Stephanie WESKAMP, Essen

Einsatz von substanziellen Lernumgebungen in heterogenen Lerngruppen im Mathematikunterricht der Grundschule

1. Bedeutung von substanziellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Grundschule

Empirische Befunde zeigen, dass der Umgang mit einer zunehmenden heterogenen Schülerschaft, insb. mit einem breiten Leistungsspektrum im Mathematikunterricht der Grundschule, als zentrale Anforderung gilt (vgl. Krauthausen & Scherer 2014; Stanat et al. 2012; Walther et al. 2008). Als Reaktion auf diese Ergebnisse folgte u. a. die Entwicklung der Bildungsstandards, die sich mit dem Aspekt der Leistungsheterogenität auseinandersetzen und in diesem Kontext die Anforderungsbereiche einführten (vgl. KMK 2005, S. 13). Insgesamt hat die Unterrichtsentwicklung durch eine geeignete Aufgabenkultur seit einigen Jahren an zentraler Bedeutung gewonnen, daneben sind jedoch noch weitere Faktoren, wie die Bedingungen seitens der Lehrperson und der Lernenden sowie die Unterrichtskultur entscheidend (vgl. Büchter & Leuders 2011; Krauthausen & Scherer 2014). In der mathematikdidaktischen Literatur wird in diesem Zusammenhang die natürliche Differenzierung als ein geeignetes Konzept beschrieben (vgl. Wittmann 1990; Krauthausen & Scherer 2014), welches sich besonders gut beim Einsatz substanzieller Lernumgebungen realisieren lässt (vgl. Krauthausen & Scherer 2014). Derartige Lernumgebungen definiert Wittmann (z. B. 1998) mit folgenden Merkmalen: Sie repräsentieren zentrale Ziele, Inhalte sowie Prinzipien des Mathematikunterrichts, bieten reichhaltige mathematische Aktivitäten, sind flexibel nutzbar und integrieren mathematische, psychologische sowie pädagogische Aspekte (vgl. auch Krauthausen & Scherer 2014). Substanzielle Lernumgebungen sind für den Mathematikunterricht von großer Bedeutung: Sie realisieren fundamentale Ideen der Mathematik, fördern die Kompetenz des Argumentierens sowie mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten und bieten die Möglichkeit, produktiv mit der heterogenen Schülerschaft umzugehen (vgl. ebd.). Lernumgebungen, die zentrale mathematische Kernideen aufgreifen, sind elementarer Bestandteil des Projekts ‚Mathe-Spürnasen' an der Universität Duisburg-Essen. Im Rahmen von Experimentiervormittagen bearbeiten Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse unter vielfältigen Perspektiven (Einführungen und Vertiefungen) ausgewählte Lernumgebungen (vgl. Baltes et al. 2014). Das hier vorgestellte Forschungsprojekt lässt sich in das Gesamtprojekt ‚Mathe-Spürnasen' einordnen und erforscht zum einen die Konzeption von Lernumgebungen und zum anderen die konkreten Bearbeitungsprozesse

In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag

der Schülerinnen und Schüler. Dazu wird die Bearbeitung der Lernumgebungen in Kleingruppen videographiert und zusammen mit den dabei entstandenen schriftlichen Schülerdokumenten analysiert. Anschließend werden ausgewählte Einzelinterviews geführt, um einen detaillierten Einblick in die Bearbeitungsprozesse der Lernenden zu gewinnen. Bezüglich der Charakterisierung dieser Prozesse werden u. a. die Anforderungsbereiche (AB; vgl. KMK 2005, S. 13) der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Lernumgebungen identifiziert. Dabei werden Schülerbearbeitungen, die Unterschiede bzgl. der AB in Einführung und Vertiefung aufweisen oder Schülerbearbeitungen, die auf eine nicht hierarchische Anordnung der Anforderungsbereiche (bspw. Schwierigkeiten bei AB I, gelungene Bearbeitung im AB II) hindeuten, genauer untersucht.

2. Lernumgebung Pascalsches Dreieck

Im Folgenden soll exemplarisch die im Rahmen des Forschungsprojekts konzipierte Lernumgebung Pascalsches Dreieck vorgestellt werden. Diese umfasst eine Einführungseinheit, in der das Pascalsche Dreieck durch eine kombinatorische Aufgabenstellung hergeleitet wird sowie drei Vertiefungen Galtonbrett, Wege in Mannheim und Zahlenmuster. Die Lernumgebung bietet die Möglichkeit für kombinatorische und musterbezogene Aufgabenstellungen und spricht somit die Vernetzung verschiedener inhaltlicher Leitideen an. Neben inhaltlichen Zielen verfolgen die vielfältigen Aktivitäten auch allgemeine Ziele. Im Folgenden wird die Einführungseinheit und die Vertiefung Zahlenmuster näher vorgestellt, um anschließend exemplarische Bearbeitungen von Grundschulkindern aufzuzeigen und auf erste Erkenntnisse aus Pilotierungen einzugehen.

2.1. Einführung Kennenlernen des Pascalschen Dreiecks

Ausgangspunkt für die Herleitung des Pascalschen Dreiecks ist eine kombinatorische Aufgabenstellung, der eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen in Form von verschiedenfarbigen Murmeln (mit $n > k$) zu Grunde liegt. Hierbei bestimmen die Lernenden zunächst alle möglichen Kombinationen und deren Anzahl. Die jeweiligen Ergebnisse werden in einer Tabelle festgehalten. Durch Heranziehen des historischen Kontextes in Form einer Abbildung des Yang-Hui-Dreiecks (vgl. z. B. Martzloff 1997) wird die tabellarische Form zur Dreiecksform umstrukturiert, sodass die arithmetische Bildungsregel deutlicher hervorgeht. Diese können die Lernenden zum Fortsetzen des Pascalschen Dreiecks nutzen.

2.2. Vertiefung Zahlenmuster

Im Mathematikunterricht der Grundschule ist die Beschäftigung mit Mustern unterschiedlicher Art, wie z. B. die Auseinandersetzung mit Zahlenmustern von großer Relevanz (vgl. Wittmann 2003; MSW 2008). Dieser Aspekt findet in der Vertiefung durch das individuelle Entdecken von Zahlenmustern im Pascalschen Dreieck (vgl. Benz 2014) besondere Berücksichtigung. Um das Pascalsche Dreieck fortzusetzen, können die Lernenden auf die in der Einführung thematisierte additive Bildungsregel zurückgreifen oder bereits erkannte arithmetische Beziehungen zwischen den Zahlen nutzen (vgl. Stufe I des Zahlenmusterverständnisses (ZMV) nach Steinweg 2001). Darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Entdeckungen bzgl. der Zahlenmuster beschreiben. Diese Beschreibungen können ganz unterschiedlichen Charakter besitzen. Denkbar sind beispielgebundene Beschreibungen von exemplarischen aufgaben- oder zahlenfolgenbezogenen Mustern durch Einfärben von Zahlen oder verbale bzw. schriftliche Beschreibungen. Hingegen äußern sich generalisierende Beschreibungen durch die Formulierung einer allgemeinen Regel (vgl. Stufe II des ZMV, ebd.). Auch das Begründen eines Zahlenmusters wird angestrebt, wobei Argumentationen am Beispiel oder allgemeingültige Argumentationen möglich sind (vgl. Stufe III des ZMV, ebd.). Durch die Komplexität der Aufgabenstellung werden den Lernenden unterschiedliche Bearbeitungsniveaus ermöglicht. Dies kommt auch durch die Anforderungsbereiche der Bildungsstandards zum Ausdruck (vgl. KMK 2005, S. 13).

Reproduzieren (AB I): Berechnen der Zahlen im Pascalschen Dreieck unter Anwendung der additiven Bildungsregel

Herstellen von Zusammenhängen (AB II): Exemplarisches und generalisierendes Beschreiben von Zusammenhängen zwischen Zahlen

Verallgemeinern und Reflektieren (AB III): Verallgemeinern von Zahlenmustern und Begründen der Beziehungen zwischen Zahlen

Im Rahmen der Pilotierung wurden in der Einführungseinheit bei den Viertklässlerinnen Amba und Ulima beim Fortsetzen des Pascalschen Dreiecks mittels der additiven Bildungsregel Schwierigkeiten bei AB I bzgl. der Rechenfertigkeiten deutlich. Dennoch nutzten die Lernenden arithmetische Zusammenhänge zwischen Zahlen (AB II), um die Diagonalen mit 1 und mit natürlichen Zahlen im Pascalschen Dreieck fortzusetzen. Im Interview nutzte Ulima Tauschaufgaben im Pascalschen Dreieck, die sich aufgrund der Symmetrie ergeben, um weitere Zahlen zu bestimmen. Amba führte eine generalisierende Beschreibung ihrer Entdeckung an, indem sie auf die von ihr eingefärbten Zahlen und deren arithmetische Beziehung einging:

„*Da haben wir entdeckt, dass alle Zahlen durch fünf teilbar sind. (...) Nicht alle, nur die Blauen.*" Die Beispiele aus Pilotierungen deuten bereits an, dass eine differenzierte Beschreibung der Bearbeitungsniveaus innerhalb der eingesetzten Lernumgebungen notwendig ist. Dabei sind die Anforderungsbereiche nicht unbedingt hierarchisch zu sehen. Im weiteren Verlauf des Forschungsvorhabens sind weitere Analysen vorzunehmen, um die Bearbeitungsniveaus unter Berücksichtigung weiterer Facetten zu erfassen.

Literatur

Baltes, U., Rütten, Ch., Scherer, P. & Weskamp, S. (2014). Mathe-Spürnasen – Grundschulklassen experimentieren an der Universität. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Bd. 1, S. 121-124). Münster: WTM.

Benz, Ch. (2014). Das Pascal'sche Dreieck. In V. Ulm (Hrsg.), *Gute Aufgaben Mathematik* (5. Aufl., S. 60-64). Berlin: Cornelsen.

Büchter, A. & Leuders, T. (2011). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen* (5. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

KMK (Hrsg., 2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004*. München: Wolters Kluwer.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.

Martzloff, J.-C. (1997). *A history of Chinese Mathematics*. Berlin/Heidelberg: Springer.

MSW – Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg., 2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*. Frechen: Ritterbach.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K. & Richter, D. (Hrsg., 2012). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011*. Münster: Waxmann.

Walther, G., Selter, Ch., Bonsen, M. & Bos, W. (2008). Mathematische Kompetenzen im internationalen Vergleich. In W. Bos et al. (Hrsg.), *Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 49-85). Münster: Waxmann.

Wittmann, E. Ch. (1990). Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (S. 152-166). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *16*(3), 329-342.

Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule* (S. 18-46). Seelze: Kallmeyer.