

Magnetische Billards, Finsler-Billards und das Spektrum eines Billards

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

Der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund
im November 2015 vorgelegt von

BENJAMIN MEHANNA

Dissertation

Magnetische Billards, Finsler-Billards und das Spektrum eines Billards

Fakultät für Mathematik

Technische Universität Dortmund

Tag der mündlichen Prüfung: 06. April 2016

Erstgutachter: Prof. Dr. K.F. Siburg

Zweitgutachter: Prof. Dr. L. Schwachhöfer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen und Methoden	6
2.1	Hamiltonsche Systeme und symplektische Geometrie	6
2.2	Variationsmethoden und das Prinzip der kleinsten Wirkung	14
3	Magnetfelder und Finsler-Geometrie	24
3.1	Bewegung im Magnetfeld	24
3.2	Finsler-Geometrie	34
3.3	Der magnetische Fluss als Finsler-geodätischer Fluss	42
4	Magnetische Billards, Finsler-Billards und das Spektrum	49
4.1	Modellbildung: Magnetische- und Finsler-Billards	49
4.2	Billards mit Erzeugendenfunktion	62
4.3	Minimale Bahnen und das Spektrum	91
	Literatur	104

1 Einleitung

Das Modell des klassischen Billards ist seit der Einführung durch Birkhoff in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts ein intensiv bearbeitetes Feld der Mathematik und Physik. Ist die Bewegung durch ein magnetisches Feld beeinflusst, erhält man ein *magnetisches Billard*. Diese sind in den letzten Jahren sowohl in den Fokus mathematischer, als auch physikalischer Forschung gerückt (siehe z.B. [36], [7], [6], [8], [16], [47], [46], [19], [32]). In der Physik erlauben sie eine Modellierung diverser physikalischer Systeme - insbesondere auch in der Quantenmechanik ([36], [7], [6]). Im einfachsten Fall des konstanten Magnetfeldes, das in den bisherigen Untersuchungen i.a. zugrunde gelegt wurde, verändert das Magnetfeld ein klassisches, euklidisches Billard derart, dass die Bewegung innerhalb des Tisches nicht mehr entlang von Geradensegmenten sondern Kreisbögen verläuft. Bereits in diesem einfachen Fall tauchen neben den klassischen Fragen eine Vielzahl neuer Aspekte auf, die einer Untersuchung bedürfen. Die erste fundamentale Veränderung ist der Verlust der Symmetrie - eine rückwärts durchlaufene Trajektorie ist im allgemeinen keine Trajektorie der Bewegung im Magnetfeld. Wie wir später sehen werden, hat dies folgenreiche Auswirkungen auf die Beschreibung einer Billardbahn. Der zweite zentrale Aspekt, der hervorzuheben ist, ist der Einfluss der Feldstärke auf die Dynamik des Billards. Dabei reicht es nicht aus, diese isoliert zu betrachten, da die Dynamik stets ein Resultat des Zusammenspiels von Feldstärke, Geometrie des Billardtisches und der Tischgröße ist. Daneben gilt es auch, das Energieniveau und damit die Geschwindigkeit der Bewegung zu berücksichtigen. Anders als in der Theorie der klassischen Billards können selbst strikt konvexe, ebene Billardtische mit glattem Rand, d.h. Billardtische, die klassisch eine „gutartige Dynamik“ besitzen, bereits bei Anwesenheit eines konstanten Magnetfeldes chaotisches Verhalten erzeugen. Entscheidendes Kriterium ist hier die Existenz von Trajektorien, die den Rand tangential berühren. Je nach Feldstärke erzeugen diese Unstetigkeitsstellen der Billardabbildung. Möchte man ein magnetisches Billard jenseits konstanter Felder und flacher Tische untersuchen, ist es notwendig den *magnetischen Fluss* in allgemeiner Form zu erklären und Wesensmerkmale herauszustellen. Dafür stehen zwei Wege zur Verfügung. Zum einen lässt er sich im Rahmen Lagrangescher- und/oder Hamiltonscher-Mechanik beschreiben, und zum anderen ist es unter geeigneten Bedingungen möglich den magnetischen Fluss als geodätischen Fluss einer *Finsler-Metrik* aufzufassen. Finsler-Geometrie stellt eine Verallgemeinerung Riemannscher-Geometrie dar. Wesentlicher Unterschied ist, dass hier auf jedem Tangentialraum statt einem Skalarprodukt eine Minkowski-Norm gegeben ist. Ein oft formuliertes Beispiel, dass sich durch Finsler-Geometrie beschreiben lässt, ist die Lichtausbreitung in einem inhomogenen und anisotropen Medium - die Geschwindigkeit der Ausbreitung ist abhängig von Ort und

1 Einleitung

Richtung (siehe z.B. [43]). In einem klassischen Billard ist die Bewegung durch den freien Fluss gegeben. Liegt der Bewegung der freie Fluss einer Finsler-Metrik zugrunde, d.h. der zugehörige geodätische Fluss, entsteht ein *Finsler-Billard*. Zu beachten ist, dass die Minkowski-Normen auf den Tangentialräumen je nach Definition totale oder eingeschränkte Homogenität besitzen können. Im zweiten Fall ist die Finsler-Metrik irreversibel - der zugehörige geodätische-Fluss besitzt, wie der magnetische-Fluss, keine Symmetrie. Neben der Bewegung innerhalb des Tisches, ist es auch notwendig das Verhalten am Rand zu verstehen. Die klassische Regel „Einfallswinkel= Ausfallswinkel“ durch Interpretation der Reflexionen als „elastische Stöße“ ist für Finsler-Billard, in Abwesenheit eines Skalarproduktes, formal nicht erklärt. Das Brechungsgesetz für Finsler-Billard wurde in [20] hergeleitet.

Die Interpretation des magnetischen Flusses als geodätischer Fluss einer Finsler-Metrik erlaubt es, magnetische Billards als Finsler-Billard aufzufassen. Dies ist in [44] geschehen, und es wurde nachgewiesen, dass ein solches Billard im Kontext der Finsler-Geometrie das klassische Winkel-erhaltungsgesetz als Reflexionsgesetz besitzt.

Die Billardabbildungen strikt konvexer euklidischer Billards mit hinreichend glattem Rand sind Beispiele für *monotone Twistabbildungen*. Untersuchungen solcher Abbildungen durch Birkhoff lieferten bereits im frühen 20. Jahrhundert Existenzaussagen periodischer Bahnen. Im Rahmen der Aubry-Mather-Theorie konnten solche Aussagen auf nicht periodische Bahnen erweitert und ein tieferes Verständnis über die Natur der Bahnen und monotoner Twistabbildungen im allgemeinen erlangt werden. Die „KAM“-Theorie (benannt nach Kolmogorov, Arnold und Moser) lieferte ebenfalls weitreichende Erkenntnisse über monotone Twistabbildungen - in diesem Fall über die Veränderungen von Bahnen von Twistabbildungen unter Störungen.

Die Billardabbildung klassischer Billards besitzt eine starke Kopplung zum euklidischen Abstand - aufgefasst als Funktion, die die Länge der Trajektorien der freien Bewegung angibt. Genauer gesagt ist die negative Länge *Erzeugendenfunktion* der Billardabbildung. Die Existenz einer Erzeugendenfunktion ist neben einer sogenannten „Twistbedingung“ (und einigen anderen technischen Bedingungen) ein essentielles Kriterium für die Interpretation der Billardabbildung als monotoner Twistabbildung. Die Aubry-Mather-Theorie liefert Existenzaussagen über *minimale Bahnen* einer Funktion, die über die Erzeugendenfunktion definiert ist. Da die Erzeugendenfunktion für Billards Informationen über die Länge von Bahnsegmenten angibt, ist es möglich anhand der Billardbahnen Rückschlüsse auf die Gestalt des Billardtisches zu ziehen. Das *Längenspektrum* eines Billardtisches (strikt konvex mit glattem Rand) als Menge aller Längen (und deren Vielfachheiten) geschlossener periodischer Bahnen der freien Bewegung auf diesem Tisch und das *markierte Längenspektrum* als Funktion, die, grob gesagt, jeder rationalen Rotationszahl (diese gehören zu periodischen Bahnen) die Länge der längsten periodischen Bahn zuordnet, beinhalten zentrale Kenngrößen des zugrunde liegenden Tisches, die auch unter stetigen Deformationen des Randes erhalten bleiben. Diese heißen „Längenspektralvarianten“. Neben elementaren Größen wie dem Umfang oder Durchmesser des Tisches gibt es weitere Invarianten, die sich durch passende Koordinaten zur Beschreibung der Billardabbildung (die sog. Lazutkin-Koordinaten) finden lassen;

auch die Marvizi-Melrose-Invarianten sollten erwähnt werden (genauere Ausführungen findet man z.B. in [40]).

Warum erfolgt an dieser Stelle ein Blick auf bekannte Resultate für klassische Billards? Berry hat bereits in [36] postuliert, dass die Dynamik klassischer Billards unter dem Einfluss „hinreichend schwacher“, konstanter Felder erhalten bliebe. Der Nachweis, dass die Billardabbildung eines klassischen Billards die Kriterien einer monotonen Twistabbildung erfüllt, ist elementar geometrisch ausführbar, und auch für hinreichend schwache, konstante Felder ist dies heuristisch nachvollziehbar. In [7] ist erläutert, dass magnetische Billards mit konstantem, „hinreichend schwachem“ Magnetfeld und strikt konvexem glattem Rand eine Billardabbildung besitzen, die eine monotone Twistabbildung ist. Dies wurde danach in [6] und [8] aufgegriffen. Die Bedingung „hinreichend schwach“ ist heuristisch an die Krümmung des Randes gekoppelt. Möchte man sich nicht auf konstante Magnetfelder beschränken oder sogar flache Billards verlassen, ist es notwendig Kriterien herauszuarbeiten, aus denen sich im Anschluss die Eigenschaften einer monotonen Twistabbildung ableiten lassen. Strikt konvexe Billards mit hinreichend schwachem, konstantem Magnetfeld stellen dann eine Beispielklasse für solche Billards dar. Aber auch jedes klassische Billard als Grenzfall eines magnetischen Billards mit verschwindendem Feld gehört selbstverständlich dazu. Das mathematische Billard ist ein anschauliches Modell. Die Formulierung der Kriterien sollte diesen Aspekt unterstreichen. Die Kriterien definieren wir daher auf dem Billardtisch selbst, d.h. dem Konfigurationsraum des Systems. Da magnetische Billards ebenfalls als Finsler-Billards interpretiert werden können, findet die Formulierung auch in diesem allgemeinen Kontext statt. In einer Bemerkung in [20] wird erwähnt, dass die dort untersuchten reversiblen Finsler-Billards monotone Twistabbildungen als Billardabbildung besäßen. Die hier eingeführten Kriterien lassen sich auch auf Finsler-Billards anwenden. Wir erhalten daher am Ende neben magnetischen Billards (und damit irreversiblen) auch reversible Finsler-Billards mit monotoner Twistabbildung. Zum Schluss lassen sich dann Aussagen über monotone Twistabbildungen auf diese Billards übertragen und der Begriff des „Längenspektrums“ im jeweiligen Kontext verallgemeinern.

Die fehlende Symmetrie der Bewegung im Magnetfeld erfordert bei der Untersuchung magnetischer Billards konsequent eine Differenzierung der rückwärtigen Bewegung und der Bewegung nach vorne. Für reversible Finsler-Billards ist diese Unterscheidung unnötig - die eingeführten Kriterien an die Vorwärts- und Rückwärtsdynamik fallen zusammen. Die Unterschiede reversibler und irreversibler Billards führen letztlich, trotz der über lange Strecken möglichen gleichzeitigen Untersuchung, zur Differenzierung dieser Klassen. Die Interpretation des magnetischen Flusses als Lagrangescher Fluss bietet gegenüber der Beschreibung als irreversibler Finsler-Fluss Vorteile. Daher erhalten wir für die jeweiligen Billardklassen verschiedene Erzeugendenfunktionen - in beiden Fällen eine Verallgemeinerung der „Länge“; im magnetischen Fall die „magnetische Länge“ in den selben Koordinaten wie bei klassischen Billards, und im anderen die Finsler-Länge mit einer verallgemeinerten Form der Koordinaten. Daneben gewährt die Beschreibung des magnetischen Flusses gegenüber der Interpretation durch eine Finsler-Metrik Freiheit bei der Wahl des

1 Einleitung

Energieniveaus der Bewegung. Statt der magnetischen Länge lässt sich dann allgemeiner die „magnetische Energie“ als Erzeugendenfunktion entsprechender magnetischer Billards bestimmen.

Unabhängig von der Interpretationsweise der Bewegung im Magnetfeld ist die Tatsache, dass die zugehörigen Trajektorien Extremale eines Variationsprinzips sind. Dieser Aspekt tritt auch bei allen wesentlichen Schritten der Untersuchung in den Vordergrund - sowohl bei der Bewegung innerhalb des Tisches, als auch bei der Reflexion. Daneben wird es erst dadurch möglich den Wechsel zwischen der Lagrangeschen und der Finsler-Betrachtung zu vollziehen und auch bei dem Nachweis der Existenz der Erzeugendenfunktionen stößt man darauf. Letztlich resultieren die zum Abschluss übertragenen Aussagen über monotone Twistabbildungen auch aus einem Variationsprinzip - hier einem diskreten. Im ersten Kapitel sollen daher Variationsargumente erläutert werden. Nach einer kurzen Übersicht über die Beschreibung Hamiltonscher Systeme im Kontext der symplektischen Geometrie folgt eine Zusammenfassung der Idee, Methode und Aussagen Lagrangescher-Mechanik und des Wechsels in die Hamiltonsche Betrachtung.

Im zweiten Kapitel wird zunächst die Bewegung im Magnetfeld untersucht. Ausgehend von der elementaren und anschaulichen physikalischen Betrachtung weisen wir nach, dass sich der allgemeine *magnetische Fluss* als Lagrangescher-Fluss beschreiben lässt. Daneben wird auch der Zugang über eine gedrehte Struktur auf dem Kotangentialbündel erläutert. Anschließend folgt eine knappe Einführung in Grundlagen der Finsler-Geometrie. Dabei ist es für unsere Zwecke wesentlich, den geodätischen Fluss einer Finsler-Metrik durch ein Variationsprinzip zu erklären. Die Einführung der *magnetischen Finsler-Metrik* und der Nachweis der erforderlichen Kriterien erlaubt es dann, im darauf folgenden letzten Abschnitt des Kapitel, den magnetischen Fluss durch das *Prinzip von Maupertuis* als geodätischen Fluss der magnetischen Finsler-Metrik aufzufassen. Das dritte Kapitel beginnt mit der Beschreibung des Modells des magnetischen Billards. Nach der Beschreibung und mathematischen Formulierung des Verhaltens am Rand, d.h. der Reflexionen, erfolgt die Definition der *Billardabbildung*. Eine kurze Erläuterung von wichtigen Beispielklassen flacher, magnetischer Billards mit konstantem Magnetfeld veranschaulicht das Zusammenspiel von Tischform und -größe sowie Magnetfeldstärke. Daneben wird an verschiedenen Stellen die zentrale Bedeutung tangentialberührender Bahnen erklärt. Der nächste Abschnitt bietet den Raum für die Einführung zentraler Kriterien für Billards. Danach werden sukzessiv Eigenschaften der Billardabbildung abgeleitet, und es folgt der Nachweis der Existenz von Erzeugendenfunktionen. Von dieser Stelle an werden magnetische Billards bzgl. des magnetisch Lagrangeschen-Flusses aufgefasst. In dieser Interpretation gelingt schließlich der Nachweis der Eigenschaften monotoner Twistabbildungen in den selben Koordinaten wie im klassischen Billard. Auch für reversible Finsler-Billards zeigen wir, dass die Billardabbildungen den Bedingungen einer monotonen Twistabbildung genügen. Im letzten Abschnitt folgt neben einer knappen Erläuterung der essenziellen Idee des Kontextes, die Übertragung von Resultaten über monotone Twistabbildungen auf die eingeführten magnetischen und reversiblen Finsler-Billards, die es erlaubt das *Finsler-Längenspektrum*, oder für magnetische Billards das *magnetische Längenspektrum* bzw. *magnetische Energiespektrum* einzuführen.

2 Grundlagen und Methoden

In der „klassischen Mechanik“ sind Bewegungsgleichungen wesentlich durch die Newtonschen Axiome gegeben. Das Wort „klassisch“ deutet an, dass relativistische oder Quanteneffekte unberücksichtigt bleiben. Der harmonische Oszillator, das mathematische Pendel oder Planetenbewegungen im Sonnensystem stellen elementare Beispiele dar und teilen ein Charakteristikum - die Energieerhaltung. In der Physik wird die Energie durch die *Hamiltonfunktion* beschrieben und Hamiltonsche Systeme sind gerade die Systeme, die der Energieerhaltung unterliegen. Den ursprünglichen Zugang zu diesen lieferte die Variationsrechnung des 18ten und frühen 19ten Jahrhunderts mit dem zugrunde liegenden „Prinzip der kleinsten Wirkung“. Eine abstraktere Betrachtung Hamiltonscher Systeme bietet die Symplektische Geometrie mit der Untersuchung symplektischer Mannigfaltigkeiten, die einer Verallgemeinerung des klassischen Phasenraums entsprechen. Wir beginnen mit einer knappen Zusammenfassung elementarer Begriffe und Aussagen und beleuchten anschließend die Motivation und Herleitung durch Variationsprinzipien. Für weiterführende Informationen zum ersten Abschnitt vergleiche man z.B. [31], [21] oder [2].

2.1 Hamiltonsche Systeme und symplektische Geometrie

Als Motivation für die folgenden Ausführungen betrachten wir ein Hamiltonsches System in der elementarsten Form. Schreiben wir $q \in \mathbb{R}^{2n}$ in der Form $q = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist ein solches System durch eine glatte (bzw. mindestens C^2) Funktion $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ und die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}$$

gegeben und wird somit durch $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben. Es sei J die $2n \times 2n$ -Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei jeder Eintrag eine $n \times n$ -Matrix darstellt. Dann lässt sich ein Hamiltonsches System durch

$$\dot{q} = J \nabla H(q)$$

in kurzer Form angeben. Als nächstes sollen Hamiltonsche Systeme in einem allgemeineren Rahmen eingeführt werden.

Definition 2.1.1 Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und ω eine Bilinearform, so dass gilt:

- ω ist schiefsymmetrisch, d.h.: $\omega(v, w) = -\omega(w, v) \quad \forall v, w \in V$
- ω ist nicht-entartet, d.h.: $\omega(v, w) = 0 \quad \forall w \in V \implies v = 0$

Dann ist (V, ω) ein *symplektischer Vektorraum* und ω eine *symplektische Form*.

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^{2n}$. Die *symplektische Standardform* bzw. *kanonische Form* ω_0 auf $V = \mathbb{R}^{2n}$ ist durch

$$\omega_0(v, w) = \langle Jv, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}$$

gegeben. Für $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt dann

$$\omega_0(v, w) = \langle Jv, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_{n+i} w_i - \sum_{i=1}^n w_{n+i} v_i$$

Führen wir für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^{2n}$ die Notation $v = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein, erhalten wir für die Standardform ω_0 die Darstellung

$$\omega_0(v, w) = \langle Jv, w \rangle = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i(v, w)$$

bzw. in Kurzform

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i = dy \wedge dx$$

Satz 2.1.2 Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum. Dann hat V gerade Dimension und besitzt eine symplektische Basis, d.h. in einem $2n$ -dimensionalen symplektischen Vektorraum V existieren Vektoren $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$, so dass

$$\omega(e_i, e_j) = 0, \quad \omega(f_i, f_j) = 0, \quad \omega(f_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Seien $v, w \in V$ bzgl. dieser Basis dargestellt, d.h. es sei

$$v = \sum_{i=1}^n (a_i e_i + a_{n+i} f_i) \quad \text{und} \quad w = \sum_{i=1}^n (b_i e_i + b_{n+i} f_i)$$

Dann gilt

$$\omega(v, w) = \omega_0(a, b)$$

Inbesondere besitzt jeder symplektische Vektorraum der Dimension $2n$ die Gestalt des Standardraums $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Die Nicht-Entartung einer symplektischen Form auf einem Vektorraum V induziert einen Isomorphismus zwischen V und dem Dualraum.

Satz 2.1.3 Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung $\iota : V \rightarrow V^*$, die durch

$$\iota(v) := \iota_v \omega := \omega(v, \cdot)$$

definiert ist, ein linearer Isomorphismus von V auf den Dualraum V^* .

Wir führen jetzt Abbildungen zwischen symplektischen Vektorräumen ein, die die symplektische Form erhalten.

Definition 2.1.4 Seien (V, ω) und (W, η) symplektische Vektorräume und $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Der Pullback $A^*\eta$ von η unter A ist durch

$$A^*\eta(v, w) := \eta(Av, Aw) \quad \forall v, w \in V$$

definiert. Die Abbildung A heißt *symplektisch*, wenn $A^*\eta = \omega$, d.h. insbesondere wenn

$$A^*\eta(v, w) = \eta(Av, Aw) = \omega(v, w) \quad \forall v, w \in V$$

Bemerkung 2.1.5 Auf dem Standardraum $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ist die symplektische Form durch $\omega_0(v, w) = \langle Jv, w \rangle$ gegeben. Eine lineare Abbildung auf dem Standardraum ist also genau dann symplektisch, wenn ihre zugehörige Matrix A die Gleichung

$$\langle JAv, Aw \rangle = \langle Jv, w \rangle$$

für alle $v, w \in V$ erfüllt. Wegen der Nicht-Entartung des Skalarproduktes ist dies äquivalent zu

$$A^T J A = J$$

und es folgt unmittelbar $\det^2(A) = 1$. Es lässt sich zeigen (vgl. z.B. [21]), dass jede lineare symplektische Abbildung die Gleichung $\det(A) = 1$ erfüllt und daher flächentreu ist.

Die Definition einer symplektischen Abbildung lässt sich jetzt kanonisch von linearen Abbildungen auf Diffeomorphismen übertragen. Man führe sich erneut vor Augen, dass jeder symplektische Vektorraum die Gestalt von $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ besitzt.

Definition 2.1.6 Sei φ ein Diffeomorphismus auf $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Der Pullback einer 2-Form η auf \mathbb{R}^{2n} unter φ ist im Punkt $q \in \mathbb{R}^{2n}$ durch

$$(\varphi^*\eta)_q(v, w) = \eta_{\varphi(q)}(D\varphi(q)(v), D\varphi(q)(w)) \quad \forall v, w \in T_q\mathbb{R}^{2n}$$

definiert. Der Diffeomorphismus φ heißt *Symplektomorphismus* oder kurz *symplektisch*, wenn

$$\varphi^*\omega_0 = \omega_0$$

Aus der Definition von ω_0 ergibt sich, dass ein Symplektomorphismus auf $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ durch die Gleichung

$$\varphi'(q)^T J \varphi'(q) = J \quad \forall q \in \mathbb{R}^{2n}$$

charakterisiert ist. Auch hier gilt $\det(\varphi'(x)) = 1$. Daher sind Symplektomorphismen flächentreu. Für $n = 1$ ist jeder flächentreue Diffeomorphismus auch symplektisch; im allgemeinen ist die Flächentreue aber nur eine notwendige Bedingung (vergleiche „Gromov Squeezing Theorem“ in [21] oder [31]).

Durch die symplektische Struktur lassen sich Hamiltonsche Vektorfelder einführen. Diese führen zu Hamiltonschen Systemen, wie wir sie zu Beginn kennengelernt haben.

Definition 2.1.7 Sei $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Für $q \in \mathbb{R}^{2n}$ gilt $dH(q) \in T_q^*\mathbb{R}^{2n}$ und die Abbildung $\iota : T_q\mathbb{R}^{2n} \rightarrow T_q^*\mathbb{R}^{2n}$, definiert durch

$$\iota(v) := \iota_v\omega_0 := \omega_0(v, \cdot)$$

ist ein Isomorphismus. Daher definiert H durch

$$\omega_0(X_H(q), \cdot) = -dH(q)$$

ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld X_H auf \mathbb{R}^{2n} , das als das zu H gehörende *Hamiltonsche Vektorfeld* bezeichnet wird. Der zugehörige Fluss φ_H^t , der durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_H^t(q) &= X_H(\varphi_H^t(q)) \\ \varphi_H^0(q) &= q, \quad q \in \mathbb{R}^{2n} \end{aligned}$$

gegeben ist, heißt *Hamiltonscher Fluss*.

Eigenschaften des Flusses und der Lösungskurven werden gleich in einer allgemeineren Situation angegeben und untersucht.

Bemerkung 2.1.8 Mit dieser Definition Hamiltonscher Vektorfelder erhält man die selben Bewegungsgleichungen, wie die der eingangs eingeführten Hamiltonschen Systeme. Dies lässt sich in wenigen Schritten anhand der Definitionsgleichung der Vektorfelder und der Standardform herleiten. Es gilt

$$\langle JX_H(q), \cdot \rangle = -dH(q)$$

und dazu äquivalent

$$\langle JX_H(q), \cdot \rangle = -\langle \nabla H(q), \cdot \rangle$$

Das Skalarprodukt ist nicht-entartet und es folgt

$$X_H(q) = -J^2X_H(q) = J\nabla H(q)$$

Setzt man wieder $q = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ liefert $\dot{q} := X_H(q)$ schließlich die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Also erfüllt eine Trajektorie $q(t) := \varphi_H^t(q)$ des Hamiltonschen Flusses die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

Wir erweitern jetzt das Konzept der symplektischen Form und Hamiltonschen Vektorfelder in kanonischer Weise auf Riemannsche-Mannigfaltigkeiten.

Definition 2.1.9 Sei M eine glatte Riemannsche-Mannigfaltigkeit und ω eine nicht-entartete, geschlossene 2-Form auf M . Dann heißt (M, ω) *symplektische Mannigfaltigkeit*. Die Form ω heißt *symplektische Form* oder auch *symplektische Struktur*.

Die Bilinearform ω_q ist nicht-entartet und schiefsymmetrisch. Der Tangentialraum $(T_q M, \omega_q)$ ist also für jedes $q \in M$ ein symplektischer Vektorraum. Daher hat eine symplektische Mannigfaltigkeit gerade Dimension.

Beispiel 2.1.10 a) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ist eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Die Standardform besitzt die Darstellung

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$$

Daher gilt $d\omega = 0$ und ω ist geschlossen.

b) Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und π die kanonische Projektion von T^*M auf M , d.h.

$$\pi : T^*M \rightarrow M, \quad \pi(q, p) := q \quad \forall (q, p) \in T^*M$$

und

$$d\pi(q, p) : T_{(q,p)}T^*M \rightarrow T_{\pi(q,p)}M = T_qM$$

Die *kanonische 1-Form* λ auf T^*M ist durch

$$\lambda_{(q,p)}(v) := p_q(d\pi(q, p)(v)), \quad v \in T_{(q,p)}T^*M$$

gegeben und wird auch *Liouville-Form* genannt. Seien $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ lokale Koordinaten von T^*M . Dann gilt

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i =: pdq$$

Mit $\omega := d\lambda$ ist (T^*M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Kotangentialbündel stellen eine wichtige Klasse symplektischer Mannigfaltigkeiten dar, da sie bei der Modellierung physikalischer Systeme dem Phasenraum eines dynamischen Systems entsprechen.

Definition 2.1.11 Es seien (M, ω) und (N, η) symplektische Mannigfaltigkeiten und $\varphi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Erfüllt φ die Gleichung

$$\varphi^*\eta = \omega$$

ist φ eine *symplektische Abbildung*. Ein symplektischer Diffeomorphismus $\varphi : M \rightarrow M$ heißt *Symplektomorphismus*. Zwei symplektische Mannigfaltigkeiten sind zueinander *symplektomorph*, wenn ein Symplektomorphismus zwischen ihnen existiert.

Wir haben gesehen, dass jeder symplektische Vektorraum die Gestalt des symplektischen Standardraums besitzt. Der *Satz von Darboux* zeigt, dass sich dies lokal auf symplektische Mannigfaltigkeiten übertragen lässt - lokal ist jede symplektische Mannigfaltigkeit symplektomorph zu $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Satz 2.1.12 Sei ω eine nicht-entartete 2-Form auf einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Dann ist ω genau dann geschlossen, wenn für jedes $q \in M$ eine Umgebung U von q in M und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{2n}$ existiert, so dass

$$\varphi^* \omega_0 = \omega$$

Insbesondere besitzt jede symplektische Mannigfaltigkeit einen symplektischen Atlas.

Bemerkung 2.1.13 Der Satz erlaubt eine äquivalente Definition einer symplektischen Mannigfaltigkeit: Eine symplektische Mannigfaltigkeit ist eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit symplektischem Atlas; d.h. es existieren Koordinatenabbildungen φ_i , die offene Mengen $U_i \subset M$ auf offene Mengen im Standardraum $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ derart abbilden, dass die Übergangsabbildungen $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ symplektisch sind.

Analog zur früheren Definition lassen sich durch die Nicht-Entartung der symplektischen Form Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit einführen.

Definition 2.1.14 Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Die symplektische Form ω erzeugt einen Isomorphismus $\iota : X \mapsto \omega(X, \cdot)$ zwischen Vektorfeldern und 1-Formen auf M . Für ein Vektorfeld X auf M heißt

$$(\iota_X \omega)(q) := \omega(X(q), \cdot) \quad \forall q \in M$$

inneres Produkt von ω mit X . Eine glatte Funktion $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugt durch

$$(\iota_{X_H} \omega)(q) = \omega(X_H(q), \cdot) = -dH(q)$$

das eindeutig bestimmte *Hamiltonsche Vektorfeld* X_H . Der zugehörige *Fluss* $\varphi_H^t := \varphi_{X_H}^t$ der durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_H^t(q) &= X_H(\varphi_H^t(q)) \\ \varphi_H^0(q) &= q, \quad q \in M \end{aligned}$$

gegeben ist, heißt *Hamiltonscher Fluss*. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz besitzt das Anfangswertproblem für jeden Anfangswert eine lokale Lösung, d.h. zu jedem $q \in M$ existiert eine *Trajektorie* $c_q : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, die durch

$$c_q(t) := \varphi_H^t(q)$$

definiert ist und daher die Gleichungen $c_q(0) = q$ und $\dot{c}_q(t) = X_H(c_q(t))$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ löst. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass sich Trajektorien lokal fortsetzen lassen. So ist der Fluss auf einer kompakten Mannigfaltigkeit *vollständig*, d.h. die Trajektorien existieren für alle Zeiten.

Für die Untersuchung des Hamiltonschen Flusses benötigen wir die Lie-Ableitung. Wir verzichten auf eine vollständige Erläuterung der Lie-Klammer etc. und beschränken uns auf die für uns zentrale Aussage. Ausführliche Informationen findet man z.B. in [23] oder auch [31].

Definition 2.1.15 Sei X ein Vektorfeld, α eine k -Form und φ_X^t der zu X gehörige Fluss auf M . Die Lie-Ableitung $L_X\alpha$ einer k -Form α in Richtung des Vektorfeldes X ist durch

$$L_X\alpha = \frac{d}{dt}(\varphi_X^t)^* \alpha \Big|_{t=0}$$

gegeben .

Satz 2.1.16 Es sei X ein Vektorfeld und α eine k -Form auf M . Die Lie-Ableitung erfüllt die Gleichung

$$L_X\alpha = \iota_X d\alpha + d(\iota_X\alpha)$$

die den Namen FORMEL VON CARTAN trägt.

Die Formel von Cartan ist ein wertvolles Hilfsmittel für den Umgang mit der Lie-Ableitung. Mit ihr werden wir gleich zentrale Eigenschaften des Hamiltonschen Flusses ableiten. Wir untersuchen, wie sich die symplektische Form unter einem Hamiltonschen Fluss verändert. Für ein Hamiltonsches Vektorfeld X_H und eine symplektische Form ω auf M gilt

$$L_{X_H}\omega = \iota_{X_H}d\omega + d(\iota_{X_H}\omega)$$

Die symplektische Form ist geschlossen. Daher gilt mit $\iota_{X_H}\omega = -dH$

$$L_{X_H}\omega = d(\iota_{X_H}\omega) = 0$$

Nach Definition der Lie-Ableitung folgt somit

$$\frac{d}{dt}(\varphi_H^t)^* \omega = (\varphi_H^t)^* L_{X_H}\omega = 0$$

d.h. der Pullback der symplektischen Form bleibt unter einem Hamiltonschen Fluss konstant. Nun gilt aber $\varphi_H^0 = id$ und daher

$$(\varphi_H^t)^* \omega = \omega$$

Insgesamt erhält man damit folgende Aussage.

Satz 2.1.17 Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und φ_H^t ein Hamiltonscher Fluss auf M . Dann gilt

$$(\varphi_H^t)^* \omega = \omega$$

d.h. Trajektorien des Hamiltonschen Flusses sind symplektisch. Insbesondere erhalten Hamiltonsche Flüsse das Volumen bzgl. der Volumenform ω^n .

Überlegen wir uns, wie sich ein Hamiltonsches Vektorfeld unter einem Symplektomorphismus verändert. Dazu sei $\varphi : (M, \omega_1) \rightarrow (M, \omega_2)$ ein Symplektomorphismus auf M und X_H ein Hamiltonsches Vektorfeld bzgl. der symplektischen Form ω_1 . Wir betrachten den *Pushforward* von X_H unter φ . Es gilt

$$\begin{aligned} \iota_{\varphi_* X_H} \omega_2 &= \iota_{d\varphi(X_H \circ \varphi^{-1})} \left((\varphi^{-1})^* \omega_1 \right) \\ &= \omega_1 \left(X_H \circ \varphi^{-1}, d\varphi^{-1}(\cdot) \right) \\ &= -dH \left(\varphi^{-1}(\cdot) \right) d\varphi^{-1}(\cdot) \\ &= -d(H \circ \varphi^{-1}) \end{aligned}$$

und es ergibt sich folgende Aussage:

Satz 2.1.18 Sei $\varphi : (M, \omega_1) \rightarrow (M, \omega_2)$ ein Symplektomorphismus und X_H ein Hamiltonsches Vektorfeld auf M bzgl. ω_1 . Dann wird X_H unter φ auf ein Hamiltonsches Vektorfeld

$$X_F := \varphi_* X_H$$

bzgl. ω_2 abgebildet, das die Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F := H \circ \varphi^{-1}$$

als Hamiltonfunktion besitzt.

Äquivalent hätte man für ein Vektorfeld X_H zur Hamiltonfunktion H bzgl. ω_2 zeigen können, dass der Pullback $X_F := \varphi^* X_H$ das Hamiltonsche Vektorfeld zur Hamiltonfunktion $F := H \circ \varphi$ bzgl. ω_1 ist.

In der Physik beschreibt die Hamiltonfunktion die Energie eines Systems, und wesentliche Eigenschaft Hamiltonscher Systeme ist dort die *Energieerhaltung*. Energieerhaltung bedeutet in unserem Kontext, dass die Hamiltonfunktion invariant unter dem zugehörigen Fluss ist. In der Tat gilt

$$\frac{d}{dt} (H \circ \varphi_H^t) = dH(\varphi_H^t) \frac{d}{dt} \varphi_H^t = dH(\varphi_H^t) (X_H(\varphi_H^t)) = -\omega(X_H(\varphi_H^t), X_H(\varphi_H^t)) = 0$$

Also bleibt die Hamiltonfunktion unter dem Fluss konstant. Anders formuliert gilt:

Satz 2.1.19 Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und φ_H^t ein Hamiltonscher Fluss auf M . Dann liegen die Trajektorien des Flusses auf Niveauflächen der Hamiltonfunktion.

Es bietet sich daher an, Niveauflächen einer Hamiltonfunktion genauer zu untersuchen. Weiterführende Informationen findet man z.B. in [21],[31].

Definition 2.1.20 Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hamiltonfunktion. Ferner sei $S := H^{-1}(c)$ eine Niveaufläche von H - auch *Energiefläche* zum *Energieniveau* c genannt. Für einen regulären Wert c ist die Energiefläche eine Untermannigfaltigkeit von M mit

$$\dim(S) = \dim(M) - 1$$

Im Punkt $x \in S$ ist der Tangentialraum $T_x S$ durch

$$T_x S = \ker(dH(x)) = \{v \in T_x M : dH(x)v = 0\}$$

gegeben. Für $x \in S$ besitzt die Einschränkung der symplektischen Form auf S einen eindimensionalen Kern

$$\mathcal{L}_x = \{v \in T_x S : \omega_x(v, w) = 0 \quad \forall w \in T_x S\}$$

Diesen Raum könnte man als *orthogonales Komplement* von $T_x S$ bzgl. ω bezeichnen. Dann gilt hier $(T_x S)^\perp \subset T_x S$, und der Unterraum $T_x S$ ist daher *kisotrop*.

Die Unterräume \mathcal{L}_x definieren das *charakteristische Geradenbündel*

$$\mathcal{L}_S = \ker(\omega|_S) = TS^\perp$$

das eng mit den Integralkurven des Hamiltonschen Vektorfeldes verknüpft ist, denn es gilt

$$dH(x)(X_H(x)) = -\omega(X_H(x), X_H(x)) = 0$$

und daher

$$X_H(x) \in \mathcal{L}_x$$

für jedes $x \in S$. Die Integralkurven heißen daher auch *Charakteristiken von S*. Insbesondere liegen Hamiltonsche Flüsse tangential zu Energieflächen der Hamiltonfunktion.

2.2 Variationsmethoden und das Prinzip der kleinsten Wirkung

Das zweite Newtonsche Gesetz $F = m \cdot a$ bildet die Grundlage für die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik. Die Beschleunigung a entspricht der zweiten Ableitung des Ortes nach der Zeit, so dass die Bewegungsgleichung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung entspricht. Führt man die Geschwindigkeit als Ableitung des Ortes nach der Zeit ein, lässt sich die Differentialgleichung in ein System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung im Raum der Koordinaten Ort und Geschwindigkeit überführen. Die *Lagrangesche Mechanik* ist durch die Newtonsche Mechanik motiviert und erklärt, welches Grundprinzip sich hinter den Bewegungsgleichungen verbirgt. Bevor dies formuliert wird, sollen zunächst die im Folgenden benutzten Bezeichnungen erläutert werden.

Es sei M eine Riemannsche-Mannigfaltigkeit. Ein Punkt im Tangentialbündel TM besitzt die Koordinaten (q, v) mit dem Ort $q \in M$ und der *Geschwindigkeit* $v \in T_q M = \pi^{-1}(q)$. Dabei beschreibt $\pi : TM \rightarrow M$ die kanonische Projektion auf den Fußpunkt. Ein Punkt im Kotangentialbündel T^*M hat die Koordinaten (q, p) mit dem Ort $q \in M$ und dem *Impuls* $p \in T_q^* M = \pi^{-1}(q)$ bzgl. der kanonischen Projektion $\pi : T^*M \rightarrow M$. Die Mannigfaltigkeit M heißt *Konfigurationsraum* und ist der Ort, in dem die eigentliche Bewegung stattfindet. Der Konfigurationsraum gibt lediglich Aufschluss über den Ort. Eine Kurve γ in M mit Ort $\gamma(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t)$ lässt

sich in das Tangentialbündel übertragen - den *Phasenraum*, der den Ort und die Geschwindigkeit beschreibt. Physikalisch ist die Geschwindigkeit über die Masse mit dem Impuls verknüpft. Der Impuls entspricht in der Newtonschen Mechanik gerade der Masse mal der Geschwindigkeit. Anders aufgefasst ist der Impuls damit ein Funktional auf dem „Raum der Geschwindigkeiten“. In mathematischer Interpretation ist der Impuls p am Ort q ein Element des Kotangentialraums T_q^*M . Eine Kurve im Konfigurationsraum lässt sich durch Ort und Geschwindigkeit in das Tangentialbündel übertragen und von hier aus durch Zuordnung von Impulsen in das Kotangentialbündel T^*M - den Phasenraum der Orte und Impulse. Im Fall der Newtonschen Mechanik ist diese Zuordnung wie oben dargelegt besonders einfach. Dieser elementare Übergang von Geschwindigkeit zum Impuls ist aber nicht allgemeingültig, sondern folgt ebenfalls einer Regel, die sich aus der Lagrangeschen Mechanik ergibt. Dort lassen sich sämtliche Informationen aus der *Lagrangefunktion* gewinnen. Der zugehörige Ort zur Beschreibung der Bewegung ist das Tangentialbündel. Durch das zugehörige Variationsprinzip erhält man die Bewegungsgleichungen, die wie im Newtonschen Fall Differentialgleichungen zweiter Ordnung entsprechen. Auch der Wechsel in das Kotangentialbündel wird durch die Lagrangefunktion beschrieben - mit ihr lässt sich die *Legendre-Transformation* einführen. Das Kotangentialbündel ist der Ort zur Beschreibung der Bewegung im Sinne der *Hamiltonschen Mechanik*.

Die Begriffe und Zusammenhänge sollen im Folgenden in knapper Form erläutert werden. Die Lagrangefunktion lässt sich auch für zeitabhängige Probleme einführen. Da für uns nur der zeitunabhängige Fall von Bedeutung sein wird, lassen wir die Untersuchung der Zeitabhängigkeit aus. Für genauere Ausführungen betrachte man z.B [17] oder [1], [2], [34], [12] und [24]. Eine knappe physikalische Motivation findet man in [23].

Im Folgenden ist M stets eine n -dimensionale, glatte Riemannsche-Mannigfaltigkeit und explizite Rechnungen und Darstellungen sind immer in lokalen Koordinaten zu verstehen.

Definition 2.2.1 Sei L eine glatte Funktion $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$.

Ferner sei $\Pi := \{\gamma : [a, b] \rightarrow M \mid \gamma \text{ glatt und } \gamma(a) = q_1, \gamma(b) = q_2\}$. Das *Lagrangesche-Wirkungsfunktional* oder kurz die (*Lagrangesche-*) *Wirkung* ist durch

$$A_L(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

auf Π definiert. Die Funktion L heißt *Lagrangefunktion*.

Zur Motivation des Lagrangeschen Variationsproblems betrachte man folgende Problemstellung: Gesucht sei die Kurve in Π , die die Wirkung minimiert, d.h. gesucht ist $\gamma_0 \in \Pi$ mit $A_L(\gamma_0) \leq A_L(\gamma)$ für alle $\gamma \in \Pi$. Man beachte aber, dass solch ein Minimum nicht notwendigerweise existiert oder in Π enthalten ist. Wesentlich ist, dass minimale Kurven eine notwendige Bedingung erfüllen - die sogenannten *Euler-Lagrange-Gleichungen*, die wir gleich herleiten werden. Die gesuchten Kurven des *Lagrangeschen Variationsproblems* sind gerade diejenigen, die die Euler-Lagrange-

Gleichungen lösen. Diese müssen aber nicht zwingend Minima der Lagrangeschen-Wirkung sein.

Es sei angemerkt, dass man bei der Einführung des Lagrangeschen Variationsproblems Regularitätsuntersuchungen einfließen lassen kann. Üblicherweise fordert man, dass die Lagrangefunktion mindestens eine C^2 -Funktion ist, um gewünschte Resultate zu erhalten, und die Kurven γ stetig differenzierbar seien; allerdings genügt dies stückweise. Die Forderungen lassen sich in der Tat aber weiter abschwächen, indem man den Raum der lediglich Lipschitz-stetige Kurven betrachtet, oder gar den Raum der absolutstetigen Kurven. Wir lassen solche Überlegungen aus und fordern überall Glattheit. Weiterführende Informationen bzgl. der Regularität findet man z.B in [17].

Wir werden im weiteren Verlauf wiederholt Variationsargumenten begegnen, so dass es lohnenswert ist, die allgemeine Methodik ein wenig auszuführen.

Dabei verwenden wir Aussagen, die an dieser Stelle nicht ausgearbeitet werden sollen. So wäre mit dem Satz von Lebesgue nachzuweisen, dass die Zuordnung $\gamma \mapsto A_L(\gamma)$ eine glatte Abbildung ist, sowie die Menge Π als unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit einzuführen und der Tangentialraum in einer Kurve $\gamma \in \Pi$ zu untersuchen (vgl. dazu z.B. [1] und [17]). Wir begnügen uns mit der heuristischen Anschauung.

Definition 2.2.2 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve in M und ferner $V : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Abbildung, so dass

- $V(0, t) = \gamma(t), \quad \forall t \in [a, b]$
- $V(s, a) = \gamma(a)$ und $V(s, b) = \gamma(b) \quad \forall s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

Dann heißt V eine *Variation von γ mit festen Endpunkten*. Insbesondere ist die Einschränkung $\gamma_s(t) := V(s, t)$ für jedes $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ eine Kurve von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ und heißt *Kurve der Variation*. Für jedes $t \in [a, b]$ ist die Einschränkung $c_t(s) := V(s, t)$ eine glatte Kurve von $V(-\varepsilon, t)$ nach

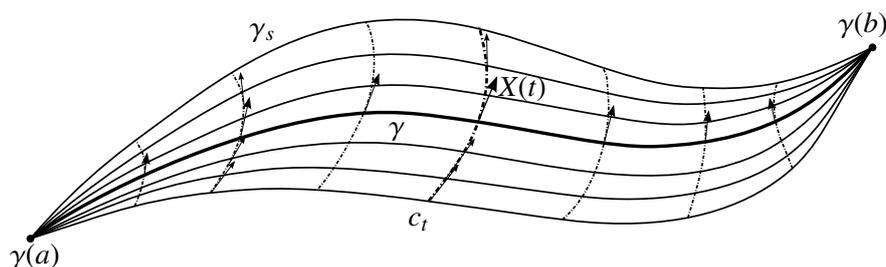


Abbildung 2.1: Variation der Kurve γ mit festen Endpunkten

$V(\varepsilon, t)$. Wir folgen der Bezeichnung in [11] und nennen eine solche Kurve *transversale Kurve der Variation*. Für $s = 0$ liefert der Geschwindigkeitsvektor $\dot{c}_t(s)$ von c_t ein glattes Vektorfeld

$$X(t) := \frac{\partial V(0, t)}{\partial s}$$

entlang γ - das Variationsfeld von V . Insbesondere gilt $X(a) = X(b) = 0$. Ein Tangentialvektor $v \in T_\gamma\Pi$ ist durch das Variationsfeld einer Variation von γ gegeben.

Definition 2.2.3 Sei L eine Lagrangefunktion und A_L die zugehörige Wirkung.

Eine Kurve $\gamma \in \Pi$, die

$$dA_L(\gamma) = 0$$

erfüllt, heißt *Extremale* in Π .

Lemma 2.2.4 Sei $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lagrangefunktion. Eine Kurve $\gamma \in \Pi$ ist genau dann eine Extremale, wenn sie die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial v} - \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial q} = 0$$

erfüllt.

BEWEIS Sei $\gamma \in \Pi$ und v ein Tangentialvektor, d.h. das Variationsfeld einer Variation von γ . Dann gilt unter Verwendung der Kettenregel

$$dA_L(\gamma)(v) = \left. \frac{d}{ds} A_L(\gamma_s) \right|_{s=0}$$

Eine Kurve ist daher genau dann eine Extremalkurve der Wirkung, wenn

$$\left. \frac{d}{ds} A_L(\gamma_s) \right|_{s=0} = 0$$

für jede Variation dieser Kurve. Unter Verwendung partieller Integration rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} A_L(\gamma_s) \right|_{s=0} &= \left. \frac{d}{ds} \int_a^b L(\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)) dt \right|_{s=0} \\ &= \int_a^b \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial q} \frac{\partial V(0, t)}{\partial s} + \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial v} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial V(0, t)}{\partial t} dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial L(\dots)}{\partial q} \frac{\partial V(0, t)}{\partial s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dots)}{\partial v} \frac{\partial V(0, t)}{\partial s} dt + \left[\frac{\partial L(\dots)}{\partial v} X(t) \right]_a^b \end{aligned}$$

Gilt $\left. \frac{d}{ds} A_L(\gamma_s) \right|_{s=0} = 0$ für alle Variationen von γ , folgt also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial v} = \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial q}$$

und damit die Aussage. ■

Von diesen Gleichungen ausgehend können wir jetzt das Euler-Lagrange-Vektorfeld und den zugehörigen Fluss auf dem Tangentialbündel herleiten. Eine Extremalkurve erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichungen und daher auch

$$\frac{\partial^2 L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial q \partial v} (\dot{\gamma}(t)) + \frac{\partial^2 L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial v^2} (\ddot{\gamma}(t)) = \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial q}$$

Fordern wir, dass $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ nicht-entartet ist (d.h. in lokalen Koordinaten besitzt die zugehörige Matrix vollen Rang), lässt sich die Gleichung lokal nach $\dot{\gamma}$ auflösen. Dann genügt eine Extremale lokal einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und man erhält ein zugehöriges Vektorfeld

$$X_L(q, v) = (v, F(q, v)) \in T_{(q,v)}TM$$

wobei die Funktion F wegen der Definitheit von $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 L(q, v)}{\partial v^2} (F(q, v))(\cdot) = \frac{\partial L(q, v)}{\partial q}(\cdot) - \frac{\partial^2 L(q, v)}{\partial q \partial v} (v)(\cdot)$$

eindeutig bestimmt ist. Das Vektorfeld ist wieder glatt. Nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz existieren daher lokal Lösungskurven und diese sind eindeutig. Eine Trajektorie des Flusses hat die Form $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ mit $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ und $\ddot{\gamma}(t) = F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ und erfüllt folglich die Euler-Lagrange-Gleichungen. Sei andersrum γ eine Extremale des Lagrangeschen Variationsprinzips. Dann ist die Kurve $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ in TM eine Trajektorie des Flusses von X_L .

Definition 2.2.5 Gegeben sei eine Lagrangefunktion L , so dass $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ nicht-entartet ist. Das zugehörige Vektorfeld X_L auf dem Tangentialbündel heißt *Euler-Lagrange-Vektorfeld* und der zugehörige Fluss *Euler-Lagrange-Fluss*.

Man beachte, dass der Euler-Lagrange-Fluss eine Lagrangefunktion nicht eindeutig festlegt. Addiert man eine geschlossene 1-Form zu einer Lagrangefunktion, ändern sich die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht. Dazu betrachte man das Variationsprinzip: das Integral über die geschlossene 1-Form entlang einer Variationskurve γ_s ist unabhängig von s - die Variationskurven besitzen alle dieselben Endpunkte und sind zueinander homotop. Daher ändert das Integral über die 1-Form die Wirkung nur um eine Konstante und hat keinen Einfluss auf die Extremalkurven.

Im Lagrangeschen Variationsproblem sind Extremale der Lagrangeschen-Wirkung gesucht - dies sind gerade die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen bilden aber auch ein notwendiges Kriterium für die Minimalität einer Kurve. Die eingeführte Bedingung der Nicht-Entartung von $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ (die sog. *Legendre-Bedingung*) sichert lokal die Existenz von Lösungskurven des Euler-Lagrangeschen-Flusses. Fordert man hier positive Definitheit (d.h. strikte Konvexität von L in den Fasern), lässt sich mit der Wirtinger-Ungleichung zeigen, dass Lösungskurven tatsächlich lokale Minimierer der Wirkung sind (vgl. dazu z.B. [10]). Die Lösungen sind i.a. aber keine globalen Minimierer. Als Beispiel diene der geodätische Fluss auf der Sphäre - dieser lässt sich durch eine Lagrangefunktion beschreiben ([11]).

Wir führen jetzt eine Wachstums- und Konvexitätsbedingung für Lagrangefunktionen ein. Neben der Tatsache, dass Lösungskurven dann lokale Minimierer der Wirkung sind, können wir dadurch den Übergang zum Hamiltonschen Prinzip beschreiben.

Definition 2.2.6 Eine Lagrangefunktion heißt

- *strikt konvex in den Fasern*, wenn die Bilinearform $\frac{\partial^2 L(q,v)}{\partial v^2}$ für alle $(q, v) \in TM$ positiv definit ist.
- *superlinear in den Fasern*, wenn

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{L(q, v)}{|v|} = \infty$$

für jeden Punkt q in M .

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich anhand der Lagrangefunktion eine Transformation zwischen dem Tangential- und Kotangentialbündel definieren. Wir starten mit einer Definition auf Vektorräumen. Nachweise der Aussagen findet man z.B. in [17].

Definition 2.2.7 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, V^* der Dualraum von V und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion $g : V^* \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$g(p) := \sup_{v \in V} (p(v) - f(v))$$

definiert ist, heißt *Fenchel-Transformierte* von f .

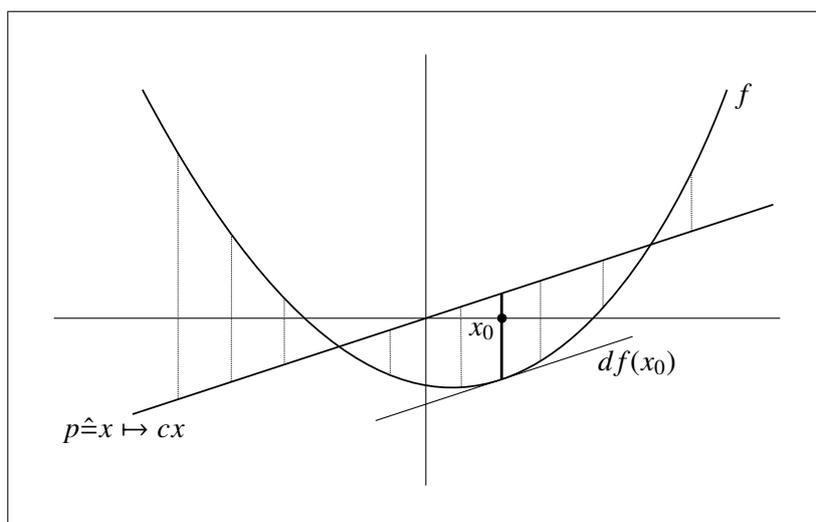


Abbildung 2.2: Illustration der Fenchel-Transformation

- Es lässt sich zeigen, dass die Fenchel-Transformierte für superlineare Funktionen überall endliche Werte annimmt.
- Ist f darüber hinaus differenzierbar und konvex, gilt

$$p(v) = g(p) + f(v) \iff p = df(v)$$

Insbesondere wird das Supremum für $p = df(v)$ angenommen.

- Ist f sogar strikt konvex, liegt hier Eindeutigkeit vor. Dann gibt es zu $p \in V^*$ genau ein $v \in V$, so dass

$$g(p) = df(v) - f(v)$$

Die Funktion g ist dann ebenfalls strikt konvex und die Fenchel-Transformierte von g ist wieder f .

Die zur Funktion f gehörige Abbildung $\mathcal{F} : V \rightarrow V^*$, die durch $\mathcal{F}(v) := df(v)$ gegeben ist, heißt *Fenchel-Transformation*. Für f mit obigen Eigenschaften und ein $v = v(p)$ gilt dann $g(p) = g \circ \mathcal{F}(v)$.

Durch die Superlinearität von f ist \mathcal{F} surjektiv, durch die strikte Konvexität injektiv.

Für eine strikt konvexe, differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich der Vorgang einfach illustrieren (vgl. Abbildung 2.2).

Durch „faserweise“ Anwendung der Fenchel-Transformation auf eine Lagrangefunktion erhält man die Legendre-Transformation.

Definition 2.2.8 Sei L eine glatte, in den Fasern superlineare und strikt konvexe Lagrangefunktion. Für $q \in M$ bildet man die Fenchel-Transformierte von $L_q = L(q, \cdot)$ und erhält die Funktion $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$H(q, p) := \sup_{v \in T_q M} (p(v) - L(q, v))$$

Insbesondere gibt es dann zu jedem $p \in T_q^* M$ genau ein $v \in T_q M$, so dass

$$H(q, p) = p(v) - L(q, v) \Big|_{p = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v}} = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v}(v) - L(q, v)$$

Die Abbildung $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$, gegeben durch

$$\mathcal{L}(q, v) := \left(q, \frac{\partial L(q, v)}{\partial v} \right)$$

heißt *Legendre-Transformation* zu L .

Die Funktion H ist die *Legendre-Transformierte* von L und heißt *Hamiltonfunktion*.

Das Bild

$$p = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v}$$

von $v \in T_q M$ unter der Legendre-Transformation nennen wir *Impuls*.

Man beachte, dass die Legendre-Transformierte der Hamiltonfunktion wieder die Lagrangefunktion ist. Die Legendre-Transformation ist offensichtlich eine glatte Abbildung. Die Lagrangefunktion ist strikt konvex in den Fasern. Betrachtet man die Ableitung

$$d\mathcal{L}(q, v) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial^2 L(q, v)}{\partial q \partial v} \\ 0 & \frac{\partial^2 L(q, v)}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

erkennt man, dass \mathcal{L} daher ein Diffeomorphismus ist.

Das Euler-Lagrange-Vektorfeld X_L wird durch die Legendre-Transformation diffeomorph auf das *Hamiltonsche-Vektorfeld* X_H abgebildet, und die zugehörigen Flüsse sind zueinander konjugiert. Dies lässt sich auch durch Variationsargumente festhalten.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Extremale von $A_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ mit festen Endpunkten. Dann ist $(\gamma, \frac{\partial L}{\partial v} \circ \dot{\gamma}) : [a, b] \rightarrow T^*M$ Extremale der *Hamiltonschen-Wirkung*

$$A_H(c) := \int_a^b p(t)(\dot{q}(t)) - H(q(t), p(t)) dt$$

für Kurven $c : [a, b] \rightarrow T^*M$ der Form $c(t) = (q(t), p(t))$ mit festen Endpunkten $q(a), q(b)$ in M , denn es gilt

$$p(t)(\dot{q}(t)) - H(q(t), p(t)) = L(q(t), \dot{q}(t))$$

genau für

$$p(t) = \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial v}$$

Sei andersrum $c = (q, p) : [a, b] \rightarrow T^*M$ eine Extremale von A_H mit festen Endpunkten in M . Dann ist $p(t)(\dot{q}(t)) - H(q(t), p(t))$ in jeder Faser $T_{q(t)}^*M$ extremal. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn

$$p(t)(\dot{q}(t)) = \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial v}(\dot{q}(t))$$

Dann gilt aber

$$c(t) = \left(q(t), \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial v} \right)$$

und die Kurve q ist eine Extremale von A_L . Wir erhalten zusammengefasst folgende Aussage:

Lemma 2.2.9 *Sei L eine in den Fasern superlineare und strikt konvexe Lagrange-funktion. Dann ist die zugehörige Legendre-Transformation ein Diffeomorphismus von TM auf T^*M . Der Euler-Lagrange-Fluss ist konjugiert zum Hamilton-Fluss auf T^*M . Extremale der Lagrangeschen-Wirkung mit festen Endpunkten sind Extremale der Hamiltonschen-Wirkung mit festen Endpunkten in M und umgekehrt.*

Aus dem Lagrangeschen-Variationsprinzip ergaben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen. Mit dem selben Ansatz und einer folgenden Rechnung bzgl. der Hamiltonschen-Wirkung ließen sich auch hier Gleichungen herleiten, die Extremale der Hamiltonschen-Wirkung charakterisieren. Mit dem vorhandenen Wissen ergeben sich diese aber auch auf kürzerem Wege. Wir betrachten das Differential der Hamiltonfunktion. Es gilt

$$dH(q, p) = \frac{\partial H(q, p)}{\partial q} dq + \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} dp$$

Gleichzeitig gilt für $p = \frac{\partial L}{\partial v}$ aber auch

$$H(q, p) = p(v) - L(q, v)$$

und daher

$$dH = v dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq$$

Es folgt also, dass

$$v = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Erfüllt eine Kurve $q : [a, b] \rightarrow M$ die Euler-Lagrange-Gleichungen, gilt $\dot{q} = v$ und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Dann folgt aus der Legendre-Transformation aber sofort $\frac{d}{dt} p = \frac{\partial L}{\partial q}$ und insgesamt

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Wir erhalten damit insgesamt folgende Aussage:

Lemma 2.2.10 *Sei L eine in den Fasern superlineare und strikt konvexe Lagrangefunktion. Dann sind die Euler-Lagrange-Gleichungen bzgl. der Legendre-Transformation äquivalent zu den Hamiltonschen-Bewegungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

Insbesondere können wir festhalten, dass die Hamiltonschen-Bewegungsgleichungen, die wir eingangs zur Motivation und als Grundlage für die symplektische Geometrie betrachtet hatten, Resultat eines Variationsprinzips sind. Ist die Hamiltonfunktion die Legendre-Transformierte einer geeigneten Lagrangefunktion, sind der Hamiltonsche- und der Euler-Lagrange-Fluss zueinander konjugiert.

Wir schließen den Abschnitt mit einem Beispiel, das den Bezug zur physikalischen Motivation verdeutlicht.

Beispiel 2.2.11 Wir betrachten die Bewegung eines Massepunktes (ohne Einheiten) im Raum mit Ort $q = q(t)$ unter dem Einfluss eines Potentials $V = V(q)$. Das Potential beschreibt dabei die potentielle Energie am Ort q .

Die Geschwindigkeit entspricht $\dot{q}(t) = v(t)$ und die kinetische Energie ist gegeben durch $E = E(v) = \frac{1}{2}|v|^2$. Wir untersuchen die Lagrangefunktion

$$L(q, v) = E(v) - V(q) = \frac{1}{2}|v|^2 - V(q)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben dann

$$\ddot{q}(t) = -V'(q(t))$$

In der Newtonschen Interpretation ist somit $-V'$ die Kraft, die auf den Massepunkt wirkt. Als einfaches Beispiel stelle man sich V als Gravitationspotential vor. Dann entspricht $-V'$ gerade der

2 Grundlagen und Methoden

Anziehungskraft, die auf eine Masse wirkt.

Aus der Lagrangefunktion berechnen wir den Impuls. Es ergibt sich hier $p = \frac{\partial L}{\partial v} = v$ (aufgefasst als Funktional), was genau der klassischen Newtonschen Interpretation entspricht (hier ist $p = mv$, aber wir vernachlässigen Einheiten).

Die Hamiltonfunktion genügt der Vorschrift

$$H(q, p) = p(v) - L(q, v)|_{p=v} = |p|^2 - \left(\frac{1}{2}|v|^2 - V(q)\right)|_{p=v} = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$$

und beschreibt damit die Gesamtenergie des Systems. Bei der Untersuchung Hamiltonscher-Vektorfelder im Rahmen der symplektischen Geometrie haben wir gesehen, dass die Hamiltonfunktion konstant auf Lösungskurven des Hamiltonschen-Flusses ist. Wir sehen hier, dass dies explizit der Energieerhaltung im physikalischen Sinne entspricht.

3 Magnetfelder und Finsler-Geometrie

Ein elektromagnetisches Teilchen bewegt sich durch ein Magnetfeld und erfährt eine Ablenkung. Die resultierende Bewegung nutzen wir als Anschauung und Motivation *Magnetfelder* in einem allgemeineren Kontext einzuführen und die zugehörige Bewegung zu untersuchen. Anschließend folgt ein kleiner Exkurs in die *Finsler-Geometrie*, die eine Verallgemeinerung Riemannscher Geometrie darstellt. Nach einer kurzen Erläuterung der wesentlichen Begriffe und Eigenschaften definieren wir den Finsler-geodätischen-Fluss und führen eine für unsere Zwecke zentrale Finsler-Metrik ein. Sowohl der magnetische Fluss, als auch der Finsler-geodätische-Fluss lassen sich im Rahmen Lagrangescher-Mechanik beschreiben, und Trajektorien der Bewegung entsprechen jeweils Extremalen eines Variationsprinzips. Im letzten Abschnitt weisen wir dann nach, dass der magnetische Fluss unter geeigneten Voraussetzungen als geodätischer Fluss der eingeführten Finsler-Metrik interpretiert werden kann.

3.1 Bewegung im Magnetfeld

In der Physik versteht man ein Magnetfeld als Vektorfeld im dreidimensionalen Raum, welches üblicherweise mit $\vec{B} = \vec{B}(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnet wird. Bewegt sich eine Punktladung in Abwesenheit eines elektrischen Feldes durch ein Magnetfeld, erfährt es eine Kraft, die senkrecht zur Bewegungsrichtung steht - die sogenannte „Lorentzkraft“. Sie verändert die Bewegungsrichtung des Teilchens, ohne es zu beschleunigen. Die resultierende Ablenkung unterliegt der „rechten Hand“-Regel: Daumen, Zeige- und Mittelfinger werden senkrecht zueinander gehalten. Zeigt der Daumen in Richtung des Magnetfeldes und der Zeigefinger in Bewegungsrichtung, gibt der Mittelfinger die Richtung der resultierenden Kraft und damit der Auslenkung an. Vernachlässigt man Maßeinheiten, ist die Lorentzkraft gegeben durch:

$$\vec{F}_L = \vec{v} \times \vec{B}$$

Das elementare Modell des magnetischen Billard, das wir später untersuchen wollen, unterliegt den folgenden Voraussetzungen: Eine Punktladung bewegt sich in der Ebene, welche senkrecht von einem Magnetfeld durchstoßen wird. Die resultierende Lorentzkraft liegt daher ebenfalls in der Ebene und lenkt das Teilchen, senkrecht zum Magnetfeld stehend, ab. Die sich ergebende Bewegung des Teilchens liegt damit vollständig in der Ebene.

Sei \vec{v} der in der Ebene liegende Geschwindigkeitsvektor des Teilchens am Ort \vec{x} und \vec{B} das Ma-

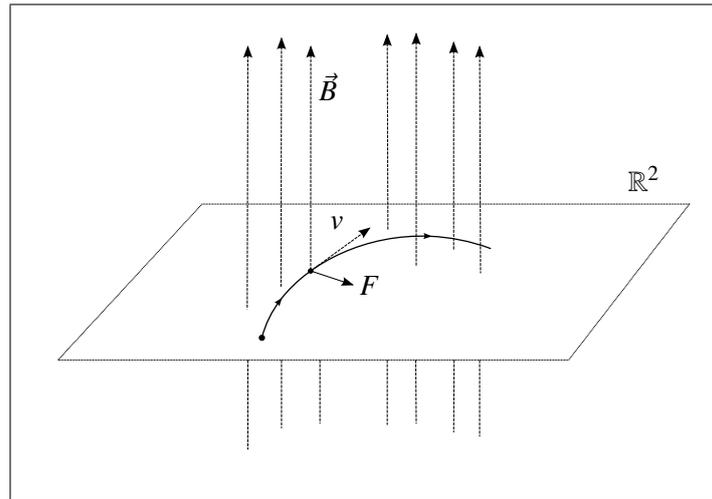


Abbildung 3.1: Bewegung im Magnetfeld

gnetfeld in \vec{x} . Dann gilt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{F}_L = \begin{pmatrix} v_2 \cdot B(x_1, x_2) \\ -v_1 \cdot B(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Von dieser physikalischen Motivation ausgehend, führen wir jetzt die auch in der Literatur verwendeten Notationen ein und interpretieren anschließend den Begriff des Magnetfeldes in einem allgemeineren Kontext. Dabei verwenden wir, wie im vorherigen Kapitel, die allgemein üblichen Buchstaben, selbst wenn sie nicht einer intuitiven Wahl entsprechen („The rather ugly choice of the letters $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ is dictated by tradition“ [35]). Im Folgenden beschreiben wir die Bewegung des Teilchens durch den Ort q , die Geschwindigkeit \dot{q} und die ablenkende Kraft \ddot{q} zur Zeit t . Da die Bewegung in der Ebene stattfindet, genügt es diese Ausdrücke als zweidimensionale Elemente aufzufassen. Führen wir die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ein, ergibt sich aus obiger Formel der Lorentzkraft:

$$\ddot{q} = B(q) T \dot{q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(q) \dot{q}_1 \\ B(q) \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_2 B(q) \\ -\dot{q}_1 B(q) \end{pmatrix}$$

Man beachte insbesondere, dass die erste Koordinate der Kraft von der zweiten Koordinate der Geschwindigkeit abhängt, sowie die zweite Koordinate der Kraft von der ersten der Geschwindigkeit. Dieser Umstand ist der Tatsache geschuldet, dass die Kraft senkrecht auf der Geschwindigkeit

steht. Besonders hervorgehoben wird dieser Aspekt, weil diese „Drehung“ in den Koordinaten wesentliche Eigenschaft der Bewegung im Magnetfeld ist und bei der Beschreibung von Magnetfeldern in verallgemeinerter Form namensgebend auftaucht. Magnetfelder lassen sich, wie wir noch sehen werden, durch eine „gedrehte Struktur“ auf dem Kotangentialbündel interpretieren.

Bemerkung 3.1.1 Für ein positives Magnetfeld, d.h. $B(q) > 0$ erfährt das Teilchen eine Ablenkung im Uhrzeigersinn. Dies steht scheinbar im Gegensatz zur klassischen Definition aus der Physik. Tatsächlich geht dies aber lediglich auf die Vernachlässigung von Maßeinheiten zurück. Im Standardbeispiel der Physik - die Bewegung eines Elektrons im Magnetfeld - geht bei der Berechnung der Lorentzkraft die Ladung des Teilchens ein. Diese ist in diesem Fall negativ, so dass ein Elektron von einem positiven Magnetfeld in mathematisch positive Richtung abgelenkt wird. In der Literatur wird dieser Aspekt nicht einheitlich behandelt. So wird die Matrix T z.B. in [44] mit gedrehten Vorzeichen gewählt, so dass hier für positive Felder trotz fehlender Einheiten eine Ablenkung nach links stattfindet. Wir wählen T klassisch und sagen, für negative Felder erhalten wir eine mathematisch positive Ablenkung.

Unabhängig von der Wahl des Vorzeichens ist aber, dass eine Bahn im Magnetfeld nicht reversibel ist. Hat sich ein Teilchen von einem Punkt q_1 nach q_2 bewegt und dabei eine Ablenkung im Uhrzeigersinn erfahren und man startet nun rückwärtig von q_2 ausgehend, erfährt das Teilchen erneut eine Ablenkung im Uhrzeigersinn. Um auf der ursprünglichen Bahn zurückzulaufen, müsste man in jedem Punkt das Magnetfeld umkehren.

Wir haben gerade gesehen, dass die Bewegung im Magnetfeld einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Wir überführen diese jetzt in ein System erster Ordnung. Dazu seien

$$\begin{aligned}\dot{q} &:= v \\ \dot{v} &:= B(q)Tv\end{aligned}$$

Dadurch verlagern wir die Bewegung in den Phasenraum $T\mathbb{R}^2$ - das Gleichungssystem beschreibt ein Vektorfeld $X = (\dot{q}, \dot{v})$ auf $T\mathbb{R}^2$. Als nächstes soll die Bewegung im Magnetfeld in den Kontext der Lagrangeschen und Hamiltonschen Mechanik eingebettet werden. Dazu stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung: entweder wir wählen eine geeignete Lagrangefunktion zur Beschreibung des Einflusses des Magnetfeldes auf die Bewegung, oder wir erreichen dies in der Hamiltonschen Interpretation durch eine Anpassung der symplektischen Struktur (die „twisted structure“) im Kotangentialbündel. Während der zweite Zugang eine allgemeinere Definition eines Magnetfeldes zulässt, erlaubt uns der erste einen Wechsel zwischen der Lagrangeschen- und Hamiltonschen Betrachtung durch die Legendre-Transformation. In der Literatur finden sich zahlreiche Arbeiten, die den Zugang in knapper Form erläutern (vgl. z.B. [41], [9], [18], [33] oder [12] neben vielen anderen). Wir starten mit einer expliziten Ausführung und erläutern dabei auch, wie sich die allgemeine Definition in das physikalische Modell der ursprünglichen Motivation übersetzt. Im Folgenden sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

Definition 3.1.2 Sei β eine exakte 2-Form auf M , d.h. $\beta = d\alpha$ für eine 1-Form α .

Der von der Lagrangefunktion $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$L(q, v) := \frac{1}{2}|v|^2 + \alpha_q(v)$$

erzeugte Euler-Lagrange-Fluss auf TM heißt *magnetischer (Lagrangescher-) Fluss*. Die Lagrangefunktion heißt auch *magnetische Lagrangefunktion*. Wie in 2.2.6 erläutert wurde, ist der Fluss unabhängig von der Wahl von α .

Man beachte, dass $|\cdot|$ stets bzgl. der Riemannschen Metrik von M zu verstehen ist, d.h. insbesondere, dass $|v|$ der Kurznotation von $|v|_q$ entspricht.

Bemerkung 3.1.3 Eine Lagrange-Funktion ist *symmetrisch*, wenn gilt, dass

$$L(q, v) = L(q, -v)$$

für alle $(q, v) \in TM$. Für den zugehörigen Fluss bedeutet Symmetrie, dass eine rückwärts durchlaufene Trajektorie des Flusses wieder eine Trajektorie des Flusses ist, denn:

ist $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Trajektorie des Flusses, erfüllt γ die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen. Die Umkehrung der Orientierung liefert die Kurve $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$ mit $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$ und $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = -\dot{\gamma}(a + b - t)$. Ist die Lagrange-Funktion symmetrisch, löst also auch $\tilde{\gamma}$ die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Offensichtlich ist die magnetische Lagrangefunktion i. a. nicht symmetrisch, denn ist α nicht Null, gilt für $\alpha_q \neq 0$ in der Tat

$$L(q, v) \neq L(q, -v)$$

für $v \in T_qM$ mit $\alpha_q(v) \neq 0$. Rückwärts durchlaufenen Trajektorien des Flusses sind dann i.a. keine Trajektorien mehr. Sie sind Trajektorien der Lagrangefunktion

$$L(q, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - \alpha_q(v)$$

Dies entspricht einer Umkehrung des Magnetfeldes (vgl. auch Bemerkung 3.1.1).

Satz 3.1.4 Sei $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$E(q, v) := \frac{1}{2}|v|^2$$

die KINETISCHE ENERGIE(-FUNKTION). Die kinetische Energie ist auf Trajektorien des magnetischen Flusses konstant; d.h. insbesondere liegen Trajektorien des magnetischen Flusses auf Energieflächen $E^{-1}(c)$, $c > 0$.

Der magnetische (Lagrangesche-) Fluss ist vollständig, d.h. Trajektorien existieren für alle Zeiten.

BEWEIS In lokalen Koordinaten beschreibe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt. Dann gilt $\alpha_q(v) = \langle F(q), v \rangle$ mit einem Vektorfeld $F(q) = (f_1(q), \dots, f_n(q))^T$. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Trajektorie des magnetischen

Flusses (bzw. präziser formuliert die Kurve $c : [a, b] \rightarrow TM$ mit $c(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$). Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern dann für $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial v_k} - \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial q_k} \\
 = & \frac{d}{dt} \left(\dot{\gamma}_k(t) + f_k(\gamma(t)) \right) - \left(\frac{\partial f_1(\gamma(t))}{\partial q_k} \dot{\gamma}_1(t) + \dots + \frac{\partial f_n(\gamma(t))}{\partial q_k} \dot{\gamma}_n(t) \right) \\
 = & \ddot{\gamma}_k(t) + \left(\frac{\partial f_k(\gamma(t))}{\partial q_1} \dot{\gamma}_1(t) + \dots + \frac{\partial f_k(\gamma(t))}{\partial q_n} \dot{\gamma}_n(t) \right) \\
 & - \left(\frac{\partial f_1(\gamma(t))}{\partial q_k} \dot{\gamma}_1(t) + \dots + \frac{\partial f_n(\gamma(t))}{\partial q_k} \dot{\gamma}_n(t) \right) \\
 = & \ddot{\gamma}_k(t) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j(\gamma(t))}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k(\gamma(t))}{\partial q_j} \right) \dot{\gamma}_j(t) \\
 \stackrel{!}{=} & 0
 \end{aligned}$$

Wir setzen

$$A_{kj} := \frac{\partial f_j}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j}$$

und erhalten so

$$\ddot{\gamma}_k(t) = \sum_{j=1}^n A_{kj} \dot{\gamma}_j(t)$$

Es gilt $A_{jj} = 0$ und $A_{kj} = -A_{jk}$ für $j, k = 1, \dots, n$.

Daher ist die Matrix $A = A(q) := (A_{kj})_{k,j=1,\dots,n}$ schiefssymmetrisch. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt insgesamt

$$\ddot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$$

Lokal gilt dann für die kinetische Energie

$$\begin{aligned}
 \frac{dE(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{dt} &= \langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle \\
 &= \langle \dot{\gamma}(t), A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \rangle \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\dot{\gamma}_k(t) \cdot \sum_{j=1}^n A_{kj}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_j(t) \right) \\
 &= \sum_{k,j=1}^n A_{kj}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \dot{\gamma}_j(t) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

da A schiefssymmetrisch ist. Ist nun ein Anfangswert $(\gamma_0, \dot{\gamma}_0)$ gegeben, existiert lokal eine zugehörige Trajektorie des magnetischen Flusses, d.h. es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ und eine Lösungskurve $\gamma : (a, b) \rightarrow TM$ mit $\gamma(0) = \gamma_0$ und $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}_0$. Für $c := \frac{1}{2} |\dot{\gamma}_0|^2$ gilt dann

$$E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = c \quad \forall t \in (a, b)$$

und daher auch

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{2c} \quad \forall t \in (a, b)$$

Nun folgt aber auch

$$|\gamma(t)| \leq |\gamma(0)| + (b-a)\sqrt{2c} \quad \forall t \in (a, b)$$

und die Lösungskurve lässt sich für alle Zeiten fortsetzen. ■

Wir zeigen jetzt, dass der magnetisch Lagrangesche Fluss auf $T\mathbb{R}^2$ die physikalisch motivierte Bewegung im Magnetfeld beschreibt.

Satz 3.1.5 Sei M zweidimensional, $B : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und

$$\Omega_B := B(q) dq_1 \wedge dq_2 = d\alpha$$

für eine 1-Form α auf M . Dann entspricht der zugehörige magnetische Fluss dem Fluss des Vektorfeldes auf TM mit der lokalen Gestalt $X = (v, B(q)Tv)$.

BEWEIS Sei α eine 1-Form auf M . Dann besitzt α die Darstellung

$$\alpha_q = f_1(q) dq_1 + f_2(q) dq_2$$

mit Funktionen $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$. Es soll gelten, dass $\Omega_B = d\alpha$.

Seien also $v, w \in T_q M$. Dann gilt

$$(\Omega_B)_q(v, w) = B(q)(v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

und auf der anderen Seite nach kurzer Rechnung

$$d\alpha_q(v, w) = v_1 \left(\left(\frac{\partial f_2(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_2} \right) w_2 \right) - v_2 \left(\left(\frac{\partial f_2(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_2} \right) w_1 \right)$$

Aus $\Omega_B = d\alpha$ folgt daher

$$B(q) = \frac{\partial f_2(q)}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_2}$$

Wir setzen dies in die Euler-Lagrange-Gleichungen der magnetischen Lagrangefunktion ein, verwenden die Gleichung $\dot{q} = v$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_1} - \frac{\partial L(q, v)}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left(v_1 + f_1(q) \right) - \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} v_1 - \frac{\partial f_2(q)}{\partial q_1} v_2 \\ &= \dot{v}_1 + \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_2} \dot{q}_2 - \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} v_1 - \frac{\partial f_2(q)}{\partial q_1} v_2 \\ &= \dot{v}_1 - B(q) v_2 \end{aligned}$$

Genauso rechnet man nach, dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, v)}{\partial v_2} - \frac{\partial L(q, v)}{\partial q_2} = \dot{v}_2 + B(q) v_1$$

Mit $v = \dot{q}$ folgt also insgesamt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, v)}{\partial v} - \frac{\partial L(q, v)}{\partial q} = 0 \iff \dot{v} = B(q)Tv$$

und damit die Aussage. ■

Insbesondere sind Trajektorien dieses Euler-Lagrange-Flusses damit Lösungskurven der eingangs hergeleiteten Differentialgleichung zur Beschreibung der Bewegung im Magnetfeld.

Die magnetische Lagrangefunktion ist faserweise strikt konvex und superlinear. Mittels der Legendre-Transformation lässt sich der Fluss auf dem Tangentialbündel ins Kotangentialbündel übertragen und wir erhalten eine Hamiltonsche Interpretation der Bewegung im Magnetfeld.

Lemma 3.1.6 *Sei L eine magnetische Lagrangefunktion. Dann ist die zugehörige Hamiltonfunktion gegeben durch*

$$H(q, p) = \frac{1}{2} |p - \alpha|^2$$

BEWEIS In lokalen Koordinaten gilt

$$\frac{\partial L}{\partial v} = v + F$$

mit einem Vektorfeld $F = F(q) = (f_1(q) \cdots f_n(q))^T$, wobei die Interpretation von $\frac{\partial L}{\partial v}$ als Funktional bzgl. des Skalarprodukts zu verstehen ist. Nach Definition 2.2.8 ist die Hamiltonfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p(v) - L(q, v) \Big|_{p=\frac{\partial L}{\partial v}} \\ &= \langle v + F(q), v \rangle - \frac{1}{2} |v|^2 - \langle F(q), v \rangle \\ &= \frac{1}{2} |v|^2 \\ &= \frac{1}{2} |p - F(q)| \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. ■

Hervorzuheben ist, dass wir dadurch die Bewegung im Magnetfeld als Hamiltonschen Fluss bzgl. der kanonischen symplektischen Form auf dem Kotangentialbündel beschreiben können. Entsprechend sind die zugehörigen Hamiltonschen-Bewegungsgleichungen in klassischer Form gegeben, d.h. es gilt $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ und $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ bzgl. der oben angegebenen Hamiltonfunktion. Wir untersuchen jetzt den Zugang über die gedrehte Form auf T^*M .

Definition 3.1.7 *Sei Ω_B eine geschlossene 2-Form auf M , $\pi : T^*M \rightarrow M$ die kanonische Projektion und ω_0 die Standardform auf T^*M . Dann heißt*

$$\omega_B := \omega_0 + \pi^* \Omega_B$$

*gedrehte Form auf T^*M und (T^*M, ω_B) gedrehtes Kotangentialbündel.*

Ist Ω_B eine exakte Form, d.h. $\Omega_B = d\alpha$ für eine 1-Form α auf M , heißt α *Vektorpotential* des von Ω_B induzierten Magnetfeldes.

Die gedrehte Struktur lässt sich auch für nicht exakte Formen einführen und mit dieser anschließend ein „Magnetfeld“ in einer allgemeineren Form, als dies der Lagrangesche-Zugang ermöglicht. Wir beschränken uns an dieser Stelle aber auf den exakten Fall und weisen nach, dass dann beide Zugänge denselben Fluss beschreiben. Der allgemeinere Fall wird anschließend in knapper Form erläutert.

Lemma 3.1.8 *Es sei Ω_B eine exakte 2-Form auf M mit Vektorpotential α . Dann ist ω_B eine symplektische Form auf T^*M .*

BEWEIS Zunächst untersuchen wir die lokale Gestalt von $\pi^*\Omega_B$. Die 1-Form α ist darstellbar durch $\alpha_q = \sum_{k=1}^n f_k(q) dq_k$ mit glatten Funktionen $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt weiter

$$d\alpha = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_l} dq_l \right) \wedge dq_k = \sum_{\substack{l < k \\ k, l \in \{1, \dots, n\}}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_l} - \frac{\partial f_l}{\partial q_k} \right) dq_l \wedge dq_k$$

Wir setzen $A_{lk} := \frac{\partial f_k}{\partial q_l} - \frac{\partial f_l}{\partial q_k}$ und $F := (A_{lk})_{l, k=1, \dots, n}$ (die Wahl des Vorzeichens von A_{lk} wirkt an dieser Stelle willkürlich, ist aber durch das konkrete Beispiel 3.1.11 motiviert). Offensichtlich gilt $A_{lk} = -A_{kl}$ und $A_{ll} = 0$ für $l, k = 1, \dots, n$. Seien jetzt $(q, p) \in T^*M$ und $v, w \in T_{(q,p)}T^*M$. Nach kurzer Rechnung ergibt sich für $\pi^*\Omega_B$ die Gestalt

$$(\pi^*\Omega_B)_{(q,p)}(v, w) = - \left\langle \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v, w \right\rangle$$

Daher gilt lokal

$$\begin{aligned} \omega_B|_{(q,p)}(v, w) &= \omega_0|_{(q,p)}(v, w) + (\pi^*\Omega_B)_{(q,p)}(v, w) \\ &= \langle Jv, w \rangle - \left\langle \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v, w \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -F & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v, w \right\rangle \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt ist nicht-entartet. Aus $\omega_B(v, w) = 0$ für alle $w \in T_{(q,p)}T^*M$ folgt daher

$$Dv := \begin{pmatrix} -F & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

Da die Matrix D vollen Rang hat, besitzt die Gleichung $Dv = 0$ nur die Lösung $v = 0$ und es folgt, dass ω_B nicht-entartet ist.

Nach Voraussetzung gilt $d\Omega_B = 0$ und daher

$$d\omega_B = d(\omega_0 + \pi^*\Omega_B) = dd\lambda + \pi^*d\Omega_B = 0$$

Also ist ω_B geschlossen und es folgt die Behauptung. ■

Satz 3.1.9 *Sei Ω_B eine exakte 2-Form auf M , ω_B die zugehörige gedrehte Form auf T^*M und α ein Vektorpotential von Ω_B . Dann entspricht der magnetische Fluss auf T^*M dem Hamiltonschen Fluss zur Hamiltonfunktion $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch*

$$H(q, p) := \frac{1}{2} |p|^2$$

bzgl. der gedrehten Form ω_B . Insbesondere ist die Abbildung $\varphi : (T^*M, \omega_B) \rightarrow (T^*M, \omega_0)$, definiert durch

$$\varphi(q, p) := (q, p + \alpha)$$

ein Symplektomorphismus.

BEWEIS Der magnetische Fluss ist der Hamiltonsche Fluss der Hamiltonfunktion $F(q, p) = \frac{1}{2}|p - \alpha|^2$ bzgl. der symplektischen Form ω_0 . Wir verwenden Satz 2.1.18.

Ist φ ein Symplektomorphismus, so ist das Vektorfeld $X_F = \varphi_* X_H$ das Hamiltonsche Vektorfeld zur Hamiltonfunktion $F = H \circ \varphi^{-1}$. Daher folgt

$$H(q, p) = (F \circ \varphi)(q, p) = F(q, p + \alpha) = \frac{1}{2}|p + \alpha - \alpha|^2 = \frac{1}{2}|p|^2$$

und damit die Aussage.

Es bleibt also zu zeigen, dass φ symplektisch ist; d.h zu zeigen ist $\varphi^* \omega_0 = \omega_B$.

Die kanonische Form ist durch die Liouville-Form λ gegeben. Es gilt $\omega_0 = d\lambda$. Wir zeigen, dass $\varphi^* \lambda = \lambda + \pi^* \alpha$, denn dann folgt

$$\varphi^* \omega_0 = \varphi^* d\lambda = d(\varphi^* \lambda) = d(\lambda + \pi^* \alpha) = \omega_0 + \pi^* d\alpha = \omega_B$$

Seien also $(q, p) \in T^*M$ und $v \in T_{(q,p)}T^*M$. Wir erinnern uns an die Eigenschaften der Liouville-Form (vgl. die Beschreibung des Kotangentialbündels in Beispiel 2.1.10). Man rechnet nach, dass

$$\begin{aligned} \varphi^* \lambda_{(q,p)}(v) &= \lambda_{\varphi(q,p)}(d\varphi(q,p)(v)) \\ &= \lambda_{(q,p+\alpha)}(d\varphi(q,p)(v)) \\ &= (p + \alpha)_q(d(\pi \circ \varphi)(q,p)(v)) \\ &= (p + \alpha)_q(d\pi(q,p)(v)) \\ &= \lambda_{(q,p)}(v) + \alpha_{\pi(q,p)}(d\pi(q,p)(v)) \\ &= \lambda_{(q,p)}(v) + \pi^* \alpha_{(q,p)}(v) \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. ■

Ist eine exakte 2-Form Ω_B gegeben, stimmen die Beschreibungen über die magnetische Lagrangefunktion und die gedrehte Form auf dem Tangentialbündel überein. Man beachte, dass der Lagrangesche Zugang die Existenz eines Vektorpotentials explizit voraussetzt. Ist die 2-Form Ω_B lediglich geschlossen, aber nicht exakt, bleibt die Lagrangesche Beschreibung der Bewegung verschlossen. Über die gedrehte Struktur ist es aber trotzdem möglich die „Bewegung im Magnetfeld“ einzuführen und diese auch auf dem Tangentialbündel zu beschreiben. Dies soll an dieser Stelle in aller Kürze erwähnt, aber nicht weiter vertieft werden. Für weitere Informationen vgl. man z.B. [12].

Bemerkung 3.1.10 Den Einfluss von $\pi^* \Omega_B$ in der gedrehten Form auf den freien Fluss in T^*M interpretiert man als die Wirkung eines „Magnetfeldes“. Die gedrehte Form ist auch für geschlossene, nicht exakte Ω_B eine symplektische Form auf T^*M . Den Hamiltonschen Fluss der Funktion

$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2$ bzgl. ω_B bezeichnet man dann als *magnetischen (Hamiltonschen-) Fluss* auf T^*M . Im Gegensatz zum exakten Fall lässt sich dieser aber nicht durch die Legendre-Transformation zur magnetischen Lagrangefunktion auf das Tangentialbündel übertragen. Dennoch lässt sich der magnetische Fluss weiterhin auch auf dem Tangentialbündel beschreiben. Über die Riemannsche-Metrik g auf M zieht man die Standardform ω_0 des Kotangentialbündels auf das Tangentialbündel zurück, d.h. man betrachtet die Abbildung $h : TM \rightarrow T^*M$, gegeben durch

$$h(q, v) = (q, g_q(v, \cdot))$$

definiert damit $\tilde{\omega}_0$ auf TM durch

$$\tilde{\omega}_0 := h^* \omega_0$$

und erhält eine symplektische Struktur auf TM (die explizit von der Wahl von g abhängt). Mittels der kanonischen Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ lässt sich durch

$$\tilde{\omega}_B := \tilde{\omega}_0 + \pi^* \Omega_B$$

eine gedrehte Struktur auf dem Tangentialbündel einführen. Der magnetische Fluss auf TM ist der Hamiltonsche Fluss der Hamiltonfunktion $H(q, v) = \frac{1}{2}|v|^2$ bzgl. $\tilde{\omega}_B$.

Wir wollen abschließend, im zweidimensionalen Fall, das konkrete Beispiel einer gedrehten Form auf T^*M und den zugehörigen Fluss untersuchen.

Beispiel 3.1.11 Sei M zweidimensional, $B : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $\Omega_B := B(q) dq_1 \wedge dq_2$. Dann ist Ω_B wegen

$$d(B(q) dq_1 \wedge dq_2) = \left(\frac{\partial B(q)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial B(q)}{\partial q_2} dq_2 \right) \wedge dq_1 \wedge dq_2 = 0$$

eine geschlossene Form auf M . Sei nun $\omega_B = \omega_0 + \pi^*(B(q) dq_1 \wedge dq_2)$ die zugehörige gedrehte Form auf T^*M . Wir wollen das zur Funktion $H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2$ gehörige Hamiltonsche Vektorfeld explizit bestimmen und erinnern uns, dass Hamiltonsche Vektorfelder durch die Gleichung

$$\iota_X \omega = \omega(X, \cdot) = -dH$$

gegeben sind. Für $(q, p) \in T^*M$ und $X, w \in T_{(q,p)}T^*M$ gilt

$$\begin{aligned} \omega_B|_{(q,p)}(X, w) &= \omega_0(X, w) + \pi^*(B(q) dq_1 \wedge dq_2)(X, w) \\ &= \langle JX, w \rangle - \left\langle B(q) \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X, w \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -B(q) & 1 & 0 \\ B(q) & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X, w \right\rangle \\ &= (-B(q)x_2 + x_3)w_1 + (B(q)x_1 + x_4)w_2 - x_1w_3 - x_2w_4 \end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt aber auch

$$-dH(q, p)(w) = -p dp(w) = -p_1 w_3 - p_2 w_4$$

Das Skalarprodukt ist nicht-entartet. Also ist X das zu H gehörende Hamiltonsche Vektorfeld, wenn folgendes Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 \\ x_2 &= p_2 \\ x_3 &= B(q)x_2 = B(q)p_2 \\ x_4 &= -B(q)x_1 = -B(q)p_1 \end{aligned}$$

Daher erfüllt jede Lösungskurve des zugehörigen Flusses lokal die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= B(q)T p \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem entspricht genau dem des Vektorfeldes, das wir eingangs in der physikalischen Motivation zur Bewegung im Magnetfeld hergeleitet hatten - im Gegensatz zum dortigen allerdings auf dem Kotangentialbündel statt auf dem Tangentialbündel. Da eine Hamiltonfunktion ein Integral der Bewegung ist (vgl. Satz 2.1.19), folgt also auch hier die Energieerhaltung bzw. die Erhaltung der kinetischen Energie (auf dem Kotangentialbündel) und daher die Vollständigkeit des Flusses.

3.2 Finsler-Geometrie

Finsler-Geometrie stellt eine Verallgemeinerung der Riemannschen-Geometrie dar und ist ein großes eigenständiges Gebiet der Forschung geworden. Im Gegensatz zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt eine Finsler-Mannigfaltigkeit auf den Tangentialräumen kein Skalarprodukt, sondern nur eine Minkowski-Norm, bei der insbesondere die Homogenität einer Norm i.a. nur in eingeschränkter Form gegeben ist. Durch die induzierte Norm einer Riemannschen-Metrik ist jede Riemannsche-Mannigfaltigkeit auch eine Finsler-Mannigfaltigkeit. Die gegebene Struktur einer Finsler-Mannigfaltigkeit erlaubt es einen Abstands begriff und damit auch eine Metrik auf der Mannigfaltigkeit einzuführen. Die eingeschränkte Homogenität führt dabei i.a. aber dazu, dass Symmetrie verloren geht. So kann sich der Abstand von einem Punkt A zu B auf der Mannigfaltigkeit von dem von B zu A unterscheiden. Man spricht dann von nicht-reversiblen Finsler-Metriken. Als anschauliche Erläuterung für Finsler-Geometrie wird in [43] Lichtausbreitung in einem inhomogenen anisotropen Medium genannt. Die Geschwindigkeit mit der sich Licht ausbreitet, hängt dann sowohl vom Ort als auch der Richtung ab. Diese Anschauung lässt einen an Huygens Prinzip denken und so wundert es nicht, dass man bei der Beschreibung von Finsler-Geometrie auf die Formulierung von Wellenfronten stößt, die in den Bereich der Kontakt-Geometrie weiterführt

(z.B. [20], [43] oder [26]). Darüber hinaus gehört Finsler-Geometrie zum Bereich der konvexen Geometrie und ist mit Variationsrechnung und symplektischer Geometrie verknüpft. Viele Begriffe der Riemannschen-Geometrie wie Geodäten, Zusammenhang, kovariante Ableitungen und Krümmung lassen sich verallgemeinern und ebenfalls in der Finsler-Geometrie einführen. Einen Überblick über Resultate und einige offene Fragen der Finsler-Geometrie bietet [27] (aus dem Jahr 2006). Einführungen und weitere Einblicke erhält man z.B. in [38], [37], [15] oder [28] neben vielen anderen.

Für unsere Absichten ist eine umfassende Einarbeitung in die Materie nicht erforderlich. Neben der elementaren Definition genügt es den Finsler-geodätischen-Fluss einzuführen und die Verbindung zu Variationsprinzipien herauszustellen. Dies soll an dieser Stelle erfolgen, so dass im Anschluss der magnetische Fluss (unter geeigneten Bedingungen) auch als Finsler-geodätischer-Fluss interpretiert werden kann. Wir starten mit der Definition und einer Aufzählung wesentlicher Eigenschaften der Minkowski-Norm, die danach die Grundlage für die Beschreibung von Finsler-Metriken sein werden. Für vollständige Ausarbeitungen und weiterführende Informationen vergleiche man die angegebene Literatur.

Definition 3.2.1 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $F : V \rightarrow [0, \infty)$ eine Funktion, so dass gilt:

- F ist glatt auf $V \setminus \{0\}$
- F ist homogen vom Grad 1, d.h.

$$F(\sigma v) = \sigma F(v) \quad \forall v \in V, \sigma > 0$$

- Für $\rho := F^2/2$ und jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ ist die Bilinearform $g_v : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g_v(u, w) := \left. \frac{\partial^2 \rho(v + su + tw)}{\partial s \partial t} \right|_{s=t=0}$$

für alle $u, w \in V$ positiv definit.

Die Funktion F heißt dann *Minkowski-Norm* auf V . Die letzte Bedingung wird als *Legendre-Bedingung* bezeichnet.

Eine Minkowski-Norm F ist stetig auf V und erfüllt die Dreiecksungleichung, d.h.

$$F(v + w) \leq F(v) + F(w) \quad \forall v, w \in V$$

mit Gleichheit, genau dann wenn $w = cv$ für ein $c \geq 0$.

Die Einheitssphäre

$$B_F := \{ v \in V : F(v) = 1 \}$$

heißt *Indikatrix*. Die Einheitskugel ist kompakt und strikt konvex.

Für $v \in V, v \neq 0$ und $u, w \in V$ ergibt sich unter Verwendung der Kettenregel für $g_v(u, w)$ die Darstellung

$$g_v(u, w) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho(v)}{\partial v_i \partial v_j} u_i w_j$$

Ferner ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel und der Homogenität von F nach kurzer Rechnung, dass

- $g_{\sigma v}(u, w) = g_v(u, w) \quad \forall \sigma > 0$
- $g_v(v, u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(v)}{\partial v_i} u_i = \left. \frac{\partial \rho(v + tu)}{\partial t} \right|_{t=0}$
- $g_v(v, v) = 2\rho(v) = F^2(v)$

Identifiziert man den Tangentialraum $T_v B_F$ für $v \in B_F$ durch die Hyperebene

$$W_v := \{ w \in V : g_v(v, w) = 0 \}$$

ist V darstellbar als

$$V = \mathbb{R} \cdot v \oplus W_v$$

Für $v \neq 0$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$g_v(v, w) \leq F(v)F(w), \quad \forall w \in V$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $w = cv$ für ein $c \geq 0$.

Zu einer gegebenen Minkowski-Norm ist die (*Minkowski-*) *Legendre-Transformation* die Abbildung $\ell : V \rightarrow V^*$, die definiert ist durch

$$\ell(v) := g_v(v, \cdot)$$

für $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $\ell(0) := 0$.

Die Legendre-Transformation ist ein Diffeomorphismus von $V \setminus \{0\}$ auf $V^* \setminus \{0\}$. Unter Verwendung obiger Darstellung ergibt sich für die Legendre-Transformation für $v \in V$, $v \neq 0$ und $u \in V$

$$\ell(v)(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(v)}{\partial v_i} u_i$$

und in Kurznotation

$$\ell(v) = \frac{\partial \rho(v)}{\partial v}$$

Für eine Minkowski-Norm F ist die *duale Minkowski-Norm* gegeben als das Funktional $F^* : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F^*(\mu) := \max \{ \mu(v) : v \in B_F \}$$

Die Legendre-Transformation liefert eine wichtige Verbindung zwischen der Minkowski-Norm und der dualen Norm. Für alle $v \in V$ gilt

$$F(v) = F^*(\ell(v))$$

und es lässt sich damit zeigen, dass F^* wieder eine Minkowski-Norm auf V^* ist. Insbesondere gilt für jeden Vektor $v \in B_F$ daher

$$1 = F(v) = F^*(\ell(v))$$

Also bildet die Legendre-Transformation die Einheitssphäre B_F auf die Einheitssphäre

$$B_{F^*} := \{ \mu \in V^* : F^*(\mu) = 1 \}$$

ab. Die Einheitssphäre B_{F^*} wird auch *Figuratrix* genannt.

Eine Finsler-Metrik ist eine Abbildung auf einer Mannigfaltigkeit, die jedem Punkt der Mannigfaltigkeit mit differenzierbarer Abhängigkeit eine Minkowski-Norm auf dem Tangentialraum zuordnet. Die Aussagen über Minkowski-Normen lassen sich daher punktweise übertragen. Zudem erhält man eine metrische Struktur auf der Mannigfaltigkeit sowie einen geodätischen Fluss, den man durch ein Variationsprinzip beschreiben kann.

Definition 3.2.2 Sei M eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ eine Funktion, so dass gilt:

- F ist glatt auf $TM \setminus \{0\}$
- für jedes $q \in M$ ist die Abbildung $F_q := F|_{T_qM}$ eine Minkowski-Norm

Dann ist F eine *Finsler-Metrik* auf M . Die Funktion F wird auch als (*Finsler-*) *Lagrangefunktion* bezeichnet. Gilt $F_q(-v) = F_q(v)$ für jedes $v \in T_qM$ und jedes $q \in M$, ist die Finsler-Metrik F *reversibel*. Die Indikatrix $B_F(q)$ im Punkt $q \in M$ ist im Falle einer reversiblen Finsler-Metrik zentralsymmetrisch. Man beachte, dass die Homogenität der Minkowski-Norm je nach Autor und Artikel unterschiedlich gefordert wird. So sind im Gegensatz zur obigen Definition z.B. in [28], [27] Finsler-Metriken per definitionem reversibel.

Für $q \in M$ bezeichne ℓ_q die Minkowski-Legendre-Transformation $\ell_q : T_qM \rightarrow T_q^*M$. Dann bildet die Familie $\ell := \{ \ell_q \}_{q \in M}$ von Legendre-Transformationen einen Diffeomorphismus - die *Finsler-Legendre-Transformation*

$$\ell : TM \setminus \{0\} \longrightarrow T^*M \setminus \{0\}$$

Man beachte dabei insbesondere, dass $(q, v) \in TM$ mit $v \neq 0$ unter ℓ auf

$$\ell(q, v) = (q, \ell_q(v)) = \left(q, \frac{1}{2} \frac{\partial F^2(q, v)}{\partial v} \right) = \left(q, \frac{\partial \rho(q, v)}{\partial v} \right)$$

abgebildet wird und erinnere sich an die Erläuterungen zur Legendre-Transformation im Rahmen der Lagrangeschen-Mechanik (vgl. Definition 2.2.8). Wenn man wollte, könnte man in diesem Kontext $\frac{\partial \rho(q, v)}{\partial v}$ als „Finsler-Impuls“ bezeichnen.

Für $q \in M$ bezeichne F_q^* die zur F_q duale Minkowski-Norm und $F^* : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, die durch

$$F^*(q, \mu) := (q, F_q^*(\mu))$$

gegeben ist. Dann gilt insbesondere

$$F^*(\ell(q, v)) = F^*(q, \ell_q(v)) = (q, F_q^*(\ell_q(v))) = (q, F_q(v)) = F(q, v)$$

für alle $(q, v) \in TM$. Die Funktion F^* wird als (*Finsler-*) *Hamiltonfunktion* bezeichnet. Sie besitzt auch die Darstellung

$$F^* = \rho \circ \ell^{-1}$$

Neben der „Lagrangefunktion“ und der „Legendre-Transformation“ ist dies eine weitere Bezeichnung, die bereits aus der klassischen Mechanik bekannt ist. Die Definition der Finsler-Hamiltonfunktion über die duale Struktur lässt den Bezug zur klassischen Mechanik nicht unmittelbar erkennen. Betrachtet man die Funktion

$$h(q, p) := \frac{(F^*(q, p))^2}{2}$$

wird die Verbindung zur klassischen Mechanik aber schnell ersichtlich. Wir erinnern uns, dass eine Minkowski-Norm die Gleichung

$$g_v(v, v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(v)}{\partial v_i} v_i = 2\rho(v)$$

erfüllt. Die Hamiltonfunktion der Funktion ρ ist im Kontext der klassischen Mechanik (vgl. Definition 2.2.8) durch

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p(v) - \rho(q, v) \Big|_{p = \frac{\partial \rho(q, v)}{\partial v}} \\ &= g_v(v, v) - \rho(q, v) \\ &= 2\rho(q, v) - \rho(q, v) \\ &= \rho(q, v) \end{aligned}$$

gegeben, und es folgt mit der Definition von ρ

$$H(q, p) = \frac{1}{2} F^2(q, v)$$

Gleichzeitig gilt

$$\frac{1}{2} F^2(q, v) = \frac{1}{2} F^2(q, \ell^{-1}(p)) = \frac{1}{2} (F^*)^2(q, p)$$

Also stimmt die Funktion $h = (F^*)^2/2$ mit der klassischen Hamiltonfunktion zur Lagrangefunktion ρ überein.

Eine Finsler-Metrik erlaubt es auch, Abstände auf einer Mannigfaltigkeit anzugeben, da sich mit ihr die Länge einer Kurve definieren lässt. Sei F eine Finsler-Metrik auf M und $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine (nicht konstante) glatte Kurve. Dann ist durch

$$\Lambda_F(\gamma) := \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

die *Finsler-Länge* der Kurve γ gegeben. Für zwei Punkte q_1 und q_2 auf M ist der zugehörige Abstand als das Infimum über alle Finsler-Längen verbindender Kurven definiert, d.h.

$$d_F(q_1, q_2) := \inf \left\{ \Lambda_F(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ glatt mit } \gamma(0) = q_1, \gamma(1) = q_2 \right\}$$

Die durch F induzierte Abbildung $d_F : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf M .

Wie in der Riemannschen-Geometrie lassen sich in der Finsler-Geometrie *Geodäten* einführen. Diese entsprechen, wie in der Riemannschen-Geometrie, Lösungen eines Variationsproblems (nach [28] sind Finsler-Metriken genau diejenigen, bei denen dieser Zusammenhang besteht).

Eine *Finsler-Geodäte* ist eine Extremale von Λ_F , d.h die Kurve γ ist eine Geodäte, wenn für jede Variation von γ mit Variationskurven γ_s (vgl. Definition 2.2.2) gilt, dass

$$\frac{d}{ds} \Lambda_F(\gamma_s) \Big|_{s=0} = 0$$

Finsler-Geodäten erfüllen damit auch die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ heißt *nach der (Finsler-) Bogenlänge parametrisiert*, wenn

$$(F \circ \dot{\gamma})(t) = 1 \quad \forall t \in [a, b]$$

Da F_q für jedes $q \in M$ homogen vom Grad eins ist, ist die Finsler-Länge einer Kurve unabhängig von der Parametrisierung. Insbesondere kann jede Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert werden.

Analog zur Riemannschen-Geometrie (vgl. z.B. [11]) ist eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ genau dann eine Extremale des *Energie-Funktional*s

$$E_F(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b F^2(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \int_a^b \rho(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

wenn γ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte ist. Der zu ρ gehörige Euler-Lagrange-Fluss heißt *Finsler-geodätischer-Fluss*. Er ist konjugiert zum Hamiltonschen-Fluss der Hamiltonfunktion $H = \frac{1}{2}(F^*)^2$. Es lässt sich aber auch zeigen, dass eine Extremale von E_F via Finsler-Legendre-Transformation auf eine Integralkurve des Hamiltonschen-Vektorfeldes der Finsler-Hamiltonfunktion abgebildet wird, sowie sich andersrum eine Integralkurve des Hamiltonschen-Vektorfeldes auf eine Extremale von Λ_F zurückziehen lässt. (vgl. z.B. [15] oder [26], [28]).

Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, wie bereits erwähnt, auch eine Finsler-Mannigfaltigkeit. In der angegebenen Literatur werden weitere Beispiel erläutert und diskutiert. Von zentraler Bedeutung ist für uns das konkrete Beispiel der Funktion

$$F(q, v) := |v| + \alpha_q(v)$$

mit einer 1-Form α auf M . Wir werden gleich zeigen, dass diese Funktion, unter einer Bedingung an α , eine Finsler-Metrik ist. Die Betrachtung dieser Funktion erscheint an dieser Stelle vielleicht zunächst unmotiviert. Wir werden dieser Funktion aber im weiteren Verlauf erneut begegnen. Die Funktionsvorschrift erinnert an die magnetische Lagrangefunktion, und wie wir sehen werden, erlaubt uns diese Funktion tatsächlich die Interpretation eines magnetischen Flusses im

Rahmen der Finsler-Geometrie. Bei der Einführung magnetischer Billards wird die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit zweidimensional sein. Wesentlich ist es für uns daher, nachzuweisen, dass obige Funktion im zweidimensionalen Fall eine Finsler-Metrik ist. Der Nachweis ist hier elementar ausführbar. Allerdings gilt die angesprochene Verbindung zwischen der Bewegung im Magnetfeld und Finsler-Geometrie auch allgemein, d.h. neben dem für uns essentiellen Fall auch auf n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Daher soll die Formulierung der Aussage auch in aller Allgemeinheit erfolgen. Den ausführlichen Nachweis der Definitheit im allgemeinen Fall kann man z.B. [4] entnehmen .

Lemma 3.2.3 *Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit und $\|\cdot\|$ die Operatornorm, die für $q \in M$ durch die Norm auf T_qM induziert wird. Ferner sei α eine 1-Form auf M mit $\|\alpha\| < 1$ und F die Funktion $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$, die durch*

$$F(q, v) := |v| + \alpha_q(v)$$

gegeben ist. Dann ist F eine Finsler-Metrik auf M . Die Aussage gilt auch im n -dimensionalen Fall.

BEWEIS Sei $q \in M$. Dann ist $F_q := F(q, \cdot)$ glatt auf $T_qM \setminus \{0\}$ und es gilt $F(q, 0) = 0$. Für jedes $v \in T_qM$ mit $v \neq 0$ gilt wegen $\|\alpha\| < 1$ die Ungleichung

$$|\alpha_q(v)| \leq \|\alpha_q\| \cdot |v| < |v|$$

Also ist F_q für jedes $q \in M$ eine positive Funktion.

Für $q \in M$ ist α_q eine Linearform. Für jedes $v \in T_qM$ und $\sigma > 0$ ist daher die Gleichung

$$F(q, \sigma v) = \sigma |v| + \sigma \alpha_q(v) = \sigma F(q, v)$$

erfüllt und $F_q := F(q, \cdot)$ ist homogen vom Grad 1.

Für $q \in M$ und $v \in T_qM$ mit $v \neq 0$ untersuchen wir die Definitheit der Bilinearform g_v , die mit $\rho_q(v) := \frac{1}{2}(F(q, v))^2$ für $u, w \in T_qM$ durch

$$g_v(u, w) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho_q(v)}{\partial v_i \partial v_j} u_i w_j$$

gegeben ist. Ist M zweidimensional, hat F_q lokal die Gestalt

$$F_q(v) = |v| + a_1(q)v_1 + a_2(q)v_2$$

Dann gilt für $i = 1, 2$ und $v \in T_qM$ mit $v \neq 0$

$$\frac{\partial \rho_q(v)}{\partial v_i} = F_q(v) \frac{\partial F_q(v)}{\partial v_i} = F_q(v) \left(a_i(q) + \frac{v_i}{|v|} \right)$$

Wir setzen

$$f_q^{(i)}(v) := \frac{\partial F_q(v)}{\partial v_i} = a_i(q) + \frac{v_i}{|v|}$$

Damit berechnet man für $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_q(v)}{\partial v_i^2} &= \left(a_i(q) + \frac{v_i}{|v|} \right)^2 + F_q(v) \left(\frac{1}{|v|} - \frac{v_i^2}{|v|^3} \right) \\ &= \left(f_q^{(i)}(v) \right)^2 + F_q(v) \left(\frac{|v|^2 - v_i^2}{|v|^3} \right) \\ &= \left(f_q^{(i)}(v) \right)^2 + \frac{v_j^2}{|v|^3} F_q(v) \end{aligned}$$

sowie die gemischten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \rho_q(v)}{\partial v_i \partial v_j} = f_q^{(j)}(v) f_q^{(i)}(v) - \frac{v_i v_j}{|v|^3} F_q(v)$$

Die Hessematrix von ρ_q in $q \in M$ lautet daher

$$\text{Hess}_{\rho_q}(v) = \begin{pmatrix} \left(f_q^{(1)}(v) \right)^2 + \frac{v_2^2}{|v|^3} F_q(v) & f_q^{(1)}(v) f_q^{(2)}(v) - \frac{v_1 v_2}{|v|^3} F_q(v) \\ f_q^{(1)}(v) f_q^{(2)}(v) - \frac{v_1 v_2}{|v|^3} F_q(v) & \left(f_q^{(2)}(v) \right)^2 + \frac{v_1^2}{|v|^3} F_q(v) \end{pmatrix}$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass die zur Hessematrix gehörende quadratische Form genau dann positiv definit ist, wenn alle Hauptminoren echt positiv sind.

Sei $v \neq 0$. Für $v_2 \neq 0$ folgt

$$\left(f_q^{(1)}(v) \right)^2 + \frac{v_2^2}{|v|^3} F_q(v) > 0$$

da $F_q(v) > 0$. Ist $v_2 = 0$, gilt $v_1 \neq 0$ und somit ist der erste Hauptminor auch in diesem Fall echt positiv, da mit $|a_1(q)| < 1$ folgt, dass

$$f_q^{(1)}(v) = a_1(q) + \frac{v_1}{|v|} \neq 0$$

Also ist der erste Hauptminor positiv. Die Determinante der Hessematrix berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \det(\text{Hess}_{\rho_q}(v)) &= \begin{vmatrix} \left(f_q^{(1)}(v) \right)^2 + \frac{v_2^2}{|v|^3} F_q & f_q^{(1)}(v) f_q^{(2)}(v) - \frac{v_1 v_2}{|v|^3} F_q \\ f_q^{(1)}(v) f_q^{(2)}(v) - \frac{v_1 v_2}{|v|^3} F_q & \left(f_q^{(2)}(v) \right)^2 + \frac{v_1^2}{|v|^3} F_q \end{vmatrix} \\ &= \left(\left(f_q^{(1)}(v) \right)^2 + \frac{v_2^2}{|v|^3} F_q \right) \left(\left(f_q^{(2)}(v) \right)^2 + \frac{v_1^2}{|v|^3} F_q \right) - \left(f_q^{(1)}(v) f_q^{(2)}(v) - \frac{v_1 v_2}{|v|^3} F_q \right)^2 \\ &= \left(f_q^{(1)}(v) \right)^2 \left(f_q^{(2)}(v) \right)^2 + \frac{F_q}{|v|^3} \left(\left(f_q^{(1)}(v) \right)^2 v_1^2 + \left(f_q^{(2)}(v) \right)^2 v_2^2 \right) + \frac{v_1^2 v_2^2}{|v|^6} F_q^2 \\ &\quad - \left(\left(f_q^{(1)}(v) f_q^{(2)}(v) \right)^2 - 2 \frac{F_q}{|v|^3} f_q^{(1)}(v) f_q^{(2)}(v) v_1 v_2 + \frac{v_1^2 v_2^2}{|v|^6} F_q^2 \right) \\ &= \frac{F_q}{|v|^3} \left(\left(f_q^{(1)}(v) \right)^2 v_1^2 + \left(f_q^{(2)}(v) \right)^2 v_2^2 + 2 f_q^{(1)}(v) f_q^{(2)}(v) v_1 v_2 \right) \\ &= \frac{F_q}{|v|^3} \left(f_q^{(1)}(v) v_1 + f_q^{(2)}(v) v_2 \right)^2 \\ &= \frac{F_q}{|v|^3} \left(v_1 \left(a_1 + \frac{v_1}{|v|} \right) + v_2 \left(a_2 + \frac{v_2}{|v|} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{F_q}{|v|^3} (|v| + a_1 v_1 + a_2 v_2)^2 \\
 &= \frac{F_q^3}{|v|^3}
 \end{aligned}$$

und es folgt die positive Definitheit der Bilinearform. Insgesamt ist F somit eine Finsler-Metrik auf M .

Die ersten Eigenschaften lassen sich im n -dimensionalen Fall wie zuvor zeigen. Durch die Funktionsvorschrift von F und die Beschränktheit von α genügt F den Bedingungen einer *Randers-Metrik*, die eine Beispielklasse von Finsler-Metriken darstellen. Den Nachweis der positiven Definitheit kann man daher z.B. [4] (S. 17f. und S. 287ff.) entnehmen. ■

Bemerkung 3.2.4 Man beachte, dass die zuvor untersuchte Finsler-Metrik i.a. nicht reversibel ist. Ist die 1-Form α von Null verschieden, gilt für $\alpha_q \neq 0$ in der Tat

$$F(q, v) \neq F(q, -v)$$

für $v \in T_q M$ mit $\alpha_q(v) \neq 0$.

3.3 Der magnetische Fluss als Finsler-geodätischer Fluss

Im nächsten Schritt möchten wir nachweisen, dass der zuvor eingeführte magnetische Fluss als geodätischer Fluss der untersuchten Finsler-Metrik interpretiert werden kann. Der Zusammenhang von Magnetfeldern und Finsler-Geometrie wird in [13] und [12] erläutert und z.B. in [14] und [41] aufgegriffen, wobei dieser Zusammenhang im Kontext von Manés kritischem Wert und der Frage nach geschlossenen Orbits magnetischer Flüsse auftaucht. In [44] findet sich diese Verknüpfung im Rahmen magnetischer Billards. Das verbindende Element zwischen der eingeführten Finsler-Metrik und der magnetischen Lagrangefunktion wird hier kurz und knapp als „Maupertuis principle“ bezeichnet. In der Physik ist dies ein gängiges Prinzip, wohingegen der Begriff in der mathematischen Literatur nicht so geläufig ist. Eine Erläuterung samt Motivation findet man aber in [2] - allerdings nur für den kanonischen Fall. Da dieses Prinzip auch in allgemeinerer Form gültig ist, soll es nun entsprechend präsentiert werden.

Satz 3.3.1 Sei M eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit exakter symplektischer Form $\omega = d\eta$ und $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hamiltonfunktion. Ferner sei c ein regulärer Wert von H und S die zugehörige Energiefläche, d.h. $S := H^{-1}(c)$. Für eine Kurve γ auf S sei die Wirkung A gegeben durch

$$A(\gamma) := \int_{\gamma} \eta$$

Dann ist eine Kurve γ auf S genau dann eine Bahn des Hamiltonschen Flusses, wenn γ eine Extremale von A mit festen Endpunkten ist.

BEWEIS Wir beginnen in der gegebenen Situation mit dem Zugang, den Arnold in [2] als „principle of least action in phase space“ in knapper Form für das kanonische Beispiel erläutert. Dazu sei $V : [0, \varepsilon] \times [a, b] \rightarrow S$ eine Variation der Kurve γ mit festen Endpunkten und $V(0, t) = \gamma(t)$, $\gamma_s(t) := V(s, t)$, sowie Variationsfeld $X(t) := \frac{\partial V}{\partial s}(0, t)$. Es gilt $X(a) = X(b) = 0$. Wir betrachten die Fläche $V([0, \varepsilon] \times [a, b])$. Unter Verwendung des Satzes von Stokes ergibt sich

$$\begin{aligned} A(\gamma_s) - A(\gamma) &= \int_{V([0, \varepsilon] \times [a, b])} \eta - \int_{V(\{0\} \times [a, b])} \eta \\ &= \int_{V([0, \varepsilon] \times [a, b])} d\eta \\ &= \int_{[0, \varepsilon] \times [a, b]} V^* \omega \end{aligned}$$

und daher augenscheinlich

$$dA(\gamma)(X) = \int_a^b \omega(X(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \int_{\gamma} \iota_X \omega$$

Diese Aussage lässt sich mit dem in den Grundlagen eingeführten Formalismus explizit herleiten. Dazu vergegenwärtige man sich zunächst die Einführung von Variationen und Variationsargumenten auf Seite 16f.

Sei $V : [-\varepsilon, \varepsilon] \times [a, b] \rightarrow S$ eine Variation der Kurve γ mit Endpunkten $Q_1, Q_2 \in S$, d.h. $V(0, t) = \gamma(t)$ und für jedes $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ ist $\gamma_s(t) := V_s(t) = V(s, t)$ eine Kurve von Q_1 nach Q_2 . Durch $\frac{\partial V}{\partial s}$ ist das Variationsfeld gegeben und $X_s(t) := \frac{\partial V(s, t)}{\partial s}$ entspricht dem Variationsfeld entlang der Kurve γ_s . Wir setzen $X(t) := X_0(t)$. Insbesondere gilt dann $X(a) = X(b) = 0$.

Für ein festes $t \in (a, b)$ ist $V(s, t)$ eine Kurve von $\gamma_{-\varepsilon}(t)$ über $\gamma(t)$ nach $\gamma_{\varepsilon}(t)$ und $X_s(t)$ der (Geschwindigkeits-) Tangentialvektor dieser Kurve im Punkt $V(s, t)$.

Für eine Kurve γ war ein „Tangentialvektor“ (im Sinne des Variationsarguments) gegeben als das Variationsfeld einer Variation von γ entlang γ . Für einen Tangentialvektor X mit zugehöriger Variation V gilt

$$\begin{aligned} dA(\gamma)(X) &= \left. \frac{d}{ds} A(\gamma_s) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \left(\int_a^b V_s^* \eta dt \right) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \left(\int_a^b \eta_{\gamma_s(t)}(\dot{\gamma}_s(t)) dt \right) \right|_{s=0} \end{aligned}$$

Die Lie-Ableitung einer Form beschreibt die Änderung der Form in Richtung des vom Vektorfeld erzeugten Flusses. Durch das Variationsfeld ist ein Vektorfeld auf $V([-\varepsilon, \varepsilon] \times [a, b])$ gegeben und

die Kurven $s \mapsto V_s(t)$ sind gerade die zugehörigen Flusslinien. Daher gilt für ein festes $t \in (a, b)$:

$$\left. \frac{d}{ds} V_s^* \eta \right|_{s=0} = L_{X(t)} \eta = (\iota_{X(t)} d + dt_{X(t)}) \eta$$

und es folgt

$$\begin{aligned} dA(\gamma)(X) &= \left. \frac{d}{ds} \left(\int_a^b V_s^* \eta \, dt \right) \right|_{s=0} \\ &= \int_a^b d\eta_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) + d(\eta_{\gamma(t)}(X(t)))(\dot{\gamma}(t)) \, dt \end{aligned}$$

Wegen $X(a) = X(b) = 0$ erhält man dann

$$dA(\gamma)(X) = \int_a^b d\eta_{\gamma(t)}(X(t), \dot{\gamma}(t)) \, dt = \int_{\gamma} \iota_X \omega$$

und somit dieselbe Aussage wie eingangs erläutert wurde.

Mit diesem Ergebnis lässt sich schließlich die Aussage des Satzes zeigen. Für eine Extremale Kurve gilt

$$dA(\gamma)(X) = 0$$

für alle Variationsfelder X entlang γ . Dies ist folglich genau dann der Fall wenn

$$\omega(\dot{\gamma}(t), v) = 0 \quad \forall v \in T_{\gamma(t)} S, \forall t \in [a, b]$$

Das bedeutet aber, dass γ eine Charakteristik des Hamiltonschen Flusses ist (vgl. S. 13) und es folgt die Aussage. ■

Neben der Bezeichnung dieses Variationsprinzips als das *Prinzip von Maupertuis* findet man in [2] einen Verweis auf einen bemerkenswerten Ausspruch C.G.J. Jacobis in seinen Vorlesungen über Dynamik in Königsberg 1842 und 1843 ([22] S.44): „Dieses Prinzip wird fast in allen Lehrbüchern, auch in den besten, in denen von Poisson, Lagrange und Laplace, so dargestellt, dass es nach meiner Ansicht nicht zu verstehen ist.“ Maupertuis ist der eigentliche Namensgeber des Prinzips der kleinsten Wirkung, wobei die Namensgebung durch eine unpräzise Übersetzung entstanden ist. „Maupertuis wollte mit diesem Namen ausdrücken, dass die Natur ihre Wirkungen mit dem kleinsten Kraftaufwand erreiche (...)“. Dies ist nicht damit zu verwechseln, dass Extremale der Wirkung Minima darstellen müssten. Da das Funktional in der Variationsrechnung den festen Begriff der „Wirkung“ trägt, ist heutzutage neben der klassischen Bezeichnung „Prinzip der kleinsten Wirkung“ auch die Bezeichnung „Prinzip der stationären Wirkung“ anzutreffen. In der damaligen Epoche sind mehrere Variationsprinzipien entstanden, u.a. getragen von Euler, Lagrange und Hamilton (und auch Leibniz). Lagrange z.B. sprach zunächst durchaus von Minima des Funktionals - er hatte dabei kürzeste Verbindungen vor Augen. Bei der Betrachtung verschiedener Variationsprinzipien ist es wichtig, stets darauf zu achten, welche Grundannahme

getätigt wird, d.h. u.a. welche Kurven, bzw. präziser, Kurven welcher „Art“, variiert werden. Dies geht auch darauf zurück, dass zur damaligen Zeit in weiten Teilen Unklarheit über Wesenszüge natürlicher Phänomene vorherrschte. Fermat folgte der Annahme, Licht breite sich entlang von Wegen mit kürzester Zeit aus. Maupertuis betrachtete Kurven mit fester Energie, wohingegen im Hamiltonschen Prinzip die Kurven feste Endzeitpunkte besitzen. Für einen Ausflug in damalige Betrachtungsweisen und Ansätze lohnt in der Tat ein Blick in [22].

Bemerkung 3.3.2 Mit einer analogen Rechnung lässt sich auch im Falle einer zeitabhängigen Hamiltonfunktion zeigen, dass Lösungskurven des Hamiltonschen Flusses genau die Extremalkurven der Hamiltonschen Wirkung (vgl. auch Definition 2.2.8)

$$A_H(\gamma) := \int_a^b \eta^* \gamma - H(t, \gamma(t)) dt$$

sind. Die Rechnung liefert dann

$$\omega(v, \dot{\gamma}(t)) - dH(t, \gamma(t)) v = 0$$

für alle $v \in T_{\gamma(t)}S$ und damit

$$\omega(\dot{\gamma}(t), v) = -dH(t, \gamma(t)) v$$

für alle $v \in T_{\gamma(t)}S$, was der ursprünglichen Definition Hamiltonscher Vektorfelder entspricht (vgl. Definition 2.1.14). Ist η die kanonische Form, d.h. die Liouville-Form, auf einem Kotangentialbündel, erfüllt ein Hamiltonsches Vektorfeld daher, wie auch in Lemma 2.2.10 erläutert, die kanonischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Wir sehen, dass Lösungskurven des Hamiltonschen Flusses auch im zeitabhängigen Fall einem Variationsprinzip unterliegen.

Die Aussage des obigen Satzes ist eng mit der Aussage von Lemma 2.2.9 verwandt. Dort wurde aber lediglich gefordert, dass die Variationskurven feste Endpunkte im Konfigurationsraum besitzen. Ist M ein Kotangentialbündel, und betrachtet man die Bewegung auf einer Energiefläche der Hamiltonfunktion, lässt sich die Aussage von Satz 3.3.1 ebenfalls unter dieser Forderung zeigen.

Korollar 3.3.3 *Seien die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.3.1 gegeben und $P_1, P_2 \subset S$ so, dass $\eta|_{P_1} = \eta|_{P_2} = 0$. Dann ist eine Kurve γ auf S genau dann eine Bahn des Hamiltonschen Flusses mit Endpunkten in P_1 und P_2 , wenn γ eine Extremale von A mit Endpunkten in P_1 und P_2 ist.*

*Insbesondere ist für ein Kotangentialbündel $M = T^*P$ mit kanonischer Struktur, d.h. $\omega = d\lambda$, eine Kurve γ auf S genau dann eine Bahn des Hamiltonschen Flusses, wenn γ eine Extremale von A mit Endpunkten in P ist.*

BEWEIS Vergegenwärtigt man sich die Ausführung in Satz 3.3.1, stellt man fest, dass für die Aussage

$$dA(\gamma)(X) = \int_{\gamma} \iota_X \omega$$

erforderlich war, dass $X(a) = X(b) = 0$. Haben die Variationskurven auf S Endpunkte in P_1 und P_2 , gilt $X(a) \in TP_1$ und $X(b) \in TP_2$ und daher $\eta_{\gamma(a)}(X(a)) = \eta_{\gamma(b)}(X(b)) = 0$. ■

In Lemma 2.2.9 war eine Konjugation des Lagrangeschen- und Hamiltonschen-Flusses durch die Legendre-Transformation gegeben. Flusskurven im Kotangentialbündel entsprachen Extremalen der Hamiltonschen-Wirkung und die symplektische Struktur war durch die Standardform gegeben - insbesondere also durch die Liouville-Form. Als nächstes soll untersucht werden, welche Folgerungen Satz 3.3.1 für die Beschreibung der Bewegung im Magnetfeld liefert. Dafür stehen wieder zwei Zugänge zur Verfügung: zum einen über die magnetische-Lagrangefunktion und mit ihr der Standardform auf T^*M und zum anderen über die gedrehte Form auf T^*M . Wir starten mit der gedrehten Form:

Korollar 3.3.4 Sei Ω_B eine exakte 2-Form auf einer Mannigfaltigkeit M mit Vektorpotential α und $\omega_B = \omega_0 + \pi^*\Omega_B$ die gedrehte Form auf T^*M . Ferner sei für $c > 0$ die Energiefläche $S := H^{-1}(c)$ der Hamiltonfunktion $H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2$ gegeben.

Dann ist eine Kurve γ auf S genau dann eine Trajektorie des magnetischen Flusses, wenn sie eine Extremale von $\int_{\gamma} \lambda + \pi^*\alpha$ mit festen Endpunkten in M ist.

BEWEIS Nach Lemma 3.1.8 ist ω_B eine symplektische Form auf T^*M und es gilt

$$\omega_B = d\lambda + \pi^*d\alpha = d(\lambda + \pi^*\alpha)$$

Eine Trajektorie des magnetischen Flusses entspricht nach Satz 3.1.9 einer Trajektorie des von H bzgl. ω_B erzeugten Hamiltonschen Flusses. Dann folgt die Aussage mit Korollar 3.3.3. ■

Fasst man die Bewegung im Magnetfeld als magnetisch-Lagrangeschen-Fluss auf, wird der konjugierte Fluss im Phasenraum der Impulse als Hamiltonscher-Fluss bzgl. der Standardform beschrieben. Insbesondere können Kurven in T^*M über die Legendre-Transformation durch Wahl der Impulse auf Kurven im Konfigurationsraum mit zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren übertragen werden. Satz 3.3.1 liefert hierbei die Voraussetzung, Trajektorien des magnetischen Flusses als Extremalen eines Variationsprinzips aufzufassen, welches im Anschluss ermöglicht, den Fluss als Finsler-geodätischen-Fluss zu interpretieren.

Satz 3.3.5 Sei Ω_B eine exakte 2-Form auf M und α ein zugehöriges Vektorpotential. Dann sind Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses mit Energie $E > 0$ genau die Extremalen der Wirkung

$$A(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

mit Energie E und festen Endpunkten in M .

BEWEIS Der magnetische Fluss ist der Euler-Lagrange-Fluss zur Lagrangefunktion

$$L(q, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + \alpha_q(v)$$

Nach Lemma 3.1.6 ist der durch die Legendre-Transformation konjugierte Hamiltonsche Fluss durch die Hamiltonfunktion

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p - \alpha|^2$$

bzgl. der Standardform auf T^*M gegeben. Für reguläre Werte liegen Trajektorien des Flusses auf Niveauflächen der Hamiltonfunktion (vgl. Satz 2.1.19). Wir setzen $S := H^{-1}(E)$.

Die Legendre-Transformation liefert nach Definition 2.2.8 den Impuls

$$p = \frac{\partial L(x, v)}{\partial v}$$

Wie in Satz 3.1.4 und Lemma 3.1.6 gilt lokal $\alpha_q(v) = \langle K(q), v \rangle$ mit einem Vektorfeld $K(q) = (f_1(q), \dots, f_n(q))^T$ und ferner

$$\frac{\partial L}{\partial v} = v + K$$

Die (kinetische) Energie ist nach Satz 3.1.4 auf Trajektorien des magnetischen Flusses konstant. Die Legendre-Transformation bildet eine Kurve γ in M mit Energie E wegen

$$H\left(\gamma(t), \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial v}\right) = \frac{|\dot{\gamma}(t) + K(\gamma(t)) - K(\gamma(t))|^2}{2} = E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

auf eine Kurve auf S ab und andersrum. Nun sind Trajektorien des Hamiltonschen Flusses auf S nach Korollar 3.3.3 aber genau die Extremalen von

$$A(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda$$

mit festen Endpunkten in M . Dabei hat die Liouville-Form lokal die Gestalt $\lambda = pdq$. Wir übertragen die Extremalen von A auf S mit festen Endpunkten in M durch die Legendre-Transformation in den Phasenraum der Geschwindigkeiten. Es bezeichne $\tilde{\gamma}$ eine Kurve auf S und γ die zugehörige im Tangentialbündel. Dann gilt lokal

$$\begin{aligned} \lambda_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) &= \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial v} dq_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}{\partial v_k} dq_{k,\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n (\dot{\gamma}_k(t) + f_k(\gamma(t))) \dot{\gamma}_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^n \dot{\gamma}_k^2(t) + f_k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \\ &= |\dot{\gamma}(t)|^2 + \langle K(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \end{aligned}$$

und damit für eine Kurve $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow T^*M$ mit Energie E

$$\int_{\tilde{\gamma}} \lambda = \int_a^b (|\dot{\gamma}(t)|^2 + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))) dt$$

und es folgt die Behauptung. ■

Für ein ausgewähltes Energieniveau erkennen wir die untersuchte Finsler-Metrik wieder.

Satz 3.3.6 Sei Ω_B eine exakte 2-Form auf M und α ein zugehöriges Vektorpotential. Dann sind Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses mit Energie $E = \frac{1}{2}$ genau die Extremalen der Wirkung

$$A(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

mit Energie $E = \frac{1}{2}$ und festen Endpunkten in M .

BEWEIS Nach Satz 3.3.5 sind Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses mit Energie $E = \frac{1}{2}$ genau die Extremalen der Wirkung $A(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$ mit Energie $E = \frac{1}{2}$ und festen Endpunkten in M . Gilt aber $E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{|\dot{\gamma}(t)|^2}{2} = \frac{1}{2}$ für alle $t \in [a, b]$, folgt $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ für alle $t \in [a, b]$ und damit die Behauptung. ■

Damit können wir jetzt die Brücke zur Finsler-Geometrie schlagen. Wir erhalten als zentrales Resultat:

Satz 3.3.7 Sei Ω_B eine exakte 2-Form auf M , die ein Vektorpotential α mit $\|\alpha\| < 1$ besitzt. Dann sind die Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses mit Energie $E = \frac{1}{2}$ genau die Trajektorien des Finsler-geodätischen Flusses der Finsler-Metrik

$$F(q, v) = |v| + \alpha_q(v)$$

BEWEIS Nach Lemma 3.2.3 ist $F(q, v) = |v| + \alpha_q(v)$ eine Finsler-Metrik auf M . Finsler-Geodäten sind Extremalen des Finsler-Längenfunktionals (vgl. S. 39)

$$\Lambda_F(\gamma) := \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

Dies sind nach Satz 3.3.6 aber wiederum genau die Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses zum Vektorpotential α mit Energie $E = \frac{1}{2}$. ■

Trajektorien des Finsler-geodätischen-Flusses sind nach der Finsler-Bogenlänge parametrisiert, wohingegen Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses in dieser Situation die Energie $E = \frac{1}{2}$ besitzen. Das Finsler-Längenfunktional ist unabhängig von der Parametrisierung (vgl. S. 39). Daher gibt die Wirkung $A(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$ unabhängig von der Parametrisierung die Finsler-Länge einer Extremale an.

Definition 3.3.8 Sei Ω_B eine exakte 2-Form auf M , die ein Vektorpotential α mit $\|\alpha\| < 1$ besitzt. Dann bezeichnen wir die Finsler-Metrik

$$F(q, v) = |v| + \alpha_q(v)$$

als die zu α gehörige magnetische Finsler-Metrik.

4 Magnetische Billards, Finsler-Billards und das Spektrum

Bereits klassische, ebene Billards erlauben die Untersuchung verschiedenster Aspekte und bieten daher eine Verbindung zu diversen Bereichen der mathematischen Forschung. Beeinflusst ein magnetisches Feld die Bewegung im Billardtisch, spricht man von einem magnetischen Billard. Liegt der Billardtisch auf einer Riemannschen-Fläche, erfolgt die Beschreibung des Billards in der Riemannschen-Geometrie. Eine Verallgemeinerung sind Billards im Kontext der Finsler-Geometrie - die Finsler-Billards. Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass sich der magnetische Fluss, unter geeigneten Bedingungen, als geodätischer Fluss einer Finsler-Metrik interpretieren lässt. Magnetische Billards sind dann auch als Finsler-Billards auffassbar.

Wir beginnen mit der Erläuterung der beiden Billardmodelle. Neben der Beschreibung der Bewegung innerhalb des Tisches wird das Randverhalten, d.h. die Reflexionen, erklärt. Nach der Einführung der Billardabbildung formulieren wir allgemeine Kriterien, die gewünschte Eigenschaften der Billardabbildung sicherstellen. Im letzten Abschnitt übertragen wir schließlich Ergebnisse der Aubry-Mather-Theorie auf Billards, die die eingeführten Kriterien erfüllen.

4.1 Modellbildung: Magnetische- und Finsler-Billards

Das Modell des mathematischen Billards ist überraschend schnell erklärt. Im einfachsten Fall ist eine einfach-zusammenhängende, abgeschlossene Teilmenge der euklidischen Ebene gegeben, die man als „Billardtisch“ auffasst. Innerhalb des Tisches bewegt sich eine Punktmasse ohne Krafteinwirkung, bis sie auf den Rand stößt. Dort gibt es eine Reflexion. Physikalisch wird diese als elastischer Stoß aufgefasst, d.h. insbesondere, dass die Energie erhalten bleibt. Die Punktmasse bewegt sich danach mit neuer Richtung weiter, bis sie erneut auf den Rand der Menge stößt. Zu gegebenem Anfangsort und -richtung entsteht so mit fortlaufender Zeit und weiteren Reflexionen die Bahn des Teilchens (siehe Abbildung 4.1).

Dieses einfach anmutende Modell führt zu einer erstaunlichen Fülle an Aspekten, die von mathematischem Interesse sind und in die verschiedensten Bereiche der Mathematik führen. Das mathematische Billard als dynamisches System ist stark durch die Geometrie des Billardtisches geprägt. Als grobe Einteilung auftauchender Dynamik kann man glatte konvexe Billards, polygonale Billards und chaotische Billards nennen. Billards lassen sich aber auch in höheren Dimensionen einführen, oder man legt statt der euklidischen eine andere Geometrie zugrunde. Daneben gibt

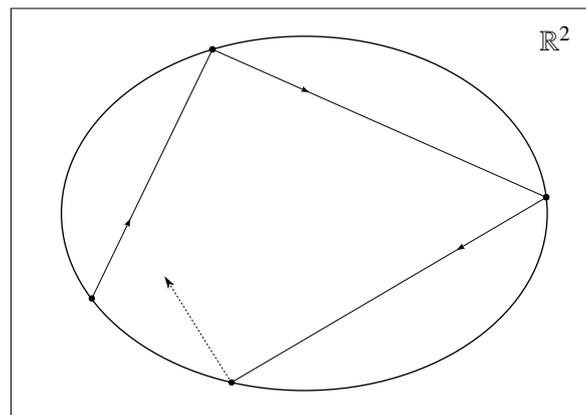


Abbildung 4.1: Das euklidische Billard

es auch das Modell des dualen Billards, das jedoch einer anderen Idee folgt. Jeder dieser einzelnen Bereiche ist intensiv untersucht worden, und es ließen sich dutzende Verweise angeben. Einen guten Einstieg und Überblick mit vielen weiteren Verweisen erhält man in [45] und [42]. Neben dem erläuterten Modell werden in der Physik auch Quantenbillards untersucht, bei denen der Ort des Teilchens durch eine Wellenfunktion angegeben wird und der genaue Ort einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit weicht.

Folgt die Bewegung der Punktmasse nicht dem euklidischen freien Fluss, sondern dem geodätischen Fluss einer Finsler-Metrik, erhält man ein *Finsler-Billard*.

Was genau ist aber ein *magnetisches Billard*? Wie zuvor beschrieben bewegt sich eine Punktmasse in einem Billardtisch. Dieser kann zwei- oder mehrdimensional, flach oder gekrümmt sein. Betrachten wir zur Anschauung den zweidimensionalen ebenen Fall: Ergänzend zum klassischen Billard wird der Tisch senkrecht von einem Magnetfeld durchstoßen. Man denke z.B. an ein Elektron, das durch das Magnetfeld von der Bahn der freien Bewegung abgelenkt wird. Das Teilchen bewegt sich nun im Gegensatz zum euklidischen Billard nicht mehr entlang von Geradensegmenten. Die vom Magnetfeld induzierte Lorentzkraft wirkt senkrecht auf das Teilchen, so dass sich dieses innerhalb des Tisches auf gekrümmten Bahnen bewegt (siehe Abbildung 4.2). Insbesondere ändert das Magnetfeld zwar die Richtung des Teilchens, nicht aber seine Energie. Hat das Teilchen Einheitsgeschwindigkeit, wird die Krümmung der Bahn in einem Punkt durch die Stärke des Magnetfeldes beschrieben (man vergegenwärtige sich die einführenden Erläuterungen in Abschnitt 3.1). Die Anschauung des erläuterten Modells gibt bereits vor, wie wir einen Billardtisch und den zugehörigen Phasenraum mathematisch auffassen möchten. Der Tisch ist eine abgeschlossene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit, auf der der dem Billard zugrundeliegende Fluss definiert ist. Durch den Rand des Tisches wird die Bewegung auf der Mannigfaltigkeit begrenzt. Wenn das Reflexionsverhalten am Rand mathematisch verstanden ist, ist die Bewegung innerhalb des Tisches als Teilmenge der Mannigfaltigkeit im Lagrangeschen bzw. Hamiltonschen Sinne beschreibbar. Wir werden uns auf den zweidimensionalen Fall und einfach zusammenhängende Tische mit glattem Rand beschränken.

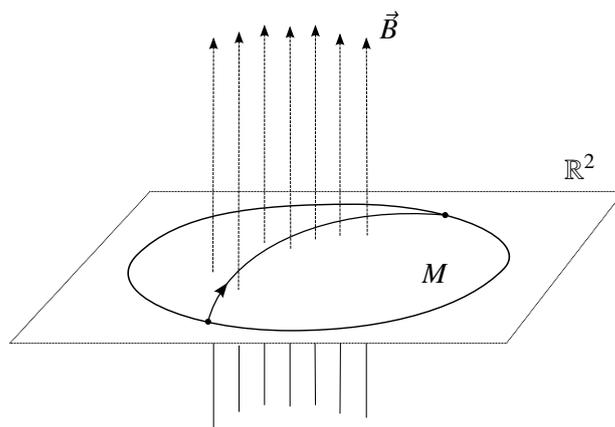


Abbildung 4.2: Das ebene Billard mit Magnetfeld

Um eine Besonderheit, die am Rand eintreten kann, muss man sich Gedanken machen: Trajektorien des Flusses, die den Rand tangential berühren. Je nach Stärke der Krümmung des Randes und der Trajektorie in diesem Punkt können zwei unterschiedliche Fälle eintreten. Ist die Krümmung der Bahn größer als die des Randes, nähert sich die Bahn dem Rand an und berührt ihn, aber es findet keine Reflexion im eigentlichen Sinne statt - der Tangentialvektor der Bahn im Punkt der Berührung bleibt erhalten und die Punktmasse bewegt sich ins Innere des Tisches weiter. Im anderen Fall tritt die gleiche Überlegung wie im klassischen konvexen Billard auf. In der Anschauung würde sich die Punktmasse dann entlang des Randes bewegen. Dabei stößt sie unmittelbar nach der Reflexion wieder auf den Rand, d.h. ein Bahnsegment bestünde hier genau aus einem Punkt. Sollte dieser Fall eintreten, werden wir diese Bewegung auch als „Bahn“ des Billards auffassen. Dieser Sachverhalt wird später bei der Einführung der Billardabbildung aber noch einmal aufgegriffen.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass sich die Bewegung im Magnetfeld auch im Rahmen der Finsler-Geometrie beschreiben lässt. Das magnetische Billard ist somit unter geeigneten Bedingungen auch als *Finsler-Billard* interpretierbar (vgl. dazu auch [44] und [20]). Ein solches Billard werden wir im Folgenden als *magnetisches Finsler-Billard* bezeichnen. Die Bahnsegmente des Teilchens entsprechen dann Trajektorien des Finsler-geodätischen-Flusses. Die Bewegung innerhalb des Tisches, d.h. zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kontakten mit dem Rand, ist daher durch das vorherige Kapitel erklärt.

Die verbleibende Frage ist nun, wie der Zusammenstoß am Rand mathematisch zu verstehen ist und welchen Gesetzmäßigkeiten die Reflexion unterliegt. Im klassischen Fall, d.h. ohne Einwirkung eines Magnetfeldes, folgt die Reflexion der allgemein bekannten Regel „Einfallswinkel=Ausfallswinkel“, doch auch dahinter verbirgt sich ein tieferliegendes Prinzip. Die Bewegung innerhalb des Tisches unterliegt einem Variationsprinzip - die Bahnsegmente sind Trajektorien der freien Bewegung, also Trajektorien des geodätischen Flusses und damit Extremale des zugehörigen Wirkungsfunktionals. Die Reflexion am Rand ist ebenfalls in diesem Kontext zu be-

trachten. Die eigentliche Problemstellung bei der Reflexion am Rand lautet daher wie folgt: Zwischen zwei Punkten ist eine extremale Verbindungsstrecke gesucht - unter der Nebenbedingung, dass sie einen Punkt auf dem Rand besitzt. Für die Anschauung sei hier auch Birkhoffs Konstruktion des Billardmodells erwähnt, das in [42] eingangs aufgegriffen wird. Dazu stelle man sich den Tisch als Mannigfaltigkeit ohne Rand mit infinitesimaler „Dicke“ vor, so dass die Reflexion als Grenzfall des Wechsels des Teilchens von der „Oberseite“ zur „Unterseite“ interpretiert werden kann. Im Grenzfall werden dann aus Trajektorien des freien Flusses „gebrochene Geodäten“ - die Billardbahnen (vgl. Abbildung 4.3). Billards stellen Beispiele für Flüsse auf Mannigfaltigkeiten mit Rand dar.

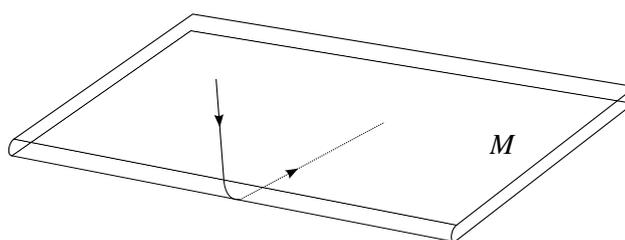


Abbildung 4.3: gebrochene Geodäten als Grenzfall der freien Bewegung

Das konkrete Brechungsgesetz lässt sich im klassischen Billard ohne Magnetfeld elementar mit dem Lagrangeschen Multiplikatorenansatz herleiten (vgl. [45]). Ein tieferliegendes Verständnis bietet ein Prinzip, das vor allem in der Physik wohlbekannt ist. Dort begegnet man ihm z.B. bei Brechungen von Licht an Übergängen verschiedener Medien. Ein klassisches Beispiel ist die Brechung von Licht an einer Wasseroberfläche oder auch die Brechung in einem Prisma. Es wird allgemein als *Huygenssches Prinzip* bezeichnet und erlaubt die Erklärung solcher Probleme durch die Beschreibung der Ausbreitung von *Wellenfronten*. In der Mathematik wird dies auch als „geometrische Optik“ bezeichnet (vgl. z.B. [2]).

Wie leitet man jetzt das konkrete Reflexionsgesetz für Finsler-Billards und damit insbesondere auch das für magnetische Finsler-Billards her? In der Literatur findet man bei der Beschreibung magnetischer Billards mit konstantem Magnetfeld ebenfalls die Regel „Einfallswinkel=Ausfallswinkel“ (z.B. [7], [47]). Man führe sich aber vor Augen, dass die Finsler-Struktur bei der Untersuchung von Finsler-Billards gar nicht die Möglichkeit bietet „Winkel“ zu messen. Dies ist der ersichtlichste Unterschied zur Riemannschen-Geometrie, bei der auf jedem Tangentialraum ein Skalarprodukt gegeben ist. Die Beschreibung der Reflexion muss also ohne Winkel und im Kontext der Finsler-Geometrie stattfinden.

Formulierung und Beweis des Reflexionsgesetzes für Finsler-Billards ist in allgemeiner Form in [20] und für den zweidimensionalen Fall anschaulich in [45] beschrieben. Die Übertragung auf magnetische Finsler-Billards findet man in [44].

In [20] und [45] werden reversible Finsler-Metriken betrachtet. Aussage und Beweis gelten (wie auch in [44] erwähnt) ebenfalls für nicht-reversible Finsler-Metriken. Der einzige Unterschied liegt in der geometrischen Gestalt der Indikatrix - im nicht-reversiblen Fall muss die Indikatrix nicht zentralsymmetrisch sein. Wir lassen hier daher eine Ausarbeitung in aller Ausführlichkeit aus, heben die Aussagen und Schritte der anschaulichen Erläuterung des zweidimensionalen Falls aus [45] hervor und passen die graphische Illustration auf eine nicht-zentralsymmetrische Indikatrix an. Bei der weiteren Untersuchung magnetischer Billards und Finsler-Billards werden wir nicht Huygens Theorie der Ausbreitung von Wellenfronten benutzen. Eine Erläuterung dieser lassen wir hier daher aus und verweisen auf Literatur ([2] oder auch [45], [20]).

Das Reflexionsgesetz für Finsler-Billards mag auf den ersten Blick sperrig und unhandlich wirken. Wie wir sehen werden, erhält man für magnetische Finsler-Billards aber ein einprägsames und vertrautes Brechungsgesetz.

Lemma 4.1.1 Sei F eine Finsler-Metrik auf einem zweidimensionalen Billardtisch M , $X \in \partial M$ der Ort der Reflexion und h die Tangente an ∂M in X . Ferner seien u der Tangentialvektor des einfallenden Bahnsegments im Punkt X , sowie v der Tangentialvektor des abgehenden Bahnsegments im Punkt X . Dann liegen u und v in der Indikatrix $B_F(X)$ und die Tangenten an $B_F(X)$ in u und v schneiden sich in einem Punkt w auf h oder sind parallel zu h . Berührt das einfallende Bahnsegment ∂M in X tangential, gilt $v = u$, d.h. es findet keine Reflexion statt.

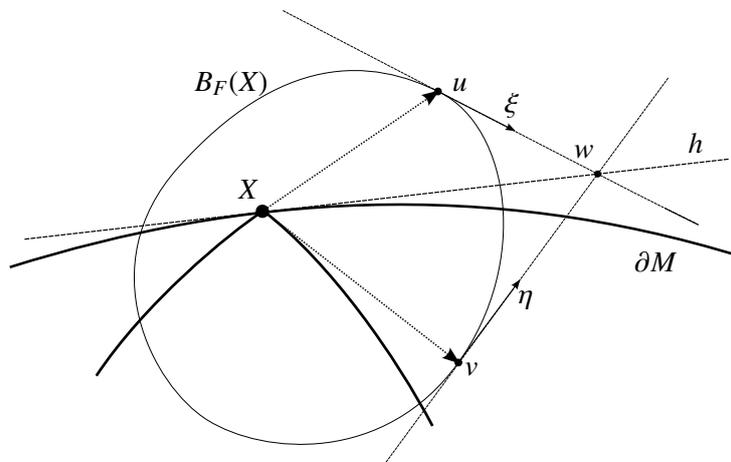


Abbildung 4.4: Das Reflexionsgesetz für Finsler-Billards

BEWEIS Die Bahnsegmente sind Geodäten des Finsler-geodätischen-Flusses und daher nach der Finsler-Bogenlänge parametrisiert. Daher gilt $F_X(u) = F_X(v) = 1$ und folglich $u, v \in B_F(X)$. Durch Variation des Reflexionspunktes X erhält man die extremale gebrochene Verbindung AXB . Sie ist Extremale der Finsler-Länge von A nach X nach B .

Es bezeichne $f(X)$ die Finsler-Länge von A nach X und $g(X)$ die Finsler-Länge von X nach B . Weiter sei ξ ein Tangentialvektor an $B_F(X)$ in u und entsprechend $\eta \in T_v B_F(X)$. Das Huygenssche

Prinzip sagt, dass ξ tangential zu einer Niveauläche von f liegt und η bzgl. g . Da u, v Tangentialvektoren von Trajektorien des Finsler-geodätischen Flusses sind, gilt für die Richtungsableitungen $D_u f(X) = 1$, $D_\xi f(X) = 0$, $D_v g(X) = -1$ sowie $D_\eta g(X) = 0$. Die Indikatrix ist strikt konvex. Angenommen die Tangenten an $B_F(X)$ in u und v schneiden sich in einem Punkt w . Dann gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $w = u + a\xi = v + b\eta$.

Folglich gilt $D_w f(X) = 1$, $D_w g(X) = -1$ und damit schließlich $D_w(f + g)(X) = 0$. Liegt w auf h , ist die gebrochene Verbindung AXB Extremale der Finsler-Länge.

Im Grenzfall $a, b \rightarrow \infty$ erhält man den Fall zu h paralleler Tangenten. Für den Fall einer reversiblen Finsler-Metrik ist die Indikatrix zentralsymmetrisch und parallele Tangenten treten ein, wenn $v = -u$ ■

Bewegt sich eine Punktmasse in einem Finsler-Billard auf den Rand zu, erhält man die Richtung nach der Reflexion also folgendermaßen: Man betrachte die Indikatrix im Reflexionspunkt X , sowie die Tangente h an ∂M in X . Die Tangente an $B_F(X)$ in $u \in B_F(X)$ schneidet h im Punkt w . Ausgehend von w lege man die zum Tisch gewandte Tangente an $B_F(X)$. Der Berührungspunkt v der Tangente liefert den Richtungsvektor der abgehenden Bahnkurve im Punkt X . Liegt die Tangente in u an $B_F(X)$ tangential zu h suche die parallele Tangente an $B_F(X)$. Der Berührungspunkt dieser Tangente an $B_F(X)$ liefert dann den gesuchten Vektor $v \in B_F(X)$.

Im Falle der Abwesenheit eines Magnetfeldes geht dieses Reflexionsgesetz in einem magnetischen Finsler-Billard insbesondere in das bekannte Gesetz „Einfallswinkel=Ausfallswinkel“ über. Die Indikatrix ist dann der Einheitskreis und das Reflexionsgesetz leitet sich aus der Symmetrie im Einheitskreis ab.

Nicht nur in diesem Sonderfall, sondern auch für allgemeine magnetische Finsler-Billards, präsentiert sich das Brechungsgesetz in einfacher Form. Die Indikatrix ist die Niveaumenge von F_q zum Wert 1. Die Finsler-Metrik eines magnetischen Billards hat die Gestalt

$$F(q, v) = |v| + \alpha_q(v)$$

mit einem Vektorpotential α . Insbesondere ist α_q für $q \in M$ eine Linearform auf \mathbb{R}^2 . Die Indikatrix ist daher ein Kegelschnitt. Die Ebene schneidet den Kegel wegen der Bedingung $\|\alpha\| < 1$ so flach, dass die Indikatrix eine Ellipse ist. Das resultierende Brechungsgesetz folgt dann aus geometrischen Eigenschaften einer Ellipse und wurde in [44] formuliert.

Lemma 4.1.2 *Für magnetische Finsler-Billards ist die Indikatrix eine Ellipse mit Ursprung in einem Brennpunkt. Die Reflexion eines magnetischen Finsler-Billards folgt der Regel, dass der Einfallswinkel dem Ausfallwinkel gleicht.*

BEWEIS Sei $q \in M$. Dann ist α_q eine Linearform auf \mathbb{R}^2 und hat einen eindimensionalen Kern. Wähle die Koordinaten so, dass $\alpha_q(v) = tv_1$ für ein $t \geq 0$. Nach Voraussetzung gilt $\|\alpha\| < 1$ und folglich $t < 1$. Die Finsler-Metrik in $q \in M$ hat jetzt die Gestalt

$$F_q(v) = |v| + tv_1$$

für $v \in T_q M$. Dann gilt

$$v \in B_F(q) \iff |v| + tv_1 = 1 \iff v_1^2 + v_2^2 = 1 - 2tv_1 + t^2v_1^2$$

und äquivalent

$$v_1^2(1 - t^2) + 2tv_1 + v_2^2 - 1 = 0$$

Mittels quadratischer Ergänzung erhält man nun

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - t^2)v_1^2 + 2tv_1 + v_2^2 - 1 \\ &= (1 - t^2)\left(v_1 + \frac{t}{1 - t^2}\right)^2 - \frac{2tv_1}{1 - t^2} - \frac{t^2}{(1 - t^2)^2} + 2tv_1 + v_2^2 - 1 \\ &= (1 - t^2)\left(v_1 + \frac{t}{1 - t^2}\right)^2 + v_2^2 - \frac{1}{1 - t^2} \\ &= (1 - t^2)^2\left(v_1 + \frac{t}{1 - t^2}\right)^2 + (1 - t^2)v_2^2 - 1 \end{aligned}$$

Wir setzen

$$a^2 := \frac{1}{(1 - t^2)^2} \quad \text{und} \quad b^2 := \frac{1}{1 - t^2}$$

und erhalten schließlich

$$F_q(v) = 1 \iff \frac{\left(v_1 + \frac{t}{1 - t^2}\right)^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{b^2} = 1$$

Wegen $0 \leq t < 1$ folgt sofort $a^2 \geq b^2$. Also ist die Indikatritz eine Ellipse mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse b .

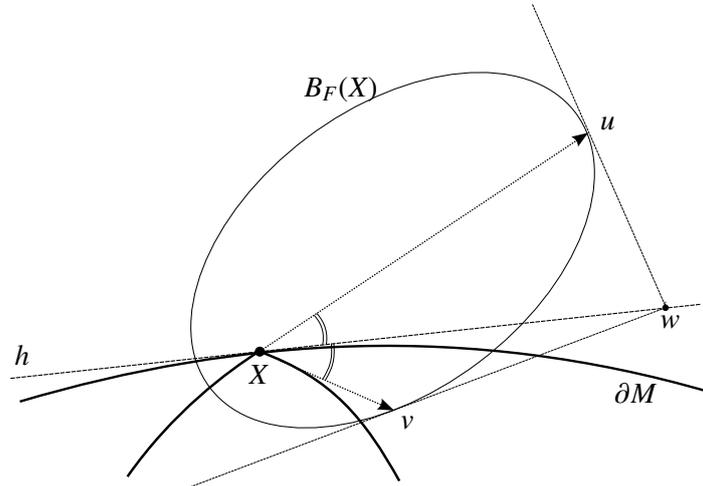


Abbildung 4.5: Das Reflexionsgesetz für magnetische Finsler-Billards

Die Exzentrizität gibt den halben Abstand der Brennpunkte an und berechnet sich hier zu

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{t^2}{(1 - t^2)^2}} = \frac{t}{1 - t^2}$$

und entspricht damit genau der Translation der Ellipse entlang der Hauptachse. Also ist die Indikatrix eine Ellipse mit Ursprung in einem Brennpunkt.

Seien P der Brennpunkt einer Ellipse und A und B Punkte auf der Ellipse. Schneiden sich die Tangenten zu A und B in einem Punkt Q , halbiert die Strecke \overline{PQ} den Winkel APB (vgl. dazu [5]). Wir übertragen jetzt das Reflexionsgesetz für Finsler-Billards auf die Indikatrix eines magnetischen Finsler-Billards. Seien dazu $u, v \in B_F(X)$ die Tangentialvektoren des einfallenden und abgehenden Bahnsegments im Randpunkt X . Schneiden sich die Tangenten zu u und v an $B_F(X)$ in einem Punkt w auf der Tangente h an ∂M in X , halbiert h den Winkel zwischen $\overline{u0}$ und $\overline{0v}$.

Der Grenzfall des unendlich weit entfernten Schnittpunkts beschreibt wieder den Fall zu h paralleler Tangenten. Ist h parallel zur Nebenachse der Ellipse entspricht dies dem Fall eines gestreckten Winkels $u0v$. ■

Ein magnetisches Finsler-Billard kann aber nicht nur im Rahmen der Finsler-Geometrie betrachtet werden. Idealerweise erwartet man, dass das Brechungsgesetz eines magnetischen Billards unabhängig von der Wahl der Geometrie ist. In der Tat erhält man für magnetische Billards immer die Winkelerhaltung als Brechungsgesetz - auch unabhängig von dem gewählten Energieniveau. Der Beweis hat die gleiche Argumentationsstruktur wie der im allgemeinen Finsler-Fall; hier mit einer rotationssymmetrischen Indikatrix. Zusätzlich steht aber die Riemannsche-Metrik zur Verfügung, so dass sich der Beweis des klassischen Billards ohne Magnetfeld, der den Lagrangeschen Multiplikatorenansatz nutzt, übertragen lässt (vgl. [45]). Wesentlich ist es herauszustellen, bzgl. welcher Wirkung die Lösungskurven des dem Billard zugrunde liegenden Flusses extremal sind. Im klassischen Billard ist dies das Längenfunktional. Für magnetische Billards findet man die entsprechende Wirkung auf Seite 48.

Lemma 4.1.3 *In einem magnetischen Billard folgt die Reflexion der Regel, dass der Einfallswinkel dem Ausfallswinkel gleicht.*

BEWEIS Der zugrunde liegende Fluss des Billards ist der magnetisch-Lagrangesche-Fluss zu einem Energieniveau $E > 0$. Insbesondere liegen die Trajektorien in der Energiefläche zur Energie E , d.h. für eine Trajektorie $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ gilt

$$\frac{|\dot{\gamma}(t)|^2}{2} = E$$

für jedes $t \in (a, b)$ und damit $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{2E}$ für jedes $t \in (a, b)$. Nach Satz 3.3.5 sind Trajektorien des Flusses Extremalen der Wirkung

$$A(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

Es sei die gebrochene Verbindung AXB wie in Lemma 4.1.1 gegeben; extremal bzgl. der Wirkung A . Ferner bezeichne γ_1 die Trajektorie von A nach X und γ_2 diejenige von X nach B , und es sei $f(X) := A(\gamma_1) + A(\gamma_2)$. Wie in [45], S.12f., ist $X \in N$ nach dem Lagrangeschen Multiplikatorenansatz

genau dann ein kritischer Punkt von f , wenn $\nabla f(X)$ orthogonal auf N steht. Dies ist aber wiederum genau dann der Fall, wenn der Tangentialvektor u von γ_1 in X und der Tangentialvektor v von γ_2 in X dieselben Winkel zu $T_X N$ bilden. \blacksquare

Nachdem die Bewegung innerhalb des Tisches erklärt und nun auch das Verhalten am Rand verstanden ist, können wir jetzt eine präzisere Definition des Modells angeben und die Billardabbildung einführen.

Definition 4.1.4 Sei \tilde{M} eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit und $M \subset \tilde{M}$ eine einfach zusammenhängende Menge mit glattem Rand $N := \partial M$. Ferner sei $B : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass $\Omega_B := B(q)dq_1 \wedge dq_2$ ein Vektorpotential α mit $\|\alpha\| < 1$ besitzt. Der zugehörige magnetische Fluss zur Energie $E = 1/2$ entspricht dem Finsler-geodätischen-Fluss der zu α gehörigen magnetischen Finsler-Metrik.

Mit $[M, B]$ bezeichnen wir im Folgenden das magnetische Billard, das durch den zugehörigen Finsler-geodätischen-Fluss in M und Reflexion an N beschrieben wird.

Interpretieren wir das magnetische Billard bzgl. des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses, bezeichnen wir es mit $[M, \Omega_B]$.

Ein allgemeines Finsler-Billard zur Finsler-Metrik F erhält die Bezeichnung $[M, F]$.

Zu einem Punkt $q \in N$ bezeichne $s(q)$ den Tangentialvektor an N in q mit mathematisch positiver Orientierung, der der Parametrisierung des zugrunde liegenden Flusses entspricht. In einem Finsler-Billard ist $s(q) \in B_F(q)$ und besitzt die Länge $F_q(s(q)) = 1$.

In einem magnetischen Billard $[M, \Omega_B]$ zur Energie E gilt $s(q) \in \{v \in T_q M : |v|^2/2 = E\}$.

Wir führen die Reflexions- und Billardabbildung für Finsler-Billards ein:

Sei u der Tangentialvektor einer einfallenden Geodäte in q und v derjenige der abgehenden Geodäte nach der Reflexion. Für $q \in N$ definieren wir die *Reflexionsabbildung* $\mathcal{R}_q : B_F(q) \rightarrow B_F(q)$ durch

$$\mathcal{R}_q(u) := v$$

Ist $u \notin T_q N$, so ist u bezogen auf M nach außen gerichtet und v nach innen. Für $q \in N$ definieren wir $\mathcal{A}(q)$ als die Menge aller $v \in B_F(q)$, die nach außen gerichtet sind und $\mathcal{I}(q)$ als die Menge aller $v \in B_F(q)$, die nach innen gerichtet sind und setzen

$$B_F^a(q) := \mathcal{A}(q) \cup (T_q N \cap B_F(q)) \quad \text{und} \quad B_F^i(q) := \mathcal{I}(q) \cup (T_q N \cap B_F(q))$$

Dann ist die Reflexionsabbildung \mathcal{R} präziser eine Abbildung von $B_F^a(q)$ nach $B_F^i(q)$.

Sei jetzt γ eine Geodäte von $q_1 \in N$ nach $q_2 \in N$ mit Tangentialvektoren $v_1 \in B_F^i(q_1)$ in q_1 und $v_2 \in B_F^a(q_2)$ in q_2 . Die *Billardabbildung* \mathcal{B} definieren wir durch

$$\mathcal{B}(q_1, v_1) := (q_2, \mathcal{R}_{q_2}(v_2))$$

Die Indikatrix ist der glatte Rand einer strikt konvexen Menge. Beschreibt man die Indikatrix in Polarkoordinaten, gibt es zu jedem $\beta \in [0, \pi]$ genau einen Vektor $v \in B_F^i(q)$, der mit $s(q)$ den Winkel β bildet, und wegen der Glattheit zu jedem $q \in N$ einen Diffeomorphismus $r_q^i : B_F^i(q) \rightarrow [0, \pi]$.

Genauso gibt es zu jedem $q \in N$ einen Diffeomorphismus $r_q^a : B_F^a(q) \rightarrow [0, \pi]$.

Mit dieser Notation ergibt sich eine äquivalente Definition der Billardabbildung. Die Billardabbildung wird beschrieben durch

$$\mathcal{B}(q_1, r_{q_1}^i(v_1)) := (q_2, r_{q_2}^i \circ \mathcal{R}_{q_2}(v_2))$$

d.h. der Punkt q_1 und der Winkel von v_1 werden auf den Reflexionspunkt q_2 und den Winkel nach der Reflexion abgebildet. Sofern wohldefiniert, ist die Billardabbildung dann eine Abbildung

$$\mathcal{B} : N \times [0, \pi] \rightarrow N \times [0, \pi]$$

D.h. anschaulich, dass Ort und Schusswinkel auf den nächsten Aufprallort mit dem Rand und den neuen Winkel nach der Reflexion abgebildet werden.

Für die Anschauung ist die Verwendung von Winkeln besser geeignet, wohingegen die Definition über Vektoren für technische Zwecke oft nützlicher ist. Wir verzichten auf die Verwendung verschiedener Abkürzungen. Im jeweiligen Kontext wird anhand der Parameter ersichtlich, welcher Zugang gewählt wurde.

Betrachtet man ein magnetisches Billard nicht als Finsler-Billard, lassen sich analoge Begriffe einführen. Man erhält ebenfalls Mengen nach innen bzw. nach außen gerichteter Tangentialvektoren und kann darüber die Reflexions- sowie Billardabbildung einführen. Wie wir in Lemma 4.1.3 gesehen haben, ist das Brechungsgesetz eines magnetischen Billards unabhängig von der Wahl der zugrunde liegenden Geometrie. Die Billardabbildung bleibt daher erhalten. Erst wenn man zu gegebenen Winkeln die zugehörigen Tangentialvektoren bestimmen möchte, muss man auf die Parametrisierung der Trajektorien Rücksicht nehmen. Da wir dieser Problematik erst auf Seite 77 begegnen werden, verzichten wir an dieser Stelle auf die Einführung weiterer Abkürzungen.

Man beachte, dass wir bisher noch nicht gefordert haben, dass die Billardabbildung für jedes Paar aus Punkt und Winkel wohldefiniert ist. Wir werden später noch darauf eingehen und dafür eine passende Definition einführen. Es sei aber erneut angemerkt, dass die Winkel 0 und π stets einer gesonderten Betrachtung bedürfen, da es explizit vom jeweiligen Billard abhängt, ob eine zugehörige Trajektorie des zugrunde liegenden Flusses tatsächlich innerhalb des Tisches liegt, oder ob man diese als einpunktige Menge interpretiert (siehe dazu auch S.51).

Für magnetische Finsler-Billard lassen sich die Reflexions- und Billardabbildung genauer beschreiben, wenn man das zugehörige Reflexionsgesetz anwendet.

Lemma 4.1.5 *Sei $[M, B]$ ein magnetisches Finsler-Billard und γ eine Geodäte von $q_1 \in N$ nach $q_2 \in N$ mit Tangentialvektoren $v_1 \in B_F^i(q_1)$ in q_1 und $v_2 \in B_F^a(q_2)$ in q_2 . Dann wird die Billardabbildung durch*

$$\mathcal{B}(q_1, r_{q_1}^i(v_1)) = (q_2, r_{q_2}^a(v_2))$$

beschrieben.

BEWEIS Nach Lemma 4.1.2 entspricht der Ausfallswinkel dem Einfallswinkel. Die Reflexionsabbildung folgt daher der Vorschrift

$$\mathcal{R}_q(u) = (r_q^i)^{-1} \left(r_q^a(u) \right)$$

Dann gilt weiter

$$\mathcal{B} \left(q_1, r_{q_1}^i(v_1) \right) = \left(q_2, r_{q_2}^i \left(\mathcal{R}_q(v_2) \right) \right) = \left(q_2, r_{q_2}^i \circ (r_{q_2}^i)^{-1} \circ r_{q_2}^a(v_2) \right) = \left(q_2, r_{q_2}^a(v_2) \right)$$

und es folgt die Aussage. ■

Die Definition magnetischer Billards ließe sich, wie im klassischen Fall, auch auf polygonale Tische oder nicht einfach-zusammenhängende Mengen, wie z.B. Sinai-Billards (vgl. z.B. [45] für den klassischen Fall ohne Magnetfeld) erweitern. Oder man könnte ebenfalls höherdimensionale Billards einführen. Die Anwesenheit des Magnetfeldes hat dabei stets einen immensen Einfluss auf die Dynamik. Selbst der elementarste Fall des konstanten Magnetfeldes führt bei einfachen Tischen wie dem Kreis oder der Ellipse zu einer Fülle an Aspekten, die in Abhängigkeit des Feldes bzw. hier der Feldstärke zu beachten und untersuchen sind. Billards mit konstantem Magnetfeld wurden in der Literatur bereits intensiv studiert (z.B. [36], [7], [6], [8], [16], [47], [46], [19], [32]). Wir möchten später eine Reihe von Kriterien einführen, die uns eine „schöne“ Dynamik des Billards sichern. Bevor dies geschieht, sollten wir uns im Kontext magnetischer Billards vor Augen führen, welche zentrale Bedeutung die Magnetfeldstärke anschaulich auf die Geometrie innerhalb des Billards und damit auch auf die Dynamik desselben besitzt. Wie bereits angedeutet, ist nicht einmal die Billardabbildung zwingend überall wohldefiniert. Fernab jeder tieferen theoretischen Überlegungen über die Natur der Bahnen des Billards, lassen sich anhand der Stärke des Magnetfeldes bereits grundsätzliche geometrische und damit auch dynamische Eigenschaften des Billards ableiten. Es sei angemerkt, dass wir bei der Interpretation von Magnetfeldern im Kontext der Finsler-Geometrie eine Beschränkung des Vektorpotentials fordern mussten. Die Bedingung $\|\alpha\| < 1$ stellte sicher, dass die Funktion $F(q, v) = |v| + \alpha_q(v)$ eine Finsler-Metrik ist. Diese Einschränkung ist zunächst aber eine rein analytische (und geometrisch insofern, als dass sie uns Aufschluss über die Gestalt der Niveaumengen der Finsler-Metrik verleiht). Um einen Eindruck über das Zusammenspiel der Magnetfeldstärke mit der Größe und Form des Tisches zu bekommen, starten wir mit einer kleinen Diskussion über elementare Tische mit konstantem Magnetfeld (für weiterführende Informationen zu diesen vergleiche man die zuvor angegebene Literatur, insbes. z.B. [36], [6]).

Bemerkung 4.1.6 Für das Verständnis von Illustrationen sei darauf hingewiesen, dass in Bereichen, in denen B echt positiv ist, Geodäten eine Krümmung in Uhrzeigerichtung besitzen (vgl. Bemerkung 3.1.1).

Stellen wir uns nun ein konstantes, positives Magnetfeld vor und überlegen, wie eine zugehörige Bahn des magnetischen Flusses aussieht. Die senkrecht auf das Teilchen wirkende Lorentzkraft ist

überall gleich stark, so dass das Teilchen eine Kreisbahn beschreibt (vgl. einführende Erläuterungen in Abschnitt 3.1). Der Radius dieses Kreises wird als *Larmor-Radius* bezeichnet und berechnet sich zu

$$R_{Larmor} = \frac{|v|}{|B|}$$

Wählt man als Billardtisch einen Kreis mit Radius $R > R_{Larmor}$, wird das Teilchen niemals von einem Reflexionspunkt aus direkt die „gegenüberliegende“ Seite des Tisches erreichen, sondern vielmehr eine Wanderung entlang des Randes beschreiben.

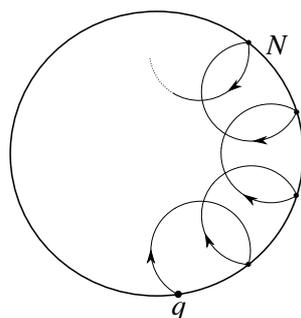


Abbildung 4.6: Das Kreisbillard mit starkem, konstantem Magnetfeld

Ist der Larmor-Radius dagegen größer als der des Tischrandes, gibt es von einem Randpunkt aus zu jedem anderen Punkt auf dem Rand eine direkte Verbindungsstrecke des magnetischen Flusses.

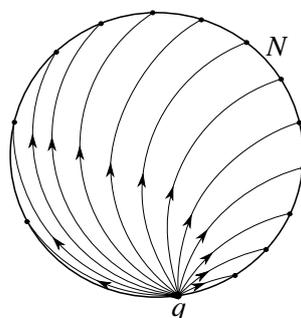


Abbildung 4.7: Das Kreisbillard mit schwachem Magnetfeld

Man beachte, dass die Wahl des Larmor-Radius, und damit die Magnetfeldstärke, in den Überlegungen beliebig gewählt werden konnte. Von zentraler Bedeutung ist daher nicht die Feldstärke allein, sondern das Zusammenspiel von Magnetfeldstärke, sowie Größe und Form des Tisches.

Wir wählen die Ellipse als Billardtisch. Liegt der Wert der Krümmung der Bahnkreise zwischen der kleinsten und größten Krümmung des Tischrandes, tritt ein „Mischfall“ ein. Ist der Larmor-Radius kleiner als der Krümmungsradius im Punkt der Ellipse mit der kleinsten Krümmung (also einem der Punkte der Nebenachse), aber größer als der Radius des Innkreises der Ellipse, kann

man zur Veranschaulichung folgendermaßen vorgehen:

Man wähle einen der beiden Punkte der kleinsten Krümmung der Ellipse, bezeichne ihn mit Q und zeichne den Kreis mit Larmor-Radius, der die Ellipse tangential in Q berührt, ein. Den resultierenden Schnittpunkt zum Winkel 0 bezeichne man mit P_1 und den zum Winkel π mit P_2 . Man beachte, dass der Kreisbogen von Q nach P_1 nicht der Bahn des magnetischen Flusses von Q nach P_1 entspricht. Sie ist die Bahn von P_1 nach Q , der eine entscheidende Bedeutung zukommt.

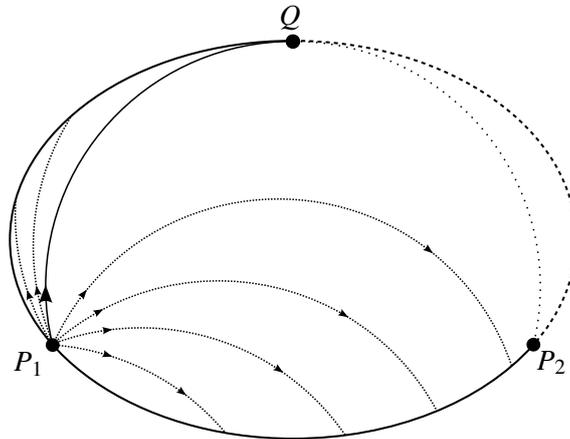


Abbildung 4.8: Unstetigkeitsstelle der Billardabbildung

Man lege jetzt das Augenmerk auf den Punkt P_1 und betrachte alle Startwinkel und die zugehörigen Bahnen des magnetischen Flusses, die in P_1 beginnen, bis zum ersten Randkontakt. Startend bei π sind alle Punkte auf dem Rand bis zum Punkt Q durch Verkleinerung des Winkels direkt erreichbar. Es bezeichne β den Winkel, der zur Trajektorie von P_1 nach Q gehört. Dann reißen in β die direkten Verbindungen ab: der Randbereich zwischen Q und P_2 ist nicht durch eine direkte Verbindung zu erreichen. Verkleinert man β weiter, erreicht man alle Randpunkte jenseits von P_2 wieder durch eine direkte Verbindung, bis man schließlich bei P_1 ankommt. Folglich hat die zugehörige Billardabbildung in (P_1, β) eine Unstetigkeitsstelle.

In [36] und [6] wurde das Billard in der Ellipse mit konstantem Magnetfeld untersucht. Je nach Feldstärke ergeben sich drei verschiedene Klassen: Für schwache Felder bleiben wesentliche Eigenschaften des klassischen Billards in der Ellipse erhalten, für starke Felder ergeben sich Bahnen, bei denen das Teilchen entlang des Randes „wandert“ und im Fall dazwischen erhält man ein chaotisches Billard. Es wurde auch der Einfluss der Krümmung des Randes auf die Dynamik des Billards untersucht. Im klassischen konvexen Billard mit glattem Rand führt die Abwesenheit der Randkrümmung in einem Punkt bereits zu einem sogenannten „glancing-billard“, d.h. dort gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Bahnen, die im Laufe der Zeit sowohl einen Reflexionswinkel $\beta < \varepsilon$ als auch $\beta > \pi - \varepsilon$ annehmen - insbesondere also die Richtung (bezogen auf die Orientierung des Tisches) umkehren (vgl. [30] und [42]). Für magnetische Billards mit konstantem Magnetfeld gab es eine entsprechende Untersuchung in [6] und [7]. In [7] formuliert Berglund diesbezüglich ein negatives Ergebnis.

4.2 Billards mit Erzeugendenfunktion

Für strikt konvexe Billards mit konstantem Magnetfeld wird in der Literatur häufig ein „hinreichend schwaches“ Magnetfeld gefordert (bezüglich der Krümmung des Randes), um (später von uns gewünschte) Eigenschaften der Billardabbildung sicherzustellen (z.B. in [6], [8] oder [36]). Da wir uns weder auf konstante Felder, noch auf flache Billards beschränken möchten, führen wir allgemeine Kriterien ein, aus denen sich anschließend zentrale Eigenschaften der Billardabbildung ableiten lassen. Ebene konvexe Billards mit „hinreichend schwachem“ Feld stellen dann eine Beispielklasse für Billards mit gewünschten Eigenschaften dar. Diese Kriterien sind nicht nur für die Untersuchung von magnetischen Billards geeignet. Wir führen sie daher für allgemeine Finsler-Billards ein. An den Rand stellen wir a priori nur die Bedingung der Glattheit.

Definition 4.2.1 Sei $[M, F]$ ein Finsler-Billard.

Im Folgenden bezeichne $\gamma_{q_1 q_2}$ eine Geodäte von q_1 nach q_2 (bzw. präziser von $\{q_1\} \times B_F^i(q)$ nach $\{q_2\} \times B_F^a(q_2)$) und $\Gamma_{q_1 q_2}$ den Orbit der zugehörigen Projektion auf M .

Für $q \in N$ und $v \in B_F^i(q)$ sei ϑ_q^v die Trajektorie, die in q mit Richtung v beginnt und Θ_q^v der zugehörige Orbit in M .

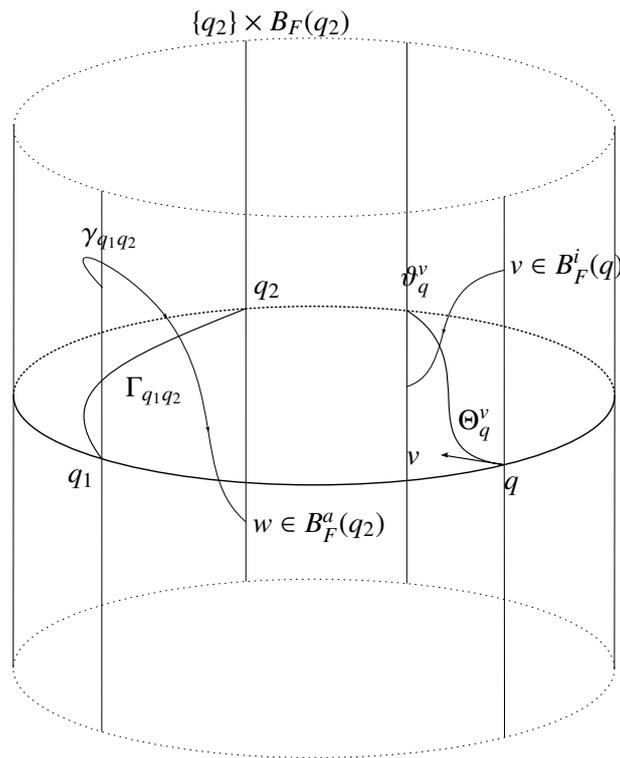


Abbildung 4.9: Der Phasenraum eines Billards

Das Billard heißt

- *geodätisch konvex*, wenn für alle paarweise verschiedenen $q_1, q_2 \in N$ eine Geodäte des

zugehörigen Finsler-geodätischen-Flusses von q_1 nach q_2 mit Projektion in M^0 existiert.

- *vorwärts vollständig*, wenn das Bild $\mathcal{B}(q, v)$ der Billardabbildung für jedes $q \in N$ und jedes $v \in B_F^i(q)$ definiert ist.
- *rückwärts vollständig*, wenn zu jedem $q \in N$ für jedes $v \in B_F^i(q)$ ein $x \in N$ existiert, so dass $\mathcal{B}(x, u) = (q, v)$ für ein $u \in B_F^i(x)$.
- *vollständig*, wenn es vorwärts und rückwärts vollständig ist.

Das Billard besitzt

- *vorwärts keine konjugierten Punkte*, wenn für alle $q \in N$ und paarweise verschiedenen $u, v \in (B_F^i(q) \setminus T_q N)$ mit $\mathcal{B}(q, u) =: (q_1, \hat{u})$, $\mathcal{B}(q, v) =: (q_2, \hat{v})$ gilt, dass $q_1 \neq q_2$ und für alle paarweise verschiedenen $u, v \in B_F^i(q)$

$$\left(\Theta_q^u \cap \Theta_q^v \cap M \right) \setminus \{q\} = \emptyset$$

Ist der Schnitt nicht leer, oder gilt $q_1 = q_2$ für zwei verschiedene $u, v \in (B_F^i(q) \setminus T_q N)$, heißt ein Element des Schnitts oder der Punkt $q_1 = q_2$ *konjugierter Vorwärtspunkt*.

- *rückwärts keine konjugierten Punkte*, wenn für alle $q \in N$ und paarweise verschiedenen Einfallstangentialvektoren $u, v \in (B_F^a(q) \setminus T_q N)$ existierender Geodäten γ_{xq} , γ_{yq} von x, y nach q gilt, dass $x \neq y$, sowie für alle paarweise verschiedenen Geodäten $\gamma_{q_1 q}$, $\gamma_{q_2 q}$ von $q_1, q_2 \in N$ nach q

$$\left(\Gamma_{q_1 q} \cap \Gamma_{q_2 q} \cap M \right) \setminus \{q\} = \emptyset$$

Ist der Schnitt nicht leer, oder gilt $x = y$ für zwei verschiedene $u, v \in (B_F^a(q) \setminus T_q N)$, heißt ein Element des Schnitts oder der Punkt $x = y$ *konjugierter Rückwärtspunkt*.

- *keine konjugierten Punkte*, wenn es weder vorwärts noch rückwärts konjugierte Punkte besitzt.

Zur Anschauung der Begriffe betrachte man Abbildung 4.10.

In einem vorwärts vollständigen Billard lässt sich die Billardabbildung iterieren. Zu gegebenem Anfangsort und Anfangsrichtung (q_1, v_1) erhält man nach n-facher Reflexion

$$(q_n, v_n) := \mathcal{B}(q_{n-1}, v_{n-1}) = \dots = \mathcal{B}^n(q_1, v_1)$$

und insgesamt die *Vorwärtsbahn* $(q_i, v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zu (q_1, v_1) .

In einem rückwärts vollständigen Billard gibt es zu gegebenem Anfangsort und Anfangsrichtung (q_1, v_1) ein $q_0 \in N$ und $v_0 \in B_F^i(q_0)$ mit $\mathcal{B}(q_0, v_0) = (q_1, v_1)$. Durch Iteration erhält man so die *Rückwärtsbahn* $(q_i, v_i)_{i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}}$ zu (q_1, v_1) .

Ist das Billard vollständig erhält man die *Billardbahn* $(q_i, v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

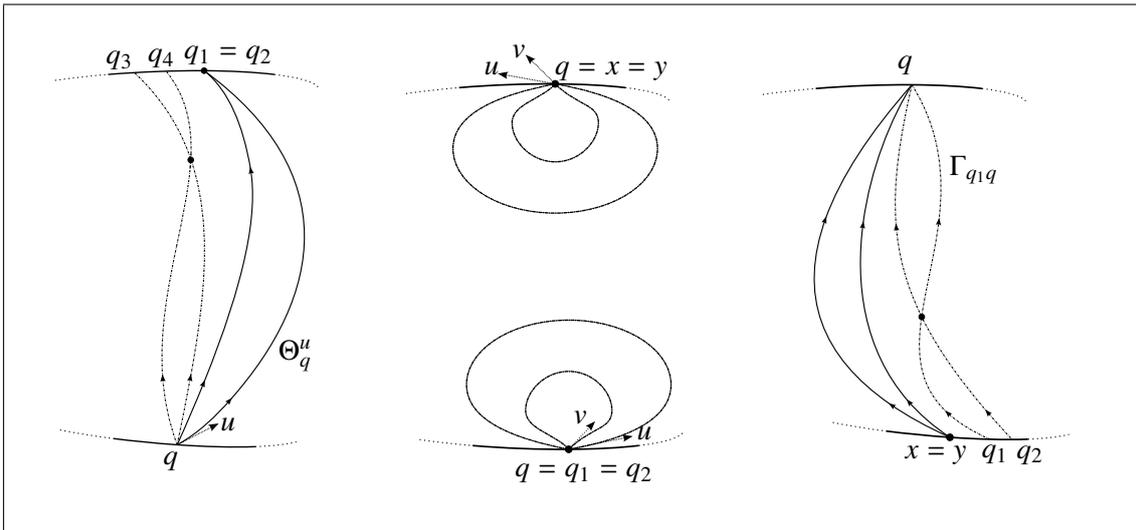


Abbildung 4.10: Illustration konjugierter Punkte

Bemerkung 4.2.2 In einem vollständigen Billard ist die Billardabbildung für jedes $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$ definiert und damit insbesondere auch für die Fälle $\beta = 0, \pi$, die einer gesonderten Betrachtung bedürfen. Es sei $v := (r_q^i)^{-1}(\beta)$. In Abhängigkeit der Geometrie des Tischrandes und der zugehörigen Geodäten ϑ_q^v ergeben sich zwei Szenarien. Liegt Θ_q^v in M , schneidet ϑ_q^v den Rand N in einem Punkt $x \in N$ und die Definition der Billardabbildung folgt der bisherigen Beschreibung. Andernfalls definieren wir die Billardabbildung durch $\mathcal{B}(q, \beta) := (q, \beta)$.

Wir übertragen die zuvor definierten Eigenschaften zur Veranschaulichung auf die bereits erläuterten Beispiele mit konstantem Magnetfeld (siehe S. 59).

Beispiel 4.2.3 a) Wir betrachten das Kreisbillard mit Radius R und konstantem Magnetfeld und Larmor-Radius $R_{Larmor} < R$. Zu $q \in N$ und $v \in B_F^i(q)$ findet man die Geodäte durch Einzeichnen des mathematisch negativ orientierten Kreises K in \mathbb{R}^2 mit Larmor-Radius durch q und Tangentialvektor v . Der Schnitt von K mit M entspricht der Geodäte.

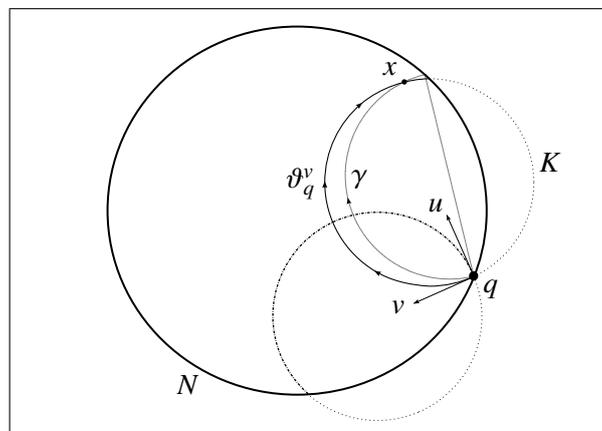


Abbildung 4.11: Vollständigkeit im Kreisbillard mit starkem Magnetfeld

Für die rückwärtige Geodäte wähle man $u := \mathcal{R}_q^{-1}(v)$. Trägt man den mathematisch positiv orientierten Kreis mit Larmor-Radius durch q und Tangentialvektor u ein, liefert der Schnitt von M mit K die rückwärtige Trajektorie (vgl. dazu Abbildung 4.11). Dieses Billard ist sowohl vorwärts als auch rückwärts vollständig, offensichtlich aber nicht geodätisch konvex. In $q \in N$ trage man den negativ orientierten Halbkreis mit Endpunkt auf N ein und bezeichne die zugehörige Geodäte mit γ . Trägt man nun eine zweite Trajektorie ein, deren Startwinkel einen größeren Winkel mit $s(q)$ bildet, schneiden sich die beiden Trajektorien in einem Punkt $x \in M$. Also hat das Billard konjugierte Punkte.

- b) Betrachte das Billard in der Ellipse im zuvor erläuterten Mischfall (siehe S. 60). Wie in a) beschrieben, ist das Billard vorwärts und rückwärts vollständig. In dem erläuterten Beispiel gibt es keine Geodäten zwischen P_1 und dem Bereich zwischen Q und P_2 . Also ist das Billard nicht geodätisch konvex.
- c) Für $R < R_{Larmor}$ ist das Kreisbillard ebenfalls vollständig. In diesem Fall ist es aber zusätzlich geodätisch konvex. Schnittpunkte von Geodäten, die in einem Punkt $q \in N$ beginnen, liegen außerhalb von M . Daher besitzt dieses Billard keine konjugierten Punkte.

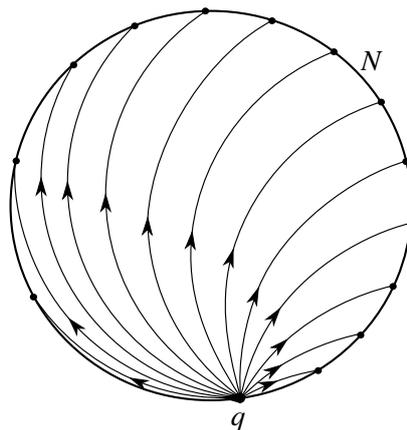


Abbildung 4.12: : Geodätisch konvexes, vollständiges Kreisbillard ohne konj. Punkte

Diesselbe Aussage ergibt sich für das elliptische Billard, wenn $R_{Larmor} > \kappa_{max}$, wobei κ den Krümmungsradius eines Punktes auf der Ellipse bezeichnet. (vgl. [6], [36])

In ebenen magnetischen Billards mit konstantem Magnetfeld ist die Vollständigkeit immer gewährleistet - die Geodäten entsprechen Kreisbögen, die am Rand des Tisches beginnen und ihn erneut schneiden. Für nicht-konstante Magnetfelder ist die Vollständigkeit a priori nicht gewährleistet. Man denke z.B. an ein Magnetfeld, das in der Nähe des Randes verschwindet. Dann beginnt eine Geodäte als Gerade. Ist das Magnetfeld hinreichend stark (in Relation zu Form und Größe des Tisches), kann aber nicht von vornherein ausgeschlossen werden, dass die Geodäte innerhalb des

Tisches gefangen wird. Die Vollständigkeit wäre dann nicht gegeben. Stellt man sich ein Kreisbillard mit positivem, radialsymmetrischem und im Zentrum hinreichend starkem Magnetfeld vor, erhält man ein Beispiel, bei dem Trajektorien des Billards im Zentrum gefangen werden, aber aus Stetigkeitsüberlegungen folgend, jeder Punkt auf dem Rand erreicht werden kann. Ein solches Billard ist geodätisch konvex, aber weder vorwärts noch rückwärts vollständig und besitzt konjugierte Punkte. (Ausführungen zu Bewegungen in radialsymmetrischen Magnetfeldern findet man in [25])

Neben der Wohldefiniiertheit der Billardabbildung und Billardbahnen liefert die Vollständigkeit aber weitere Eigenschaften der Billardabbildung:

Lemma 4.2.4 *Sei $[M, F]$ ein vollständiges Finsler-Billard.*

Dann ist die Billardabbildung $\mathcal{B} : N \times [0, \pi] \rightarrow N \times [0, \pi]$ eine Bijektion.

BEWEIS Wir verwenden die Notation aus Definition 4.1.4. Das Billard ist vorwärts vollständig. Zu $q \in M$ existiert $\mathcal{B}(q, v)$ daher für jedes $v \in B_F^i(q)$. Für jedes $v \in B_F^i(q)$ gilt $r_q^i(v) \in [0, \pi]$. Also ist die in Definition 4.1.4 äquivalent eingeführte Billardabbildung für jedes $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$ definiert.

Seien nun $\gamma_{q_1 q} \neq \gamma_{q_2 q}$ Trajektorien von $q_1, q_2 \in N$ nach $q \in N$. Dann gibt es $v_1 \in B_F^i(q_1)$ und $v_2 \in B_F^i(q_2)$, so dass

$$\Theta_{q_1}^{v_1} = \Gamma_{q_1 q} \quad \text{und} \quad \Theta_{q_2}^{v_2} = \Gamma_{q_2 q}$$

Insbesondere sind $\theta_{q_1}^{v_1}$ und $\theta_{q_2}^{v_2}$ zwei verschiedene Trajektorien des magnetischen Flusses, die die Faser $\{q\} \times B_F(q)$ schneiden. Also folgt

$$\mathcal{B}(q_1, v_1) =: (q, u_1) \neq (q, u_2) := \mathcal{B}(q_2, v_2)$$

und damit die Injektivität von \mathcal{B} . Sei nun $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$. Setze

$$v := \left(r_q^i\right)^{-1}(\beta)$$

Dann gilt $v \in B_F^i(q)$ und aus der rückwärtigen Vollständigkeit folgt die Existenz eines $x \in N$ und $u \in B_F^i(x)$ mit

$$\mathcal{B}(x, u) = (q, v)$$

Für $\delta := r_x^i(u)$ gilt dann $\mathcal{B}(x, \delta) = (q, \beta)$ und es folgt die Surjektivität der Billardabbildung. ■

Für nicht-reversible Finsler-Metriken gilt im allgemeinen

$$\Gamma_{q_1 q_2} \neq \Gamma_{q_2 q_1}$$

Für Finsler-Billards mit reversibler Finsler-Metrik herrscht hier Gleichheit. Insbesondere ist ein vorwärts vollständiges Finsler-Billard dann auch rückwärts vollständig.

Die Rückwärtsbahnen eines magnetischen Finsler-Billards lassen sich besser beschreiben, nachdem wir die Irreversibilität etwas genauer beleuchtet haben.

Bemerkung 4.2.5 Sei $\gamma_{q_1 q_2}$ eine Geodäte in einem magnetischen Billard. Wir erinnern uns an Bemerkung 3.1.3. Die rückwärts durchlaufene Geodäte ist i.a. keine Trajektorie des magnetischen Flusses zur Energie $1/2$. Sie ist aber eine Trajektorie zum umgekehrten Magnetfeld, d.h. des Flusses der Lagrangefunktion $\tilde{L}(q, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - \alpha_q(v)$ mit Energie $1/2$, bzw. des geodätischen Flusses der Finsler-Metrik $\tilde{F}(q, v) = |v| - \alpha_q(v)$.

Zur Vereinfachung der Beschreibung der Rückwärtsbahnen und als Werkzeug für die Untersuchung der Rückwärtsdynamik führen wir die umgekehrte Billardabbildung ein:

Definition 4.2.6 Sei N der Rand eines Billardtisches M , F eine Finsler-Metrik auf M und $q \in N$. Zur Finsler-Metrik F gibt es Diffeomorphismen (vgl. Definition 4.1.4)

$$r_q^i : B_F^i \rightarrow [0, \pi] \quad \text{und} \quad r_q^a : B_F^a \rightarrow [0, \pi]$$

Man wähle $\beta \in [0, \pi]$ und setze

$$w := (r_q^i)^{-1}(\beta)$$

und weiter

$$v := \frac{-(\mathcal{R}_q)^{-1}(w)}{F_q\left(-(\mathcal{R}_q)^{-1}(w)\right)}$$

mit der Reflexionsabbildung \mathcal{R} zur Finsler-Metrik F . Dann gilt $v \in B_F^i(q)$. Schneidet die Trajektorie ϑ_q^v des zu F gehörigen geodätischen Flusses durch q mit Richtung v erneut den Rand N in einem Punkt $x \in N$ mit einfallendem Tangentialvektor $u \in B_F^a(x)$, definiere die *umgekehrte Billardabbildung* durch

$$\mathcal{B}^u(q, \beta) := (x, \delta) := \left(x, r_x^i\left(\frac{-u}{F(-u)}\right) \right)$$

Sofern wohldefiniert ist \mathcal{B}^u eine Abbildung von $N \times [0, \pi]$ nach $N \times [0, \pi]$.

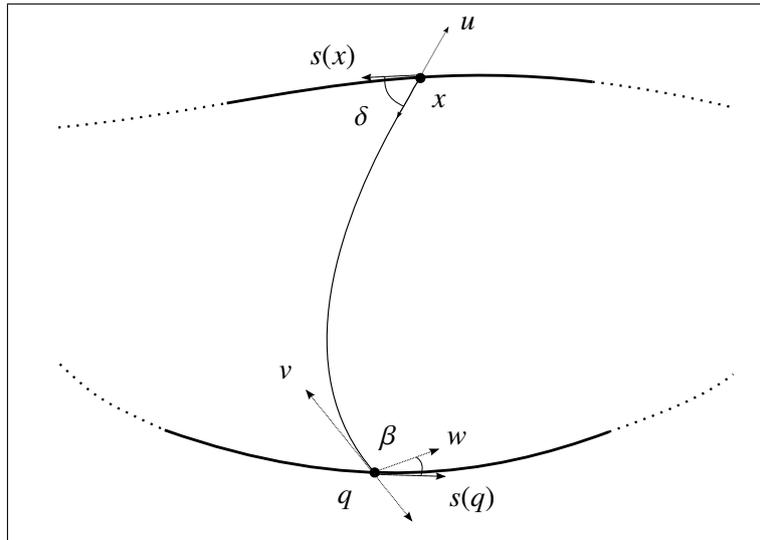


Abbildung 4.13: Die umgekehrte Billardabbildung

Man beachte, dass die Definition der umgekehrten Billardabbildung unabhängig von der Definition der Billardabbildung ist. Die Absicht ist aber, die beiden Abbildungen nach Wahl verschiedener definierender Flüsse miteinander in Bezug zu setzen. Dies ist nicht nur für magnetische Billards möglich. Für magnetische Billards gilt aber insbesondere folgende Aussage, die im allgemeinen nicht gegeben ist:

Lemma 4.2.7 *Sei $[M, B]$ ein magnetisches Billard zur magnetischen Finsler-Metrik F und \tilde{F} die Finsler-Metrik $\tilde{F}(q, v) = |v| - \alpha_q(v)$. Ferner sei \mathcal{B}^u die umgekehrte Billardabbildung zur Finsler-Metrik \tilde{F} . Ist $\mathcal{B}(q, \beta)$ für $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$ definiert, gilt*

$$\mathcal{B}^u(\mathcal{B}(q, \beta)) = (q, \beta)$$

Ist $\mathcal{B}^u(q, \beta)$ für $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$ definiert, gilt

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}^u(q, \beta)) = (q, \beta)$$

Ist das Billard vollständig, gilt insbesondere

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{B}^u = \mathcal{B}^u \circ \mathcal{B} = id$$

auf $N \times [0, \pi]$.

BEWEIS Alle zur Finsler-Metrik \tilde{F} gehörenden Abbildungen und Geodäten versehen wir zur Unterscheidung mit einer Tilde. Sei $\mathcal{B}(q, \beta) = (x, \delta)$. Wir untersuchen $\mathcal{B}^u(x, \delta)$. Nach Konstruktion der umgekehrten Billardabbildung definieren wir zunächst

$$w := \left(\tilde{r}_x^i\right)^{-1}(\delta)$$

und weiter

$$v := \frac{-\left(\tilde{\mathcal{R}}_x\right)^{-1}(w)}{\tilde{F}_x\left(-\left(\tilde{\mathcal{R}}_x\right)^{-1}(w)\right)}$$

Die Reflexionsabbildung der Finsler-Metrik \tilde{F} erhält Winkel. Daher gilt (s.a. Lemma 4.1.5)

$$\left(\tilde{\mathcal{R}}_x\right)^{-1}(w) = \left(\tilde{r}_x^a\right)^{-1}(\delta)$$

Sei $u := \left(r_q^i\right)^{-1}(\beta)$ und ϑ_q^u die Geodäte von q nach x bzgl. F . Ferner sei $z \in B_F^a(x)$ der einfallende Tangentialvektor von ϑ_q^u in x . Da die Reflexionsabbildung \mathcal{R}_x zu F ebenfalls Winkel erhält, gilt

$$v = \frac{-z}{\tilde{F}(-z)}$$

Nach Bemerkung 4.2.5 gilt daher

$$\tilde{\Theta}_x^v = \Theta_q^u$$

Also folgt $\mathcal{B}^u(x, \delta) = (q, \rho)$ für ein $\rho \in [0, \pi]$. Nach Definition von \mathcal{B}^u ist

$$\rho = \tilde{r}_q^i\left(\frac{u}{\tilde{F}(u)}\right)$$

und daher $\rho = \beta$. Somit gilt $\mathcal{B}^u(x, \delta) = (q, \beta)$ und es folgt die erste Aussage. Sei jetzt $\mathcal{B}^u(q, \beta) = (x, \delta)$. Wir setzen $w := (r_x^i)^{-1}(\delta)$. Dann gilt $\Theta_x^w = \tilde{\Theta}_q^v$ für

$$v = \frac{-\left(\tilde{\mathcal{R}}_q\right)^{-1} \circ \left(\tilde{r}_q^i\right)^{-1}(\beta)}{\tilde{F}_x\left(-\left(\tilde{\mathcal{R}}_q\right)^{-1} \circ \left(\tilde{r}_q^i\right)^{-1}(\beta)\right)}$$

und daher $\mathcal{B}(x, \delta) = (q, \rho)$. Es bezeichne u den einfallenden Tangentialvektor von ϑ_x^w . Es gilt

$$u = \frac{-v}{F(-v)}$$

und ferner

$$\tilde{r}_q^a\left(\frac{u}{\tilde{F}(u)}\right) = \beta$$

da $\tilde{\mathcal{R}}_q$ Winkel erhält. Da auch die Abbildung \mathcal{R}_q Winkel erhält, gilt ferner $r_q^i \circ \mathcal{R}_q(u) = \beta$ und schließlich $\mathcal{B}(x, \delta) = (q, \beta)$ ■

In einem vollständigen Billard ist die Billardabbildung nach Lemma 4.2.4 bijektiv. In einem magnetischen Finsler-Billard beschreibt die umgekehrte Billardabbildung nach obiger Aussage die Inverse der Billardabbildung.

Bemerkung 4.2.8 Die Indikatrix einer reversiblen Finsler-Metrik ist zentralsymmetrisch. Daher gilt die Aussage auch für reversible Finsler-Billards.

Darüberhinaus lässt sich dies auch auf weitere Billards übertragen:

Bemerkung 4.2.9 Die Aussage des vorherigen Lemmas erforderte, dass bei der Reflexion Winkel erhalten bleiben. In [44] wurde gezeigt, dass genau die Finsler-Metriken dieses Reflexionsgesetz erzeugen, die die Form

$$F(x, v) = f(x) \left(|v| + \alpha_q(v) \right)$$

mit einer nicht-verschwindenden Funktion f und einer 1-Form α besitzen. Die Indikatrix ist in diesem Fall eine Ellipse mit Ursprung in einem Brennpunkt. Der Fluss der Finsler-Metrik $\tilde{F}(x, v) = f(x) \left(|v| - \alpha_q(v) \right)$ ist „invers“ zu dem von F .

Im Folgenden erfülle die umgekehrte Billardabbildung eines reversiblen Finsler-Billards oder magnetischen Billards immer die Eigenschaft der Inversen der Billardabbildung. Für magnetische Billards ist sie also insbesondere immer bzgl. der magnetischen Lagrange-Funktion \tilde{L} bzw. der Finsler-Metrik \tilde{F} definiert.

Satz 4.2.10 Sei $[M, B]$ ein magnetisches Billard.

a) Das Billard sei vorwärts vollständig und für $(q, \beta) \in N \times (0, \pi)$ bezeichne (x, δ) das Bild von (q, β) unter der Billardabbildung, d.h. es sei $(x, \delta) = \mathcal{B}(q, \beta)$.

Für jedes $q \in N$ gelte $\delta \in (0, \pi)$ für alle $\beta \in (0, \pi)$. Dann ist \mathcal{B} stetig differenzierbar auf $N \times (0, \pi)$.

b) Das Billard sei rückwärts vollständig und für $(q, \beta) \in N \times (0, \pi)$ sei $(x, \delta) = \mathcal{B}^u(q, \beta)$. Für jedes $q \in N$ gelte $\delta \in (0, \pi)$ für alle $\beta \in (0, \pi)$. Dann ist \mathcal{B}^u stetig differenzierbar auf $N \times (0, \pi)$.

BEWEIS a) Für $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$ gelte

$$\mathcal{B}(q, \beta) = (x(q, \beta), \delta(q, \beta))$$

mit $x(q, \beta) \in N$ und $\delta(q, \beta) \in [0, \pi]$. Wir untersuchen die partiellen Ableitungen von \mathcal{B} . Dazu parametrisieren wir N durch den Bogenlängenparameter $s = s(q)$ nach der (Finsler)-Bogenlänge und setzen $|N| =: c > 0$. Einen Punkt $q \in N$ beschreiben wir durch sein zugehöriges Bogenmaß. Sei o.B.d.A. $q \in (0, c)$. Wähle $\beta \in (0, \pi)$ und setze

$$v := \left(r_q^i\right)^{-1}(\beta)$$

Das Billard ist vorwärts vollständig. Also existieren $x = x(q, \beta)$ und $\delta = \delta(q, \beta)$ mit

$$\mathcal{B}(q, \beta) = (x, \delta)$$

Wir variieren q . Wähle ein $t > 0$ mit $t < \min\{q, c - q\}$. Nach Voraussetzung schneidet $\vartheta_{q+k}^{v_k}$ den Rand für jedes $k \in [-t, t]$ transversal in einem Punkt $(x_k, \delta_k) := (x + m(k), \delta + \rho(k))$, wobei v_k durch $v_k := \left(r_{q_k}^i\right)^{-1}(\beta)$ gegeben ist.

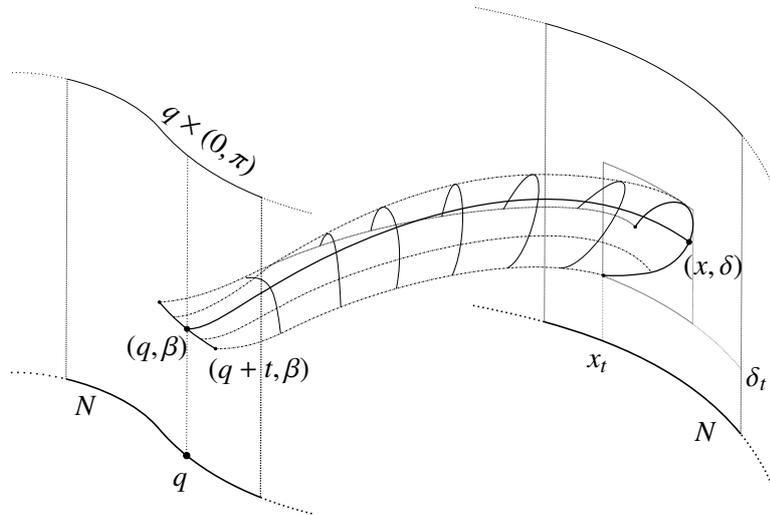


Abbildung 4.14: Abbildungsverhalten des Flusses im Phasenraum

Lösungen des zugrunde liegenden Flusses ϕ im Phasenraum hängen glatt von Anfangsbedingungen ab. Ferner ist N eine glatte Kurve und die Abbildung r_q^a und damit auch die Reflexionsabbildung \mathcal{R}_q hängen glatt von q ab. Also ist die Menge

$$\{(x_k, \delta_k) : k \in [-t, t]\} \subset \bigcup_{j \in [-t, t]} \left(\{x_j\} \times \left[\inf_k \{\delta + \rho(k)\}, \sup_k \{\delta + \rho(k)\} \right] \right)$$

eine zusammenhängende, glatte Kurve, und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial \delta}{\partial q}$ existieren und sind stetig.

Wir variieren β . Wähle ein $t > 0$ mit $t < \min\{\beta, \pi - \beta\}$ und setze für $k \in [-t, t]$

$$v_k := \left(r_q^i\right)^{-1}(\beta + k)$$

Nach Voraussetzung schneidet $\vartheta_q^{v_k}$ den Rand für jedes $k \in [-t, t]$ transversal in einem Punkt $(x_k, \delta_k) := (x + m(k), \delta + \rho(k))$. Also ist die Menge

$$\{(x_k, \delta_k) : k \in [-t, t]\} \subset \bigcup_{j \in [-t, t]} \left(\{x_j\} \times \left[\inf_k \{\delta + \rho(k)\}, \sup_k \{\delta + \rho(k)\} \right] \right)$$

eine zusammenhängende, glatte Kurve und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial \delta}{\partial \beta}$ existieren und sind stetig (zur Illustration vgl. Abbildung 4.16). Also ist \mathcal{B} stetig differenzierbar auf $N \times (0, \pi)$.

- b) Die Abbildungen $\tilde{r}_q^a, \tilde{r}_q^i, \tilde{\mathcal{R}}_q$ sowie $S : \left(\tilde{r}_q^a\right)^{-1}(0, \pi) \rightarrow \left(\tilde{r}_q^i\right)^{-1}(0, \pi)$ mit $S(v) = \frac{-v}{\tilde{F}(-v)}$ zur Finsler-Metrik \tilde{F} hängen glatt von q ab. Dann folgt die Aussage analog zu a). ■

Wie man den Überlegungen entnehmen kann, überträgt sich der Grad der Glattheit des Randes und des zugrunde liegenden Flusses auf die Billardabbildung und die umgekehrte Billardabbildung. Für den Beweis des Satzes ist es wesentlich, dass Geodäten den Rand nicht tangential berühren. Randberührungen, bei denen dies passiert, werden in [36] als „glancing collisions“ bezeichnet und anschließend in zwei verschiedene Klassen unterteilt. Zum einen können sie wie im Kreisbillard mit starkem Magnetfeld für die Winkel $0, \pi$ auftauchen. Hier haben diese aber keinen wesentlichen Einfluss auf die Dynamik des Billards, da sie hier einer stetigen Fortsetzung der Billardabbildung entsprechen. Im anderen Fall erzeugt eine solche „glancing collision“ ein chaotisches Billard; wie auf Seite 60 erläutert wird hier eine Unstetigkeitsstelle der Billardabbildung erzeugt - in [36] als „flyaway“ bezeichnet. In klassischen konvexen Billards erhält man eine ähnliche Problematik nur bei Kollisionen in Punkten ohne Randkrümmung (s.a. S. 61).

Bemerkung 4.2.11 Die Aussage des vorherigen Satzes gilt analog für reversible Finsler-Billards oder Finsler-Billards mit Finsler-Metrik wie in Bemerkung 4.2.9.

Im Kreisbillard mit starkem Magnetfeld ist die Billardabbildung nach Satz 4.2.10 ein Diffeomorphismus. Die Folge der Fußpunkte einer Bahn bestimmt die Bahn aber nicht eindeutig.

Die Geodäte ϑ_q^v mit einem Vektor v mit Winkel $\beta_1 < \pi/2$ verbinde $q \in N$ mit $x \in N$. Dann gibt es einen Vektor w mit Winkel $\beta_2 > \pi/2$, so dass ϑ_q^w ebenfalls q mit x verbindet (vgl. dazu auch Abbildung 4.15).

Im Phasenraum erkennt man, dass der zugrunde liegende Fluss des Billards die Faser $\{q\} \times (0, \pi)$ auf eine Kurve abbildet, deren Schnitt mit einer Faser, mit einer Ausnahme, aus zwei Punkten besteht (siehe Abbildung 4.16).

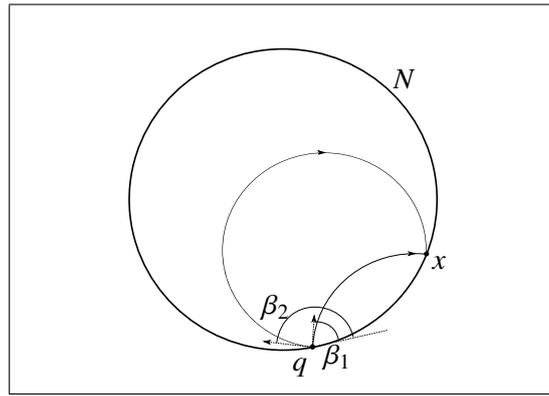


Abbildung 4.15: Konjugierte Punkte im Kreisbillard mit starkem Feld

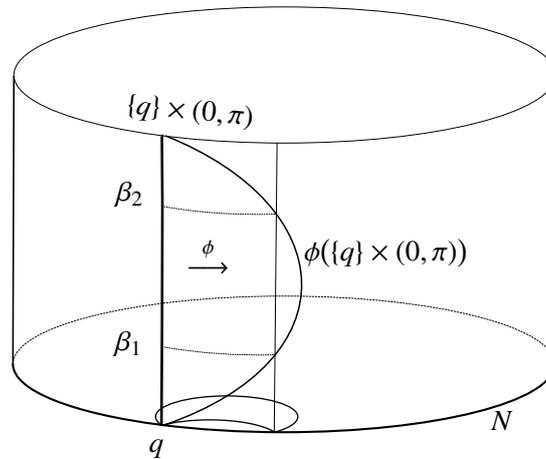


Abbildung 4.16: Konjugierte Punkte im Phasenraum

Wir möchten im Folgenden Billards untersuchen, bei denen die Geodäte zwischen zwei Punkten in N eindeutig bestimmt ist.

Lemma 4.2.12 *Gegeben sei ein geodätisch konvexes, reversibles oder magnetisches Finsler-Billard.*

- a) *Existieren vorwärts keine konjugierten Punkte, gibt es zu je zwei verschiedenen $q_1 \in N$ und $q_2 \in N$ genau eine Geodäte $\gamma_{q_1 q_2}$.*
- b) *Existieren vorwärts keine konjugierten Punkte, gibt es für jeden Punkt $q \in N$ ein Intervall $[\mu_q, \nu_q] \subseteq [0, \pi]$ mit der Eigenschaft: zu $x \in N \setminus \{q\}$ existiert ein $\beta \in [\mu_q, \nu_q]$ und $\delta \in [0, \pi]$, so dass*

$$\mathcal{B}(q, \beta) = (x, \delta)$$

- c) *Existieren rückwärts keine konjugierten Punkte, gibt es für jeden Punkt $q \in N$ ein Intervall $[\mu_q, \nu_q] \subseteq [0, \pi]$ mit der Eigenschaft: zu $x \in N \setminus \{q\}$ existiert ein $\beta \in [\mu_q, \nu_q]$ und $\delta \in [0, \pi]$, so dass*

$$\mathcal{B}^u(q, \beta) = (x, \delta)$$

d) Das Billard sei vorwärts vollständig und vorwärts ohne konjugierte Punkte. Dann gilt $[\mu_q, \nu_q] = [0, \pi]$ für jedes $q \in N$ und insbesondere

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{B}(q, \beta) = (q, 0) \quad \text{und} \quad \lim_{\beta \rightarrow \pi} \mathcal{B}(q, \beta) = (q, \pi)$$

e) Ist das Billard vorwärts vollständig und vorwärts ohne konjugierte Punkte, gibt es für jeden Punkt $q \in N$ eine durch die Billardabbildung induzierte bijektive Zuordnung $\tau_q : (0, \pi) \rightarrow N \setminus \{q\}$

f) Das Billard sei vorwärts vollständig und vorwärts ohne konjugierte Punkte. Dann ist die Vorwärtsbahn $(q_i, \beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für ein $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$ bereits durch die Folge der Fußpunkte $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt.

g) Das Billard sei rückwärts vollständig und rückwärts ohne konjugierte Punkte. Dann gilt $[\mu_q, \nu_q] = [0, \pi]$ für jedes $q \in N$ und insbesondere

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{B}^u(q, \beta) = (q, 0) \quad \text{und} \quad \lim_{\beta \rightarrow \pi} \mathcal{B}^u(q, \beta) = (q, \pi)$$

h) Ist das Billard rückwärts vollständig und rückwärts ohne konjugierte Punkte, gibt es für jeden Punkt $q \in N$ eine durch die umgekehrte Billardabbildung induzierte bijektive Zuordnung $\sigma_q : (0, \pi) \rightarrow N \setminus \{q\}$

i) Das Billard sei rückwärts vollständig und rückwärts ohne konjugierte Punkte. Dann ist die Rückwärtsbahn $(q_i, \beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für ein $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$ bereits durch die Folge der Fußpunkte $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt.

BEWEIS a) Wegen der geodätischen Konvexität existiert zu paarweise verschiedenen $q_1, q_2 \in N$ eine Geodäte $\gamma_{q_1 q_2}$ von q_1 nach q_2 . Zu $\gamma_{q_1 q_2}$ gibt es dann einen Vektor $v \in B_F^i(q_1)$, so dass $\Theta_{q_1}^v = \Gamma_{q_1 q_2}$. Angenommen es gäbe eine weitere Geodäte von q_1 nach q_2 . Dann gibt es ein $w \in B_F^i(q_1)$ mit $v \neq w$ und $q_2 \in \Theta_{q_1}^w$. Also folgt

$$q_2 \in \left(\Theta_{q_1}^v \cap \Theta_{q_1}^w \cap M \right) \setminus \{q_1\}$$

und damit der Widerspruch, da das Billard keine konjugierten Vorwärtspunkte besitzt.

b) Wir parametrisieren N durch den Bogenlängenparameter $s = s(q)$ nach der (Finsler)-Bogenlänge und setzen $|N| =: c > 0$. Einen Punkt $q \in N$ beschreiben wir durch sein zugehöriges Bogenmaß. Wähle $q \in N$ und ein $x \in N$ mit $x \neq q$. Sei oBdA. $q = 0$. Andernfalls betrachte den Lift von N auf \mathbb{R} und dann $[q, q+c)$. Nach a) existiert genau eine Geodäte γ_{qx} und daher genau ein $t \in [0, \pi]$ mit $\vartheta_q^v = \gamma_{qx}$ für $v := (r_q^i)^{-1}(t)$. Es gilt $t \in (0, \pi)$. Angenommen es sei $t = 0$. Wähle $y \in N$ mit $0 < y < x$. Dann gibt es nach a) genau ein $s \in [0, \pi]$ mit $s \neq t = 0$ und $\vartheta_q^w = \gamma_{qy}$ für $w := (r_q^i)^{-1}(s)$. Insbesondere gilt $s > 0$. Aus $y < x$ folgt, dass Θ_q^w und Θ_q^v einen gemeinsamen Punkt $S \in \Theta_q^v \setminus \{q\}$ besitzen. Das

Billard hat aber keine konjugierten Vorwärtspunkte und es folgt der Widerspruch. Analog zeigt man $t < \pi$.

Weil es vorwärts keine konjugierten Punkte gibt, existiert analog für jeden Punkt $y \in (0, x)$ genau ein $s \in (0, t)$ mit zugehöriger Geodäte von q nach y . Wähle eine streng monoton fallende Nullfolge (y_k) mit $y_k \in (0, x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine zugehörige Folge (s_k) mit $s_k \in (0, t)$ für alle k . Wie zuvor folgt aus der Nichtexistenz konjugierter Punkte, dass $s_{k+1} < s_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist (s_k) monoton und beschränkt. Setze $\mu_q := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$. Insbesondere gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{B}(q, s_k) = (q, \delta)$ mit einem $\delta \in [0, \pi]$. Analog zeigt man die Existenz von ν_q .

- c) Wir erinnern uns an die Definition der umgekehrten Billardabbildung. Zu $t \in [0, \pi]$ definiert man den Vektor $u := \mathcal{R}_q^{-1} \circ (r_F^i)^{-1}(t)$ und damit $v := \frac{-u}{F_q(-u)}$. Für $t \rightarrow 0$ gilt insbesondere $r_q^i(v) \rightarrow \pi$ und andersrum. Ausgehend von Punkten $q = 0$ und x wie in b) liefert dieselbe Argumentation wie in b) für Punkte $0 < y_k < x$ die Existenz von ν_q und für Punkte $x < y_k < c = q + c$ die Existenz von μ_q .
- d) Wähle oBdA. $q = 0$. Angenommen es gilt $\mu_q > 0$. Wähle $s := \frac{\mu_q}{2}$. Das Billard ist vorwärts vollständig. Also existiert ein $x \in N$, so dass $\vartheta_q^v = \gamma_{qx}$ für $v := (r_q^i)^{-1}(s)$. Nach a) ist ϑ_q^v die eindeutige Verbindung von q nach x . Für $t := \frac{s}{2}$ existiert ein $y \in N$, so dass $\vartheta_q^w = \gamma_{qy}$ für $w := (r_q^i)^{-1}(t)$ und aus $s \neq t$ folgt, dass $y \neq x$. Aus der Nichtexistenz konjugierter Vorwärtspunkte folgt ferner $y < x$. Also gilt insbesondere $x > 0$. Nach b) gibt es ein $r \in [\mu_q, \nu_q]$, so dass $\vartheta_q^u = \gamma_{qx}$ für $u := (r_q^i)^{-1}(r)$. Die Verbindung von q nach x ist eindeutig. Also gilt $r = s$, aber es war $s < \mu_q$. Also ist $\mu_q = 0$. Das Billard ist vorwärts vollständig. Daher existiert $\mathcal{B}(q, \mu_q)$ und aus der Konstruktion von μ_q in b) folgt $\mathcal{B}(q, \mu_q) = \mathcal{B}(q, 0) = (q, 0)$.
Analog zeigt man, dass $\nu_q = \pi$.

- e) Das Billard sei vorwärts vollständig. Die Billardabbildung bildet $(q, \beta) \in N \times [0, \pi]$ auf ein $(x, \delta) \in N \times [0, \pi]$ ab, d.h. die Abbildung ist gegeben durch

$$\mathcal{B}(q, \beta) = (x(q, \beta), \delta(q, \beta))$$

Für $q \in N$ definiere $\tau_q : (0, \pi) \rightarrow N$ durch

$$\tau_q := x(q, \cdot)$$

Nach d) ist die Abbildung $x : \{q\} \times [0, \pi] \rightarrow N$ surjektiv.

Ferner gilt $\tau_q((0, \pi)) = N \setminus \{q\}$, da das Billard vorwärts keine konjugierten Punkte besitzt (vgl. Definition 4.2.1). Angenommen es gilt $x(q, \beta) = q$ für ein $\beta \in (0, \pi)$. Dann folgt aus der Definition, dass $x(q, \rho) \neq q$ für alle $\rho \in (0, \pi)$ mit $\rho \neq \beta$. Es gibt aber ein $\rho \in (0, \pi)$ mit $\rho \neq \beta$, so dass die Geodäten zu β und ρ einen konjugierten Vorwärtspunkt besitzen, da die Geodäte zu β die Faser zu q mit der Faser zu q verbindet. Man erhält einen Widerspruch und die Injektivität von τ_q folgt schließlich aus a).

- f) Wähle ein $(q, \beta) \in N \times (0, \pi)$. Nach e) gilt $\mathcal{B}(q, \beta) = (q_2, \beta_2)$ für ein $q_2 \in N \setminus \{q\}$ und es existiert kein $\delta \in [0, \pi] \setminus \{\beta\}$, so dass die zugehörige Geodäte q mit q_2 verbindet. Ist $\beta_2 = 0, \pi$ gilt nach d) $\mathcal{B}(q_k, \beta_k) = (q_2, \beta_2)$ für alle $k \geq 2$. Andernfalls liefert β_2 die einzige Geodäte von q_2 zu einem $q_3 \in N \setminus \{q_2\}$. Erhalte $(q_3, \beta_3) := \mathcal{B}(q_2, \beta_2)$ mit einem $\beta_3 \in [0, \pi]$. Setze entsprechend fort.
- g) Analog zu c) folgt die Aussage mit derselben Argumentation wie in d).
- h) Analog zu c) folgt die Aussage mit derselben Argumentation wie in e).
- i) Die Rückwärtsbahn lässt sich durch die umgekehrte Billardabbildung beschreiben. Daher folgt die Aussage mit derselben Argumentation wie in f). ■

Durch die Aussagen des Lemmas erhalten wir auch notwendige Kriterien für die aufgezählten Eigenschaften eines Billards. So folgt z.B. unmittelbar aus Aussage d), dass ein ebenes Billard mit konstantem Magnetfeld und einem Randpunkt q mit Krümmungsradius $r_q > r_{Larmor}$ nicht die aufgezählten Eigenschaften erfüllen kann. Im Gegensatz zum klassischen Billard ist die Billardabbildung aber selbst bei Tischen mit stückweise flachem Rand einseitig stetig fortsetzbar - für ein positives Feld gilt $\mathcal{B}(q, \beta) \rightarrow (q, 0)$ für $\beta \rightarrow 0$.

Vollständige, geodätisch konvexe Billards ohne konjugierte Punkte haben, wie wir im Weiteren noch untersuchen werden, eine gutartige Dynamik. Strikt konvexe, ebene Billards mit einem „hinreichend schwachen“ konstanten Magnetfeld stellen ein Beispiel dafür dar.

Mit dem obigen Lemma lässt sich insbesondere zeigen, dass die aufgezählten Eigenschaften „glancing collisions“ verhindern. Die Billardabbildung solcher Billards ist daher ein Diffeomorphismus.

Satz 4.2.13 *Sei $[M, F]$ ein geodätisch konvexes, reversibles oder magnetisches Finsler-Billard. Ist das Billard vollständig und ohne konjugierte Punkte*

- a) *ist die Billardabbildung ein Diffeomorphismus.*
- b) *sind die Abbildungen τ_q und σ_q aus Lemma 4.2.12 für jedes $q \in N$ Diffeomorphismen.*
- c) *ist eine Bahn $(q_i, \beta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ bereits durch die Folge der Fußpunkte $(q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eindeutig bestimmt.*

BEWEIS a) Wähle $q \in N$, $\beta \in (0, \pi)$ und setze $\mathcal{B}(q, \beta) =: (x, \delta)$. Nach Konstruktion von τ_q in Lemma 4.2.12 e) gilt $q \neq x$. Nun gilt nach Lemma 4.2.7 bzw. Bemerkung 4.2.8 aber $\mathcal{B}^u(x, \delta) = (q, \beta)$ und daher mit Lemma 4.2.12 h) und der Konstruktion von σ_x sofort $\delta \in (0, \pi)$. Also sind die Voraussetzungen für Satz 4.2.10 a) erfüllt. Genauso ist durch Lemma 4.2.12 e) und die Konstruktion von τ_q die Voraussetzung für Satz 4.2.10 b) erfüllt. Also sind \mathcal{B} und \mathcal{B}^u stetig differenzierbar. Dann folgt die Aussage schließlich mit Lemma 4.2.7 oder Bemerkung 4.2.8.

b) Die Abbildung τ_q ist gegeben durch $\tau_q = x(q, \cdot)$, wobei $\mathcal{B}(q, \beta) = (x(q, \beta), \delta(q, \beta))$ die Billardabbildung beschreibt. Die Abbildung σ_q ist analog durch die umgekehrte Billardabbildung definiert. Dann folgt die Aussage aus a) und Lemma 4.2.12 e) und h).

c) Folgt direkt aus Lemma 4.2.12 f) und i). ■

Darüber hinaus besitzen entsprechende Billards, nach Wahl geeigneter Koordinaten, eine Erzeugendenfunktion. Diese wird später ein bedeutendes Werkzeug zur Untersuchung der Dynamik dieser Billards sein. Allgemeine Informationen zu Erzeugendenfunktionen im Kontext symplektischer Abbildungen findet man z.B. in [23] oder auch [21]. Wir beschränken uns an dieser Stelle wie in [40] auf eine für unsere Situation angepasste Definition.

Definition 4.2.14 Sei N der Rand eines Billardtisches und $\phi : N \times (a, b) \rightarrow N \times (a, b)$ mit $\phi(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Eine C^2 -Funktion h , die die Gleichung

$$dh(x_0, x_1) = y_1 dx_1 - y_0 dx_0$$

erfüllt, heißt *Erzeugendenfunktion* von ϕ .

Eine Erzeugendenfunktion ist offenbar bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Ist $dy \wedge dx$ eine symplektische Form auf $N \times (a, b)$ wird der Diffeomorphismus ϕ durch die Existenz einer Erzeugendenfunktion zu einer flächentreuen Abbildung, denn es gilt $\phi^*(y dx) - y dx = dh$ und daher $\phi^*(dy \wedge dx) = \phi^*d(y dx) = dy \wedge dx + d^2 h$. Also ist ϕ symplektisch und daher flächentreu.

Für die Suche nach einer Erzeugendenfunktion ist es, wie angedeutet, entscheidend geeignete Koordinaten zu finden. Als erstes sollen magnetische Billards untersucht werden. Dazu beginnen wir mit einer Definition.

Definition 4.2.15 Es sei $[M, \Omega_B]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte. Die 2-Form Ω_B mit Vektorpotential α war durch $\Omega_B = B(q) dq_1 \wedge dq_2$ gegeben, wobei die Funktion B die Magnetfeldstärke im Punkt $q \in M$ beschreibt.

Nach Lemma 4.2.12 gibt es zu je zwei paarweise verschiedenen $q_0, q_1 \in N$ genau eine Trajektorie $\gamma_{q_0 q_1}$ des magnetischen Flusses von q_0 nach q_1 . Für eine Trajektorie $\gamma : (0, c) \rightarrow E^{-1}(1/2)$ von $q_0 \in N$ nach $q_1 \in N$ bezeichne $\zeta_{q_0}^{q_1}$ den zugehörigen geschlossenen Weg von q_0 entlang N nach q_1 und entlang γ zurück nach q_0 und ferner $Z_{q_0}^{q_1}$ die von $\zeta_{q_0}^{q_1}$ eingeschlossene Fläche.

Wir definieren die *magnetische Länge auf M* durch

$$G(q_0, q_1) := \int_0^c |\dot{\gamma}(t)| dt - \int_{Z_{q_0}^{q_1}} \Omega_B$$

für $q_0 \neq q_1$ und $G(q, q) := 0$ für $q \in N$. Wegen der Eindeutigkeit der Trajektorien ist die magnetische Länge wohldefiniert.

Unter Verwendung des Satzes von Stokes lässt sich die magnetische Länge auf M mit dem Vektorpotential α auch in der Form

$$G(q_0, q_1) = \int_0^c |\dot{\gamma}(t)| dt - \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha$$

angeben.

Inspiriert durch die Ausführungen in [2], S.253 f. können wir für magnetische Billards folgende Aussage zeigen.

Satz 4.2.16 *Sei $[M, \Omega_B]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte. Es beschreibe $\mathcal{B}(x_0, \beta_0) = (x_1(x_0, \beta_0), \beta_1(x_0, \beta_0))$ die Billardabbildung, und es sei N nach der Bogenlänge parametrisiert, $y := \cos(\beta)$ für $\beta \in [0, \pi]$, sowie die Billardabbildung in den Koordinaten (x, y) beschrieben durch*

$$\hat{\mathcal{B}}(x_0, y_0) := \left(x_1(x_0, \cos^{-1}(y_0)), \cos(\beta_1(x_0, \cos^{-1}(y_0))) \right)$$

Dann besitzt die Billardabbildung $\hat{\mathcal{B}} : N \times (-1, 1) \rightarrow N \times (-1, 1)$ die magnetische Länge auf M als Erzeugendenfunktion.

BEWEIS N ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Einen Punkt $q \in N$ beschreiben wir durch sein zugehöriges Bogenmaß. Seien $q_0, q_1 \in N$ mit $q_0 \neq q_1$ gegeben. Wir wählen $h > 0$ hinreichend klein und zu $x \in [0, h]$ setzen wir $q_{1+x} := q_1 + x$. Zu jedem $q_{1+x} \in [q_1, q_1 + h]$ existiert genau eine Trajektorie $\gamma_x := \gamma_{q_0 q_{1+x}}$ des magnetischen Flusses zur Energie $E = \frac{1}{2}$ von q_0 nach q_{1+x} .

Analog zur Definition von $B_F^i(q_1)$ sei $K^i(q_1)$ die Menge aller Tangentialvektoren in q_1 , die nach nach innen gerichtet sind und Einheitslänge besitzen (vgl. Definition 4.1.4). Für $v \in K^i(q)$ gilt dann $\frac{v}{F(v)} \in B_F^i(q)$. Genauso lässt sich auch $K^a(q)$ einführen, um Einfallsvektoren von Trajektorien mit fester Energie zu beschreiben.

Nach Lemma 4.2.12 und Satz 4.2.13 existiert $[\beta_0, \beta_h] \subset (0, \pi)$, so dass $\gamma_x = \vartheta_{q_0}^{v_x}$ für $x \in [0, h]$ und

$$v_x = \frac{\left(r_{q_0}^i \right)^{-1}(\beta_x)}{\left| \left(r_{q_0}^i \right)^{-1}(\beta_x) \right|} \in K^i(q_0)$$

mit $\beta_x \in [\beta_0, \beta_h]$, und die zugehörigen Orbits Γ_x schneiden sich nur in q_0 .

Es bezeichne f die Kurve, die das Randstück $[q_1, q_1 + h]$ von N beschreibt und nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Wir erinnern uns an Satz 3.3.1 und Satz 3.3.6. Trajektorien des Billards sind Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses zur Energie $E = \frac{1}{2}$ auf dem Tangentialbündel. Via Legendre-Transformation werden diese auf Trajektorien des Hamiltonschen Flusses auf $S = H^{-1}(1/2)$ abgebildet und entsprechen Extremalen der Wirkung $A(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda$. Wir heben die Kurven im Tangentialbündel über die Legendre-Transformation auf die Energiefläche im Kotangentialbündel und versehen die Kurven dort zur Unterscheidung mit einer Tilde. Wir

erhalten eine Fläche σ , die berandet wird von den Trajektorien $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_h$, der Kurve c der Schnittpunkte der Trajektorien $\tilde{\gamma}_x$ mit dem Rand, die auf f projiziert wird, sowie einer Kurve g in der Faser über q_0 , bestehend aus den Impulsen $p_x = \frac{\partial L(q_0, v_x)}{\partial v}$.

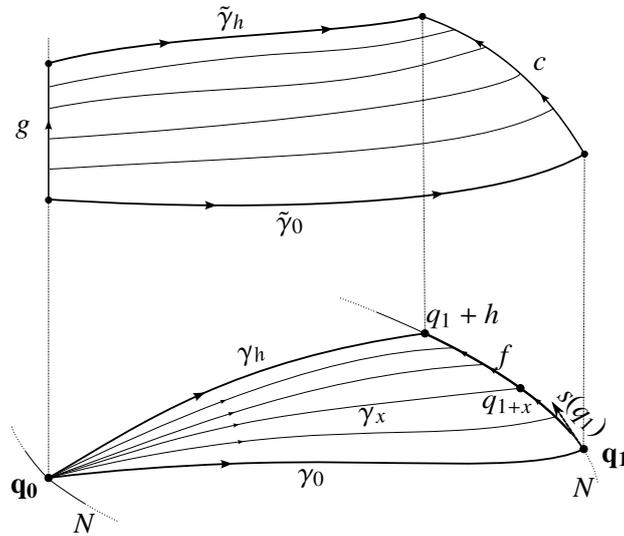


Abbildung 4.17: Trajektorien im Konfigurationsraum und auf der Energiefläche

Die Fläche σ ist durch Trajektorien des Hamiltonschen Flusses geblättert. Diese sind aber gerade die Charakteristiken des Hamiltonschen Flusses (vgl. S. 13 und S. 44). Unter Verwendung des Satzes von Stokes gilt daher

$$0 = \int_{\sigma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}_0} \lambda + \int_c \lambda - \int_{\tilde{\gamma}_h} \lambda - \int_g \lambda$$

In der Faser über q_0 gilt $dq = 0$ und daher $\int_g \lambda = 0$. Die Kurven $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_h$ sind Trajektorien des Hamiltonschen Flusses. Also gilt hier (siehe S. 47)

$$\int_{\tilde{\gamma}_0} \lambda = \int_a^b |\dot{\gamma}_0(t)| + \alpha_{\gamma_0(t)}(\dot{\gamma}_0(t)) dt$$

und eine entsprechende Gleichung für $\tilde{\gamma}_h$. Daher folgt

$$\begin{aligned} G(q_0, q_1 + h) - G(q_0, q_1) &= \int_{\tilde{\gamma}_h} \lambda - \int_{\gamma_h} \alpha - \int_{\zeta_{q_0}^{q_1+h}} \alpha - \left(\int_{\tilde{\gamma}_0} \lambda - \int_{\gamma_0} \alpha - \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha \right) \\ &= \int_c \lambda + \int_{\gamma_0} \alpha + \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha - \int_{\gamma_h} \alpha - \int_{\zeta_{q_0}^{q_1+h}} \alpha \end{aligned}$$

Nun gilt aber (vgl. auch Abbildung 4.18)

$$\int_{\gamma_0} \alpha + \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha - \int_{\gamma_h} \alpha - \int_{\zeta_{q_0}^{q_1+h}} \alpha = - \int_f \alpha$$

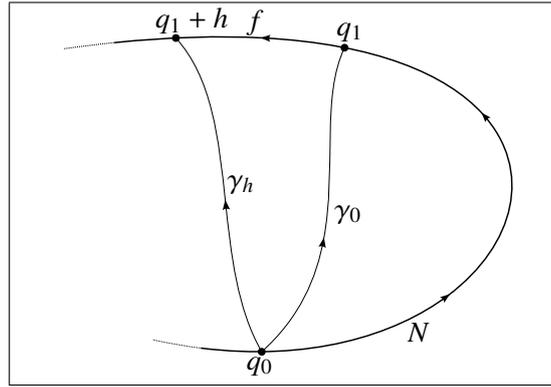


Abbildung 4.18: Integrationswege

Daher folgt

$$G(q_0, q_1 + h) - G(q_0, q_1) = \int_c \lambda - \int_f \alpha$$

Die Kurve c ist keine Trajektorie des Hamiltonschen Flusses. Wähle einen Punkt der Kurve c . Dann ist dieser Punkt der Schnittpunkt einer Trajektorie $\tilde{\gamma}_{1+x}$ mit c und der Impuls in diesem Punkt ist gerade der Impuls $p_{q_{1+x}}$ der Trajektorie in diesem Punkt. Daher gilt

$$\int_c \lambda = \int_0^h p_{q_{1+t}}(s(q_{1+t})) dt$$

wobei $s(q)$ der Tangentialvektor an N im Punkt q war.

Definieren wir $z : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $z(t) := p_{q_{1+t}}(s(q_{1+t}))$, erhalten wir

$$\frac{1}{h} \int_c \lambda = \frac{1}{h} \int_0^h z'(\xi)t + z(0) dt = \frac{1}{h} \int_0^h z(0) dt + o(|h|) \rightarrow z(0) \quad (h \rightarrow 0)$$

Ferner gilt

$$\frac{1}{h} \int_f \alpha \rightarrow \alpha_{q_1}(s(q_1)) \quad (h \rightarrow 0)$$

und wir erhalten

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_1} = z(0) - \alpha_{q_1}(s(q_1)) = p_{q_1}(s(q_1)) - \alpha_{q_1}(s(q_1))$$

Der Impuls p_{q_1} gehört via Legendre-Transformation zum Einfallsvektor $w_0 \in K^a(q_1)$ der Trajektorie γ_0 im Punkt q_1 . Wie in Satz 3.3.5 betrachten wir die Legendre-Transformation in lokalen Koordinaten und erhalten

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = v + K$$

mit $K = K(q) = (a_1(q) \ a_2(q))^T$ und damit hier

$$p_{q_1}(s(q_1)) = \langle w_0, s(q_1) \rangle + \langle K(q_1), s(q_1) \rangle = \langle w_0, s(q_1) \rangle + \alpha_{q_1}(s(q_1))$$

Insgesamt folgt daher

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_1} = \langle w_0, s(q_1) \rangle + \alpha_{q_1}(s(q_1)) - \alpha_{q_1}(s(q_1)) = \langle w_0, s(q_1) \rangle = \cos\left(r_{q_1}^a\left(\frac{w_0}{F_{q_1}(w_0)}\right)\right)$$

Wir betrachten jetzt die zweite partielle Ableitung und wiederholen dieselben Überlegungen für $[q_0, q_0 + h]$. Sei wieder f die Kurve entlang N , die $[q_0, q_0 + h]$ beschreibt und nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Man erhält Trajektorien γ_x von $q_x \in [q_0, q_0 + h]$ nach q_1 , und nach Lemma 4.2.12 und Satz 4.2.13 gibt es $[\delta_h, \delta_0] \subset (0, \pi)$, so dass γ_x den Rand N in q_1 für $x \in [0, h]$ und $\delta_x \in [\delta_h, \delta_0]$ mit Tangentialvektor

$$w_x := \frac{\left(r_{q_1}^a\right)^{-1}(\delta_x)}{\left|\left(r_{q_1}^a\right)^{-1}(\delta_x)\right|}$$

schneidet, und die zugehörigen Orbits Γ_x schneiden sich nur in q_1 . Wir wechseln wieder in das Kotangentialbündel und erhalten dort eine Fläche σ , die berandet ist von den Kurven $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_h$, der Kurve c der Schnittpunkte der Trajektorien $\tilde{\gamma}_x$ mit dem Rand, die auf f projiziert wird und der Kurve g in der Faser über q_1 . Wie zuvor erhält man

$$0 = \int_{\sigma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}_0} \lambda - \int_g \lambda - \int_{\tilde{\gamma}_h} \lambda - \int_c \lambda$$

sowie

$$\begin{aligned} G(q_0 + h, q_1) - G(q_0, q_1) &= \int_{\tilde{\gamma}_h} \lambda - \int_{\gamma_h} \alpha - \int_{\zeta_{q_0+h}^{q_1}} \alpha - \left(\int_{\tilde{\gamma}_0} \lambda - \int_{\gamma_0} \alpha - \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha \right) \\ &= - \int_c \lambda + \int_{\gamma_0} \alpha + \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha - \int_{\gamma_h} \alpha - \int_{\zeta_{q_0+h}^{q_1}} \alpha \end{aligned}$$

Nun gilt wiederum

$$\int_{\gamma_0} \alpha + \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha - \int_{\gamma_h} \alpha - \int_{\zeta_{q_0+h}^{q_1}} \alpha = \int_f \alpha$$

und daher

$$G(q_0 + h, q_1) - G(q_0, q_1) = - \int_c \lambda + \int_f \alpha$$

Wie zuvor ist c keine Trajektorie des Hamiltonschen Flusses. Der Impuls p zum Fußpunkt q_x entspricht dem Impuls von $\tilde{\gamma}_x$ in q_x und man erhält

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_c \lambda = p_{q_0}(s(q_0))$$

und insgesamt

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_0} = -p_{q_0}(s(q_0)) + \alpha_{q_0}(s(q_0))$$

Sei $v_0 \in K^i(q_0)$ der Tangentialvektor von γ_0 in q_0 . Betrachtet man die Legendre-Transformation in lokalen Koordinaten, erhält man schließlich

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_0} = -\langle v_0, s(q_0) \rangle = -\cos\left(r_{q_0}^i\left(\frac{v_0}{F_{q_0}(v_0)}\right)\right)$$

und damit die Aussage. ■

Bemerkung 4.2.17 Es bezeichne $N_{q_0}^{q_1}$ das Randstück von N von q_0 nach q_1 . Erfüllt das Vektorpotential die Bedingung $\|\alpha\| < 1$, erhält die magnetische Länge auf M die Darstellung

$$\begin{aligned} G(q_0, q_1) &= \int_0^c |\dot{\gamma}(t)| dt - \int_{Z_{q_0}^{q_1}} \Omega_B \\ &= \int_0^c |\dot{\gamma}(t)| dt - \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha \\ &= \int_0^c |\dot{\gamma}(t)| + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt - \int_{N_{q_0}^{q_1}} \alpha \\ &= \Lambda_F(\gamma) - \int_{N_{q_0}^{q_1}} \alpha \end{aligned}$$

da die Finsler-Länge unabhängig von der Parametrisierung ist (vgl. Seite 39).

Verwendet man statt der Koordinate $y = \cos(\beta)$ die selbige mit negativem Vorzeichen und passt die Billardabbildung entsprechend an, erhält man die negative magnetische Länge auf M als Erzeugendenfunktion der Billardabbildung. Das ist bemerkenswert, da dies dieselben Koordinaten wie im klassischen Billard sind. Dort erhält man die negative Länge als Erzeugendenfunktion (siehe z.B. [23], [40], [31] neben vielen anderen).

Korollar 4.2.18 Sei $[M, \Omega_B]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte. Für eine Trajektorie $\gamma : (0, c) \rightarrow E^{-1}(1/2)$ von $q_0 \in N$ nach $q_1 \in N$ sei

$$\tilde{G}(q_0, q_1) := -\int_0^c |\dot{\gamma}(t)| dt + \int_{Z_{q_0}^{q_1}} \Omega_B = -\int_0^c |\dot{\gamma}(t)| dt + \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha$$

wobei $\zeta_{q_0}^{q_1}$ die geschlossene Kurve von q_0 entlang N nach q_1 und von q_1 entlang γ nach q_0 darstellt, sowie $Z_{q_0}^{q_1}$ die von $\zeta_{q_0}^{q_1}$ berandete Fläche.

Es sei N nach der Bogenlänge parametrisiert, $y := -\cos(\beta)$ für $\beta \in [0, \pi]$ und

$$\hat{\mathcal{B}}(x_0, y_0) := \left(x_1(x_0, -\cos^{-1}(y_0)), -\cos(\beta_1(x_0, -\cos^{-1}(y_0))) \right)$$

die Billardabbildung in den Koordinaten (x, y) . Dann besitzt die Billardabbildung $\hat{\mathcal{B}} : N \times (-1, 1) \rightarrow N \times (-1, 1)$ die Abbildung \tilde{G} als Erzeugendenfunktion.

BEWEIS Analog zum Beweis von Satz 4.2.16 zeigt man

$$\frac{\partial \tilde{G}(q_0, q_1)}{\partial q_1} = -\cos\left(r_{q_1}^a\left(\frac{w_0}{F_{q_1}(w_0)}\right)\right)$$

und

$$\frac{\partial \tilde{G}(q_0, q_1)}{\partial q_0} = -\langle v_0, s(q_0) \rangle = -\left(-\cos\left(r_{q_0}^i\left(\frac{v_0}{F_{q_0}(v_0)}\right)\right)\right)$$

Dann gilt

$$d\tilde{G}(q_0, q_1) = -\cos\left(r_{q_1}^a\left(\frac{w_0}{F_{q_1}(w_0)}\right)\right) dq_1 - \left(-\cos\left(r_{q_0}^i\left(\frac{v_0}{F_{q_0}(v_0)}\right)\right)\right) dq_0 = y_1 dq_1 - y_0 dq_0$$

und es folgt die Aussage. ■

Die Wahl der negativen statt der positiven Erzeugendenfunktion scheint an dieser Stelle zunächst willkürlich und nicht zweckdienlich. Später wird das Vorzeichen aber für eine weitere Eigenschaft der Billardabbildung notwendig sein.

Ist N nach der Bogenlänge parametrisiert, erhält die Billardabbildung eines vollständigen, geodätisch konvexen, magnetischen Billards ohne konjugierte Punkte in den Koordinaten

$$(x, y) := (x, -\cos(\beta)) \in N \times (-1, 1)$$

die 2-Form

$$d(-\cos(\beta)) \wedge dx = \sin(\beta) d\beta \wedge dx$$

d.h. die Billardabbildung ist symplektisch und daher flächentreu.

Dass wir für entsprechende magnetische Billards die magnetische Länge auf M als Erzeugendenfunktion erhalten haben, geht insbesondere darauf zurück, dass wir Billards zur Energie $E = 1/2$ untersucht haben. Für andere Energieniveaus lässt sich aber ebenfalls eine Erzeugendenfunktion angeben.

Bemerkung 4.2.19 Bei genauerer Untersuchung des Beweises von Satz 4.2.16 fällt auf, dass die Verwendung der Finsler-Metrik zur Beschreibung des Billardmodells nicht zwingend ist. Die Reflexion erfolgt für magnetische Billards zum positiven Energieniveau $E > 0$ immer nach dem Prinzip „Eingangswinkel=Ausgangswinkel“. Die Abbildungen r_q^i und r_q^a lassen sich durch Beschreibung der Sphäre K zur Energie E in Polarkoordinaten auch für K^a und K^i einführen. Die im Beweis des Satzes 4.2.16 verwendete Argumentation lässt sich dann auf ein magnetisches Billard mit beliebigem, positivem Energieniveau übertragen. Der entscheidende Schritt im Beweis ist der Wechsel in das Kotangentialbündel und die Aussage, dass Trajektorien des magnetischen Flusses Extremalen der Wirkung $A(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{\gamma}} \lambda$ sind (vgl. Satz 3.3.1). Für die Energie $E = 1/2$ erhält man dadurch die magnetische Finsler-Länge als Funktional. Andere Energieniveaus liefern, wie auf Seite 47 gezeigt

$$A(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

Parametrisiert man den Rand entsprechend des Energieniveaus, erhält man für ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte mit derselben Argumentation wie im vorherigen Satz die Funktion

$$G(q_0, q_1) = \int_0^c |\dot{\gamma}(t)|^2 dt - \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha$$

für die eindeutig bestimmte Trajektorie von q_0 nach q_1 als Erzeugendenfunktion der Billardabbildung $\hat{\mathcal{B}}$ und die zugehörige geschlossene Kurve $\zeta_{q_0}^{q_1}$ von q_0 entlang N nach q_1 und von q_1 entlang γ nach q_0 . Allerdings ist dafür eine Skalierung der Koordinaten notwendig. Wie zuvor liefert die Rechnung das Ergebnis

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_1} = p_{q_1}(s(q_1)) - \alpha_{q_1}(s(q_1)) = \langle w_0, s(q_1) \rangle = |w_0| \cdot |s(q_1)| \cdot \cos(r_{q_1}^a(w_0))$$

Alle Trajektorien und Kurven sind bzgl. des Energieniveaus parametrisiert. Daher gilt schließlich

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_1} = 2E \cdot \cos(r_{q_1}^a(w_0))$$

und analog

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_0} = -2E \cdot \cos(r_{q_0}^i(v_0))$$

Wir definieren die *magnetische Energie auf M* durch

$$\begin{aligned} G_E(q_0, q_1) &:= \int_0^c \frac{|\dot{\gamma}(t)|^2}{2} dt - \frac{1}{2} \int_{Z_{q_0}^{q_1}} \Omega_B \\ &= \int_0^c \frac{|\dot{\gamma}(t)|^2}{2} dt - \frac{1}{2} \int_{\zeta_{q_0}^{q_1}} \alpha \end{aligned}$$

für eine Trajektorie γ von q_0 nach q_1 und die zugehörige geschlossene Kurve $\zeta_{q_0}^{q_1}$ von q_0 entlang N nach q_1 , entlang γ nach q_0 , sowie der von $\zeta_{q_0}^{q_1}$ berandeten Fläche $Z_{q_0}^{q_1}$.

Es beschreibe $\mathcal{B}(x_0, \beta_0) = (x_1(x_0, \beta_0), \beta_1(x_0, \beta_0))$ die Billardabbildung. Wir setzen $y := E \cdot \cos(\beta)$.

In den Koordinaten (x, y) besitzt die Billardabbildung $\hat{\mathcal{B}}_E : N \times (-E, E) \rightarrow N \times (-E, E)$ mit

$$\hat{\mathcal{B}}_E(x_0, y_0) := \left(x_1 \left(x_0, \cos^{-1} \left(\frac{y_0}{E} \right) \right), E \cdot \cos \left(\beta_1 \left(x_0, \cos^{-1} \left(\frac{y_0}{E} \right) \right) \right) \right)$$

die magnetische Energie G_E auf M als Erzeugendenfunktion.

Wie zuvor kann man durch Änderung des Vorzeichens bei der Definition von y die negative magnetische Energie als Erzeugendenfunktion erhalten.

Mit ähnlichen Überlegungen wie im Beweis von Satz 4.2.16 lassen sich die partiellen Ableitungen der Finsler-Länge in einem Finsler-Billard herleiten. Wie wir sehen werden, lässt sich damit für reversible Finsler-Billard ein analoges Resultat zeigen. Man erinnere sich an Notationen und Erläuterungen zu Finsler-Metriken (vgl. Definition 3.2.2)

Satz 4.2.20 Sei $[M, F]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, reversibles Finsler-Billard oder magnetisches Finsler-Billard ohne konjugierte Punkte und N nach der Finsler-Bogenlänge parametrisiert. Für eine Geodäte $\gamma : (0, c) \rightarrow M$ von $q_0 \in N$ nach $q_1 \in N$ sei

$$G(q_0, q_1) := \int_0^c F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \Lambda_F(\gamma)$$

die Finsler-Länge von γ . Dann gilt

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_0} = -\ell_{q_0}(\dot{\gamma}(0))(s(q_0))$$

sowie

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_1} = \ell_{q_1}(\dot{\gamma}(c))(s(q_1))$$

wobei ℓ die Finsler-Legendre-Transformation bezeichnet.

BEWEIS Man wiederholt den wesentlichen Beweisschritt von Satz 4.2.16. Geodäten des Finsler-geodätischen-Flusses sind Extremale des Energie-Funktional

$$E_F(\gamma) := \frac{1}{2} \int_a^b F^2(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \int_a^b \rho(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

und nach der Finsler-Bogenlänge parametrisiert. Ferner sind sie Extremalen der Finsler-Länge Λ_F (vgl. S. 39). Der Fluss ist konjugiert zum Hamiltonschen-Fluss der Hamiltonfunktion $H = \frac{(F^*)^2}{2}$ und es gilt $\frac{1}{2}(F^*)^2(q, p) = \frac{1}{2}F^2(q, \ell_q^{-1}(p)) = \frac{1}{2}F^2(q, v)$. Wir wenden daher Satz 3.3.1 mit $S := H^{-1}(1/2)$ an. Dann sind Geodäten des Finsler-geodätischen-Flusses via Legendre-Transformation Extremale der Wirkung $A(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{\gamma}} \lambda$ mit festen Endpunkten.

Wir wählen nun dieselben Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 4.2.16. Man erhält analog

$$\int_{\tilde{\gamma}_h} \lambda - \int_{\tilde{\gamma}_0} \lambda = \int_c \lambda$$

und daher

$$G(q_0, q_1 + h) - G(q_0, q_1) = \int_c \lambda$$

Wie zuvor zeigt man damit, dass

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_1} = p_{q_1} s(q_1)$$

für den Impuls p_{q_1} der Geodäte γ_0 in q_1 . Dieser gehört via Finsler-Legendre-Transformation zum Geschwindigkeitsvektor der Geodäte, d.h. es gilt

$$p_{q_1} = \ell_{q_1}(w_0)$$

für den Einfallsvektor $w_0 \in B_F^a(q_1)$ von γ_0 in q_1 . Genauso zeigt man, dass

$$\frac{\partial G(q_0, q_1)}{\partial q_0} = -p_{q_0} s(q_0)$$

für den Impuls p_{q_0} von γ_0 in q_0 mit $p_{q_0} = \ell_{q_0}(v_0)$, wobei $v_0 \in B_F^i(q_0)$ den Tangentialvektor von γ_0 in q_0 darstellt. ■

Für reversible Finsler-Billards ist die Finsler-Länge Erzeugendenfunktion der Billardabbildung. Diese Aussage ist auch in [20] formuliert. Wesentlich ist es dabei geeignete Koordinaten zur Beschreibung der Billardabbildung zu erhalten. Die Indikatrix einer reversiblen Finsler-Metrik besitzt hierfür eine günstige Gestalt.

Satz 4.2.21 Sei $[M, F]$ ein reversibles Finsler-Billard. Für $q \in N$ setze

$$\mathcal{W}_q := \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v \in B_F^a(q) \right\}$$

und damit

$$N_{\mathcal{W}} := \bigcup_{q \in N} (\{q\} \times \mathcal{W}_q)$$

Es gelte $\mathcal{B}(q_1, \beta) = (q_2, \delta)$ für ein $q_1 \in N$ und $\beta \in [0, \pi]$. Wir setzen

$$y_1 := \ell_{q_1} \left(\left(r_{q_1}^i \right)^{-1} (\beta) \right) (s(q_1))$$

sowie

$$y_2 = \ell_{q_2} \left(\mathcal{R}_{q_2}^{-1} \circ \left(r_{q_2}^i \right)^{-1} (\delta) \right) (s(q_2))$$

und betrachten die Billardabbildung $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} : N_{\mathcal{W}} \rightarrow N_{\mathcal{W}}$, die beschrieben ist durch

$$\mathcal{B}_{\mathcal{W}}(q_1, y_1) = (q_2, y_2)$$

Ist N nach der Finsler-Bogenlänge parametrisiert und das Billard vollständig, geodätisch konvex und ohne konjugierte Punkte, besitzt die Billardabbildung $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} : N \times (-1, 1) \rightarrow N \times (-1, 1)$ in den Koordinaten

$$(x, y) := \left(x, \ell_x \left(\left(r_x^i \right)^{-1} (\beta) \right) (s(x)) \right) \in N \times (-1, 1)$$

die Finsler-Länge als Erzeugendenfunktion.

BEWEIS Wir untersuchen die Beschaffenheit der Indikatrix und erinnern uns an Definition 3.2.2. Zur Illustration vergleiche man Abbildung 4.19.

Für $q \in N$ gilt $s(q) \in B_F(q)$. Ferner gibt es einen Vektor $n_q \in B_F^a(q)$ mit

$$g_{n_q}(n_q, s(q)) = \ell(n_q)(s(q)) = 0$$

und $T_q M$ ist darstellbar durch $T_q M = \mathbb{R} \cdot n_q \oplus \mathbb{R} \cdot s(q)$.

Wähle $v \in B_F^a(q)$. Dann gilt $\ell(v)(v) = g_v(v, v) = F^2(v) = 1$ und der Tangentialraum $T_v B_F(q) = \{ w \in T_q M : g_v(v, w) = 0 \}$ wird von einem Vektor w_v aufgespannt. Insbesondere gilt

$$T_q M = \mathbb{R} \cdot v \oplus \mathbb{R} \cdot w_v$$

und für jeden Vektor $u = \mu v + \kappa w_v$

$$\ell_q(v)(u) = g_v(v, u) = \mu g_v(v, v) + \kappa g_v(v, w_v) = \mu$$

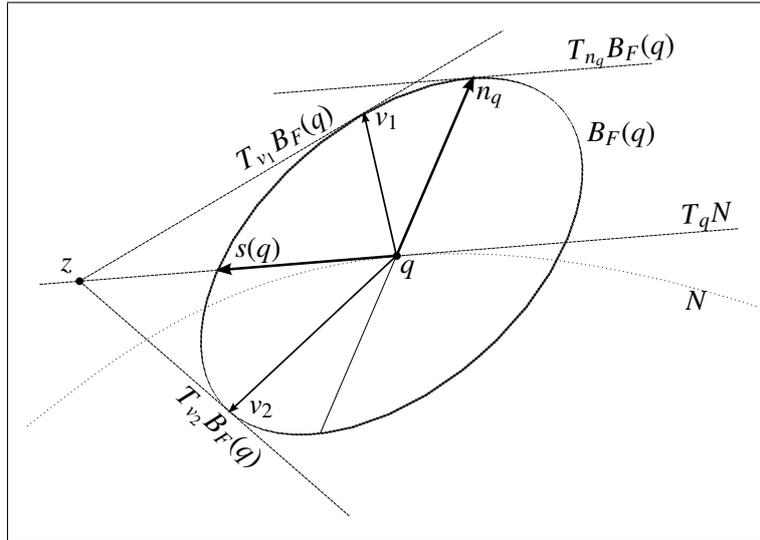


Abbildung 4.19: Die Indikatrix einer reversiblen Finsler-Metrik

Ist $v \neq n_q$ schneidet die Tangente an $B_F(q)$ in v die Tangente an N in q in einem Punkt z , d.h. es existieren $\mu, t_v \in \mathbb{R}$, so dass

$$u := v + \mu w_v = t_v s(q)$$

Daher gilt

$$\ell_q(v)(u) = \ell(v)(v) = 1$$

und damit schließlich

$$\ell_q(v)(s(q)) = \frac{1}{t_v}$$

Die Reflexionsabbildung bildet $v_1 \in B_F^a(q)$ auf einen Vektor $v_2 \in B_F^i(q)$ ab. Dabei war v_2 genau so gewählt, dass die Tangenten an $B_F(q)$ in v_1 und v_2 einen Schnittpunkt z auf der Tangente an N in q besitzen (vgl. Lemma 4.1.1). Also gilt

$$t_{v_1} s(q) = v_1 + \mu_1 w_{v_1} = z = v_2 + \mu_2 w_{v_2} = t_{v_2} s(q)$$

und daher auch

$$\ell_q(v_1)(s(q)) = \ell_q(v_2)(s(q))$$

Jeder Vektor $v \in B_F(q)$ ist als Linearkombination von $s(q)$ und n_q darstellbar. Die Indikatrix ist strikt konvex und $T_{n_q} B_F(q)$ ist parallel zu $T_q N$. Für jeden Vektor $v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F(q)$ mit $a_1 > 0$ gilt $\ell(v)(s(q)) \in (0, 1]$ und zu jedem $t s(q)$ mit $t > 1$ existiert genau ein $v_1 \in B_F^a(q)$ sowie $v_2 \in B_F^i(q)$, so dass sich die zugehörigen Tangenten an $B_F(q)$ im Punkt $t s(q)$ schneiden. Insbesondere gilt daher

$$\begin{aligned} [0, 1] &= \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F^a(q), a_1 \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F^i(q), a_1 \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

Wegen der Reversibilität der Finsler-Metrik ist $B_F(q)$ zentralsymmetrisch. Daher gilt für $v \in B_F(q)$ auch $-v \in B_F(q)$ und damit insbesondere $-s(q) \in B_F(q)$.

Wie zuvor existieren zu jedem $-ts(q)$ mit $t > 1$ genau ein $v_1 \in B_F^a(q)$ sowie $v_2 \in B_F^i(q)$, so dass sich die zugehörigen Tangenten an $B_F(q)$ im Punkt $-ts(q)$ schneiden. Für diese gilt

$$\ell_q(v_1)(s(q)) = \ell_q(v_2)(s(q)) = -\frac{1}{t}$$

Daher folgt insbesondere auch

$$\begin{aligned} [-1, 0] &= \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F^a(q), a_1 \leq 0 \right\} \\ &= \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F^i(q), a_1 \leq 0 \right\} \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$\mathcal{W}_q := \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v \in B_F^a(q) \right\} = \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v \in B_F^i(q) \right\} = [-1, 1]$$

Die Abbildung $\Upsilon_q : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Upsilon_q(\beta) := \ell_q \left(\left(r_q^i \right)^{-1}(\beta) \right) (s(q))$$

ist ein streng monoton fallender Diffeomorphismus und die Zuordnung $q \mapsto \Upsilon_q$ hängt nach Definition der Finsler-Legendre-Transformation glatt von q ab.

Sei $\mathcal{B}_W(q_0, y_0) = (q_1, y_1)$. Dann ist y_0 durch $y_0 := \Upsilon_{q_0}(\beta)$ definiert und $(r_{q_0}^i)^{-1}(\beta)$ ist gerade der Tangentialvektor der Geodäte $\gamma_{q_0 q_1}$ im Punkt q_0 . Der Vektor $(r_{q_1}^i)^{-1}(\delta)$ entspricht dem Vektor nach der Reflexion in q_1 und $\mathcal{R}_{q_1}^{-1} \circ (r_{q_1}^i)^{-1}(\delta)$ dem Tangentialvektor von $\gamma_{q_0 q_1}$ in q_1 . Wie wir gerade gesehen haben gilt

$$\ell_{q_1} \left(\mathcal{R}_{q_1}^{-1} \circ (r_{q_1}^i)^{-1}(\delta) \right) (s(q_1)) = \ell_{q_1} \left((r_{q_1}^i)^{-1}(\delta) \right) (s(q_1))$$

Dann folgt die Aussage jetzt mit Satz 4.2.20. ■

Bemerkung 4.2.22 Analog zur Untersuchung der Erzeugendenfunktion magnetischer Billards, erhält man durch eine Umkehrung des Vorzeichens in den Koordinaten bei entsprechender Anpassung der Billardabbildung die negative Finsler-Länge als Erzeugendenfunktion der Billardabbildung (vgl. Korollar 4.2.18).

Für magnetische Finsler-Billards sowie für irreversible Finsler-Billards zu einer Finsler-Metrik wie in Bemerkung 4.2.9 lassen sich analoge Untersuchungen durchführen. Allerdings verursacht die Irreversibilität der Finsler-Metrik mit den zugehörigen Koordinaten ein weniger schönes Resultat als im reversiblen Fall oder der Interpretation der Billardabbildung magnetischer Billards im Sinne von Satz 4.2.16.

Bemerkung 4.2.23 Für magnetische Finsler-Billards ist die Indikatrix nach Lemma 4.1.2 eine Ellipse mit Ursprung in einem Brennpunkt. Selbiges gilt für Finsler-Billards zu einer Finsler-Metrik wie in Bemerkung 4.2.9. Insbesondere ist die Indikatrix nicht zentralsymmetrisch und für $q \in N$ gilt im allgemeinen $-s(q) \notin B_F(q)$.

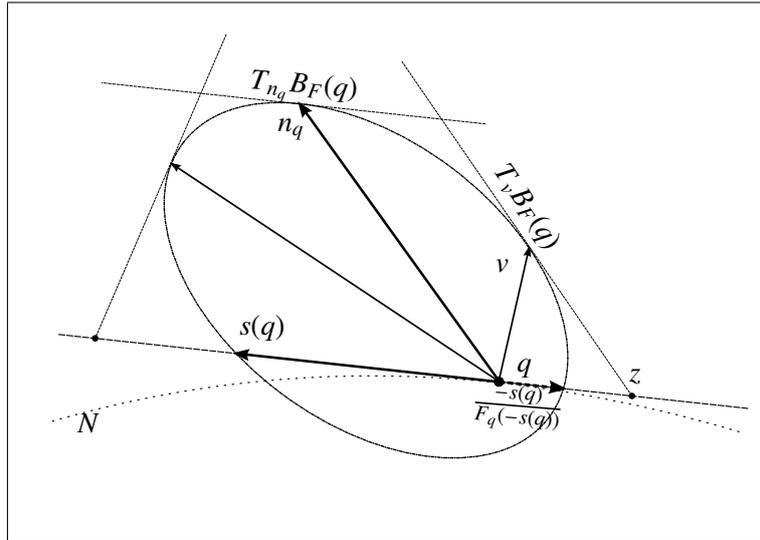


Abbildung 4.20: Die Indikatrix als Ellipse mit Ursprung in einem Brennpunkt

Betrachten wir den vorherigen Beweis und übertragen die Untersuchung der Indikatrix auf diesen Fall, erhält man wie zuvor

$$\begin{aligned} [0, 1] &= \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F^a(q), a_1 \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ \ell_q(\mathcal{R}_q(v))(s(q)) : v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F^a(q), a_1 \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

Nun gilt aber $\frac{-s(q)}{F_q(-s(q))} \in B_F(q)$ und $\ell_q\left(\frac{-s(q)}{F_q(-s(q))}\right)\left(\frac{-s(q)}{F_q(-s(q))}\right) = 1$. Die Tangente an $B_F(q)$ in $v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F(q)$ mit $a_1 < 0$ schneidet die Tangente an N in q in einem Punkt

$$z = t \cdot \frac{-s(q)}{F_q(-s(q))}$$

mit $t \geq 1$ und es gilt

$$\ell_q(v)(z) = t \cdot \ell_q(v)\left(\frac{-s(q)}{F_q(-s(q))}\right) = 1$$

Daher folgt

$$\ell_q(v)(s(q)) = -\frac{F_q(-s(q))}{t}$$

und damit

$$\begin{aligned} [-F_q(-s(q)), 0] &= \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F^a(q), a_1 \leq 0 \right\} \\ &= \left\{ \ell_q(\mathcal{R}_q(v))(s(q)) : v = a_1 s(q) + a_2 n_q \in B_F^a(q), a_1 \leq 0 \right\} \end{aligned}$$

Die Menge \mathcal{W}_q hat schließlich die Darstellung

$$\mathcal{W}_q := \left\{ \ell_q(v)(s(q)) : v \in B_F^a(q) \right\} = [-F_q(-s(q)), 1]$$

Insbesondere erhält man bei der Bestimmung von \mathcal{W}_q eine Abhängigkeit vom Punkt $q \in N$ und daher für magnetische Finsler-Billards im allgemeinen keine Billardabbildung auf $N \times (-1, 1)$.

Die Menge

$$N_{\mathcal{W}} := \bigcup_{q \in N} (\{q\} \times \mathcal{W}_q)$$

entspricht einem Zylinder, der nach unten durch einen Graphen $gr(f) := \{(q, f(q)) : q \in N\}$ einer glatten Funktion $f : N \rightarrow (-\infty, 0)$ berandet ist.

Für die Betrachtung magnetischer Billards ist es günstiger die Trajektorien des zugrunde liegenden Flusses mit konstanter Geschwindigkeit zu parametrisieren. Man erhält dann die Billardabbildung $\hat{\mathcal{B}}$ auf $N \times (-1, 1)$ mit der magnetischen Länge auf M als Erzeugendenfunktion, oder für andere Energieniveaus die Billardabbildung $\hat{\mathcal{B}}_E : N \times (-E, E) \rightarrow N \times (-E, E)$ mit der magnetischen Energie auf M als Erzeugendenfunktion. Zudem ist die Einschränkung $\|\alpha\| < 1$ an das Vektorpotential, die sicherstellt, dass die Trajektorien Geodäten eines Finsler-Flusses darstellen, in dieser Betrachtung nicht notwendig.

Zur Vereinheitlichung der Notation betrachten wir im Folgenden immer Billards mit $|N| = 1$, wobei die Parametrisierung, je nach vorliegendem Fall, nach der Bogenlänge oder der Finsler-Bogenlänge erfolgt. Es bezeichne $\mathbb{S} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dann lässt sich die Billardabbildung als eine Abbildung $\mathcal{B} : \mathbb{S}^1 \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (0, \pi)$ angeben, und durch die Übertragung in die universelle Überlagerung erhält man den Lift $\mathcal{B} : \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \times (0, \pi)$ mit $(x + 1, \beta) = (x, \beta) + (1, 0)$. Wir verzichten auf die Wahl einer anderen Notation für den Lift der Billardabbildung.

Billards mit den zuvor eingeführten und untersuchten Eigenschaften führen zu besonderen Billardabbildungen - sie sind monotone Twistabbildungen. Monotone Twistabbildungen sind in der Literatur ausgiebig untersucht worden (für eine Übersicht vgl. z.B [23], [40] oder [34]), und wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass wir dadurch eine Fülle an Informationen über die Dynamik des zugehörigen Billards erhalten. Wir starten mit der Definition und orientieren uns dabei an [40].

Definition 4.2.24 Ein C^1 -Diffeomorphismus $\phi : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \times (a, b)$ mit $\phi(x_0, y_0) =: (x_1, y_1)$ heißt *monotone Twistabbildung*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\phi(x_0 + 1, y_0) = \phi(x_0, y_0) + (1, 0)$ für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (a, b)$
- ϕ ist orientierungserhaltend und $y_1(x_0, y_0) \rightarrow a, b$ für $y_0 \rightarrow a, b$
- ϕ ist stetig auf $\mathbb{R} \times [a, b]$ fortsetzbar
- ϕ erfüllt die *monotone Twistbedingung*

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_0} > 0$$

- es existiert eine C^2 -Funktion h , so dass

$$y_1 dx_1 - y_0 dx_0 = dh(x_0, x_1)$$

d.h. die Funktion h ist eine Erzeugendenfunktion von ϕ

Die dritte Bedingung bedeutet, dass es für endliche $a, b \in \mathbb{R}$ Zahlen ω_- und ω_+ gibt, so dass

$$\begin{aligned}\phi(x_0, a) &= \lim_{y_0 \rightarrow a} (x_1(x_0, y_0), y_1(x_0, y_0)) = (x_0 + \omega_-, a) \\ \phi(x_0, b) &= \lim_{y_0 \rightarrow b} (x_1(x_0, y_0), y_1(x_0, y_0)) = (x_0 + \omega_+, b)\end{aligned}$$

Das Intervall (ω_-, ω_+) heißt *Twistintervall* von ϕ .

Die Twistbedingung lässt sich anschaulich interpretieren. Das Bild einer Faser $\{q\} \times (a, b)$ unter ϕ ist ein Graph über der x -Achse. Daher lässt sich die Abbildung ϕ auch in den Koordinaten x_0, x_1 statt x_0, y_0 angeben - zu x_0 und x_1 existieren eindeutig bestimmte y_0, y_1 , so dass $\phi(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$. Ist die Billardabbildung eines Billards eine monotone Twistabbildung bedeutet dies, dass eine Bahn bereits durch die Folge der Fußpunkte eindeutig bestimmt ist.

Die Billardabbildung klassischer Billards mit strikt konvexem Rand ist in passenden Koordinaten eine monotone Twistabbildung (vgl. z.B [40], [23], [45]). Mit der geleisteten Vorarbeit erhält man nun als Resultat, dass reversible Finsler-Billards und magnetische-Finsler-Billards mit den zuvor untersuchten Eigenschaften, in geeigneten Koordinaten, ebenfalls eine monotone Twistabbildung als Billardabbildung besitzen.

Satz 4.2.25 *Sei $[M, \Omega_B]$ ein geodätisch konvexes, vollständiges, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte. In den Koordinaten*

$$(x, y) := (x, -\cos(\beta))$$

ist die Billardabbildung $\hat{\mathcal{B}} : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \times (-1, 1)$ eine monotone Twistabbildung mit Twistintervall $(0, 1)$ und der negativen magnetischen Länge auf M als Erzeugendenfunktion.

BEWEIS Nach Lemma 4.2.12 d) gilt $y_1(x_0, y_0) \rightarrow -1$ für $y_0 \rightarrow -1$ sowie $y_1(x_0, y_0) \rightarrow 1$ für $y_0 \rightarrow 1$. Setzen wir $\hat{\mathcal{B}}(x, -1) := (x, -1)$ und $\hat{\mathcal{B}}(x, 1) = (x + 1, 1)$ ist die stetige Fortsetzbarkeit gesichert. Das Twistintervall ist $(0, 1)$. Nach Satz 4.2.13 b) ist die Abbildung $\tau_{x_0} = x_1(x_0, \cdot) : (0, \pi) \rightarrow N \setminus \{x_0\}$ ein Diffeomorphismus und nach Lemma 4.2.12 gilt $x_1(x_0, \beta) \rightarrow x_0$ für $\beta \rightarrow 0$ sowie $x_1(x_0, \beta) \rightarrow x_0 + 1$ für $\beta \rightarrow \pi$. Daher gilt $\frac{\partial x_1}{\partial \beta} > 0$. Die Funktion $f(x) = -\cos(x)$ ist auf $(0, \pi)$ streng monoton wachsend. Also ist die Twistbedingung erfüllt. Dann folgt die Aussage schließlich mit Korollar 4.2.18. ■

Die in der Literatur für ebene Billards mit strikt konvexem Rand und konstantem Magnetfeld anzutreffende Forderung eines „hinreichend schwachen“ Magnetfeldes erzeugt ein geodätisch konvexes, vollständiges Billard ohne konjugierte Punkte. Solche Billards sind daher eine Beispielklasse für magnetische Billards mit monotoner Twistabbildung. Berry hat in [36] postuliert, dass die Dynamik klassischer Billards für schwache, konstante Magnetfelder erhalten bleibe. Diese Eigenschaft strikt konvexer Billards mit hinreichend schwachem, konstantem Magnetfeld wurde in [6], [7] erläutert.

Bemerkung 4.2.26 Die Aussage von Satz 4.2.25 gilt analog auch ohne Einschränkung an das Vektorpotential für magnetische Billards mit beliebigem positiven Energieniveau. Ist der Rand des Tisches entsprechend des Energieniveaus parametrisiert und das Billard vollständig, geodätisch konvex und ohne konjugierte Punkte, ist die Billardabbildung $\hat{\mathcal{B}}_E : \mathbb{R} \times (-E, E) \rightarrow \mathbb{R} \times (-E, E)$ in den Koordinaten

$$(x, y) := (x, -E \cdot \cos(\beta))$$

eine monotone Twistabbildung mit der negativen magnetischen Energie G_E auf M als Erzeugendenfunktion (vgl. Bemerkung 4.2.19).

Auch die Billardabbildung eines reversiblen Finsler-Billards ist, unter Forderung entsprechender Eigenschaften des Billards, eine monotone Twistabbildung - mit der Finsler-Länge als Erzeugendenfunktion. Diese Aussage ist in [20] in einer Bemerkung erwähnt.

Satz 4.2.27 Sei $[M, F]$ ein geodätisch konvexes, vollständiges, reversibles Finsler-Billard ohne konjugierte Punkte. In den Koordinaten

$$(x, y) := \left(x, -\ell_x \left(\left(r_x^i \right)^{-1} (\beta) \right) (s(x)) \right)$$

ist die Billardabbildung $\mathcal{B}_W : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \times (-1, 1)$ eine monotone Twistabbildung mit Twistintervall $(0, 1)$ und der negativen Finsler-Länge als Erzeugendenfunktion.

BEWEIS Sei $x \in N$. Die Funktion $\Upsilon_x : [0, \pi] \rightarrow (-1, 1)$, gegeben durch

$$\Upsilon(\beta) := -\ell_x \left(\left(r_x^i \right)^{-1} (\beta) \right) (s(x))$$

ist ein streng monoton wachsender Diffeomorphismus (vgl. den Beweis von Satz 4.2.21). Daher folgt die Aussage analog zum Beweis des Satzes 4.2.25 mit Satz 4.2.21 und Bemerkung 4.2.22. ■

4.3 Minimale Bahnen und das Spektrum

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die Billardabbildung eines magnetischen oder reversiblen Finsler-Billards unter geeigneten Bedingungen eine monotone Twistabbildung ist. Die Resultate der Erforschung monotoner Twistabbildungen lassen sich dann auf entsprechende Billards übertragen und liefern Erkenntnisse über die Existenz und Beschaffenheit zugehöriger Billardbahnen. Erste tiefgreifende Aussagen über monotone Twistabbildungen boten Birkhoffsche Sätze des frühen 20. Jahrhunderts. Eine Erweiterung und Verallgemeinerung fand durch Methoden von Aubry und Mather statt, die heute entsprechend „Aubry-Mather-Theorie“ genannt wird. Weitere berühmte Ergebnisse der Untersuchung monotoner Twistabbildungen bieten die Arbeiten von Kolmogorov, Arnold und Moser, die heute unter der Bezeichnung „KAM-Theorie“ zusammengefasst sind.

Es folgt eine kurze Übersicht der Aussagen von Birkhoff und Aubry-Mather, sowie eine knappe Erläuterung der zugrunde liegenden Idee. Die formulierten Aussagen werden jeweils auf die von

uns untersuchten Billards übertragen und liefern wesentliche Erkenntnisse über die Dynamik der Billards. Ausführliche Informationen und Beweise zur Aubry-Mather-Theorie findet man z.B. in [23], [29], [3] oder [34]. Wir orientieren uns an den Ausführungen über monotone Twistabbildungen und klassische Billards in [40].

Von nun an sei $\phi : \mathbb{S}^1 \times (a, b) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (a, b)$ eine Abbildung, so dass der zugehörige Lift $\phi : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \times (a, b)$ mit $\phi(x_0, y_0) := (x_1, y_1)$ eine monotone Twistabbildung mit Erzeugendenfunktion h und Twistintervall (ω_-, ω_+) ist. Dann gilt insbesondere

$$\frac{\partial h(x_0, x_1)}{\partial x_0} = -y_0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial h(x_0, x_1)}{\partial x_1} = y_1$$

und die Twistbedingung

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_0} > 0$$

und dazu äquivalent

$$\partial_1 \partial_2 h < 0$$

Die Erzeugendenfunktion ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt und erfüllt wegen $y_1 dx_1 - y_0 dx_0 = dh(x_0, x_1)$ die Gleichung

$$h(x_0 + 1, x_1 + 1) = h(x_0, x_1)$$

Zu gegebenem (x_0, y_0) definiere durch

$$(x_k, y_k) := \phi^k(x_0, y_0), \quad k \in \mathbb{Z}$$

die zugehörige *Bahn* $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ von ϕ . Wegen der Twistbedingung ist eine Bahn bereits durch die Folge der Fußpunkte $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eindeutig bestimmt, und wir erhalten ferner für jedes $i \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$y_i = -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}) = \partial_2 h(x_{i-1}, x_i)$$

Eine beliebige Folge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ reeller Zahlen ist daher genau dann eine Bahn von ϕ , wenn

$$\partial_2 h(\lambda_{i-1}, \lambda_i) + \partial_1 h(\lambda_i, \lambda_{i+1}) = 0$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$. Diese Gleichung deutet bereits an, dass Bahnen Extremale eines Variationsproblems sind - im Gegensatz zu früher allerdings jetzt in einer diskreten Form. Unter allen Zahlenfolgen sind diejenigen gesucht, die obige Gleichung an jeder Stelle erfüllen. Die Untersuchung unendlicher (bzw. hier sogar biinfiniter Zahlenfolgen) durch Aufsummierung ist i.a. aber nicht sinnvoll durchführbar. Ein naheliegender Ansatz ist es, zunächst endliche Folgen zu untersuchen und die daraus abgeleiteten Aussagen - sofern möglich - auf den allgemeinen Fall hochzuheben. Auch hier erkennt man eine Verwandtschaft zum kontinuierlichen Variationsproblem, dem wir im ersten Kapitel begegnet sind. Dort variierte man Kurven mit festen Endpunkten. Extremale waren die Kurven, die die Euler-Lagrange-Gleichungen in jedem Punkt erfüllten. Trajektorien des Euler-Lagrange-Flusses waren lokal sogar Minimierer der Wirkung. In der jetzigen Situation liefert die

obige Gleichung ein „Analogon“ zu den Euler-Lagrange-Gleichungen, und es stellt sich erneut die Frage, ob Extremale auch, zumindest lokal, Minimierer der „Wirkung“ sind. In [34] werden der kontinuierliche und diskrete Fall behandelt und Gemeinsamkeiten in Fragestellungen und Ideen, sowie Aussagen aufgezeigt.

Definition 4.3.1 Sei ϕ eine monotone Twistabbildung mit Erzeugendenfunktion h . Für endliche Folgen $s := (x_0, \dots, x_N)$ reeller Zahlen bezeichne

$$A(s) := \sum_{i=0}^{N-1} h(x_i, x_{i+1})$$

das *Wirkungsfunktional*. Eine endliche Folge heißt *minimal*, wenn

$$\sum_{i=0}^{N-1} h(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{N-1} h(\lambda_i, \lambda_{i+1})$$

für alle reellen Zahlenfolgen $\lambda := (\lambda_0, \dots, \lambda_N)$ mit $\lambda_0 = x_0$ und $\lambda_N = x_N$.

Eine reelle Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ heißt *minimal*, wenn jeder Abschnitt (x_k, \dots, x_l) mit $k > l$ minimal ist.

Die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ist *extremal* bzw. *stationär*, wenn die Gleichung

$$\partial_2 h(x_{i-1}, x_i) + \partial_1 h(x_i, x_{i+1}) = 0$$

für jedes $i \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist. Insbesondere ist eine minimale Folge auch extremal.

Die ersten Bahnen, über die uns dieses Variationsprinzip Aufschluss gibt, sind periodische Bahnen.

Definition 4.3.2 Es seien $q, p \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $q > 0$. Eine Bahn $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ heißt *periodisch* mit Rotationszahl $\frac{p}{q}$, wenn

$$x_{i+q} = x_i + p$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$. Die Zahl q bezeichnet die *Periode* und p die *Umlaufzahl* der Bahn.

Der Definition zugrunde liegend ist die bereits bekannte Aussage, dass die Bahn einer monotonen Twistabbildung bereits durch die Fußpunkte eindeutig festgelegt ist. Für einen gegebenen Punkt (x_i, y_i) erzeugt die Abbildung ϕ eine Kreisabbildung. Somit lässt sich die allgemeine Definition der Rotationszahl für Kreisabbildungen auch für monotone Twistabbildungen einführen.

Definition 4.3.3 Sei $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ die Bahn einer monotonen Twistabbildung. Dann ist die zugehörige *Rotationszahl* durch

$$\theta := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i - x_0}{i}$$

definiert, sofern der Grenzwert existiert.

Die Rotationszahl gibt den mittleren Drehwinkel einer Kreisabbildung an. Die präzise Definition erfolgt über den Lift einer Kreisabbildung. Für einen orientierungserhaltenden Kreishomöomorphismus ist die Rotationszahl bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, und der Grenzwert

existiert immer. Die Abbildung besitzt genau dann periodische Punkte, wenn die Rotationszahl rational ist; ferner besitzen dann alle periodischen Punkte dieselbe Periode. Für genauere Informationen zu Kreisabbildungen vergleiche man z.B. [23].

Eine zentrale Aussage über die von einer monotonen Twistabbildung induzierten Kreisabbildungen, lieferte Birkhoff bereits in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts (für einen Beweis siehe ebenfalls [23]).

Satz 4.3.4 *Eine monotone Twistabbildung besitzt für jede rationale Zahl $\theta \in (\omega_-, \omega_+)$ aus dem Twistintervall mindestens zwei periodische Bahnen mit Rotationszahl θ .*

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass magnetische Billards oder reversible Finsler-Billards unter geeigneten Voraussetzungen eine Billardabbildung besitzen, die eine monotone Twistabbildung mit Twistintervall $(0, 1)$ ist. Im Kreisbillard mit konstantem, schwachem Magnetfeld lassen sich durch die gegebene Symmetrie anhand von geometrischen Überlegungen Eigenschaften der Billardbahnen ableiten. Lässt man dieses Billard als elementarstes Beispiel eines magnetischen Billards außen vor, lassen sich rein geometrisch im allgemeinen nur wenige Erkenntnisse über die Beschaffenheit der Billardbahnen gewinnen. Selbst das Finden von 2-periodischen Bahnen ist, anders als im klassischen Billard, i.a. nicht mehr elementar möglich. Überträgt man die Aussage des Satzes von Birkhoff auf geeignete magnetische Billards, erhält man daher hochgradig nicht-triviale und geometrisch nicht herleitbare Informationen über die Dynamik des Billards. Selbiges gilt für reversible-Finsler-Billards mit passenden Eigenschaften. Der Satz von Birkhoff sichert für die erwähnten Billards die Existenz unendlich vieler geschlossener Bahnen - und damit eine Aussage, die man losgelöst von der hier erläuterten Theorie a priori nicht erwarten konnte. Präziser formuliert erhält man folgende Aussage:

Satz 4.3.5 a) *Sei $[M, \Omega_B]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte. Dann besitzt das Billard für jede rationale, teilerfremde Zahl $\frac{p}{q} = \theta \in (0, 1)$ mindestens zwei periodische Bahnen mit Rotationszahl $\frac{p}{q}$.*

b) *Sei $[M, F]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, reversibles Finsler-Billard ohne konjugierte Punkte. Dann besitzt das Billard für jede rationale, teilerfremde Zahl $\frac{p}{q} = \theta \in (0, \frac{1}{2}]$ mindestens zwei periodische Bahnen mit Rotationszahl $\frac{p}{q}$.*

Die monotone Twistabbildung eines reversiblen Finsler-Billards besitzt auch für rationale Rotationszahlen $\frac{1}{2} < \theta < 1$ mindestens zwei periodische Bahnen mit entsprechender Rotationszahl. Die Einschränkung auf den Bereich $(0, \frac{1}{2}]$ für reversible Finsler-Billards ist dadurch begründet, dass die Rotationszahlen $\theta > \frac{1}{2}$ keine „neuen“ Bahnen liefern. Ist eine periodische Bahn mit Rotationszahl $\frac{p}{q} \in (0, \frac{1}{2})$ gefunden, ist die rückwärts durchlaufene Bahn wegen der Reversibilität der Finsler-Metrik wieder eine Bahn des Billards. Sie besitzt die gleiche Anzahl an Reflexionen. Allerdings hat die Umkehrung der Orientierung Auswirkungen auf die Umlaufzahl, so dass die Bahn eine periodische Bahn mit Rotationszahl $1 - \frac{p}{q}$ ist. Betrachte dazu die Illustration für das klassische Kreisbillard in Abbildung 4.21.

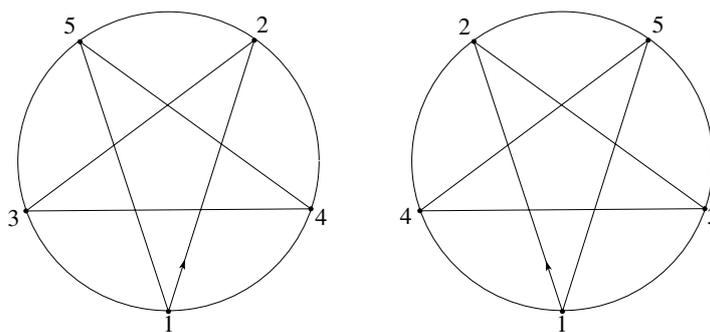


Abbildung 4.21: Bahnen mit Rotationszahlen $2/5$ und $3/5$

Wir bezeichnen die periodischen Bahnen, die der Satz von Birkhoff liefert, als *Birkhoff-Bahnen*. Neben der Periodizität haben diese Bahnen weitere Eigenschaften, die sich aus der Beweisidee ableiten. Gesucht werden dort Extremale der in Definition 4.3.1 eingeführten Wirkung - eingeschränkt auf periodische Zahlenfolgen mit Rotationszahl p/q , und daher letztlich auf endliche Folgen. Auf dieser Menge besitzt die Wirkung ein Minimum, das im Inneren der Menge angenommen wird. Daher existiert eine Folge, die wegen der Minimalität auch extremal ist und folglich eine Bahn der monotonen Twistabbildung darstellt. Die zweite Bahn findet man durch „Minimax-Methoden“, und sie entspricht einem Sattelpunkt der Wirkung. Die erste Birkhoff-Bahn ist aber nicht nur auf der Menge endlicher Folgen minimal. In der Tat sind diese Bahnen globale Minimierer, d.h. unter allen Folgen $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ reeller Zahlen. Sie sind also minimal auf jedem endlichen Abschnitt. Ferner sind die minimalen Birkhoff-Bahnen die einzigen minimalen periodischen Bahnen einer monotonen Twistabbildung. Einen ausführlichen Beweis findet man z.B. in [23].

Satz 4.3.6 *Die minimalen periodischen Birkhoff-Bahnen sind genau die minimalen periodischen Bahnen einer monotonen Twistabbildung.*

Obwohl die Existenzaussage periodischer Bahnen eines Billards durch den Birkhoffschen Satz ein analytisches und nicht geometrisches Resultat war, lässt sich ein Zusammenhang zur Geometrie des Billards herstellen. Berücksichtigt man, dass die Koordinaten der jeweiligen Billards so gewählt wurden, dass die negative magnetische bzw. die negative Finsler-Länge Erzeugendenfunktion der Billardabbildung ist, liefert die gerade erfolgte Aussage direkt Rückschlüsse auf die periodischen Bahnen und damit die Geometrie des Tisches.

Für die minimale 2-periodische Bahn (d.h. zur Rotationszahl $1/2$) eines reversiblen Finsler-Billards übersetzt sich der Satz dann z.B. so, dass dies genau die Bahn ist, die auf jedem Bahnsegment maximale Finsler-Länge besitzt. Wie im klassischen Billard ist sie daher die Bahn, bei der die Finsler-Länge jedes Segmentes dem *Finsler-Durchmesser* des Tisches entspricht. Die Illustration in Abbildung 4.22 hebt hervor, dass die Einfalls- und Ausfallsrichtungen der Bahn zur Tangente des Tisches parallele Tangenten an der Indikatrix besitzen (vgl. dazu Lemma 4.1.1) und bedient die Intuition, dass die zum Durchmesser gehörende Bahn die Punkte auf dem Rand mit euklidisch größtem Abstand verbindet. Im allgemeinen muss dies für eine Finsler-Metrik aber nicht erfüllt

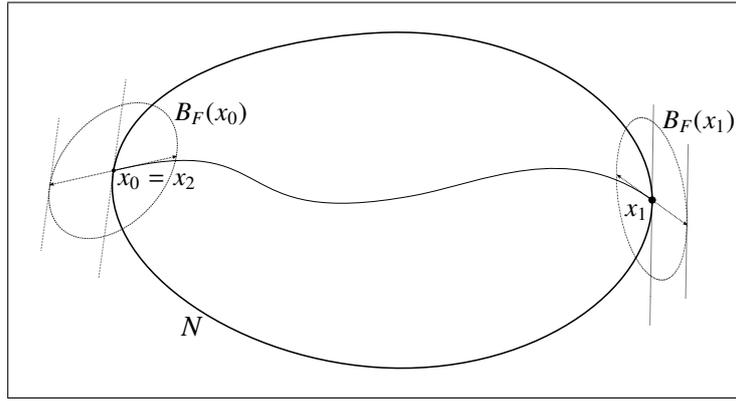


Abbildung 4.22: 2-periodische Bahn mit maximaler Finsler-Länge

sein.

Für magnetische Billards fällt die Reversibilität weg, so dass sich die Trajektorie von $x_0 \in N$ nach $x_1 \in N$ im allgemeinen von der von x_1 nach x_0 unterscheidet.

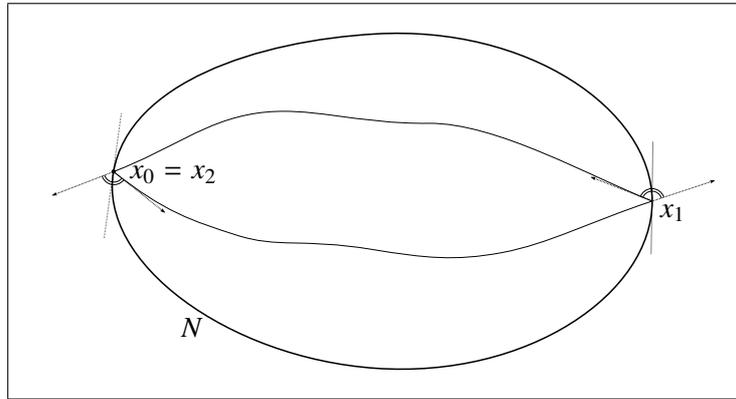


Abbildung 4.23: 2-periodische Bahn eines magnetischen Billards

Bezeichnet $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow E^{-1}(1/2)$ die erste und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow E^{-1}(1/2)$ die zweite Trajektorie, ließe sich aber durch den Mittelwert der magnetischen Längen auf M

$$\begin{aligned} diam_{mag} &:= \frac{1}{2} \left(\int_{a_1}^{b_1} |\dot{\gamma}_1(t)| dt - \int_{\zeta_{x_0}^{x_1}} \alpha + \int_{a_2}^{b_2} |\dot{\gamma}_2(t)| dt - \int_{\zeta_{x_1}^{x_0}} \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{a_1}^{b_1} |\dot{\gamma}_1(t)| + \alpha_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t)) dt + \int_{a_2}^{b_2} |\dot{\gamma}_2(t)| + \alpha_{\gamma_2(t)}(\dot{\gamma}_2(t)) dt - \int_N \alpha \right) \end{aligned}$$

in kanonischer Verallgemeinerung der *magnetische Durchmesser* eines magnetischen Billardtisches einführen. Erfüllt das Vektorpotential die Bedingung $\|\alpha\| < 1$, gilt wegen der Unabhängigkeit der Finsler-Länge von der Parametrisierung hier

$$diam_{mag} = \frac{1}{2} \left(\Lambda_F(\gamma_1) + \Lambda_F(\gamma_2) - \int_N \alpha \right)$$

Ein magnetisches Billard zur Energie $E > 0$ besitzt unter geeigneten Voraussetzungen die negative magnetische Energiefunktion G_E auf M als Erzeugendenfunktion (vgl. Bemerkung 4.2.26 und Bemerkung 4.2.19). Für ein solches Billard bezeichnen wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} diam_E &:= \frac{1}{2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{|\dot{\gamma}_1(t)|^2}{2} dt - \int_{\xi_{x_0}^{x_1}} \frac{\alpha}{2} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{|\dot{\gamma}_2(t)|^2}{2} dt - \int_{\xi_{x_0}^{x_1}} \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{a_1}^{b_1} |\dot{\gamma}_1(t)|^2 + \alpha_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t)) dt + \int_{a_2}^{b_2} |\dot{\gamma}_2(t)|^2 + \alpha_{\gamma_2(t)}(\dot{\gamma}_2(t)) dt - \int_N \alpha \right) \end{aligned}$$

analog als den *magnetischen Energie-Durchmesser* des Billardtisches. Die obigen Kurven liegen in der Energiefläche zur Energie E .

Für eine periodische Bahn $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ einer monotonen Twistabbildung ist die Menge der Bahnpunkte $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{Z}\}$ offensichtlich eine invariante Menge der Twistabbildung. Es wäre interessant weitere Informationen über die Gestalt invarianter Mengen der Twistabbildung zu erlangen; zu wissen, wo sie sich auf dem Zylinder befinden und ob man anhand ihrer Existenz weitere Kenntnisse über die Twistabbildung ableiten kann. Für die bisher bekannten minimalen periodischen Bahnen kennt man tatsächlich die Beschaffenheit dieser invarianten Mengen.

Definition 4.3.7 Sei ϕ eine monotone Twistabbildung. Eine geschlossene, nicht-zusammenziehbare (d.h. nicht nullhomotope) Kurve in $\mathbb{S}^1 \times (a, b)$, die keine Selbstschnitte besitzt und unter ϕ invariant ist, heißt *invariante Kurve* von ϕ .

Birkhoff konnte zeigen, dass alle invarianten Kurven einer monotonen Twistabbildung dieselbe Gestalt besitzen. Einen Beweis der Aussage findet man in der angegebenen Literatur oder in [39].

Satz 4.3.8 Sei ϕ eine monotone Twistabbildung. Dann ist jede invariante Kurve von ϕ der Graph $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{S}^1\}$ einer Lipschitz-stetigen Funktion $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow (a, b)$.

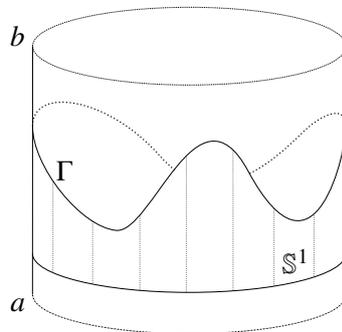


Abbildung 4.24: invariante Kurve Γ einer monotonen Twistabbildung

Diese Aussage machte sich auch Mather bei der Untersuchung seiner „glancing billards“ zu Nutze ([30]), die bereits auf Seite 61 angesprochen wurden. Ein Satz von Birkhoff besagt, dass eine monotone Twistabbildung ohne invariante Kurven Bahnen besitzt, die dem oberen und unteren Rand des Zylinders beliebig nahe kommen. Der Zylinder wird durch die Existenz einer solchen Bahn zu einem *Instabilitätsgebiet*. Dies ist genau dann der Fall, wenn es keine invarianten Kurven im Zylinder gibt (vgl. z.B. [34]). Die Annahme der Existenz einer invarianten Kurve in einem konvexen Billard mit in einem Punkt verschwindender Randkrümmung kann mit Hilfe des Satzes 4.3.8 zum Widerspruch geführt werden.

Nach der Frage der Gestalt minimaler periodischer Bahnen und der anschließenden Definition invarianter Kurven vermutet man nun, dass minimale periodische Bahnen einer monotonen Twistabbildung eben auf jenen liegen. In dieser Allgemeinheit gilt die Aussage nicht. Es lässt sich aber zeigen, dass jede dieser Bahnen auf dem Graphen einer Lipschitz-stetigen Funktion auf \mathbb{S}^1 liegt. Aubry und Mather entwickelten in den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts Methoden, die die Frage nach der Existenz minimaler Bahnen mit Rotationszahlen $\theta \in (\omega_-, \omega_+)$ auf irrationale Rotationszahlen erweitert (vgl. [29], [3], [34], [23]). Man erhält dadurch folgende viel allgemeinere Aussage.

Satz 4.3.9 *Sei ϕ eine monotone Twistabbildung mit Twistintervall (ω_-, ω_+) . Dann besitzt ϕ für jede Zahl $\theta \in (\omega_-, \omega_+)$ eine minimale Bahn mit Rotationszahl θ und jede minimale Bahn liegt auf dem Graphen einer Lipschitz-stetigen Funktion.*

Existiert eine invariante Kurve mit Rotationszahl $\theta \in (\omega_-, \omega_+)$, besteht sie aus minimalen Bahnen mit Rotationszahl θ . Ist θ irrational, existiert höchstens eine invariante Kurve mit Rotationszahl θ .

Wie beim Satz von Birkhoff erhalten wir durch eine analytische Untersuchung monotoner Twistabbildungen Aussagen, die sich auf die von uns untersuchten Billards übertragen lassen und damit Erkenntnisse über ein geometrisches Modell liefern, die sich a priori nicht auf geometrischem Wege herleiten lassen. Der obige Satz ergänzt das Wissen über die periodischen Bahnen eines Billards um die Existenz minimaler Bahnen zu jeder beliebigen Rotationszahl im Twistintervall und deren Gestalt im Phasenraum des Billards.

Satz 4.3.10 *a) Ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte besitzt zu jeder Zahl $\theta \in (0, 1)$ eine minimale Bahn mit Rotationszahl θ . Die Bahn liegt auf dem Graphen einer Lipschitz-stetigen Funktion auf \mathbb{S}^1 .*

b) Ein vollständiges, geodätisch konvexes, reversibles Finsler-Billard ohne konjugierte Punkte besitzt zu jeder Zahl $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ eine minimale Bahn mit Rotationszahl θ . Die Bahn liegt auf dem Graphen einer Lipschitz-stetigen Funktion auf \mathbb{S}^1 .

Bemerkung 4.3.11 In [40] ist vermerkt, dass sich die Aussage von Satz 4.3.9 auch auf die Situation übertragen lässt, in der die monotone Twistabbildung auf einem Zylinder definiert ist, der nach oben und unten durch Graphen von Funktionen auf \mathbb{S}^1 beschränkt ist. Dann gilt die obige Aussage

auch für vollständige, geodätisch konvexe, magnetische Finsler-Billards ohne konjugierte Punkte mit der negativen Finsler-Länge als Erzeugendenfunktion (vgl. Bemerkung 4.2.23). Gegenüber reversiblen Finsler-Billards ist die Einschränkung des Intervalls der Rotationszahlen auf $(0, 1/2]$ dann aber nicht sinnvoll.

Man erinnere sich, dass minimale Bahnen nach Definition genau die Bahnen sind, die auf jedem endlichen Abschnitt minimale Wirkung besitzen. Die Existenz minimaler Bahnen zu irrationalen Rotationszahlen weist man durch Approximation mit den minimalen Birkhoff-Bahnen nach. Deren Existenz hatte man durch Einschränkung auf die Menge der periodischen Zahlenfolgen (insbesondere also endlichen Folgen) zeigen können. Gleichzeitig waren die minimalen Birkhoff-Bahnen aber auch globale Minimierer der Wirkung, d.h. auf jedem Abschnitt minimal. Beschreibt (x_0, \dots, x_q) mit $x_{q+1} = x_0 + p$ eine minimale Birkhoff-Bahn zu p/q , nimmt die Wirkung auf jeder Menge endlicher Zahlenfolgen mit festen Endpunkten in Punkten der minimalen Bahn ein Minimum an - in der minimalen Birkhoff-Bahn. Insbesondere lässt sich daher jeder dieser Mengen eine minimale Wirkung zuordnen. Die minimale Wirkung der Menge $\{(\lambda_0, \dots, \lambda_q) : \lambda_0 = x_0, \lambda_q = x_q\}$ besitzt den Wert

$$A(s) = \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1})$$

Die Wirkung der gesamten Bahn $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, d.h. der Ausdruck $\sum_{-\infty}^{\infty} h(x_i, x_{i+1})$, ist aber, bis auf degenerierte Fälle, nicht konvergent. Die Bahn besteht allerdings aus einer „Hintereinanderschaltung“ desselben endlichen Abschnitts. Eine minimale Bahn der Menge $\{(\lambda_0, \dots, \lambda_{nq}) : \lambda_0 = x_0, \lambda_{nq} = x_q + np\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist wieder durch die obige Birkhoff-Bahn gegeben, und die minimale Wirkung dieser Menge nimmt wegen der Periodizität der Erzeugendenfunktion den Wert

$$A(s_n) = \sum_{i=0}^{nq-1} h(x_i, x_{i+1}) = n \cdot \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1})$$

an, wobei $s_n = (x_0, \dots, x_q, x_0 + p, \dots, x_q + p, x_0 + 2p, \dots, x_q + 2p, \dots, x_q + np)$ den Abschnitt der minimalen Birkhoff-Bahn darstellt. Führt man passend zur Periodizität der Bahn eine Mittelung der Wirkung durch, lässt sich für jede teilerfremde, rationale Zahl p/q im Twistintervall die „gemittelte minimale Wirkung“ einführen. Durch Approximation irrationaler $\theta \in (\omega_-, \omega_+)$ durch rationale Zahlen des Twistintervalls lässt sich die gemittelte minimale Wirkung auch für die minimalen Bahnen mit irrationaler Rotationszahl erklären, so dass sich insgesamt jeder Zahl des Twistintervalls ihre zugehörige (gemittelte) minimale Wirkung zuordnen lässt. Ausführliche Schilderungen dazu findet man z.B. in [23].

Definition 4.3.12 Sei ϕ eine monotone Twistabbildung mit Erzeugendenfunktion h und Twistintervall (ω_-, ω_+) . Für $\theta \in (\omega_-, \omega_+)$ sei $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ eine minimale Bahn von ϕ mit Rotationszahl θ . Die Abbildung $A_{min} : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$A_{min}(\theta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=-n}^{n-1} h(x_i, x_{i+1})$$

definiert ist, heißt *minimale Wirkung von ϕ* .

Eine Auflistung wesentlicher Eigenschaften der minimalen Wirkung findet man in [40] und wird an dieser Stelle übernommen.

Satz 4.3.13 *Sei ϕ eine monotone Twistabbildung und A_{min} die minimale Wirkung von ϕ .*

Dann gilt

- a) A_{min} ist strikt konvex und daher insbesondere stetig.
- b) In $\theta \in (\omega_-, \omega_+) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ist A_{min} differenzierbar.
- c) A_{min} ist genau dann in rationalem $\theta = \frac{p}{q}$ differenzierbar, wenn es eine invariante Kurve von ϕ mit Rotationszahl θ gibt, auf der jede Bahn minimale periodische Bahn ist.
- d) Ist Γ_θ eine invariante Kurve von ϕ mit Rotationszahl θ , berechnet sich die Ableitung von A_{min} in θ durch $A'_{min}(\theta) = \int_{\Gamma_\theta} y dx$.

Für magnetische Billards oder reversible Finsler-Billards mit passenden Eigenschaften liefert die minimale Wirkung geometrische Informationen über den Billardtisch (unter Berücksichtigung des zugrunde liegenden Flusses), da die zugehörige Erzeugendenfunktion den Trajektorien des Flusses eine entsprechende Größe zuordnet. Zu $\theta = 1/2$ gibt es in diesen Billards eine minimale 2-periodische Bahn. Ferner sind die Ränder des Zylinders nach Definition der monotonen Twistabbildung invariante Kurven. Vergleicht man die Erläuterungen auf Seite 95 und erinnert sich an Satz 4.2.27, Satz 4.2.25 und Bemerkung 4.2.26 erhält man daher unmittelbar folgende Aussage.

Proposition 4.3.14 a) *Sei $[M, F]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, reversibles Finsler-Billard ohne konjugierte Punkte mit der negativen Finsler-Länge als Erzeugendenfunktion. Dann gibt $A_{min}(1/2)$ den negativen Finsler-Durchmesser des Billards an und ferner*

$$A'_{min}(0) = \int_{\Gamma_0} y dx = \int_N -dx = -1$$

den negativen Finsler-Umfang des Tisches.

b) *Sei $[M, \Omega_B]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte mit der negativen magnetischen Länge auf M als Erzeugendenfunktion. Dann gibt $A_{min}(1/2)$ den negativen magnetischen Durchmesser des Billards an und ferner*

$$A'_{min}(0) = \int_{\Gamma_0} y dx = \int_N -dx = -1$$

den negativen magnetischen Umfang des Tisches.

c) *Sei $[M, \Omega_B]$ ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard ohne konjugierte Punkte zur Energie $E > 0$ und mit der negativen magnetischen Energie auf M als Erzeugendenfunktion. Dann gibt $A_{min}(1/2)$ den negativen magnetischen Energie-Durchmesser des Billards an und ferner*

$$A'_{min}(0) = \int_{\Gamma_0} y dx = \int_N -dx = -1$$

den negativen magnetischen Energie-Umfang des Tisches.

Satz 4.3.13 c) ermöglicht es anhand der Differenzierbarkeit der minimalen Wirkung in rationalen Rotationszahlen wesentliche geometrische Eigenschaften des zugrunde liegenden Billards abzuleiten. Die Differenzierbarkeit der Rotationszahl $1/2$ gibt dabei Aufschluss über eine zentrale Kenngröße des Billards. Billards, deren minimale Wirkung in $\theta = 1/2$ differenzierbar ist, besitzen eine invariante Kurve mit Rotationszahl $1/2$, auf der jede Bahn eine minimale Bahn mit Rotationszahl $1/2$ ist. Dabei geben die minimalen 2-periodischen Bahnen, wie wir gesehen haben, den Durchmesser des jeweiligen Billards (d.h. den Finsler-, magnetischen oder magnetischen Energie-Durchmesser) an. Wir erhalten daher folgende Aussage.

Satz 4.3.15 *Sei ein vollständiges, geodätisch konvexes, magnetisches Billard oder reversibles Finsler-Billard ohne konjugierte Punkte gegeben. Ist die minimale Wirkung in $\theta = \frac{1}{2}$ differenzierbar, besitzt das Billard einen Billardtisch mit konstantem Finsler-Durchmesser, bzw. konstantem magnetischem (Energie-) Durchmesser.*

Wie im Fall klassischer, strikt konvexer Billards stellt sich die Frage, wie viele Informationen die Bahnen des Billards über den zugehörigen Billardtisch enthalten. Man erwartet insbesondere, dass bereits die minimalen periodischen Bahnen, denen man mittels der minimalen Wirkung einen endlichen Wert zuordnen kann, charakteristische Merkmale des Billardtisches (im Zusammenspiel mit dem zugrunde liegenden Fluss) beschreiben. Die Wohldefiniertheit der minimalen Wirkung für die zuvor aufgezählten Billards motiviert eine kanonische Verallgemeinerung der Begriffe des Längenspektrums und des markierten-Längenspektrums eines klassischen Billards (siehe [40]).

Definition 4.3.16 Es sei ein Billard mit Billardtisch M und glattem Rand N gegeben, so dass die Billardabbildung eine monotone Twistabbildung ϕ mit Erzeugendenfunktion h und Twistintervall (ω_-, ω_+) ist. Ist $\theta = p/q \in (\omega_-, \omega_+)$ eine teilerfremde, rationale Zahl, definiere die Menge P_θ durch

$$P_\theta := \left\{ s = ((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}} : s \text{ ist periodische Bahn von } \phi \text{ mit Rotationszahl } \theta \right\}$$

Für eine periodische Bahn $s := ((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{Z}} \in P_\theta$ mit $\theta = \frac{p}{q}$ definiere die Abbildung $T_\theta : P_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$T_\theta(s) := \sum_{i=0}^{q-1} -h(x_i, x_{i+1})$$

d.h. $T_\theta(s)$ entspricht der negativen Wirkung eines Umlaufs der Bahn s .

- a) Sei der Finsler-geodätische-Fluss einer reversiblen Finsler-Metrik F der zugrunde liegende Fluss des Billards, so dass das zugehörige Billard $[M, F]$ vollständig, geodätisch konvex und ohne konjugierte Punkte ist. Der Rand N besitze die Finsler-Länge $|N| = 1$. Dann heißt die Abbildung

$$\mathcal{MA}_F(N) : \mathbb{Q} \cap \left(0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

die gegeben ist durch

$$\mathcal{MA}_F(N)(\theta) := \max_{s \in P_\theta} T_\theta(s)$$

das *markierte Finsler-Längenspektrum* von N . Das markierte Finsler-Längenspektrum gibt die maximale Finsler-Länge geschlossener Geodäten des Finsler-geodätischen-Flusses auf M mit Rotationszahl θ an. Insbesondere wird die jeweilige maximale Länge in der minimalen Birkhoff-Bahn der Twistabbildung angenommen, und es gilt daher

$$A_{\min}(p/q) = -\frac{1}{q} \mathcal{MA}_F(N)(p/q)$$

Die Menge $\mathcal{A}_F(N)$, die durch

$$\mathcal{A}_F(N) := \left\{ n \cdot T_\theta(s) : n \in \mathbb{N}, s \in P_\theta, \theta \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2] \right\} \cup \mathbb{N} \cdot |N|$$

definiert ist, heißt *Finsler-Längenspektrum* von N . Das Finsler-Längenspektrum beinhaltet die Information über alle Finsler-Längen geschlossener Geodäten des Finsler-geodätischen-Flusses auf M und der Vielfachheiten der Finsler-Länge des Randes, den wir immer normiert gewählt hatten.

- b) Sei der magnetische Fluss zur Energie $E = 1/2$ der zugrunde liegende Fluss des Billards, so dass das zugehörige Billard $[M, B]$ vollständig, geodätisch konvex und ohne konjugierte Punkte ist. Der Rand N besitze die Einheitslänge $|N| = 1$. Dann heißt die Abbildung

$$\mathcal{MA}_B(N) : \mathbb{Q} \cap (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

die gegeben ist durch

$$\mathcal{MA}_B(N)(\theta) := \max_{s \in P_\theta} T_\theta(s)$$

das *markierte magnetische-Längenspektrum* von N . Das markierte magnetische-Längenspektrum gibt die maximale magnetische Länge geschlossener Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses auf M mit Rotationszahl θ an. Insbesondere gilt

$$A_{\min}(p/q) = -\frac{1}{q} \mathcal{MA}_B(N)(p/q)$$

Die Menge $\mathcal{A}_B(N)$, die durch

$$\mathcal{A}_B(N) := \left\{ n \cdot T_\theta(s) : n \in \mathbb{N}, s \in P_\theta, \theta \in \mathbb{Q} \cap (0, 1) \right\} \cup \mathbb{N}$$

definiert ist, heißt *magnetisches-Längenspektrum* von N . Das magnetische-Längenspektrum beinhaltet die Information über alle magnetischen Längen geschlossener Trajektorien des magnetischen Flusses auf M und deren Vielfachheiten, sowie denen des Randes.

- c) Sei der zugrunde liegende Fluss des Billards der magnetische Fluss zur Energie $E > 0$, so dass das zugehörige Billard $[M, \Omega_B]$ vollständig, geodätisch konvex und ohne konjugierte

Punkte ist. Der Rand N besitze die Energie $|N|_E = 1$. Insbesondere besitzt N dann die Länge $|N| = \frac{1}{E}$. Die Abbildung

$$\mathcal{M}\mathcal{A}_{\Omega_B}(N) : \mathbb{Q} \cap (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

die durch

$$\mathcal{M}\mathcal{A}_{\Omega_B}(N)(\theta) := \max_{s \in P_\theta} T_\theta(s)$$

gegeben ist, heißt das *markierte magnetische-Energiespektrum von N* und gibt die maximale magnetische Energie geschlossener Trajektorien des magnetisch-Lagrangeschen-Flusses auf M zur Energie E mit Rotationszahl θ an. Insbesondere gilt

$$A_{min}(p/q) = -\frac{1}{q} \mathcal{M}\mathcal{A}_{\Omega_B}(N)(p/q)$$

Die Menge $\mathcal{A}_{\Omega_B}(N)$, die durch

$$\mathcal{A}_{\Omega_B}(N) := \left\{ n \cdot T_\theta(s) : n \in \mathbb{N}, s \in P_\theta, \theta \in \mathbb{Q} \cap (0, 1) \right\} \cup \mathbb{N} \cdot |N|_E$$

definiert ist, heißt *magnetisches-Energiespektrum von N* . Das magnetische-Energiespektrum beinhaltet die Information über die magnetische Energie aller geschlossenen Trajektorien des magnetischen Flusses zur Energie E auf M und deren Vielfachheiten, sowie denen der magnetischen Energie des Randes.

Literaturverzeichnis

- [1] Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1978.
- [2] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [3] V. Bangert. Mather Sets for Twist Maps and Geodesics on Tori. In U. Kirchgraber and H.O. Walther, editors, *Dynamics Reported*, volume 1. John Wiley & Sons and B.G.Teubner, 1988.
- [4] D. Bao, S.-S. Chern, and Z. Shen. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Springer Verlag, 2000.
- [5] Marcel Berger. *Geometry II*. Springer-Verlag, 1987.
- [6] N. Berglund and H. Kunz. Integrability and Ergodicity of Classical Billiards in a Magnetic Field. *J. Statist. Phys.*, 83(1/2):81–126, 1996.
- [7] Nils Berglund. Classical Billiards in a Magnetic Field and a Potential. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 3:61 – 70, 2000.
- [8] Misha Bialy. *On Totally Integrable Magnetic Billiards on Constant Curvature Surface*, 08/2012. eprint arXiv:1208.2455.
- [9] Keith Burns and Gabriel P. Paternain. Anosov Magnetic Flows, Critical Values and Topological Entropy. *Nonlinearity* 15, pages 281 – 314, 2002.
- [10] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2001.
- [11] Manfredo Perdigao do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [12] G. Contreras and R. Iturriaga. *Global Minimizers of Autonomous Lagrangians*. 22 Coloquio Brasileiro de Matematica, IMPA, 1999.
- [13] G. Contreras, R. Iturriaga, G.P. Paternain, and M. Paternain. Lagrangian Graphs, Minimizing Measures and Mané’s Critical Values. *Geom. Funct. Anal.*, 8:788 – 809, 1998.
- [14] Gonzalo Contreras, Leonardo Macarini, and Gabriel P. Paternain. Periodic Orbits For Exact Magnetic Flows On Surfaces. *IMRN*, 8:361 – 387, 2004.

- [15] Matias Dahl. *An brief introduction to Finsler geometry*, 2006. www.math.aalto.fi/~fdahl/finsler/index.html (Stand Oktober 2015). Basierend auf Dahls Lizentiatsthe-
sis.
- [16] L.G.G.V. Dias da Silva and M.A.M. de Aguiar. Periodic orbits in magnetic billiards. *The European Physical Journal B*, 16:719 – 728, 2000.
- [17] Albert Fathi. *The Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics*. Cambridge Studies in
Advanced Mathematics, Cambridge Press, 2012. Preliminary Version 10 online verfügbar.
- [18] Norio Gouda. Magnetic Flows Of Anosov Type. *Tôhoku Math J.*, pages 165 – 183, 1997.
- [19] Boris Gutkin. Hyperbolic Magnetic Billiards on Surfaces of Constant Curvature. *Communi-
cations in Mathematical Physics*, 217:33 – 53, 2001.
- [20] Eugene Gutkin and Serge Tabachnikov. Billiards in Finsler and Minkowski geometries. *Journal of Geometry and Physics*, 40:277 – 301, 2002.
- [21] Helmut Hofer and Eduard Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*.
Birkhäuser Verlag, 1994.
- [22] C.G.J Jacobi and Eduard Lottner. *Gesammelte Werke, Vorlesungen über Dynamik*. Deutsche
Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1884. Online unter archive.org auffindbar.
- [23] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical
Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [24] Andreas Knauf. *Mathematische Physik: Klassische Mechanik*. Springer, 2012.
- [25] Andreas Knauf, Frank Schulz, and Karl Friedrich Siburg. Positive topological entropy for
multi-bump magnetic fields. *Nonlinearity*, 26:727 – 743, 2013.
- [26] J.C. Álvarez Paiva. Symplectic Geometry and Hilbert’s Fourth Problem. *Journal of Diffe-
rential Geometry*, 69(2):353 – 378, 2005.
- [27] J.C. Álvarez Paiva. Some Problems on Finsler Geometry. In *Handbook of Differential
Geometry*, volume 2. North Holland, 2006.
- [28] J.C. Álvarez Paiva and Carlos E. Durán. *An Introduction to Finsler Geometry*. Notas de la
Escuela Venezolana de Matemáticas, 1998.
- [29] J.N. Mather and G. Forni. Action minimizing Orbits in Hamiltonian Systems. In *Transition
to Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, 1994.
- [30] John N. Mather. Glancing billiards. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2:397 – 403,
1982.

- [31] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 1998.
- [32] O. Meplan, F. Brut, and C. Gignoux. Tangent map for classical billiards in magnetic fields. *J. Phys. A.*, 26:237 – 246, 1993.
- [33] J. Miranda. Positive topological entropy for magnetic flows on surfaces. *Nonlinearity*, 2007.
- [34] Jürgen Moser. *Selected Chapters in the Calculus of Variations, Lecture Notes by Oliver Knill*. Birkhäuser Verlag, 2003.
- [35] Jürgen Moser and Eduard J. Zehnder. *Notes on Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2005.
- [36] M. Robnik and M.V. Berry. Classical billiards in magnetic fields. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 18:1361 – 1378, 1985.
- [37] Zhongmin Shen. *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [38] Zhongmin Shen. *Lectures On Finsler Geometry*. World Scientific Publishing Co., 2001.
- [39] Karl Friedrich Siburg. Dynamical Systems Approach To Birkhoff's Theorem. *L'Enseignement Mathématique*, 44:291 – 303, 1998.
- [40] Karl Friedrich Siburg. *The Principle of Least Action in Geometry and Dynamics*. Springer, 2004.
- [41] K.F. Siburg and N. Peyerimhoff. The Dynamics Of Magnetic Flows For Energies Above Mané's Critical Value. *Israel Journal Of Mathematics* 135, pages 269–298, 2003.
- [42] Serge Tabachnikov. Billiards. *Société Mathématique de France*, 1995. Panoramas et Synthèses No. 1.
- [43] Serge Tabachnikov. Parameterized Plane Curves, Minkowski Caustics, Minkowski Vertices and Conservative Line Fields. *L'Enseignement Mathématique*, 43:3 – 26, 1997.
- [44] Serge Tabachnikov. Remarks on Magnetic Flows and Magnetic Billiards, Finsler Metrics and a Magnetic Analog of Hilbert's Fourth Problem. *Dynamical systems and related topics, Cambridge Univ. Press*, pages 233 – 252, 2004.
- [45] Serge Tabachnikov. *Geometry and Billiards*. American Mathematical Society, 2005.
- [46] Tamás Tasnádi. The behavior of nearby trajectories in magnetic billiards. *Journal Of Mathematical Physics*, 37(11):5577 – 5598, 1996.
- [47] Tamás Tasnádi. Hard chaos in magnetic billiards (on the hyperbolic plane). *Journal Of Mathematical Physics*, 39(7):3783 – 3804, 1998.