

Julian KRUMSDORF, Köln

Visual Proving

Wer vorher sah, weiß nunmehr, weise – dieser mehrdeutige Sinnspruch, in dem die etymologische Herkunft vom *(be)weisen* im lat. *videre* und altgrch. $(\varphi)\omicron\acute{\iota}\delta\alpha/\epsilon\acute{\iota}\delta\omega$ (respektive sanskr. *vēda*) aufscheint, lässt sich in gewisser Weise auch auf die (Vermittlung von) Mathematik als beweisender Disziplin beziehen. Welche Rolle spielt das Visuelle beim Beweisen als mathematischer Tätigkeit? Hanna & Sidoli (2007, 73ff.) interpretierend, lässt sich je nach Standpunkt ein Bild oder eine (visuelle) Repräsentation als optional, integral oder gar beweisconstituierend verstehen, während die Beweisführenden den Beweis als latente Sinnstruktur idealerweise allmählich und miteinander aushandelnd offenlegen. Dabei können sie ihren Beweis am Bilde, anhand der jeweiligen (visuellen) Repräsentation oder allgemeiner diagrammatisch gebunden führen, oder sich von einer solchen Darstellung lösen, diese ggf. wechseln und eine andere beziehen.

Nach Bemerkungen zu Visualisierung und Beweisen soll also deren Verbindung zu *visual proofs* der einschlägigen Literatur nach kurz skizziert werden. Versteht man zudem den Beweis als latente Sinnstruktur, wirft dies die Frage auf, in welcher Weise das Bild oder die jeweilige (visuelle) Repräsentation beim (beispielgebundenen) Beweisen fungiert. Wie kann diese den Beweisenden dienlich sein, um den Beweis subjektiv zu realisieren, dabei sprachlich auszuhandeln und zu manifestieren? Empirisch mag dies etwa durch ein Lehr-Lern-Experiment mit an Plättchenmustern agierenden und schließlich *modulo*-rechnenden Schülerpärchen der 4. Klasse untersucht werden.

1. Proof and Visualisation

An hauptsächlichen Beweisfunktionen nennt de Villiers (1990, 18f.) *verification*, *explanation*, *systematisation*, *discovery* und *communication*. Bell (1976, 24) bezeichnet den zweiten Aspekt noch als *illumination* und sieht die Vermittlung von Einsicht, warum eine Behauptung gilt, als Qualitätsmerkmal eines Beweises an. Mit Hanna (1989) gesprochen, handelt es sich primär also um den Unterschied zwischen *proofs that prove* und *proofs that explain*. Als Tätigkeit des *proving why* verlangt dies im Mathematikunterricht auch das Einbeziehen nicht-formeller Ausdrucksweisen im Beweisen durch die Lernenden. Hanna & Sidoli (2007, 73ff.) werfen die Schlüsselfrage auf, ob und inwieweit visuelle Repräsentationen beim Beweisen nicht nur Evidenz erzeugen, sondern auch selbst begründend wirken. Je nach Forschungsperspektive lässt sich ihrer Ausführung nach ein Bild oder eine (visuelle) Repräsentation als Beweiszugabe, Beweismittel oder Beweis selbst verstehen:

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Im ersten Fall trägt Visualisierung illustrativen Charakter, und der (zumeist formelle) Beweis steht für sich in eher verifikativer Funktion. Dass ein Bild kein Beweis sei, jenes zuweilen über diesen hinwegtäuscht oder auch stattdessen besonders haftend bleiben kann, lässt sich historisch wie auch subjektiv durchaus nachvollziehen. Kadunz (2010, 12f.) verweist in diesem Zusammenhang etwa auf Platons Dialoge und stellt dabei eine gewisse Reserve der älteren Philosophie gegenüber dem Betrachten von Bildern fest.

Nicht nur die neuere Verbreitung dynamischer Visualisierungswerkzeuge relativiert das verifikative Primat des Beweisens. Dem genannten Autorenduo nach sieht Giaquinto (1992, 389ff.) Visualisierung auch als innerlich vollzogenes Experiment, welches Beweisen konstruktiv ermöglicht und insofern mehr entdeckenden Charakter hat. Welche (visuelle) Repräsentation kann dabei aber als Beweismittel gewählt werden und Sinnstruktur aufdecken? Dies hängt wohl neben stofflichen Gegebenheiten auch vom Verlauf des Beweisprozesses ab – das jeweilige Bild oder die (visuelle) Repräsentation sollte nach eigener Auffassung manchen Beweisführenden die allgemeingültige Behauptung nämlich nicht nur (ggf. entdecken und) beispielhaft prüfen, sondern nach allem auch noch beweisen lassen. Bilder sind nach Kadunz (1998, 336) zudem nicht selbstevident, so dass der Lernende sie wie Veranschaulichungsmittel lesen, intern repräsentieren und erfolgreich verwenden lernen muss. Visualisierung lässt sich insofern als kognitive, zwischen wahrnehmbaren Objekten und internem Konstrukt vermittelnde Tätigkeit betrachten. Dabei leiste sie Kautschitsch (1994) zufolge eine „Rekonstruktion von Begriffs- und Operationssystemen“, knüpft also insbesondere an bereits vorhandenes Wissen an.

2. Visual Proofs

Dem Rahmen von Hanna & Sidoli (2007, 73ff.) weiter folgend, können visuelle Repräsentationen auch selbst beweiskonstituierend wirken. Man kann daher wohl sagen, dass sie gleichsam *visual proofs* im engeren Sinne bilden. Borwein & Jörgenson (2009) betonen, dass deren „successful visual representations tend to be spartan in their detail“. Nach Barwise & Etchemendy (1991, 180) steht der Beweisführende beim *diagrammatic reasoning* vor der Herausforderung, relevante implizite Strukturen explizit (auch digital) präsentierten Informationen zu entnehmen. Dies kann man auch als Versuch ansehen, den Beweis als latente Sinnstruktur vermöge der jeweiligen (visuellen) Repräsentation selbst zu entwickeln (oder vergleichsweise zu ersetzen, wie Brown (1999) mit seinen *picture-proofs*). Dem gegenüber fassen Pineda, Lee & Garza (2004) *diagrammatic proofs* als Transformationen von -prämissen und Beweiskonklusion repräsentierenden Diagrammen auf, wie sie eingangs am Beispiel des Satzes von Pythagoras zeigen.

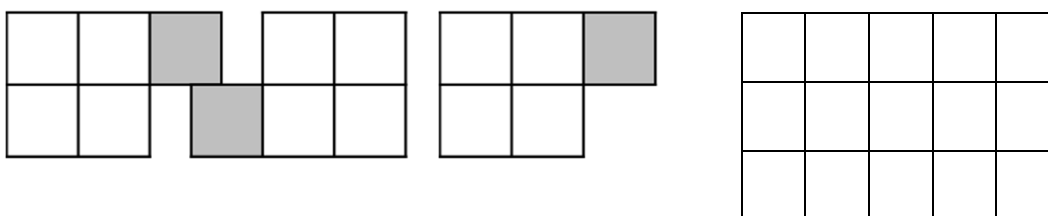
Nelsen (1993, vi) überrascht in seinem Buch *Proofs without Words* mit der Aussage, dass diese nicht wirklich Beweise seien, die angeführten *pictures or diagrams* aber explanativen Charakter trügen und beweisevozierend wirkten. Kirsh (2008, 5ff.) versucht *visual proofs* vermöge von (*conceptual*) *illustrations* zu charakterisieren: „Visual proofs are illustrations in which the solution to an abstract proposition can be 'readily' grasped by looking at the labels and properties in the illustration.“ Ein (*conceptual*) *illustration* soll dem Leser in der Betrachtung der *concrete instance* einer Aussage zu deren *universal generalization* verhelfen. Dies erinnert an die Untersuchungen von Balacheff (1988, 217ff.) und Mason & Pimm (1984, 287) zu *generic proofs*: Das dabei als Träger des Allgemeinen fungierende *generic example* kann vom jeweiligen Betrachter unterschiedlich gedeutet und damit versprachlicht werden. Nach Tall (1995, 31f.) enthalten *visual proofs* oft enaktive Elemente und wirken generisch bzw. prototypisch für eine Klasse von Behauptungen. Das Visuelle streifend, sprechen Neubrand & Möller (1990, 57) in der figuralen Arithmetik von einem *Beweisen durch Hinschauen*, während Wittmann & Müller (1988, 249) den Begriff vom *inhaltlich-anschaulichen Beweisen* geprägt haben. Wittmann & Ziegenbalg (2004, 37ff.) betonen das Moment der Versprachlichung in den sogenannten *operativen Beweisen*. Dreyfus (1991, 15) resümiert über *visual thinking*, dass dieses mit verbalem und algebraischem Denken gleichermaßen einhergehen müsse.

3. Latente Sinnstrukturen

Wie in Krumdorf (2015) über beispielgebundenes Beweisen ausführlich dargestellt, lässt sich ein Beweis als latente Struktur auffassen, die Lernende allmählich subjektiv realisieren, (ggf. gemeinschaftlich) aushandeln und manifestieren. Dabei referenziert der Oevermann & al. (1979) entlehnte Begriff der latenten Sinnstruktur auf den Forschungsgegenstand selbst; der Beweis ist vermöge Toulmin (1958) häufig als geschichtetes Argumentgefüge darstellbar. Für das *visual proving* im engeren Sinne bedeutet dies nach dem oben Gesagten, dass für einen (gelingenden) Beweisprozess die Art der visuellen Repräsentation respektive Diagrammatik entscheidend ist. Diese kann den (geschichteten) Beweis als latente Sinnstruktur (ent)bergen. Lernenden kann dabei die Entwicklung ihrer visuellen Strukturierungsfähigkeit zu Gute kommen. Da das Visuelle die latenten Sinnstrukturen umso mehr verdecken kann, als dies etwa beim Beweisen an arithmetischen Beispielen der Fall ist, dürfte eine größere Bandbreite an beobachtbaren Beweiswegen zu erwarten sein. Die jeweilige Repräsentation muss zudem ähnlich wie die fragliche Behauptung ggf. erst konstituiert und auf ihre Tauglichkeit hin geprüft werden, um Lernenden Erkenntniswege zum Latenten zu ebneten.

4. Lehr-Lern-Experiment

Mudaly (2013) untersucht die Frage „Is proving a visual act?“ durch 1:1-Interviews mit Schülern der Mittelstufe über eine ihnen unbekanntes, visuell lösbare Beweisaufgabe. Um dem kommunikativen Beweisaspekt gerechter zu werden, führte der Verfasser dieses laufenden Artikels mit Schülerpärchen der 4. Klasse vergleichbare Lehr-Lern-Experimente. Anders als Wittmann (2014, 214ff.), der operative Beweise zu (un)geraden Zahlen vermöge von Plättchenmustern bis zur 4. Klasse anbahnt, ist hier allgemeiner die visuell vorzunehmende Addition und Multiplikation mit Restklassen thematisiert worden (siehe Abbildungen). Eine erste Auswertung der eigenen Lehr-Lern-Experimente zeigte, dass es den Schülerpärchen durchaus gelingen kann, anhand von Plättchenmustern behauptete Rechengesetze im Zahlenbereich $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (für $n = 2, 3, 4, 5$) visuell zu begründen.



Ausgewählte Literatur

- Dreyfus, T. (1991): On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, 33 – 48.
- Giaquinto, M. (1992): Visualization as a means of geometrical discovery. *Mind and Language*, 7, 382 – 401.
- Hanna, G. & Sidoli, N. (2007): Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education* 39, 73 – 78.
- Kadunz, G. (1998): Bemerkungen zur Visualisierung. In: Neubrand, M. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, 335 – 338.
- Kautschitsch, H. (1994): „Neue“ Anschaulichkeit durch „neue“ Medien. In: *ZDM 1994* (3), 79 – 81.
- Kirsh, D. (2002): Why Illustrations aid understanding. *International Workshop on Dynamic Visualizations and Learning, Tübingen, Germany*.
- Krumsdorf, J. (2015): Beispielgebundenes Beweisen. Universität Münster.
- Mudaly, V. (2013): Is Proving a Visual Act? *Online Submission, Mevlana International Journal of Education (MIJE)* 3(3), 36 – 44.
- Pineda, L., Lee, J., & Garza, G. (2004): Abstraction, Visualisation And Graphical Proof.
- Tall, D. (1995): Cognitive development, representations and proof. *Proceedings of the conference Justifying and Proving in School Mathematics*, 27 – 38.
- Wittmann, E. Chr. (2014): Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica*, 37, 213 – 232.