

Eva-Maria WIBING, Essen

Kinder deuten strukturierte arithmetisch-symbolische Zahlenmuster – Erste Einsichten aus einer qualitativen Studie

Die Mathematik wird als eine Wissenschaft von den Mustern, Beziehungen und Strukturen verstanden (vgl. DEVLIN (1997), S. 3). Daher spielen Muster, Beziehungen und Strukturen schon im Mathematikunterricht der Grundschule eine bedeutende Rolle. So gibt z. B. der LEHRPLAN NRW an: „Dem Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen kommt eine wesentliche Rolle im Mathematikunterricht zu. Muster und Strukturen bestimmen häufig die einzelnen Themenbereiche und können zur Verdeutlichung zentraler mathematischer Grundideen genutzt werden.“ (LP (2008), S. 7)

Theoretischer Hintergrund

STEINWEG (2001) untersuchte im Rahmen eines Forschungsprojektes das Zahlenmusterverständnis von Grundschulkindern. Sie gliedert den Umgang bzw. das Verständnis von Zahlenmustern in drei Stufen: I. *Erkennen* und *Intuitives Fortsetzen* des Musters; II. *Beschreiben* des Musters (exemplarisches vs. generalisierendes Darstellen); III. *Erklären* des Musters (Argumentieren am Beispiel vs. auf Allgemeingültigkeit zielendes Argumentieren) (vgl. STEINWEG 2001, S. 115 ff).

STEINWEG analysierte Deutungen der Kinder hinsichtlich der Stufen I und II. Ferner gab sie an, dass innerhalb ihrer Studie, die aus einem Paper-Pencil-Test und klinischen Interviews bestand, keine Ergebnisse zu dem Begründungsverhalten der Kinder (Stufe III) geliefert werden können.

LINK (2012), der sich an STEINWEG orientierte, konzentrierte sich in seinen Untersuchungen auf das Beschreiben von operativen Zahlenmustern und entwickelte Unterrichtsaktivitäten (Umsetzung von Merkmalen der Entwicklungsforschung), durch die Kinder zum Beschreiben von Zahlenmustern angeregt werden. In seiner Analyse konzentrierte er sich darauf, wie die Operation und wie das Objekt von Kindern beschrieben wird (vgl. LINK (2012)).

SÖBBEKE (2005) erforschte die visuelle Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern und charakterisierte eine Spanne von konkret empirischen bis hin zu strukturorientierten, relationalen Deutungen (vgl. SÖBBEKE (2005), S. 346ff). Auf diese Ergebnisse aufbauend konnte STEENPAß (2014) in ihrem Dissertationsprojekt herausarbeiten, dass Kinder bei der Deutung von Anschauungsmitteln entweder eine dingbezogene oder eine systembezogene Rahmung einnehmen. Entsprechend unterscheidet sie

zwischen einer Welt der Dinge und einer Welt der Beziehungen (vgl. STEENPAß (2014)).

Worin bestehen nun die epistemologischen Besonderheiten mathematischer Strukturen und Beziehungen in symbolisch-arithmetischen gegenüber geometrisch-visuellen Kontexten?

Das Forschungsprojekt KidZ

Das Deuten, vor allem das Begründen von Zahlenmustern innerhalb strukturierter arithmetisch-symbolischer Aufgabenkontexte, spielt im Rahmen des alltäglichen Mathematikunterrichts häufig (noch) eine untergeordnete Rolle. Viele Aufgaben enthalten oft lediglich die Anforderung, Strukturen zu entdecken und zu beschreiben, jedoch nicht, den entdeckten Strukturzusammenhang zu begründen. Aber gerade die Kompetenz des Begründens hat im Mathematikunterricht der Grundschule eine wichtige Funktion. So gibt der LEHRPLAN NRW (2008) an, dass die Anwendungs- und Strukturorientierung die wichtige Beziehungshaltigkeit der Mathematik verdeutlichen soll. „Das Prinzip der Strukturorientierung unterstreicht, dass mathematische Aktivität häufig im Finden, Beschreiben und Begründen von Mustern besteht.“ (LP (2008), S. 6)

Im Rahmen des Forschungsprojektes „KidZ – GrundschulK~~i~~n~~d~~e~~r~~ **d**euten Zahlenmuster“ soll untersucht werden, wie Schülerinnen und Schüler des vierten Schuljahres strukturierte, arithmetisch-symbolische Aufgabenkontexte wahrnehmen, beschreiben, bearbeiten und vor allem wie sie strukturelle Zusammenhänge erklären und begründen. Hierbei stellt sich die Frage, in welchem Deutungsspektrum die Aussagen der Kinder zu finden sind. Worin bestehen Gemeinsamkeiten und Unterschiede der arithmetisch-symbolischen und der visuellen Strukturierungsfähigkeit (vgl. SÖBBEKE 2005)? Des Weiteren stellt sich die Frage, inwiefern ein Wechselspiel zwischen dem *(Aus-)Rechnen* und dem *Struktur(en)sehen* besteht. Hier stehen sich ein rechnerisch-algorithmischer und ein strukturell-operativer Zusammenhang gegenüber.

Forschungsdesign

Um die arithmetische Strukturierungsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern zu charakterisieren, wurden mittels Prä-Interviews spontane Deutungen von insgesamt zehn Schülerinnen und Schülern zweier Grundschulen in Essen im Rahmen von halbstandardisierten klinischen Interviews (vgl. SELTER, SPIEGEL 1997) erhoben. Dazu wurden drei substanzielle arithmetische Lernumgebungen eingesetzt: Strukturierte Päckchen, Zahlenfelder, „Triff die 50!“ (vgl. u.a STEINBRING 1995), für die jeweils unter-

schiedliche Bearbeitungsformate konzipiert wurden (s. Tab 1). Im Anschluss an die Prä-Interviews erfolgte eine Intervention mit den jeweiligen Klassen zur Förderung des arithmetischen Struktursinns. Die Intervention setzte sich aus insgesamt vier Doppelstunden á 90 Minuten zusammen. Hier wurden einzelne Schwerpunkte der umfangreichen Lernumgebungen Umkehrzahlen, Zahlenmauern, Zahlengitter und Vierersummen an der Hundertertafel thematisiert. Anschließend erfolgten die Post-Interviews zu den gleichen Lernumgebungen der Prä-Interviews.

In dieser Studie soll nicht untersucht werden, ob bei einzelnen Schülerinnen und Schülern aufgrund der Intervention ein Lernzuwachs an zusätzlichem, stofflichem Wissen festzustellen ist. Vielmehr ist von Interesse, ob nach intensiver Auseinandersetzung mit Mustern und Strukturen, die arithmetisch-symbolische Deutungskompetenz der Schülerinnen und Schüler deutlich ausdifferenziert wurde.

<i>Charakterisierung</i>	<i>Lernumgebung</i>	
Fest vorgegebene Struktur <i>ohne</i> Veränderungsmöglichkeit	Strukturierte Päckchen	Umkehrzahlen Zahlenmauern
Fest vorgegebene Struktur <i>mit</i> Veränderungsmöglichkeit	Zahlenfeld	Zahlengitter Vierersummen an der Hundertertafel
Offene arithmetische Struktur mit Vorgabe(n)	Triff die 50!	

Tab 1. Charakterisierung der Lernumgebungen

Erste Einsichten am Beispiel „Yunis“

Im Rahmen eines Prä-Interviews wurde Yunis dazu aufgefordert, ein 4x4-Zahlenfeld (s. Abb.1) genau zu betrachten und zu beschreiben. In einem zweiten Schritt sollte er die Summe aller Zahlen geschickt bestimmen. Abschließend sollte er seine Rechenwege begründen und angeben, welchen Rechenweg er beim nächsten Mal wieder wählen würde.

Yunis gibt an, dass das Zahlenfeld 16 Zahlen beinhaltet und dass sechs Zahlen doppelt vorkommen („6 Paare“). Er benennt diese Paare und gibt im Folgenden weiter an: „[...] eine Zahl vergrößert sich immer um plus drei [...]“.

Insgesamt gibt Yunis fünf Möglichkeiten an, die Summe aller Zahlen zu bestimmen.

Aus Platzgründen kann an dieser Stelle exemplarisch nur eine Deutungsmöglichkeit näher vorgestellt werden. Yunis bestimmt zunächst die Summe der vier Zahlen der ers-

15	21	27	33	← 36
12	18	24	30	
9	15	21	27	
6	12	18	24	

Abb. 1: Zahlenfeld

ten Zeile (96) und notiert diese rechts neben dieser Zeile (s. Abb. 1). Er betrachtet im Folgenden die Zahlen der ersten und zweiten Zeile und sagt: „Weil wenn man jetzt hier guckt, dann wird das ja hier immer drei weniger (*tippt mit dem Stift nacheinander auf die 15, dann auf die 12, dann auf 21/18, 27/24, 33/30*) und dann ist es insgesamt zwölf weniger und dann kann (.) es vierundacht oder? Ja, vierundachtzig werden“. Im Folgenden rechnet Yunis die vier Zahlen der zweiten Zeile zur Kontrolle zusammen und kommt auf dasselbe Ergebnis „84“. Es wird deutlich, dass Yunis zunächst die dem Zahlenfeld zugrundeliegende Struktur nutzt, um die Summe der vier Zahlen der zweiten Zeile zu bestimmen. Erst in einem weiteren Schritt addiert er diese Zahlen, um seine Vermutung zu überprüfen. Im Weiteren geht er analog vor.

Zusammenfassung und Ausblick

Es zeigt sich, dass ein Schüler die dem Aufgabenformat zugrundeliegende Struktur nutzt, um die Summe von Zahlen geschickt zu bestimmen. Im Rahmen weiterer Analysen des erhobenen Datenmaterials sollen verschiedenste Schülerdeutungen analysiert werden, um die arithmetische Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern auszudifferenzieren.

Literatur

- Link, M. (2012). Grundschul Kinder beschreiben operative Zahlenmuster. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (2008). Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes Nordrhein-Westfalen. Frechen: Ritterbach Verlag.
- Selter, Chr., Spiegel, H. (1997). Wie Kinder rechnen. Leipzig: Klett-Grundschulverlag.
- Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.
- Steenpaß, A. (2014). Grundschul Kinder deuten Anschauungsmittel. Eine epistemologische Kontext- und Rahmenanalyse zu den Bedingungen der visuellen Strukturierungskompetenz. http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DownloadServlet/Download-37000/Steenpa%C3%9F_Dissertation.pdf
- Steinbring, H. (1995). Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da. In: Wittmann, Müller (1995). Mit Kindern rechnen. Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e. V., S. 225-239.
- Steinweg, A. S. (2001): Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung. Münster: LIT-Verlag.