{k_c^2} \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp B_z, \quad (4.2.7a)$$

$$\vec{B}_\perp = -i \frac{k_z}{k_c^2} \vec{\nabla}_\perp B_z \quad (4.2.7b)$$

und für die TM-Moden:

$$\vec{E}_\perp = -i \frac{k_z}{k_c^2} \vec{\nabla}_\perp E_z, \quad (4.2.8a)$$

$$\vec{B}_\perp = -i \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{k_c^2} \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp E_z. \quad (4.2.8b)$$

Die longitudinalen Felder müssen, ebenso wie die transversalen, Lösungen der Wellengleichung unter den oben angegebenen Randbedingungen (4.2.1) sein.

### 4.3. Elektromagnetische Wellen in Quaderresonatoren

Schließt man die Enden eines Hohlleiters mit leitenden Platten ab, erhält man einen Hohlraumresonator, in dem sich stehende Wellen ausbilden können. Im folgenden Abschnitt werden stehende Wellen in einem Quaderresonator betrachtet.

Zur Beschreibung eines Quaderresonators wählt man zweckmäßig kartesische Koordinaten. In diesen lautet die Wellengleichung:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0. \quad (4.3.1)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind von der Form

$$\psi = A \cdot \exp \left( i\omega t \pm i\vec{k}\vec{r} \right).$$

Hierbei ist  $A$  die Amplitude der Welle,  $\omega = 2\pi f$  ihre Kreisfrequenz,  $\vec{k} = |k| \cdot \vec{e}_k = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{e}_k$  ihr Wellenvektor und  $\vec{r}$  der Ortsvektor.

Ähnlich wie in einem Hohlleiter existieren in einem Quaderresonator, auf Grund der von der Welle auf den leitenden Innenflächen zu erfüllenden Randbedingungen, nur diskrete Lösungen der Wellengleichung, die als Eigenschwingungen oder Eigenmoden des Resonators bezeichnet werden. Die Gesamtheit aller Eigenmoden wird Modenspektrum genannt. Dessen Feldgleichungen und die damit verbundene Dispersionsrelation werden im Folgenden hergeleitet.

Um in einem Quader mit der Breite  $a$ , der Höhe  $b$  und der Tiefe  $d$  die Randbedingungen 4.2.1 für die Felder erfüllen zu können, muss

$$\begin{aligned} E_x(x=0) &= E_x(x=a) = 0 \\ E_y(y=0) &= E_y(y=b) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} E_z(z=0) &= \frac{\partial}{\partial z} E_z(z=d) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} B_x(x=0) &= \frac{\partial}{\partial x} B_x(x=a) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} B_y(y=0) &= \frac{\partial}{\partial y} B_y(y=b) = 0 \\ B_z(z=0) &= B_z(z=d) = 0 \end{aligned}$$

gelten. Das bedeutet, die einzelnen Komponenten der Felder müssen entweder räumlich konstant oder räumlich oszillierend sein. Es muss also

$$\begin{aligned} E_x &\propto \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \\ E_y &\propto \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ E_z &\propto \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ B_x &\propto \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \\ B_y &\propto \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ B_z &\propto \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \end{aligned}$$

gelten.

Hierbei sind  $k_x = \frac{m\pi}{a}$ ,  $k_y = \frac{n\pi}{b}$  und  $k_z = \frac{p\pi}{d}$  die Wellenzahlen in den jeweiligen Raumrichtungen und  $m$ ,  $n$ , und  $p$  sind ganze positive Zahlen.

Für TM-Moden führt der Ansatz

$$E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z)$$

mit den Gleichungen 4.2.8 und der zusätzlichen Randbedingung in  $z$ -Richtung zu:

$$E_x = -i \frac{k_x k_z}{k_c^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (4.3.2a)$$

$$E_y = -i \frac{k_y k_z}{k_c^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (4.3.2b)$$

$$E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (4.3.2c)$$

$$B_x = i \frac{\omega_{mnp} k_y}{c^2 k_c^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \quad (4.3.2d)$$

$$B_y = -i \frac{\omega_{mnp} k_x}{c^2 k_c^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (4.3.2e)$$

$$B_z = 0. \quad (4.3.2f)$$

Analog findet man mit dem Ansatz

$$B_z = B_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z)$$

und den Gleichungen 4.2.7 für die TE-Moden:

$$E_x = i \frac{\omega_{mnp} k_y}{k_c^2} B_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (4.3.3a)$$

$$E_y = -i \frac{\omega_{mnp} k_x}{k_c^2} B_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (4.3.3b)$$

$$E_z = 0 \quad (4.3.3c)$$

$$B_x = i \frac{k_x k_z}{k_c^2} B_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \quad (4.3.3d)$$

$$B_y = i \frac{k_y k_z}{k_c^2} B_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (4.3.3e)$$

$$B_z = B_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z). \quad (4.3.3f)$$

Damit ist

$$\omega_{mnp} = c \cdot k_{mnp} = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (4.3.4)$$

die Dispersionsrelation der Resonanzfrequenzen.

## 4.4. Elektromagnetische Wellen in Zylinderresonatoren

Im folgenden Abschnitt werden stehende Wellen in einem Zylinderresonator betrachtet. Zur Beschreibung eines Zylinderresonators wählt man zweckmäßig Zylinderkoordinaten. Unter der Koordinatentransformation

$$x \rightarrow r \cdot \cos(\varphi) \quad (4.4.1a)$$

$$y \rightarrow r \cdot \sin(\varphi) \quad (4.4.1b)$$

$$z \rightarrow z \quad (4.4.1c)$$

in Zylinderkoordinaten geht die Wellengleichung 4.3.1 in folgende Form über:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\text{zyl}} \right) \psi = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0. \quad (4.4.2)$$

Zur Lösung dieser Wellengleichung wählt man als Separationsansatz

$$\psi(\varphi, r, z, t) = P(\varphi) \cdot R(r) \cdot Z(z) \cdot T(t),$$

findet als Teillösungen<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \frac{P''(\varphi)}{P(\varphi)} &= -m^2 \Leftrightarrow P(\varphi) = B \cdot e^{im\varphi} \\ \frac{R''(r)}{R(r)} &= -n^2 \Leftrightarrow R(r) = C \cdot J_n(r) + D \cdot N_n(r) \\ \frac{Z''(z)}{Z(z)} &= -p^2 \Leftrightarrow Z(z) = E \cdot e^{\pm ipz} \\ \frac{T''(t)}{T(t)} &= -\omega^2 \Leftrightarrow T(t) = F \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

und damit

$$\Rightarrow \psi(\varphi, r, z, t) = \pm A \cdot J_m(r) e^{\pm ipz + im\varphi + i\omega t}$$

als Lösung der Wellengleichung 4.4.2.

Hierbei ist  $A$  ein Vorfaktor, der die Amplitude der Welle beschreibt und  $J_n$  die  $n$ -te Besselfunktion. Die Bedeutung der Separationskonstanten  $n$ ,  $m$  und  $p$  wird später deutlich.

Wegen der Eindeutigkeit der Felder ist für die Winkelabhängigkeit  $B(\varphi, r, z) = B(\varphi + 2\pi, r, z)$  und  $E(\varphi, r, z) = E(\varphi + 2\pi, r, z)$  zu fordern.

---

<sup>3</sup> $N_n$  ist die  $n$ -te Neumannfunktion und eine zur  $n$ -ten Besselfunktion orthogonale Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung. Da sie für  $r \rightarrow 0$  eine logarithmische Singularität aufweist kann sie als nicht physikalische Lösung bei der folgenden Betrachtung weggelassen werden.  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$  sind beliebige reelle Konstanten

Dies lässt sich für TE-Moden durch den Ansatz

$$B_z \propto \cos(m\varphi) \text{ oder } B_z \propto \sin(m\varphi)$$

und für TM-Moden durch den Ansatz

$$E_z \propto \cos(m\varphi) \text{ oder } E_z \propto \sin(m\varphi)$$

erfüllen. Hieraus folgt sofort, dass die Separationskonstante  $m$  eine ganze Zahl sein muss. Außerdem folgt hieraus, dass für jede Mode mit  $m \neq 0$  zwei Polarisierungen existieren<sup>4</sup>, die um den Winkel  $\frac{\pi}{2m}$  gegeneinander verdreht sind.

Im Fall eines kreiszylindrischen Hohlleiters mit Innenradius  $R$ , erfordern die Randbedingungen 4.2.1

$$\begin{aligned} \vec{B}_\perp(R) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} B_z(R) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \vec{E}_\perp(R) &= 0 \\ E_z(R) &= 0. \end{aligned}$$

Dies lässt sich für TE-Moden durch den Ansatz

$$B_z \propto J_m \left( \frac{X'_{mn}}{R} r \right)$$

und für TM-Moden durch den Ansatz

$$E_z \propto J_m \left( \frac{X_{mn}}{R} r \right)$$

erfüllen. Wobei  $X_{mn}$  die  $n$ -te Nullstelle der  $m$ -ten Besselfunktion und  $X'_{mn}$  die  $n$ -te Nullstelle der Ableitung der  $m$ -ten Besselfunktion ist. Fasst man dies zusammen, ergibt sich für TE-Moden

$$B_z = B_0 \cdot J_m \left( \frac{X'_{mn}}{R} \cdot r \right) \cdot \cos(m\varphi) e^{i\omega t}$$

und für die TM-Moden

$$E_z = E_0 \cdot J_m \left( \frac{X_{mn}}{R} \cdot r \right) \cdot \cos(m\varphi) e^{i\omega t}$$

---

<sup>4</sup>Die folgenden Rechnungen beschränken sich auf die Ansätze  $\propto \cos(m\varphi)$ , da die Ansätze  $\propto \sin(m\varphi)$  nur für  $m \neq 0$  Lösungen liefern und sich durch eine Drehung um  $\frac{\pi}{2m}$  aus den Lösungen  $\propto \cos(m\varphi)$  ergeben.

als Ansatz für die longitudinalen Felder in einem kreiszylindrischen Hohlleiter. Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über die ersten Nullstellen der ersten Besselfunktionen. Abbildung 4.2(a) zeigt die Graphen der nullten, der ersten und der zweiten Besselfunktion und Abbildung 4.2(b) zeigt die Graphen der Ableitungen der nullten, der ersten und der zweiten Besselfunktion. Für TE-Moden ist  $k_c = \frac{X'_{mn}}{R}$  und für TM-Moden  $k_c = \frac{X_{mn}}{R}$  die kri-

n	$x_{0n}$	$x_{1n}$	$x_{2n}$	$x_{3n}$	$x'_{0n}$	$x'_{1n}$	$x'_{2n}$	$x'_{3n}$
1	2,4048	3,832	5,136	6,380	3,832	1,841	3,054	4,201
2	5,520	7,016	8,417	9,761	7,016	5,331	6,706	8,015
3	8,654	10,173	11,620	13,015	10,173	8,536	9,969	11,346

**Tabelle 4.1.:** Nullstellen der ersten vier Besselfunktionen und deren Ableitungen

tische Wellenzahl. Mit diesem Ansatz erhält man mit 4.2.7 sofort die transversalen Felder der TE-Moden

$$\begin{aligned}
 E_\varphi &= i \frac{\omega_{mnp} m}{k_c^2 r} B_0 \cdot J'_m(k_c \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) e^{i\omega t} \\
 E_r &= i \frac{\omega_{mnp}}{k_c} B_0 \cdot J_m(k_c \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) e^{i\omega t} \\
 B_\varphi &= i \frac{k_z m}{k_c^2 r} B_0 \cdot J'_m(k_c \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) e^{i\omega t} \\
 B_r &= -i \frac{k_z}{k_c} B_0 \cdot J_m(k_c \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

und mit 4.2.8 findet man die transversalen Felder der TM-Moden:

$$\begin{aligned}
 E_\varphi &= i \frac{k_z m}{k_c^2 r} E_0 \cdot J_m(k_c \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) e^{i\omega t} \\
 E_r &= -i \frac{k_z}{k_c} E_0 \cdot J'_m(k_c \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) e^{i\omega t} \\
 B_\varphi &= i \frac{\omega_{mnp} \mu_0 \epsilon_0}{k_c} E_0 \cdot J'_m(k_c \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) e^{i\omega t} \\
 B_r &= i \frac{\omega_{mnp} \mu_0 \epsilon_0 m}{k_c^2 r} E_0 \cdot J_m(k_c \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) e^{i\omega t}.
 \end{aligned}$$

Schließt man einen zylindrischen Hohlleiter mit leitenden Platten ab, ändert dies unmittelbar die Randbedingungen der Welle in z-Richtung und man erhält einen Zylinderresonator. In diesem existieren, genauso wie im Hohlleiter und im Quaderresonator, auf Grund der von der Welle an den leitenden Innenflächen zu erfüllenden Randbedingungen, nur diskrete Lösungen der Wellengleichung. Mit den Randbedingungen 4.2.1 muss für einen Resonator

der Länge  $L$

$$\begin{aligned} B_z &\propto \sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \\ \vec{B}_\perp &\propto \cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \\ E_z &\propto \cos\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \\ \vec{E}_\perp &\propto \sin\left(\frac{p\pi}{L}z\right) \end{aligned}$$

gelten.

Als Dispersionsrelation der Resonanzfrequenzen findet man demnach:

$$\text{TE: } \omega_{mnp} = c \cdot k_{mnp} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{X'_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \quad (4.4.3)$$

$$\text{TM: } \omega_{mnp} = c \cdot k_{mnp} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{X_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \quad (4.4.4)$$

$$= c\sqrt{\kappa_{mn}^2 + k_p^2}. \quad (4.4.5)$$

Man erkennt nun die Bedeutung der Separationskonstanten  $m$ ,  $n$  und  $p$ , die beim Lösen der Wellengleichung aufgetreten sind:

- $m$  ist die Anzahl der azimuthalen Knotenlinien,
- $n$  ist die Anzahl der radialen Knotenlinien,
- $p$  ist die Periodizität in  $z$ -Richtung.

Zusammen mit den Gleichungen 4.2.7 für den Hohlleiter, führt dies zu folgenden Gleichungen für die transversalen Felder der TE-Moden:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp &= -\frac{i\mu\omega_{mnp}}{\mu_0\kappa_{mn}^2} \sin(k_p z) \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp B_z e^{i\omega t} \\ \vec{B}_\perp &= \frac{k_p}{\kappa_{mn}} \cos(k_p z) \vec{\nabla}_\perp B_z e^{i\omega t} \end{aligned}$$

und mit den Gleichungen 4.2.8 ergibt sich für die TM-Moden:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp &= -\frac{k_p}{\kappa_{mn}} \sin(k_p z) \vec{\nabla}_\perp E_z e^{i\omega t} \\ \vec{B}_\perp &= \frac{i\mu_0\epsilon\omega_{mnp}}{\kappa_{mn}^2} \cos(k_p z) \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_\perp E_z e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich für die TE-Moden in einem Zylinderresonator:

$$\begin{aligned}
 E_\varphi &= i \frac{\omega_{mnp}}{\kappa_{mn}} B_0 \cdot J'_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) \sin(k_p z) e^{i\omega t} \\
 E_r &= i \frac{\omega_{mnp} m}{\kappa_{mn}^2 r} B_0 \cdot J_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) \sin(k_p z) e^{i\omega t} \\
 E_z &= 0 \\
 B_\varphi &= \frac{k_p}{\kappa_{mn}} B_0 \cdot J'_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) \cos(k_p z) e^{i\omega t} \\
 B_r &= -\frac{k_p m}{\kappa_{mn}^2 r} B_0 \cdot J_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) \cos(k_p z) e^{i\omega t} \\
 B_z &= B_0 \cdot J_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) \sin(k_p z) e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

und für die TM-Moden in einem Zylinderresonator:

$$E_\varphi = -\frac{k_p m}{\kappa_{mn}^2 r} E_0 \cdot J_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) \sin(k_p z) e^{i\omega t} \quad (4.4.6a)$$

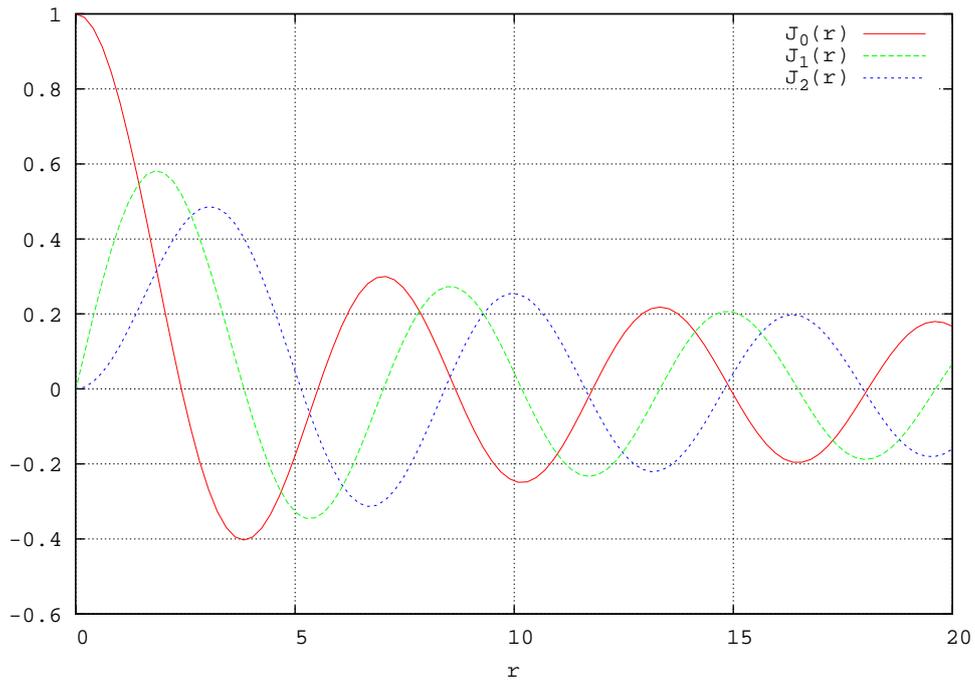
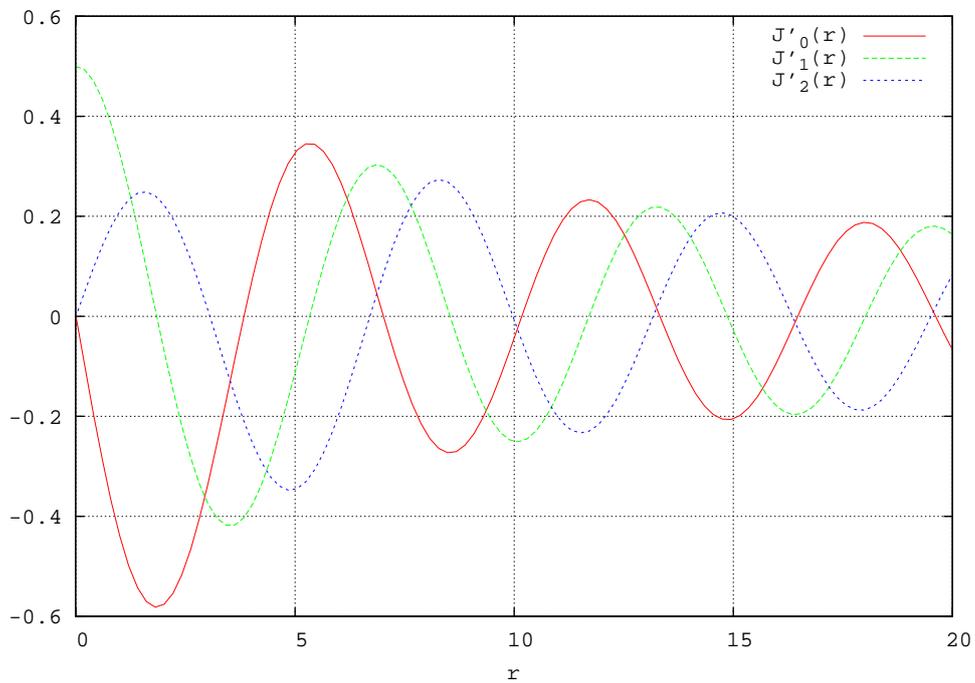
$$E_r = -\frac{k_p}{\kappa_{mn}} E_0 \cdot J'_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) \sin(k_p z) e^{i\omega t} \quad (4.4.6b)$$

$$E_z = E_0 \cdot J_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) \cos(k_p z) e^{i\omega t} \quad (4.4.6c)$$

$$B_\varphi = -i \frac{\omega_{mnp} \mu_0 \epsilon_0}{\kappa_{mn}} E_0 \cdot J'_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \cos(m\varphi) \cos(k_p z) e^{i\omega t} \quad (4.4.6d)$$

$$B_r = -i \frac{\omega_{mnp} \mu_0 \epsilon_0 m}{\kappa_{mn}^2 r} E_0 \cdot J_m(\kappa_{mn} \cdot r) \cdot \sin(m\varphi) \cos(k_p z) e^{i\omega t} \quad (4.4.6e)$$

$$B_z = 0. \quad (4.4.6f)$$

(a) Besselfunktionen  $J_m(r)$  für  $m=1,2,3$ (b) Ableitungen der Besselfunktionen  $J'_m(r)$  für  $m=1,2,3$ **Abbildung 4.2.:** Besselfunktionen

## 4.5. Ersatzschaltbilder und Güte $Q$ eines Hohlraumresonators

Die Güte  $Q_0$  eines Hohlraumresonators ist, ähnlich wie bei elektrischen Schwingkreisen, ein Maß für ihre Fähigkeit, Energie zu speichern. Im folgenden Abschnitt wird daher am Beispiel von Schwingkreisen die Güte  $Q_0$  eines Hohlraumresonators eingeführt. Anschließend wird am Beispiel von Schwingkreisen mit externer Anregung auf die Möglichkeiten eingegangen, Leistung in einen Schwingkreis einzukoppeln. Es wird sich zeigen, dass Schwingkreise mit externer Anregung als Ersatzschaltbilder für die Leistungseinkopplung in Hohlraumresonatoren dienen können.

### 4.5.1. Unbelasteter elektrischer Schwingkreis

Als Ersatzschaltbild eines Hohlraumresonators, welcher in der Nähe einer Resonanzfrequenz betrieben wird, kann man eine Parallelschaltung aus einer Spule der Induktivität  $L$ , einem Widerstand  $R$  und einem Kondensator der Kapazität  $C$ , einen RCL-Parallelschwingkreis, betrachten.

Die Deckflächen können als Platten eines Plattenkondensators aufgefasst werden. Die Mantelfläche lässt sich als Parallelschaltung von Spulen beschreiben. Die ohmschen Verluste entsprechen dem Widerstand im Ersatzschaltbild. Nach den Kirchhoff'schen Regeln gilt für die Spannungen

$$U_C = U_R = U_L$$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

$$U_L = L \cdot \dot{I}$$

$$U_R = R \cdot I$$

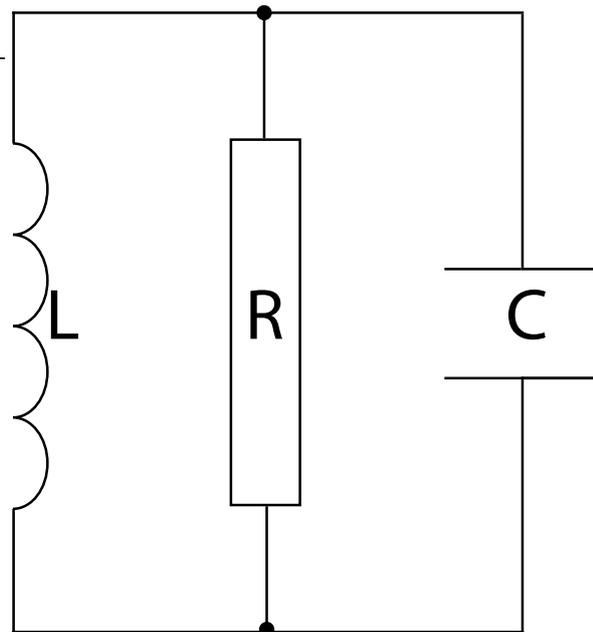


Abbildung 4.3.: RCL-Parallelschwingkreis als Ersatzschaltbild eines Hohlraumresonators

und

$$I_C + I_R + I_L = 0$$

für die Ströme. Zusammen mit  $I = \frac{dQ}{dt}$  führt dies auf die Differentialgleichung

$$\ddot{U} + \frac{1}{RC}\dot{U} + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Man nennt  $\tau = R \cdot C$  die Zeitkonstante des Schwingkreises und  $\omega_0 = (L \cdot C)^{-\frac{1}{2}}$  seine Resonanzfrequenz und findet damit

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot e^{i\omega_0 t} \quad (4.5.1)$$

als Lösung für den Schwingfall.

Für die im Schwingkreis gespeicherte Energie  $W$  findet man

$$W = \frac{1}{2} C \cdot |U|^2 = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.5.2)$$

Wie man dieser Gleichung entnimmt, ist die Zeitkonstante  $\tau$  des Schwingkreises die Zeit bis die im Schwingkreis gespeicherte Energie  $W$  auf den Wert  $\frac{W}{e}$  und  $2\tau$  die Zeit bis die Spannung  $U$  im Schwingkreis auf den Wert  $\frac{U}{e}$  abgesunken ist.

Ausgehend von Gleichung 4.5.2 findet man

$$P = \dot{W} = \frac{1}{\tau} W$$

als die Verlustleistung des Schwingkreises.

Man definiert die Kreisgüte  $Q_0$  als das  $2\pi$ -fache der gespeicherten Energie  $W$  geteilt durch den Energieverlust  $\dot{W}$  und die Periodendauer  $T$ .

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot W}{T \cdot \dot{W}} = \frac{\omega_0 \cdot W}{\dot{W}} = \omega_0 \cdot \tau = \omega_0 \cdot R \cdot C \quad (4.5.3)$$

Messtechnisch ist die Güte aus dieser Gleichung nur schwer zu bestimmen.

In der Literatur findet man

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

als Definition der Güte [ Zinke und Brunswig (2000) ].

Hierbei ist  $\omega_0$  die Resonanzfrequenz des Schwingkreises und  $\Delta\omega$  seine Halbwerts- oder Bandbreite.  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind diejenigen Frequenzen, bei denen die im Schwingkreis gespeicherte Energie auf die Hälfte abgefallen ist.

Die Äquivalenz dieser beiden Gleichungen soll im Folgenden gezeigt werden:

Man kann die gedämpfte Eigenschwingung des Schwingkreises als Überlagerung vieler Schwingungen dicht beieinander liegender Frequenzen um die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  auffassen. Die zu diesen Frequenzen gehörenden Amplituden sind durch die Fourier-Transformation von Gleichung 4.5.1

$$U(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt$$

gegeben.

Ersetzt man nach Gleichung 4.5.3 die Zeitkonstante  $\tau$  durch die Güte  $Q_0$  erhält man nach Umformen:

$$U(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} = \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\omega_0}{2Q_0} + i\omega - i\omega_0\right)t} dt$$

Bildet man von dieser Gleichung nach dem Ausführen der Integration das Betragsquadrat, ist laut Gleichung 4.5.2

$$|U(\omega)|^2 = \frac{U_0^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q_0}\right)^2}$$

eine zur gespeicherten Energie proportionale Größe. Diese ist bei einer Frequenz von

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

auf den Wert

$$\left| U\left(\omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q_0}\right) \right|^2 = \frac{|U(\omega_0)|^2}{2}$$

abgefallen.

Es sind also

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q_0} \text{ und } \omega_2 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

die Frequenzen, bei denen die im Schwingkreis gespeicherte Energie auf die Hälfte abgefallen ist. Bildet man die Differenz dieser beiden Frequenzen, erhält man nach Umformen

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

als (unbelastete) Güte des Schwingkreises.

### 4.5.2. Belastete elektrische Schwingkreise / Schwingkreise mit externer Anregung

Betrachtet man einen RCL-Parallelschwingkreis mit einer periodischen Anregung, wie in Abbildung 4.4 dargestellt, gilt nach der Kirchhoff'schen Maschenregel

$$U_C = U_R = U_L = U_I$$

für die Spannungen und nach der Kirchhoff'schen Knotenregel gilt

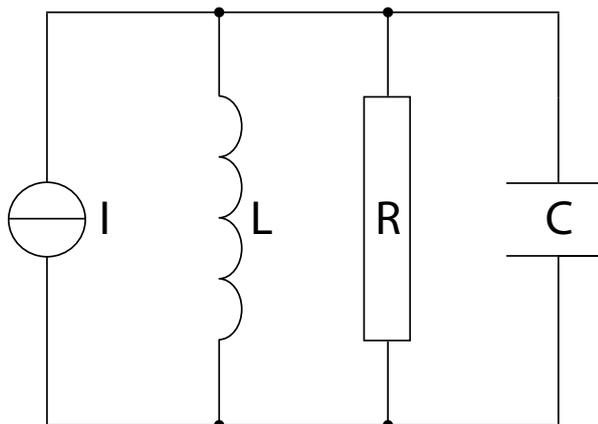
$$I_C + I_{\text{ext}} + I_R + I_L = 0$$

für die Ströme. Mit

$$I_C = \dot{Q}_C = CU_C$$

$$I_R = \frac{U_R}{R}$$

$$\dot{I}_L = \frac{U_L}{L}$$



**Abbildung 4.4.:** RCL-Parallelschwingkreis mit externer Anregung als Ersatzschaltbild eines Hohlraumresonators

führt dies auf die Differentialgleichung:

$$C\ddot{U} + \frac{1}{R}\dot{U} + \frac{1}{L}U = -\dot{I}_{\text{ext}}$$

Nach Division durch die Kapazität  $C$ , sowie einsetzen der Güte  $Q_0 = \omega_0 \cdot R \cdot C$  aus Gleichung 4.5.3 und der Resonanzfrequenz  $\omega_0 = (L \cdot C)^{-\frac{1}{2}}$  des Schwingkreises lässt sich diese Differentialgleichung in

$$\ddot{U} + \frac{\omega_0}{Q_0}\dot{U} + \omega_0^2 U = -\frac{\dot{I}_{\text{ext}}}{C}$$

umformen.

Wählt man

$$I_{\text{ext}} = I_{\text{ext},0} \cdot e^{i\omega t}$$

und

$$U = U_0 \cdot e^{i\omega t}$$

als Ansatz, findet man

$$U = -\frac{\frac{i\omega I_{\text{ext}}}{C}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q_0}}$$

als Lösung dieser Differentialgleichung.

Zusammen mit der Definition der Güte  $Q_0 = \omega_0 \cdot R \cdot C$  aus Gleichung 4.5.3 lässt sich dies in

$$U = -\frac{RI_{\text{ext}}}{1 + iQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

umformen.

Damit ist nach dem Ohm'schen-Gesetz

$$Z = \frac{R}{1 + iQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (4.5.4)$$

die Impedanz des Schwingkreises,

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (4.5.5)$$

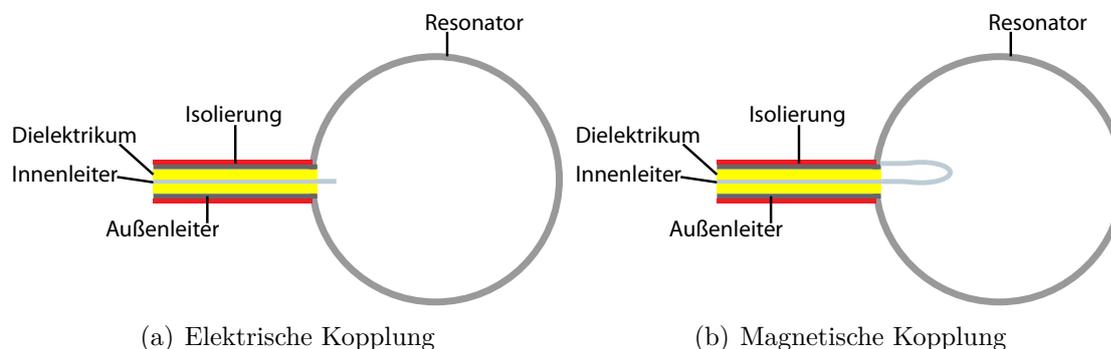
der Betrag der Impedanz und

$$\varphi = \arctan \left( Q_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \quad (4.5.6)$$

die Phasenverschiebung zwischen der externen Anregung und der Schwingung des Schwingkreises.

### 4.5.3. Einkoppeln von elektromagnetischen Wellen in einen Hohlraumresonator

Es gibt im Wesentlichen drei verschiedene Möglichkeiten, elektromagnetischen Wellen in einen Hohlraumresonator einzukoppeln:

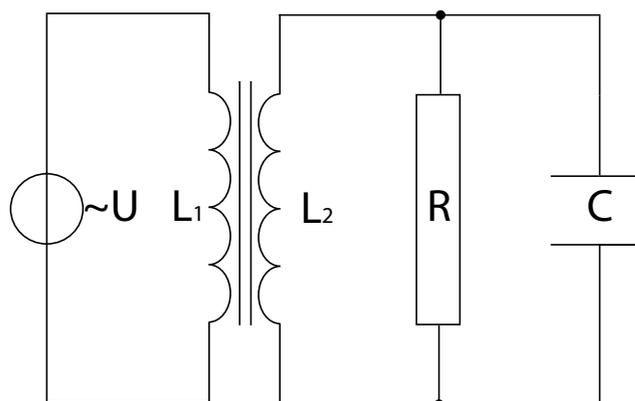


**Abbildung 4.5.:** Koppelmöglichkeiten an die Felder im Resonator

- Einkopplung einer Welle aus einem Hohlleiter
- Kopplung an das elektrische Feld mit dem verlängerten Innenleiter eines Koaxialkabels (siehe Abb. 4.5(a))
- Kopplung an das magnetische Feld mit einer Koppelschleife am Ende eines Koaxialkabels (siehe Abb. 4.5(b))

Die Einkopplung von elektromagnetischen Wellen in einen Hohlraumresonator wird hier am Beispiel der Kopplung an das magnetische Feld der sogenannten Schleifenkopplung vorgestellt:

Als Ersatzschaltbild dient der in Abbildung 4.6 dargestellte RCL - Parallelschwingkreis, dessen Spule  $L_2$  die Sekundärspule eines Transformators ist. Die Primärspule  $L_1$  des Transformators ist eine Koppelschleife am Ende eines Koaxialkabels mit dem Leitungswiderstand  $Z_0 = 50 \Omega$ . Die vom HF-Generator erzeugten Mikrowellen sollen möglichst vollständig, also ohne dass Reflektionen auftreten,



**Abbildung 4.6.:** Ersatzschaltbild zur Schleifenkopplung

in den Resonator gelangen. Hierzu ist eine Impedanzanpassung erforderlich. Die Leitung vom HF-Generator zum Resonator muss mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen werden. Die Impedanz des Resonators ist im Allgemeinen eine komplexe Größe. Im Resonanzfall ist sie reell und wird als Shuntimpedanz  $R_s$  bezeichnet (siehe Abschnitt 5.3). Diese

wird durch die Schleifenkopplung auf  $Z_a = \frac{R_S}{n^2}$  herunter transformiert. Für die Reflexion ist das Verhältnis aus Abschlusswiderstand und Leitungsimpedanz entscheidend. Man definiert daher den Koppelfaktor  $\kappa$  als den Quotienten aus dem Abschlusswiderstand  $Z_a$  und der Leitungsimpedanz  $Z_0$ :

$$\kappa = \frac{Z_a}{Z_0} = \frac{R_S}{n^2 Z_0}. \quad (4.5.7)$$

Da der Resonator durch die externe Leitung zusätzlich belastet wird, ändert sich der Gesamtwiderstand zu

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_S} + \frac{\kappa}{R_S} = \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_{\text{ext}}}$$

Für die Gesamtleistung bedeutet dies

$$P_{\text{ges}} = P_0 + P_{\text{ext}}.$$

Die unbelastete Güte  $Q_0$  sinkt damit durch das Auftreten einer externen Güte  $Q_{\text{ext}}$  auf den Wert

$$\frac{1}{Q_{\text{bel}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}}$$

ab. Analog zur unbelasteten Güte  $Q_0$  aus Gleichung 4.5.3 ist

$$Q_{\text{ext}} = \frac{\omega_0 W}{P_{\text{ext}}}$$

die externe und

$$Q_{\text{bel}} = \frac{\omega_0 W}{P_{\text{ges}}} = \frac{\omega_0 W}{P_0 + P_{\text{ext}}}$$

die belastete Güte.

Damit lässt sich für den Koppelfaktor

$$\kappa = \frac{Q_0}{Q_{\text{ext}}} = \frac{P_{\text{ext}}}{P_0} = \frac{R_S}{n^2 Z_0}$$

schreiben.

Hieraus ergibt sich

$$Q_0 = (1 + \kappa) Q_{\text{bel}} \quad (4.5.8)$$

als Zusammenhang zwischen unbelasteter und belasteter Güte.

## 5. Anwendung von Zylinderresonatoren als Deflektor

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die grundlegenden Eigenschaften von Hohlraumresonatoren vorgestellt wurden, beschäftigt sich dieses Kapitel mit den Eigenschaften und den Anforderungen an einen Hohlraumresonator, der als Deflektor eingesetzt werden soll. Diese Anforderungen werden im Folgenden am Beispiel von Zylinderresonatoren erläutert. Hierzu wird zunächst auf die Unterschiede in der Wechselwirkung eines elektrisch geladenen Teilchens mit einem konstanten elektromagnetischen Feld und der Wechselwirkung eines elektrisch geladenen Teilchens mit den elektromagnetischen Feldern in einem Hohlraumresonator eingegangen. Anschließend wird das Panofsky-Wenzel Theorem vorgestellt, welches ein Kriterium für die Auswahl der Betriebsmode des Zylinderresonators liefert. Es wird sich zeigen, dass die  $TM_{110}$ -Mode des Zylinderresonators diejenige ist, welche die geforderten Eigenschaften eines Deflektors am besten erfüllt. Abschließend werden die Felder und die daraus resultierenden Eigenschaften der  $TM_{110}$ -Mode diskutiert und ihre Anwendung als Deflektor erläutert.

### 5.1. Der Laufzeitfaktor $\Lambda$

Durchquert ein Teilchen mit der Ladung  $q$  ein elektrisches Feld  $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$ , so ist

$$\Delta W_0 = qU_{\text{acc}} = q \int_{-\infty}^{+\infty} E(z) dz$$

der Energiegewinn des Teilchens.

Durchquert ein Teilchen mit der Ladung  $q$  ein harmonisch oszillierendes elektrisches Feld  $\vec{E} = E(z) \cos(\omega t) \vec{e}_z$ , so ist

$$\Delta W = qU_{\text{acc}} = q \int_{-\infty}^{+\infty} E(z) \cos(\omega t + \varphi) dz$$

der Energiegewinn eines Teilchens, mit der Phase  $\varphi$  zum elektrischen Feld. Ersetzt man die Zeit  $t$  durch die zurückgelegte Strecke  $z$  geteilt durch die Geschwindigkeit  $v(z)$  des

Teilchens findet man zusammen mit  $v(z) = \beta(z)c$

$$\Delta W = qU_{\text{acc}} = q \int_{-\infty}^{+\infty} E(z) \cos\left(\omega \frac{z}{\beta(z)c}\right) dz = q \int_{-\infty}^{+\infty} E(z) e^{i\omega \frac{z}{\beta(z)c}} dz$$

als Energiegewinn eines Teilchens, das mit dem oszillierenden Feld in Phase ist.

Man definiert den Laufzeitfaktor

$$\Lambda = \frac{\Delta W}{\Delta W_0} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(z) e^{i\omega \frac{z}{\beta(z)c}} dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} E(z) dz}$$

als Maß für die Beschleunigungswirkung eines oszillierenden Feldes.

Für den Spezialfall der linearen Dispersion ( $\omega(k) = c \cdot k$ ) ist

$$\Lambda = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(z) e^{i \frac{kz}{\beta(z)}} dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} E(z) dz}$$

der Laufzeitfaktor.

Der Energiegewinn in einem oszillierenden Feld ist demnach stets kleiner als durch die Amplituden der Felder gegeben [ Wangler (2008) ].

## 5.2. Das Panofsky-Wenzel Theorem

Das Panofsky-Wenzel Theorem [ Panofsky und Wenzel (1956) ] stellt einen Zusammenhang zwischen der transversalen Ortsabhängigkeit des longitudinalen Energiegewinns und der transversalen Impulsänderung eines Teilchens in einem Hohlraumresonator her.

Durchquert ein geladenes Teilchen einen Hohlraumresonator, wirkt auf das Teilchen die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) . \quad (5.2.1)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lässt sich ein kartesisches Koordinatensystem so wählen, dass sich das Teilchen in  $z$ -Richtung bewegt. Die Lorentzkraft bewirkt gemäß

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \int_0^L \left( \frac{dt}{dz} \vec{F} \right) dz = \int_0^L \frac{q}{v_z} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) dz \quad (5.2.2)$$

eine Änderung des Impulses. Die elektrischen und magnetischen Felder lassen sich durch ein skalares Potential  $\phi$  und ein Vektorpotential  $\vec{A}$  beschreiben: [ Jackson (2006) ]

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad (5.2.3)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5.2.4)$$

Da  $\phi$  nur bis auf die zeitliche Ableitung einer beliebigen skalaren Funktion  $\psi$  und  $\vec{A}$  nur bis auf den Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion  $\psi$  festgelegt ist, besteht durch

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\psi \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \end{aligned}$$

Eichfreiheit. [ Jackson (2006) ]

Wählt man die Eichung so, dass  $\vec{A}$  quellenfrei ist, die sogenannte Coulomb-Eichung, vereinfacht sich Gleichung 5.2.3 zu:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}. \quad (5.2.5)$$

Mit den Potentialen aus den Gleichungen 5.2.4 und 5.2.5 lässt sich für die Impulsänderung

$$\Delta\vec{p} = \frac{q}{v_z} \int_0^L \left( \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \right) dz$$

schreiben. Nach Ausführen des doppelten Kreuzproduktes ist

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \frac{q}{v_z} \int_0^L \left( v_z \frac{\partial}{\partial z} A_x - v_z \frac{\partial}{\partial x} A_z - \frac{\partial}{\partial t} A_x \right) dz \\ \Delta p_x &= q \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} A_z dz - q \int_0^L \left( \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{1}{v_z} \frac{\partial}{\partial t} A_x \right) dz \end{aligned}$$

die x-Komponente dieser Gleichung. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \end{aligned}$$

das totale Zeitdifferential des Vektorpotentials. Die durch den Hohlraumresonator verursachten Änderungen der transversalen Geschwindigkeiten sind im Allgemeinen klein gegen die longitudinale Geschwindigkeit. Mit  $v_x \ll v_z$  und  $v_y \ll v_z$  kann man das totale Zeitdif-

ferential des Vektorpotentials auf

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

vereinfachen. Damit lässt sich die x-Komponente der Impulsänderung in

$$\Delta p_x = q \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} A_z dz - q \int_0^L \frac{d}{dt} A_x dz$$

umformen. Bildet man von dieser die zeitliche Ableitung und setzt Gleichung 5.2.5 ein, ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta p_x = -q \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} E_z dz - q [E_x(L) - E_x(0)]$$

die zeitliche Änderung der x-Komponente der transversalen Impulsänderung. Da man die Integrationsgrenzen so wählen kann, dass  $E_x(L) = E_x(0) = 0$  gilt, lässt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta p_x = -q \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} E_z dz$$

für die zeitliche Änderung der x-Komponente der transversalen Impulsänderung schreiben. Auf demselben Weg findet man

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta p_y = -q \int_0^L \frac{\partial}{\partial y} E_z dz$$

als zeitliche Änderung der y-Komponente der transversalen Impulsänderung. Dies lässt sich mit dem transversalen Nablaoperator zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \vec{p}_\perp = -q \int_0^L \vec{\nabla}_\perp E_z dz$$

zusammenfassen.

Diese Gleichung ist als das Panofsky-Wenzel Theorem bekannt.

Es sagt aus, dass sich der transversale Impuls eines Teilchens, das einen Hohlraumresonator durchquert, zeitlich nur dann ändert, wenn sein longitudinaler Energiegewinn von seiner transversalen Lage abhängt.

Weiterhin sagt diese Gleichung aus, dass es möglich ist, die transversale Impulsänderung von Teilchen, die einen Hohlraumresonator durchqueren, durch eine transversale Spannung  $U_\perp$  zu beschreiben. Diese transversale Spannung stellt eine *integrale* Ersatzgröße zur Beschreibung der Eigenschaften des Hohlraumresonators dar.

## 5.3. Die Shuntimpedanz

In Analogie zur Impedanz in Wechselstromkreisen definiert man für Hohlraumresonatoren die Shuntimpedanz. In Wechselstromkreisen ist

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$$

die Impedanz. Dies lässt sich mit  $P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$  und  $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$  in

$$Z = \frac{U_0^2}{2P}$$

umformen. In Hohlraumresonatoren unterscheidet man zwischen der Shuntimpedanz in Strahlrichtung (longitudinal) und der Shuntimpedanz transversal zur Strahlrichtung.

### 5.3.1. Die longitudinale Shuntimpedanz $R_{\parallel}$

Man definiert die longitudinale Shuntimpedanz

$$R_{\parallel} = \frac{U_{\text{acc}}^2}{2P} = \frac{\left| \int_{\text{Bahn}} E_z(z) e^{ikz} dz \right|^2}{2P} \quad (5.3.1)$$

als den Quotienten aus dem Quadrat der Beschleunigungsspannung  $U_{\text{acc}}$  auf der Strahlachse und der zu ihrer Erzeugung nötigen Leistung  $P$ . Die longitudinale Shuntimpedanz ist ein Maß für die Beschleunigungswirkung eines Hohlraumresonators.

### 5.3.2. Die transversale Shuntimpedanz $R_{\perp}$

Analog zur longitudinalen Shuntimpedanz definiert man als transversale Shuntimpedanz

$$R_{\perp} = \frac{U_{\perp}^2}{2P} = \frac{\left| \frac{1}{k} \int_{\text{Bahn}} \nabla_{\perp} E_z(z) e^{ikz} dz \right|^2}{2P} \quad (5.3.2)$$

den Quotienten aus dem Quadrat der effektiven transversalen Spannung  $U_{\perp}$  und der zu ihrer Erzeugung nötigen Leistung  $P$ . Die transversale Shuntimpedanz ist ein Maß für die Ablenkung eines Hohlraumresonators.

Wegen der zentralen Bedeutung der transversalen Shuntimpedanz für die Entwicklung und den Betrieb von Deflektorresonatoren, wird im folgenden die Definition der transversalen Shuntimpedanz erläutert. Für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit ist

$$-i\omega B_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

die x-Komponente von Gleichung 4.1.2c. Integriert man dies über die Bahn eines Teilchens, das einen Hohlraumresonator durchquert, und berücksichtigt den Laufzeitfaktor, erhält man:

$$\int_{\text{Bahn}} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) e^{i\omega t} dz = \int_{\text{Bahn}} -i\omega B_x e^{i\omega t} dz.$$

Ersetzt man die Zeit  $t$  durch  $\frac{z}{\beta c}$  und multipliziert die Gleichung mit  $\beta c$  erhält man nach Umformen zusammen mit  $\frac{\partial}{\partial z} E_y = \frac{\omega}{c} E_y$

$$i \frac{\beta c}{\omega} \int_{\text{Bahn}} \frac{\partial E_z}{\partial y} e^{i\omega \frac{z}{\beta c}} dz = \int_{\text{Bahn}} (\beta c B_x + i E_y) e^{i\omega \frac{z}{\beta c}} dz .$$

Für den Spezialfall der linearen Dispersion lässt sich dies als

$$\frac{\beta}{k} \int_{\text{Bahn}} \frac{\partial E_z}{\partial y} e^{i \frac{kz}{\beta}} dz = \int_{\text{Bahn}} (E_y - i\beta c B_x) e^{i \frac{kz}{\beta}} dz$$

schreiben. Für die y-Komponente von Gleichung 4.1.2c findet man auf die gleiche Weise:

$$\frac{\beta}{k} \int_{\text{Bahn}} \frac{\partial E_z}{\partial x} e^{i \frac{kz}{\beta}} dz = \int_{\text{Bahn}} (E_x + i\beta c B_y) e^{i \frac{kz}{\beta}} dz.$$

Setzt man dies in Gleichung 5.3.2 ein, erhält man für  $\beta = 1$

$$R_{\perp} = \frac{U_{\perp}^2}{2P} = \frac{\left| \frac{1}{k} \int_{\text{Bahn}} \vec{\nabla}_{\perp} E_z(z) e^{ikz} dz \right|^2}{2P} = \frac{\left| \int_{\text{Bahn}} \left( \vec{E} + ic\vec{B} \times \vec{e}_z \right)_{\perp} e^{ikz} dz \right|^2}{2P} \quad (5.3.3)$$

als transversale Shuntimpedanz.

Es zeigt sich, dass sowohl die transversalen elektrischen als auch die transversalen magnetischen Felder in ihrer *integralen* Wirkung einen Beitrag zur transversalen Shuntimpedanz leisten. Dieses Ergebnis ist zusammen, mit dem im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Panofsky-Wenzel Theorem, der Ausgangspunkt für die in den folgenden Abschnitten dargestellten theoretischen Überlegungen und die sich daran anschließende Entwicklung des TM<sub>110</sub>-Deflektors.

## 5.4. Auswahl der Betriebsmode

Aus dem im Kapitel 5.2 vorgestellten Panofsky-Wenzel Theorem, folgt als bemerkenswertes Ergebnis, dass nur Moden, die ein longitudinales elektrisches Feld ( $E_z \neq 0$ ) haben, in ihrer *integralen* Wirkung transversale Impulsänderungen verursachen können.

Um dies zu verdeutlichen, kombiniert man Gleichung 5.3.3 mit Gleichung 5.2.2 und findet für diese transversale Impulsänderung

$$\Delta \vec{p}_\perp = \frac{q}{v} \sqrt{2R_\perp P_v} = \frac{q}{v} U_\perp.$$

Setzt man in Gleichung 5.3.3  $E_z = 0$  erhält man:

$$U_\perp = \left| \int_{\text{Bahn}} \left( \vec{E} + ic\vec{B} \times \vec{e}_z \right)_\perp e^{ikz} dz \right| = 0.$$

Hieraus folgt, dass sich die durch die elektrischen und magnetischen Felder verursachten transversalen Impulsänderungen ohne das Vorhandensein eines longitudinalen elektrischen Feldes gegenseitig aufheben. Also sind insbesondere TE-Moden ( $E_z = 0$ ) nicht in der Lage in ihrer *integralen* Wirkung Teilchen transversal abzulenken. Es sind als mögliche Betriebsmoden für den Deflektor folglich nur die TM-Moden geeignet.

Zur Wahl der am besten geeigneten  $TM_{mnp}$ -Mode kann man die folgenden Überlegungen anstellen:

Das Panofsky-Wenzel Theorem sagt aus, dass die zeitliche Änderung des transversalen Impulses proportional zu der *integralen* transversalen Änderung der longitudinalen elektrischen Feldstärke ist. Die transversale Änderung von  $E_z$  wird im Wesentlichen vom Verlauf der Besselfunktionen bestimmt (vgl. 4.4.6d). Wie man an der Abbildung 4.2(b) erkennt, ist der Funktionswert der Ableitungen der Besselfunktionen  $J'_m(r)$  bei  $r = 0$ , also auf der Strahlachse, nur bei  $m = 1$  ungleich null.

Der Index  $n$  gibt die Anzahl der radialen Knoten an. Wie man den Gleichungen 4.4.6 entnimmt, wird die Feldstärke der transversalen Felder mit größer werdender Anzahl an radialen Knotenflächen kleiner. Wie man an Gleichung 5.3.3 erkennt, hängt die transversale Spannung  $U_\perp$  und damit auch die transversale Impulsänderung  $\Delta \vec{p}_\perp$  von den transversalen Feldstärken ab. Auf Grund der Randbedingungen 4.2.1 ist die kleinste mögliche Wahl  $n = 1$ .

Würde man eine TM-Mode mit  $p \geq 1$  wählen, hätten die Felder im Deflektor abhängig von der longitudinalen Koordinate verschiedene Vorzeichen. Die Richtung der transversalen Impulsänderung des Teilchen würde sich demnach beim Durchqueren des Deflektors ändern und in der Summe kleiner sein als ohne diese Richtungswechsel. Dies schränkt die Wahl auf  $p = 0$  ein.

Folglich ist  $TM_{110}$ -Mode die beste Wahl als Betriebsmode des Deflektors.

## 5.5. Die Felder der TM<sub>110</sub>-Mode

Wie bereits in Kapitel 4.4 beschrieben, bilden sich in Zylinderresonatoren für Moden mit  $m \neq 0$  zwei um einen Winkel  $\frac{\pi}{2m}$  gegeneinander gedrehte Polarisierungen aus. Für die beiden Polarisierungen der TM<sub>110</sub>-Mode eines Zylinderresonators ergeben sich als Spezialfall der Gleichungen 4.4.6 folgende Gleichungen:

$$E_z = E_0 \cdot J_1(\kappa_{11} \cdot r) \cdot \cos(\varphi) e^{i\omega t} \quad (5.5.1a)$$

$$B_\varphi = -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{\kappa_{11}} E_0 \cdot J_1'(\kappa_{11} \cdot r) \cdot \cos(\varphi) e^{i\omega t} \quad (5.5.1b)$$

$$B_r = -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{\kappa_{11}^2 r} E_0 \cdot J_1(\kappa_{11} \cdot r) \cdot \sin(\varphi) e^{i\omega t} \quad (5.5.1c)$$

$$E_\varphi = E_r = B_z = 0 \quad (5.5.1d)$$

und

$$E_z = E_0 \cdot J_1(\kappa_{11} \cdot r) \cdot \sin(\varphi) e^{i\omega t} \quad (5.5.2a)$$

$$B_\varphi = -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{\kappa_{11}} E_0 \cdot J_1'(\kappa_{11} \cdot r) \cdot \sin(\varphi) e^{i\omega t} \quad (5.5.2b)$$

$$B_r = -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{\kappa_{11}^2 r} E_0 \cdot J_1(\kappa_{11} \cdot r) \cdot \cos(\varphi) e^{i\omega t} \quad (5.5.2c)$$

$$E_\varphi = E_r = B_z = 0. \quad (5.5.2d)$$

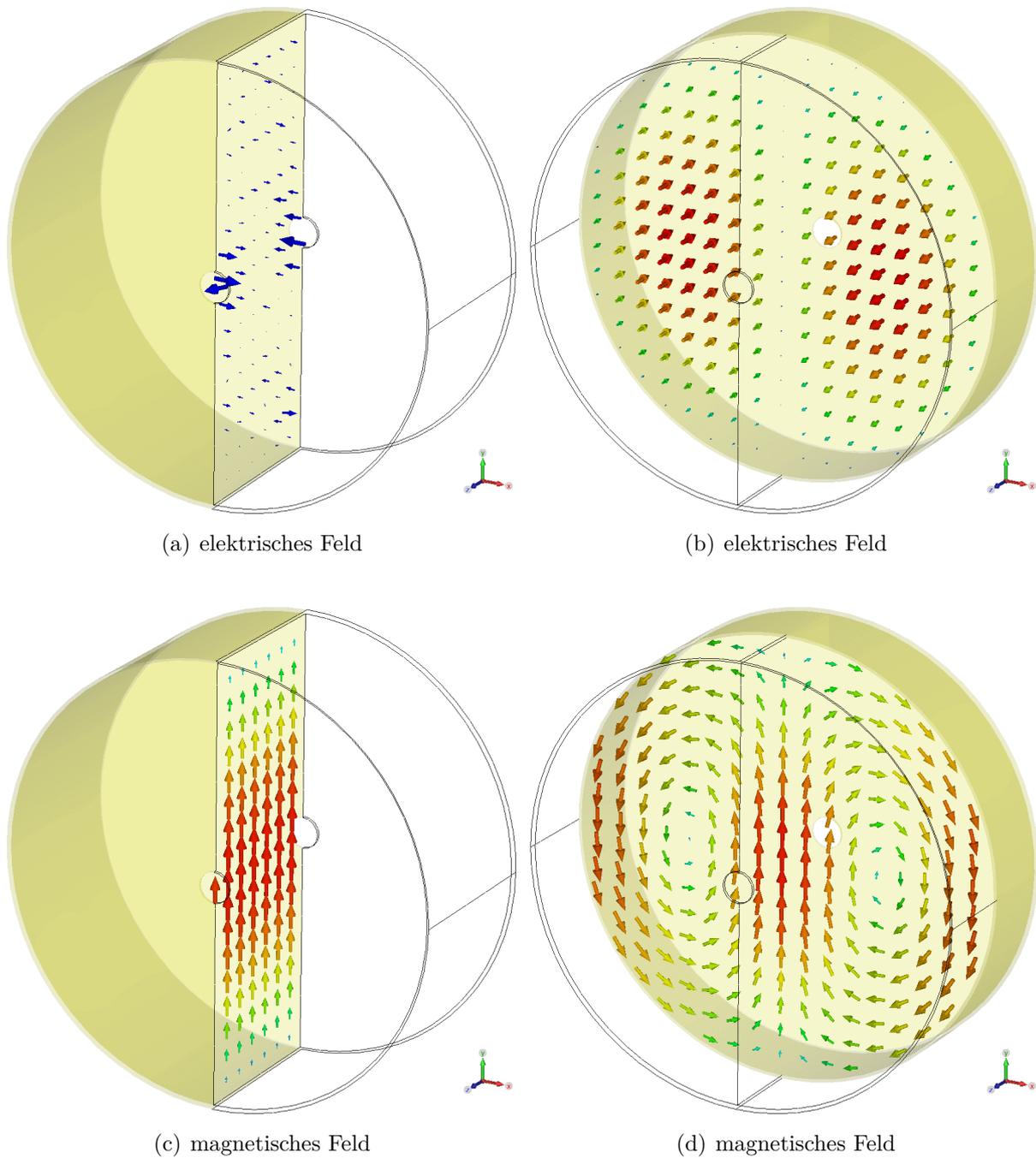
Als Spezialfall der Dispersionsrelation 4.4.4 findet man mit

$$\omega_{110} = c \cdot \frac{3,832}{R} \Leftrightarrow f_{110} = c \frac{3,832}{2\pi R} = \frac{1,831 \cdot 10^8 \text{ m}}{R \text{ s}}$$

eine von der Polarisierung und der Länge  $L$  des Resonators unabhängige Größe. Es zeigt sich, dass sowohl die Form der Felder als auch die Resonanzfrequenz der TM<sub>110</sub>-Mode unabhängig von der Länge  $L$  des Resonators sind. Allerdings hängen die Feldstärken, die im Resonator gespeicherte Energie und der Laufzeitfaktor weiterhin von seiner Länge  $L$  ab. Abbildung 5.1 zeigt mit CST Microwave Studio erstellte Felddarstellungen der beiden Polarisierungen der TM<sub>110</sub>-Mode eines Zylinderresonators. Dargestellt ist jeweils das elektrische und das magnetische Feld in der Mitte des Resonators in Ebenen senkrecht zur Strahlrichtung.

Von besonderem Interesse sind die Eigenschaften der Felder entlang der Strahlachse. Die radiale Abhängigkeit der Felder wird durch Besselfunktionen beschrieben. Laut Abramowitz und Stegun (1970) ist

$$J_m(r) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(-1)^a \left(\frac{r}{2}\right)^{2a+m}}{\Gamma(m+a+1) a!}$$



**Abbildung 5.1.:** Felder der  $TM_{110}$ -Mode in der Mitte eines Zylinderresonators in den Ebenen senkrecht zur Strahlrichtung

die Reihenentwicklung der Besselfunktion. Damit sind

$$J_1(r) = \frac{r}{2} - \frac{r^3}{2} + \frac{r^5}{384}$$

die ersten Summanden der Reihenentwicklung der ersten Besselfunktion und

$$J_1'(r) = \frac{1}{2} - 3\frac{r^2}{2} + 5\frac{r^4}{384}$$

die ersten Summanden der Reihenentwicklung der Ableitung der ersten Besselfunktion. Damit lassen sich die Gleichungen der Felder der TM<sub>110</sub>-Mode 5.5.1 für kleine  $r$  auf

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{E_0 \kappa_{11} r}{2} \cos(\varphi) \\ B_\varphi &= -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \cos(\varphi) \\ B_r &= -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \sin(\varphi) \end{aligned}$$

vereinfachen und mit

$$\begin{aligned} B_x &= B_r \cos(\varphi) - B_\varphi \sin(\varphi) \\ B_y &= B_r \sin(\varphi) + B_\varphi \cos(\varphi) \end{aligned}$$

als Umkehr der Koordinatentransformation 4.4.1 in kartesische Koordinaten überführen:

$$E_z = \frac{E_0 \kappa_{11} r}{2} \cos(\varphi) \quad (5.5.3a)$$

$$B_x = -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \cos(\varphi) \sin(\varphi) = 0 \quad (5.5.3b)$$

$$B_y = -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \sin(\varphi) \sin(\varphi) - i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \cos(\varphi) \cos(\varphi) = -i \frac{\omega_{110} \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0. \quad (5.5.3c)$$

Auf die gleiche Weise findet man ausgehend von den Gleichungen 5.5.2 für die andere Polarisation der TM<sub>110</sub>-Mode:

$$E_z = \frac{E_0 \kappa_{11} r}{2} \sin(\varphi) \quad (5.5.4a)$$

$$B_x = -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \cos(\varphi) \cos(\varphi) - i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \sin(\varphi) \sin(\varphi) = -i \frac{\omega_{110} \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \quad (5.5.4b)$$

$$B_y = -i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + i \frac{\omega_{110} \mu_0 \epsilon_0}{2 \kappa_{11}} E_0 \sin(\varphi) \cos(\varphi) = 0. \quad (5.5.4c)$$

Entlang der Strahlachse ( $r = 0$ ) haben beide Polarisationen nur ein transversales Magnetfeld. Die Felder der beiden Polarisationen stehen senkrecht aufeinander. Die transversalen elektrischen Felder verschwinden.

## 5.6. Anwendung der $TM_{110}$ -Mode eines Zylinderresonators als Deflektor

Für den Betrieb eines Deflektors ist die effektive transversale Ablenkspannung die entscheidende Größe.

Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte des Resonators findet man ausgehend von der Herleitung der transversalen Shuntimpedanz aus Gleichung 5.3.3 für einen Resonator der Länge  $L$

$$U_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (E_x - i\beta c B_y) dz$$

als x-Komponente der Ablenkspannung. Dies lässt sich in

$$U_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E_x dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -i\beta c B_y dz \quad (5.6.1)$$

umformen und summandenweise wie folgt auswerten:

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, ist die x-Komponente der elektrischen Feldstärke  $E_x$  entlang der Strahlachse eines Zylinderresonators null.

Daraus folgt für den ersten Summanden von Gleichung 5.6.1

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} E_x dz = 0$$

Es genügt demnach, nur den zweiten Summanden zu betrachten. Real- und Imaginärteil dieser Gleichung liefern um  $\pi/2$  phasenverschobene Lösungen. Der Realteil des zweiten Summanden ist

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -\beta c B_{y,0} \sin(\omega t) dz.$$

Für ein Teilchen, welches zur Zeit  $t$  am Ort  $z_0$  ist, erhält man

$$U_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} -\beta c B_{y,0} \sin\left(\omega \frac{z - z_0}{\beta c}\right) dz$$

als x-Komponente der Ablenkspannung.

Nach dem Ausführen der Integration findet man zusammen mit  $\omega(k) = k \cdot c$

$$U_x = \frac{\beta^2 c}{k} B_{y,0} \left[ \cos \left( \frac{k}{\beta} \left( \frac{L}{2} - z_0 \right) \right) - \cos \left( \frac{k}{\beta} \left( -\frac{L}{2} - z_0 \right) \right) \right]$$

und mit  $\cos(-x) = \cos(x)$

$$U_x = \frac{\beta^2 c}{k} B_{y,0} \left[ \cos \left( \frac{k}{\beta} \left( \frac{L}{2} - z_0 \right) \right) - \cos \left( \frac{k}{\beta} \left( \frac{L}{2} + z_0 \right) \right) \right]$$

Mit dem Additionstheorem

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b),$$

das man bei [ Abramowitz und Stegun (1970) ] findet, erhält man

$$U_x = \frac{2\beta^2 c}{k} B_{y,0} \sin \left( \frac{L k}{2 \beta} \right) \sin \left( \frac{k}{\beta} z_0 \right) \quad (5.6.2)$$

als x-Komponente der Ablenkspannung. Auf die gleiche Weise findet man

$$U_y = -\frac{2\beta^2 c}{k} B_{x,0} \sin \left( \frac{L k}{2 \beta} \right) \sin \left( \frac{k}{\beta} z_0 \right) \quad (5.6.3)$$

als y-Komponente der transversalen Ablenkspannung.

Die beiden Komponenten der transversalen Ablenkspannung lassen sich zu

$$U_{\perp} = 2 \frac{\beta^2 c}{k} \sin \left( \frac{L k}{2 \beta} \right) \sin \left( \frac{k}{\beta} z_0 \right) \left( \vec{e}_z \times \vec{B}_0 \right)_{\perp} \quad (5.6.4)$$

zusammenfassen. Da für die Ablenkspannung  $U_x \propto \sin \left( \frac{L k}{2 \beta} \right)$  gilt, ist diese genau dann am größten, wenn die Teilchen, die den Deflektor durchqueren, dabei genau eine halbe HF-Welle durchlaufen. Da die Geschwindigkeit  $v$  der Teilchen kleiner als die Phasengeschwindigkeit der HF-Welle ist, ergibt sich für die optimale Länge des Deflektors  $L = \beta \cdot \frac{\lambda_{\text{HF}}}{2}$ .

Daran, dass für die Ablenkspannung

$$U_{\perp} \propto \sin \left( z_0 \frac{k}{\beta} \right) = \sin(\omega t_0) = \sin(\psi_0)$$

gilt, erkennt man, dass Elektronen die den Deflektor durchqueren, abhängig von ihrer Phasenlage zur HF-Welle unterschiedliche Spannungen durchlaufen. Erreicht das Soll-Teilchen die Mitte des Resonators ( $z_0 = 0$ ) zur Phase  $\psi_0 = 0$ , erfährt es keine Ablenkung. Teilchen, die vor dem Soll-Teilchen eintreffen, erfahren eine positive Ablenkung und Teilchen die nach dem Soll-Teilchen eintreffen eine negative. Da für kleine Argumente  $\sin(z) \approx z$  ist, erfahren die Teilchen in der Nähe des Soll-Teilchens eine zu ihrer z-Position proportionale

transversale Impulsänderung.

Kombiniert man die Gleichungen 5.3.3 und 5.2.2 findet man für diese transversale Impulsänderung

$$\Delta \vec{p}_\perp = \frac{q}{\beta c} \sqrt{2R_\perp P_v} = \frac{q}{\beta c} U_\perp \quad (5.6.5)$$

und damit für den Ablenkwinkel

$$\theta_\perp = \arctan \left( \frac{\Delta |\vec{p}_\perp|}{|\vec{p}_\parallel|} \right) \approx \frac{\Delta |\vec{p}_\perp|}{|\vec{p}_\parallel|} = \frac{\frac{qU_\perp}{\beta c}}{|\vec{p}_\parallel|}.$$

Setzt man die transversale Spannung aus Gleichung 5.6.4 ein, lässt sich für den Ablenkwinkel

$$\theta_\perp = 2 \frac{\beta q}{k |\vec{p}_\parallel|} \sin \left( \frac{L k}{2 \beta} \right) \sin \left( -z_0 \frac{k}{\beta} \right) \left( \vec{e}_z \times \vec{B}_0 \right)_\perp$$

schreiben.

Wie in Abschnitt 5.5 gezeigt, existieren in einem Zylinderresonator entlang der Strahlachse abhängig von der Wahl der Polarisation Magnetfelder entweder nur in x- oder nur in y-Richtung. Ein Zylinderresonator ist also in der Lage, die Teilchen, abhängig von der Wahl der Polarisation, in zwei, zu einander orthogonalen Ebenen, abzulenken.

Wie man den Gleichung 5.6.2 und 5.6.3 entnimmt, bieten sich zur Vergrößerung der transversalen Spannung und damit des Ablenkwinkels zwei Möglichkeiten an. Die eine Möglichkeit besteht darin, die Betriebsfrequenz des Deflektors zu erhöhen. Die andere Möglichkeit besteht darin, die transversalen Feldstärken entlang der Strahlachse zu vergrößern. Laut Gleichung 5.3.3 ist eine Vergrößerung der transversalen elektrischen und der transversalen magnetischen Feldstärken gleichbedeutend mit einer Vergrößerung des transversalen Gradienten der longitudinalen elektrischen Feldstärke.

Das folgende Kapitel beschäftigt sich daher mit Möglichkeiten zur Optimierung dieser Größen.

Für die longitudinale Shuntimpedanz  $R_\parallel$  aus Gleichung 5.3.1 ergibt sich mit den Feldgleichungen 5.5.1 oder 5.5.2 der  $TM_{110}$ -Mode  $R_\parallel = 0$ , da die elektrischen Felder auf der Strahlachse verschwinden. Die Teilchen werden demnach im Zylinderresonator auf der Strahlachse longitudinal nicht beschleunigt.

## 6. Entwicklung des $TM_{110}$ -HF-Deflektors

Wie bereits in der Einleitung und in Kapitel 3 beschrieben, ist die für den Betrieb des Deflektors entscheidende Größe die transversale Ablenkspannung. In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass die transversale Ablenkspannung und die zu ihrer Erzeugung benötigte Leistung durch die transversale Shuntimpedanz verknüpft sind. Für einen Hohlraumresonator, der als Deflektor eingesetzt werden soll, ist es also entscheidend, über eine möglichst große transversale Shuntimpedanz zu verfügen.

Die in Kapitel 5 dargestellten theoretischen Grundlagen für die Anwendung von Zylinderresonatoren als Deflektor zeigten, dass ein Zylinderresonator durch seine sinusförmige transversale Ablenkspannung in der Lage ist, eine zur longitudinalen Position der Teilchen proportionale transversale Spannung auf diese zu übertragen und damit zur Durchführung des in Kapitel 3 beschriebenen Messverfahren geeignet ist. Gleichzeitig zeigte sich aber auch, dass die transversale Shuntimpedanz eines Zylinderresonators nicht optimal ist. Dieselben theoretischen Überlegungen enthielten allerdings auch Ansätze, wie ein Zylinderresonator optimiert werden kann.

Gegenstand dieses Kapitels sind daher Computersimulationen mit CST MICROWAVE STUDIO und CST PARTICLE STUDIO, mit dem Ziel eine geeignetere Geometrie für den  $TM_{110}$ -HF-Deflektor zu finden. Hierzu stellt dieses Kapitel zunächst die verwendeten Computerprogramme vor. Anschließend wird die Funktionsweise dieser Programme am Beispiel eines Zylinderresonators veranschaulicht und die so gewonnenen numerischen Ergebnisse mit den analytischen Ergebnissen aus den Theoriekapiteln verglichen. Im Anschluss hieran folgt eine detaillierte Beschreibung des Entwicklungsprozesses des  $TM_{110}$ -HF-Deflektors. Dieser Entwicklungsprozess fand in mehreren Schritten statt. Es wurden drei Computermodelle von Resonatoren entworfen und optimiert. Auf Grundlage der ersten beiden Computermodelle wurden Prototypen aus Aluminium gefertigt. An diesen Prototypen wurden die in Kapitel 8 beschriebenen Messungen, die in den Theoriekapiteln definierten Kenngrößen eines Hohlraumresonators durchgeführt, um die Ergebnisse der Simulationen zu bestätigen.

## 6.1. Die CST STUDIO SUITE

Die CST STUDIO SUITE ist ein Programmpaket der CST AG [ CST ] zur Analyse der elektromagnetischen Eigenschaften physikalischer Systeme. Die CST STUDIO SUITE stellt hierzu eine computer-aided design (CAD) Umgebung bereit, in der das jeweilige System modelliert werden kann.

CST MICROWAVE STUDIO löst mit der numerischen Finite-Elemente-Methode die Maxwellgleichungen auf einem Gitter und ist damit in der Lage, die Eigenmoden eines Resonators zu berechnen. Eine ausführliche Beschreibung der Finite-Elemente-Methode findet sich bei [ Goering u. a. (2010) ]. Hierbei liefert der *Eigenmodesolver* unter anderem Angaben zu Eigenfrequenzen, Güten, und Feldverteilungen. Aus diese Informationen lässt sich sowohl die longitudinale, als auch die transversale Shuntimpedanz eines Resonators berechnen. Der *Frequencydomainsolver* ist unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode in der Lage, die S-Parameter (vgl. Kapitel 7) eines Resonators, in den Leistung eingekoppelt wird (vgl. Kapitel 4 ), zu bestimmen.

CST PARTICLE STUDIO berechnet mit numerischen Methoden die Wechselwirkungen von elektrisch geladenen Teilchen mit elektromagnetischen Feldern und ist damit insbesondere in der Lage, die Wechselwirkung von einem Elektronenstrahl, mit den im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Hohlraumresonatoren, zu berechnen.

Hierzu stellt CST PARTICLE STUDIO drei Solver zur Verfügung. Der *Trackingsolver* berechnet die Wirkung von elektromagnetischen Feldverteilungen auf elektrisch geladene Teilchen. Der *Wakefieldsolver* berechnet die Wirkung der von (sich bewegenden) elektrischen Ladungen abgestrahlten Felder auf ortsfeste Strukturen, wie z.B. die Wände eines Resonators oder einer Vakuumkammer. Der *Particle in Cell Solver* (PIC-Solver) berechnet die beidseitige Wechselwirkung von elektrisch geladenen Teilchen mit elektromagnetischen Feldern in diskreten Zeitschritten.

## 6.2. Zylinderresonatoren als HF-Deflektor

Der folgende Abschnitt beschreibt die Simulation der Eigenschaften eines Zylinderresonators. Am Beispiel dieses analytisch berechenbaren Resonators, sollen die wesentlichen Schritte im Simulationsprozess erläutert und mit den Vorhersagen aus den Theoriekapiteln verglichen werden.

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, soll für BERLinPro ein SRF-Injektor entwickelt werden, welcher Elektronenpakete mit 77 pC Gesamtladung und einer Wiederholrate von 1,3 GHz liefert. Dementsprechend wird zur Strahldiagnose ein Deflektor mit einer Betriebsfrequenz benötigt, welche einem ganzzahligen Vielfachen von 1,3 GHz entspricht. Grundsätzlich wären auch andere Betriebsfrequenzen denkbar. Diese würden jedoch einen wesentlich höheren Aufwand beim Betrieb des Deflektors erfordern, da z.B. die Synchronisation der Elektronenquelle mit dem Deflektor weitaus aufwändiger würde.

In Kapitel 5 konnte anhand von theoretischen Überlegungen gezeigt werden, dass die  $TM_{110}$ -Mode eines Zylinderresonators die geforderten Eigenschaften an einen Deflektor am besten erfüllt.

Ein Zylinderresonator, dessen  $TM_{110}$ -Mode ihre Resonanzfrequenz bei 1,3 GHz hat, muss nach Gleichung 4.4.4 einen Radius  $R$  von 140,6 mm haben. Weiterhin entnimmt man dieser Gleichung, dass die Resonanzfrequenz der  $TM_{110}$ -Mode unabhängig von der Länge  $L$  des Zylinders ist. Für die Länge  $L$  des Zylinders liefert Gleichung 5.6.4 ein Auswahlkriterium in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und damit von der Energie der Elektronenpakete. Tabelle 6.1 enthält Werte für die optimale Länge  $L$  eines Zylinderresonators für unterschiedliche Elektronenenergien.

$E_{kin}$ [MeV]	$\gamma$	$\beta$	$\beta \frac{\lambda}{2}$ [mm]
1	2,9569	0,9411	108,508
2	4,9139	0,9791	112,890
5	10,7847	0,9957	114,808
10	20,5694	0,9988	115,169

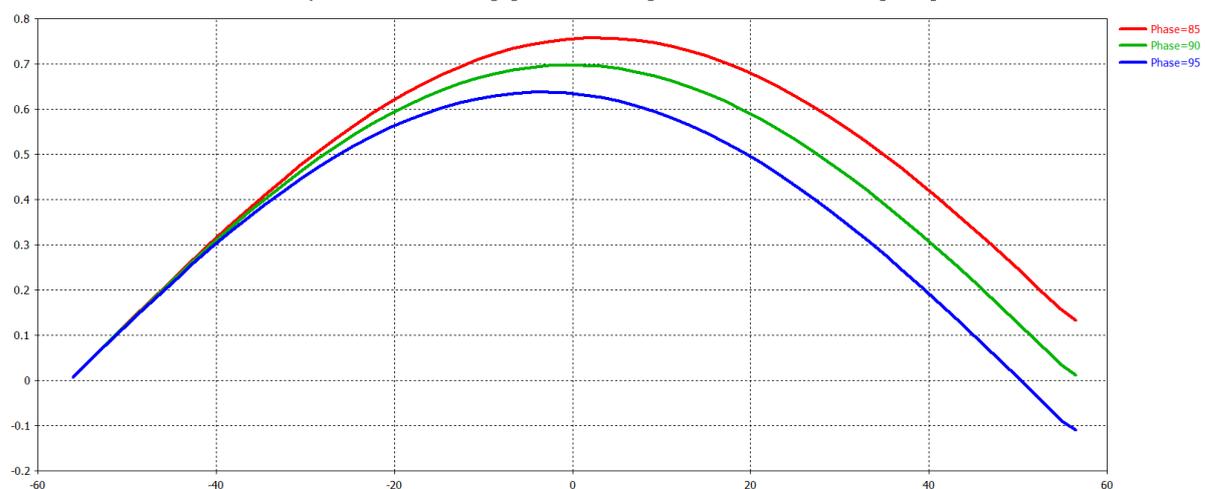
**Tabelle 6.1.:** Resonatorlänge für unterschiedliche Teilchenenergien

Die folgenden Simulationen wurden mit Elektronen, welche eine kinetische Energie von 2 MeV haben, durchgeführt. Der Zylinder hat folglich eine Länge  $L$  von 112,89 mm. Die Zylinderachse zeigt in Z-Richtung eines kartesischen Koordinatensystems.

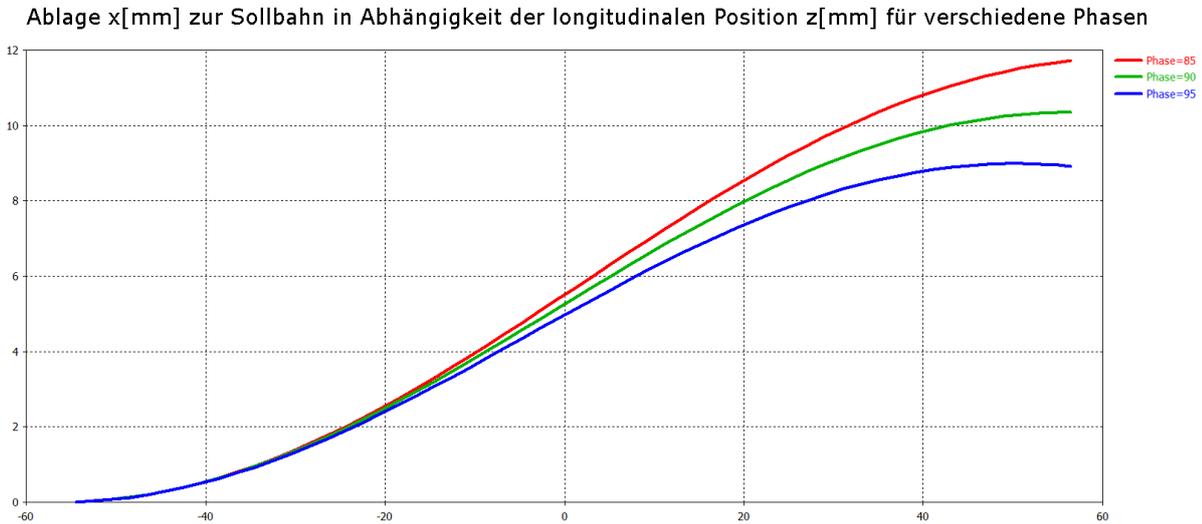
Der Eigenmodesolver berechnet, wie von der Theorie vorhergesagt, eine Resonanzfrequenz von 1,3 GHz für die  $TM_{110}$ -Mode. Die Eigenschaften der  $TM_{110}$ -Mode eines Zylinderresonators wurden bereits in Kapitel 5.5 ausführlich diskutiert. Die Polarisation der Mode wurde so gewählt, dass die azimuthale Knotenlinie der magnetischen Felder parallel zur Y-Achse liegt.

Die Gleichungen 5.6.4 und 5.6.5 sagen voraus, dass der Resonator in seiner *integralen* Wirkung den transversalen Impuls der Elektronen beim Durchqueren des Resonators genau dann nicht ändert, wenn die Teilchen die Mitte des Resonators im Nulldurchgang des magnetischen Feldes erreichen. Da die Länge  $L$  des Resonators genau so gewählt wurde, dass

normierter transversaler Impuls  $P_x$  in Abhängigkeit der longitudinalen Position  $z$ [mm] für verschiedene Phasen



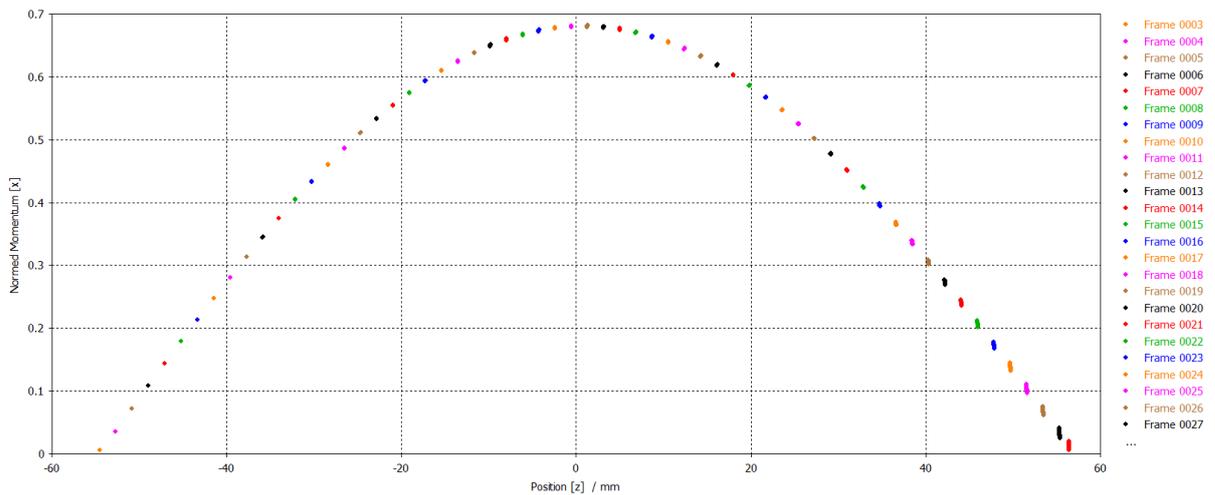
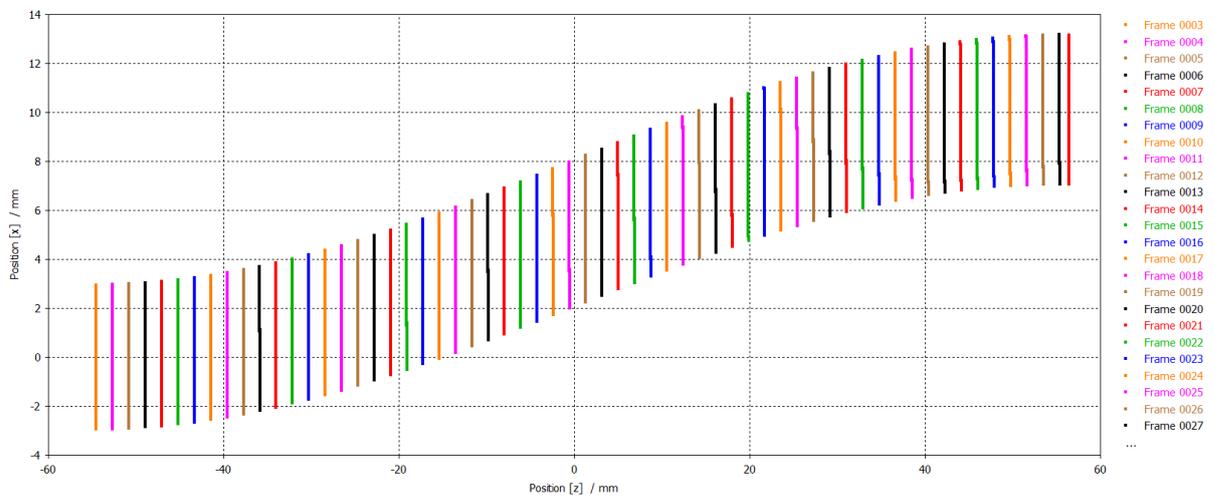
**Abbildung 6.1.:** Normierter transversaler Impuls  $p_x$  in Abhängigkeit der longitudinalen Position  $z$ [mm] für verschiedene Phasen



**Abbildung 6.2.:** Ablage zur Sollbahn  $x$ [mm] in Abhängigkeit der longitudinalen Position  $z$ [mm] für verschiedene Phasen

die Teilchen beim Durchqueren des Resonators genau eine halbe Schwingung des Hochfrequenzfeldes durchlaufen, erreichen die Teilchen die Mitte des Resonators genau dann im Nulldurchgang des magnetischen Feldes, wenn sie im Maximum des magnetischen Feldes in den Resonator eintreten. Der Eigenmodesolver legt den Startpunkt (Phase =  $0^\circ$ ) der Eigenschwingungen in das Maximum der elektrischen Feldstärke. Da sich, wie in den Theoriekapitel gezeigt, Zylinderresonatoren wie elektrische Schwingkreise verhalten, erreicht die magnetische Feldstärke ihr Maximum genau  $90^\circ$  nach der elektrischen Feldstärke. Wie man an Abbildung 6.1 erkennt, ändert der Zylinderresonator, in seiner integralen Wirkung den transversalen Impuls der Teilchen bei einer Phase von  $90^\circ$  nicht, bei einer kleineren Phase vergrößert er den transversalen Impuls der Teilchen und bei einer größeren Phase verringert er ihn. Abbildung 6.2 zeigt die Änderung der zur Richtung der Impulsänderung gehörenden Ortskoordinate. Die Änderung ist umso größer, je kleiner die Phase ist. Diese Ablage zur Strahlachse entsteht dadurch, dass sich das Vorzeichen der magnetischen Feldstärke genau dann ändert, wenn sich die Teilchen (in Sollphase) in der Mitte des Resonators befinden. Der Particle in Cell Solver berechnet in diskreten Zeitschritten die Änderung der Eigenschaften der Elektronen beim Durchqueren des Resonators. Die Periodendauer  $T$ , eines mit Frequenz  $f$  von 1,3 GHz schwingenden Resonators, beträgt 769 ps. Der Startpunkt  $t=0$  wird wiederum so gewählt, dass er, wie schon bei der Verwendung des Trackingsolvers beschrieben, im von Eigenmodesolver berechneten Maximum der magnetischen Feldstärke liegt.

Die in den Abbildungen 6.3(a) und 6.3(b) dargestellten Ergebnisse des Particle in Cell Solvers bestätigen die Ergebnisse des Trackingsolvers und die theoretischen Vorhersagen. Als wesentliches Ergebnis bleibt fest zu halten, dass ein Zylinderresonator, wie vom Panofsky-Wenzel Theorem vorhergesagt, bei der richtigen Wahl der Phase, den transversalen Impuls der Teilchen in seiner *integralen* Wirkung nicht ändert. Dadurch, dass der Zylinderresonator eine *lokale* und später wieder kompensierte Änderung des transversalen Impulses

normierter Impuls  $p_x$  in Abhängigkeit der longitudinalen Position  $z$  [mm] für verschiedene Zeitschritte(a) Normierter transversaler Impuls  $p_x$ Ablage  $x$  [mm] zur Sollbahn in Abhängigkeit der longitudinalen Position  $z$  [mm] für verschiedene Zeitschritte(b) Ablage zur Sollbahn  $x$ 

**Abbildung 6.3.:** Ablage zur Sollbahn  $x$  [mm] und normierter transversale Impuls  $p_x$  eines Teilchenpakets in Sollphase in Abhängigkeit der longitudinalen Position  $z$  [mm] im Resonator für verschiedene Zeitschritte

verursacht, ändert sich die zur Richtung der Impulsordinate gehörende Ortskoordinate. Die Teilchen (in Sollphase) werden also parallel zur ihrer Bahn verschoben.

### 6.3. Der erste $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototyp

Wie bereits in der Einleitung beschrieben ist es das Ziel dieser Arbeit, einen Hohlraumresonator zu entwickeln, der Teilchenpakete wahlweise in der einen oder der anderen transversalen Ebenen ablenken kann. Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Einsatz eines Zylinderresonators als Deflektor simuliert. Nachdem Simulation und Theorie sehr gute Übereinstimmungen zeigten, wurde in der CAD-Umgebung von CST auf Grundlage der in den vorangegangenen Kapiteln dargestellten theoretischen Grundlagen der in Abbildung 6.4 gezeigte Resonator entworfen. Dieser erste Entwurf wurde von einem bereits an der Cornell University [ Belomestnykh u. a. (2010) ] in Betrieb befindlichem transversal ablenkenden Hohlraumresonator inspiriert.

Der in diesem Abschnitt dargestellte Teil des Entwicklungsprozesses, fand teilweise bereits im Rahmen der Diplomarbeit [ Ferrarotto (2011) ] statt. Die folgende Darstellung geht deutlich über die in dieser Diplomarbeit enthaltene hinaus und ist Voraussetzung für das Verständnis der weiteren Schritte im Entwicklungsprozess des  $TM_{110}$ -HF-Deflektors.

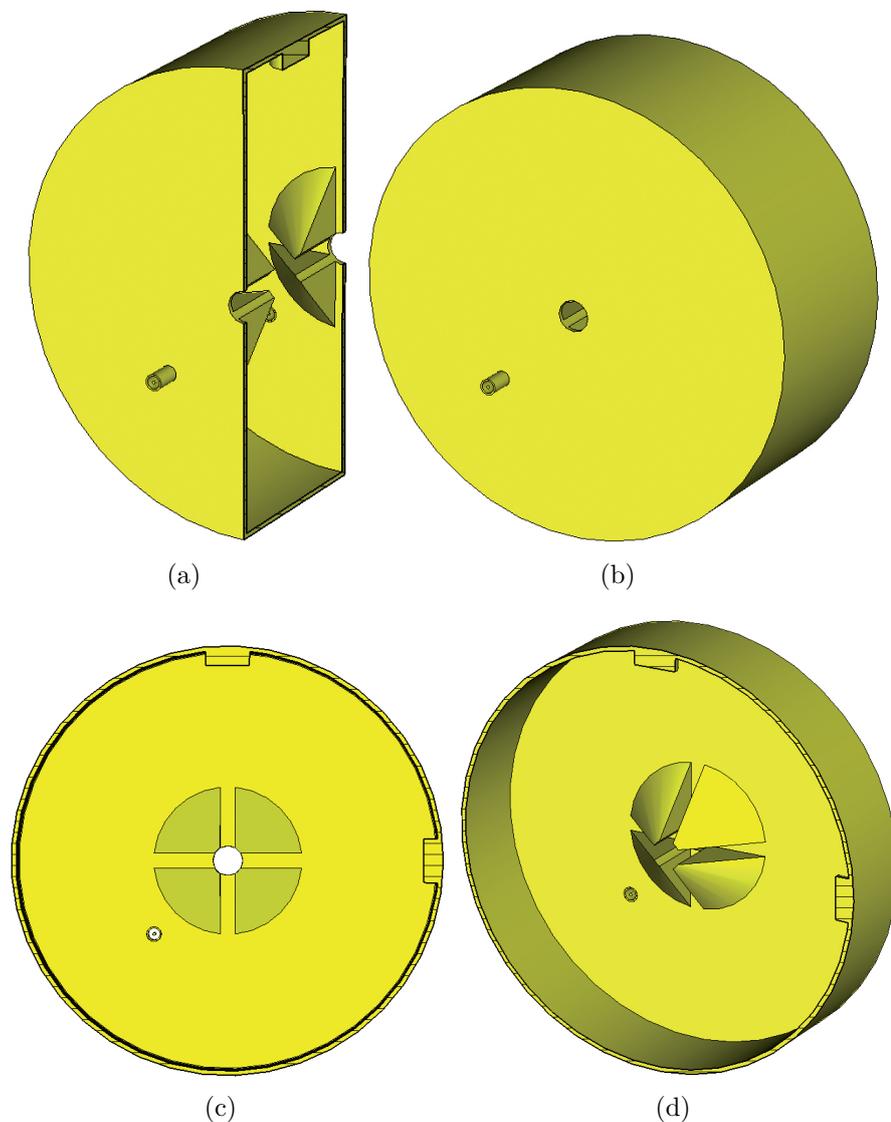


Abbildung 6.4.: Innenansichten des ersten Deflektor-Prototypen

### 6.3.1. Entwurf des ersten TM<sub>110</sub>-HF-Deflektor-Prototypen

Der folgende Abschnitt beschreibt ausführlich die einzelnen theoretischen Aspekte, die zu diesem ersten Entwurf geführt haben. Um die Ergebnisse der Simulationen experimentell überprüfen zu können, wurde beim Entwurf dieses Resonators auf die verhältnismäßig leichte Umsetzbarkeit in einen Modellresonator Wert gelegt.

Wie sich in Kapitel 4 zeigte, hat die TM<sub>110</sub>-Mode eines Zylinderresonators zwei, genau um 90° gegeneinander gedrehte Polarisationen. In der Simulation lässt sich leicht eine der beiden Polarisationen auswählen und für die Berechnungen verwenden. In der praktischen Anwendung würden sich, in einem vollständig rotationssymmetrischen Resonator, diese Polarisationen willkürlich im Raum orientieren. Für den Betrieb des Deflektors ist es aber entscheidend, die Orientierung einer der beiden Polarisationen und damit die Ebene in der die Teilchenpakete abgelenkt werden, festzulegen und die andere Polarisation zu unterdrücken oder am besten gar nicht erst anzuregen.

Bricht man die Rotationssymmetrie beispielsweise durch eine Einkoppelschleife, richtet sich eine der beiden Polarisationen so aus, dass die Störung des Resonators durch die Koppelschleife minimal wird. Die andere Polarisation richtet sich hierzu, entsprechend um 90° gedreht, aus. Abhängig von der genauen Position und Art der Koppelschleife, ist es möglich, dass sich die beiden Polarisationen aufgrund der geringfügig gebrochenen Symmetrie leicht in ihrer Resonanzfrequenz  $f_0$  unterscheiden, aber wegen der endlichen Güte des Resonators trotzdem beide angeregt werden.

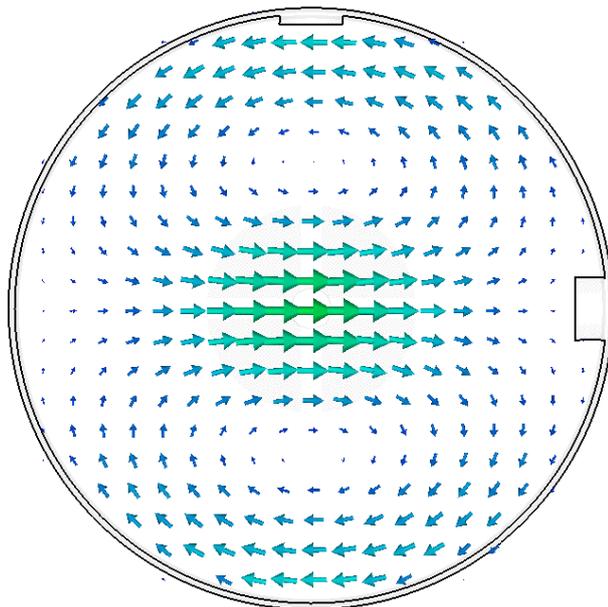
Um die Resonanzfrequenzen der beiden Polarisationen soweit voneinander zu trennen, dass jeweils nur eine der beiden angeregt wird, muss die Rotationssymmetrie des Resonators *erheblich* gebrochen werden. Eine *statische* Möglichkeit, dies zu erreichen, wäre es, anstelle eines Kreiszyinders, einen elliptischen Zylinder mit kleiner linearer Exzentrizität zu verwenden. Hierbei stellt sich dann aber das Problem, dass höchstens eine der beiden Polarisationen die für den Betrieb des Deflektors vorgesehene Resonanzfrequenz von 1,3 GHz haben könnte. Es muss also nach einer Möglichkeit gesucht werden, die Resonanzfrequenzen der einzelnen Polarisationen *dynamisch* zu verändern.

Eine einfache Möglichkeit, die Resonanzfrequenz eines Hohlraumresonators dynamisch zu verändern, stellen Abstimmstempel dar. Dies sind in der Regel Metallzylinder, die von außen senkrecht zur Zylinderachse der Hohlraumresonators in diesen gefahren werden und abhängig von ihrer Eindringtiefe eine genau definierte Verstimmung des Hohlraumresonators verursachen.

Bei der Simulation der Verwendung eines Abstimmstempels zeigte sich, dass dieser, wie zu erwarten, die Orientierung der Polarisationen bestimmt. Eine der beiden Polarisationen richtet sich so aus, dass die azimutale Knotenlinie der magnetischen Feldstärke genau parallel zur Zylinderachse des Abstimmstempels verläuft, wodurch die Wirkung des Stempels auf diese Polarisation minimal wird. Die Resonanzfrequenz dieser Polarisation wird deshalb vom Abstimmstempel nur unwesentlich verändert. Die andere Polarisation richtet sich aufgrund der Randbedingungen genau um 90° gedreht hierzu aus, sodass der Abstimmstempel

im azimuthalen Maximum ihrer magnetischen Feldstärke liegt, wodurch die Wirkung des Stempels auf diese Polarisation maximal wird (Abb.6.5). Hierdurch lässt sich die Resonanzfrequenz dieser Polarisation sehr gut mit diesem Stempel abstimmen. Die Stärke der Änderungen in der Resonanzfrequenz sind abhängig von der konkreten Bauart des Abstimmstempels. Im Allgemeinen gilt, je größer der Stempel, je größer die Verstimmung.

Mit diesem einen Abstimmstempel ist es also möglich, die Orientierung der beiden Polarisationen fest zu legen, und die Resonanzfrequenz einer der beiden Polarisationen zu verändern. Verwendet man, entsprechend der diskreten Rotationssymmetrie von  $90^\circ$ , einen zweiten Abstimmstempel, welcher senkrecht zum ersten auf dem Zylindermantel angebracht ist, lässt sich in der Wechselwirkung der beiden Abstimmstempel, sowohl die Orientierung, als auch die Resonanzfrequenz beider Polarisation einstellen. Hierbei bestimmt, wie man sich leicht überlegen kann, nun die Zylinderachse des Abstimmstempels mit der kleineren Eindringtiefe die Ebene der transversalen Ablenkung.

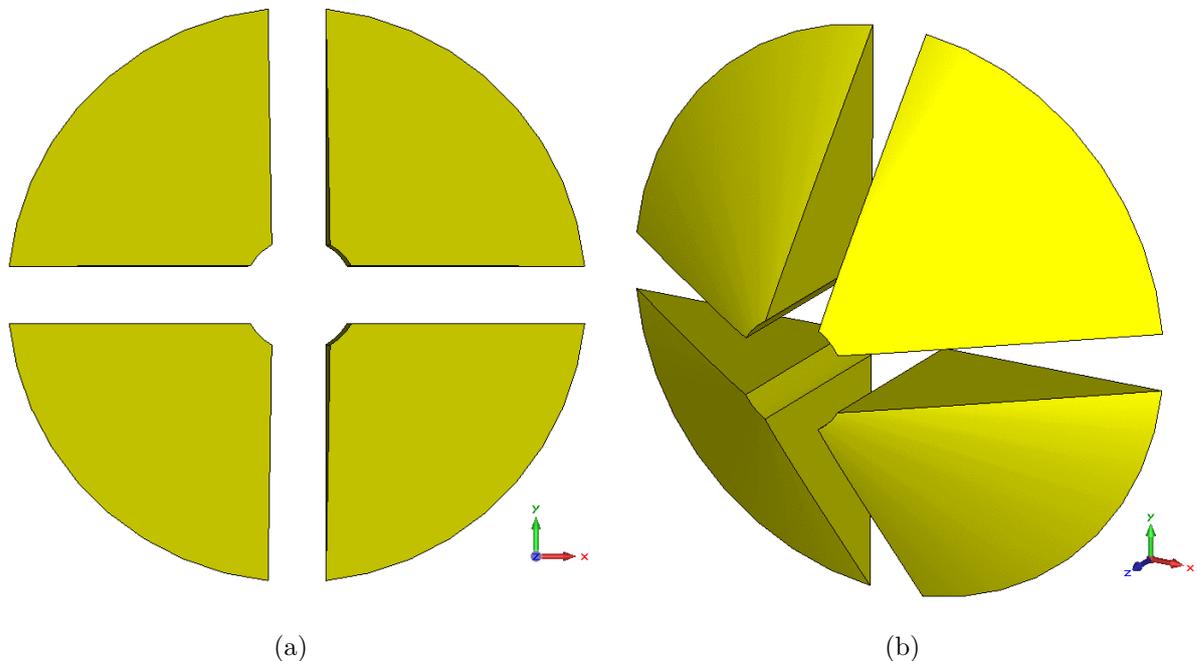


**Abbildung 6.5.:** Ausrichtung der Polarisation in Abhängigkeit der Stempelpositionen.

Für die Einkopplung der elektrischen Leistung muss eine Stelle gewählt werden, an der die Feldverteilung und damit die Impedanz beider Polarisationen gleich ist. Hierdurch wird sichergestellt, dass die Symmetriebrechung durch den Koppler auf beide Polarisationen die gleich Wirkung hat. Es gibt zwei Ebenen, in denen die elektrischen Felder nach Betrag und Richtung gleich sind. Dies sind diejenigen Ebenen, die durch den Mittelpunkt des Hohlraumresonators verlaufen und deren Normalenvektor mit der Zylinderachse der Abstimmstempel einen Winkel von  $45^\circ$  einschließt. In jeder dieser beiden Ebenen gibt es jeweils zwei, parallel zu Zylinderachse des Hohlraumresonators verlaufende Geraden, auf denen die elektrische Feldstärke maximal ist. Es gibt also insgesamt vier Punkte auf jeder der beiden Deckelflächen des Hohlraumresonators, die für kapazitive Koppler am besten geeignet sind.

Wie bereits in Kapitel 5 beschrieben, bieten sich zwei Möglichkeiten an, die transversale Spannung der  $TM_{110}$ -Mode eines Zylinderresonators zu vergrößern. Die eine besteht darin, die Betriebsfrequenz zu erhöhen, die andere darin die transversalen Feldstärken entlang der Strahlachse zu vergrößern. Laut Gleichung 5.3.3 ist eine Vergrößerung der transversalen elektrischen und der transversalen magnetischen Feldstärken gleichbedeutend mit einer Vergrößerung des transversalen Gradienten der longitudinalen elektrischen Feldstärke. In

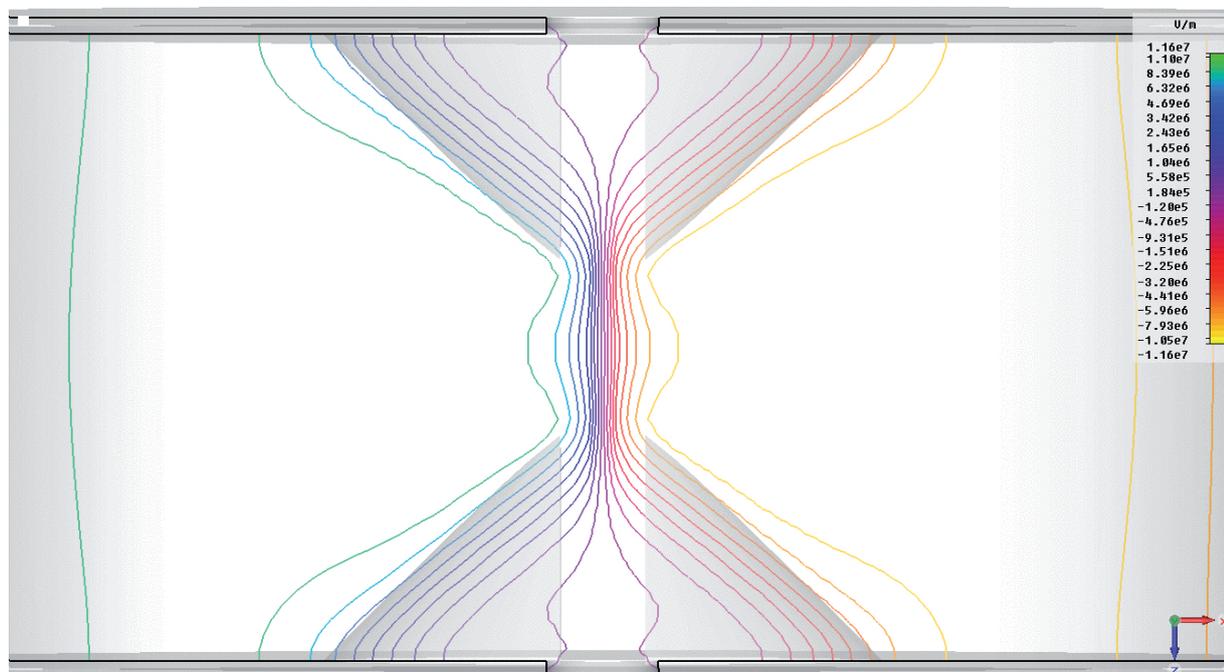
Kapitel 4 wurde auf den Zusammenhang zwischen Hohlraumresonatoren und elektrischen Schwingkreisen eingegangen. Es zeigte sich, dass sich die Mantelfläche des Zylinders als eine Parallelschaltung von Spulen und dass sich die Deckelflächen des Zylinders als die Platten eines Plattenkondensators auffassen lassen. Um die longitudinale elektrische Feldstärke in der Nähe der Strahlachse zu erhöhen bietet es sich an, die Kapazität des Resonators in der Nähe der Strahlachse zu erhöhen. Diese lässt sich dadurch erreichen, dass man die Deckelflächen des Zylinders in der Nähe der Strahlachse näher zusammenbringt. Man fügt auf den Deckelflächen sogenannte Nasen hinzu. Damit beide Polarisierungen weiterhin identische Resonanzfrequenzen haben, müssen die Veränderungen in den Deckelflächen mindestens eine diskrete Rotationssymmetrie von  $90^\circ$  aufweisen und zur Anordnung der Stempel passen. Die durch die erhöhte Gesamtkapazität des Resonators verringerte Resonanzfrequenz der  $TM_{110}$ -Mode lässt sich durch eine Verringerung der Induktivität des Resonators kompensieren. Die geschieht am einfachsten dadurch, dass der Radius des Zylinders entsprechend verkleinert wird.



**Abbildung 6.6.:** Nasen des ersten Deflektor-Prototypen

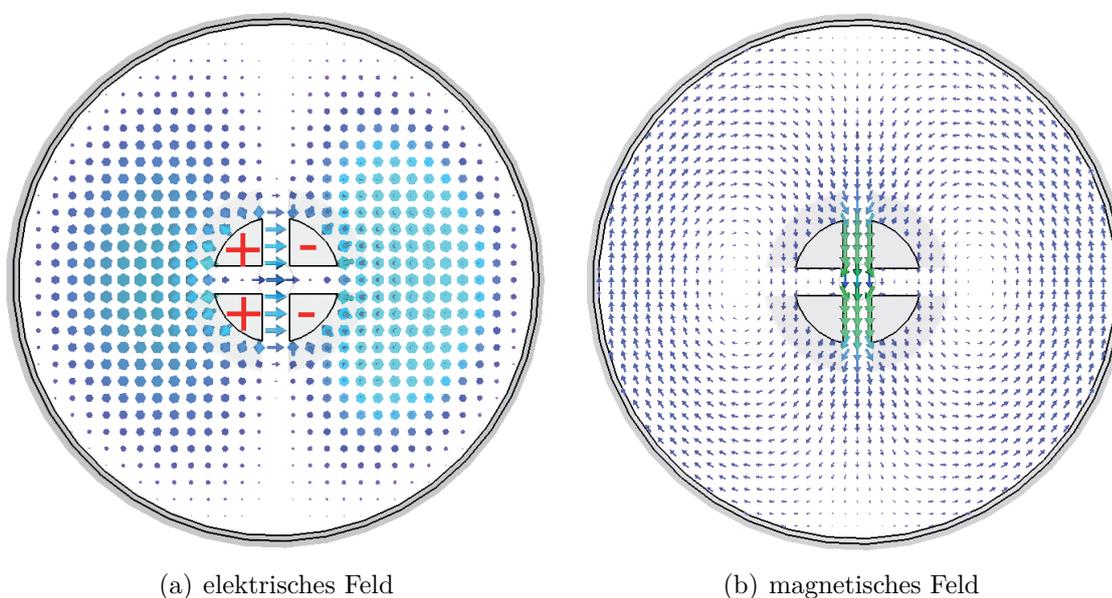
Für die in Abbildung 6.6 gezeigten Nasen des ersten Deflektorprototyps wurde ein Kreiskegelstumpf als Grundform gewählt. Dieser hat an seiner Grundfläche einen Radius von 50 mm und bei seiner maximalen Höhe von 30,8 mm einen Radius von 10 mm.

Dieser Kreiskegelstumpf wurde an Trennlinien, welche parallel zu den Zylinderachsen der beiden Abstimmstempel verlaufen, in vier Teile geteilt. Anschließend wurde jeder dieser vier Teile 5 mm in den beiden Ebenen senkrecht zur Zylinderachse des Resonators, in welcher die Trennlinien liegen, von der Zylinderachse des Resonators weggeschoben. Hierdurch entstehen zwischen den vier Nasen 10 mm breite Spalten parallel zu den Zylinderachsen der Abstimmstempel. Die Abrundungen auf der Innenseite der Nasen entstehen durch eine



**Abbildung 6.7.:** Äquipotentiallinien der longitudinalen elektrischen Feldstärke

kreiszyylinderförmige Bohrung mit einem Radius von 10 mm. Diese 10 mm entsprechen dem Radius der Öffnung für das Strahlrohr. Abbildung 6.7 zeigt die Äquipotentiallinien der longitudinalen elektrischen Feldstärke. Wie man dieser Abbildung entnimmt, entsteht durch die Nasen die gewünschte Konzentration der longitudinalen elektrischen Felder in der Nähe der Strahlachse mit dem ebenfalls gewünschten großen radialen Gradienten.



(a) elektrisches Feld

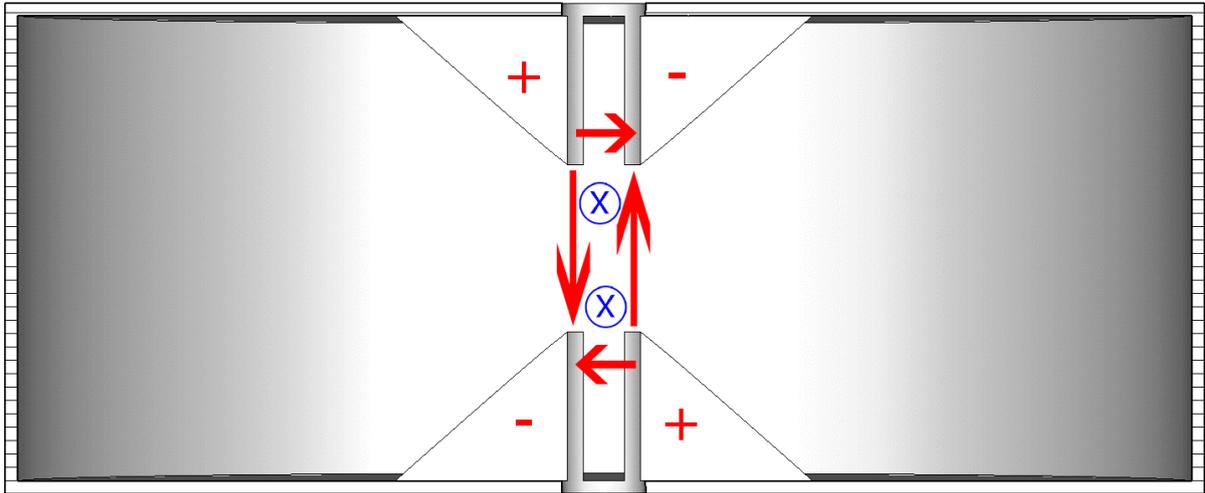
(b) magnetisches Feld

**Abbildung 6.8.:** Transversale Felder zwischen den Nasen

Abbildung 6.8 zeigt die transversalen elektrischen und magnetischen Felder zwischen den Nasen. Wie beabsichtigt werden die bereits in der  $TM_{110}$ -Mode eines Zylinderresonator enthaltenen transversalen magnetischen Felder verstärkt. Dadurch, dass sich die Nasen im

Feld der  $TM_{110}$ -Mode unterschiedlich aufladen entstehen zwischen den Nasen zusätzlich transversale elektrische Felder, die ebenfalls zur Vergrößerung der transversalen Spannung beitragen.

Abbildung 6.9 veranschaulicht die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld zwischen den Nasen. Das durch rote Pfeile dargestellte ringförmige elektrische Wechselfeld induziert ein um  $90^\circ$  phasenverschobenes magnetisches Feld und umgekehrt. Dieses Verhalten entspricht dem in Kapitel 4.5 im Zusammenhang mit Hohl-



**Abbildung 6.9.:** Elektrische und magnetische Felder zwischen den Nasen. Das ringförmige elektrische Wechselfeld (rote Pfeile) induziert ein um  $90^\circ$  phasenverschobenes magnetisches Feld

raumresonatoren beschriebenen Eigenschaften von elektrischen Schwingkreisen und veranschaulicht die in 5.3 dargestellte Herleitung der Gleichung für die transversale Shuntimpedanz aus dem Induktionsgesetz.

Wie schon bei der Simulation der Eigenschaften eines Zylinderresonators wurde die Länge  $L$  des Resonators mit  $L = \beta\lambda/2$  so gewählt, dass die Teilchen beim Durchqueren des Deflektors genau eine halbe Schwingung des Hochfrequenzfeldes durchlaufen.

### 6.3.2. Ergebnisse der Simulationen mit CST MICROWAVE STUDIO

Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick über die Ergebnisse der Simulationen und beschränkt sich auf kurze Erläuterungen. Eine Diskussion findet in Kapitel 9 statt.

Da die Eigenschaften beider Polarisierungen aus den im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Gründen gleich sind, reicht es aus, die Diskussion auf eine der beiden Polarisierungen zu beschränken.

Die Abbildungen 6.10(a) und 6.10(b) zeigen die vom Eigenmodesolver berechneten Änderungen der Resonanzfrequenzen einer Polarisation der  $TM_{110}$ -Mode bei Änderung der Eindringtiefe der Abstimmstempel. Wie von der Theorie vorhergesagt, sind beide Kurven nahe zu identisch. Die Änderung der Eindringtiefe eines Stempels ändert die Resonanzfrequenz einer der beiden Polarisierungen. Ändert man zeitgleich beide Stempel, bleibt die Änderung der Resonanzfrequenz die Selbe.

Die Abbildungen 6.11(a) und 6.11(b) zeigen die von Frequencydomainsolver berechneten Änderung im Transmissionsverhalten des Resonators. Dargestellt ist jeweils der Streuparameter<sup>1</sup> $S_{21}$ . Wie man den Abbildungen entnimmt, trennen sich bei einer Änderung der Eindringtiefe eines Stempels, wie von der Theorie vorhergesagt, die Resonanzfrequenzen der beiden Polarisierungen. Verändert man die Eindringtiefe beider Stempel gleichzeitig um den selben Wert, trennen sich die Resonanzfrequenzen der Polarisierungen nicht.

Wie man den Abbildungen 6.12(a) und 6.12(b) entnimmt, haben Änderungen der Eindringtiefe der Stempel keinen wesentlichen Einfluss auf die elektrischen und magnetischen Feldstärken entlang der Strahlachse.

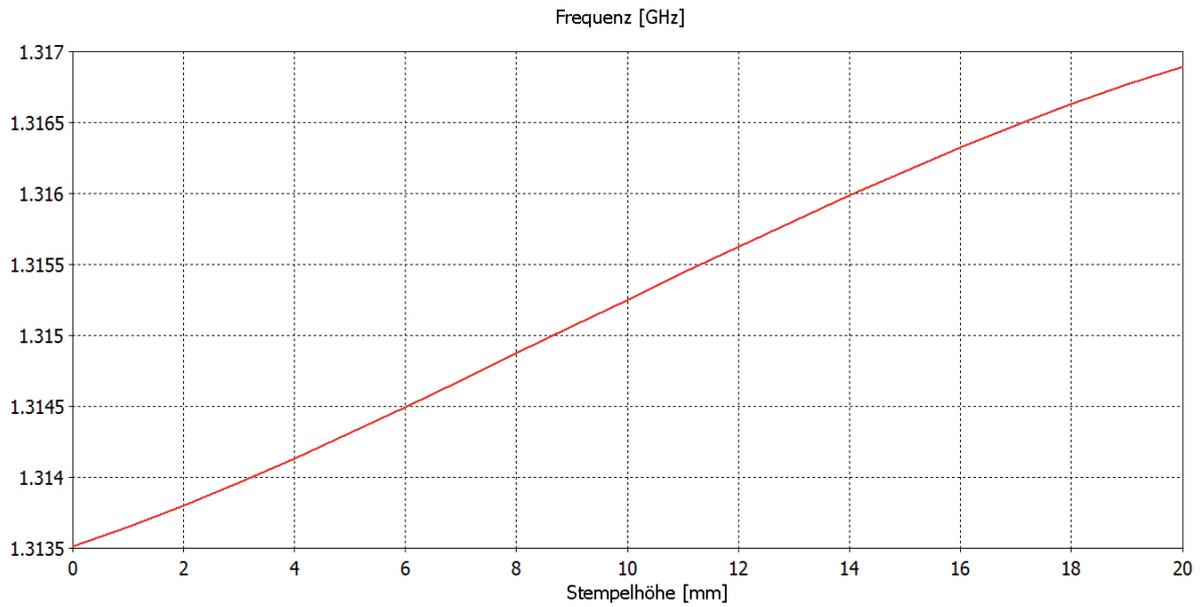
Bei vollständig herausgefahrenen Stempeln berechnet der Eigenmodesolver eine Resonanzfrequenz von  $f_0 = 1,314$  GHz. Verwendet man für die Simulationen die Materialeigenschaften von Aluminium, erhält man eine Güte von  $Q_0 \approx 15800$ . Aus den Ergebnissen des Eigenmodesolvers für Feldstärken und Güte lässt sich für einen Resonator aus Aluminium eine transversale Shuntimpedanz von  $R_{\perp} = 1,55$  M $\Omega$  berechnen.

Es konnte demnach gezeigt werden,

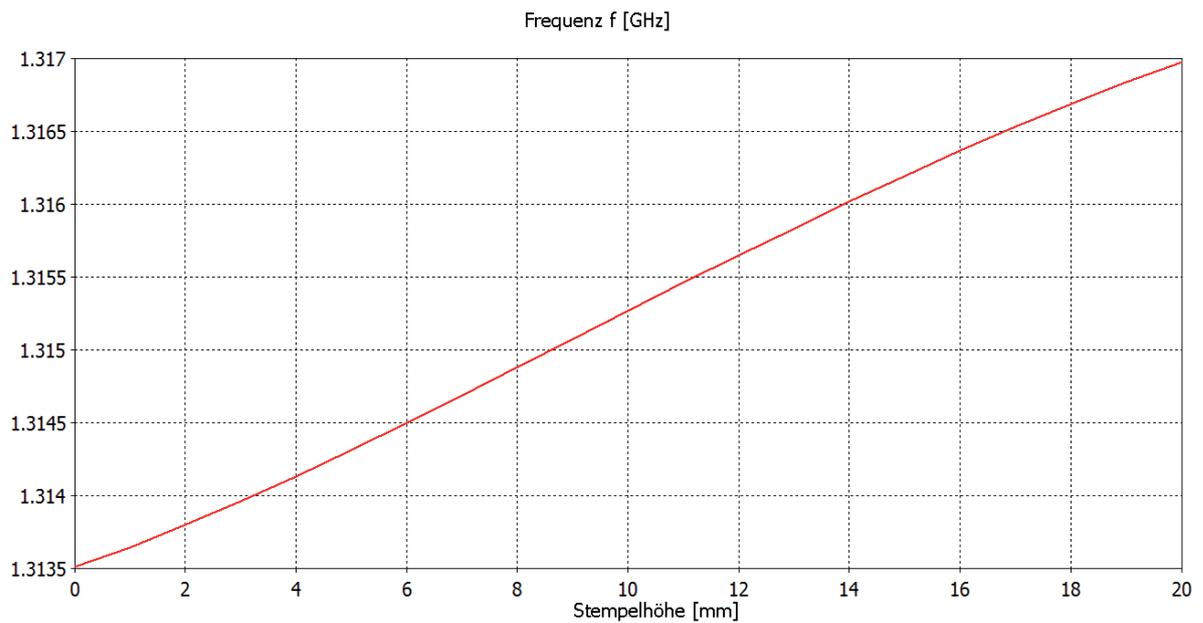
- dass es möglich ist beide Polarisierungen der  $TM_{110}$ -Mode mit nur einem Koppler anzuregen.
- dass sich beide Polarisierungen, nahezu unabhängig, voneinander mit dem jeweils entsprechenden Stempel abstimmen lassen.
- dass es möglich ist, einen  $TM_{110}$ -Deflektor zu bauen, bei dem sich zwischen zwei zu einander orthogonalen transversalen Ablenkebenen wählen lässt, ohne die Einkopplung zu verändern.

---

<sup>1</sup>Die Streuparamter werden in Kapitel 7 definiert

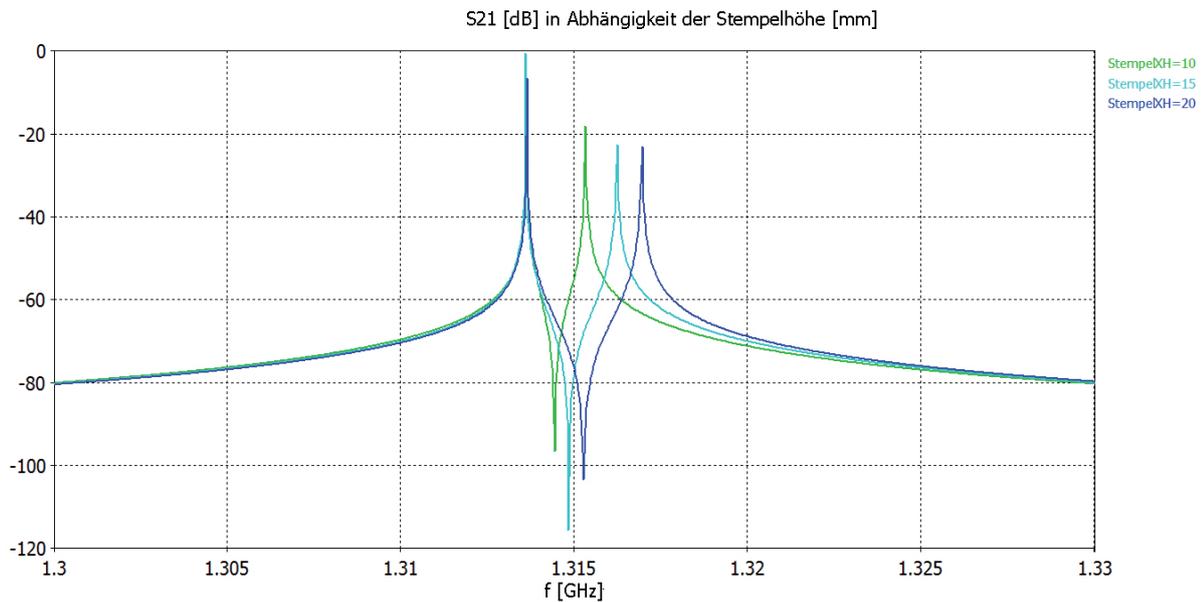


(a) Änderung der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

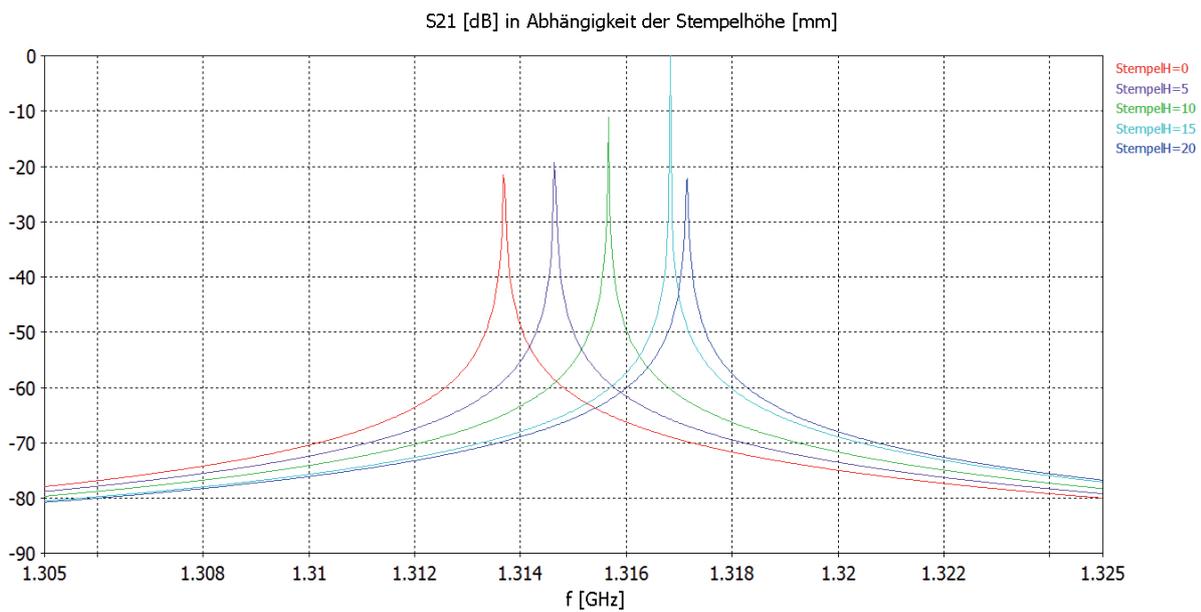


(b) Gleichzeitige Änderung der Eindringtiefe beider Abstimmstempel

**Abbildung 6.10.:** Resonanzfrequenzen des ersten Deflektor-Prototypen in Abhängigkeit der Eindringtiefe (Stempelhöhe) der Abstimmstempel. Wie beabsichtigt hat der zweite Stempel keinen Einfluss auf die Änderungen der Resonanzfrequenz der betrachteten Polarisation.

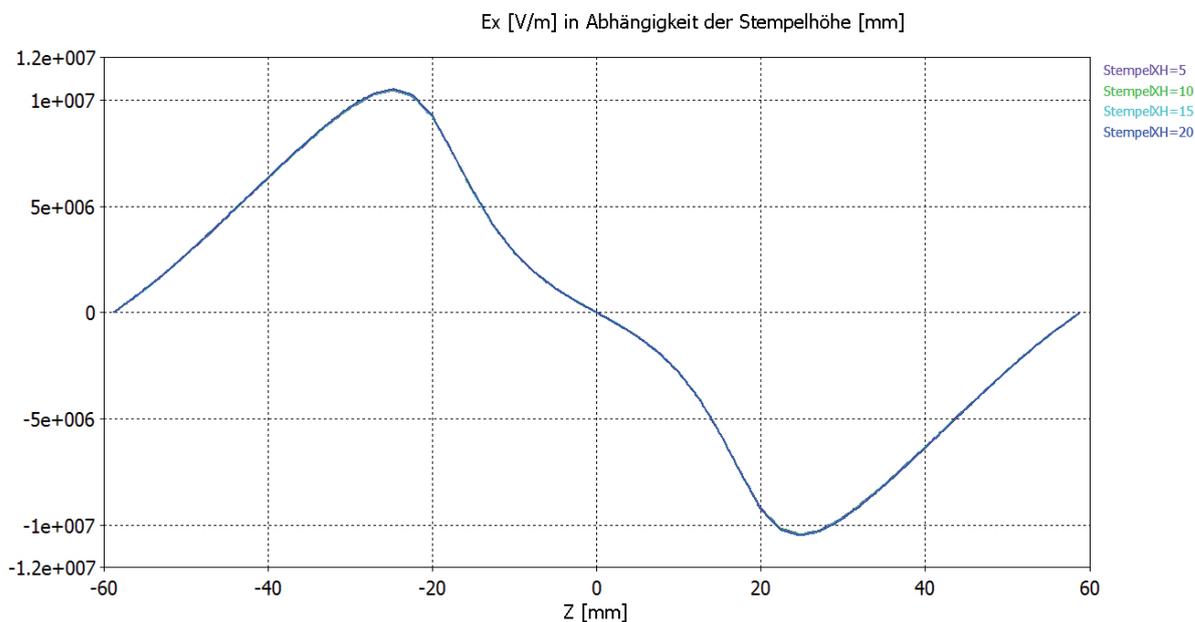


(a) Änderung der Eindringtiefe eines Abstimmstempels. Wie beabsichtigt trennen sich die Resonanzfrequenzen der beiden Polarisationen.

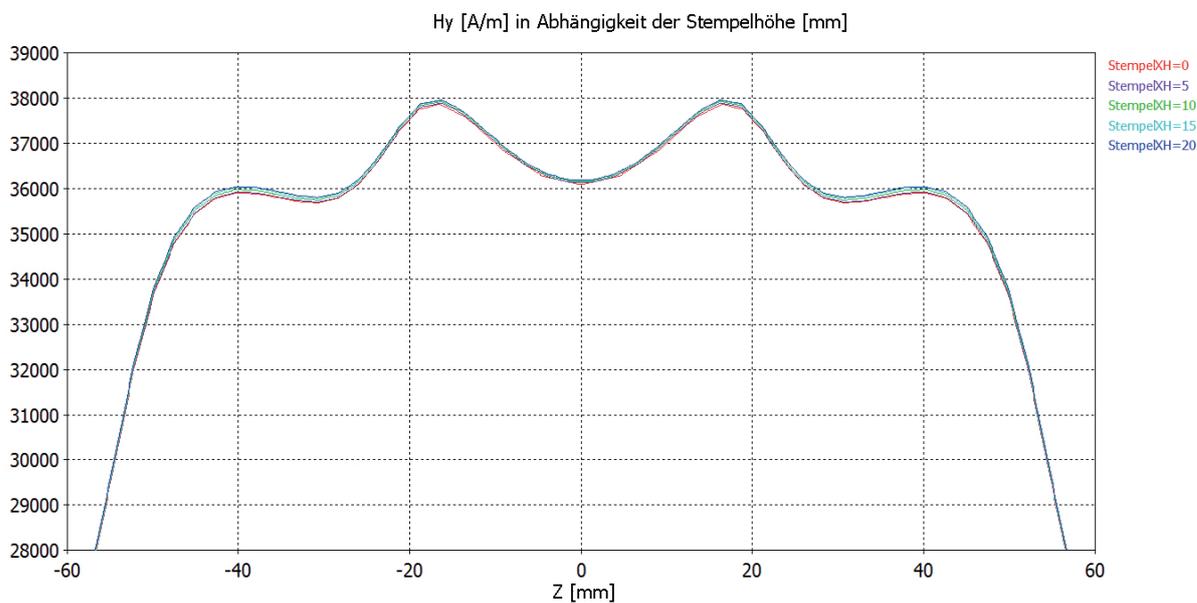


(b) Gleichzeitige Änderung der Eindringtiefe beider Abstimmstempel. Wie beabsichtigt bleiben die Resonanzfrequenzen der beiden Polarisationen gleich.

**Abbildung 6.11.:** Vorwärtstransmission  $S_{21}$  des ersten Deflektor-Prototypen in Abhängigkeit der Eindringtiefe (Stempelhöhe) der Abstimmstempel.



(a) x-Komponente des elektrischen Felds in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

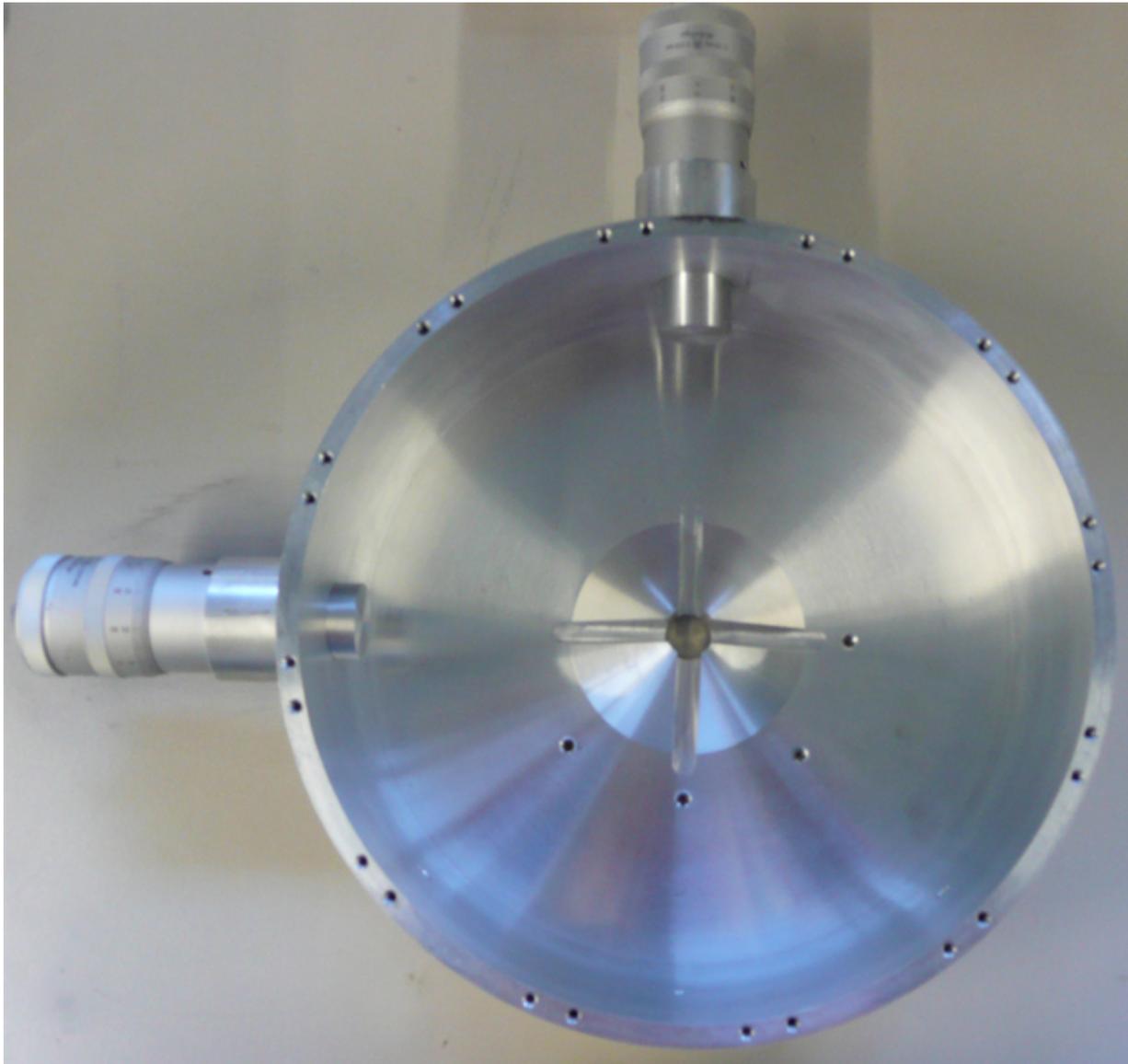


(b) y-Komponente des magnetischen Felds in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

**Abbildung 6.12.:** Feldstärken des ersten Deflektor-Prototypen in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels (Stempelhöhe).

### 6.3.3. Bau des ersten Prototypen

Auf Grundlage des zuvor beschriebenen Computermodells, wurde der in Abbildung 6.13 gezeigte Resonator aus Aluminium gebaut. Dieser besteht aus drei, miteinander verschraubten Teilen. Dem Zylindermantel, an dem die Stempel angebracht sind, und den beiden Deckelflächen, auf denen sich die Nasen befinden. An diesem nicht, vakuumtauglichen, nicht hochleistungstauglichen Prototyp sollen, bei niedrigen Hochfrequenzleistungen, im Labor die wesentlichen in den Theoriekapiteln definierten Kenngrößen gemessen und mit den Simulationsergebnissen verglichen werden.



**Abbildung 6.13.:** Innenansicht des Deflektormodells

Die Stempel lassen sich mit Mikrometerschrauben bis zu einer Höhe von 25 mm auf  $10\ \mu\text{m}$  genau einstellen.

Der Innenradius des Zylinders wurde, wie schon in den Simulationen, etwas kleiner gewählt, als es für die geplante Resonanzfrequenz von 1,3 GHz nötig gewesen wäre. Der Grund hier ist, dass für den Bau dieses ersten Modells bereits vorhandenes Rohmaterial genutzt wer-

den sollte, welches keine größeren Radien zuließ. Hierdurch liegt die Resonanzfrequenz der  $TM_{110}$ -Mode 14 MHz über der geplante Resonanzfrequenz von 1,3 GHz, was aber auf die *prinzipielle* Funktionsweise des Deflektors keinen Einfluss hat.

Anstelle der in den Simulationen verwendeten Koaxialwellenleiter, wurden in die Deckelflächen Gewindelöcher für SMA-Durchführungen gebohrt. Diese befinden sich in einem Abstand von 70 cm (also etwa dem halben Radius) von der Zylinderachse entfernt. In diese Gewindelöcher werden die in Abbildung 6.14(a) gezeigten SMA-Koppler geschraubt. Verwendet man Koppler in den Gewindelöchern, die sich parallel zu den Spalten zwischen den Nasen befinden, lassen sich die beiden Polarisierungen der  $TM_{110}$ -Mode einzeln anregen. Mit Kopplern in den Gewindelöchern die sich unter einem Winkel von  $45^\circ$  zu den Spalten



**Abbildung 6.14.:** Koppler und Deckel

zwischen den Nasen befinden, lassen sich, genauso wie in den Simulationen, beide Polarisierungen gleichzeitig anregen. Die nicht verwendeten Löcher werden mit den in Abbildung 6.14(b) gezeigten Deckeln verschlossen.

Eine ausführliche Beschreibung der Messungen an diesem ersten Prototyp findet sich in Kapitel 8.

## 6.4. Der zweite $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototyp

Nachdem, an dem im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen ersten Prototyp, die theoretischen Überlegungen zur prinzipiellen Funktionsweise durch Simulationen und die in Kapitel 8 dargestellten Experimente bestätigt werden konnten, beschäftigt sich der folgende Abschnitt damit, eine bzgl. der transversalen Shuntimpedanz optimierte Geometrie für den  $TM_{110}$ -HF-Deflektor zu finden.

### 6.4.1. Entwurf des zweiten $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen

Bei der Entwicklung des zweiten Prototypen wurden wesentliche Aspekte des ersten Prototypen übernommen. Zu den übernommenen Eigenschaften zählen insbesondere die diskrete Rotationssymmetrie der Nasen, die relative Lage der Abstimmstempel zum Koppler, die kapazitive Leistungseinkopplung, sowie die Länge des Resonators.

In der CAD-Umgebung von CST wurde der in Abbildung 6.15 gezeigte Resonator aus Kupfer entworfen.

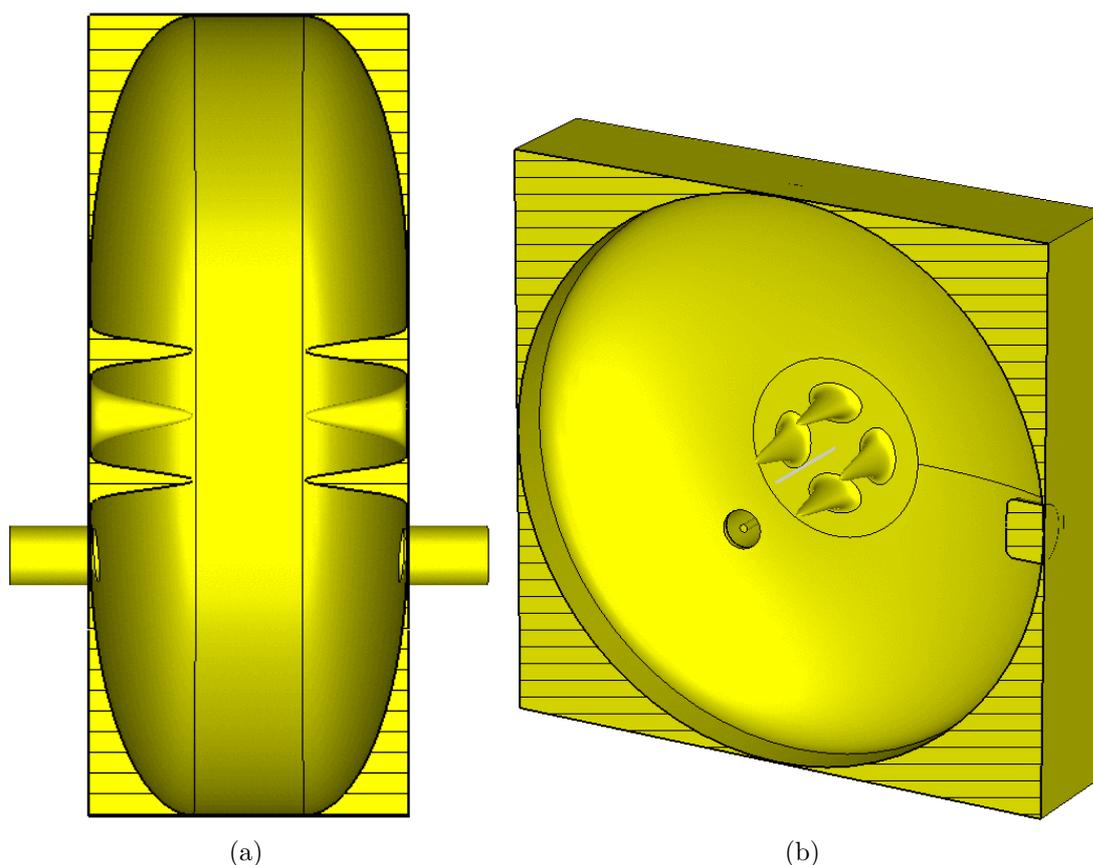


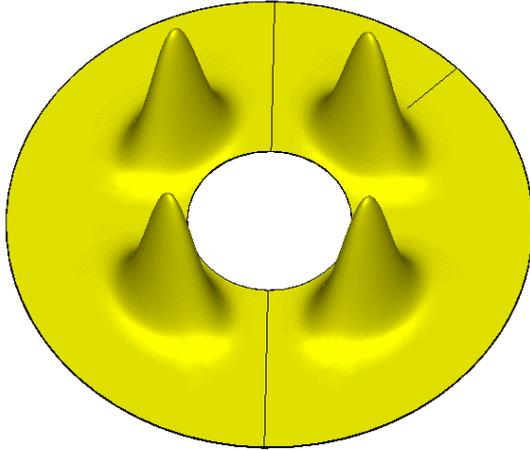
Abbildung 6.15.: Innenansichten des zweiten Deflektor-Prototypen

Bei der Entwicklung des ersten Prototypen wurde vor allem großer Wert auf die leichte Umsetzbarkeit in einen Modellresonator für experimentelle Untersuchungen gelegt. Dies führte unter anderem dazu, dass dieses erste Modell einige scharfe Kanten enthält. Für die

im vorangegangenen Kapitel vorgestellte prinzipielle Funktionsweise sind die Kanten wenig relevant. Es zeigte sich aber, dass diese Kanten starke negative Auswirkungen auf die Güte und damit auch auf die Shuntimpedanz haben.

Bei der Entwicklung des zweiten Prototypen wurde daher besonderer Wert darauf gelegt, diese scharfen Kanten zu vermeiden. Es wurden, soweit möglich, stetige Formen gewählt. Anstatt den Resonatormantel als einfachen Zylinder zu modellieren, wurde die in Abbildung 6.15 gezeigte Kombination aus Ellipsenbögen und Geraden verwendet.

Die im ersten Prototyp auf einem Kegel als Grundform basierenden Nasen, wurden durch die in Abbildung 6.16 gezeigten, auf Sinusfunktionen basierenden Nasen ersetzt.



**Abbildung 6.16.:** Nasen des zweiten Deflektor-Prototypen

Diese Nasen entstehen aus folgender parametrisierter Fläche:

$$u \in [12, 46]$$

$$v \in [0, 1]$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$a, b, c \in \{2k\} ; k \in \mathbb{N}$$

$$x(u, v) = u \cdot \sin(2\pi v)$$

$$y(u, v) = u \cdot \cos(2\pi v)$$

$$z(u, v) = NH \cdot \sin^a(4\pi v) \cdot \sin^b\left(\pi \frac{u - StRR/c}{NR - StRR/c}\right)$$

Hierbei sind  $u$  und  $v$  die Koordinaten der Fläche. Die Variable  $NH$  steht für die maximale Höhe der Nasen über der Grundfläche, die Variable  $NR$  entspricht dem maximalen Radius der Grundfläche und die Variable  $StRR$  steht für den Radius der Öffnung für das Strahlrohr in der Mitte der Grundfläche. Die Variablen  $a$ ,  $b$  und  $c$  dienen zur Anpassung der Sinusfunktionen im Rahmen der numerischen Optimierung. Nach Abschluss der Optimierung auf eine möglichst hohe Güte  $Q_0$  haben die Variablen folgende Werte angenommen:

$$NH = 37,2 ; StRR = 12 ; NR = 46 ; a = 6 ; b = 22 ; c = 10$$

Wie bereits bei dem ersten Prototypen, wurden entsprechende Koaxialwellenleiter an den selben Stellen, also insbesondere mit der Selben relativen Lage zu den Stempeln, auf den Deckelflächen angebracht. Diese ermöglichen es, wie schon beim ersten Prototypen, die beiden Polarisierungen der TM<sub>110</sub>-Mode mit nur einem Koppler anzuregen. Die relative Ausrichtung der Stempel zu den Nasen wurde so gewählt, dass, pro Polarisation, jeweils zwei gegenüberliegende Nasen in Bereichen großer longitudinaler elektrischer Feldstärke liegen und somit der radiale Gradient der longitudinalen elektrischen Feldstärke vergrößert wird. Dies ist nach Gleichung 5.3.3 gleichbedeutend mit einer Vergrößerung der transversalen Ablenkspannung.

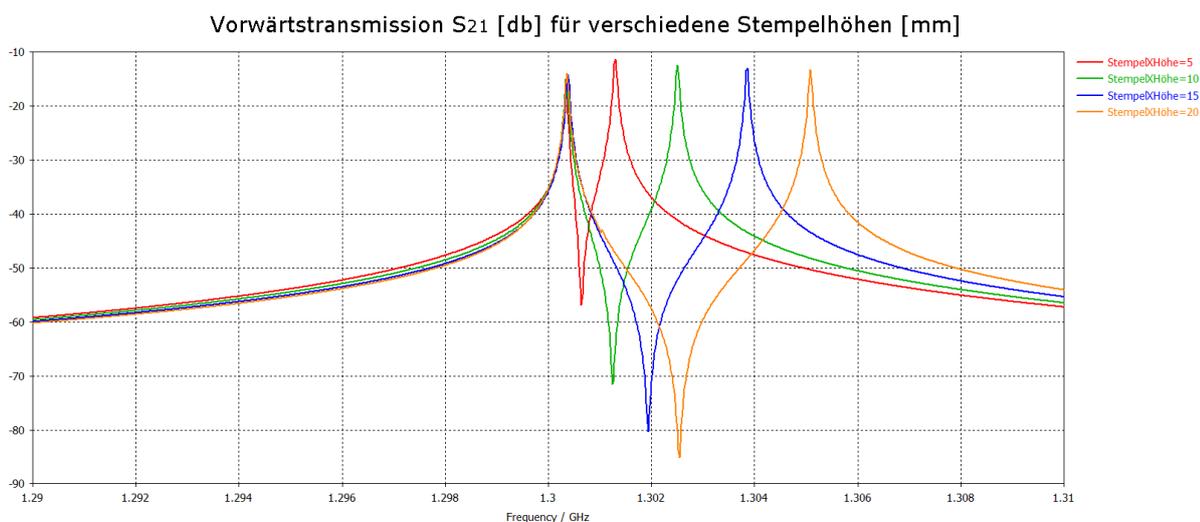
### 6.4.2. Ergebnisse der Simulationen mit CST MICROWAVE STUDIO

Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick über die Ergebnisse der Simulationen und beschränkt sich, wie schon bei der Darstellung der Simulationsergebnisse des ersten Prototypen auf kurze Erläuterungen. Eine Diskussion findet in Kapitel 9 statt.

Da die Eigenschaften beider Polarisierungen, wie auch schon beim ersten Prototypen, gleich sind, reicht es erneut aus, die Diskussion auf eine der beiden Polarisierungen zu beschränken.

Ist ein Stempel vollständig herausgefahren und der andere auf eine Eindringtiefe von 5 mm eingestellt, berechnet der Eigenmodesolver für die  $TM_{110}$ -Mode eine Resonanzfrequenz von  $f_0=1,3001$  GHz. Verwendet man die Materialeigenschaften von Kupfer für die Simulationen erhält man eine Güte von  $Q_0 \approx 29400$  und eine transversale Shuntimpedanz von  $R_{\perp}=2,12$  M $\Omega$ .

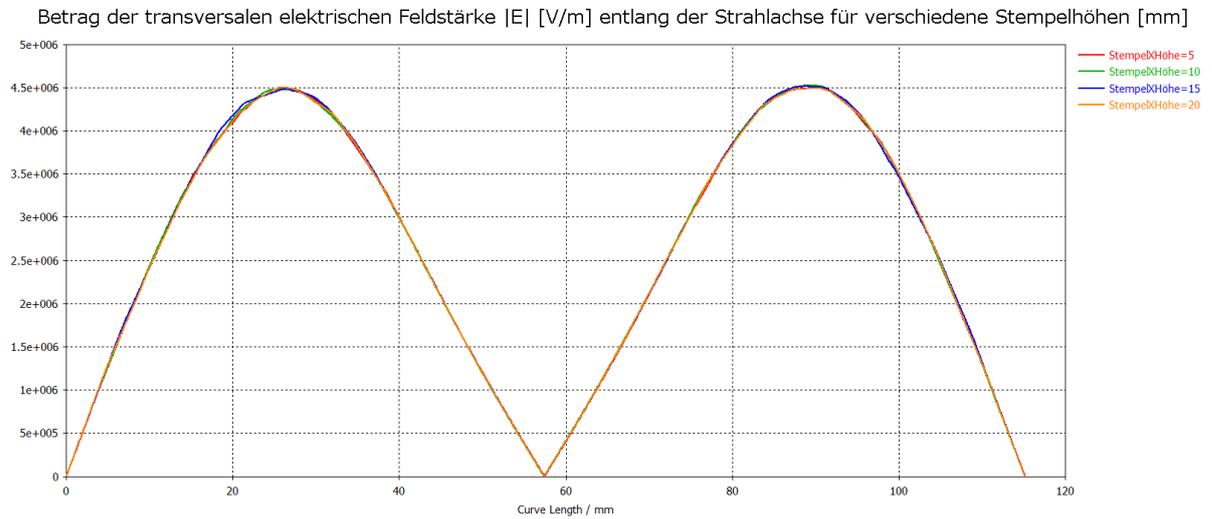
Eine Möglichkeit die Änderungen der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Stempelhöhe zu berechnen, bietet, wie schon beim ersten Prototypen, die Vorwärtstransmission<sup>2</sup>  $S_{21}$ . Abbildung 6.17 zeigt die vom Frequencydomainsolver berechneten Werte für verschiedene Stempelhöhen. Wie zu erwarten trennen sich die Resonanzfrequenzen der beiden Polarisierungen mit zunehmender Eindringtiefe des Stempels immer weiter von einander.



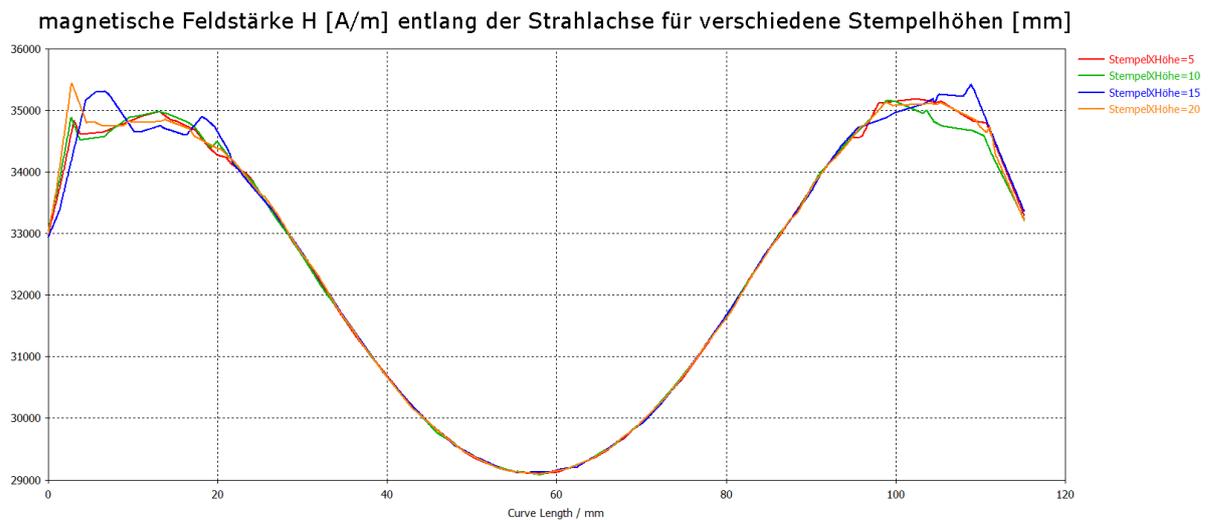
**Abbildung 6.17.:** Vorwärtstransmission  $S_{21}$  des ersten Deflektor-Prototypen in Abhängigkeit der Eindringtiefe (Stempelhöhe) der Abstimmstempel.

Die in Abbildung 6.18 dargestellten transversalen elektrischen und magnetischen Feldstärken entlang der Strahlachse zeigen, wie schon bei ersten Prototypen, nur geringe Veränderungen in Abhängigkeit von der Stempelhöhe. Die elektrische Feldstärke nimmt in ihrem räumlichen Verlauf nahezu die Form einer Sinusfunktion an. Die magnetische Feldstärke nimmt in ihrem räumlichen Verlauf nahezu die Form einer Cosinusfunktion an.

<sup>2</sup>Die Streuparamter werden in Kapitel 7 definiert



(a) transversales elektrisches Feld in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels



(b) transversales magnetisches Feld in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

**Abbildung 6.18.:** Transversale Feldstärken entlang der Strahlachse des zweiten Deflektor-Prototypen für verschiedene Eindringtiefen (Stempelhöhen) der Abstimmstempel.

### 6.4.3. Bau des zweiten Prototypen

Auf Grundlage des zuvor dargestellten Entwicklungsprozesses, wurde der in Abbildung 6.19 gezeigte Resonator aus Aluminium gebaut. Es wurde, anders als in den Simulationen, Aluminium und nicht Kupfer als Material gewählt, da Aluminium günstiger und leichter zu verarbeiten ist.

An diesem, nicht vakuumtauglichen, nicht hochleistungstauglichen zweiten Prototyp sollen, bei niedrigen Hochfrequenzleistungen, im Labor die wesentlichen in den Theoriekapiteln definierten Kenngrößen gemessen und mit den Simulationsergebnissen verglichen werden.

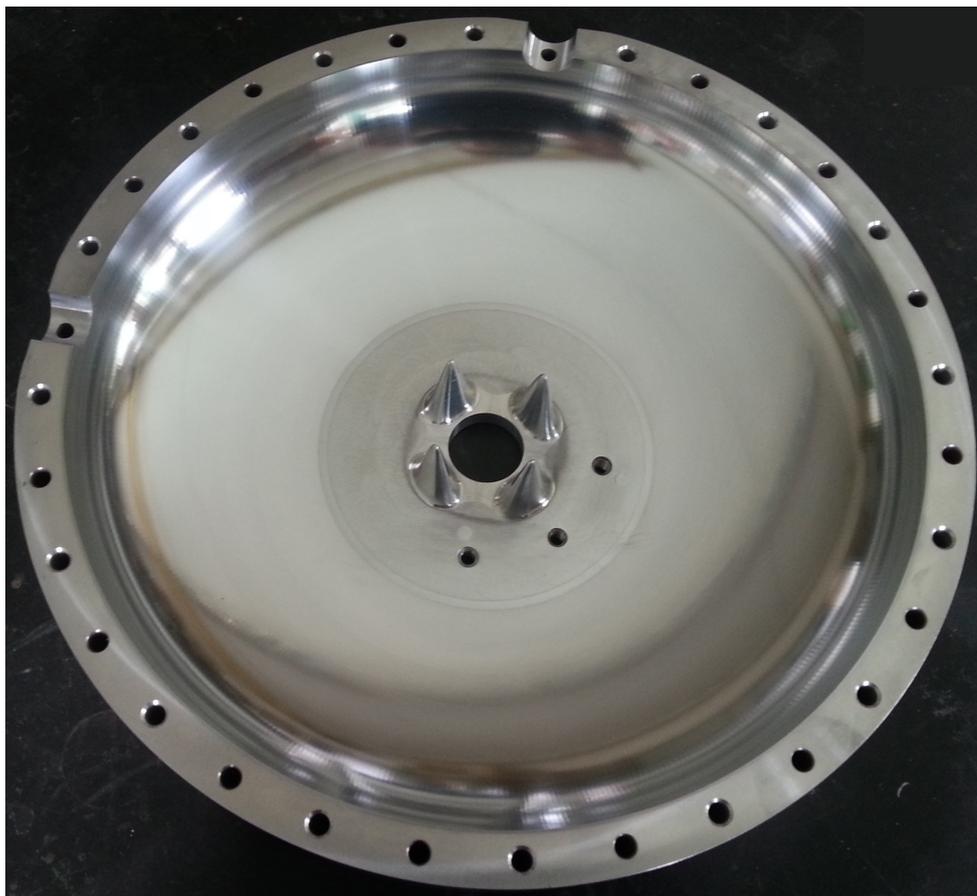


Abbildung 6.19.: Innenansicht des zweiten Deflektor-Prototypen

Das zuvor für die numerischen Berechnungen verwendete CAD-Modell wurde hierzu mit Hilfe eines CAD-CAM-Konverters in ein NC-Programm für eine CNC-Fräse übersetzt. Mit dieser CNC-Fräse wurden dann mit hoher Präzision zwei, der in Abbildung 6.19 gezeigten, Teile aus Aluminium hergestellt. Um möglichst saubere und möglichst glatte Flächen zu erhalten, wurden im Anschluss an das Fräsen die Innenflächen beider Halbzellen poliert. Wie bereits beim ersten Prototypen, enthalten die Halbzellen des zweiten Prototypen Gewindelöcher für die in den Abbildungen 6.14(a) und 6.14(b) gezeigten SMA-Koppler und Deckel. Die beiden Halbzellen werden mit Schrauben zusammen gesetzt.

Eine ausführliche Beschreibung der Messungen an diesem zweiten Prototyp findet sich in Kapitel 8.

## 6.5. Der $TM_{110}$ -HF-Deflektor

Nachdem die in Kapitel 8 dargestellten experimentellen Untersuchungen am, im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen, zweiten  $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen, die Ergebnisse der numerischen Simulationen bestätigen konnten, wurden weitere Simulationen durchgeführt, um die Leistung des zweiten  $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen weiter zu optimieren und an die mechanischen Voraussetzungen für einen Einsatz im Ultrahochvakuum an zu passen.

### 6.5.1. Entwurf des $TM_{110}$ -HF-Deflektors

Auf Grundlage des Entwicklungsprozesses der beiden Prototypen, wurde in der CAD-Umgebung der CST-STUDIO-SUITE, der in Abbildung 6.20 gezeigte, Resonator entworfen. Hierbei wurde im wesentlichen das Design des zweiten Prototyps übernommen.

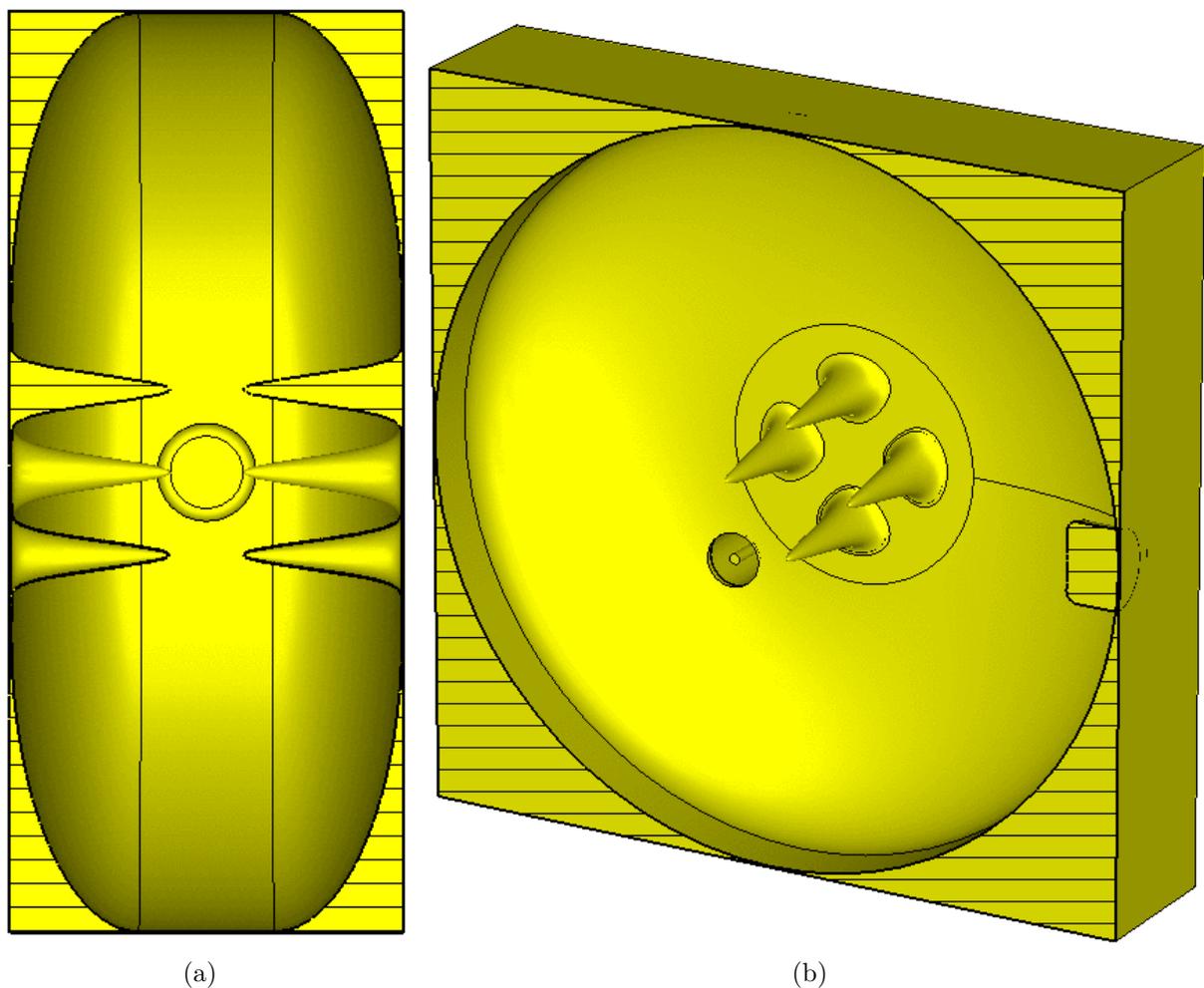
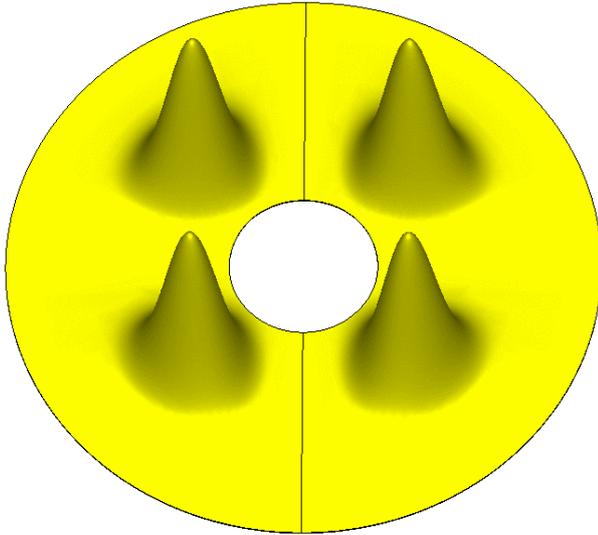


Abbildung 6.20.: Innenansichten des Deflektors

Im Laufe des Optimierungsprozesses wurden einzelne Parameter verändert, um die transversale Shuntimpedanz des zweiten  $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototyps weiter zu erhöhen. Die, im Vergleich zum zweiten Prototyp gemachten Änderungen, betreffen vor allem die in Ab-

bildung 6.21 gezeigten Nasen.

Diese Nasen entstehen wie beim zweiten Prototyp aus einer parametrisierten Fläche mit folgenden Eigenschaften:



**Abbildung 6.21.:** Nasen des zweiten Deflektor-Prototypen

che, die Variable  $NH$  entspricht dem maximalen Radius der Grundfläche und die Variable  $StRR$  steht für den Radius der Öffnung für das Strahlrohr in der Mitte der Grundfläche. Die Variablen  $a$ ,  $b$  und  $c$  dienen zur Anpassung der Sinusfunktionen im Rahmen der numerischen Optimierung.

Nach Abschluss der Optimierung auf eine möglichst hohe Shuntimpedanz  $R_{\perp}$  bei einer Güte  $Q_0$ , die mindestens so hoch ist wie die des ersten Prototyp, haben die Variablen folgende Werte angenommen:

$$NH = 46,8 ; StRR = 12 ; NR = 48 ; a = 8 ; b = 14 ; c = 10$$

Wie bereits bei den beiden Prototypen wurden für die Simulationen Koaxialwellenleiter an den selben Stellen auf den Deckelflächen angebracht.

$$\begin{aligned} u &\in [12, 48] \\ v &\in [0, 1] \\ x, y, z &\in \mathbb{R} \\ a, b, c &\in \{2k\} ; k \in \mathbb{N} \\ x(u, v) &= u \cdot \sin(2\pi v) \\ y(u, v) &= u \cdot \cos(2\pi v) \\ z(u, v) &= NH \cdot \sin^a(4\pi v) \cdot \sin^b\left(\pi \frac{u - StRR/c}{NR - StRR/c}\right) \end{aligned}$$

Hierbei sind  $u$  und  $v$  die Koordinaten der Fläche. Die Variable  $NH$  steht für die maximale Höhe der Nasen über der Grundfläche.

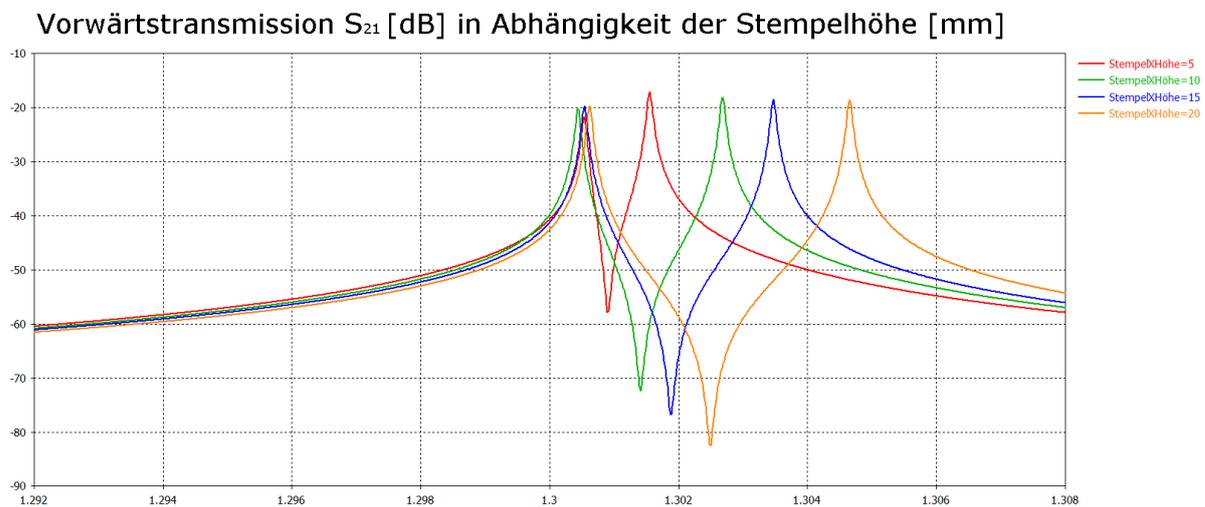
## 6.5.2. Ergebnisse der Simulationen mit CST MICROWAVE STUDIO

Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick über die Ergebnisse der Simulationen und beschränkt sich, wie schon bei der Darstellung der Simulationsergebnisse der beiden Prototypen, auf kurze Erläuterungen. Eine Diskussion findet in Kapitel 9 statt.

Da die Eigenschaften beider Polarisierungen, wie auch schon bei den beiden Prototypen gleich sind, reicht es erneut aus, die Diskussion auf eine der beiden Polarisierungen zu beschränken.

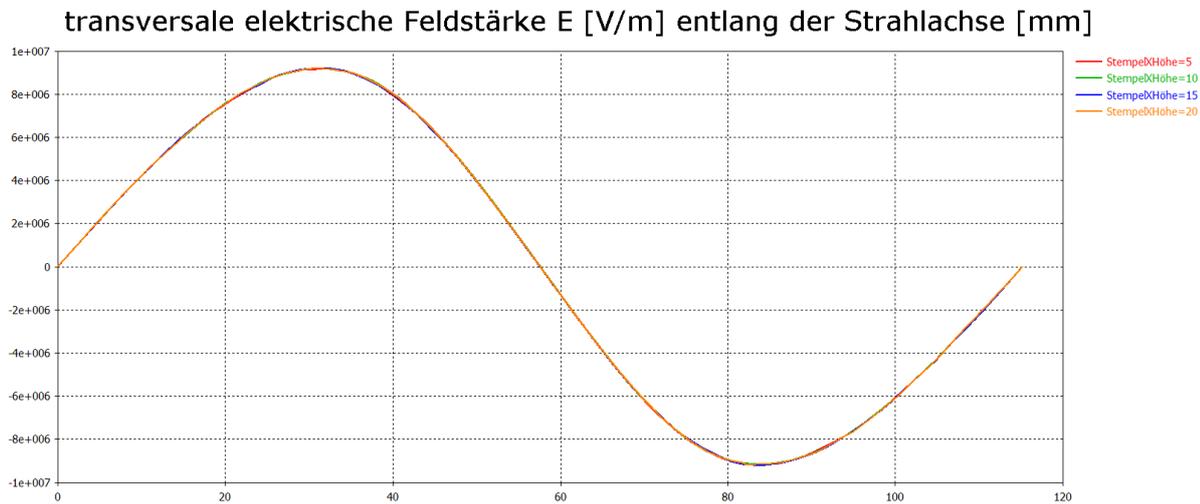
Ist ein Stempel vollständig herausgefahren und der andere auf eine Eindringtiefe von 5 mm eingestellt, berechnet der Eigenmodesolver für die  $TM_{110}$ -Mode eine Resonanzfrequenz von  $f_0 = 1,3$  GHz. Verwendet man für die Simulation die Materialeigenschaften von Kupfer, erhält man eine Güte von  $Q_0 \approx 19900$  und eine transversale Shuntimpedanz von  $R_{\perp} = 3,18$  M $\Omega$ .

Die in Abbildungen 6.22 gezeigten, vom Frequencydomainsolver berechneten Änderungen in der Vorwärtstransmission  $S_{21}$  in Abhängigkeit der Stempelhöhe, zeigen, wie bereits beim zweiten Prototyp, eine Trennung der Resonanzfrequenzen der beiden Polarisierungen.

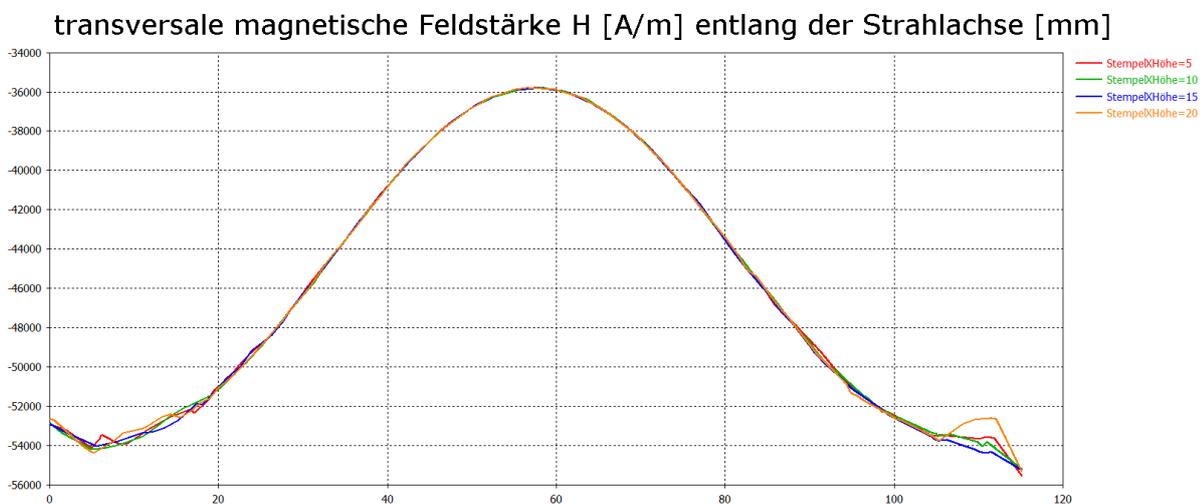


**Abbildung 6.22.:** Vorwärtstransmission  $S_{21}$  des Deflektors in Abhängigkeit der Stempelhöhe

Die in Abbildung 6.23 dargestellten transversalen, elektrischen und magnetischen Feldstärken entlang der Strahlachse zeigen, wie schon bei den ersten beiden Prototypen, nur geringe Veränderungen in Abhängigkeit von der Stempelhöhe. Die elektrische Feldstärke nimmt in ihrem räumlichen Verlauf, bis auf kleine Abweichungen, die Form einer Sinusfunktion an. Die magnetische Feldstärke nimmt in ihrem räumlichen Verlauf, bis auf kleine Abweichungen, die Form einer verschobenen Cosinusfunktion an.



(a) transversales elektrisches Feld in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels



(b) transversales magnetisches Feld in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

**Abbildung 6.23.:** transversale Feldstärken entlang der Strahlachse des Deflektors für verschiedene Eindringtiefen (Stempelhöhen) eines Abstimmstempels

### 6.5.3. Ablenkspannung im $TM_{110}$ -HF-Deflektor

Aufbauend auf den theoretischen Überlegungen zum Zylinderresonator aus Kapitel 5 soll im Folgenden die transversale Ablenkspannung im  $TM_{110}$ -HF-Deflektor näher betrachtet werden.

Wie man der Abbildung 6.23 entnimmt, entspricht der räumliche Verlauf der transversalen elektrischen Feldstärke entlang der Strahlachse in guter Näherung einer Sinusfunktion und der räumliche Verlauf der transversalen magnetischen Feldstärke entlang der Strahlachse in guter Näherung einer (verschobenen) Cosinusfunktion. Legt man den Ursprung des

Koordinatensystems auf die Strahlachse am linken Rand des Resonators, gilt:

$$E_x \approx E_{x,0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_E} z\right)$$

$$B_y \approx -B_{y,0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_B} z\right) + B_{y,1}$$

Dadurch, dass die Länge  $L$  des Resonators so gewählt wurde, dass die Teilchen beim Durchqueren des Resonators genau eine halbe Schwingung des im Resonator angeregten Hochfrequenzfeldes durchlaufen, besteht durch  $L = \beta\lambda/2$  ein Zusammenhang zwischen den „Wellenlängen“  $\lambda_E$  und  $\lambda_B$  dieser räumlichen Feldverteilungen und der zeitlichen Wellenlänge der Eigenschwingung des Resonators. Es gilt:

$$\lambda_E = L = \frac{\beta\lambda}{2}$$

$$\lambda_B = L = \frac{\beta\lambda}{2}$$

Damit findet man

$$E_x \approx E_{x,0} \sin\left(\frac{4\pi}{\beta\lambda} z\right)$$

$$B_y \approx -B_{y,0} \cos\left(\frac{4\pi}{\beta\lambda} z\right) + B_{y,1}$$

für die räumliche Verteilung der transversalen Feldstärken entlang der Strahlachse. Setzt man dies in Gleichung 5.3.3 ein, erhält man

$$U_x = \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} \left[ E_{x,0} \sin\left(\frac{4\pi}{\beta\lambda} z\right) + iB_{y,0} \cos\left(\frac{4\pi}{\beta\lambda} z\right) + iB_{y,1} \right] \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda} (z - z_0)\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda} (z - z_0)\right) \right] dz$$

als x-Komponente der transversalen Ablenkspannung.

Wie schon bei der Berechnung der transversalen Spannung eines Zylinderresonators in Kapitel 5 liefern Real- und Imaginärteil dieser Gleichung um  $\pi/2$  (zeitlich) phasenverschobene Lösungen. Betrachtet man den Realteil, erhält man

$$U_x = \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} E_{x,0} \sin\left(\frac{4\pi}{\beta\lambda} z\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda} (z - z_0)\right) dz$$

$$- \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} B_{y,0} \cos\left(\frac{4\pi}{\beta\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda} (z - z_0)\right) dz$$

$$- \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} B_{y,1} \sin\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda} (z - z_0)\right) dz$$

Ausführen der Integration liefert zusammen mit der Wellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$  für die drei Summanden:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} \sin\left(\frac{4\pi}{\beta\lambda}z\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda}(z-z_0)\right) dz &= \frac{4}{6} \frac{\beta\lambda}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda}z_0\right) = \frac{4}{3} \frac{\beta}{k} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) \\ \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} \cos\left(\frac{4\pi}{\beta\lambda}z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda}(z-z_0)\right) dz &= \frac{4}{6} \frac{\beta\lambda}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda}z_0\right) = \frac{4}{3} \frac{\beta}{k} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) \\ \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda}(z-z_0)\right) dz &= \frac{\beta\lambda}{\pi} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) = 2 \frac{\beta}{k} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) \end{aligned}$$

Fasst man dies zusammen erhält man

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{4}{3} \frac{\beta}{k} E_{x,0} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) + \frac{4}{3} \frac{\beta}{k} \beta c B_{y,0} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) - 2 \frac{\beta}{k} \beta c B_{y,1} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) \\ &= 2 \frac{\beta}{k} \left( \frac{2}{3} E_{x,0} + \frac{2}{3} \beta c B_{y,0} - \beta c B_{y,1} \right) \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

als x-Komponente der transversalen Ablenkspannung.

Auf die selbe Weise findet man für die y-Komponente:

$$\begin{aligned} U_y &= -\frac{4}{3} \frac{\beta}{k} E_{y,0} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) - \frac{4}{3} \frac{\beta}{k} \beta c B_{x,0} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) + 2 \frac{\beta}{k} \beta c B_{x,1} \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) \\ &= -2 \frac{\beta}{k} \left( \frac{2}{3} E_{y,0} + \frac{2}{3} \beta c B_{x,0} - \beta c B_{x,1} \right) \cos\left(\frac{k}{\beta}z_0\right) \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

Dieses bemerkenswerte Ergebnis zeigt, dass die komplexe Geometrie des TM<sub>110</sub>-HF-Deflektors in der Lage ist, genauso wie ein Zylinderresonator, eine hochfrequente sinusförmige transversale Spannung zu erzeugen. Allerdings ist die transversale Shuntimpedanz des TM<sub>110</sub>-HF-Deflektors mit 3,18 MΩ etwa dreimal so hoch, wie die eines Zylinderresonators aus Kupfer.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit den Gleichungen 5.6.2 und 5.6.3 stellt man fest, dass der in diesen Gleichungen enthaltene Faktor  $\sin\left(\frac{L}{2} \frac{k}{\beta}\right)$  in den Gleichungen 6.5.1 und 6.5.2 nicht mehr auftaucht. Dies liegt daran, dass, wie oben erläutert, die Länge  $L$  des TM<sub>110</sub>-HF-Deflektors so gewählt wurde, dass sie  $L = \beta\lambda/2$  entspricht. Anders als bei den Überlegungen zum Zylinderresonator in Kapitel 5, wurde bei den oben dargestellten Rechnungen, der Ursprung des verwendeten Koordinatensystem nicht in die Mitte des Resonators, sondern an den linken Rand des Resonatorinnenraums gelegt. Dadurch, dass die Resonatoren eine Länge von  $L = \beta\lambda/2$  haben, entspricht diese unterschiedliche Wahl des Koordinatensystems einer räumlichen Verschiebung  $\beta\lambda/4$  oder einer zeitlichen Phasenverschiebung von  $\pi/2$  also genau dem Unterschied zwischen Sinus und Cosinus.

### 6.5.4. Ergebnisse der Simulationen mit CST PARTICLE STUDIO

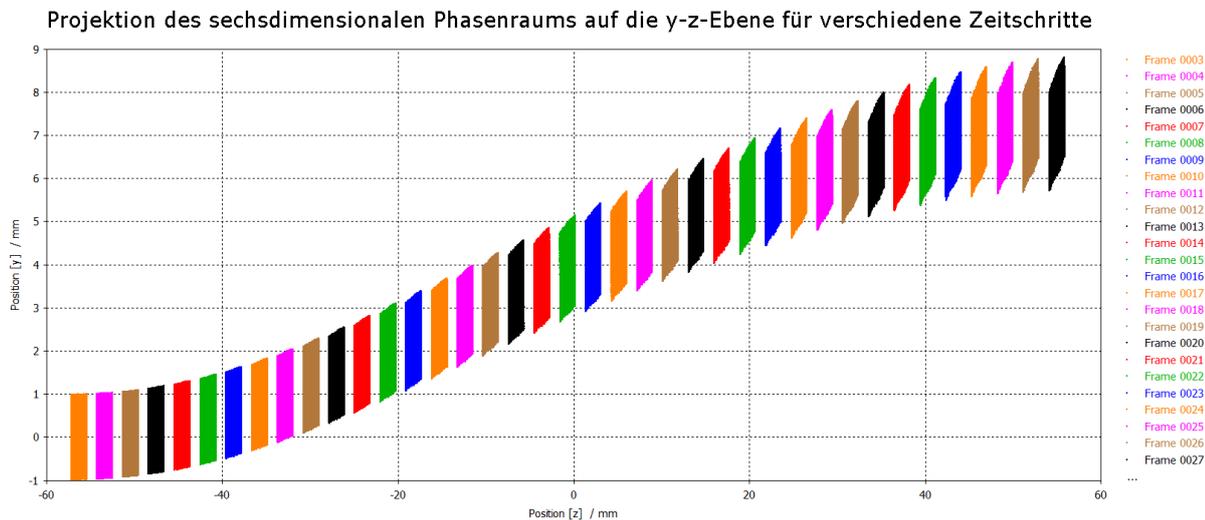
Der folgende Abschnitt fasst die Ergebnisse der Simulationen zur Teilchendynamik im zuvor beschriebenen  $TM_{110}$ -HF-Deflektor zusammen.

Die Abbildungen 6.24 bis 6.27 zeigen die Ergebnisse der mit CST PARTICLE STUDIO durchgeführten Simulationen zur Teilchendynamik. Bei diesen Simulationen wurde eine Teilchenquelle verwendet, welche Elektronenpakete mit einer kinetischen Energie von 2 MeV und einer maximalen Energieabweichung von 1 % liefert. Longitudinal entspricht die Dichteverteilung der Teilchen einer Gaußverteilung mit einer Halbwertsbreite von 2 ps. In den beiden transversalen Ebenen ist die Teilchendichte gleichverteilt. Die maximale Ablage beträgt 1 mm und der maximale Winkel zum Normalenvektor der Quellfläche beträgt 1 mrad. Bei allen Simulationen befindet sich die Teilchenquelle, ohne vorherige Driftstrecke, direkt am Anfang des Deflektors. Die Simulation endet nachdem die Teilchenpakete den  $TM_{110}$ -Deflektor durchquert haben. Die Polarisation der  $TM_{110}$ -Mode und die Phase zum Hochfrequenzfeld wurden so gewählt, dass die Ablenkung der Teilchenpakete in positiver Y-Richtung stattfindet.

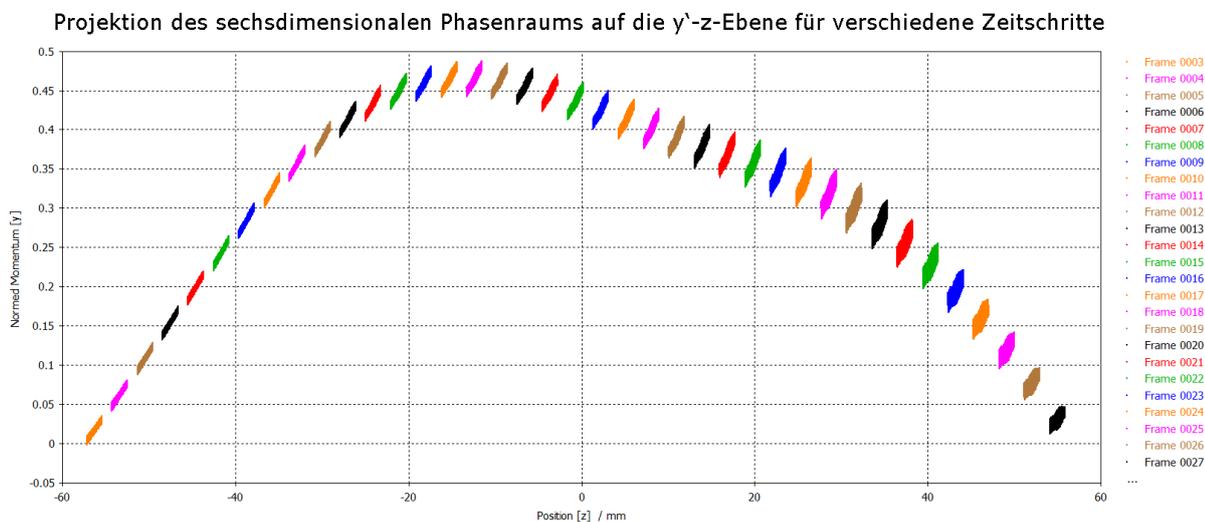
In Kapitel 2 wurde ein Formalismus zur Beschreibung von Teilchenpaketen in Phasenräumen eingeführt. Im Folgenden wird dieser Formalismus dazu verwendet, die Änderungen der Eigenschaften eines Teilchenpakets, welches unter den oben genannten Voraussetzungen, den  $TM_{110}$ -Deflektor durchquert, zu beschreiben.

Abbildung 6.24 zeigt die zeitlichen Änderungen der Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums, auf den durch die longitudinale Ortskoordinate  $z$  und durch die Ablage in  $y$ -Richtung gebildeten Unterraums für verschiedene Zeitschritte des PIC-Solvers. Abbildung 6.25 zeigt die zeitlichen Änderungen der Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums, auf den durch die longitudinale Ortskoordinate  $z$  und durch die  $y$ -Komponente des Impulsvektors gebildeten Unterraums für verschiedene Zeitschritte des PIC-Solvers. Vergleicht man diese beiden Simulationsergebnisse mit den Simulationsergebnissen des Zylinderresonators aus Kapitel 6.2, erkennt man den dort dargestellten und von der Theorie vorhergesagten, charakteristischen Verlauf der Teilchenbewegung wieder. Die Abweichungen hiervon in der  $y$ '- $z$ -Ebene lassen sich mit den unterschiedlichen radialen Gradienten der transversalen Spannung erklären.

Abbildung 6.26 zeigt die zeitlichen Änderungen der Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums, auf den durch die Ablage in  $y$ -Richtung und durch die entsprechenden Komponente des Impulsvektors gebildeten Unterraums für verschiedene Zeitschritte des PIC-Solvers. Diese Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums entspricht dem in Kapitel 2 definierten transversalen Phasenraum  $V_y$ . Anders, als in der theoretischen Beschreibung in Kapitel 2, hat der Phasenraum hier zu Beginn nicht die Form einer Ellipse, sondern auf Grund der von der Simulation vorgegebenen, oben genannten, Anfangsbedingungen die Form eines Parallelogramms. Das zunächst exakt rechteckige Phasenraumvolumen entwickelt sich auf Grund der Divergenz des Teilchenstrahls im fortschreitender Zeit zu einem



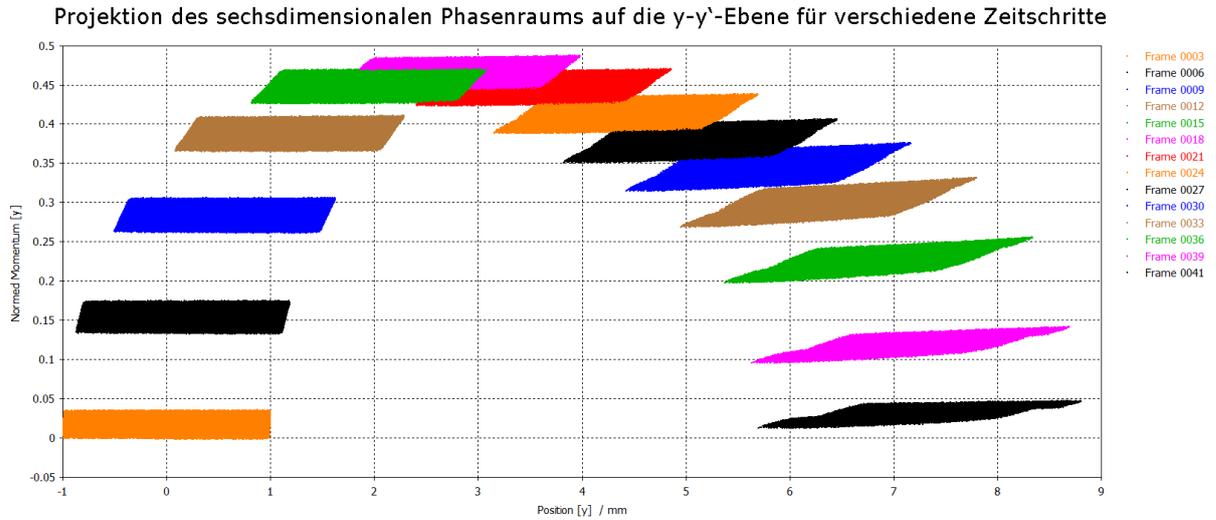
**Abbildung 6.24.:** Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums auf die  $y$ - $z$ -Ebene für verschiedene Zeitschritte des PIC-Solvers



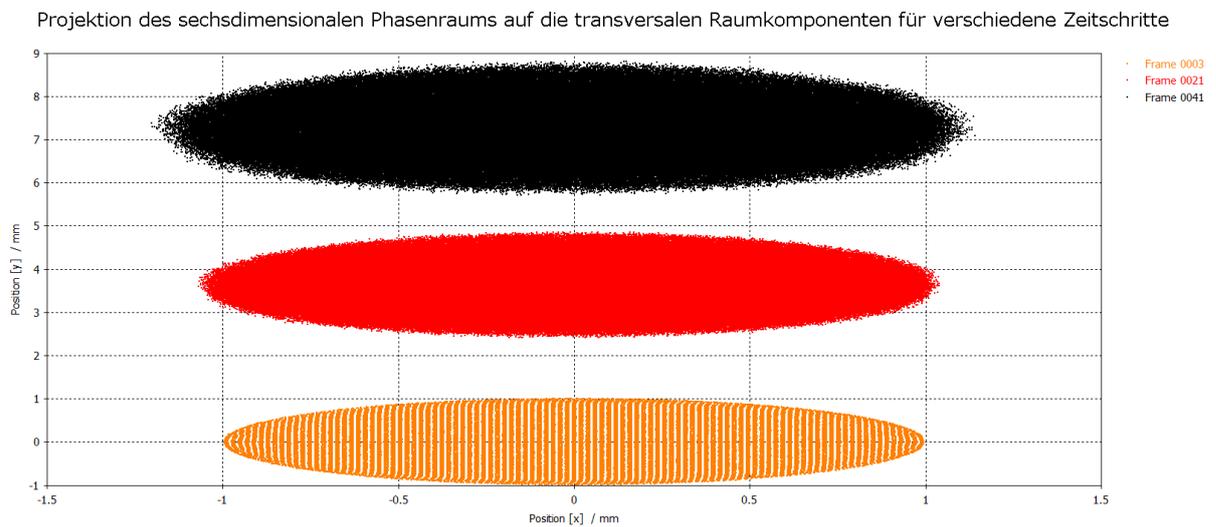
**Abbildung 6.25.:** Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums auf die  $y'$ - $z$ -Ebene für verschiedene Zeitschritte des PIC-Solvers

Parallelogramm. Die, durch die Wirkung der transversalen Spannung des Deflektors, verursachte Drehung des Phasenraumvolumens um sein Zentrum und gegen den Uhrzeigersinn ist insbesondere in den letzten Zeitschritten deutlich zu erkennen.

Die Abbildung 6.27 zeigt die Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums auf den durch die Ablage in  $x$ -Richtung und durch die Ablage in  $y$ -Richtung gebildeten Unterraum für verschiedene Zeitschritte des PIC-Solvers. Diese Projektion lässt sich, bei den in Kapitel 3 dargestellten Messverfahren auf den jeweils verwendeten Schirmen beobachten. Die im ersten Zeitschritt deutlich zu erkennenden Linien in der Teilchenverteilung entstehen durch die von der Simulation vorgegebenen Anfangsbedingungen. Die Ergebnisse der Simulationen mit CST PARTICLE STUDIO zeigen, dass der, zuvor mit CST MICROWAVE STUDIO entwickelte Deflektor, die von ihm erzeugte hochfrequente transversale Spannung in geeigneter Weise auf Teilchenpakete übertragen kann.



**Abbildung 6.26.:** Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums auf die  $y$ - $y'$ -Ebene für verschiedene Zeitschritte des PIC-Solvers



**Abbildung 6.27.:** Projektion des sechsdimensionalen Phasenraums auf die  $x$ - $y$ -Ebene (transversale Raumkomponenten des sechsdimensionalen Phasenraus) für verschiedene Zeitschritte des PIC-Solvers

## 7. Theoretische Grundlagen der Störkörpermessung

Dieses Kapitel beschreibt Messmethoden, um die in Kapitel 4 und 5 eingeführten Kenngrößen eines Hohlraumresonators zu messen. Als erstes werden die Streu-Parameter (S-Parameter) eingeführt. Es wird erläutert, wie sich aus diesen die Resonanzfrequenz und die Güte einer Mode bestimmen lassen. Anschließend wird die Störkörpermethode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Feldstärken in einem Hohlraumresonator vorgestellt.

### 7.1. S-Parameter

In der Wechselstromtechnik beschreibt man Baugruppen häufig als Vierpole, auch Zweitore genannt [ Heuermann (2009) ](s. Abb. 7.1). Man betrachtet dazu Spannungen und Ströme an zwei Anschlusspaaren, den sogenannten Toren (Eingang und Ausgang). Dabei setzt man voraus, dass die Ströme an den zusammengehörigen Anschlüssen gleich sind. Es gibt demnach vier Messgrößen: Die Spannung  $U_1$  und den Strom  $I_1$  an Tor 1 und sowie die Spannung  $U_2$  und den Strom  $I_2$  an Tor 2. Die Beziehungen zwischen diesen Spannungen und Strömen lassen sich mit einem System aus zwei Gleichungen beschreiben. Für lineare Vierpole sind dies lineare Gleichungen, welche die vier, im Allgemeinen frequenzabhängigen Vierpolparameter enthalten:

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \vec{I}.$$



Abbildung 7.1.: Vierpol und Vierpolparameter

Diese Darstellung nennt man Widerstandsform oder Widerstandsmatrix. Andere übliche Darstellungen sind die Leitwertform (Y), die Kettenform (A) und die Hybridform (H). Sie unterscheiden sich lediglich in der Anordnung der einzelnen Größen und sind daher ineinander umrechenbar.

In der Hochfrequenztechnik verbindet man einzelne Baugruppen für gewöhnlich mit zwei-

poligen Leitungen fester Impedanz  $Z$  (meist  $50\ \Omega$ ). Daher sind die Spannungen und Ströme an den Toren nicht mehr unabhängig und es genügt die Spannungen anzugeben. Die zugehörigen Ströme ergeben sich dann einfach zu  $I = U/Z$ . Die Signale auf den Leitungen lassen sich in hin- und rücklaufende Wellen zerlegen. So bietet es sich an, das Verhalten von Vierpolen über die Spannungen der hin- und rücklaufenden Wellen an Ein- und Ausgang zu beschreiben. Hierbei meint hinlaufende Welle eine Welle, die in Richtung des Vierpols läuft. Dies führt auf die sogenannten S-Parameter. Sie beschreiben die Spannungen der rücklaufenden Wellen an den beiden Toren ( $U_r$ ) in Abhängigkeit von denen der hinlaufenden Wellen ( $U_h$ ):

$$U_{1r} = s_{11}U_{1h} + s_{12}U_{2h}$$

$$U_{2r} = s_{21}U_{1h} + s_{22}U_{2h}.$$

In der Literatur etwa bei [ Heuermann (2009) ] findet man häufig auch folgende Darstellung:

$$b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2$$

$$b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2.$$

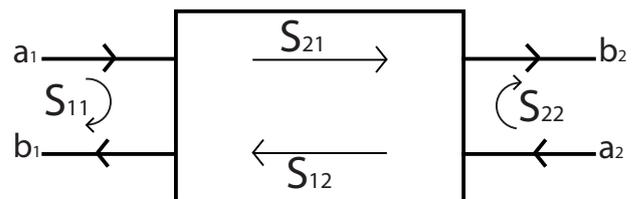
Hierbei ist

$$\vec{a} = \frac{\vec{U}_h}{\sqrt{Z_L}} \text{ und } \vec{b} = \frac{\vec{U}_r}{\sqrt{Z_L}}$$

die auf die Quadratwurzel der Leitungsimpedanz normierte Spannung der hinlaufenden bzw. der rücklaufenden Welle.

Die Streu-Parameter werden zur Streumatrix  $S$  zusammengefasst:

$$\vec{b} = S \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \vec{a}$$



**Abbildung 7.2.:** Vierpol und Streuparameter

Man nennt die Reflexion an Tor 1 Eingangsreflexion ( $s_{11}$ ), die Reflexion an Tor 2 Ausgangsreflexion ( $s_{22}$ ), die Transmission von Tor 1 nach Tor 2 Vorwärtstransmission ( $s_{21}$ ) und die Transmission von Tor 2 nach Tor 1 Rückwärtstransmission ( $s_{12}$ ). Da für die S-Parameter nur Verhältnisse von Spannungen benötigt werden, lassen sich diese sowohl aus Spitzen- als auch aus Effektivwerten bestimmen. Es handelt sich um komplexe, frequenzabhängige Größen, die von Amplitude und Phase abhängen.

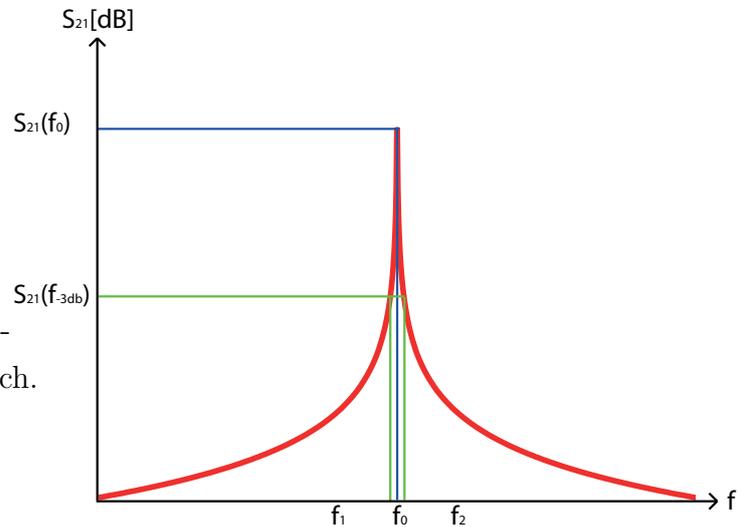
## 7.2. Bestimmung der Koppelfaktoren $\kappa_i$ und der unbelasteten Güte $Q_0$

In Kapitel 4, wurde am Beispiel von Schwingkreisen, die Güte  $Q$  eines Hohlraumresonators eingeführt. Dieser Abschnitt beschreibt eine experimentelle Möglichkeit, diese zu bestimmen.

Wie in Kapitel 4 gezeigt, lässt sich die Güte aus

$$Q = \frac{f_0}{f_1 - f_2} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

bestimmen. Um die Resonanzfrequenz  $f_0$  und die Bandbreite  $\Delta f$  zu bestimmen, führt man eine Transmissionsmessung ( $S_{12}$  oder  $S_{21}$ ) durch. Trägt man beispielsweise die Vorwärtstransmission  $S_{21}$  in einem Intervall um die erwartete Resonanzfrequenz  $f_0$  gegen die Frequenz auf und wählt zur Darstellung eine logarithmische Skala, erhält man einen



**Abbildung 7.3.:** Resonanzkurve eines Schwingkreises (Breit-Wigner-Kurve) mit 3db-Punkte und Halbwertsbreite

Graph, wie er in Abbildung 7.3 dargestellt ist. Das Maximum dieses Graphen liegt bei der Resonanzfrequenz  $f_0$ . Da S-Parameter zu Spannungen proportionale Größen sind und da nach Gleichung 4.5.2  $W \propto U^2$  gilt, sind die Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  diejenigen, an denen die Amplitude auf  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  abgefallen ist. Dies entspricht in der logarithmischen Darstellung einer Änderung von -3db.

Da der Resonator durch die zum Messen nötige Ankopplung belastet wird, entspricht die so bestimmte Güte einer belasteten Güte. Um hieraus die unbelastete Güte  $Q_0$  zu berechnen, ist es nach Gleichung 4.5.8 erforderlich, die Koppelfaktoren  $\kappa_i$  zu kennen.

Diese lassen sich aus Reflexionsmessungen bestimmen.

Für die Diagonalelemente  $S_{ii}$  der Streumatrix (die Reflexionsfaktoren) gilt:

$$S_{ii} = \frac{Z_{a,i} - Z_{0,i}}{Z_{a,i} + Z_{0,i}} = \frac{\frac{Z_{a,i}}{Z_{0,i}} - 1}{\frac{Z_{a,i}}{Z_{0,i}} + 1}$$

Mit  $Z_{a,i}$  als Abschlussimpedanz der i-ten Leitung und  $Z_{0,i}$  als Impedanz der i-ten Leitung [ Heuermann (2009) ]. Setzt man in die Definition des Koppelfaktors aus Gleichung 4.5.7 die Impedanz des extern angeregten Schwingkreises aus Gleichung 4.5.4 ein, kann man

$$\frac{Z_a}{Z_0} = \frac{Z_{\text{cav}}}{n^2 Z_0} = \kappa \frac{Z_{\text{cav}}}{R_S} = \frac{\kappa}{1 + iQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

für das Verhältnis von Abschluss und Leitungsimpedanz schreiben und damit den Ausdruck für die Reflexionsfaktoren in

$$S_{ii} = \frac{\kappa_i - 1 + iQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{\kappa_i + 1 + iQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

umformen. Da im Resonanzfall die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  der Frequenz der externen Anregung  $\omega$  entspricht, gilt:

$$S_{ii} = \frac{\kappa_i - 1}{\kappa_i + 1} \Leftrightarrow \kappa_i = \frac{1 - S_{ii}}{1 + S_{ii}}$$

In der Praxis wird der Imaginärteil des Koppelfaktors  $Im(\kappa_i)$  nicht exakt null sein. Der Grund hierfür ist, dass die Bezugsebene für die Kalibration des Netzwerkanalysators durch das Ende des verwendeten Kabels gegeben ist. Bis zur tatsächlichen Einkopplung in den Resonator liegen aber noch einige Millimeter Leitung wie z.B. eine Koppelschleife. Die dabei, durch die unterschiedliche Laufzeit der Signale, entstehende Phasenverschiebung zeigt sich bei den Messungen als endlicher Imaginärteil des Koppelfaktors. Um trotz dieser Phasenverschiebung den Koppelfaktor bestimmen zu können, verwendet man nur den Betrag des Reflexionsfaktors  $|S_{ii}|$ .

Man unterscheidet zwischen:

- Unterkopplung:  $Z_a > Z_0 \Leftrightarrow \kappa < 1$
- kritischer Kopplung:  $Z_a = Z_0 \Leftrightarrow \kappa = 1$
- Überkopplung:  $Z_a < Z_0 \Leftrightarrow \kappa > 1$ .

Damit folgt

$$\kappa_i = \frac{1 \pm |S_{ii}|}{1 \mp |S_{ii}|} \quad (7.2.1)$$

für den Koppelfaktor  $\kappa_i$ , wobei die oberen Vorzeichen für Über- und die unteren Vorzeichen für Unterkopplung gelten.

Für die unbelastete Güte  $Q_0$  ergibt sich demnach

$$Q_{\text{bel}} = \frac{Q_0}{1 + \sum_i \kappa_i} \quad (7.2.2)$$

als allgemeinere Form von Gleichung 4.5.8.

## 7.3. Die Störkörpermessmethode

Um die elektrischen und magnetischen Felder in einem Hohlraumresonator zu messen, koppelt man Üblicherweise geringfügig Leistung aus. Die hierfür nötige Kopplung darf den Resonator nur soweit belasten, dass sich die Feldverteilung nicht wesentlich ändert. Durch Koppelschleifen oder verlängerte Innenleiter von Koaxialkabeln ist es möglich, die Feldstärken in der Nähe der Wände eines Hohlraumresonators zu messen.

Die Messung der Felder im Inneren gestaltet sich hingegen wesentlich schwieriger. Würde man zum Beispiel eine Koppelschleife in der Mitte eines Resonators platzieren, wäre die Störung durch diese und die mit dieser verbundenen Koaxialleitung so groß, dass die gemessene Feldstärke keine Aussagen über den ungestörten Resonator mehr zulässt. Um die Felder im Inneren eines Hohlraumresonators zu messen, wurde daher von [ Maier und Slater (1952) ] die Störkörpermessmethode entwickelt. Die Störkörpermessmethode beruht darauf, im Verhältnis zum Resonator sehr kleine Objekte in den Resonator einzubringen und mit diesen die Energiedichte und damit die Felder im Resonator *lokal* zu stören. Je mehr sich die dielektrischen und magnetischen Eigenschaften dieser Störkörper von denen im Inneren des Resonators unterscheiden und je größer ihr Volumen ist, umso größer sind die verursachten Störungen. Im Folgenden werden zunächst die formalen Zusammenhänge in Form einer Störkörpergleichung hergeleitet und anschließend wird auf die Eigenschaften von unterschiedlichen Störkörpern eingegangen.

### 7.3.1. Die Störkörpergleichung

Wie bereits oben beschrieben, ändert ein Störkörper lokal die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} \left( \vec{D} \vec{E} + \vec{B} \vec{H} \right) \quad (7.3.1)$$

im Resonator und damit auch die Feldverteilung.

Sei  $\omega_0$  die Kreisfrequenz des ungestörten und  $\omega$  die Kreisfrequenz des gestörten Resonators dann sind

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega_0 t} \quad (7.3.2a)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot e^{i\omega_0 t} \quad (7.3.2b)$$

die ungestörten Felder und

$$\vec{D} \cdot e^{i\omega_0 t} = \left( \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P} \right) e^{i\omega t} \quad (7.3.3a)$$

$$\vec{B} \cdot e^{i\omega_0 t} = \left( \mu_0 \vec{H}_0 + \vec{M} \right) e^{i\omega t} \quad (7.3.3b)$$

die gestörten Felder. Setzt man dies in die Maxwellgleichungen 4.1.1d ein und berücksichtigt, dass im Inneren des Resonators keine freien Ladungen und Ströme ( $\rho = 0$  und  $\vec{j} = 0$ )

existieren erhält man:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega \vec{D}.$$

Multiplikation mit dem komplexkonjugierten ungestörten elektrischen Feld ergibt:

$$\vec{E}_0^* (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = i\omega \vec{D} \vec{E}_0^*.$$

Anwenden von Gleichung  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}$  auf die linke Seite ergibt:

$$\vec{\nabla} (\vec{E}_0^* \times \vec{H}) + \vec{H} (\vec{\nabla} \times \vec{E}_0^*) = i\omega \vec{D} \vec{E}_0^*.$$

Für die Rotation von  $\vec{E}_0^*$  setzt man Gleichung 4.1.1c ein und erhält:

$$\vec{\nabla} (\vec{E}_0^* \times \vec{H}) - i\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0^* \vec{H} = i\omega \vec{D} \vec{E}_0^*.$$

Integriert man dies über den Innenraum des Resonators ergibt sich:

$$\int_V (\vec{\nabla} (\vec{E}_0^* \times \vec{H})) dV - \int_V (i\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0^* \vec{H}) dV = \int_V (i\omega \vec{D} \vec{E}_0^*) dV.$$

Der erste Summand auf der linken Seite ist null, da keine Leistung durch die Oberfläche abgestrahlt wird (Satz von Gauß):

$$-\omega_0 \mu_0 \int_V (\vec{H}_0^* \vec{H}) dV = \omega \int_V (\vec{D} \vec{E}_0^*) dV.$$

Auf die gleiche Weise findet man ausgehend von Gleichung 4.1.1c:

$$-\omega_0 \epsilon_0 \int_V (\vec{E}_0^* \vec{E}) dV = \omega \int_V (\vec{B} \vec{H}_0^*) dV.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit  $\omega$ , die zweite mit  $\omega_0$  und addiert beide ergibt sich für eine kleine Störung ( $\omega \approx \omega_0$ ) zusammen mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$  und  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$ :

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} = \frac{\int_V (-\vec{E}_0^* \vec{P} + \vec{H}_0^* \vec{M}) dV}{\epsilon_0 \int_V (\vec{E}_0^* \vec{E}) dV}.$$

Außerhalb des Störkörpers ist die Polarisation  $\vec{P}$  und die Magnetisierung  $\vec{M}$  null. Es reicht also aus, im Zähler nur über das Volumen  $V_s$  des Störkörpers zu integrieren:

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0} = \frac{\int_{V_s} \left( -\vec{E}_0^* \vec{P} + \vec{H}_0^* \vec{M} \right) dV}{\epsilon_0 \int_V \left( \vec{E}_0^* \vec{E} \right) dV}. \quad (7.3.4)$$

Für kleine Störungen ist  $\vec{E} \vec{E}_0^* \approx |\vec{E}|^2$  und damit

$$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2 dV$$

die im Resonator gespeicherte Energie. Mit

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{M} &= \vec{B} - \mu_0 \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} - \mu_0 \vec{H} \end{aligned}$$

lässt sich für Felder, die konstant über das ganze Volumen des Störkörpers sind,

$$\frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} = \frac{-(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}^2 + (\mu_r - 1) \mu_0 \vec{H}^2}{2W_{\text{ges}}} \cdot V_s \quad (7.3.5)$$

als Gleichung für die Felder am Ort des Störkörpers schreiben. Hierbei ist zu beachten, dass  $\epsilon_r$  und  $\mu_r$  effektive Größen sind, die sowohl vom Material als auch von der Form abhängen. Mit den Störkörperkonstanten

$$\alpha = -(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \cdot V_s \quad \text{und} \quad \beta = (\mu_r - 1) \mu_0 \cdot V_s$$

lässt sich dies als

$$\frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} = \frac{\alpha |E_0|^2 + \beta |H_0|^2}{2W} \quad (7.3.6)$$

schreiben.

### 7.3.2. Berechnung der elektrischen Störkörperkonstanten einer dielektrischen Kugel im homogenen äußeren Feld

Die Polarisation einer dielektrischen Kugel im homogenen äußeren Feld ist laut [ Jackson (2006) ]:

$$\vec{P} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{E}_0$$

mit  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  wird hieraus

$$\vec{P} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{E}_0$$

Setzt man diese Polarisation in Gleichung 7.3.4 ein und berücksichtigt, dass für dielektrische Materialien  $\mu \approx 1$  und damit  $\vec{M} = 0$  gilt, erhält man nach Vergleich mit 7.3.6

$$\alpha = - \int_{V_s} 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} dV = -3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \cdot V_s \quad (7.3.7)$$

als analytischen Ausdruck für die elektrische Störkörperkonstante einer homogenen Kugel mit der Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  und dem Volumen  $V_s$ .

### 7.3.3. Experimentelle Bestimmung der Störkörperkonstanten

Um die bei der Herleitung der Störkörpergleichung verwendeten Störkörperkonstanten  $\alpha$  und  $\beta$  von analytisch nicht berechenbaren Störkörpern zu bestimmen, ist es erforderlich, die Wirkung der Störkörper auf eine bekannte (analytisch berechenbare) Feldverteilung zu messen. Wählt man hierfür zweckmäßig solche Feldverteilungen, in denen am Ort des Störkörpers entweder nur ein E- oder nur ein H-Feld existiert, lässt sich Gleichung 7.3.6 in

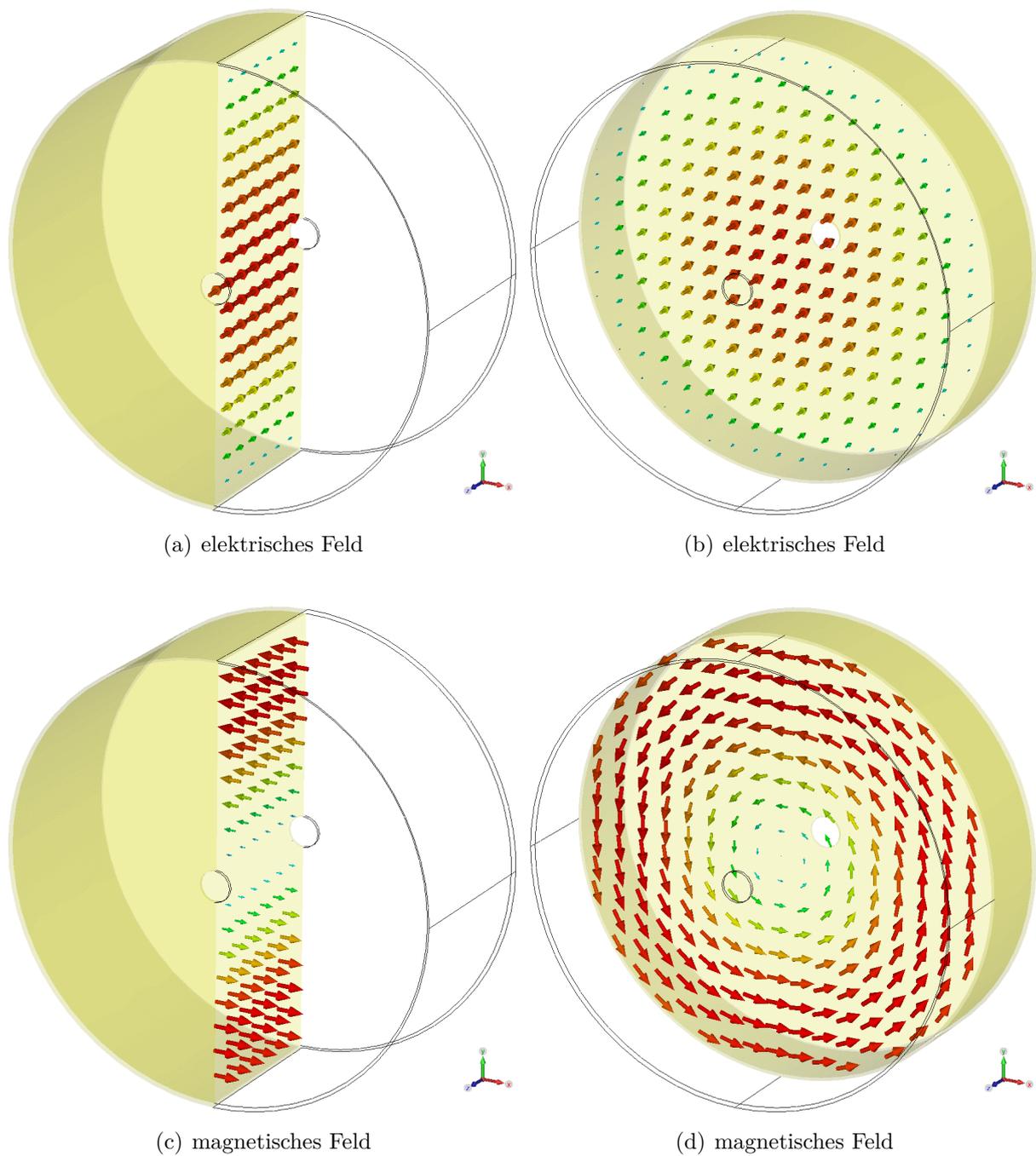
$$\frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} = \alpha \frac{|E_0|^2}{2W} \quad (7.3.8)$$

und

$$\frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} = \beta \frac{|H_0|^2}{2W} \quad (7.3.9)$$

zerlegen.

Zur *Bestimmung der Störkörperkonstanten*  $\alpha$  kann man einen Zylinderresonator, der im  $TM_{010}$ -Mode betrieben wird und in dem die Felder durch die Gleichungen 4.4.6 beschrieben werden, verwenden. Abbildung 7.4 zeigt diese Felder in der Mitte des Resonators in Ebenen senkrecht zur Symmetrieachse. Für die in der  $TM_{010}$ -Mode gespeicherte Energie gilt:



**Abbildung 7.4.:** Felder der  $TM_{010}$ -Mode in der Mitte eines Zylinderresonators in den Ebenen senkrecht zur Strahlrichtung

$$W_{010} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \vec{E}^2 dV.$$

Für die  $TM_{010}$ -Mode gilt nach den Gleichungen 4.4.6  $E_\varphi = 0$ ,  $E_r = 0$  und  $E_z \neq 0$

$$W_{010} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E_0^2 J_0^2 \left( \frac{X_{01}}{R} r \right) dV.$$

Schreibt man das Volumenelement  $dV$  aus, erhält man:

$$W_{010} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^R r E_0^2 J_0^2 \left( \frac{X_{01}}{R} r \right) dr d\varphi dz.$$

Bei [ Abramowitz und Stegun (1970) ] findet man folgenden Zusammenhang für Besselfunktionen:

$$\int_0^Z Y J_0^2(Y) dY = \frac{Z^2}{2} (J_0^2(Z) + J_1^2(Z))$$

Substituiert man  $Y = \frac{X_{01}}{R} r$ , ergibt sich mit  $J_0^2(X_{01}) = 0$ :

$$W_{010} = \frac{1}{2} \pi \epsilon_0 R^2 L J_1^2(X_{01}) E_0^2$$

für die in der  $TM_{010}$ -Mode eines Zylinderresonators gespeicherte Energie.

Setzt man dies in Gleichung 7.3.8 ein, ist zusammen mit  $V = \pi R^2 L$

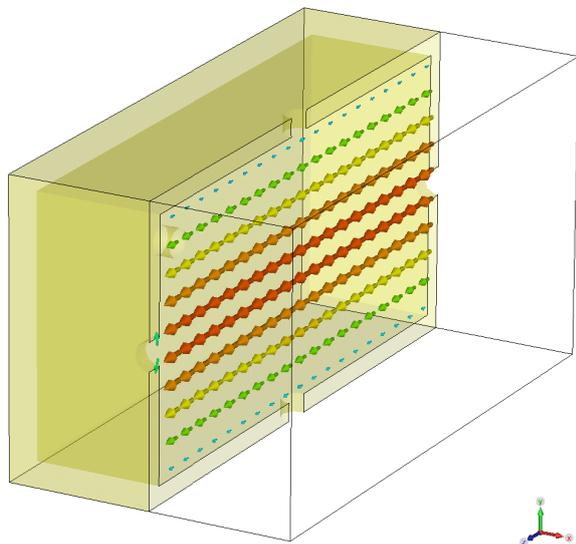
$$\alpha = \frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} \pi \epsilon_0 R^2 L J_1^2(X_{01}) \approx \frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} \frac{\epsilon_0}{4} V \quad (7.3.10)$$

die elektrische Störkörperkonstante.

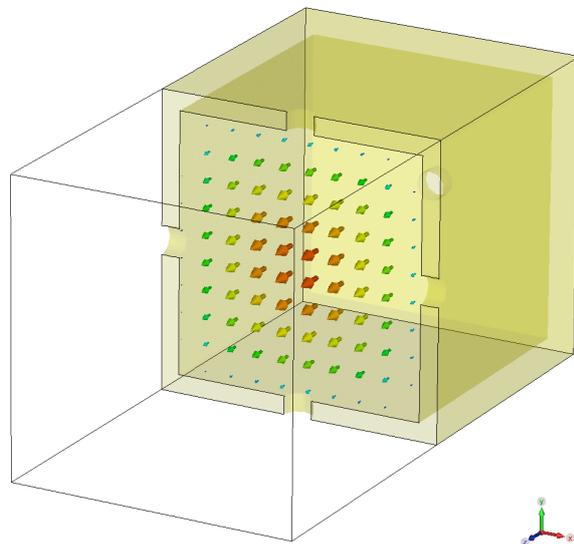
Eine andere Möglichkeit  $\alpha$  zu bestimmen, stellt die  $TM_{110}$ -Mode eines Quaderresonators, wie er in Kapitel 4 vorgestellt wurde, dar. Wie man an Abbildung 7.5 erkennt, ist das elektrische Feld in z-Richtung homogen. Genauso wie für den Zylinderresonator ist

$$W_{110} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \vec{E}^2 dV$$

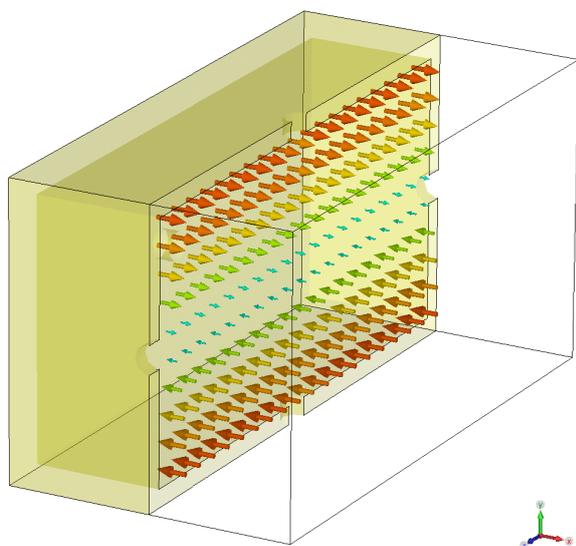
die in der  $TM_{110}$ -Mode eines Quaderresonators gespeicherte Energie. Den Gleichungen 4.3.2 entnimmt man, dass das elektrische Feld der  $TM_{110}$ -Mode nur eine z-Komponente hat. Damit folgt



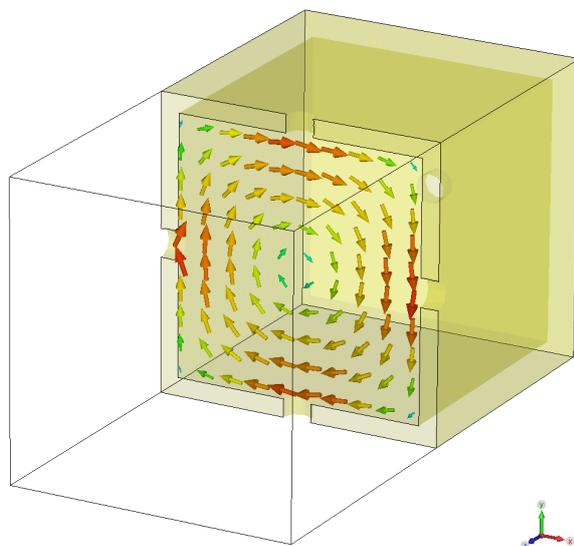
(a) elektrisches Feld



(b) elektrisches Feld



(c) magnetisches Feld



(d) magnetisches Feld

**Abbildung 7.5.:** Felder der  $TM_{110}$ -Mode in der Mitte eines Quaderresonators in den Ebenen senkrecht zur Strahlrichtung

$$\begin{aligned}
W_{110} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \int_V \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) \sin^2 \left( \frac{\pi}{b} y \right) dV \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left[ \frac{x}{2} - \frac{a \sin \left( \frac{2\pi}{a} x \right)}{4\pi} \right]_0^a \left[ \frac{y}{2} - \frac{b \sin \left( \frac{2\pi}{b} y \right)}{4\pi} \right]_0^b [1]_0^d \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} d = \frac{\epsilon_0}{8} E_0^2 V
\end{aligned}$$

für die in der  $TM_{110}$ -Mode gespeicherte Energie. Setzt man dies in Gleichung 7.3.8 ein, ist

$$\alpha = \frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} \frac{\epsilon_0}{4} V \quad (7.3.11)$$

analog zu Gleichung 7.3.10 die elektrische Störkörperkonstante.

Um die Störkörperkonstante  $\beta$  zu bestimmen, wählt man einen Quaderresonator, wie er in Kapitel 4 vorgestellt wurde. Betreibt man diesen im  $TE_{102}$ -Mode oder  $TE_{012}$ -Mode, bildet sich in der Mitte des Resonators ein homogenes Magnetfeld aus, wie es in Abbildung in 7.6 dargestellt ist. Für die in der  $TE_{102}$ -Mode eines Quaderresonators gespeicherte Energie gilt:

$$W_{102} = \frac{1}{2} \mu_0 \int_V \vec{H}^2 dV.$$

Den Gleichungen 4.3.3 entnimmt man, dass das magnetische Feld der  $TE_{102}$ -Mode eine x-Komponente und eine z-Komponente hat.

Setzt man diese ein, findet man

$$\begin{aligned}
W_{102} &= \frac{1}{2} \mu_0 \int_V (H_x^2 + H_z^2) dV \\
&= \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 \int_V \left[ \frac{k_x^2 k_z^2}{k_c^4} \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) \sin^2 \left( \frac{2\pi}{d} z \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) \sin^2 \left( \frac{2\pi}{d} z \right) \right] dV
\end{aligned}$$

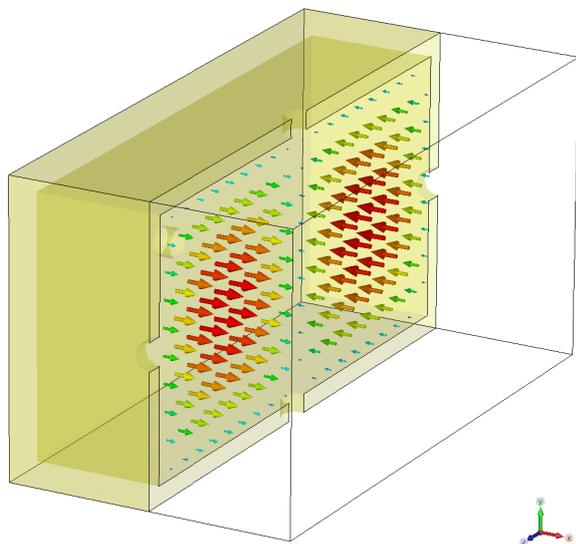
und erhält nach Ausführen der Integration

$$W_{102} = \frac{\mu_0}{8} H_0^2 abd \left[ 1 + \left( \frac{k_x k_z}{k_c^2} \right)^2 \right]$$

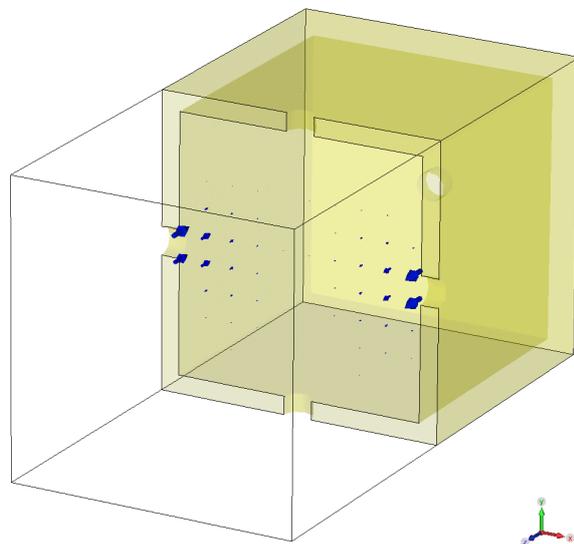
für die in der  $TE_{102}$ -Mode gespeicherte Energie.

Durch Einsetzen der Dispersionsrelation 4.3.4 lässt sich dies zusammen mit  $a \cdot b \cdot d = V$  in

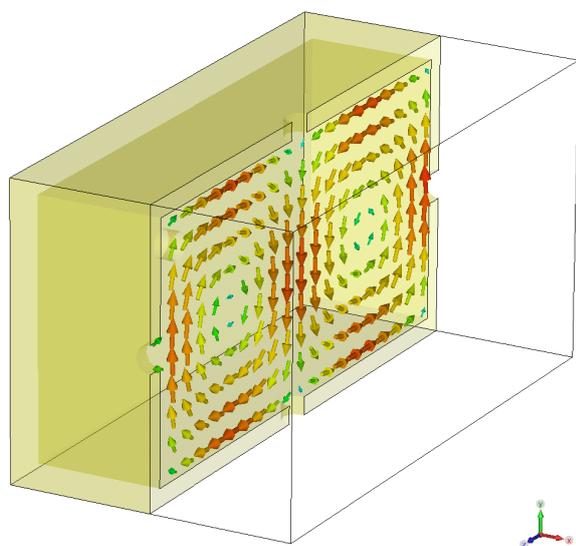
$$W_{102} = \frac{\mu_0}{8} H_0^2 V \left[ 1 + \left( \frac{2a}{d} \right)^2 \right]$$



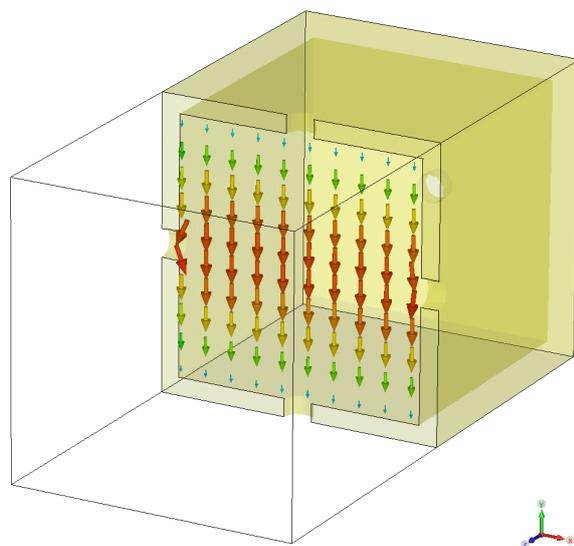
(a) elektrisches Feld



(b) elektrisches Feld



(c) magnetisches Feld



(d) magnetisches Feld

**Abbildung 7.6.:** Felder der  $TE_{012}$ -Mode in der Mitte eines Quaderresonators in den Ebenen senkrecht zur Strahlrichtung

umformen.

Auf die gleiche Weise findet man mit

$$W_{012} = \frac{\mu_0}{8} H_0 V \left[ 1 + \left( \frac{2b}{d} \right)^2 \right]$$

die in der  $TE_{012}$ -Mode gespeicherte Energie.

Setzt man dies in Gleichung 7.3.9 ein, sind

$$\beta_{102} = \frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} \frac{\mu_0}{4} V \left[ 1 + \left( \frac{2a}{d} \right)^2 \right] \quad \text{und} \quad \beta_{012} = \frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} \frac{\mu_0}{4} V \left[ 1 + \left( \frac{2b}{d} \right)^2 \right] \quad (7.3.12)$$

die magnetischen Störkörperkonstanten.

### 7.3.4. Bestimmung der Feldstärken $E_0$ und $H_0$

Setzt man die Güte  $Q$  aus Gleichung 4.5.8 in Gleichung 7.3.6 ein, ergibt sich nach Umformen:

$$\frac{f^2 - f_0^2}{f_0 f} \cdot \frac{Q}{2\pi f} = \frac{\alpha |E_0|^2 + \beta |H_0|^2}{2P}. \quad (7.3.13)$$

Verwendet man einen Störkörper, dessen magnetische Störkörperkonstante  $\beta$  aus Gleichung 7.3.9 null ist, (z.B. Störkörper aus Keramik) oder sind entlang der Strahlachse keine magnetischen Felder vorhanden, kann man mit Gleichung 7.3.13 zusammen mit der elektrischen Störkörperkonstanten  $\alpha$  aus den Gleichungen 7.3.10 oder 7.3.11 den Betrag des elektrischen Felds, normiert auf die Wurzel der Leistung  $P$ , bestimmen.

Sind die durch den Störkörper verursachten Änderungen der Resonanzfrequenz  $f_0$  so klein, dass sie in den Bereich der auf digitalen Messgeräten vorkommenden Diskretisierung fallen, lässt sich die Genauigkeit der Messung durch Messen des Phasenunterschieds  $\varphi$  zwischen der externen Anregung und dem Resonator steigern. Setzt man in Gleichung 7.3.13 Gleichung 4.5.6 ein, findet man zusammen mit der Güte  $Q_0$  aus Gleichung 7.2.2

$$\tan(\varphi) = \left( 1 + \sum_i \kappa_i \right) \omega \frac{\alpha |E_0|^2 + \beta |H_0|^2}{2P}$$

als Phasenunterschied zwischen der externen Anregung und dem Resonator.

Mit  $f \approx f_0$  wird daraus

$$\tan(\varphi) = 2\pi f_0 \left( 1 + \sum_i \kappa_i \right) \frac{\alpha |E_0|^2 + \beta |H_0|^2}{2P}. \quad (7.3.14)$$

Mit  $\beta = 0$  erhält man nach Umformen

$$\frac{|E_0|}{\sqrt{2P}} = \sqrt{\frac{\tan(\varphi)}{2\pi\alpha f_0 \left(1 + \sum_i \kappa_i\right)}} \quad (7.3.15)$$

als Gleichung für den Betrag der elektrischen Feldstärke normiert auf die Quadratwurzel der Leistung.

Materialien zu finden, welche eine elektrische Störkörperkonstante von null und gleichzeitig eine magnetische Störkörperkonstante ungleich null aufweisen, gestaltet sich schwierig.

Eine Möglichkeit, trotzdem die magnetische Feldstärke normiert auf die Quadratwurzel der Leistung bestimmen zu können, besteht darin, zwei Messungen mit Störkörpern gleicher Form und gleichen Volumens aus verschiedenen Materialien und damit verschiedenen Störkörperkonstanten  $\alpha$  und  $\beta$  durchzuführen. Mit diesen beiden Messungen lassen sich die gemessenen Anteile der elektrischen Feldstärke aus Gleichung 7.3.15 durch eine einfache Subtraktion herausrechnen und man erhält

$$\frac{|H_0|}{\sqrt{2P}} = \sqrt{\frac{\frac{\tan(\varphi_1)}{\alpha_1} - \frac{\tan(\varphi_2)}{\alpha_2}}{2\pi f_0 \left(1 + \sum_i \kappa_i\right) \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}} \quad (7.3.16)$$

als Gleichung zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke.

### 7.3.5. Bestimmung der longitudinalen Shuntimpedanz $R_{||}$

Da in der Praxis nur an endlich vielen Stellen gemessen werden kann, überführt man die kontinuierliche Summation (das Integral) in Gleichung 5.3.1 in eine diskrete Summation. Aus der Definition der longitudinalen Shuntimpedanz wird demnach näherungsweise:

$$R_{||} = \frac{\left| \sum_{j=1}^n E_{z,j}(z) e^{ikz} \Delta z \right|^2}{2P}.$$

Zusammen mit der Gleichung für die elektrische Feldstärke 7.3.15 findet man mit

$$R_{||} = \left| \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{\tan(\varphi_j(z))}{2\pi\alpha f_0 \left(1 + \sum_i \kappa_i\right)}} e^{ikz} \Delta z \right|^2. \quad (7.3.17)$$

als Gleichung für die experimentelle Bestimmung der longitudinalen Shuntimpedanz.

### 7.3.6. Bestimmung der transversalen Shuntimpedanz $R_{\perp}$

Ausgehend von Gleichung 5.3.3 bieten sich zwei Möglichkeiten, die transversale Shuntimpedanz zu bestimmen.

Eine Möglichkeit besteht darin, die elektrischen und magnetischen Felder entlang der Strahlachse zu messen und aus diesen die transversale Shuntimpedanz zu berechnen.

Die andere Möglichkeit besteht darin, in verschiedenen Abständen von der Strahlachse die longitudinalen Shuntimpedanz zu messen und daraus den radialen Gradienten der longitudinalen Shuntimpedanz zu bestimmen. Mit der oben vorgestellten Störkörpermessmethode ist man prinzipiell in der Lage, beide Möglichkeiten zu nutzen. Da die erste Methode mit deutlich weniger Messungen auskommt und dadurch ihre Fehleranfälligkeit kleiner ist, wird sie im Folgenden verwendet.

Genau wie bei der Bestimmung der longitudinalen Shuntimpedanz, überführt man die kontinuierliche Summation in Gleichung 5.3.3 in eine diskrete Summation

$$R_{\perp} = \frac{\left| \sum_{j=1}^n \left( \vec{E}_j + ic\vec{B}_j \times \vec{e}_z \right)_{\perp} e^{ikz} \Delta z \right|^2}{2P}.$$

Zusammen mit der Gleichung für die elektrische Feldstärke 7.3.15 und der Gleichung für die magnetische Feldstärke 7.3.16 erhält man

$$R_{\perp} = \left| \sum_{j=1}^n \left( \sqrt{\frac{\tan(\varphi_{1,j})}{2\pi\alpha_1 f_0 \left(1 + \sum_i \kappa_i\right)}} + i\mu_0 c \sqrt{\frac{\frac{\tan(\varphi_{2,j})}{\alpha_2} - \frac{\tan(\varphi_{1,j})}{\alpha_1}}{2\pi f_0 \left(1 + \sum_i \kappa_i\right) \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}} \right) e^{ikz} \Delta z \right|^2 \quad (7.3.18)$$

als Gleichung für die experimentelle Bestimmung der transversalen Shuntimpedanz.

## 8. Messung charakteristischer Größen der $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen

Um die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Messmethoden zur Bestimmung der in Kapitel 4 eingeführten Kenngrößen eines Resonators und zur Bestimmung der in Kapitel 5 definierten transversalen Shuntimpedanz durchführen zu können, wurde ein Störkörpermessstand aufgebaut.

Dieses Kapitel gibt zu nächst einen Überblick über den Aufbau des Störkörpermessstandes und über die für dessen Steuerung nötigen Computerprogramme. Anschließend folgt eine Beschreibung der Vermessung der in Kapitel 6 beschriebenen Deflektorprototypen und eine kurze Darstellung der Messergebnisse. Eine Diskussion dieser Ergebnisse und eine Vergleich mit den Computersimulationen aus Kapitel 6 findet in Kapitel 9 statt.

Die Messungen am ersten Deflektorprototypen fanden bereits im Rahmen der Diplomarbeit [ Ferrarotto (2011) ] statt und sind hier aus Gründen der Vollständigkeit erneut aufgeführt.

Die grundlegenden Arbeiten am Störkörpermessstand und dessen Inbetriebnahme fanden bereits im Rahmen der Diplomarbeit [ Ferrarotto (2011) ] statt. Im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit wurde insbesondere die Software zur Steuerung des Störkörpermessstandes und zur Auswertung der Messergebnisse weiterentwickelt.

### 8.1. Der Störkörpermessstand

Der folgende Abschnitt erläutert den Aufbau und die Steuerung des verwendeten Störkörpermessstandes

#### 8.1.1. Aufbau des Störkörpermessstands

Im Folgenden werden die wesentlichen Komponenten des in Abbildung 8.1 gezeigten Störkörpermessstandes kurz vorgestellt:

Es wird eine *Lineareinheit* der Firma [ ISEL ] mit einem Fahrweg von etwa 60 cm verwendet um den Resonator präzise schrittweise bewegen zu können. Die Lineareinheit ist mit einem Schrittmotor ausgestattet, der im Vollschrittbetrieb die Platte der Lineareinheit um eine Strecke von  $25\ \mu\text{m}$  pro Schritt verschiebt.

Um die Lineareinheit zu steuern, wird ein Input-Output-Controller der Firma [ ENZ ] verwendet. Dieser stellt die von der Lineareinheit benötigte elektrische Leistung zur Verfügung und übermittelt die Steuersignale. Die Steuerung ist auf Halbschrittbetrieb eingestellt.

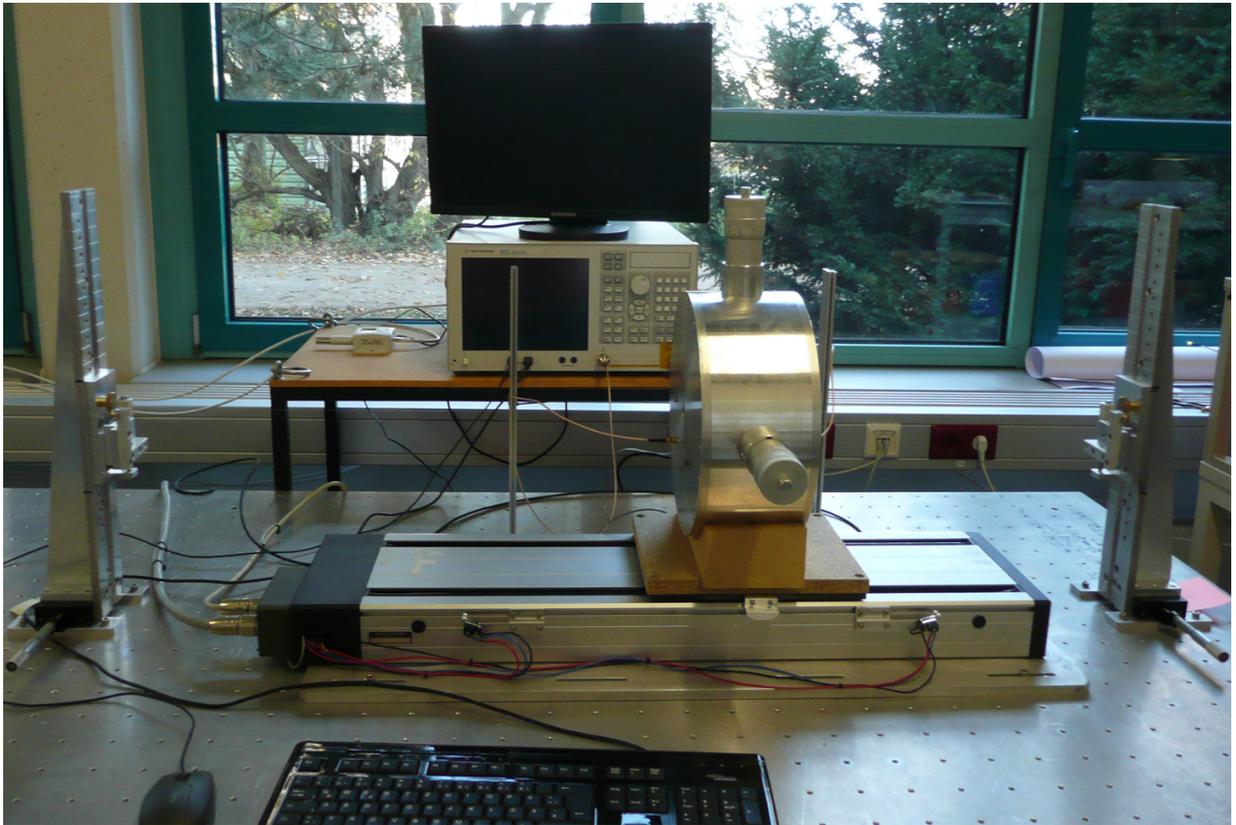


Abbildung 8.1.: Strörkörpermessstand mit Defektorprototyp

Das bedeutet ein Schritt der Motorsteuerung entspricht einem halben Schritt der Lineareinheit. Somit ist es möglich den Resonator mit der Lineareinheit in  $12,5\ \mu\text{m}$ -Schritten zu bewegen. Weiterhin stellt der Input-Output-Controller eine LAN-Anbindung in Form von EPICS-Records [ EPICS ] zur Verfügung, die eine Computersteuerung ermöglichen. Ein *vektorieller Netzwerkanalysator* (VNA) ist in der Lage, die in Kapitel 7 eingeführten

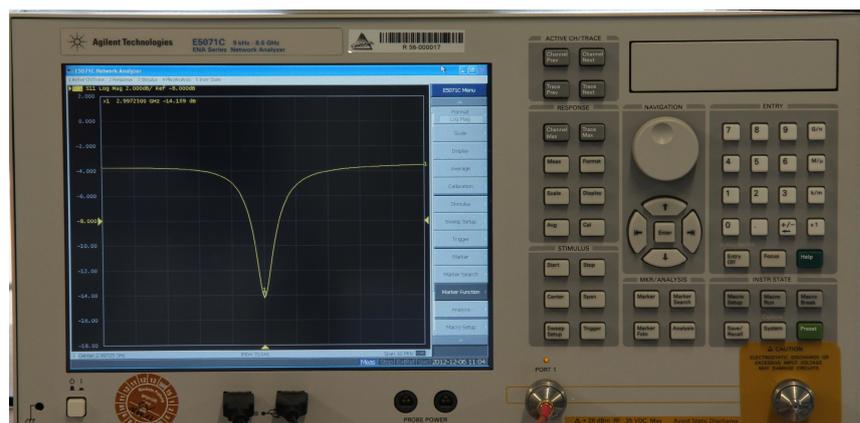
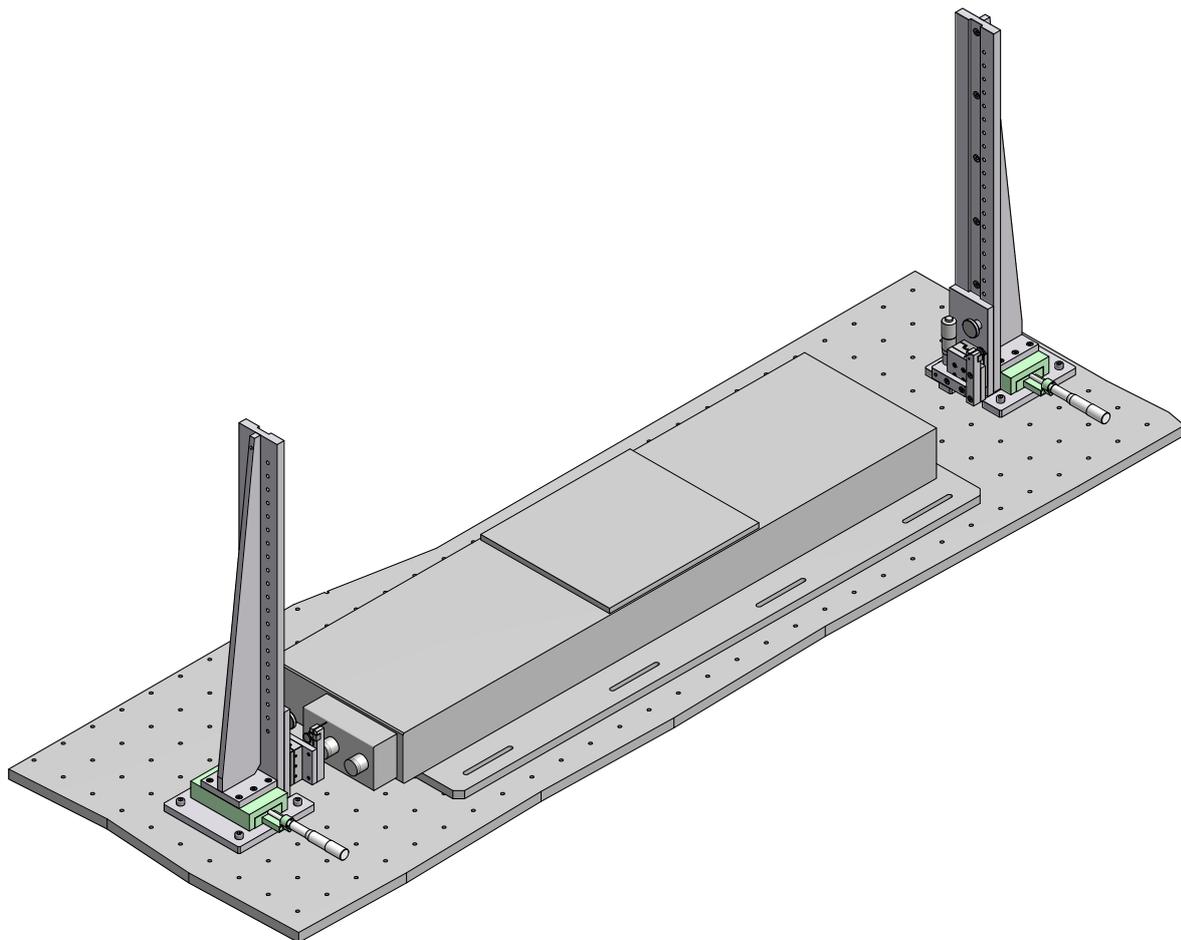


Abbildung 8.2.: Agilent E5071C Netzwerkanalysator

S-Parameter zu messen, also auf den Leitungen die Spannungen der hin- und rücklaufenden Wellen unabhängig voneinander zu messen. Der VNA trennt dazu die Signale mit Richtkopplern in die einzelnen Wellen auf. Der VNA verfügt über einen Wobbelgenerator als Signalquelle sowie eine Vierpolmessbrücke, die es erlaubt, das Quellensignal auf Port 1 oder Port 2 zu geben und jeweils die Reflexion und Transmission zu messen. Der hier

verwendete, in Abbildung 8.2 gezeigte Agilent E5071C Netzwerkanalysator ist also in der Lage, die S-Parameter nach Betrag und Phase zu messen.

Die Störkörper werden auf Nylonfäden befestigt, welche dann in die auf Abbildung 8.3 gezeigte Fadenhalterung gespannt werden. Durch Mikrometerschrauben in der Fadenhalterung ist es möglich den Nylonfaden mit dem Störkörper in beiden transversalen Ebenen auf  $10\ \mu\text{m}$  genau zu positionieren. Zur Bestimmung der Temperatur, der Luftfeuchtigkeit



**Abbildung 8.3.:** Computergrafik der Fadenhalterungen und der Lineareinheit

und des Luftdrucks im Labor, wird das in Abbildung 8.4 gezeigte *T7510-Thermometer-Hygrometer-Barometer* der Firma [ COMET ] verwendet. Das T7510 verfügt über eine LAN-Schnittstelle, die es ermöglicht die Messwerte digital auszulesen. Ein *Computer* dient dazu den Ablauf der Messung zu steuern und die Messwerte aufzuzeichnen. Auf die hierzu nötigen Computerprogramme wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen.



Abbildung 8.4.: Comet T7510-Thermometer-Hygrometer-Barometer

### 8.1.2. Steuerung des Störkörpermessstandes

Der Netzwerkanalysator, der Input-Output-Controller und das Thermometer-Hygrometer-Barometer sind über LAN mit dem Computer verbunden. Zur Steuerung des Input-Output-Controllers wird EPICS in der Version 3.14.12.2 verwendet. Zur Steuerung des Agilent E5071C Netzwerkanalysator und zum Auslesen der Messwerte wird die Agilent IO Libraries Suite in der Version 16.1 verwendet.

Sowohl EPICS, als auch die Agilent IO Libraries Suite, verfügen über Programmbibliotheken, die die Anwendungsentwicklung mit C/C++ und C# ermöglichen.

Zur graphischen Darstellung der Messwerte wird Gnuplot in der Version 4.6.5 verwendet. Es wurden Programme geschrieben, die zur

- Steuerung der Lineareinheit
- Bestimmung der Resonanzfrequenz  $f_0$  und Güte  $Q_0$  einer Mode
- Bestimmung der Störkörperkonstanten
- Bestimmung des Phasenunterschieds  $\varphi$  zwischen der externen Anregung durch den VNA und dem Resonator

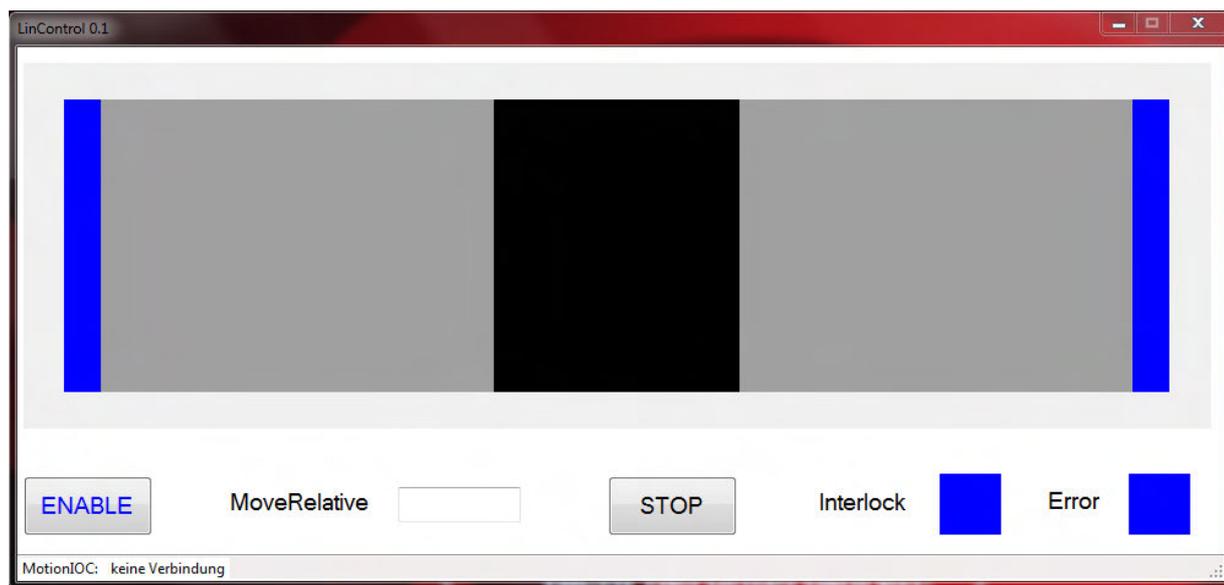
dienen.

Weil der Quelltext dieser Programme zu umfangreich ist, um ihn hier abzdrukken und das Messverfahren selbst bereits in Kapitel 7 ausführlich erläutert wurde, soll hier eine

kurze Beschreibung ausreichen.

Bei Programmstart legen alle Programme Dateien an, welche die Bildschirmausgaben, die Eingaben des Benutzers und die gemessenen Werte protokollieren. Die Programme stellen Netzwerkverbindungen zum Input-Output-Controller der Lineareinheit zum VNA und zum Thermometer-Hygrometer-Barometerher her, um Steuerbefehle zu übermitteln und Messwerte auszulesen.

In den Programmen zur Steuerung der Lineareinheit und zur Bestimmung der Störkörperkonstanten stehen die in den Abbildungen 8.5 und 8.6 gezeigten grafischen Benutzeroberflächen zur Verfügung. Das Programm zur Bestimmung der Resonanzfrequenzen benötigt



**Abbildung 8.5.:** Grafische Benutzeroberfläche des Programms zur Steuerung der in Abbildung 8.1 gezeigten Lineareinheit.

nur sehr wenige Benutzereingaben und wurde daher aus Effizienzgründen als Konsolenprogramm geschrieben. Das Programm zur Messung des Phasenunterschieds ist das eigentliche Störkörpermessprogramm. Es setzt das in Kapitel 7 beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Feldstärken im Inneneren eines Hohlraumresonators um. Es ist aus Effizienz- und aus Timinggründen als Konsolenprogramm geschrieben

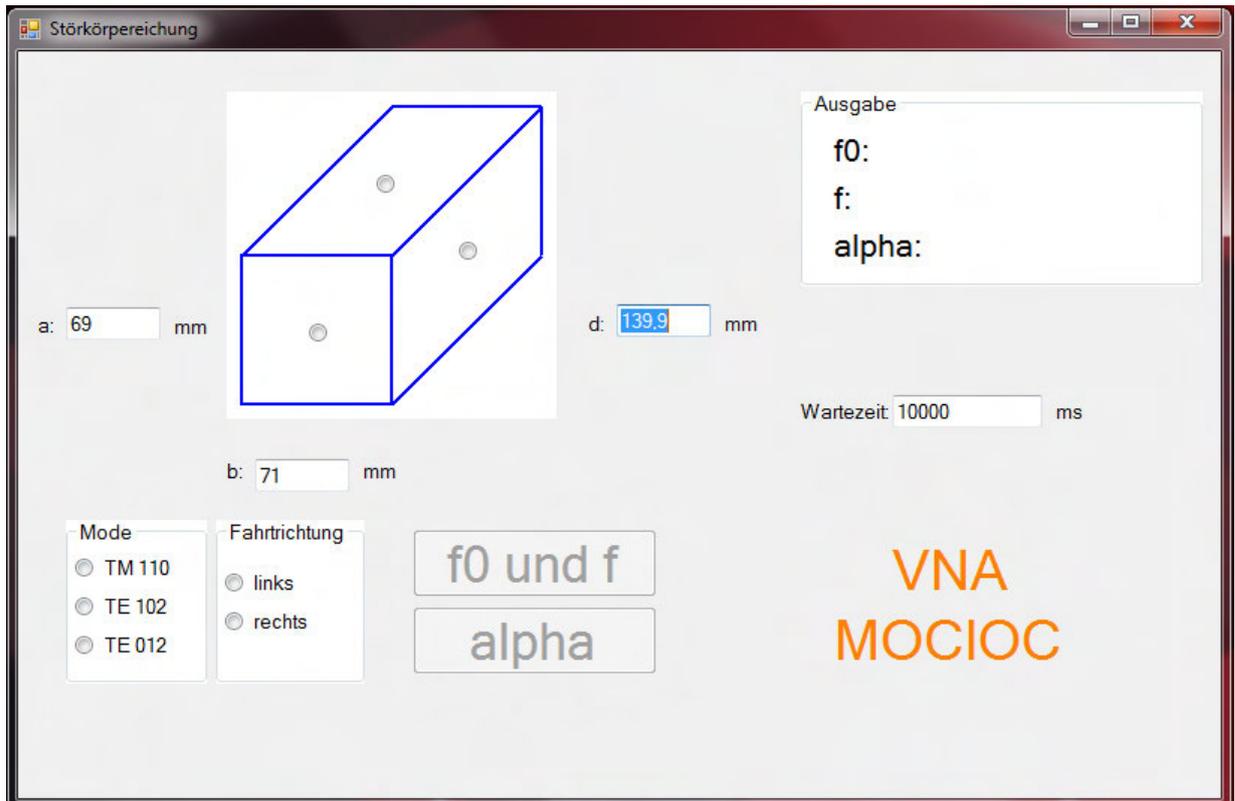
Bis auf das Programm zur Steuerung der Lineareinheit verwenden alle anderen Programme zuvor auf dem VNA abgespeicherte Dateien, welche die Einstellungen und die Kalibration des VNA enthalten.

Das Programm zur Bestimmung der Resonanzfrequenz und Güte kann diese für unterschiedliche Stempelinstellungen messen und mit Hilfe von Gnuplot eine graphische Darstellung hiervon erstellen.

Das Programm zur Bestimmung des Phasenunterschieds  $\varphi$  zwischen der externen Anregung und dem Resonator erstellt mit Hilfe von Gnuplot eine graphische Darstellung des Phasenunterschieds in Abhängigkeit von der Position des Störkörpers.

Um die Auswertung der mit den oben genannten Messprogrammen gewonnenen Ergebnissen zu vereinfachen, wurde ein weiteres Programm geschrieben, welches aus dem Aus-

gabedateien der Messprogramme, auf die in Kapitel 7 vorgestellte Weise, die transversale Shuntimpedanz berechnet.



**Abbildung 8.6.:** Grafische Benutzeroberfläche des Programms zur Messung der Störkörperkonstanten unter Verwendung eines Quaderresonators.

## 8.2. Messung der Resonanzfrequenzen und der Güten

Dieses Kapitel beschreibt die Messung der Resonanzfrequenzen und Güten, der in Kapitel 6 beschriebenen  $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen mit dem im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Störkörpermessstand. Die folgende Darstellung der Ergebnisse beschränkt sich auf kurze Erläuterungen. Eine Diskussion der Ergebnisse findet in Kapitel 9 statt.

Wie bereits in Kapitel 7 erläutert, lässt sich die Bestimmung der Resonanzfrequenzen und Güten der einzelnen Moden eines Resonators auf Messungen von S-Parametern zurückführen. Diese Messungen lassen sich mit dem zum Störkörpermessstand gehörenden Netzwerkanalysator durchführen.

### 8.2.1. Messungen am ersten Deflektorprototyp

Misst man bei vollständig herausgefahrenen Stempeln die Resonanzfrequenzen der  $TM_{110}$ -Mode stellt man fest, dass diese, anders als in den Computersimulationen, *nicht* entartet sind. Die eine Polarisation, die im folgenden  $TM_{110a}$  genannt wird, hat ihre Resonanzfrequenz bei  $f_{0,a} = 1,3064$  GHz, die andere, die im Folgenden  $TM_{110b}$  genannt wird, hat ihre Resonanzfrequenz bei  $f_{0,b} = 1,3077$  GHz.

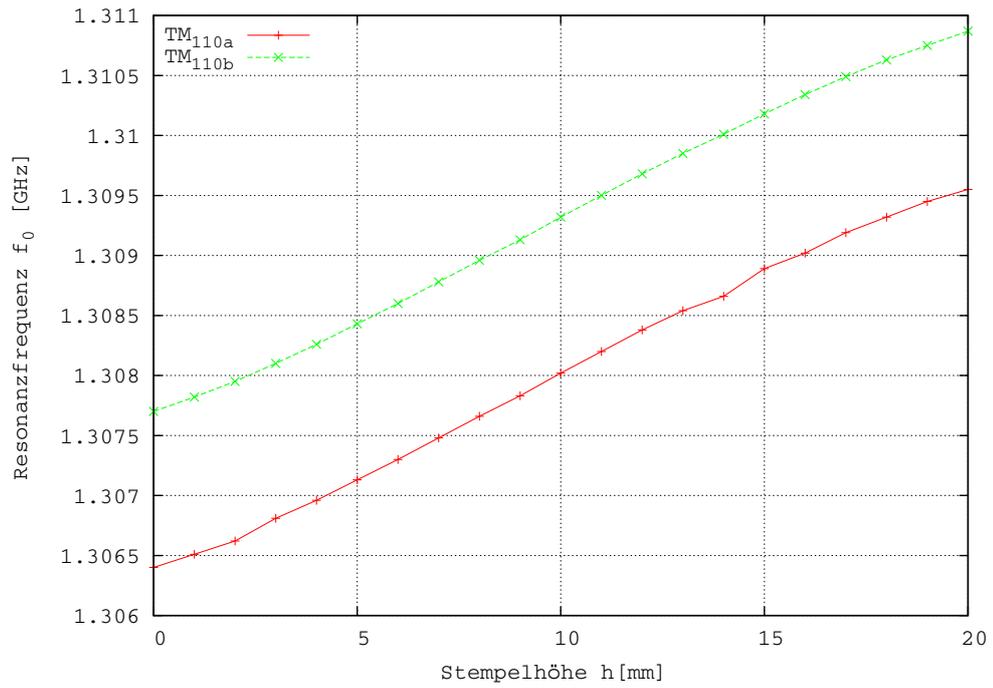
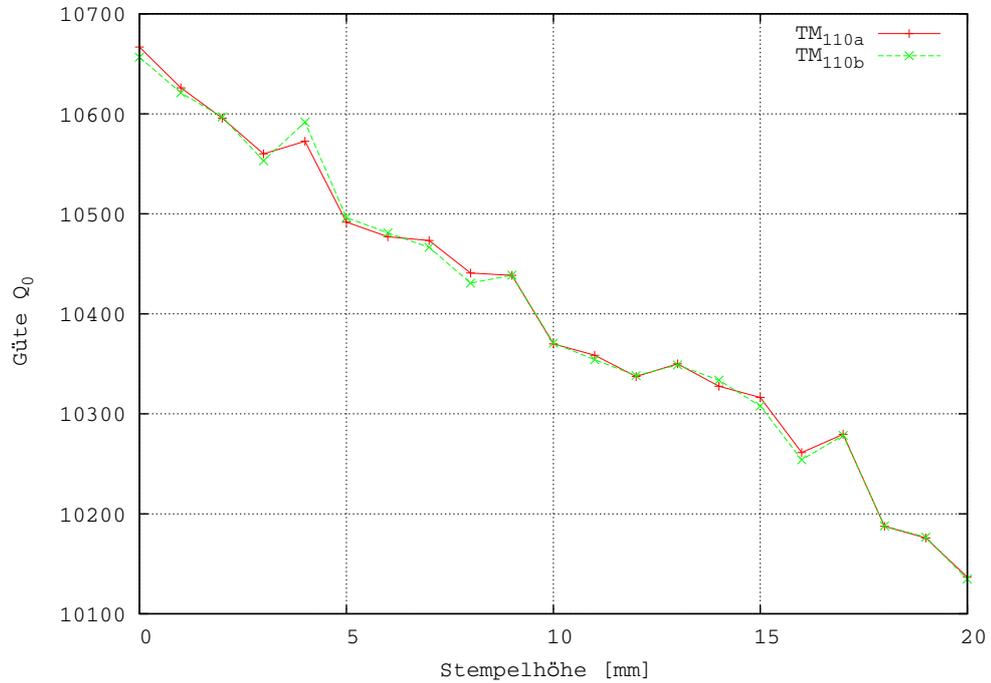
Im folgenden ist Stempel a derjenige, der die  $TM_{110a}$ -Mode stärker beeinflusst als die  $TM_{110b}$ -Mode und Stempel b derjenige, der die  $TM_{110b}$ -Mode stärker beeinflusst als die  $TM_{110a}$ -Mode.

Ist Stempel b ganz herausgefahren ( $h_b = 0$ ), erhält man für die  $TM_{110a}$ -Mode in Abhängigkeit der Höhe von Stempel a ( $h_a$ ) die in Abbildung 8.7(a) dargestellten Werte für die Frequenzänderung und die in Abbildung 8.7(b) dargestellten Werte für die Änderung der Güte.

Ist Stempel a ganz herausgefahren ( $h_a = 0$ ), erhält man für die  $TM_{110b}$ -Mode in Abhängigkeit der Höhe von Stempel b ( $h_b$ ) die in Abbildung 8.7(a) dargestellten Werte für die Frequenzänderung und die in Abbildung 8.7(b) dargestellten Werte für die Änderung der Güte.

Wie von der Theorie und den Simulationen vorhergesagt, erhält man für die Frequenzänderungen einen (nahezu linear) wachsenden Trend und für die Änderungen der Güte einen abnehmenden Trend in Abhängigkeit der Stempelhöhe.

Diese Messungen wurden bei Umgebungstemperaturen zwischen  $22,4^\circ\text{C}$  und  $22,7^\circ\text{C}$  und Luftdrücken zwischen 1014 hPa und 1016 hPa durchgeführt.

(a) Resonanzfrequenz  $f_0$ (b) Güte  $Q$ 

**Abbildung 8.7.:** Mit dem Netzwerkanalysator gemessene Resonanzfrequenz  $f_0$  und Güte  $Q$  des ersten Defektorprototyp in Abhängigkeit von der Stempelhöhe  $h$ .

### 8.2.2. Messungen am zweiten Deflektorprototyp

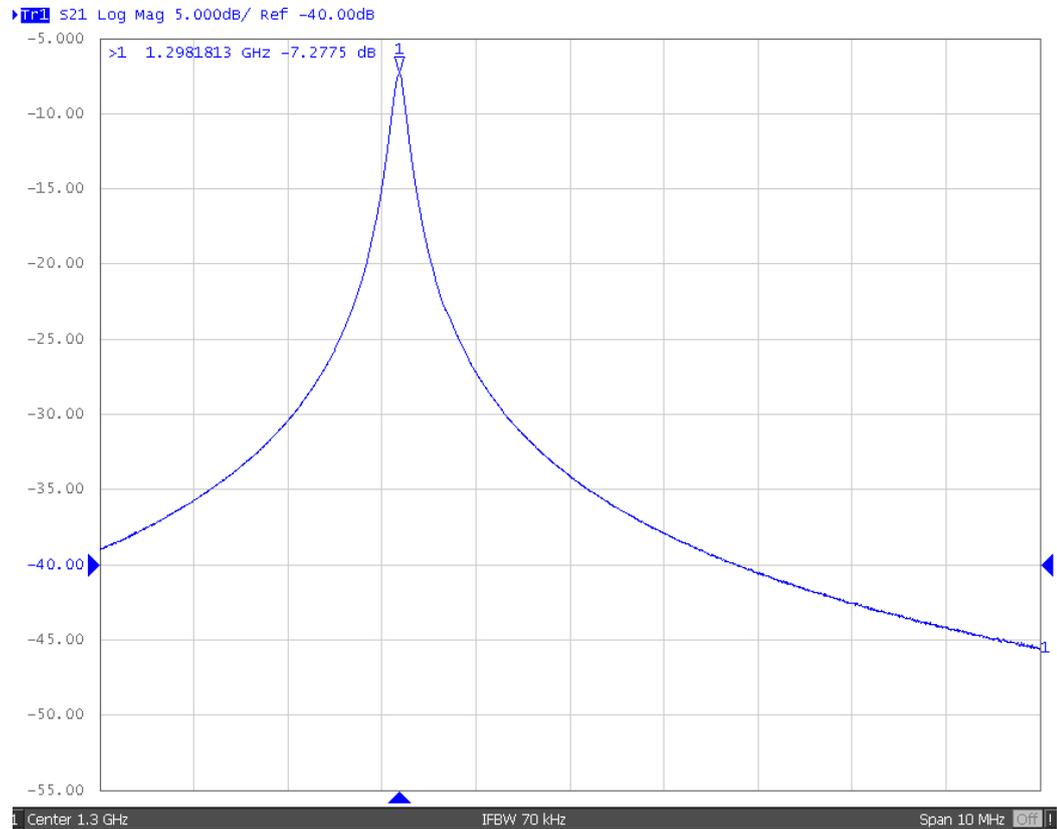
Abbildung 8.8(a) zeigt das Transmissionsverhalten ( $S_{21}$ ) des zweiten Prototyp bei vollständig herausgefahrenen Stempeln. Wie von der Theorie vorhergesagt, entspricht diese Breit-Wigner Kurve dem Transmissionsverhalten von elektrischen Schwingkreisen. Wie man dieser Abbildung entnimmt, sind die beiden Polarisierungen der  $TM_{110}$ -Mode entartet und ihre Resonanzfrequenz liegt bei  $f_0 \approx 1,298$  GHz.

Fährt man einen der beiden Stempel 10 mm in den Resonator, misst man die in Abbildung 8.8(b) gezeigte Transmissionskurve. Wie man an dieser Transmissionskurve erkennt ist die Entartung der beiden Polarisierungen aufgehoben. Die beiden Polarisierungen  $TM_{110a}$  und  $TM_{110b}$  der  $TM_{110}$ -Mode haben ihre Resonanzfrequenzen bei  $f_{0,a} \approx 1,298$  GHz und  $f_{0,b} \approx 1,3$  GHz. Wie von der Theorie und den Simulationen vorhergesagt, hat sich die Resonanzfrequenz der einen Polarisierung nicht geändert, während die sich Resonanzfrequenz der anderen Polarisierung um mehrere MHz verschoben hat.

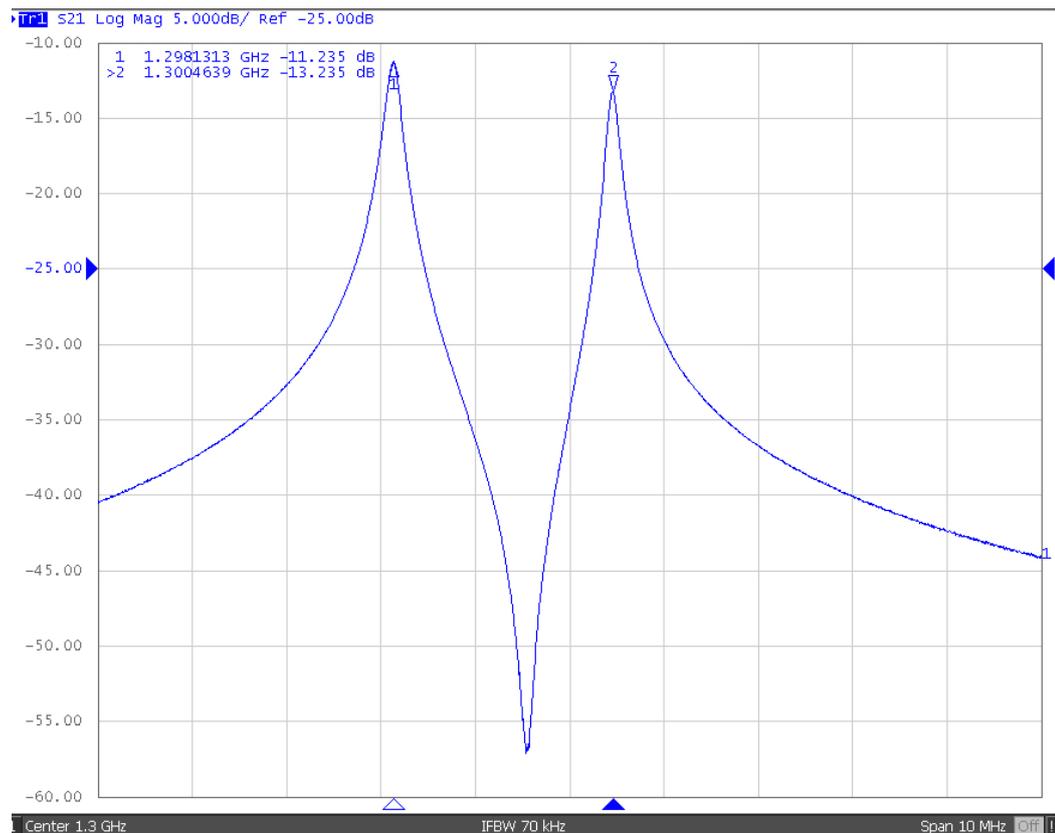
Abbildung 8.9(a) zeigt die Änderungen in der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit der Stempelhöhe. Zu Beginn der Messung sind beide Stempel vollständig herausgefahren. Einer der beiden Stempel bleibt während des gesamten Messvorgangs vollständig, herausgefahren während der andere in 0,5 mm Schritten in den Resonator hineingefahren wird. Ab einer Eindringtiefe von 2,5 mm haben sich die Resonanzfrequenzen der beiden Polarisierungen soweit voneinander getrennt, dass eine zuverlässige Messung der einzelnen Resonanzfrequenzen der beiden Polarisierungen möglich wurde. Wie von der Theorie und den Simulationen vorhergesagt und wie schon bei den Messungen am ersten Prototyp, zeigt sich ein linear wachsender Trend. Die Abweichung von diesem Trend im unteren Teil der Kurve lassen sich damit erklären, dass aufgrund des geringen Abstands der Resonanzfrequenzen der beiden Polarisierungen sich Teile der Transmissionskurven überlagerten und ein Energieaustausch zwischen den beiden Eigenschwingungen möglich war.

Abbildung 8.9(b) zeigt die Änderungen in der Güte einer der beiden Polarisierungen in Abhängigkeit der Stempelhöhe. Um sicher zu stellen, dass die beiden Polarisierungen in ihrer Resonanzfrequenz soweit voneinander getrennt sind, dass ein Energieübertrag zwischen den beiden Eigenschwingungen nicht möglich ist, wurde zu Beginn der Messung einer der Stempel auf eine Eindringtiefe von 30 mm gestellt. Der Andere Stempel wurde in 0,5 mm Schritten in der Resonator gefahren. Wie von der Theorie und den Simulationen vorhergesagt und wie schon bei den Messungen am ersten Prototyp zeigt sich ein abnehmender nahezu linearer Trend.

Diese Messungen wurden bei Umgebungstemperaturen zwischen  $20,1^\circ\text{C}$  und  $20,3^\circ\text{C}$  und Luftdrücken zwischen 1020 hPa und 1021 hPa durchgeführt.

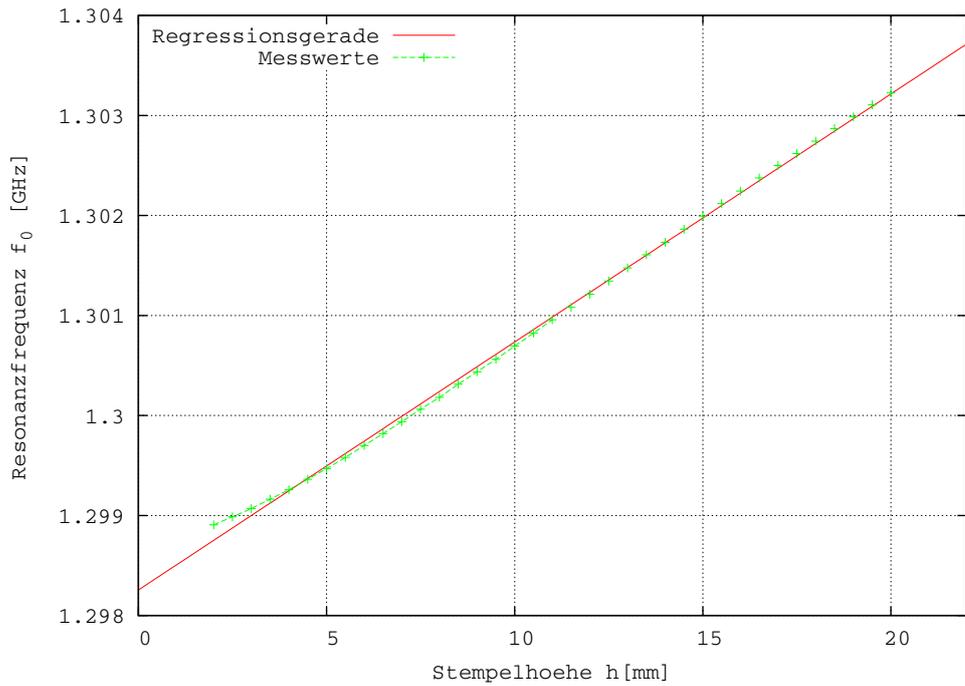
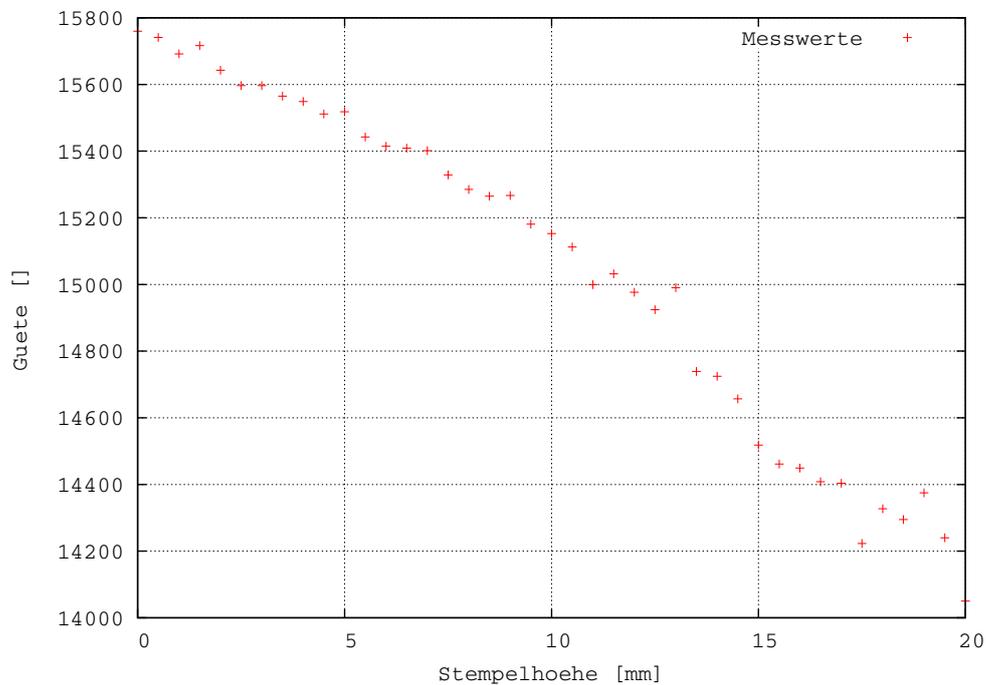


(a) Beide Stempel sind vollständig herausgefahrenen.



(b) Einer der Stempel ist vollständig herausgefahren. Der andere Stempel ist 10 mm in den Resonator hineingefahren.

**Abbildung 8.8.:** Mit dem Netzwerkanalysator gemessene Transmissionskurve ( $S_{21}$ ) des zweiten Deflektorprototyp.

(a) Resonanzfrequenz  $f_0$ (b) Güte  $Q$ 

**Abbildung 8.9.:** Mit dem Netzwerkanalysator gemessene Resonanzfrequenz  $f_0$  und Güte  $Q$  des zweiten Deflektorprototypen in Abhängigkeit von der Stempelhöhe  $h$ .

### 8.3. Auswahl der Störkörper und Messung der Störkörperkonstanten

Für die nachfolgenden Störkörpermessungen ist es erforderlich, die Störkörperkonstanten der verwendeten Störkörper zu bestimmen.

Der folgende Abschnitt beschreibt die Messung dieser Konstanten auf Grundlage der in Kapitel 7 vorgestellten Theorie, unter Verwendung eines Quaderresonators mit dem oben vorgestellten Störkörpermessstand.

Es werden Störkörper aus Aluminiumoxid und Edelstahl in verschiedenen Formen verwendet. Aluminiumoxid ist eine Keramik mit einer relativen Permittivitätszahl von  $\epsilon_r = 9,8$  und einer relativen Permeabilitätszahl von  $\mu_r \approx 1$ .

Als Störkörperform werden zwei Zylinder mit unterschiedlichen Verhältnissen von Länge  $L$  zu Radius  $R$  und ein Kugel verwendet. Wobei die Kugel als Referenz dient. Die Abmessungen der verwendeten Störkörper sind in Tabelle 8.1 zusammengefasst.

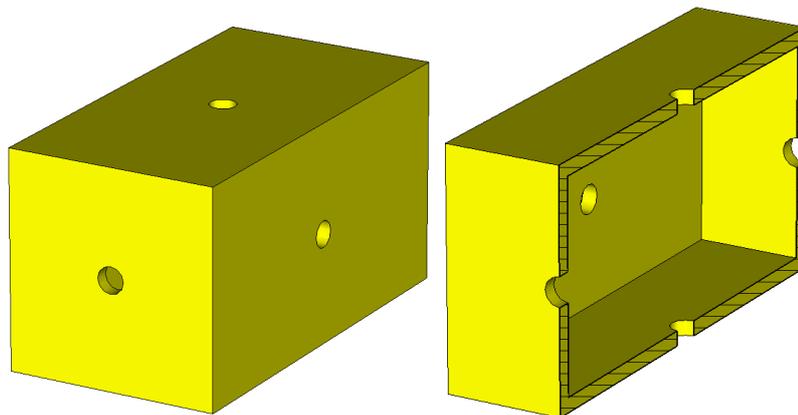
	$R [mm]$	$r [mm]$	$L [mm]$
Aluminiumoxid Kugel	3,0	0,8	-
Aluminiumoxid Zylinder	0,5	0,2	3,0
Aluminiumoxid Scheibe	3,0	0,8	0,5
Edelstahl Zylinder	0,5	0,2	3,0
Edelstahl Scheibe	3,0	0,8	0,5

**Tabelle 8.1.:** Abmessungen der Störkörper, Außenradius  $R$ , Lochradius  $r$  und Länge  $L$

Sowohl in der Kugel als auch in den Zylindern befindet sich ein Loch, durch das ein dünner Nylonfaden gespannt wird. Dieses Loch legt zusammen mit dem Faden die longitudinale Richtung fest. Da die Störkörper nicht isotrop sind, hängen die Störkörperkonstanten von ihrer Orientierung im elektrischen und magnetischen Feld ab. Es werden daher elektrische und magnetische Störkörperkonstanten parallel und senkrecht zur Feldrichtung gemessen. Wie in Kapitel 7 beschrieben, lassen sich zur Bestimmung der Störkörperkonstanten Zylinder- und Quaderresonatoren verwenden. Um die Messungen der Störkörperkonstanten durchzuführen, wird der in Abbildung 8.10 dargestellte Quaderresonator aus Aluminium verwendet. Dieser hat eine Länge von 69 mm, eine Breite von 71 mm, eine Tiefe von 140 mm und in der Mitte jeder Seitenfläche ein kreisförmiges Loch mit einem Radius von 4 mm. Die Resonanzfrequenzen dieses Resonators lassen sich näherungsweise mit Gleichung 4.3.4 berechnen. Hierbei ist zu beachten, dass die theoretischen Werte von den gemessenen abweichen werden, da die Gleichungen aus Kapitel 4 nur für Resonatoren ohne Löcher und ohne Einkopplung die korrekten Resonanzfrequenzen liefern.

Zur Messung der elektrischen Störkörperkonstanten  $\alpha_{\parallel}$  und  $\alpha_{\perp}$  kann man, wie in Kapitel 7 beschrieben, die  $TM_{110}$ -Mode eines Quaderresonators verwenden.

Zur Messung der magnetischen Störkörperkonstanten  $\beta_{\parallel}$  und  $\beta_{\perp}$  kann, wie in Kapitel 7 beschrieben, entweder die  $TE_{012}$ -Mode oder die  $TE_{102}$ -Mode eines Quaderresonators verwendet werden.



**Abbildung 8.10.:** Quaderresonator für die Störkörperreichung

Mit dem Störkörpermessstand lässt sich die Resonanzfrequenz des Resonators ohne Störkörper ( $\omega_0$ ) und die Resonanzfrequenz des Resonators mit eingefahrenem Störkörper ( $\omega$ ) bestimmen. Um die Einflüsse dieses Nylonfadens zu berücksichtigen, wird die Messung von  $\omega_0$  mit eingespanntem Nylonfaden durchgeführt.

Führt man die Messungen von ( $\omega_0$ ) und ( $\omega$ ) für die später verwendeten Störkörper durch, erhält man die in Tabelle 8.2 zusammengefassten Ergebnisse:

	$\alpha_{\parallel}$	$10^{-20} \frac{Asm^2}{V}$	$\alpha_{\perp}$	$10^{-20} \frac{Asm^2}{V}$	$\beta_{\parallel}$	$10^{-16} \frac{Vsm^2}{A}$	$\beta_{\perp}$	$10^{-16} \frac{Vsm^2}{A}$
Aluminiumoxid Kugel		-26,14		-25,91		0		0
Aluminiumoxid Zylinder		-3,08		-1,72		0		0
Aluminiumoxid Scheibe		-3,98		-11,93		0		0
Edelstahl Zylinder		-13,43		-1,09		4,74		7,38
Edelstahl Scheibe		-5,91		-36,26		138,41		34,16

**Tabelle 8.2.:** Störkörperkonstanten

Berechnet man mit Gleichung 7.3.7 die elektrische Störkörperkonstante einer homogenen Aluminiumoxidkugel mit dem in Tabelle 8.1 genannten Radius, erhält man  $\alpha \approx -28 \cdot 10^{-20} \frac{Asm^2}{V}$ . Dieses Ergebnis zeigt, dass die gemessenen Werte für die Aluminiumoxidkugel in der zu erwartenden Größenordnung liegen. Die Abweichung des gemessenen Wertes vom Theoriewert lässt sich damit erklären, dass sich in der vermessenen Kugel ein Loch für den Nylonfaden befindet. Die unterschiedlichen longitudinalen und transversalen Störkörperkonstanten lassen sich ebenfalls mit diesem Symmetriebruch erklären.

Die Wahl der Form und der Größe der Störkörper stellt einen Kompromiss aus Richtungsabhängigkeit (Selektivität), Ortsauflösung und Stärke der Verstimmung des Resonators dar. Größere Störkörper verursachen eine größere Verstimmung und damit deutlicher zu messende Signale für den Netzwerkanalysator. Durch größere Störkörper sinkt allerdings die Ortsauflösung der Messung. Die Selektivität, das Verhältnis von longitudinaler zu transversaler Störkörperkonstante, hängt vom Verhältnis der longitudinalen und transversalen Ausdehnungen ab. Umso größer dieses Verhältnis wird, umso größer wird die Wirkung der Störkörper auf longitudinale Felder im Vergleich zur Wirkung auf transversale Felder

und umgekehrt. Aufgrund der Simulationsergebnisse aus Kapitel 6 erwartet man bei den Messungen entlang der Strahlachse hauptsächlich transversale elektrische und transversale magnetische Felder. Weiterhin geht aus den Simulationen hervor, dass diese Felder einen großen radialen Gradienten aufweisen. Je größer die radiale Ausdehnung der Störkörper wird, je ungenauer wird, aufgrund des großen radialen Gradienten, die Messung der Feldstärken entlang der Strahlachse. Andererseits muss das Volumen der Störkörper groß genug sein, um den Resonator für eine zuverlässige Messung ausreichend zu verstimmen.

Für das in Kapitel 7 vorgestellte Messverfahren, sind Messungen der transversalen Feldstärken erforderlich. Daher sollte die Wirkung der Störkörper auf transversale Felder möglichst groß sein.

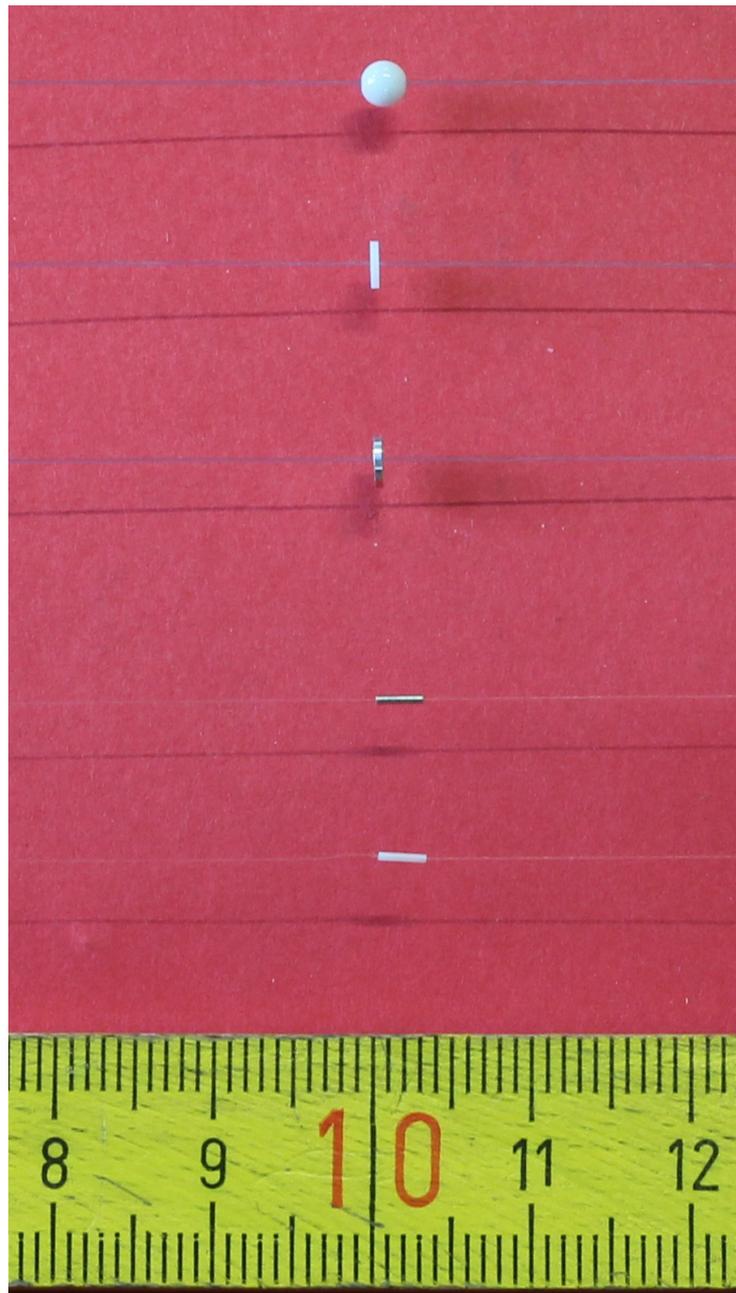


Abbildung 8.11.: Auf Nylonfäden gespannte Störkörper

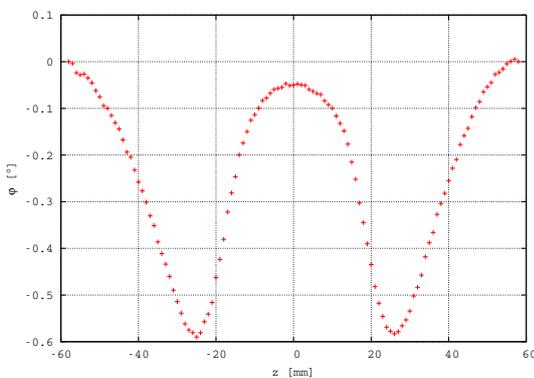
## 8.4. Störkörpermessungen

Zur Bestimmung der transversalen Shuntimpedanz der beiden  $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen wird die in Kapitel 7 vorgestellte Störkörpermethode mit den im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Störkörpern verwendet

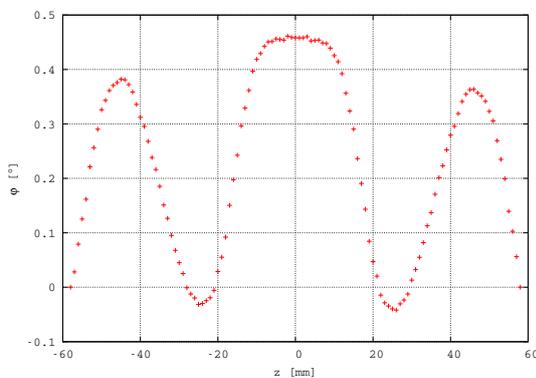
### 8.4.1. Messungen am ersten Deflektorprototyp

Führt das in Kapitel 7 vorgestellte Messverfahren entlang der geometrischen Symmetrieachse des ersten Prototypen mit dem Störkörpermessstand durch, misst man mit dem Störkörper aus Aluminiumoxid die in Abbildung 8.12(a) dargestellten Phasenunterschiede und mit dem Störkörper aus Edelstahl die in Abbildung 8.12(b) dargestellten Phasenunterschiede in Abhängigkeit der Störkörperposition  $z$ . Mit den Gleichungen 7.3.15 und 7.3.16 sowie den Störkörperkonstanten aus Tabelle 8.2 lassen sich aus diesen Phasenunterschieden die auf die Quadratwurzel der doppelten Leistung normierten Beträge der elektrischen und magnetischen Feldstärke bestimmen. Abbildung 8.13 zeigt eine graphische Darstellung dieser normierten Feldstärken. Aus diesen, auf die auf die Quadratwurzel der doppelten Leistung normierten Beträgen der Feldstärken, berechnet man mit Gleichung 7.3.18 eine transversale Shuntimpedanz von  $R_{\perp}=1,25\text{ M}\Omega$ .

Diese Messungen wurden bei Umgebungstemperaturen zwischen  $20,4^{\circ}\text{C}$  und  $20,5^{\circ}\text{C}$  und Luftdrücken zwischen  $1018\text{ hPa}$  und  $1022\text{ hPa}$  durchgeführt.

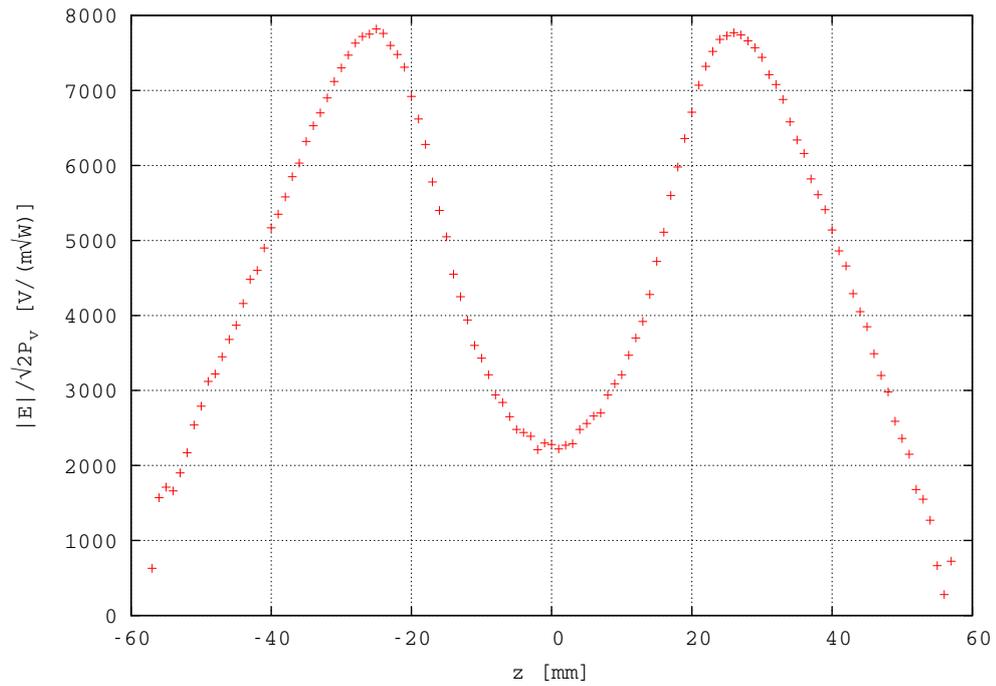


(a) Störkörper aus Aluminiumoxid

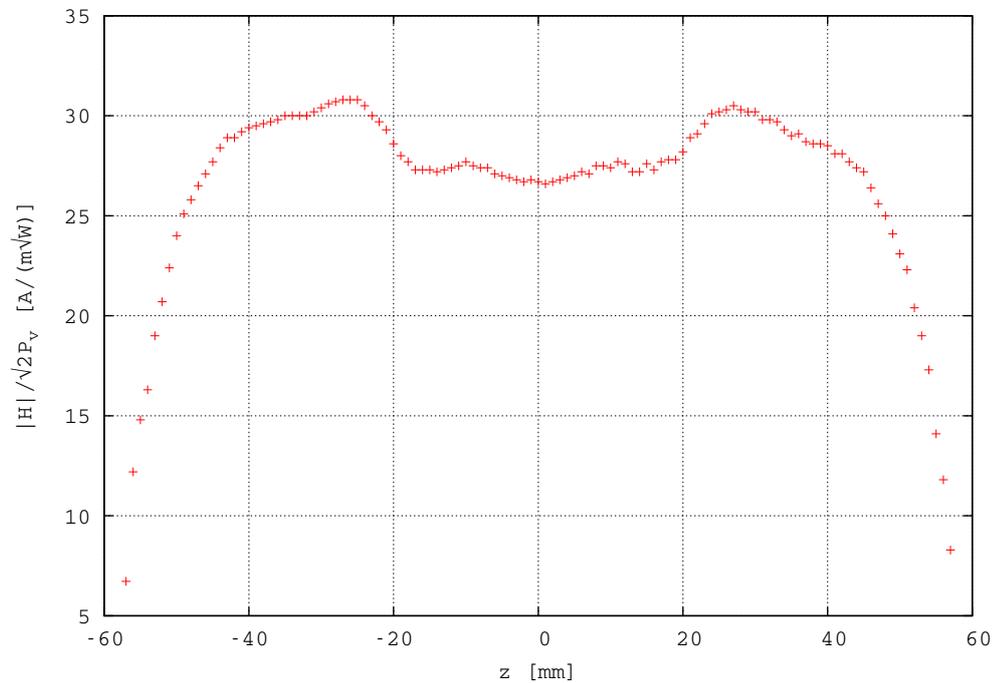


(b) Störkörper aus Edelstahl

**Abbildung 8.12.:** Mit dem Störkörpermessstand am ersten Deflektorprototyp gemessener Phasenunterschied in Abhängigkeit von der Störkörperposition.



(a) Auf die Wurzel der doppelten Leistung normierter Betrag der elektrischen Feldstärke



(b) Auf die Wurzel der doppelten Leistung normierter Betrag der magnetischen Feldstärke

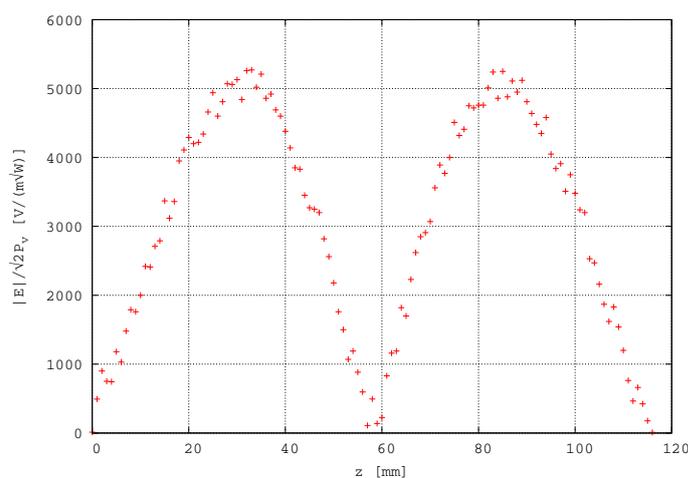
**Abbildung 8.13.:** Mit dem Störkörpermessstand am ersten Deflektorprototyp gemessene normierte Feldstärke in Abhängigkeit von der Störkörperposition.

### 8.4.2. Messungen am zweiten Deflektorprototyp

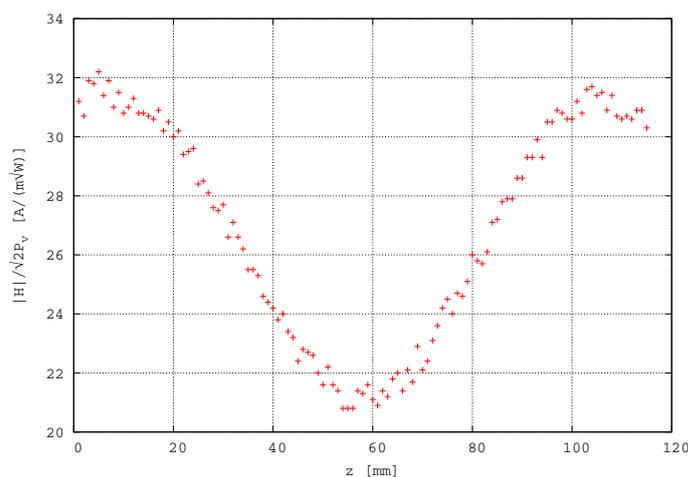
Wiederholt man den zu vor für den ersten Prototyp beschriebenen Messvorgang, berechnet man aus den gemessenen Phasenunterschieden die in Abbildung 8.14(a) und 8.14(b) gezeigten Feldstärken.

Aus diesen normierten Feldstärken berechnet man mit Gleichung 7.3.18 eine transversale Shuntimpedanz von  $R_{\perp}=1,47\text{ M}\Omega$ .

Diese Messungen wurden bei Umgebungstemperaturen zwischen  $19,8^{\circ}\text{C}$  und  $20,0^{\circ}\text{C}$  und Luftdrücken zwischen  $1013\text{ hPa}$  und  $1017\text{ hPa}$  durchgeführt.



(a) Auf die Wurzel der doppelten Leistung normierter Betrag der elektrischen Feldstärke



(b) Auf die Wurzel der doppelten Leistung normierter Betrag der magnetischen Feldstärke

**Abbildung 8.14.:** Mit dem Störkörpermessstand am zweiten Deflektorprototyp gemessene normierte Feldstärke in Abhängigkeit von der Störkörperposition

## 9. Vergleich der Computersimulationen mit den Messergebnissen

Das folgende Kapitel vergleicht die Ergebnisse der Computersimulationen aus Kapitel 6 mit den mit dem Störkörpermessstand gewonnen Daten aus Kapitel 8 für beide  $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen.

Im Anschluss hieran folgt ein Vergleich der einzelnen Entwicklungsschritte und eine Diskussion der Ergebnisse.

### 9.1. Vergleich der Simulations- und Messergebnisse des ersten Prototyp

Aus den Simulationsergebnissen und den Messwerten für Resonanzfrequenzen und Güten wurden mittels linearer Regression mittlere Änderungen in Abhängigkeit der jeweiligen Stempelhöhe berechnet. Abbildung 9.1(a) zeigt die Simulationsergebnisse für die Resonanzfrequenzen und die entsprechende Regressionsgerade mit einer Steigung von  $m_s = 176 \text{ kHz/mm}$ . Abbildung 9.1(b) zeigt die gemessenen Resonanzfrequenzen für beide Polarisierungen und die entsprechenden Regressionsgeraden mit Steigungen von  $m_a = 166,03 \text{ kHz/mm}$  und  $m_b = 166,40 \text{ kHz/mm}$ .

Sowohl die absoluten Werte, als auch die relativen Änderungen durch die Stempel, weichen deutlich voneinander ab. Der erwartete nahezu lineare Zusammenhang konnte bestätigt werden.

Anders als in den Simulationen, war der Resonator mit Luft gefüllt und nicht im Vakuum. Dies würde Abweichungen von einigen 100 kHz in der Resonanzfrequenz erklären, aber nicht die beobachteten Abweichungen von einigen MHz. Die wesentlichen Gründe hierfür liegen in der, in Kapitel 6 beschriebenen, Fertigung des ersten Prototypen und den hierbei nicht exakt reproduzierten Abmessungen des Computermodells. Die gemessenen Frequenzen weichen vom Computermodell nach unten ab. Dies lässt darauf schließen, dass der Innenradius des Modelresonators größer ist, als im Computermodell. Die ebenfalls in Kapitel 6 beschriebene, unterschiedliche Einkopplung der elektrischen Leistung, trägt ebenfalls zu gemessenen Abweichungen der Resonanzfrequenz bei.

Ein weiterer, möglicher Grund, für die Abweichungen liegt im angewendeten Rechenmodell. Die in Kapitel 6 vorgestellte Finite-Elemente-Methode löst die Maxwellgleichungen auf einem Gitter. Die Wahl der Gitterform und der Gittergröße hat Einfluss auf die Qualität der Simulationsergebnisse. In der Regel liefern feinere Gitter genauere Ergebnisse,

benötigen aber auch mehr Rechenzeit.

Abbildung 9.2(a) zeigt die Simulationsergebnisse für die Güte und die entsprechende Regressionsgerade mit einer Steigung von  $m_s = -17,886 \text{ mm}^{-1}$ . Abbildung 9.2(b) zeigt die gemessenen Güten für beide Polarisierungen und die entsprechenden Regressionsgeraden mit Steigungen von  $m_a = -24,128 \text{ mm}^{-1}$  und  $m_b = -24,141 \text{ mm}^{-1}$ .

Sowohl die absoluten Werte, als auch die relativen Änderungen durch die Stempel, weichen etwa um den Faktor 1,4 von einander ab. Die unterschiedlichen Güten lassen sich damit erklären, dass der Modellresonator aus drei, durch Schrauben miteinander verbundenen Teilen besteht und dass Aluminium mit dem Sauerstoff aus der Luft eine Oxidschicht an seiner Oberfläche bildet, deren elektrische Leitfähigkeit geringer ist, als die von reinem Aluminium.

Vergleicht man die simulierten mit den gemessenen normierten Feldstärken, stellt man, wie man Abbildung 9.3 entnimmt, starke Abweichungen fest.

Die unterschiedlichen Güten  $Q_0$  des Computermodells und des untersuchten Modellresonators führen nach Gleichung 4.5.3 zu unterschiedlichen Verlustleistungen  $P_v$  und damit unterschiedlichen Normierungen für die Feldstärken.

Die Tatsache, dass die Dipolmoden im Modellresonator nicht entartet sind, lässt auf Asymmetrie schließen und führt insbesondere dazu, dass die elektrische und die geometrische Symmetrieachse nicht übereinstimmen. In den Simulationen waren diese jedoch identisch. Die Abbildungen 9.4 und 9.5 zeigen die von CST-Microwave Studio berechneten Auswirkungen von Ablagen zur Symmetrieachse auf die Feldstärken.

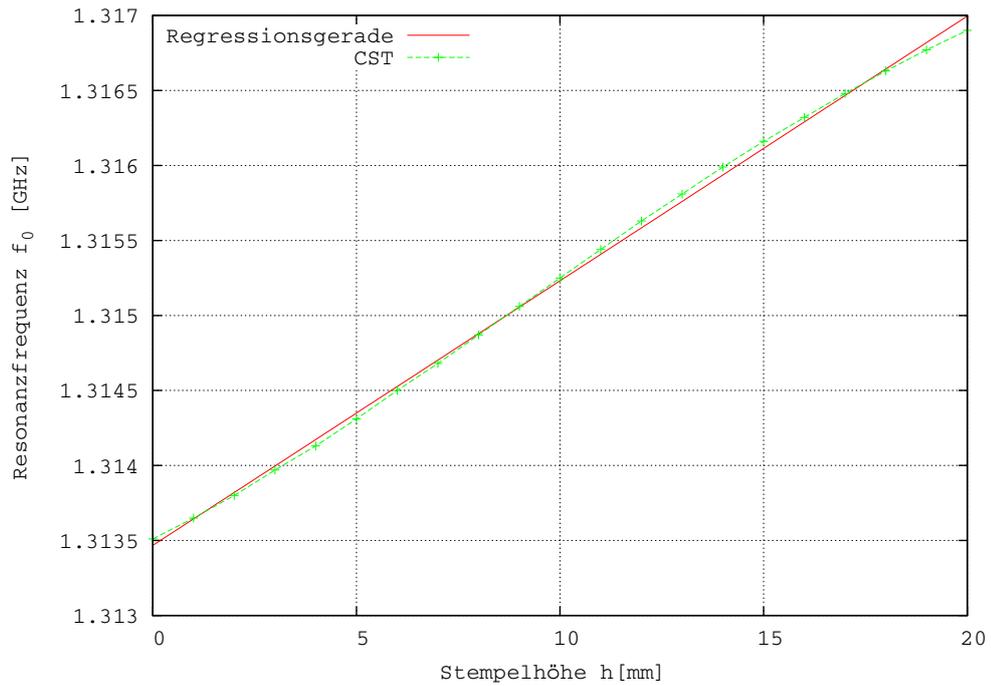
Der vermessene Prototyp besteht, wie in Kapitel 6 beschrieben, aus drei durch Schrauben miteinander verbundenen Teilen, was sich, wie die, bereits weiter oben dargestellten Einflüsse der Oxidschicht, ebenfalls nachteilig auf die Leitfähigkeit der Oberflächen auswirkt. Diese unterschiedlichen elektrischen Eigenschaften der Oberflächen führen zu den quantitativen Abweichungen der Güten und Feldstärken vom Computermodell.

Qualitativ konnten die Ergebnisse der Computersimulationen bestätigt werden. Der räumliche Verlauf der Felder konnte durch die Messungen bestätigt werden.

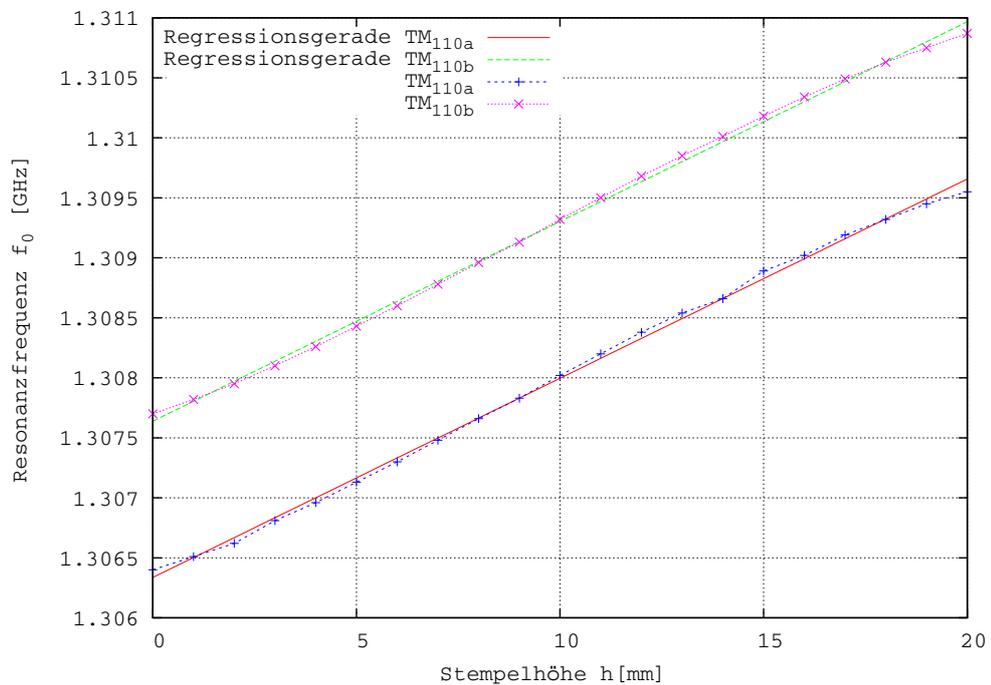
Es zeigt sich, dass die elektrische Symmetrieachse sowohl in x- als auch in y-Richtung von der geometrischen Symmetrieachse abweicht.

Die führt insbesondere dazu, dass bei den Störkörpermessungen longitudinale elektrische Feldanteile zusätzlich zu den transversalen mit gemessen wurden. Die aus den so gemessenen Feldstärken berechnete transversale Shuntimpedanz wird also nach oben von der tatsächlichen abweichen.

Die, in Kapitel 8 dargestellten, minimalen Änderungen bei den Umgebungsbedingungen hatten keinen nachweisbaren Einfluss auf die Ergebnisse der Messungen.

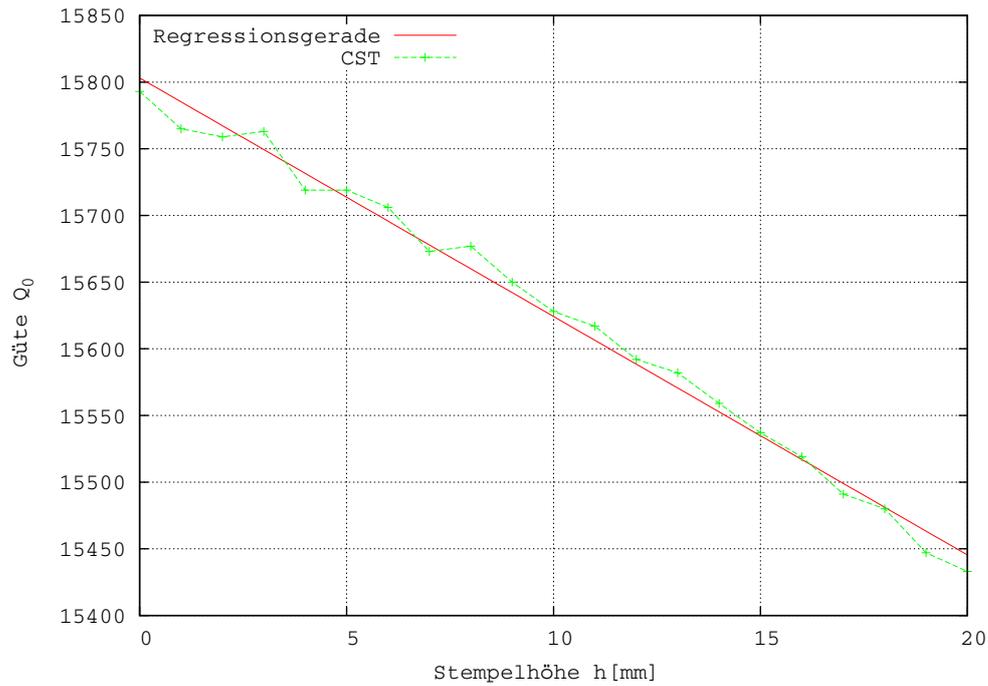


(a) simulierte Resonanzfrequenzen in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

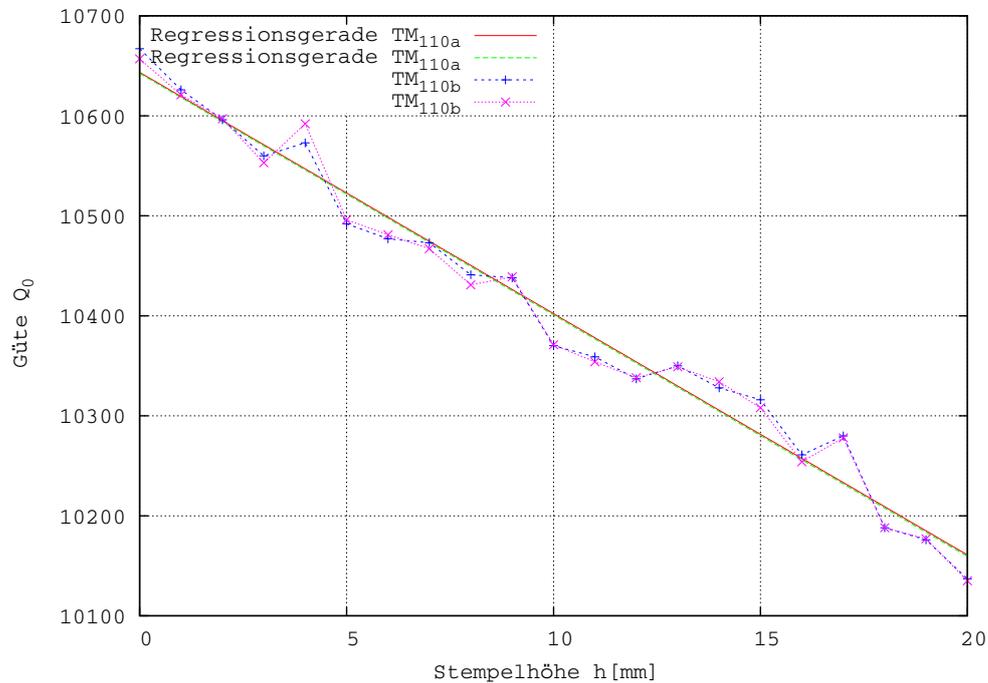


(b) gemessene Resonanzfrequenzen in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

**Abbildung 9.1.:** Vergleich der gemessenen und simulierten Resonanzfrequenzen in Abhängigkeit der Eindringtiefe (Stempelhöhe) eines Abstimmstempels

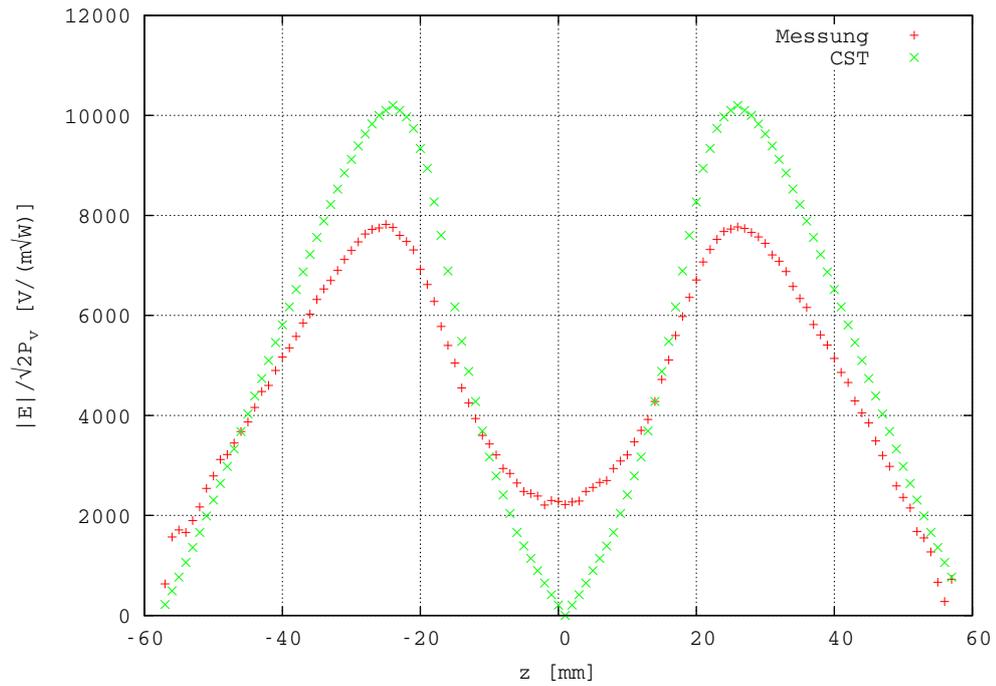


(a) simulierte Güten in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

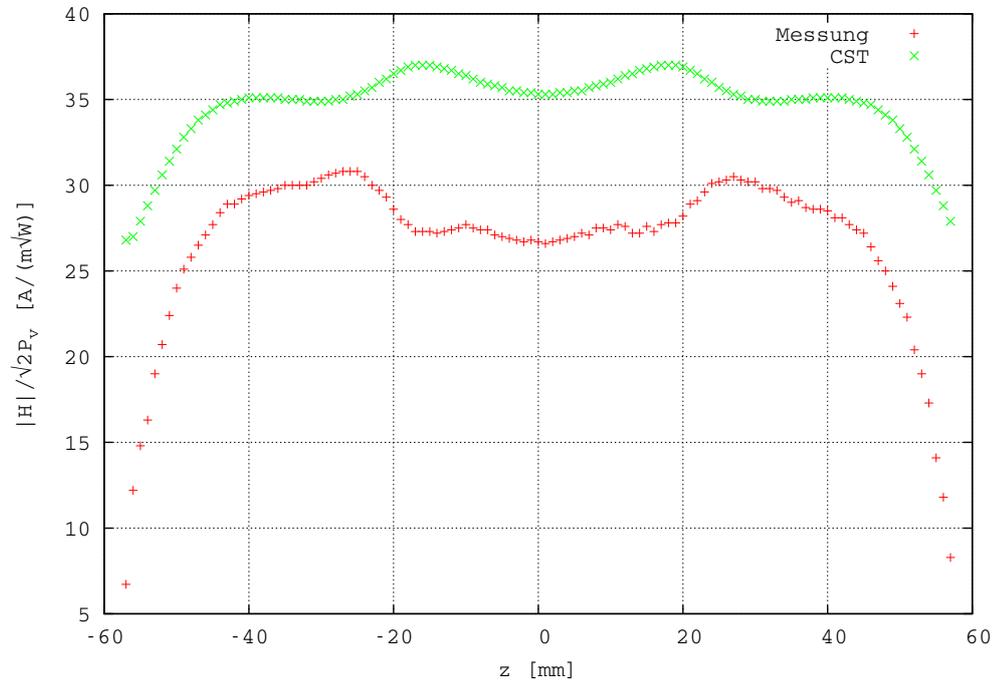


(b) gemessene Güten in Abhängigkeit der Eindringtiefe eines Abstimmstempels

**Abbildung 9.2.:** Vergleich der gemessenen und simulierten Güten in Abhängigkeit der Eindringtiefe (Stempelhöhe) eines Abstimmstempels

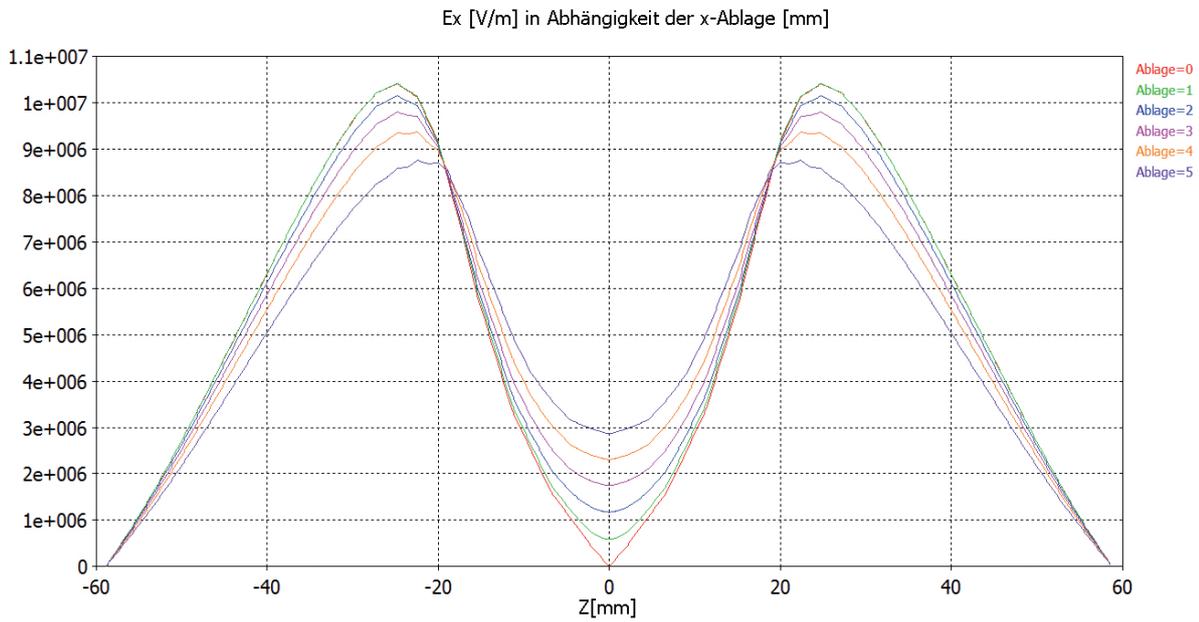


(a) gemessenes und simuliertes elektrisches Feld entlang der Strahlachse

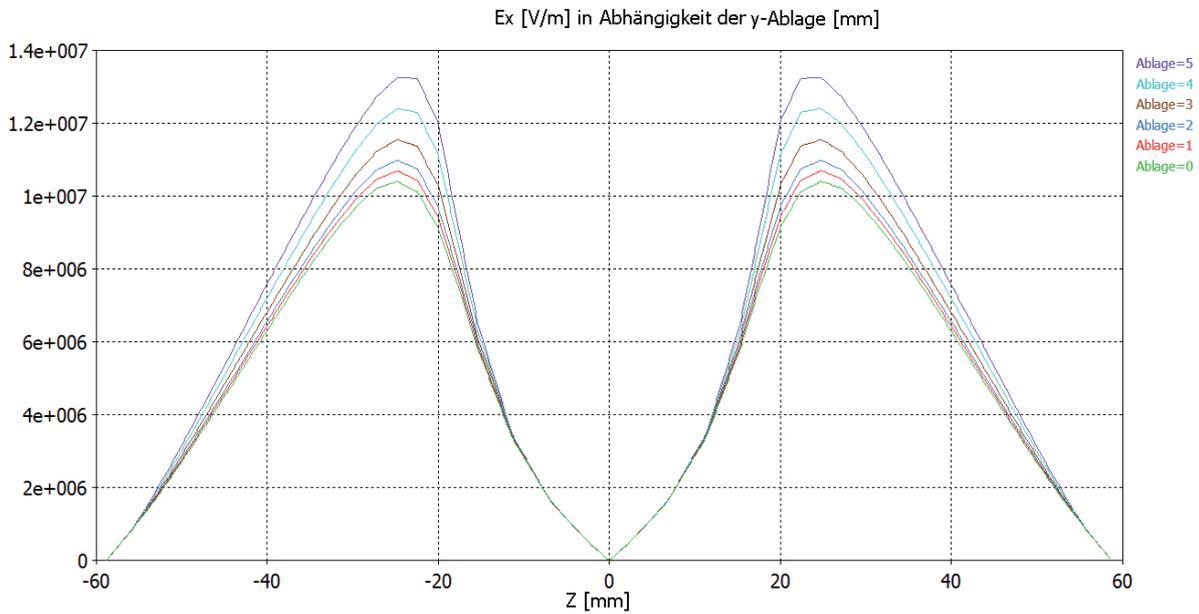


(b) gemessenes und simuliertes magnetisches Feld entlang der Strahlachse

**Abbildung 9.3.:** Vergleich der gemessenen und simulierten Feldstärken entlang der Strahlachse

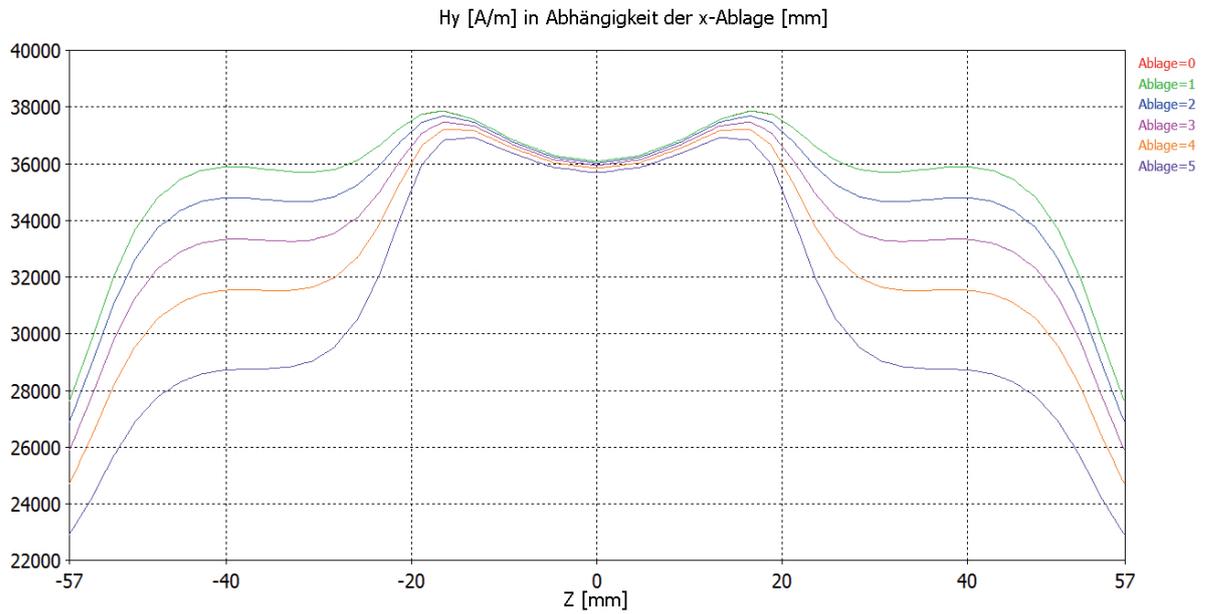


(a) x-Ablage

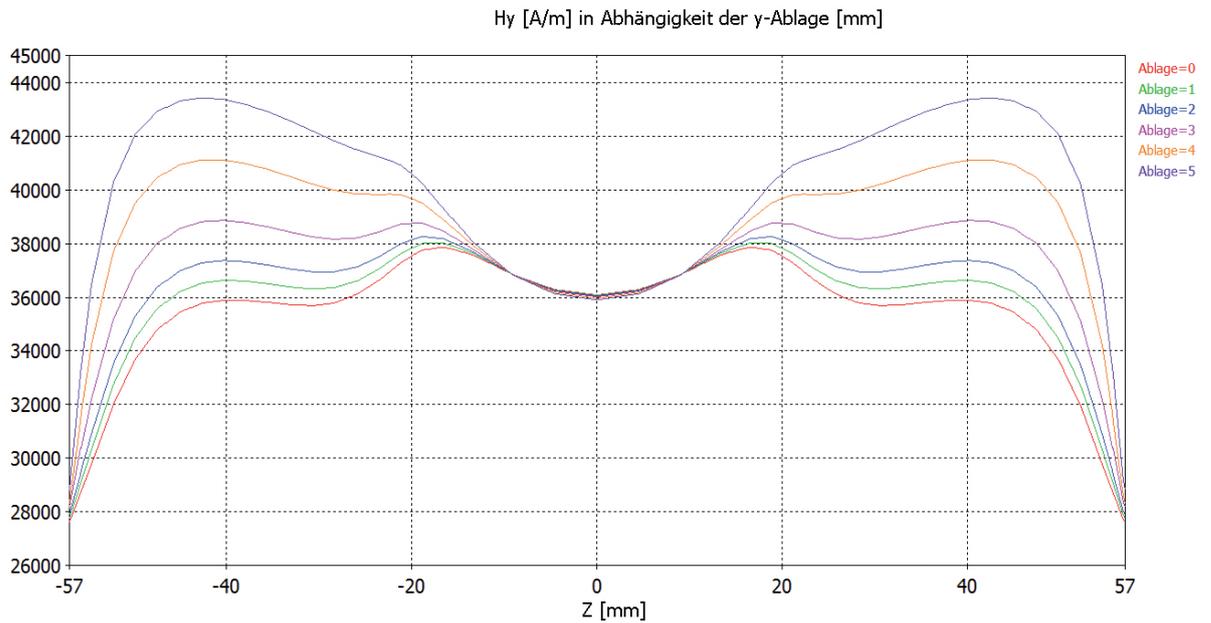


(b) y-Ablage

**Abbildung 9.4.:** Feldstärke in Abhängigkeit der Ablage



(a) Ablage zur Strahlachse in x-Richtung



(b) Ablage zur Strahlachse in y-Richtung

**Abbildung 9.5.:** Feldstärke in Abhängigkeit der Ablage zur Strahlachse

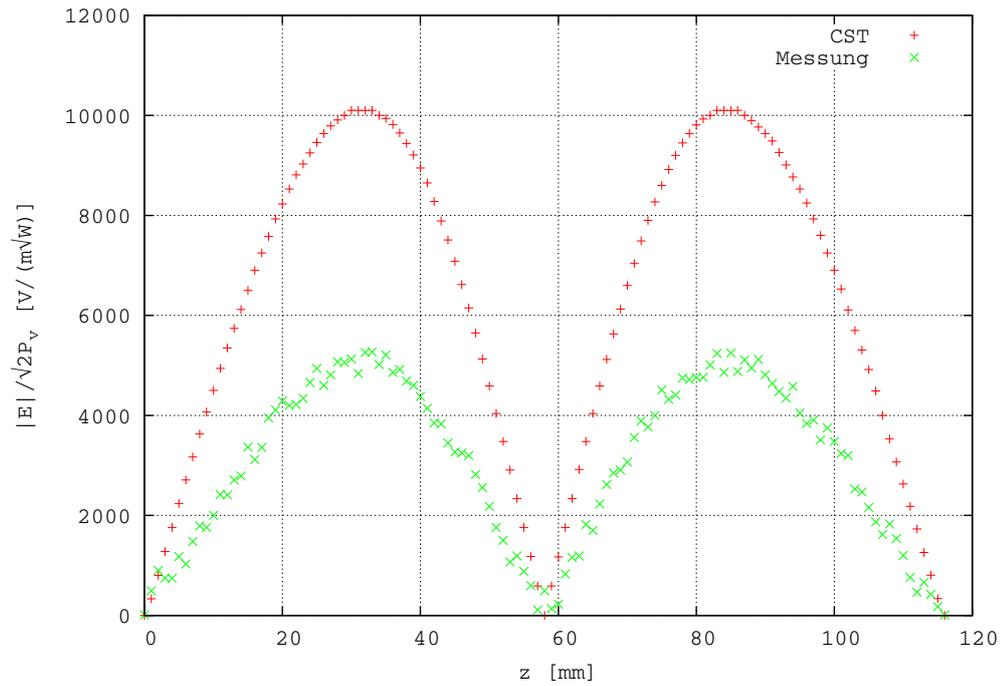
## 9.2. Vergleich der Simulations- und Messergebnisse des zweiten Prototypen

Wie in Kapitel 6 beschrieben, wurden die beiden Halbzellen des zweiten Prototypen mit einer CNC-Fräse hergestellt. Hierdurch wurde die Präzision beim reproduzieren der geometrischen Eigenschaften des Computermodell gegenüber dem ersten Prototyp erheblich erhöht. Aufgrund dieser erhöhten Präzision sind, wie man der Darstellung der Messergebnisse aus Kapitel 8 entnimmt, die beiden Polarisierungen der  $TM_{110}$ -Mode entartet, wenn beide Stempel auf die selbe Eindringtiefe eingestellt sind.

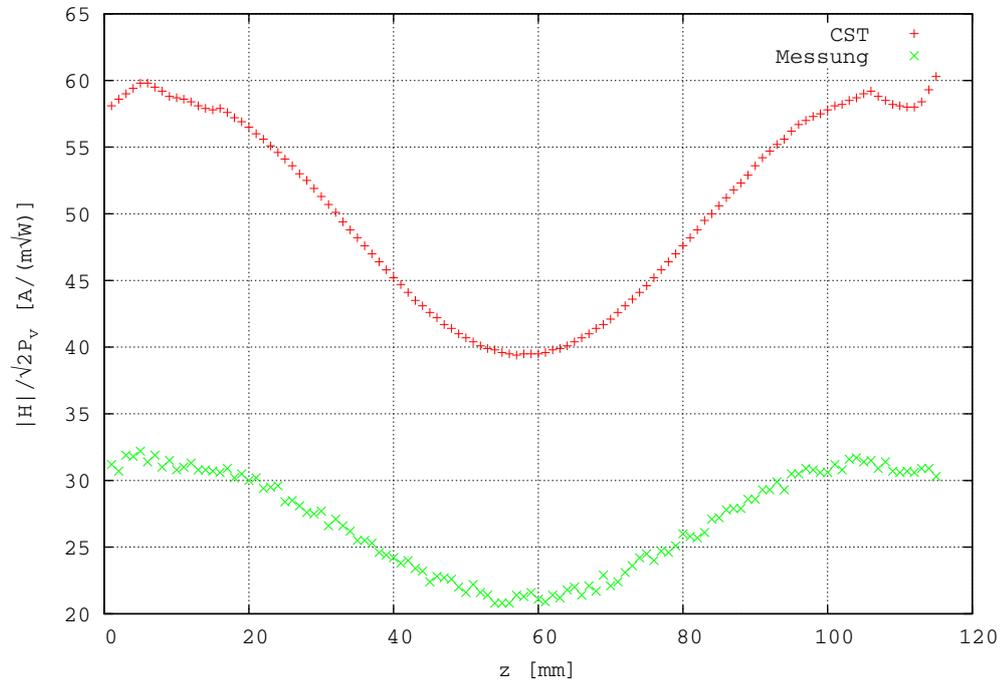
Wie man den Abbildungen 9.6(a) und 9.6(b) entnimmt, stimmt der Verlauf der elektrischen und der magnetischen Feldstärke entlang der geometrischen Symmetrieachse des zweiten Prototypen weitgehend mit den Simulationsergebnissen überein. Die Unterschiede in den absoluten Werten lassen sich, wie schon bei den Messungen am ersten Prototyp, damit erklären, dass die Güte des Prototypen mit  $Q_0 \approx 15800$  deutlich kleiner ist, als die des Computermodells mit  $Q_0 \approx 29400$ . Dieser deutliche größere Unterschied in der Güte als bei den Messungen am ersten Prototypen rührt daher, dass der Prototyp aus Aluminium besteht, in den Computersimulationen aber die Materialeigenschaften von Kupfer verwendet wurden. Weiterhin wirkt sich, wie schon beim ersten Prototyp, die Tatsache das der Resonator aus miteinander verschraubten Teilen besteht, nachteilig auf die Güte aus. Um diesen Einfluss zu reduzieren, wurde der zweite Prototyp, anders als der Erste, nicht mehr aus drei sondern nur noch aus zwei Teilen zusammengesetzt.

Durch die nur etwa halb so hohe Güte, liegt die transversale Shuntimpedanz des vermessenen Resonators mit  $R_{\perp}=1,47\text{ M}\Omega$  deutlich unter der des Computermodells mit  $R_{\perp}=2,12\text{ M}\Omega$ . Wie man den in Kapitel 6 und 8 dargestellten Ergebnissen entnimmt, stimmen diese für die, für den Betrieb vorgesehene Stempelstellung, überein. Die leichten Abweichungen lassen sich, wie schon bei der Vermessung des ersten Prototyp damit erklären, dass anders, als in den Simulationen, die Abbildung 6.14(a) gezeigten Koppler verwendet wurden und das der Resonator mit Luft gefüllt war.

Die, in Kapitel 8 dargestellten, minimalen Änderungen bei den Umgebungsbedingungen hatten keinen nachweisbaren Einfluss auf die Ergebnisse der Messungen.



(a) gemessenes und simuliertes elektrisches Feld entlang der Strahlachse



(b) gemessenes und simuliertes magnetisches Feld entlang der Strahlachse

**Abbildung 9.6.:** Vergleich der gemessenen und simulierten Feldstärken entlang der Strahlachse

## 9.3. Vergleich der einzelnen Entwicklungsschritte

In den Kapiteln 1 und 3 wurden Kriterien aufgestellt, welche ein  $TM_{110}$ -HF-Deflektor für den Einsatz im Rahmen von *BERLinPro* erfüllen sollte. Auf der Grundlage, der in den Kapiteln 2 bis 5 dargestellten Theorie, wurde mit Hilfe von *CST MICROWAVE STUDIO* ein erster  $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototyp entwickelt, welcher die prinzipielle Umsetzbarkeit dieser theoretischen Überlegungen zeigen sollte. Bei der Entwicklung dieses ersten Prototypen wurde besonderer Wert auf eine einfache und kostengünstige Umsetzbarkeit in ein Modell für experimentelle Untersuchungen gelegt. Es sollte bereits vorhandenes Rohmaterial genutzt werden, was dazu führte, dass die Resonanzfrequenz mit 1,314 GHz leicht oberhalb des angestrebten Werts von 1,3 GHz lag. Im Vergleich zu den späteren Entwicklungsschritten fehlte es bei diesem ersten Modell insbesondere an Präzision bei der Reproduktion der geometrischen Eigenschaften des Computermodells. Trotz dieses Mangels an Präzision und der Abweichung von der angestrebten Resonanzfrequenz, konnten alle wesentlichen Eigenschaften des Computermodell und die theoretischen Überlegungen experimentell bestätigt werden.

Es konnte gezeigt werden, dass es, wie in den Simulationen, möglich ist einen  $TM_{110}$ -HF-Deflektor zu bauen und zu betreiben in dem die Polarisation der  $TM_{110}$ -Mode durch die Einstellung zweier Stempel gewählt werden kann, ohne die Einkopplung der elektrischen Leistung zu verändern.

Nachdem die prinzipielle Funktionsweise bestätigt werden konnte, diente das Computermodell des ersten Prototyp mit einer Güte von  $Q_0 \approx 15800$  und einer transversalen Shuntimpedanz von  $R_{\perp} = 1,55 \text{ M}\Omega$  als Ausgangspunkt für den weiteren Entwicklungsprozess.

Da bei der Entwicklung des ersten Prototypen vor allem großer Wert auf die leichte Umsetzbarkeit in einen Modellresonator für experimentelle Untersuchungen gelegt wurde, enthielt dieser einige scharfe Kanten. Es zeigte sich, dass diese Kanten starke negative Auswirkungen auf die Güte und damit auch auf die transversale Shuntimpedanz haben. Bei der Entwicklung des zweiten Prototypen wurde daher besonderer Wert darauf gelegt, diese scharfen Kanten zu vermeiden. Es wurden, soweit möglich, stetige Formen gewählt. Durch die neue, auf Sinusfunktionen basierende, Geometrie der Nasen und durch den in Kapitel 6 beschriebenen Optimierungsprozess, konnte die Güte  $Q$  im Vergleich zum ersten Prototypen von 15800 auf 29400 nahezu verdoppelt werden. Durch die neue Geometrie der Nasen konnte die Öffnung für die sich an den Deflektor anschließenden Strahlrohre, im Vergleich zum ersten Prototyp, vergrößert werden. Während der erste Prototyp über eine Öffnung mit einem Durchmesser von 10 mm verfügte, beträgt der Durchmesser beim zweiten Prototyp 24 mm. Hierdurch wird es möglich, größere und schlechter an der Sollbahn ausgerichtete Teilchenstrahlen zu untersuchen. Ein weiterer Vorteil besteht in der Verringerung von Teilchenverlusten. Ein wesentlicher Nachteil des größeren Durchmessers und dem damit verbundenen größeren Abstands der Nasen, ist die nachteilige Wirkung auf die transversale Shuntimpedanz. Der zweite Prototyp verfügt mit  $R_{\perp} = 2,12 \text{ M}\Omega$  gegenüber

dem ersten eine etwa ein halbes Megaohm höhere transversale Shuntimpedanz. Auf Grundlage dieses Computermodells wurde mit Hilfe eines CAD-CAM-Konverters ein NC-Programm für eine CNC-Fräse erstellt, welche mit hoher Präzision, einen aus zwei Halbzellen bestehenden Resonator aus Aluminium herstellte. Durch die, im Vergleich zur Fertigung des ersten Prototyp, deutlich erhöhte Präzision, konnte die von der Theorie und von den Simulationen vorhergesagte Entartung der beiden Polarisierungen der  $TM_{110}$ -Mode experimentell beobachtet werden. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass es möglich ist, dass neuartige, auf Sinusfunktionen basierende, Nasendesign praktisch um zu setzen. Nachdem sowohl die prinzipielle Funktionsweise als auch das neuartige Nasendesign erfolgreich getestet werden konnten, wurde ausgehend vom Computermodell des zweiten Prototypen ein Optimierungsprozess, mit dem Ziel eine möglichst hohe transversale Shuntimpedanz und eine sinusförmige transversale Spannung zu erzielen, begonnen. Im Laufe dieses Optimierungsprozesses zeigte sich, dass es durch eine geeignete Wahl der, in Kapitel 6 dargestellten, Parametrisierung der Nasen möglich ist, die transversale Shuntimpedanz des Deflektors auf  $R_{\perp}=3,18\text{ M}\Omega$  zu erhöhen und gleichzeitig die angestrebte sinusförmige transversale Spannung zu erzeugen. Zusätzlich waren, um die Herstellung einer für den Einsatz im Ultrahochvakuum geeigneten Version des  $TM_{110}$ -HF-Deflektors zu vereinfachen, kleinere Anpassungen an dem auf Ellipsenbögen basierenden Resonatormantel erforderlich. Tabelle 9.1 fasst die, in den Theoriekapiteln definierten Kenngrößen, der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Resonatoren zusammen und vergleicht diese mit Kenngrößen eines Zylinderresonators und den Kenngrößen des an der Cornell University entwickelten transversal ablenkenden Hohlraumresonators [ Belomestnykh u. a. (2010) ].

	$R_{\perp}$ [M $\Omega$ ]	$Q_0$	Material	Polarisationen	Apertur [mm]
Zylinderresonator	1,10	28000	Kupfer	1	35
Prototyp 1	1,55	15800	Aluminium	2	10
Prototyp 2	2,12	29400	Kupfer	2	24
$TM_{110}$ -HF-Deflektor	3,18	19900	Kupfer	2	24
Cornell TCAV	5,27	14050	Kupfer	1	35

**Tabelle 9.1.:** Vergleich der simulierten Kenngrößen verschiedener transversal ablenkender Hohlraumresonatoren

## 10. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit, einen transversal ablenkenden Hohlraumresonator zur longitudinal aufgelösten transversalen Strahldiagnose von Pikosekunden-Elektronenbunchen im MeV-Bereich zu entwickeln, konnte erreicht werden.

Aufbauend auf den theoretischen Grundlagen aus den Kapiteln 2, 3, 4 und 5, konnte in Kapitel 6 mit Hilfe von CST MICROWAVE STUDIO und CST PARTICLE STUDIO ein Hohlraumresonatormodel entwickelt werden, welches die Anforderungen von GunLab und BERLinPro erfüllt.

Bereits im Rahmen der Diplomarbeit [ Ferrarotto (2011) ] konnte durch theoretische Überlegungen, Simulationen und Experimente gezeigt werden, dass es möglich ist, die Polarisationen der  $TM_{110}$ -Mode und damit die Ebene der transversalen Ablenkung, bei einer festen Betriebsfrequenz durch die Einstellung zweier Stempel bei ortsfester Einkopplung auszuwählen.

Aufbauend auf dieser Möglichkeit der Wahl der Polarisation der  $TM_{110}$ -Mode, wurde in der vorliegenden Arbeit ein  $TM_{110}$ -HF-Deflektor entwickelt, welcher zusätzlich, genauso wie ein einfacher Zylinderresonator, über eine sinusförmige transversale Ablenkspannung verfügt, aber gleichzeitig mit  $R_{\perp} = 3,18 \text{ M}\Omega$  eine ca. dreimal so hohe transversale Shuntimpedanz wie ein einfacher Zylinderresonator hat.

Durch diese sinusförmige transversale Spannung wird es, im Vergleich zu anderen Deflektorresonatoren mit optimierter transversaler Shuntimpedanz möglich, das in Kapitel 3 beschriebene Messverfahren, mit deutlich geringeren Abbildungsfehlern durchzuführen. Zusätzlich erlaubt es, die Möglichkeit zwischen zwei zu einander orthogonalen Ebenen der transversalen Ablenkung zu wählen, den kompletten sechs-dimensionalen Phasenraum der Teilchenpakete zu vermessen, ohne den Aufbau der verwendeten Beamline zu verändern oder einen zweiten Deflektorresonator verwenden zu müssen.

Nachdem diese Ergebnisse durch die in Kapitel 6 beschriebenen Simulationen mit CST MICROWAVE STUDIO und CST PARTICLE STUDIO bestätigt werden konnte, wurden die, ebenfalls in diesem Kapitel beschrieben, Prototypen aus Aluminium gebaut und mit den, in Kapitel 7 beschriebenen, Messmethoden untersucht. Die in Kapitel 8 dargestellten Messungen an diesen Prototypen bestätigten die Ergebnisse der Simulationen.

Der Vergleich der Messungen an den  $TM_{110}$ -HF-Deflektor-Prototypen mit den Computersimulationen zeigte deutliche, quantitative, Unterschiede auf. Diese quantitativen Unterschiede konnten in Kapitel 9 im Wesentlichen auf zwei Umstände zurückgeführt und erklärt werden. Qualitativ zeigten die Messergebnisse eine gute Übereinstimmung mit den Computersimulationen.

Auf Grundlage des im Rahmen dieser Arbeit dargestellten Entwicklungsprozesses befindet sich gegenwärtig eine für den Einsatz im Ultrahochvakuum geeignete Version des  $TM_{110}$ -Deflektors im Bau.

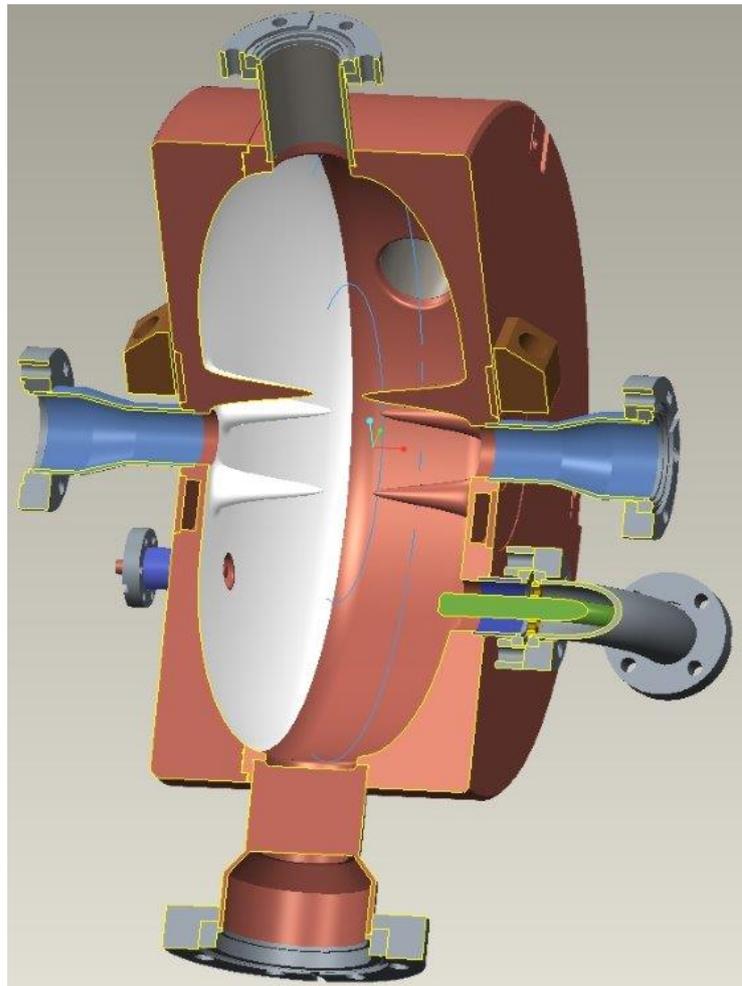
Diese soll zunächst im Rahmen von BERLinPro zur Charakterisierung und Optimierung der neuen supraleitenden Elektronenquelle dienen. Abbildung 10.1 zeigt eine Computergrafik des aktuellen Planungsstands.

Dieser Resonator wird, genauso wie ein einfacher Zylinderresonator, in der Lage sein, eine sinusförmige hochfrequente transversale Spannung zu liefern und mit seiner etwa dreimal so hohen transversalen Shuntimpedanz eine deutlich effizientere Umsetzung des in Kapitel 3 beschriebenen Messverfahrens ermöglichen.

Bereits in Betrieb befindliche transversal ablenken-

de Hohlraumresonatoren, wie z.B. der an der Cornell University [ Belomestnykh u. a. (2010) ] entwickelte und eingesetzte transversal ablenkende Hohlraumresonator, verfügen über mehr als das fünffache der transversalen Shuntimpedanz eines Zylinderresonators. Allerdings erlaubt dieser, wie auch alle bisher verwendeten, transversal ablenkenden Hohlraumresonatoren, lediglich die Verwendung einer Polarisation der  $TM_{110}$ -Mode. Ein weiteres Alleinstellungsmerkmal, des in Abbildung 10.1gezeigten transversal ablenkenden Hohlraumresonators mit optimierter transversaler Shuntimpedanz, ist die sinusförmige transversale Ablenkspannung, welche es erlaubt, das in Kapitel 3 beschriebene Messverfahren mit deutlich geringeren Abbildungsfehler durchzuführen, als mit bereits in Betrieb befindlichen transversal ablenkenden Hohlraumresonatoren.

Als weitere Verwendung im Rahmen von BERLinPro, ist der Einsatz des  $TM_{110}$ -Deflektors zur Strahldiagnose im Anschluss an Booster geplant, um die Strahlparameter vor der Injektion in den Hauptlinearbeschleuniger des ERL zu bestimmen.



**Abbildung 10.1.:** CAD-Modell einer ultrahochvakuumtauglichen Version des  $TM_{110}$ -HF-Deflektors [ HZB - private Kommunikation ]

Aufbauend, auf dem in dieser Arbeit dargestellten Entwicklungsprozesses, ist eine Weiterentwicklung des  $TM_{110}$ -Deflektors sowohl für höhere Strahlströme als auch für höhere Strahlenergien denkbar. Anwendungsmöglichkeiten hierfür bieten sich zum Beispiel bei BERLinPro im Recirculationsteil des Beschleunigers oder bei anderen Beschleunigeranlagen wie zum Beispiel ELBE, welcher ebenfalls mit einer supraleitenden Elektronenquelle betrieben wird.

## A. Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Thomas Weis für die interessante Aufgabenstellung und die Betreuung von meiner Diplomarbeit bis hin zu dieser Dissertation bedanken.

Beim Bundesministerium für Bildung und Forschung bedanke ich mich für die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit als Teil des Projekts 05K10PEA.

Besonderer Dank geht an Bernard Riemann für die mehrjährige Unterstützung und Diskussionsbereitschaft.

Bei Peter Kortmann bedanke ich mich für Bau des Quaderresonators, den Bau der Defektorprototypen und einige nützliche Tipps beim Erstellen der Konstruktionszeichnungen.

Ich danke Dr. Ulf Berges, Klaus Rudloff und Thomas Dybiona für die Hilfe beim Aufbau des Störkörpermessstandes.

Bei Wolfgang Brembt und Vadim Kniss bedanke ich mich für zahlreiche nützliche Tipps rund um die Hochfrequenztechnik.

Bei Fabian Pflocksch bedanke ich mich für das Erstellen der Konstruktionszeichnungen und die Planung des Baus des der UHV-Version des  $TM_{110}$ -HF-Deflektors.

Bei Dr-Ing. Jeniffa Rudolph, Dr. Thorsten Kamps und Jens Völker bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit in diesem Projekt.

Für Korrekturlesen und zahlreiche nützliche Anmerkungen und Hinweise bedanke ich mich bei, Dr. Gerald Schmidt, Bernard Riemann und Julia Rimkus.

## B. Literaturverzeichnis

- [Abramowitz und Stegun 1970] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications INC., 1970
- [Agilent ] Agilent Technologies - <http://www.home.agilent.com>
- [Agilent IO Libraries Suite ] Agilent IO Libraries Suite 16.1 - <http://www.home.agilent.com>
- [Alesini 2005] ALESINI, D.: *RF Deflector Based sub-ps Beam Diagnostics: Application to FEL and Advanced Accelerators, The Physics and Applications of High Brightness Electron Beams*. In: *Proceedings of the 46th Workshop of the INFN ELOISATRON Project, Erice, Italy, 2005*
- [Amato und Herrmann 1985] AMATO, J. C. ; HERRMANN, H.: *Improved method for measuring the electric fields in microwave cavity resonators*. S. 696–699. In: *Rev.Sci.Instr.*, 1985
- [Barday u. a. 2011] BARDAY, R. ; KAMPS, T. ; NEUMANN, A. ; RUDOLPH, J. ; SCHUBERT, S. ; VÖLKER, J. ; FERRAROTTO, A. ; WEIS, T.: *Instrumentation needs and Solutions for the Development of an SRF Photoelectron Injector at the Energy-Recovery Linac BERLinPro*. In: *Proceedings of DIPAC11, 2011*
- [Belomestnykh u. a. 2010] BELOMESTNYKH, Sergey ; BAZAROV, Ivan ; SHEMELIN, Valery ; SIKORA, John ; SMOLENSKI, Karl ; VESHCHEREVICH, Vadim: *Deflecting cavity for beam diagnostics at Cornell ERL injector*. S. 179–183. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, 2010*
- [Berlin Energy Recovery Linac Project ] Berlin Energy Recovery Linac Project [http://www.helmholtz-berlin.de/forschung/grossgeraete/beschleunigerphysik/berlinpro/index\\_de.html](http://www.helmholtz-berlin.de/forschung/grossgeraete/beschleunigerphysik/berlinpro/index_de.html)
- [Bronstein und Semendjaew 2006] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Wissenschaftler Verlag Harri Deutsch, 2006
- [COMET ] COMET SYSTEM, s.r.o. - <http://www.cometsystem.cz>
- [CST ] CST Computer Simulation Technology AG - <http://www.cst.com/>

- 
- [Ekbert 2005] EKBERT, Hering: *Elektronik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005
- [ELBE ] Die ELBE am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf - <https://www.hzdr.de/db/Cms?pNid=517>
- [England 2007] ENGLAND, Robert J.: *Longitudinal Shaping of Relativistic Bunches of Electrons Generated by an RF Photoinjector*, University of California Los Angeles, Dissertation, 2007
- [ENZ ] Enz-Ingenieurbüro für Umwtelektronik & Automatisierung - <http://www.enz-berlin.de/>
- [EPICS ] Argonne National Laboratory : Experimental Physics and Industrial Control System - <http://www.aps.anl.gov/epics/>
- [Ferrarotto u. a. 2015] FERRAROTTO, A. ; RIEMANN, B. ; WEIS, T. ; KAMPS, T. ; GLOCK, H.-W. ; VÖLKER, J.: *A NOVEL TRANSVERSE DEFLECTING CAVITY FOR SLICE DIAGNOSTICS AT BERLINPRO*. In: *Proceedings of IPAC15*, 2015
- [Ferrarotto 2011] FERRAROTTO, Alessandro V.: *Design und Charakterisierung eines TM110-HF-Deflektors zur longitudinalen Strahldiagnose von Pikosekunden-Elektronenbunchen im MeV-Bereich*, Technische Universität Dortmund, Diplomarbeit, 2011
- [Gnuplot ] Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- [Goering u. a. 2010] GOERING, Herbert ; ROOS, Hans-Görg ; TOBISKA, Lutz: *Die Finite-Elemente-Methode für Anfänger*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA Weinheim, 2010
- [Heuermann 2009] HEUERMANN, Holger: *Hochfrequenztechnik*. Vieweg + Teubner, 2009
- [Hinterberger 2008] HINTERBERGER, Frank: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Ionenoptik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008
- [Hülsmann 1992] HÜLSMANN, Peter: *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der transversalen Shuntimpedanz und Güte an störmodes bedämpften beschleunigerresonatoren für lineare Kollider und Hochstrombeschleuniger in mittleren und hohen Energiebereichen*, Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main, Dissertation, 1992
- [HZB ] Helmholtz-Zentrum Berlin - <http://www.helmholtz-berlin.de>
- [HZB - private Kommunikation ] Helmholtz-Zentrum Berlin, private Kommunikation - <http://www.helmholtz-berlin.de>

- [ISEL ] ISEL Gernany AG - <http://www.isel-germany.de/>
- [Jackson 2006] JACKSON, John D.: *Klassische Elektrodynamik*. de Gruyter, 2006
- [Jankowiak u. a. 2010] JANKOWIAK, A. ; ABO-BAKR, M. ; ANDERS, W. ; KAMPS, T. ; KNOBLOCH, J. ; KUSKE, B. ; KUGELER, O. ; MATVEENKO, A. ; MESECK, A. ; NEUMANN, A. ; QUAST, T. ; RUDOLPH, J.: *BERLinPro - A COMPACT DEMONSTRATOR ERL FOR HIGH CURRENT AND LOWEMITTANCE BEAMS*. In: *Proceedings of Linear Accelerator Conference*, 2010
- [JLab ] Thomas Jefferson National Accelerator Facility - <http://www.jlab.org/>
- [Knobloch u. a. 2012] KNOBLOCH, J. ; ABO-BAKR, M. ; ANDERS, W. ; BARDAY, R. ; BÜRKMANN-GEHRLEIN, K. ; DÜRR, V. ; HESSLER, S. ; JANKOWIAK, A. ; KAMPS, T. ; KUGELER, O. ; KUSKE, B. ; KUSKE, P. ; MATVEENKO, A. ; MEYER, G. ; MÜLLER, R. ; NEUMANN, A. ; OTT, K. ; PETENEV, Y. ; PFLÜCKHAHN, D. ; QUAST, T. ; RAHN, J. ; SCHUBERT, S.: *STATUS OF THE BERLinPro ENERGY RECOVERY LINAC PROJECT*. In: *Proceedings of IPAC2012*, 2012
- [Maier und Slater 1952] MAIER, L. C. ; SLATER, J. C.: *Field Strength Measurements in Resonant Cavities*. S. 68–77. In: *Journal of Applied Physics*, 1952
- [Müller 2000] MÜLLER, Wolfgang F.: *Untersuchungen zu Moden höherer Ordnung in konstanten und variierten Beschleunigerstrukturen für zukünftige lineare Kollider*, Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main, Dissertation, 2000
- [Neumann u. a. 2011] NEUMANN, A. ; ANDERS, W. ; BARDAY, R. ; JANKOWIAK, A. ; KAMPS, T. ; KNOBLOCH, J. ; KUGELER, O. ; MATVEENKO, A. ; QUAST, T. ; RUDOLPH, J. ; SCHUBERT, S. ; VOELKER, J. ; SMEDLEY, J. ; SEKUTOWICZ, J. ; KNEISEL, P. ; NIETUBYC, R. ; WILL, I. ; WEINBERG, G. ; VOLKOV, V.: *FIRST CHARACTERIZATION OF A FULLY SUPERCONDUCTING RF PHOTOINJECTOR CAVITY*. In: *Proceedings of IPAC11*, 2011
- [Neumann u. a. 2013] NEUMANN, A. ; ANDERS, W. ; BURRILL, A. ; FRAHM, A. ; KAMPS, T. ; KNOBLOCH, J. ; KUGELER, O. ; ZAPLATIN, E.: *SRF PHOTOINJECTOR CAVITY FOR BERLinPro*. In: *Proceedings of IPAC13*, 2013
- [Panofsky und Wenzel 1956] PANOFSKY, W. K. H. ; WENZEL, W. A.: *Some Considerations Concerning the Transverse Deflection of Charged Particles in rf-Fields*. S. 976. In: *Rev.Sci.Instr.*, 1956
- [Peschke 1995] PESCHKE, Claudius: *Messungen und Berechnungen zu longitudinalen und transversalen Shuntimpedanzen einer Elektronen-Positronen-Linearbeschleuniger-Struktur*, Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main, Diplomarbeit, 1995

- [Rebhan 1999] REBHAN, Eckhard: *Theoretische Physik I*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1999
- [Rudolph u. a. 2011] RUDOLPH, J. ; ABO-BAKR, M. ; KAMPS, T. ; TEICHERT, J.: *SLICE-EMITTANCE MEASUREMENTS AT ELBE / SRF-INJECTOR*. In: *Proceedings of DIPAC11*, 2011
- [Rudolph 2012] RUDOLPH, Jeniffa: *Instruments and techniques for analysing the time-resolved transverse phase space distribution of high-brightness electron beams*, Universität Rostock, Dissertation, 2012
- [Völker u. a. 2014] VÖLKER, J. ; BARDAY, R. ; JANKOWIAK, A. ; KAMPS, T. ; RUDOLPH, J. ; SCHUBERT, S. ; WESCH, S. ; FERRAROTTO, A. ; WEIS, T. ; VLADIMIROV, I.Yu. ; SHVEDUNOV, V.I.: *INTRODUCING GUNLAB - A COMPACT TEST FACILITY FOR SRF PHOTOINJECTORS*. In: *Proceedings of IPAC2014*, 2014
- [Wangler 2008] WANGLER, Thomas P.: *RF Linear Accelerators*. Wiley-VCH, 2008
- [Wille 1992] WILLE, Klaus: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen*. B.G. Teubner, 1992
- [Zinke und Brunswig 2000] ZINKE, Otto ; BRUNSWIG, Heinrich: *Hochfrequenztechnik 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000