

Marcel KLINGER, Essen

Vorstellungsorientiertes Verständnis im Bereich des funktionalen Denkens und der frühen Analysis: Entwicklung und Erprobung eines Testinstruments

Im Rahmen des DZLM-Forschungsprojektes *GTR NRW* (Thurm, Klinger & Barzel 2015; Klinger, Thurm & Barzel 2015) sind zwei mathematische Leistungstests entstanden, welche vor allem das konzeptuelle Verständnis im Bereich des funktionalen Denkens und der frühen Differentialrechnung messen. Die sog. *FALKE-Messinstrumente* (**F**unktionales Denken und frühe **A**nalysis: **L**ernen von **K**onzepten in der **E**inführungsphase) fokussieren unterschiedliche Aspekte und wurden speziell für den Einsatz zu Beginn der Oberstufe (FALKE-T1) bzw. nach Ende des ersten Oberstufenjahres (FALKE-T2) entwickelt:

- FALKE-T1: Items zu linearen und nichtlinearen Zusammenhängen
- FALKE-T2: Items zur Ableitungsfunktion und zur Auswirkung unterschiedlicher Funktionsparameter (Skalierungen und Translationen)

1. Theoretischer Hintergrund

In der Literatur findet sich eine Vielzahl von Abhandlungen zur Klassifikation verschiedener Facetten von *Wissen* wie *deklaratives Wissen*, *prozedurales Wissen* oder *metakognitives Wissen* (z.B. Anderson 2013). Der Fokus der Tests liegt auf dem Wissensaspekt, der meist als *konzeptuelles Wissen* bezeichnet wird (z.B. Barzel et al. 2013). Tall & Vinnars (1981) Begriff des „concept image“ als „total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes“ steht für uns im Zentrum des konzeptuellen Wissens. Sie betonen, dass sich das concept image einer Person zu einem Begriff über Jahre entwickelt und einem ständigen Wandel durch neue Stimuli unterworfen ist (vgl. Tall & Vinner 1981). Insbesondere im deutschsprachigen Raum findet zudem die *Grundvorstellungstheorie* (z.B. vom Hofe 1995) Anwendung, welche Vorstellungen besonders im Kontext ihrer Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen betrachtet. Vom Hofe versteht *Grundvorstellungen* nicht nur in deskriptiver Weise auf der Ebene individueller Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern, sondern nutzt sie auch als normative didaktische Kategorien, welche sich aus einer stoffdidaktischen Analyse mathematischer Inhalte ergeben (vgl. vom Hofe 1995).

Im Bereich des Funktionalen Denkens hat sich so die Unterscheidung zwischen Vorstellungen etabliert, die funktionale Zusammenhänge in zuordnender, kovariater oder ganzheitlicher Weise betrachten (Vollrath 1989). Beim Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Ableitungskonzept wird meist zwischen der Vorstellung als lokale Änderungsrate, als lokale Approximation bzw. als Tangentensteigung unterschieden (z.B. Hußmann & Prediger 2010).

Für eine Testentwicklung ist es wichtig zu betrachten, welche Tätigkeiten bzw. Aufgabenmerkmale eine stark fortgeschrittene Konzeptualisierung im Bereich funktionaler Zusammenhänge bzw. der frühen Analysis voraussetzen. Exemplarisch seien in diesem Zusammenhang ein flexibles Umgehen mit verschiedenen Darstellungsformen wie Graph, Term oder einer situativ-verbale Beschreibung genannt (z.B. Duval 2006). Im Inhaltsbereich der Analysis sind außerdem das graphische Differenzieren (z.B. Ubuz 2007) sowie eine flexible Kenntnis über die Manipulation von Funktionen, z.B. durch Skalierungen und Translationen, und ihre Auswirkungen innerhalb der unterschiedlichen Darstellungsformen (z.B. auf Parameter innerhalb des Funktionsterms) relevant.

2. Entwickelte Instrumente

Im Rahmen der Testentwicklung wurden u.a. die oben beschriebenen Aufgabenmerkmale in neukonstruierten sowie adaptierten Items anderer Tests (z.B. den PISA-Studien) implementiert. Die entwickelten Instrumente wurden nach einer umfangreichen Pilotierungsphase im Rahmen von GTR NRW

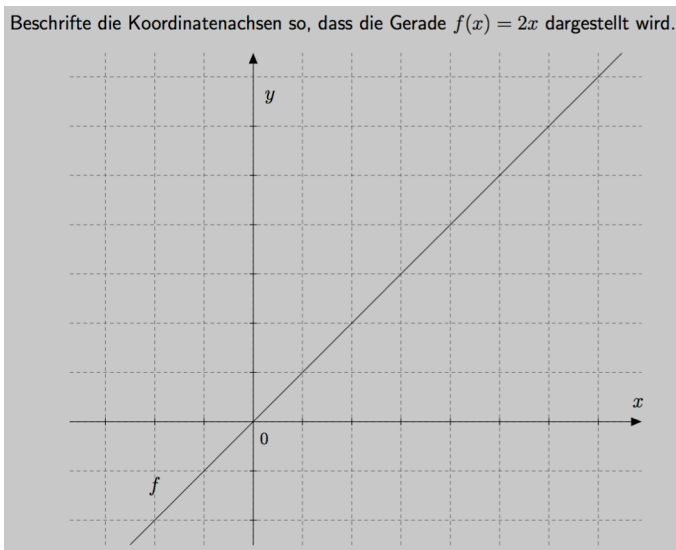


Abb. 1: Beispielitem des FALKE-T1

mit 3202 bzw. 2665 Schülerinnen und Schülern in Nordrhein-Westfalen durchgeführt.

Beide Tests lassen eine eindimensionale Rasch-Skalierung mit guter Modellgeltung zu. Die Einzelitems weisen z.T. sehr gute MNSQ-Fit-Werte nahe des Idealwerts 1,0 auf (vgl. Wright & Linacre 1994).

Ein Beispielitem des ersten FALKE-Tests ist in Abb. 1

zu sehen. Schülerinnen und Schüler werden hier mit der Situation konfrontiert, dass Abszisse und Ordinate des Koordinatensystems unterschiedliche Maßstäbe, d.h. eine unterschiedliche Skalierung, aufweisen. Von 2954 Schülerinnen und Schülern, die dieses Item bearbeitet haben, waren nur 52 Prozent in der Lage, eine passende Skalierung anzugeben. Es besteht somit der Verdacht, dass der Begriff des Koordinatensystems und somit zumindest

auch in Teilen die Darstellungsform „Graph“ bei den entsprechenden Testteilnehmern nicht hinreichend konzeptualisiert wurde. Dieses Ergebnis deckt sich mit den Forschungen von Mitchelmore & Cavanagh (2000), die bereits in qualitativen Studien gezeigt haben, dass Schülerinnen und Schüler ein meist nur unzureichendes Verständnis von Koordinatensystemen haben (vgl. Klinger & Thurm 2016). Es zeigt einen sehr guten Modellfit von 0,95 (unweighted) bzw. 0,96 (weighted).

Ein weiteres Beispielitem aus dem zweiten FALKE-Test ist in Abb. 2 dargestellt. Es zielt auf den Zusammenhang zwischen Translation der Stammfunktion in y-Richtung und der entsprechenden Beeinflussung der Ableitungsfunktion ab. Ob Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe korrekt bearbeiten, ist davon abhängig, ob sie ihre Vorstellungen zum Verschieben des Funktionsgraphen mit jenen zur Ableitungsfunktion verbinden können. 36 Prozent der Testteilnehmer lösten das

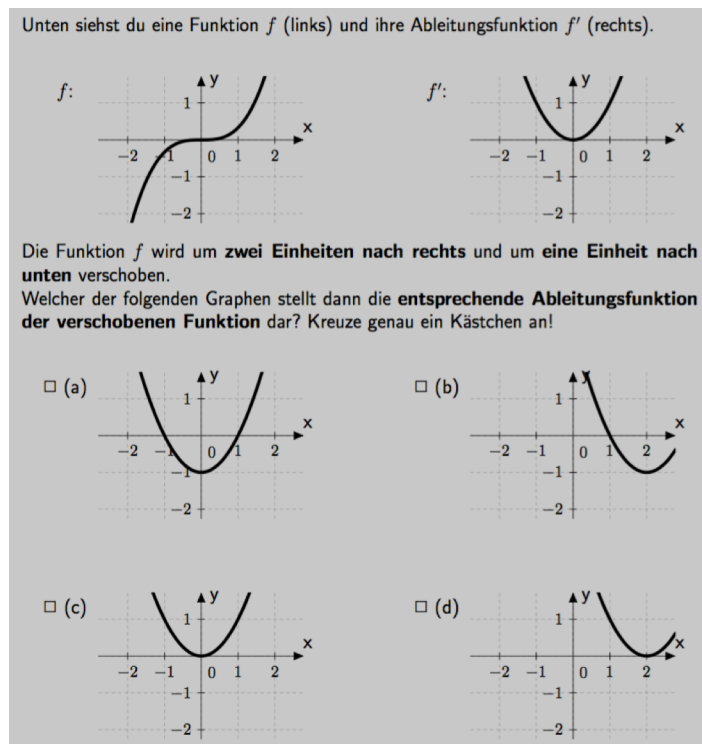


Abb. 2: Beispielitem des FALKE-T2

Item korrekt. Mit 54 Prozent ist Antwort (b) der stärkste Distraktor, bei dem die beschriebenen Verschiebungen unreflektiert auf den Ableitungsgraphen übertragen werden. Es weist einen sehr guten Modellfit von 1,05 (unweighted) bzw. 1,02 (weighted) auf.

In ähnlicher Form setzen auch die übrigen Items der Tests besonders auf konzeptuelle Zusammenhänge und die Notwendigkeit geeigneter Schülervorstellungen zur adäquaten Bearbeitung.

3. Reflexion und Ausblick

Insgesamt sind zwei solide Testinstrumente entstanden. Die Tests wurden in über 100 Kursen durchgeführt. Trotz zentraler Vorgaben muss die Durchführungsobjektivität daher kritisch betrachtet werden. Die Tests erscheinen nach umfangreichen Expertenbefragungen insgesamt inhaltsvalide, so dass eine erfolgreiche Bearbeitung auf tragfähiges konzeptuelles Wissen in den

entsprechenden Inhaltsbereichen schließen lässt. Die Testergebnisse lassen insgesamt eine gute Skalierung mit dem eindimensionalen Rasch-Modell zu.

Die Erhebungsdaten zeigen weiterhin typische als auch bisher weniger dokumentierte Schülerfehler. Aufgrund der großen Stichprobe kann auch auf ihre quantitative Verbreitung geschlossen werden. Diese Ergebnisse können Anknüpfungspunkte für weitere Forschungen sein.

Literatur

- Anderson, J. R. (2013). *Kognitive Psychologie* (7. Auflage). Berlin: Springer VS.
- Barzel, B., Leuders, T., Prediger, S. & Hußmann, S. (2013). Designing tasks for engaging students in active knowledge organization. In C. Margolinas et al. (Hrsg.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (S. 283–292). Oxford.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.
- Hußmann, S. & Prediger, S. (2010). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(31), 35–38.
- Klinger, M., & Thurm, D., & Barzel B. (2015). Evaluation der Rahmenbedingungen und Wirksamkeit einer DZLM-Fortbildungsreihe zum GTR auf Schülerebene. In F. Calori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (Bd. 1, S. 460–463). Münster: WTM-Verlag.
- Klinger, M. & Thurm, D. (2016, eingereicht). Zwei Graphen aber eine Funktion? – Konzeptuelles Verständnis von Koordinatensystemen mit digitalen Werkzeugen entwickeln.
- Mitchelmore, M. & Cavanagh, M. (2000). Students' difficulties in operating a graphics calculator. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3), 254–268.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Thurm, D., Klinger, M. & Barzel, B. (2015). How to professionalize teachers to use technology in a meaningful way – Design research of a CPD program. In N. Amado & S. Carreira (Hrsg.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (S. 335–343). Faro: University of Algarve.
- Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(5), 609–637.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.
- Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum: Heidelberg.
- Wright, B. D. & Linacre, J. M. (1994). Reasonable mean-square fit values. *Rasch Measurement Transactions*, 8(3), 370.