

Untersuchungen zur Modellierung und numerischen Simulation des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken

Von der Fakultät Architektur und Bauingenieurwesen der
Technischen Universität Dortmund
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Simone Kattenstedt

Prüfungskommission:

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Franz-Joseph Barthold

1.Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Reinhard Maurer

2.Gutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Ulrich Häußler-Combe

Tag der mündlichen Prüfung: 16.06.2017

Dortmund 2017

Kurzfassung

Im Rahmen von Nachrechnungen alter Stahlbeton- und Spannbetonbrücken auf Grundlage der aktuellen Normen ergeben sich bei der Querkrafttragfähigkeit zum Teil erhebliche rechnerische Tragfähigkeitsdefizite. Diese Defizite sind allerdings kritisch zu hinterfragen, da die in den Normen verankerten Nachweisverfahren an vielen Stellen Idealisierungen und Vereinfachungen beinhalten bzw. nicht alle Einflüsse und Tragmechanismen berücksichtigen. Die vorliegenden Bemessungskonzepte zur Beurteilung der Tragfähigkeit unter Querkraftbeanspruchung basieren auf mechanischen Modellen, werden jedoch in unterschiedlichem Umfang mithilfe von empirisch ermittelten Parametern kalibriert, um eine bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen zu erreichen. Dennoch unterschätzen die Modelle die in Versuchen beobachtete Querkrafttragfähigkeit z.T. deutlich. Die nichtlineare Finite Elemente Methode bietet die Möglichkeit, das Querkrafttragverhalten von Stahl- und Spannbetonstrukturen genauer zu analysieren, Tragmechanismen zu identifizieren und aus den numerischen Simulationen Rückschlüsse auf das reale Tragverhalten zu ziehen. Derzeit existiert kein genaueres rechnerisches Verfahren zur Ermittlung der Querkrafttragfähigkeit.

Jedoch ist die Güte der Ergebnisse aufgrund des komplexen, ausgeprägt nichtlinearen Materialverhaltens des Werkstoffs Beton stark von der Modellierung, insbesondere von den gewählten Materialmodellen, abhängig. Zwar existieren zahlreiche Materialmodelle für Beton, die Kalibrierung erfolgt jedoch meist an Biegeversuchen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken auf der Basis von nichtlinearen numerischen Simulationen.

Zu diesem Zweck werden zunächst die Besonderheiten der Materialmodellierung für Beton vorgestellt und bewertet. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass neben der Wahl eines geeigneten Bruchkriteriums bei Simulationen von Stahlbetonstrukturen unter Querkraftbeanspruchung die Modellierung des Nachbruchverhaltens, d.h. die realistische Abbildung des Rissverhaltens und der damit verbundenen Anisotropie des Werkstoffs Beton, von besonderer Bedeutung ist. Im Gegensatz zu einer Biegebeanspruchung, bei der das Materialverhalten orthogonal zur Hauptzugspannungsrichtung die Tragfähigkeit kaum beeinflusst, sind die Auswirkungen der rissinduzierten Anisotropie bei einer Querkraftbeanspruchung traglastbestimmend. Eine Querkraftbeanspruchung führt zu einem gemischten mehrdimensionalen Hauptspannungszustand mit einer positiven Hauptspannung in einer Richtung und einer negativen orthogonal dazu. Real sinkt in Zugrichtung die Spannungsaufnahme mit zunehmenden Verzerrungen, bis keine Spannungen mehr übertragbar sind. Orthogonal dazu kann der Werkstoff jedoch weiterhin große Druckspannungen aufnehmen.

Es ist möglich, mithilfe eines isotropen Bruchkriteriums die Anisotropie in Bezug auf die unterschiedlichen Festigkeiten des Werkstoffs Beton in Zug- und Druckrichtung zu erfassen, die zutreffende Abbildung des unterschiedlichen Verhaltens in Zug- und Druckrichtung nach Erreichen der maximalen Zugspannung ist jedoch problematisch. Während bei isotropen Ansätzen eine Entfestigung in alle Richtungen auftritt, also eine Entfestigung in Zugrichtung auch eine Entfestigung in Druckrichtung mit sich bringt, sind bei orthotropen Modellen die Hauptrichtungen entkoppelt. Eine zu große Entfestigung im Druckbereich bei isotropen Modellen führt zu Problemen bei der realistischen Er-

fassung von Schubspannungszuständen in gerissenen Stahlbetonbalken. Die Ergebnisse dieser Arbeit deuten darauf hin, dass isotrope Materialmodelle für Beton Schwächen bei der realistischen Abbildung der Anisotropie unter Querkraftbeanspruchung aufweisen, sofern sich bei diesen nach Überschreitung der Zugfestigkeit eine Entfestigung anschließt, und orthotrope Modelle vermutlich besser für die Abbildung des Querkrafttragverhaltens in gerissenen Stahlbetonstrukturen geeignet sind.

Die Nachrechnungen von großmaßstäblichen Versuchen an Stahlbetonbalken mit Querkraftversagen unter Verwendung von vier verschiedenen Materialmodellen bestätigen im Grundsatz diese These. Der Fokus liegt hierbei auf Balken mit niedrigen Schubbewehrungsgraden, da die Abweichungen zwischen Versuchstraglast und rechnerischer Traglast hier am größten sind. Dies deutet darauf hin, dass die Tragmechanismen in den analytischen Modellen derzeit nicht genau genug erfasst werden. Bei den verwendeten Materialmodellen handelt es sich um zwei Modelle auf Basis der isotropen Plastizität sowie um zwei orthotrope Modelle. Die Ergebnisse mit dem isotropen Materialmodell *Concrete Damage Plasticity* (CDP), welches in ABAQUS implementiert ist, lassen deutliche Schwächen erkennen. Die Traglasten werden deutlich unterschätzt. Wie vermutet, erfolgt aufgrund des isotropen Ansatzes eine zu ausgeprägte Entfestigung der Elemente auf Druck im schubbeanspruchten Steg, die dazu führt, dass weder der Trag- noch der Versagensmechanismus zutreffend erfasst werden. Das im Versuch beobachtete fachwerkähnliche Tragverhalten kann sich nicht einstellen. Im Gegensatz dazu kann die rissinduzierte Anisotropie mit dem zweiten plastizitätstheoretischen Modell MCTC, das im Rahmen dieser Arbeit selbst entwickelt wurde, deutlich besser erfasst werden. Hierbei werden die Spannungs-Dehnungslinien im Zug- und Druckbereich elastisch-plastisch definiert und die Betonzugfestigkeit nahezu vernachlässigt. Aufgrund der fehlenden Entfestigung erfolgt keine Abminderung der Druckfestigkeit orthogonal zur Hauptzugspannungsrichtung. Es ist eine deutlich bessere Übereinstimmung der Traglasten und des grundsätzlichen Tragmechanismus mit den Versuchen festzustellen. Auch die beiden orthotrop definierten Modelle, das in ATENA implementierte Smeared Crack Modell SBETA sowie das an der EPFL Lausanne entwickelte Modell EPSF auf Basis der Elasto-plastischen Spannungsfeldmethode, weisen ein ähnliches Tragverhalten und eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den Versuchen auf.

Aus der Analyse des Modelltragverhaltens lassen sich Rückschlüsse für das reale Tragverhalten ziehen. Die Simulationen mit den Materialmodellen MCTC, SBETA sowie EPSF zeigen ein fachwerkähnliches Tragverhalten, das mit einer starken Rotation der Druckstreben im Zuge der Rissbildung einhergeht. Neben der Fachwerkwirkung lässt sich ein zusätzlicher Betontraganteil in Form einer Sprengwerk- oder Druckbogenwirkung beobachten. Ein geringerer Schubbewehrungsgrad bewirkt, dass die Sprengwerk- oder Druckbogenwirkung gegenüber der Fachwerkwirkung zunimmt. Es erfolgt ferner eine stärkere Rotation der Druckstreben bzw. die Risse werden flacher. Die Analyse der Nachrechnungen von Großversuchen deutet darauf hin, dass Stahlbetonbalken unter Querkraftbeanspruchung ein signifikantes Umlagerungsvermögen besitzen und der Tragmechanismus vom Schubbewehrungsgrad sowie der Höhe der Belastung abhängt.

Dem gegenüber zeigt ein beispielhafter Vergleich mit gängigen analytischen Modellen eine deutlich schlechtere Übereinstimmung mit den Versuchstraglasten. Hierbei nähert das Modell auf Basis der *Modified Compression Field Theory* die Traglasten am besten an. Die auf der klassischen Fachwerka-

analogie basierenden Modelle unterschätzen, bzw. die auf der reinen Plastizitätstheorie basierenden, überschätzen die Traglast deutlich. Weiterhin lassen die hier ermittelten Ergebnisse der numerischen Berechnungen vermuten, dass ein nennenswerter Traganteil über Rissreibung im Versagenszustand aufgrund der breiten Versagensrisse, über die kaum noch Schubkräfte bzw. Rissverzahnungskräfte übertragen werden können, nicht existiert.

Basierend auf den Erkenntnissen aus der Analyse der numerischen Simulationen sowie dem Vergleich mit gängigen analytischen Modellen wird ein eigenes Modell hergeleitet, das zusätzlich zu einer Fachwerkwirkung einen weiteren Betontraganteil in Form eines Sprengwerks bzw. einer Bogenwirkung enthält, das *Druckbogenmodell* (DBM). Es erweitert das Vereinfachte Druckbogenmodell, das die zusätzliche Querkraftkomponente V_{cc} als additiven Betontraganteil aus der Differenz der Größe und Höhenlage der Biegedruckkraft ermittelt, um den Einfluss der horizontalen Druckkraftkomponente aus den schrägen Betondruckstreben im Steg, und ist damit nicht nur für Spannbeton-, sondern auch für Stahlbetonstrukturen anwendbar.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Zielsetzung	2
1.3	Aufbau der Arbeit	3
2	Kontinuumsmechanische Grundlagen	5
2.1	Einleitung	5
2.2	Kinematik	5
2.2.1	Lage und Bewegung	6
2.2.2	Deformation und Verzerrung	7
2.3	Zeitliche Ableitungen	10
2.3.1	Materielle Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen	10
2.3.2	Materielle Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen	11
2.3.3	Zeitliche Ableitungen grundlegender kontinuumsmechanischer Größen	11
2.4	Spannungen und Verzerrungen	12
2.4.1	Herleitung der mechanischen Spannungen	12
2.4.2	Volumetrische und deviatorische Aufspaltung von Spannungen und Verzerrungen	14
2.4.3	Hauptachsentransformation und Invarianten von Tensoren	15
2.4.4	Invarianten der Spannungstensoren	16
2.4.5	Darstellung der Spannungen im Hauptspannungsraum	16
2.5	Mechanische Bilanzgleichungen	18
2.5.1	Massenerhaltung	19
2.5.2	Impulsbilanz	19
2.5.3	Drehimpulsbilanz	21
2.5.4	Erhaltungssatz der kinetischen Energie	22
2.6	Thermodynamische Bilanzgleichungen	24
2.6.1	1. Hauptsatz der Thermodynamik	24
2.6.2	2. Hauptsatz der Thermodynamik	25
3	Modellierung mit der Finite Elemente Methode	29
3.1	Einleitung	29
3.2	Grundlegende Aspekte der nichtlinearen FEM	30
3.2.1	Prinzip der virtuellen Arbeit	31
3.2.2	Lösungsalgorithmen	31

3.3	Elementwahl	34
3.3.1	Elementtyp	35
3.3.2	Elementformulierung	36
3.3.3	Schublocking	37
3.3.4	Anforderungen an die Modellierung von Stahlbetonstrukturen unter Schubbeanspruchung	38
4	Grundlagen der nichtlinearen Materialtheorie	39
4.1	Einleitung	39
4.1.1	Konstitutive Gleichungen	39
4.1.2	Isotropie und Anisotropie	41
4.2	Elastizitätstheorie	42
4.2.1	CAUCHY – Elastizität	43
4.2.2	Hyperelastizität	43
4.2.3	Hypoelastizität	47
4.2.4	Konzept der äquivalenten einaxialen Verzerrungen	48
4.3	Plastizitätstheorie für kleine Verzerrungen	50
4.3.1	Einführung	50
4.3.2	Allgemeines konstitutives Modell	51
4.3.3	Thermodynamische Herleitung des elasto-plastischen Materialgesetzes	52
4.3.4	Fließkriterium	54
4.3.5	Fließregel und Fließbedingung	56
4.3.6	Verfestigung	59
4.3.7	Return-Mapping-Algorithmus	61
4.4	Schädigungs- und Mikrorissstheorie	62
4.4.1	Isotrope Schädigung	64
4.4.2	Anisotrope Schädigung	64
5	Materialmodellierung von Beton und Stahlbeton	65
5.1	Einleitung	65
5.2	Materialverhalten von Beton	66
5.2.1	Einaxiales Betonverhalten	66
5.2.2	Zweiaxiales Betonverhalten	68
5.2.3	Dreiaxiales Betonverhalten	69
5.2.4	Belastungsinduzierte Anisotropie	70
5.3	Bruchhypothesen für Beton	71
5.3.1	Abgrenzung Bruch- und Fließhypothesen	71
5.3.2	DRUCKER-PRAGER-Kriterium	73
5.3.3	MOHR-COULOMB-Kriterium	73
5.3.4	Modifiziertes MOHR-COULOMB-Kriterium	77
5.3.5	Mehr-Parameter Modelle	79
5.3.6	Darstellung der Bruchkriterien in Koordinatenspannungen	85

5.4	Modellierung der Rissbildung von Beton	88
5.4.1	Einleitung	88
5.4.2	Kohäsive Rissmodelle	89
5.5	Rissmodellierung in der FEM	97
5.5.1	Allgemeines	97
5.5.2	Smearred Crack Modelle	99
5.5.3	Modelle auf Basis der Plastizitätstheorie	107
5.5.4	Modelle auf Basis der Schädigungstheorie	108
5.5.5	Microplane Theorie	108
5.6	Regularisierung und Lokalisierung	109
5.6.1	Regularisierung und Objektivität	109
5.6.2	Lokalisierung	112
5.7	Anforderungen an ein geeignetes Materialmodell für Beton	117
5.7.1	Allgemeines	117
5.7.2	Bruchkriterium	117
5.7.3	Modellierung des nichtlinearen Verhaltens von Beton	118
5.7.4	Abbildung der Anisotropie des Betons	119
5.8	Materialmodelle für Stahl	120
5.9	Modellierung von Stahlbeton	120
5.9.1	Berücksichtigung des Verbundes	120
5.9.2	Tension stiffening	121
5.9.3	Modellierung mit diskreter Bewehrung	122
5.9.4	Modellierung mit verschmierter Bewehrung	123
6	Vorstellung und Verifikation der verwendeten Materialmodelle für Beton und Stahlbeton	125
6.1	Einleitung	125
6.2	Plastisches Materialmodell CDP	126
6.2.1	Einleitung	126
6.2.2	Modellannahmen	126
6.2.3	Validierung durch Nachrechnung der Scheibenversuche von KUPFER	131
6.2.4	Einfluss des isotropen Ansatzes	133
6.3	Plastisches Materialmodell MOHR-COULOMB mit Tension Cut Off	138
6.3.1	Einleitung	138
6.3.2	Modellannahmen	138
6.3.3	Validierung durch Nachrechnung der Scheibenversuche von Kupfer	140
6.4	Zweidimensionales Smearred Crack Modell SBETA	142
6.4.1	Einleitung	142
6.4.2	Modellannahmen	142
6.4.3	Validierung durch Nachrechnung der Scheibenversuche von KUPFER	145
6.5	Modell auf Basis der Elasto-Plastischen Spannungsfeldmethode	146
6.5.1	Einleitung	146
6.5.2	Einführung in Spannungsfeldmodelle	146

6.5.3	Numerische Umsetzung der elasto-plastischen Spannungsfeldmethode (EPSF)	149
6.5.4	Validierung durch Nachrechnung der Scheibenversuche von KUPFER	150
7	Nachrechnung von Großversuchen unter Querkraftbeanspruchung	151
7.1	Einleitung	151
7.2	Vorstellung der betrachteten Versuchsserien	152
7.2.1	Versuchsserie 1: Plattenbalken ET2 & ET3 von LEONHARDT/WALTER	152
7.2.2	Versuchsserie 2: Plattenbalken TA11, TA12 & TA15 von LEONHARDT/WALTER	155
7.2.3	Untersuchte Parameter	158
7.3	Versuchsnachrechnungen mit dem Plastizitätsmodell CDP	159
7.3.1	Nachrechnung Versuchsserie 1	160
7.3.2	Nachrechnung Versuchsserie 2	169
7.3.3	Analyse des Materialmodells CDP	170
7.3.4	Bewertung des Materialmodells CDP	176
7.4	Versuchsnachrechnungen mit dem modifizierten MOHR-COULOMB-Modell (MCTC) .	177
7.4.1	Nachrechnung Versuchsserie 1	177
7.4.2	Nachrechnung Versuchsserie 2	184
7.4.3	Analyse und Bewertung des Materialmodells MCTC	190
7.4.4	Bewertung des Material-Modells MCTC	194
7.5	Versuchsnachrechnungen mit dem Smeared Crack Modell SBETA	195
7.5.1	Nachrechnung Versuchsserie 1	195
7.5.2	Nachrechnung Versuchsserie 2	201
7.5.3	Analyse und Bewertung des Materialmodells SBETA	208
7.6	Nachrechnung auf Basis der elastoplastischen Spannungsfeldmethode (EPSF)	210
7.6.1	Nachrechnung Versuchsserie 1	210
7.6.2	Nachrechnung Versuchsserie 2	213
7.6.3	Analyse und Bewertung des Modells „EPSF“	217
7.7	Vergleich der Versuchsnachrechnungen mit verschiedenen Materialmodellen	218
7.7.1	Vergleich der Traglasten bzw. der Querkrafttragfähigkeit	218
7.7.2	Vergleich der Last-Verformungskurven	219
7.7.3	Vergleich des Tragverhaltens	221
7.7.4	Vergleich des Druckstreben- bzw. Risswinkels	222
7.7.5	Fazit	222
7.8	Analyse des Modelltragverhaltens	223
7.8.1	Spannungsumlagerung und Rotation der Druckstrebe	223
7.8.2	Schubspannungsverteilung im gerissenen Beton	227
7.8.3	Verbindung zu Spannungsfeldmodellen	228
7.9	Erkenntnisse für das Querkrafttragverhalten von Stahlbetonbalken	230
8	Mechanisches Modell für die Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonbalken	233
8.1	Einleitung	233

8.2	Analyse und Vergleich der numerischen Ergebnisse mit analytischen Modellen	234
8.2.1	Vorstellung der analytischen Modelle	234
8.2.2	Analyse und Ergebnisvergleich für Balken ET2	235
8.2.3	Analyse und Bewertung der Ergebnisse der numerischen Simulation	239
8.3	Druckbogenmodell (DBM)	241
8.3.1	Traganteil aus Druckbogenwirkung - vereinfachter Ansatz	241
8.3.2	Traganteil aus Druckbogenwirkung - erweiterter Ansatz	242
8.3.3	Umsetzung im analytischen Modell - DBM	244
8.3.4	Bewertung und Fazit	250
9	Zusammenfassung und Ausblick	251
9.1	Zusammenfassung	251
9.2	Ausblick und Forschungsbedarf	256
	Literaturverzeichnis	257
	Tabellenverzeichnis	257
	Abbildungsverzeichnis	257
	Anhang	275
A	Kontinuumsmechanische Grundlagen	275
A.1	Eigenwertproblem	275
A.2	Plastizitätstheorie	276
A.2.1	Bestimmung des plastischen Multiplikators	276
A.2.2	Bestimmung der elasto-plastischen Tangente	276
B	Umrechnung von Materialkenngrößen	279
C	Versuchsnachrechnungen	281
C.1	Einzelresultate der Nachrechnung Versuchsserie 2 mit dem Materialmodell CDP . .	281
C.1.1	Ergebnisse TA11	281
C.1.2	Ergebnisse TA12	283
C.1.3	Ergebnisse TA15	285

Abkürzungsverzeichnis

CDP	Concrete Damaged Plasticity
DBM	Druckbogenmodell
EPSF	Elasto-Plastische Spannungsfeldtheorie
ESZ	Ebener Spannungszustand
MCFT	Modified Compression Field Theory
MCTC	MOHR-COULOMB-Modell mit Tension Cut Off
OFCM	Orthogonal Fixed Crack Model
RCM	Rotating Crack Model
RPZ	Rissprozesszone
SBETA	Smearred Crack Modell, implementiert in ATENA
VDBM	Vereinfachtes Druckbogenmodell
VSF	Verallgemeinerten Spannungsfeldmodelle

Lateinische Buchstaben

E_d	verringertes Elastizitätsmodul infolge einer Schädigung
E_s	E-Modul Betonstahl
E	Elastizitätsmodul
E	Gesamtenergie
E	Kompressionsmodul
$F_{ch,M+V}$	gesamte horizontale Druckkraftresultierende des parallelgurtigen Fachwerks
F_{cuv}	Vertikalkomponente der Betondruckstrebe
F_c	Biegedruckkraft des parallelgurtigen Fachwerks
$F_{s,M+V}$	gesamte horizontale Zugkraftresultierende des parallelgurtigen Fachwerks
$F_{u,FEM}$	Bruchlast aus der numerischen Simulation
$F_{u,test}$	reale Bruchlast aus Versuch
F	Kraft, (Trag-)Last
G_F	Bruchenergie
G_{f0}	Grundwert der Bruchenergie
G	Schubmodul
I_1	1. Spannungsinvariante
J_1	2. Invariante des Spannungsdeviators
J_1	3. Invariante des Spannungsdeviators
K	kinetischen Energie
R	Residuum, schwache Form der Gleichgewichts
S	Entropie
U	innere Energie
$V_{Rs,m}$	Querkrafttraganteil aus der Bügelbewehrung
V_{cc}	Vertikalkomponente des geneigten Biegedruckgurtes
$V_{u,FEM}$	Bruchquerkraft aus FEM-Simulation
$V_{u,calc}$	rechnerisch ermittelte Bruchquerkraft
$V_{u,test}$	reale Bruchquerkraft aus Versuch
V	Querkraft
\mathbb{C}_d	Vierstufiger Materialtensor im geschädigten Zustand
\mathbb{C}_{ec}	Tangentialer Risssteifigkeitstensor
\mathbb{C}	Vierstufiger Materialtensor
\dot{A}	Rate der äußeren mechanischen Arbeit
\dot{Q}	von außen zugeführte Wärmemenge
\dot{W}	Rate der inneren mechanischen Arbeit

$\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_t$	Referenzkonfiguration, aktuelle Konfiguration
\mathbf{C}_{ec}	Tangentiale Risssteifigkeitsmatrix
\mathbf{C}	Matrixdarstellung des vierstufigen Materialtensors
\mathbf{E}	GREENScher Verzerrungstensor
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{H}	allgemeiner Verfestigungsmodul
\mathbf{I}	Impuls
\mathbf{I}	Einheitstensor 2. Stufe
\mathbf{K}	Tangentiale Steifigkeitsmatrix
\mathbf{L}	Drehimpuls
\mathbf{P}	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
\mathbf{Q}	acoustic tensor
\mathbf{R}	Rotationstensor
\mathbf{S}	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
\mathbf{T}_{cf}	Transformationsmatrix Fixed Crack Modell
\mathbf{T}_{cr}	Transformationsmatrix Rotated Crack Modell
\mathbf{T}	CAUCHYScher Spannungstensor
\mathbf{e}^c	Rissverzerrungsvektor
\mathbf{g}	Fließregel
\mathbf{n}, \mathbf{N}	Normalenvektor in der aktuellen bzw. Referenzkonfiguration
\mathbf{q}	interne thermodynamische Variable, spannungsäquivalent
\mathbf{q}	äußere Wärmefluss
\mathbf{s}	Spannungsdeviator
\mathbf{t}^c	Rissspannungsvektor
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\mathbf{x}, \mathbf{X}	Ortsvektor in aktueller bzw. Referenzposition
$\bar{\mathbf{b}}$	massenbezogene Beschleunigung
$\bar{\mathbf{t}}$	eingeprägte Spannung
b_w	Rissbandbreite
b_w	Stegbreite
c	Kohäsion
da, dA	aktuelle Fläche, Referenzfläche
dv, dV	ktuelles Volumen, Referenzvolumen
f_y	Festigkeit Betonstahl
f_y	Streckgrenze Betonstahl
f_{1c}	einaxiale Betondruckfestigkeit
f_{ck}	charakteristische Betondruckfestigkeit (Zylinder)
f_{cm}	mittlere Betondruckfestigkeit (Zylinder)
f_{ct}	Betonzugfestigkeit
f_{cw}	Stegdruckfestigkeit
l_{char}	charakteristische Probenlänge, (Materialparameter)

l_{ch}	charakteristische Elementlänge
l_{krit}	kritische Probenlänge
m	Masse
p	hydrostatischer Druck
r	innere Wärmequelle
t, t_0	aktuelle Zeit, Referenzzeitpunkt
u	innere Energiedichtefunktion
v_{cru}	bezogener Querkrafttraganteil aus Rissreibung
$v_{u,Test}$	dimensionslose Bruchquerkraft
w^p	plastische dissipierte Arbeit
w_c	kritische Rissöffnung
w	Rissweite
z_{M+V}	Hebelarm der horizontalen Gesamtergebnis
z	innerer Hebelarm

Griechische Buchstaben

β_r	Risswinkel
η	massenspezifische Entropiedichte
λ	Konsistenzparameter, plastischer Multiplikator
Φ	Fließ- bzw. Bruchkriterium
Ψ	plastisches Potential bzw. Fließpotential
ν	Querdehnzahl
ω_w	mechanischer Schubbewehrungsgrad
ω	Schädigungsvariable
ϕ	innerer Reibungswinkel
ψ	Dilatanzwinkel
ψ	Neigung der Bogens, ermittelt aus dem Verlauf der horizontalen resultierenden Gesamtdruckkraft
ψ	HELMHOLTZsche Energiefunktion
ρ_l	geometrischer Längsbewehrungsgrad
ρ_w	geometrischer Schubbewehrungsgrad
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
τ_{max}	maximale Schubspannung
κ	Verfestigungsvariable
ε^c	Rissverzerrungstensor
ε^e	elastischer Anteil der Verzerrung
ε^p	plastischer Anteil der Verzerrung
ε^{dev}	deviatorischer Anteil der Verzerrung
ε^{vol}	volumetrischer Anteil der Verzerrung
ε	Linearer Verzerrungstensor
σ	Spannungstensor der linearen Theorie
θ	Hauptspannungswinkel
$\tilde{\varepsilon}_c$	einaxiale Druckfließspannung
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Hauptverzerrungen
ε_{cr}	kritische Rissdehnung
ε_{cu}	Bruchstauchung
ε_c	Rissdehnung
ε_{iu}	äquivalente einaxiale Verzerrung
ϑ	modellimmanenter Reibungswinkel

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Das Tragverhalten von Stahl- und Spannbetonbalken unter Schubbeanspruchung mit und ohne Querkraftbewehrung ist seit Jahrzehnten Gegenstand der Forschung. Für die Bemessung von Neubauten liegen in den verschiedenen internationalen Normen unterschiedliche Bemessungskonzepte vor, die zu einer sicheren Bemessung der Bauteile führen.

Im Rahmen von Nachrechnungen alter Stahlbeton- und Spannbetonbrücken auf Grundlage der aktuellen Normen ergeben sich jedoch bei der Querkrafttragfähigkeit zum Teil erhebliche rechnerische Tragfähigkeitsdefizite. Diese Defizite sind allerdings kritisch zu hinterfragen. Die Nachweisverfahren beinhalten an vielen Stellen Idealisierungen und Vereinfachungen, da sie nicht nur zu einer sicheren Bemessung führen, sondern gleichzeitig auch in der Anwendung einfach handhabbar sein sollen. Ferner berücksichtigen sie nicht alle Einflüsse und Tragmechanismen. Daher sind die vereinfachten Nachweisverfahren im EUROCODE 2 besonders bei Querkraft und Torsion teilweise sehr konservativ, auch im Vergleich zu älteren Normen. Vergleiche mit Versuchsergebnissen zeigen für diese ebenfalls höhere Tragfähigkeiten als mit den Handrechenverfahren ermittelt. Weiterhin wurde trotz rechnerischer Tragfähigkeitsdefizite bisher kein Querkraftversagen bei bestehenden Brücken beobachtet. Die vorliegenden Bemessungskonzepte zur Beurteilung der Tragfähigkeit unter Schubbeanspruchung basieren auf mechanischen Modellen, werden jedoch in unterschiedlichem Umfang mithilfe von empirisch ermittelten Parametern kalibriert, um eine bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen zu erreichen. Dennoch unterschätzen die Modelle die in Versuchen beobachtete Querkrafttragfähigkeit z.T. deutlich, insbesondere bei Spannbetonbalken mit niedrigen Bewehrungsgraden, vgl. [88], [36].

Vor diesem Hintergrund rückt die nichtlineare Finite Elemente Methode (FEM) als Instrument zur Ermittlung der Traglast und Analyse des Tragverhaltens verstärkt in den Fokus. Sie bietet die Möglichkeit, das nichtlineare Materialverhalten von Beton realitätsnah abzubilden und Tragfähigkeiten auf Systemebene zu bestimmen. Derzeit existiert kein genaueres rechnerisches Verfahren zur Ermittlung der Querkrafttragfähigkeit. Aus diesem Grund ist die Möglichkeit der Nutzung nichtlinearer FE-Methoden in Deutschland auch im Rahmen von Nachrechnungen nach Stufe 4 der Nachrechnungsrichtlinie [4] verankert. Im Gegensatz zur physikalischen Wirklichkeit des realen Versuchs stellt die nichtlineare Finite Elemente Methode eine Approximation dar, jedoch ist der Umfang der zu analysierenden Größen im Versuch eingeschränkt, z.B. auf die Messung der Bügelspannungen oder

Betondehnungen an diskreten Punkten. Demgegenüber lassen sich mithilfe der nichtlinearen Finite Elemente Methode weitere Größen untersuchen, die Aufschluss über das Querkrafttragverhalten geben können, wie z.B. den Verlauf der inneren Kräfte in Form von Druckspannungstrajektorien sowie dessen Veränderung im Belastungsfortschritt.

Jedoch ist die Güte der Ergebnisse stark von der Modellierung und insbesondere von den gewählten Materialmodellen abhängig. Der Komplexität des Schubtragverhaltens im Vergleich zum Biegetragverhalten muss auch bei der Anwendung der nichtlinearen FEM Rechnung getragen werden. Während das Biegetragverhalten gut mit der nichtlinearen FEM abgebildet werden kann, konnte u.a. durch ein Forschungsprojekt an der TU Dortmund gezeigt werden, dass die Ergebnisse für die Schubtragfähigkeit stark abhängig vom verwendeten Materialmodell sind, vgl [69]. Ursache hierfür ist der mehrdimensionale gemischte Spannungszustand bei Schubproblemen in Kombination mit der spannungsinduzierten Anisotropie des Werkstoffes Beton. Daher ist die Modellierung der Rissbildung und der daraus resultierenden Anisotropie des Werkstoffes Beton insbesondere bei Querkraftbeanspruchung von großer Bedeutung. Erste Ergebnisse legen nahe, dass isotrope Formulierungen für Materialmodelle, z. B. im Rahmen der klassischen isotropen Plastizitäts- oder auch der Schädigungstheorie, Schwächen bei der Abbildung von Schubspannungszuständen in gerissenem Beton, aufweisen. Bevor die nichtlineare FEM zur Beurteilung des Querkrafttragverhaltens herangezogen werden kann, ist es erforderlich, die Methode selbst, speziell die Materialmodellierung, auf ihre Eignung für die vorgesehene Aufgabenstellung zu untersuchen.

1.2 Zielsetzung

Das Ziel der Arbeit besteht darin, das Potential der nichtlinearen FEM zur realitätsnahen Abbildung des Querkrafttragverhaltens und Ermittlung der Traglast zu untersuchen sowie zu einem besseren Verständnis des Querkrafttragverhaltens beizutragen.

Ein Schwerpunkt der Arbeit liegt hierbei auf der Analyse der Methode selbst, insbesondere der Materialmodellierung. Das Tragverhalten des Werkstoffes Beton ist äußerst komplex und die numerische Umsetzung dieses Verhaltens in ein konstitutives Gesetz besitzt einen sehr großen, wenn nicht den größten Einfluss auf die Ergebnisse von Nachrechnungen mit der nichtlinearen FEM. Daher soll herausgearbeitet werden, welche Materialmodellierung für die Abbildung des Querkrafttragverhaltens geeignet ist und aus welchem Grund sich bestimmte Materialmodelle besser eignen als andere. Der Fokus soll im Rahmen dieser Arbeit auf Stahlbeton- und nicht auf Spannbetonstrukturen liegen, da der Einfluss des Materialmodells für Beton grundsätzlich analysiert und der Effekt der Vorspannung als Einflussgröße auf das Tragverhalten zunächst eliminiert werden soll.

Es soll die These belegt werden, dass Materialmodelle basierend auf der klassischen isotropen Plastizitätstheorie für die Abbildung des Querkrafttragverhaltens in gerissenen Stahlbetonbauteilen nur bedingt geeignet sind, da sie aufgrund ihres isotropen Entfestigungsverhaltens das tatsächlich anisotrope Verhalten von gerissenem Beton nicht zutreffend abbilden können.

Zu diesem Zweck sollen numerische Simulationen von Großversuchen an Stahlbetonbalken mit Schubversagen mit verschiedenen nichtlinearen Materialmodellen sowie Strukturmodellierungen durchgeführt werden. Neben dem Vergleich der Traglasten sollen weitere Parameter zur Beur-

teilung der Güte der Simulationsergebnisse herangezogen werden. Daher werden zusätzlich die Last-Verformungskurven, Versagsmodi sowie Druckspannungstrajektorien und Rissbilder verglichen.

Aus den Ergebnissen der FEM-Simulationen sollen die Tragmechanismen des FE-Modells identifiziert und ein Erkenntnisgewinn für das Tragverhalten realer Bauteile gezogen werden. Daher wird untersucht, inwieweit das Tragverhalten des Modells mit dem Tragverhalten in der physikalische Realität übereinstimmt, bzw. inwieweit Abweichungen begründbar und ggf. tolerierbar sind. Dabei wird auch beleuchtet, welche realen Effekte im Modell berücksichtigt werden und welchen Einfluss die Modellierung auf die Ergebnisse hat.

Im Anschluss sollen die Ergebnisse der Simulationen mit der nichtlinearen FEM dahingehend analysiert werden, inwieweit sich Übereinstimmungen oder Abweichungen mit Annahmen der analytischen Modelle beobachten lassen, beispielsweise, welcher Druckstrebenwinkel sich einstellt, ob eine Rotation der Druckstrebe beobachtet werden kann, ob ein nennenswerter Anteil der Querkraft über einen Betontraganteil der ungerissenen Druckzone übertragen werden kann oder ob sich eine Druckbogen- bzw. Strebenwirkung zusätzlich zur Fachwerkwirkung einstellt.

Schlussendlich sollen die gewonnenen Erkenntnisse zur Beurteilung der Querkrafttragmechanismen genutzt werden und aufbauend auf den Erkenntnissen ein eigenes Rechenmodell zur Beurteilung der Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonbalken entwickelt werden. Ziel ist es also, aus dem Modelltragverhalten in den numerischen Simulationen Rückschlüsse auf das reale Tragverhalten zu ziehen, Tragmechanismen zu identifizieren und mithilfe der gewonnen Erkenntnisse die derzeitigen Bemessungskonzepte genauer zu beurteilen und ggf. durch Weiterentwicklungen zu verbessern.

1.3 Aufbau der Arbeit

Da ein Schwerpunkt der Arbeit die Analyse der Materialmodellierung für Stahlbeton unter Schubbeanspruchung ist, erfolgt im zweiten Kapitel ein kurzer Überblick über die kontinuumsmechanischen Grundlagen. Diese bilden die Basis für die Aufarbeitung der Materialtheorie. Anschließend wird kurz auf die im Rahmen dieser Arbeit wichtigsten Elemente der nichtlinearen FEM eingegangen.

Im vierten Kapitel werden die Grundlagen der kontinuumsmechanischen Materialtheorie, insbesondere die Abbildung von nichtlinearem Materialverhalten theoretisch aufgearbeitet und analysiert, bevor im Anschluss die Übertragung auf die Werkstoffe Beton und Stahlbeton erfolgt.

Dies geschieht im fünften Kapitel, welches sich der Materialmodellierung von Beton und Stahlbeton widmet. Zunächst wird das reale Materialverhalten des Werkstoff Betons beschrieben, das von den konstitutiven Gesetzen möglichst realitätsnah wiedergegeben werden muss. Im Anschluss werden gängige Materialmodelle für Beton vorgestellt und analysiert. Es werden dabei betonspezifische Besonderheiten wie die Wahl des Versagenskriteriums, die Modellierung der Rissbildung sowie die spannungsinduzierte Anisotropie des Werkstoffs beleuchtet. Ferner wird auf die Modellierung von Stahl sowie die Modellierung des Werkstoffes Stahlbeton als Verbundwerkstoff eingegangen.

Nach der theoretischen Analyse der Materialmodellierung von Beton und Stahlbeton werden in Kapitel 6 vier bzw. fünf verschiedene Materialmodelle vorgestellt und deren spezifische Grundlagen

verglichen. Es werden zwei Modelle auf Basis der klassischen isotropen Plastizität in Kombination mit einer dreidimensionalen Strukturmodellierung sowie zwei anisotrope Materialmodelle untersucht, die lediglich mit einer zweidimensionalen Strukturmodellierung angewandt werden können.

Zunächst wird das isotrope elasto-plastische Schädigungsmodell *Concrete Damaged Plasticity* vorgestellt, das im Programmsystem ABAQUS zur Verfügung steht und vielfach im Rahmen der Forschung für Simulationen von Beton- und Stahl- bzw. Spannbetonstrukturen zum Einsatz kommt. Im Rahmen dieser Arbeit wird ferner ein plastisches Materialmodell auf Basis eines MOHR-COULOMB-Versagenskriteriums mit Tension Cut Off selbst entwickelt. Obwohl dieses Modell ebenfalls auf Basis der isotropen Plastizität formuliert ist, ist es aufgrund dieser Modifikationen in der Lage, die spannungsinduzierte Anisotropie von Beton abzubilden.

Bei den anisotropen Materialmodellen wird ein klassisches anisotropes Smeared Crack Modell untersucht, das im Programm ATENA implementiert ist und sowohl mit fester als auch rotierender Rissneigung verwendet werden kann. Ferner wird ein Programm der EPFL Lausanne vorgestellt, das auf der elasto-plastischen Spannungsfeld-Methode basiert und die Abbildung der Anisotropie des Betons über die Vernachlässigung der Querdehnzahl und Entkopplung der Hauptrichtungen erreicht. Die Analyse erfolgt bei allen Modellen neben dem Vergleich der theoretischen Grundlagen durch die Auswertung von Nachrechnungen an Kleinteilversuchen wie den KUPFER-Versuchen.

Aufbauend auf den Erkenntnissen aus dem sechsten Kapitel werden in Kapitel 7 die Auswirkungen der Materialmodellierung auf das Querkrafttragverhalten durch Nachrechnungen von fünf Großversuchen herausgearbeitet. Die Nachrechnung der komplexen Großversuche ist von entscheidender Bedeutung, da Phänomene wie Spannungsumlagerungen o.ä. bei den Kleinteilversuchen nicht beobachtet werden können. Die Ergebnisse der Simulationen mit den unterschiedlichen Materialmodellen werden im Hinblick auf die Traglast, Versagensart, Lastverformungskurven, Rissbilder sowie Verzerrungs- und Spannungstrajektorien miteinander verglichen und den Ergebnissen aus den Versuchen gegenüber gestellt. Hierbei soll gezeigt werden, welche Modelle am besten geeignet sind, um das Querkrafttragverhalten von Stahlbetonbalken abzubilden. Es wird hierbei ferner untersucht, inwieweit in Versuchen beobachtete Phänomene auch im numerischen Modell erkennbar sind. Anschließend erfolgt ein Vergleich der numerischen Modellierung mit analytischen Modellen.

Basierend auf den Beobachtungen wird in Kapitel 8 ein eigenes Berechnungsmodell, das der Fachwerkwirkung einen zusätzlichen Betontraganteil in Form einer Sprengwerk- bzw. Bogentragwirkung überlagert, entwickelt und vorgestellt.

Kapitel 2

Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die mathematische und numerische Beschreibung des mechanischen Werkstoffverhaltens erfolgt auf der Grundlage der Kontinuumsmechanik und der Materialtheorie. Um im Rahmen dieser Arbeit verbreitete Materialtheorien für den Werkstoff Beton und Stahlbeton analysieren sowie ihre Güte bewerten zu können, werden im Folgenden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik und der Materialtheorien kurz aufgearbeitet. Die Ausführungen orientieren sich im Wesentlichen an anerkannter Fachliteratur, vgl. [95], [43], [5], [6].

2.1 Einleitung

Die Kontinuumsmechanik bildet zusammen mit der Materialtheorie die Grundlage für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Werkstoffen. Hierbei wird ausgehend von beobachteten Phänomenen und experimentellen Ergebnissen an makroskopischen Objekten wie Materialproben oder Bauteilen ein mathematisches Modell für das mechanisch-thermodynamische Verhalten eines deformierbaren Körpers erstellt [95]. Die reale Struktur wird als materielles Punktkontinuum idealisiert. In der Regel erfolgt diese Idealisierung ohne Rückgriff auf die mikroskopische Struktur, es wird lediglich das makroskopische Verhalten phänomenologisch beschrieben. Mithilfe der Kontinuumsmechanik werden Lage und Bewegung, also die Kinematik des materiellen Körpers beschrieben. Hieraus lässt sich ein Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Verzerrungen herstellen und damit die Deformation eines Körpers charakterisieren. Über die Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik werden weiterhin Gleichgewichtsbedingungen formuliert und Spannungstensoren definiert. Sowohl die Kinematik als auch die Gleichgewichtsbedingungen sind stoffunabhängig und allgemeingültig. Die Übertragung auf konkrete Materialien erfolgt mithilfe der thermodynamischen Grundsätze und Energieprinzipien im Rahmen der Materialtheorie.

2.2 Kinematik

Die kinematischen Grundlagen der Kontinuumsmechanik umfassen die Beschreibung der Deformation eines Körpers sowie die Angabe von Verzerrungsmaßen und zeitlichen Ableitungen kinematischer Größen. Diese Beziehungen werden später sowohl in der konstitutiven Beschreibung als auch bei der Formulierung der Bilanzgleichungen und der schwachen Formen benötigt.

2.2.1 Lage und Bewegung

Zunächst werden Lage und Bewegung eines materiellen Punktes mathematisch ein-eindeutig geklärt. Für die Beschreibung der kinematischen Vorgänge sind einige Definitionen erforderlich, die im Folgenden kurz zusammengefasst werden.

Materieller Körper Der materielle Körper \mathcal{B} der Kontinuumsmechanik wird als zusammenhängende Menge materieller Punkte \mathcal{M} definiert. Ihm wird als eine grundlegende Eigenschaft die Masse m als Integral der Dichte ρ über das Volumen V zugewiesen:

$$m(t) = \int_V \rho dV \quad (2.1)$$

Weiterhin wird der Körper als *homogen* vorausgesetzt, d.h. alle materiellen Punkte haben unter den gleichen Bedingungen die gleichen physikalischen Eigenschaften. Im Rahmen der *deterministischen Theorie* wird angenommen, dass jeder materielle Punkt \mathcal{M} zu jedem Zeitpunkt t eindeutig identifizierbar ist, d.h. die materiellen Punkte werden als unabhängige, stets vorhandene und eindeutig definierte Variablen betrachtet. Zunächst wird der Begriff des *Euklidischen Punktraums* \mathcal{E}_t definiert, der alle materiellen Punkte umfasst, jedoch noch keine Aussage zur Beschreibung von Lage und Bewegung materieller Körper erlaubt. Dies geschieht durch die Wahl eines raumfesten Ursprungs oder Bezugspunktes O , die den euklidischen Punktraum in einen Euklidischen Vektorraum \mathbb{E}^3 überführt, in dem jeder Punkt P durch einen Ortsvektor \mathbf{x} ausgedrückt werden kann. Als Basissystem wird hier nun ein *kartesisches Koordinatensystem* verwendet:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

Neben dem räumlichen Bezugssystem wird über die Berücksichtigung der Zeit t als skalare Größe auch ein zeitlicher Bezugsrahmen geschaffen. Die Bewegung eines materiellen Punktes kann so in Abhängigkeit von Zeit und Ort definiert werden.

Konfiguration Die Zuordnung der materiellen Punkte \mathcal{M} des Körpers \mathcal{B} zu den Raumpunkten P des *euklidischen Vektorraums* \mathbb{R}^3 wird als *Konfiguration* des Körpers \mathcal{B} bezeichnet und erfolgt mithilfe der *bijektiven* Abbildung χ :

$$\chi := \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathcal{M}, t) & \mapsto \mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t) \end{cases}$$

Somit ergibt sich:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t) \quad (2.3)$$

Die Position des Körpers zum festen Referenzzeitpunkt t_0 wird als *materielle* oder *Referenzkonfiguration* \mathbf{B}_0 bezeichnet. Die Lage eines Punktes P ist durch den Ortsvektor \mathbf{X} eindeutig bestimmt:

$$\mathbf{X} = \chi(\mathcal{M}, t_0) =: \chi_0(\mathcal{M}) \quad (2.4)$$

Daneben wird die Lage \mathbf{B}_t zum aktuellen Zeitpunkt $t > t_0$ als *räumliche* oder *Momentankonfiguration* definiert und mit dem Vektor \mathbf{x} gekennzeichnet:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathcal{M}, t) =: \chi_t(\mathcal{M}) \quad (2.5)$$

Die Beschreibung der Bewegung eines Punktes des Körpers \mathcal{M} von der Referenzkonfiguration \mathbf{B}_0 hin zur aktuellen Konfiguration \mathbf{B}_t lässt sich mathematisch wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{x} = \chi_t(\mathcal{M}) = \chi_t[\chi_0^{-1}(\mathbf{x})] = [\chi_t \circ \chi_0^{-1}] =: \Phi_{t,t_0}(\mathbf{X}) \quad (2.6)$$

Kontinuumsmechanische Größen, wie Bewegungen oder Deformationen, können grundsätzlich entweder in der *LAGRANGESchen Betrachtungsweise* oder in der *EULERSchen Betrachtungsweise* ausgedrückt und von der einen in die andere Darstellung überführt werden.

Lagrangesche Betrachtungsweise Die Bewegung eines materiellen Punktes sowie die Veränderung seiner Eigenschaften werden hierbei in Abhängigkeit der Koordinaten \mathbf{X} der Referenzkonfiguration \mathbf{B}_0 beschrieben. Die Position eines bestimmten materiellen Punktes des Körpers im Raum ist zu jeder Zeit bekannt. Diese Darstellung wird üblicherweise in der Festkörpermechanik verwendet.

Eulersche Betrachtungsweise Hierbei wird ein bestimmter fester Punkt \mathbf{x} abhängig von der Momentankonfiguration \mathbf{B}_t im Raum beobachtet und die Eigenschaften der an diesem Punkt im Laufe der Zeit vorbeiziehenden materiellen Punkte gemessen. Die Lage eines bestimmten Punktes des Körpers ist hierbei nicht mehr bekannt. Diese Darstellung wird in der Regel in der Fluidmechanik verwendet, ist jedoch z.B. auch für die Beschreibung großer Deformationen geeignet.

2.2.2 Deformation und Verzerrung

Die zuvor hergeleiteten Beziehungen zur Beschreibung der Lage und Bewegung eines materiellen Körpers werden im Folgenden zur Darstellung von Deformationen und Verzerrungen herangezogen. Diese Darstellung ist rein geometrisch motiviert und lässt zunächst keine Rückschlüsse auf die Kräfte, die derartige Verzerrungen hervorrufen, oder die Materialeigenschaften des Körpers zu. Abbildung 2.1 verdeutlicht die Vorgehensweise.

Der Punkt P_1 in der Referenzkonfiguration \mathbf{B}_0 , gekennzeichnet durch den Ortsvektor \mathbf{X} , verschiebt sich um das Maß \mathbf{u} in die aktuelle Konfiguration \mathbf{B}_t mit P'_1 . Die Lage des Punktes P'_1 ist durch den Ortsvektor \mathbf{x} bestimmt, der sich auch wie folgt darstellen lässt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (2.7)$$

Deformationsgradient Neben der Verschiebung \mathbf{u} erfährt der Körper Deformationen, d.h. Veränderungen in Form und Größe des materiellen Körpers. Dies lässt sich mit der Transformation eines Linienelementes $d\mathbf{X}$ beschreiben. Das infinitesimale Linienelement $d\mathbf{X}$, das auch als Tangentenvektor im Punkt P in der Referenzkonfiguration gedeutet werden kann, verzerrt sich im Rahmen der Deformation und befindet sich in der Momentankonfiguration an einer neuen Position mit einer veränderten Länge. Mathematisch kann diese Veränderung mithilfe einer linearen Abbildung

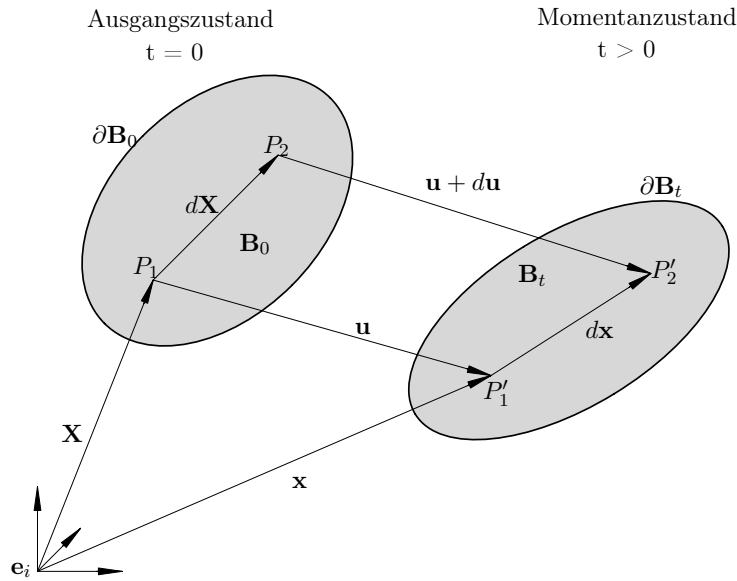


Abbildung 2.1: Deformation eines Körpers

beschrieben werden. Es wird der unsymmetrische Deformationsgradient \mathbf{F} eingeführt, der das zunächst unverformte Linienelement $d\mathbf{X}$ in der Referenzkonfiguration auf das verzerre Linienelement $d\mathbf{x}$ im Punkt P' in der Momentankonfiguration abbildet:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.8)$$

Mathematisch lässt sich die Abbildung mittels des totalen Differentials von $d\mathbf{x}$ unter Berücksichtigung von

$$\text{Grad}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial\mathbf{X}} \quad (2.9)$$

folgendermaßen motivieren:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot d\mathbf{X} = \text{Grad } \mathbf{x} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.10)$$

Damit ist der Deformationsgradient \mathbf{F} wie folgt definiert:

$$\mathbf{F} := \text{Grad } \mathbf{x} \quad (2.11)$$

Die Beschreibung der Deformation eines Linienelementes mithilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} umfasst sowohl translatorische als auch rotatorische Anteile. Der Deformationsgradient ist im Allgemeinen ein unsymmetrischer Tensor. Treten allerdings keine Starrkörperbewegungen auf, geht der Deformationsgradient in einen Verzerrungstensor über und ist dann symmetrisch, vgl.[5].

Transporttheoreme Neben der Überführung eines Linienelements $d\mathbf{X}$ von der Referenzkonfiguration zu $d\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration mithilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} ist es erforderlich,

auch Flächen- und Volumenelemente von der Referenz- in die Momentankonfiguration zu überführen. Ohne weiteren Nachweis seien hier die fehlenden Transporttheoreme angeführt. Die Transformation eines Volumenelementes erfolgt mithilfe der sogenannten JACOBI-Determinante J zu:

$$dv = J dV \quad \text{mit} \quad J = \det \mathbf{F}. \quad (2.12)$$

Mit der Forderung $\det \mathbf{F} > 0$ wird gewährleistet, dass das Volumen weder verschwindet, noch eine Selbstdurchdringung erfolgt. Für die Transformation eines vektoriellen Flächenelements $d\mathbf{A} = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$ gilt:

$$da = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad (2.13)$$

Verzerrungsmaße Für ein Verzerrungsmaß ist der Deformationsgradient nicht unmittelbar geeignet, da er wie erwähnt auch Starrkörperanteile enthält. Das Konzept der Verzerrung beschreibt die Veränderung der Form und Größe eines materiellen Körpers bei einer Deformation, die im Rahmen der Materialtheorie mit den Spannungen in Verbindung gesetzt werden kann. Sowohl bei einer Starrkörperverschiebung als auch bei einer Starrkörperrotation ist \mathbf{F} nicht Null, wie es definitionsgemäß sein sollte, da eine alleinige Änderung der Lage eines Körpers nicht zu Verzerrungen führen soll. Ferner ist der Deformationsgradient \mathbf{F} richtungsabhängig (zur Begründung s. [95]) und nicht symmetrisch, was für die numerische Behandlung kontinuumsmechanischer Probleme von Nachteil ist. Aus diesen Gründen werden weitere Verzerrungsmaße eingeführt. Es existieren verschiedene Verzerrungsmaße in Form von zweistufigen Tensoren, deren Ziel es ist, die Veränderung von Form und Größe materieller Elemente zu bestimmen.

Greenscher Verzerrungstensor Als Grundlage für die Herleitung des GREENSchen Verzerrungstensors wird die Differenz der Quadrate der Linienelemente ds im verformten und dS im unverformten Zustand herangezogen, die sich aufgrund ihrer Richtungsunabhängigkeit und Invarianz gegenüber Starrkörperdrehungen als objektives Verzerrungsmaß sehr gut eignet:

$$\begin{aligned} (ds^2) - (dS^2) &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Hierbei bezeichnet

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.15)$$

den *Rechts-CAUCHY-GREEN Tensor*. Der zweistufige Tensor \mathbf{C} eignet sich aufgrund seiner Invarianz in Bezug auf Starrkörperbewegungen prinzipiell zur Beschreibung von Verzerrungen. Allerdings geht er im unverformten Zustand in den Identitätstensor \mathbf{I} über. Aus diesem Grund wird der *GREENSche Verzerrungstensor* \mathbf{E} eingeführt:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.16)$$

Sowohl \mathbf{C} als auch \mathbf{E} beziehen sich auf die Referenzkonfiguration und sind symmetrisch. Für die Lösung von Gleichungssystemen mit numerischen Verfahren wird der GREENSche Verzerrungstensor in linearisierter Form benötigt. Mit dem Verschiebungsgradienten $\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}$ gilt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \text{Grad } \mathbf{x} = \text{Grad } \mathbf{X} + \text{Grad } \mathbf{u} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad (2.17)$$

Mit Hilfe dieser Identität folgt für den GREENSchen Verzerrungstensor:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.18)$$

Für kleine Verzerrungen $\mathbf{H} \ll 1$ kann der nichtlineare Anteil von \mathbf{E} vernachlässigt werden. Der lineare Anteil des GREENSchen Verzerrungstensors, auch linearer Verzerrungstensor genannt, ist demnach:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}_{lin} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (2.19)$$

Dies entspricht dem symmetrischen Anteil von \mathbf{H} mit:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \text{Grad}_{\text{sym}} \mathbf{u}. \quad (2.20)$$

Der lineare Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ spielt eine wichtige Rolle in der geometrisch linearen Elastizitätstheorie, auf die im Weiteren noch eingegangen wird. Im Gegensatz zum Deformationsgradienten \mathbf{F} stehen der nichtlineare GREENSche Verzerrungstensor \mathbf{E} wie auch der lineare Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ in der Referenzkonfiguration, d.h. sie beziehen sich auf die unverformte Ausgangslage.

2.3 Zeitliche Ableitungen

Für die Herleitung der mechanischen Bilanzgleichungen sowie im Rahmen der nichtlinearen Materialtheorie werden die zeitlichen Ableitungen kontinuumsmechanischer Größen benötigt, da die Materialgesetze z.T. in Ratenform definiert werden. Allgemein muss auch hier unterschieden werden, ob sich die betrachtete Größe in der Referenzkonfiguration oder in der aktuellen Konfiguration befindet.

2.3.1 Materielle Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen

Sei Ψ eine skalare, stetig differenzierbare Funktion, die bestimmte Eigenschaften eines materiellen Punktes \mathcal{M} in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt, z.B. ein Temperaturfeld. Diese muss sowohl in räumlichen als auch materiellen Koordinaten darstellbar sein. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \Psi &= \hat{\Psi}(\mathbf{X}, t, t_0) && \text{für die materielle Darstellung} \\ \Psi &= \hat{\Psi}^*(\mathbf{x}, t) && \text{für die räumliche Darstellung} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die *materielle Zeitableitung* $\frac{D(\bullet)}{Dt}$ beschreibt die zeitliche Änderung der physikalischen Größe Ψ eines beliebigen, nun aber festgehaltenen Punktes \mathcal{M} , für den \mathbf{X} konstant ist.

Materielle Darstellung Da die Funktion Ψ nur von t abhängig ist bei konstantem \mathbf{X} , entspricht die materielle Zeitableitung der partiellen Ableitung von Ψ nach t :

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\Psi}(\mathbf{X}, t + \Delta t, t_0) - \hat{\Psi}(\mathbf{X}, t, t_0)}{\Delta t} = \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{X}, t, t_0)}{\partial t} = \dot{\Psi}_X(t) \quad (2.22)$$

Da die Referenzkonfiguration unabhängig von der Zeit ist, bzw. unabhängig davon, welcher Zeitpunkt im weiteren Verlauf betrachtet wird, geht die totale Zeitableitung $\frac{D\Psi}{Dt}$ in LAGRANGEScher Betrachtungsweise in eine partielle über. Da diese Eigenschaft nur bei einer materiellen Betrachtung gegeben ist, wird sie auch materielle Zeitableitung genannt.

Räumliche Darstellung In der räumlichen Darstellung ist neben der Funktion Ψ der Vektor \mathbf{x} ebenfalls von der Zeit abhängig. Die materielle Ableitung ergibt sich daher zu:

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\Psi}^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \hat{\Psi}^*(\mathbf{x}(t), t)}{\Delta t} = \frac{\partial \hat{\Psi}^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\Psi}^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t}$$

Hier wurde mit der Kettenregel differenziert. Mit

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \hat{\Psi}^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} = \text{grad } \Psi$$

lässt sich die räumliche Zeitableitung auch wie folgt ausdrücken:

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \text{grad } \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.23)$$

2.3.2 Materielle Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen

Analog zum vorherigen Abschnitt erhält man die materiellen Zeitableitungen der vektoriellen Feldgrößen, z.B. einem Geschwindigkeitsfeld, $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t, t_0)$ in materieller bzw. $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}^*(\mathbf{x}, t)$ in räumlicher Darstellung.

Materielle Darstellung Für die materielle Darstellung folgt:

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t, t_0)}{\partial t} = \dot{\mathbf{f}}_X(t) \quad (2.24)$$

Räumliche Darstellung Die materielle Ableitung einer vektoriellen Feldgröße in räumlicher Darstellung ergibt sich unter Verwendung der Kettenregel zu:

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^*(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \quad (2.25)$$

2.3.3 Zeitliche Ableitungen grundlegender kontinuumsmechanischer Größen

Mit den zuvor hergeleiteten Beziehungen lassen sich die zeitlichen Ableitungen kontinuumsmechanischer Größen angeben.

Für die Verzerrungsraten des linearen Verzerrungstensors folgt:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \lim_{\Delta t} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t + \Delta t) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \quad (2.26)$$

Der *räumliche Geschwindigkeitsgradient* ergibt sich zu:

$$\mathbf{l} := \text{grad } \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{d\mathbf{x}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{d\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (2.27)$$

Der *räumliche Verzerrungsgeschwindigkeitstensor* entspricht dem symmetrischen Anteil von \mathbf{l} :

$$\mathbf{d} := \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (2.28)$$

Die zeitlichen Ableitungen der geometrischen Größen werden im Folgenden zusammengefasst dargestellt, vgl.[95]:

Zeitliche Ableitung von \mathbf{x}

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{F}d\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad (2.29)$$

Zeitliche Ableitung des Linienelementes $d\mathbf{x}$

$$\frac{D(d\mathbf{x})}{Dt} = \overline{\dot{(d\mathbf{x})}} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{l} d\mathbf{x} \quad (2.30)$$

Zeitliche Ableitung des Flächenelementes da

$$\frac{D(da)}{Dt} = \overline{\dot{(da)}} = ((\text{tr } \mathbf{d})\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) da \quad (2.31)$$

Zeitliche Ableitung des Volumenelementes dv

$$\frac{D(dv)}{Dt} = \overline{\dot{(dv)}} = \text{div } \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.32)$$

Zeitliche Ableitung der Jacobi Determinante $J = \det \mathbf{F}$

$$\dot{J} = \overline{\dot{(\det \mathbf{F})}} = \text{div } \dot{\mathbf{x}}(\det \mathbf{F}) \quad (2.33)$$

2.4 Spannungen und Verzerrungen

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Kinematik von Bewegung und Deformation eines materiellen Körpers kurz diskutiert. Im Folgenden wird das Konzept der Spannungen vorgestellt. Mit Hilfe des Spannungsbegriffs lässt sich zusätzlich zu globalen Kräftegleichgewichtsbedingungen, die in Abschnitt 2.5 mithilfe der Bilanzgleichungen hergeleitet werden, eine lokale Gleichgewichtsbedingung in jedem materiellen Punkt formulieren. Die Spannung wird als Maß für die Beanspruchung in einem materiellen Punkt im Inneren des Körpers infolge äußerer Krafteinwirkungen definiert.

Den Zugang zu den inneren Kräften im mechanisch beanspruchten kontinuierlichen Körper erhält man mit dem EULERSchen Schnittprinzip mittels gedachter Schnitte durch den materiellen Körper \mathcal{B} . Hieraus wird die lokale mechanische Beanspruchung eines Punktes \mathbf{x} des materiellen Körpers in der Form des von CAUCHY eingeführten Spannungstensors \mathbf{T} hergeleitet.

2.4.1 Herleitung der mechanischen Spannungen

In der Momentankonfiguration wirken am deformierten Körper Spannungen, die als Kraft pro Fläche definiert werden und die inneren Kräfte eines materiellen Körpers beschreiben. Die *Spannung* \mathbf{t} als lokale mechanische Beanspruchung in einem Punkt \mathbf{x} der Schnittfläche wird als Grenzwert

$$\mathbf{t} =: \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (2.34)$$

definiert. Die Fläche da wird in der Momentankonfiguration durch ihre Tangentialebene, d.h. ihren Normalenvektor \mathbf{n} bzw. die Fläche dA in der Referenzkonfiguration durch den Normalenvektor \mathbf{N}

charakterisiert. Nach der Einführung des Spannungsvektors \mathbf{t} in einem Punkt \mathbf{x} der Schnittfläche S wird das CAUCHY-Postulat vereinbart: In beliebigen stetigen Flächen, die im Punkt P die gleiche Tangentialebene besitzen, wirkt der gleiche Spannungsvektor \mathbf{t} bezüglich des Flächenelementes da :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \quad (2.35)$$

Um ein Maß für die Beanspruchung eines Körpers zu erhalten, welches unabhängig von der Schnitt- richtung ist, wird der CAUCHYsche Spannungstensor \mathbf{T} eingeführt, der eine Beziehung zwischen dem Normalenvektor \mathbf{n} und dem Spannungsvektor \mathbf{t} herstellt:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad (2.36)$$

Am frei geschnittenen Teilkörper ∂B_t^* korrespondieren die Spannungen zu den eingprägten Ober-

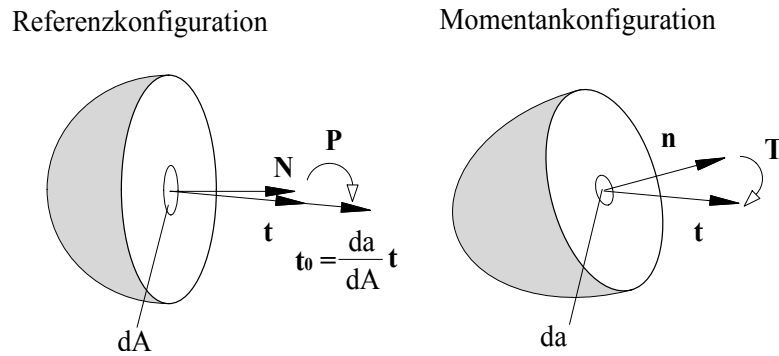


Abbildung 2.2: Spannungen in der Referenz- und der Momentankonfiguration

flächenkräften, was unter Berücksichtigung des CAUCHY-Theorems auf folgenden Ausdruck für die resultierende Kraft führt:

$$\mathbf{F} = \int_{\partial B_t^*} \bar{\mathbf{t}} da = \int_{\partial B_t^*} \mathbf{T} \mathbf{n} da \quad (2.37)$$

Unter Anwendung des Transporttheorems für Flächenelemente ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Spannungen in der Referenz- und der Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\partial B_t^*} \mathbf{T} \mathbf{n} da = \int_{\partial B_t^*} \mathbf{T} d\mathbf{a} \\ &= \int_{\partial B_0^*} \mathbf{T} \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} = \int_{\partial B_0^*} \det \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA = \int_{\partial B_0^*} \mathbf{P} \mathbf{N} dA \end{aligned} \quad (2.38)$$

Der so eingeführte zweistufige Tensor \mathbf{P} wird als erster PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor bezeichnet und ist ein Maß für die Beanspruchung mit Bezug auf das Referenzgebiet, d.h. mit Bezug auf die undeformierte Fläche dA .

Bei der Betrachtung der Drehimpulsbilanz wird sich im Folgenden der CAUCHYsche Spannungstensor \mathbf{T} als symmetrisch herausstellen. Diese mathematisch vorteilhafte Eigenschaft geht durch die

Transformation zu \mathbf{P} allerdings verloren (s.[43], S. 113). Um dennoch eine symmetrische Rechengröße zu erhalten, wird der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \mathbf{S} eingeführt:

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.39)$$

Dieser bezieht sich wie der erste PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \mathbf{P} auf die Referenzkonfiguration und ist symmetrisch. Er stellt eine reine Rechengröße dar, dessen Koeffizienten nicht mehr ohne weiteres interpretiert werden können. Zusammengefasst erhält man folgende Spannungstensoren:

- \mathbf{T} CAUCHY-Spannungstensor
- \mathbf{P} 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
- \mathbf{S} 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

2.4.2 Volumetrische und deviatorische Aufspaltung von Spannungen und Verzerrungen

Für die Formulierung der Materialgesetze kann es sinnvoll sein, sowohl bei den Spannungen als auch bei den Verzerrungen eine additive Zerlegung in eine volumetrische und eine deviatorische Komponente vorzunehmen. Für die Zerlegung des GREENSchen Verzerrungstensors ergibt sich:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^K + \mathbf{E}^D \quad (2.40)$$

Der *Kugeltensor* \mathbf{E}^K ist dabei folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{E}^K := \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} = \frac{1}{3}(E_{11} + E_{22} + E_{33})\mathbf{I} \quad (2.41)$$

und führt in Koeffizientendarstellung auf folgenden Ausdruck:

$$E_{ij}^K = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\text{tr } E) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\text{tr } E) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\text{tr } E) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(E_{11} + E_{22} + E_{33}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Kugeltensor beschreibt eine gleichmäßige Volumendehnung, da nur die Hauptdiagonalen besetzt sind. Die Deformation kann als eine Abbildung einer Kugel in der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration verstanden werden, die lediglich aus einer Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Radius resultiert. Der deviatorische Verzerrungsanteil ergibt sich definitionsgemäß zu:

$$\mathbf{E}^D := \mathbf{E} - \mathbf{E}^K = \mathbf{E} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} \quad (2.42)$$

Die hierbei auftretende Deformation entspricht einer reinen Gestaltänderung. Für die Spannungen lassen sich dieselben Definitionen vornehmen. Der hydrostatische Druck p entspricht dem volumetrischen Anteil der Spannungen:

$$p = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T} = \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.43)$$

mit I_1 als erster Invarianten des Spannungstensors, s. folgender Abschnitt. Für den Deviator ergibt sich:

$$\mathbf{s} = \mathbf{T} - p : \mathbf{I} \quad (2.44)$$

Ausgeschrieben:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{21} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = s_{ij} = \begin{bmatrix} (T_{11} - p) & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & (T_{22} - p) & s_{21} \\ s_{31} & s_{32} & (T_{33} - p) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{21} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = s_{ij} = \begin{bmatrix} (T_{11} - p) & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & (T_{22} - p) & T_{21} \\ T_{31} & T_{32} & (T_{33} - p) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

2.4.3 Hauptachsentransformation und Invarianten von Tensoren

Die Möglichkeit der Hauptachsentransformation und die Invariantendarstellung von Tensoren lässt sich im Rahmen der Kontinuumsmechanik und Materialtheorie dazu nutzen, mathematische Modelle einfacher zu formulieren oder Zusammenhänge anschaulicher darzustellen. Beispielsweise werden bei der Plastizitätstheorie Fließbedingungen oftmals im Hauptspannungsraum definiert, was den Vorteil bietet, dass die Fließbedingung anschaulich in einem dreidimensionalen Raum gedeutet werden kann. Auch im Zusammenhang mit den Materialtheorien werden Invariantendarstellungen von bestimmten Größe oder ihre spektrale Zerlegung verwendet. Daher wird im Folgenden kurz in die grundlegenden Aspekte der Hauptachsentransformation eingeführt, bevor im Anschluss die Spannungen in Invarianten dargestellt werden.

Es lässt sich zeigen, dass jeder symmetrische und reellwertige Tensor 2. Stufe im dreidimensionalen Raum drei orthogonale Hauptachsenrichtungen und drei reelle Eigenwerte besitzt. Damit ist der Tensor *diagonalähnlich* und seine *Spektralzerlegung* existiert eindeutig, vgl.[9], [95].

Die skalaren Größen λ_i werden als *Eigenwerte* eines Tensors \mathbf{A} bezeichnet, wenn dazu korrespondierende, orthonormale *Eigenvektoren* $\hat{\mathbf{n}}_i \neq 0$ existieren, so dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{n}}_i = \lambda_i\hat{\mathbf{n}}_i \quad i=1,2,3; \text{ keine Summation} \quad (2.47)$$

Zur Verdeutlichung, dass es sich bei $\hat{\mathbf{n}}_i$ um die Eigenvektoren des Tensors handelt, werden die Vektoren mit einem Dach gekennzeichnet. Die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{n}}_i \neq 0$ werden auch als *Hauptrichtungen* oder *Hauptachsen* bezeichnet. Damit wird die Bedeutung schon implizit klar: Mithilfe der Eigenwerte und -vektoren kann der Tensor so transformiert werden, dass als neues Basissystem die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{n}}_i$ (die Hauptachsen) dienen und die zugehörige Matrix der Eigenwerte auf der Diagonalen die skalaren Vielfache λ_i dieser Eigenvektoren enthält. Es handelt sich noch immer um denselben Tensor \mathbf{A} , lediglich in einem anderen Bezugssystem. Die Eigenwerte sind eine physikalische Größe des Tensors und unabhängig vom gewählten Koordinatensystem. Die Herleitung ist in A.1 angegeben.

2.4.4 Invarianten der Spannungstensoren

Mit Hilfe der zuvor eingeführten Hauptachsentransformation lassen sich aus den Koordinatenspannungen die Hauptspannungen ermitteln sowie die Invarianten der Spannungstensoren bestimmen, die im Rahmen der Materialtherorie zur mathematischen Beschreibung der konstitutiven Gleichungen verwendet werden. Im Vorgriff auf die Ausführungen in Kapitel 4 wird der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ der linearen Theorie eingeführt, der aus der Linearisierung des CAUCHY-Tensors hervorgeht, s. Gl. (4.25). Die Koeffizientenmatrix des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ bezogen auf das gewählte orthonormale Koordinatensystem lautet:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{21} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Der Spannungstensor kann über die o.g. Hauptachsentransformation in einen Spannungstensor überführt werden, dessen Diagonalelemente σ_{ii} den Hauptspannungen entsprechen und dessen Bezugsachsen die orthonormalen Hauptachsen darstellen. Statt sechs Spannungsgrößen als Variablen sind nur noch die drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zur Beschreibung eines Spannungszustandes erforderlich:

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Hierbei beziehen sich die zweifachen Indizes auf die Spannungskomponenten in einem beliebigen Basissystem, während ein einfacher Index die Notation im Hauptachsensystem bezeichnet. Der Spannungsdeviator kann ebenfalls im Hauptachsensystem dargestellt werden. Die Anwendung von Gl.(A.1) auf den Spannungstensor und die Lösung der dazugehörigen charakteristischen Gl. (A.3) führt neben der Eigenvektoren, die das orthonormale Hauptachsensystem aufspannen, sowie den Eigenspannungen auf folgende wichtige Invarianten des Spannungstensors bzw. seines Deviators:

1. Invariante des Spannungstensors

$$I_1 = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.50)$$

2. Invariante des Spannungsdeviators

$$J_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (2.51)$$

3. Invariante des Spannungsdeviators

$$J_3 = \det(\mathbf{s}) = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3 \quad (2.52)$$

2.4.5 Darstellung der Spannungen im Hauptspannungsraum

Ein Vorteil der Hauptachsentransformation der Spannungen ist die Möglichkeit einer geometrischen Repräsentation des Spannungszustands. Die zu den drei Hauptspannungen zugehörigen Normalenvektoren spannen ein neues karthesisches Koordinatensystem auf, in welchem die Hauptspannungen anschaulich dargestellt werden können. Dies führt auf den HAIGH-WESTERGAARD-Spannungsraum.

Haigh-Westergaard- Spannungsraum Ein Spannungszustand bestehend aus drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ kann als Vektor im dreidimensionalen Hauptspannungsraum dargestellt werden. Die Werte σ_i entsprechen den Koeffizienten des Spannungsvektors. Der so definierte Spannungspunkt kann in Richtung der hydrostatischen Achse sowie der deviatorischen Ebene zerlegt werden.

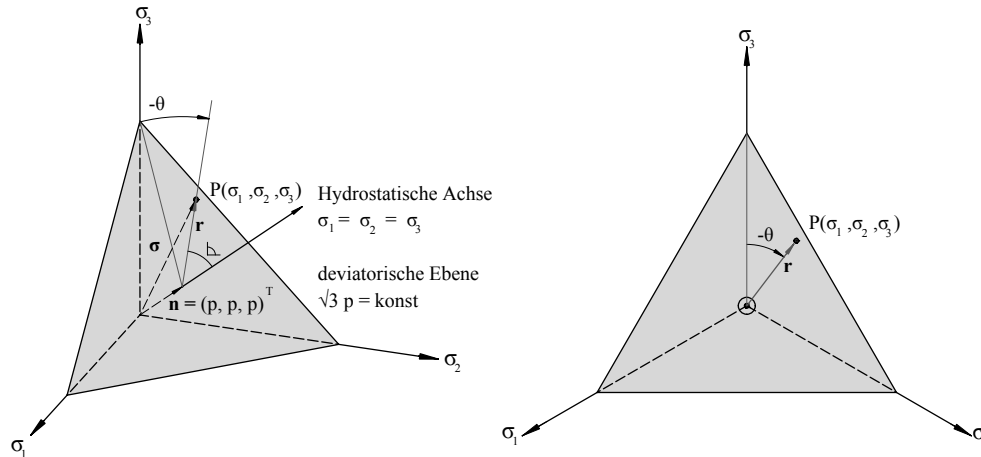


Abbildung 2.3: Haigh-Westergaard -Koordinaten und deviatorische Ebene

Die hydrostatische Achse entspricht einem Spannungszustand mit gleichgroßen Spannungen σ_i :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (2.53)$$

Der Spannungsvektor σ ergibt sich dann aus der Addition des Vektors \mathbf{n} korrespondierend zum hydrostatischen Spannungsanteil mit den Koeffizienten p sowie des Vektors \mathbf{r} korrespondierend zum deviatorischen Spannungsanteil mit den Koeffizienten s_i . Die Länge des Vektors entlang der hydrostatischen Achse ergibt sich somit wie folgt:

$$\xi = \sqrt{3}p = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (2.54)$$

Alle Punkte auf der hydrostatischen Achse korrespondieren definitionsgemäß zu einem hydrostatischen Spannungszustand mit dem Druck p und damit gleich großen Einträgen nur auf der Diagonalen. Spannungspunkte auf der hydrostatischen Achse erzeugen ausschließlich Volumenänderungen. Die Ebene orthogonal zu dieser Achse wird Deviatoriebene genannt, da diese zugehörig zu den Deviatorspannungen ist. Diese repräsentieren einen reinen Schubspannungszustand und korrespondieren zur zweiten Invariante der Deviatorspannungen J_2 . Die deviatorische Ebene genügt folgender Forderung:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}\xi \quad (2.55)$$

Die Länge des Vektors auf dieser Ebene zugehörig zum Spannungspunkt P erhält man mit:

$$\rho = \sqrt{(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2} = \sqrt{2J_2} \quad (2.56)$$

Die Spannungskomponenten auf der deviatorischen Ebene führen lediglich zu einer Gestaltänderung, sofern das Material isotrop ist, bzw. im Materialgesetz die Schub- und Normalanteile in Verzerrung und Spannung entkoppelt sind. Um den Spannungspunkt P eindeutig zu definieren, ist eine dritte Bedingung erforderlich, da Gl. (2.54) sowie Gl. (2.56) für alle Punkte auf der deviatorischen Ebene erfüllt sind. Eine eindeutige räumliche Zuordnung des Spannungspunktes gelingt mit der Einführung des LODE-Winkels, der in Abhängigkeit von der dritten Invarianten des Spannungsdeviators ermittelt werden kann:

$$\cos \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (2.57)$$

Eine etwas andere Formulierung ergibt sich in Abhängigkeit des hydrostatischen Drucks p und der VON MISES-Vergleichsspannung q :

$$p = \sqrt{3}p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\xi}{\sqrt{3}} = \frac{I_1}{3} \quad (2.58)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho = \sqrt{3J_2} \quad (2.59)$$

2.5 Mechanische Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen, auch *Erhaltungssätze der Mechanik* genannt, haben einen axiomatischen Charakter und sind unabhängig von speziellen Eigenschaften des Kontinuums für alle materiellen Körper gültig, vgl. [5], [43]. Sie bilden die Basis der materialunabhängigen Beschreibung eines kontinuumsmechanischen Problems und erlauben Aussagen zur Bewegung \mathbf{x} eines Körpers, der Masse m sowie den Spannungen \mathbf{T} .

Mithilfe der *Massebilanz* als skalarer Größe sowie den vektoriellen Gleichungen der *Impulsbilanz* (auch *Erhaltungssatz der Bewegungsgröße* genannt) und der *Drehimpulsbilanz* kann die globale Kräftegleichgewichtsbedingung formuliert werden. Eine lokale Formulierung des Gleichgewichts für alle materiellen Punkte \mathbf{x} lässt über die Einführung des CAUCHYSchen Spannungstensors \mathbf{T} gewinnen. Eine zum Erhaltungssatz der Bewegungsgröße äquivalente globale Gleichgewichtsbedingung erhält man mit der *Energiebilanz*, genauer dem Bilanzsatz der kinetischen Energie eines mechanischen Systems, der auch als *Arbeitssatz der Mechanik* bezeichnet wird, vgl.[95].

Aus den o.g. Bilanzgleichungen resultieren vier Differentialgleichungen mit 13, bzw. nach Ausnutzung der Symmetrie des CAUCHYSchen Spannungstensors, zehn Unbekannten, die das Kontinuum beschreiben. Es fehlen somit sechs Gleichungen, um die unbekanntenen Größen, d. h. die Bewegung $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X})$, der CAUCHYSchen Spannungstensor \mathbf{T} sowie die Massendichte ρ , eindeutig bestimmen zu können. Zudem sind in dem System der Differentialgleichungen die den mechanischen Vorgang beschreibenden Feldgrößen, d. h. die Bewegung $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X})$ und der Spannungstensor \mathbf{T} , nicht miteinander verknüpft. Die Bestimmung der fehlenden Unbekannten erfolgt über die Formulierung von konstitutiven Gleichungen (Materialgleichungen), die das spezifische Verhalten des vorliegenden Materials beschreiben und die Verknüpfung von Verzerrungs- und Spannungstensor leisten. Von

fundamentaler Bedeutung für die Herleitung der konstitutiven Gleichungen sind der *Energieerhaltungssatz* sowie die beiden ersten *Hauptsätze der Thermodynamik*. Die o.g. Beziehungen werden im Folgenden zusammengefasst vorgestellt. Zur Herleitung sei auf die einschlägige Fachliteratur, z.B. [95], [43], [5] verwiesen.

2.5.1 Massenerhaltung

Das Axiom der Massenerhaltung sagt aus, dass sich die Masse m während des Deformationsprozesses nicht verändert:

$$m = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \, dv = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \, dV \quad (2.60)$$

Eine weitere lokale Formulierung der Massenbilanz ergibt sich aus der in Gl. (2.60) implizit enthaltenen Forderung, dass sich die Masse m zeitlich nicht ändern darf:

$$\dot{m} = \frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} \rho \, dv = \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_0} \rho \det \mathbf{F} \, dV = 0 \quad (2.61)$$

Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Transporttheoreme sowie der zeitlichen Ableitungen kontinuumsmechanischer Größen folgt aus

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \int_{\mathbf{B}_0} \frac{D}{Dt} \rho \det \mathbf{F} \, dV &&= \int_{\mathbf{B}_0} (\dot{\rho} \det \mathbf{F} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} \det \mathbf{F}) \, dV \\ &= \int_{\mathbf{B}_0} \det \mathbf{F} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}) \, dV &&= \int_{\mathbf{B}_t} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}) \, dv \end{aligned} \quad (2.62)$$

Damit lässt sich direkt die *2. lokale Form der Massenerhaltung*, oder auch *Kontinuitätsbedingung*, angeben:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.63)$$

2.5.2 Impulsbilanz

Impulsbilanz in der Momentankonfiguration Der Impuls \mathbf{I} , auch *Bewegungsgröße* genannt, ist wie die Masse eine Erhaltungsgröße. Er ist durch folgende Gleichung definiert:

$$\mathbf{I} := \int_{\mathbf{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (2.64)$$

Es handelt sich um eine globale Größe zur Beschreibung des kinetischen Zustandes eines Körpers, die die Geschwindigkeits- und die Masseverteilung verbindet. Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße ist gleich der Resultierenden der äußeren Kräfte. Mit den Oberflächenkräften als Resultierende der auf der Oberfläche wirkenden Spannungen

$$\bar{\mathbf{F}}_{\bar{t}} = \int_{\partial \mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} \, da \quad (2.65)$$

sowie den Volumenkräften

$$\bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{b}}} = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} dv, \quad (2.66)$$

die sich aus der massenbezogenen Beschleunigung ergeben, kann die Impulsbilanz wie folgt dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{i}} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} da \quad (2.67)$$

Dieser Ausdruck lässt sich mithilfe der Kontinuitätsbedingung (2.63) weiter vereinfachen. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\int_{\mathbf{B}_t} \rho \ddot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} da \quad (2.68)$$

Man spricht auch vom *dynamischen Kräftegleichgewicht*. Unter Vernachlässigung der Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{x}}$, also mit $\ddot{\mathbf{x}} \approx 0$, erhält man das *statische Kräftegleichgewicht in räumlicher Darstellung*:

$$0 = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} da \quad (2.69)$$

Neben der integralen Formulierung der Impulsbilanz kann aus Gl. (2.36) sowie Gl.(2.68) die lokale Darstellung hergeleitet werden. Hierfür betrachtet man einen aus dem materiellen Körper \mathcal{B} herausgeschnittenen Teilkörper \mathcal{B}^* . Für diesen gilt die Kräftegleichgewichtsbedingung (2.70):

$$\int_{\mathbf{B}_t^*} \rho \ddot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t^*} \rho \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t^*} \bar{\mathbf{t}} da \quad (2.70)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (2.36) erhält man zunächst:

$$\int_{\mathbf{B}_t^*} \rho \ddot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t^*} \rho \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t^*} \mathbf{T} \mathbf{n} da, \quad (2.71)$$

was unter Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes

$$\int_{\partial \mathbf{B}_t^*} \mathbf{T} \mathbf{n} da = \int_{\mathbf{B}_t^*} \operatorname{div} \mathbf{T} dv \quad (2.72)$$

auf folgenden Ausdruck führt:

$$\int_{\mathbf{B}_t^*} \{ \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}}) \} dv = 0 \quad (2.73)$$

Diese Bedingung muss in jedem Punkt des Körpers erfüllt sein. Somit ergibt sich die lokale Gleichgewichtsbedingung zu:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho (\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.74)$$

Die Gleichung (2.74) wird als *dynamische Feldgleichung in räumlicher Darstellung* oder auch *1. CAUCHYsche Bewegungsgleichung* (CAUCHY's first law of motion) bezeichnet. Für den Sonderfall vernachlässigbarer Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{x}} \approx 0$ erhält man die *statische Feldgleichung in räumlicher Darstellung*

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad (2.75)$$

Impulsbilanz in der Referenzkonfiguration Ohne weiteren Nachweis ergibt sich für die dynamische Kräftegleichgewichtsbedingung folgende materielle Form:

$$\int_{\mathbf{B}_0} \rho \ddot{\mathbf{x}} dV = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dV + \int_{\partial \mathbf{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 dA \quad (2.76)$$

bzw. unter Vernachlässigung der Beschleunigung:

$$0 = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dV + \int_{\partial \mathbf{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 dA \quad (2.77)$$

Für die lokale Darstellung der dynamischen Feldgleichungen in der Momentankonfiguration müssen die relevanten Größen transformiert werden. Die Transformation des CAUCHYschen Spannungstensors \mathbf{T} auf die Referenzkonfiguration führt zum 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \mathbf{P} . Im Gegensatz zum CAUCHYschen Spannungstensor ist dieser nicht symmetrisch. Die *dynamische Feldgleichung in materieller Form* lautet dann nach der Transformation der Spannungen auf die Referenzkonfiguration:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \rho_0 (\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \quad (2.78)$$

Um den Nachteil der fehlenden Symmetrie zu beheben, wird der in Gl. (2.39) eingeführte 2.PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \mathbf{S} verwendet. Dieser ist symmetrisch und stellt eine reine Rechengröße dar. Damit ergibt sich:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_0 (\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.79)$$

2.5.3 Drehimpulsbilanz

Mithilfe des Drehimpulserhaltungssatzes kann gezeigt werden, dass der CAUCHYsche Spannungstensor symmetrisch ist. Der Drehimpuls \mathbf{L} eines mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ bewegten materiellen Körpers \mathbf{B}_t ist eine Erhaltungsgröße und lautet:

$$\mathbf{L} := \int_{\mathbf{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rho \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.80)$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses \mathbf{L} ist gleich der vektoriellen Summe der Momente aller auf den Körper einwirkenden Kräfte. Hieraus lassen sich die globale und lokale Momentengleichgewichtsbedingung ableiten. Man erhält als lokale Momentengleichgewichtsbedingung schließlich:

$$\int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{1} \times \mathbf{T} dv = \mathbf{0}. \quad (2.81)$$

Es kann gezeigt werden, dass hieraus die Symmetrie von \mathbf{T} folgt:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.82)$$

Die Symmetrie bleibt aufgrund der Kongruenztransformation $\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$ für den 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor erhalten:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (2.83)$$

Für den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor gilt jedoch:

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T \quad (2.84)$$

2.5.4 Erhaltungssatz der kinetischen Energie

Mithilfe des Satzes von der Impulserhaltung (2.67) und der daraus resultierenden lokalen Form, der dynamischen Feldgleichung (2.74) lässt sich eine zum Erhaltungssatz der Bewegungsgröße äquivalente, globale Gleichgewichtsbedingung in Form des Bilanzsatzes der kinetischen Energie eines mechanischen Systems herleiten. Dieser wird auch als *Bilanzsatz der mechanischen Energie* oder als *Arbeitssatz der Mechanik* bezeichnet.

Er besagt, dass die zeitliche Änderung der kinetischen Energie K eines mechanischen Systems der Leistung der eingepprägten Oberflächen- und Volumenkräfte \dot{A} entspricht, vermindert um die innere Spannungsleistung \dot{W} .

Hierbei wird zunächst lediglich die mechanische Energie betrachtet; andere Energieformen wie thermische, elektrische oder chemische Energie werden vernachlässigt.

Mit der *kinetischen Energie* eines mechanischen Systems

$$K := \int_{\mathbf{B}_t} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.85)$$

sowie ihrer zeitlichen Änderung

$$\frac{D}{Dt} K = \dot{K} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{B}_t} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.86)$$

lautet der *Bilanzsatz der kinetischen Energie*:

$$\frac{D}{Dt} K = \dot{K} = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{x}} da - \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{T} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.87)$$

Hierbei bezeichnen der Term

$$\dot{A} = \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv + \int_{\partial \mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{x}} da \quad (2.88)$$

die *Leistung der eingepprägten Oberflächen- und Volumenkräfte* oder *Rate der äußeren mechanischen Arbeit* sowie

$$\dot{W} = \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{T} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.89)$$

die *innere Spannungsleistung* oder *Rate der inneren mechanischen Arbeit*. Der *Bilanzsatz der kinetischen Energie* kann also auch wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{D}{Dt} K = \dot{K} = \dot{A} - \dot{W} \quad (2.90)$$

Hieraus lässt sich der Arbeitssatz für statische Systeme herleiten. Im Vorgriff auf Unterabschnitt 2.6 gilt, dass bei reversiblen, elastischen Prozessen die Rate der inneren Arbeit einem vollständigen Differential entspricht. Bei äußeren, eingepprägten Kräften mit Potentialcharakter ist dies ebenfalls für die Rate der äußeren Arbeit der Fall. Dann gilt:

$$dK = dA - dW \quad (2.91)$$

Bei quasi-statischen Prozessen mit $\dot{\mathbf{x}} \approx 0$ tritt keine kinetische Energie auf. Durch Integration über den Deformationsweg vom unverformten zum deformierten Zustand ergibt sich dann der Arbeitssatz der Mechanik:

$$W = A. \quad (2.92)$$

Arbeitskonforme Größen Der Integrand in Gl. (2.89) beschreibt die tatsächliche physikalische Leistung, \mathbf{T} und $\text{grad } \dot{\mathbf{x}}$ werden daher auch als energetisch konjugierte Größen bezeichnet. Weitere arbeitskonforme Größen bezogen auf die unterschiedlichen Konfigurationen ergeben sich zu:

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.93)$$

Die Rate der inneren Arbeit kann somit auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{T} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{T} : \mathbf{l} dv \\ &= \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV = \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV \end{aligned} \quad (2.94)$$

2.6 Thermodynamische Bilanzgleichungen

Aus den *thermodynamischen Bilanzgleichungen* lassen sich über weiterführenden Betrachtungen der Energiebilanz und der Prozessrichtung thermomechanischer Vorgänge Aussagen über das spezifische Materialverhalten treffen und damit die fehlenden Unbekannten des kontinuumsmechanischen Problems ermitteln. Konkret lassen sich mit Hilfe der thermodynamischen Bilanzgleichungen Bedingungen für die konstitutiven Gleichungen herleiten, die die bisher fehlende Verknüpfung von Spannungen und Verzerrungen herstellen.

2.6.1 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik postuliert die Erhaltung der Energie. Während eines thermodynamischen Prozesses kann eine Energieform in eine andere umgewandelt werden, Energie kann jedoch nicht verloren gehen. Im Rahmen der Energiebilanz erfolgt die Erweiterung der mechanischen Betrachtung um thermische Einflüsse.

Die Gesamtenergie eines Systems sei:

$$E := \int_{B_t} \rho(\mathbf{x}) e(\mathbf{x}) dv \quad (2.95)$$

mit der Energiedichte $e(\mathbf{x})$.

Die gesamte (thermomechanische) Energie eines Systems E setzt sich zusammen aus der inneren Energie U und der kinetischen Energie K :

$$E = U + K \quad (2.96)$$

Der Zusammenhang zwischen der Änderung der kinetischen Energie und der Rate der äußeren Arbeit sowie der Spannungsleistung wurde bereits zuvor hergeleitet. Für die innere Energie gilt

$$U := \int_{B_t} \rho(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) dv \quad (2.97)$$

mit $u(\mathbf{x})$ als innerer Energiedichtefunktion.

Das Axiom des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik sagt aus, dass die zeitliche Änderung der gesamten Energie genau der Leistung der eingepprägten Oberflächen- und Volumenkräfte (der Rate der äußeren mechanischen Arbeit) plus der zugeführten Wärme entspricht. Das bedeutet konkret:

$$\dot{E} = \frac{DE}{Dt} = \dot{A} + \dot{Q} = \dot{U} + \dot{K} \quad (2.98)$$

mit

$$\dot{Q} = \int_{B_t} \rho r dv + \int_{\partial B_t} (-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} da \quad (2.99)$$

für die von außen zugeführte Wärmemenge mit einer inneren Wärmequelle r und einem äußeren Wärmefluss \mathbf{q} . Es folgt für die innere Energie der Zusammenhang:

$$\dot{U} = \frac{D}{Dt}U = \frac{D}{Dt}(E - K) = \dot{E} - \dot{K} = (\dot{A} + Q) - (\dot{A} - \dot{W}) = \dot{W} + Q \quad (2.100)$$

d.h. die zeitliche Änderung der inneren Energie U entspricht der Summe der inneren Spannungsleistung \dot{W} und der zugeführten Wärme Q . Es gilt daher:

$$\frac{D}{Dt}U = \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) dv = \int_{B_t} \mathbf{T} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} dv + \int_{B_t} \rho r dv - \int_{\partial B_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.101)$$

Hieraus lässt sich nach einigen Umformungen und unter Anwendung des GAUSSSchen Integralsatzes die folgende lokale Form des ersten Hauptsatzes entwickeln:

$$\dot{u} = r - \frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{q} + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{d} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} : \mathbf{d} \quad (2.102)$$

2.6.2 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik trifft eine Aussage über die Prozessrichtung thermomechanischer Vorgänge. Er besagt, dass ein System mit einem bestimmten Energieniveau ein höheres Energieniveau nicht von sich aus erreichen kann, die Prozessrichtung also natürlich gegeben ist und nicht ohne Energieeinsatz umgekehrt werden kann. Ein anschauliches Beispiel ist der Wärmefluss zwischen zwei Bereichen eines Körpers, der immer vom wärmeren zum kälteren Bereich stattfindet. Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik wird auch als *Dissipationspostulat* bezeichnet, da bei inelastischen Prozessen Energie dissipiert wird, d.h. es wird mechanische Energie in andere Energieformen umgewandelt. Dieser Prozess ist unumkehrbar (s.a. [84]). Zur Beschreibung dieses Phänomens wird die Entropie S mit der massenspezifischen Entropiedichte η eingeführt, welche als Maß der mikroskopischen Unordnung angesehen werden kann:

$$S := \int_{B_t} \rho(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}) dv \quad (2.103)$$

Die Transformation von einem geordneten Anfangszustand in einen weniger geordneten Zustand kann somit als ein Entropiezuwachs angesehen werden. Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik postuliert, dass die Änderung der Entropie S der Summe der Entropiezufuhr durch Wärmeproduktion im Inneren und dem Wärmefluss über die Oberfläche sowie der Entropieproduktion im Inneren entspricht, vgl. [95]. Für die zeitliche Änderung der Entropie ergibt sich:

$$\frac{D}{Dt}S = \frac{D}{Dt} \int_{B_t} \rho \eta dv = \int_{B_t} \frac{r}{\theta} \rho dv - \int_{\partial B_t} \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_{B_t} \rho s dv \quad (2.104)$$

mit der spezifischen Entropieproduktion s und der absoluten Temperatur θ . Die Entropie kann in abgeschlossenen Systemen ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, also bei adiabaten Prozessen, nicht abnehmen. Hieraus folgt nun direkt:

$$s \geq 0 \quad (2.105)$$

Mit dieser Information lässt sich die obige Entropiebilanz als Ungleichung schreiben:

$$\int_{\tilde{B}_t} \rho \dot{\eta} dv \geq \int_{\tilde{B}_t} \frac{r}{\theta} \rho dv - \int_{\partial \tilde{B}_t} \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.106)$$

bzw. in lokaler Form:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &\geq \frac{r}{\theta} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \\ &\geq \frac{r}{\theta} - \frac{1}{\rho \theta} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{\rho \theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \end{aligned} \quad (2.107)$$

Diese Darstellung ist als *CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung* bekannt. Die lokale Aussage der Energiebilanz, Gl. (2.102), lässt sich auch in folgender Form angeben:

$$\rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} = \rho \dot{u} - \mathbf{T} : \mathbf{d} \quad (2.108)$$

In gleicher Weise kann auch die Entropieungleichung nach Gl. (2.107) umgeschrieben werden:

$$\rho \dot{\eta} - \frac{1}{\theta} (\rho r - \operatorname{div} \mathbf{q}) - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \quad (2.109)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.108) in Gl. (2.109) erhält man folgende Ungleichung:

$$\rho \dot{\eta} - \frac{1}{\theta} (\rho \dot{u} - \mathbf{T} : \mathbf{d}) - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \quad (2.110)$$

bzw.

$$-\rho(\dot{u} - \theta \dot{\eta}) + \mathbf{T} : \mathbf{d} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \quad (2.111)$$

Durch Erweitern mit $-\dot{\theta} \eta + \dot{\theta} \eta$ lässt sich ein Variablenwechsel, auch als *LEGENDRE-Transformation* bekannt, durchführen:

$$-\rho(\dot{u} - \theta \dot{\eta} - \dot{\theta} \eta + \dot{\theta} \eta) + \mathbf{T} : \mathbf{d} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \quad (2.112)$$

$$-\rho[(u - \theta \eta) \dot{} + \dot{\theta} \eta] + \mathbf{T} : \mathbf{d} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \quad (2.113)$$

Der Ausdruck $u - \theta \eta$ kann als totales Differential betrachtet und daher zu einer Größe zusammengefasst werden. Mit der Einführung der freien *HELMHOLTZschen Energiefunktion* ψ

$$\psi = u - \theta \eta \quad (2.114)$$

lautet die Ungleichung:

$$-\rho[\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta] + \mathbf{T} : \mathbf{d} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 \quad (2.115)$$

Für isotherme Prozesse, also Prozesse mit gleichbleibender Temperatur, vereinfacht sich die Ungleichung zu:

$$-\rho \dot{\psi} + \mathbf{T} : \mathbf{d} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho \dot{\psi} \leq \mathbf{T} : \mathbf{d} \quad (2.116)$$

Bei elastischen, also reversiblen Prozesse findet keine Entropieproduktion statt, so dass gilt:

$$-\rho\dot{\psi} + \mathbf{T} : \mathbf{d} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho\dot{\psi} = \mathbf{T} : \mathbf{d} \quad (2.117)$$

In der Referenzkonfiguration ergibt sich:

$$-\rho\dot{\psi}_0 + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \quad (2.118)$$

bzw. im reversiblen elastischen Fall:

$$-\rho\dot{\psi}_0 + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad (2.119)$$

In manchen Quellen wird die HELMHOLTZ-Energie auch als Integral der HELMHOLTZ-Energiefunktion ψ über das Gebiet definiert:

$$\Psi = \int_{\mathbf{B}_t} \rho\psi dv = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0\psi_0 dV \quad (2.120)$$

Es gilt, vgl.[43], Gl. (4.31):

$$\dot{\Psi} = \int_{\mathbf{B}_t} \rho\dot{\psi} dv = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0\dot{\psi}_0 dV \quad (2.121)$$

Somit entspricht im elastischen Fall die Rate der inneren mechanischen Arbeit der Rate der HELMHOLTZ-Energie:

$$\dot{\Psi} = \int_{\mathbf{B}_t} \rho\dot{\psi} dv = \int_{\mathbf{B}_0} \rho_0\dot{\psi}_0 dV = \dot{W} = \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{T} : \text{grad } \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV = \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV \quad (2.122)$$

Die Existenz der freien HELMHOLTZ-Energie stellt eine der Grundannahmen der Theorie der Hyperelastizität wie auch der Plastizität dar. Auf die konstitutiven Gesetze wird in Kapitel 4 näher eingegangen.

Kapitel 3

Modellierung mit der Finite Elemente Methode

Im Folgenden wird auf die für diese Arbeit relevanten Aspekte der Finite-Elemente-Methode (FEM) eingegangen. Dies betrifft insbesondere die Modellierung materiell nichtlinearer Probleme. Weitere Ausführungen finden sich z.B. in [103], [104], [6].

3.1 Einleitung

Die Methode der Finiten Elementen beruht auf der Überführung einer realen physikalischen Problemstellung in ein mathematisches Modell, das numerisch berechnet werden kann. Hierbei handelt es sich i.d.R. um die Überführung von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen, die die Zusammenhänge zwischen Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen beschreiben, in numerisch lösbare Gleichungssysteme. Grundlage hierfür ist die Diskretisierung eines Kontinuums durch Finite Elemente mit geeigneten Ansatzfunktionen zur Approximation der mechanischen Grundgleichungen. Für die adäquate Abbildung eines physikalischen Problems sind folgende Aspekte von Bedeutung:

- Lösungsverfahren
- Materialtheorie
- Elementwahl
- Strukturmodellierung

Während im Allgemeinen in der Bauingenieurpraxis die lineare FEM zum Einsatz kommt, erfordert die genauere Analyse des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken aufgrund des materiell ausgeprägt nichtlinearen Tragverhaltens die Anwendung der nichtlinearen Finite Elemente Methode. Hierbei können verschiedene nichtlineare Fragestellungen behandelt werden, z.B.:

- Geometrische Nichtlinearität, z.B. große Verschiebungen und Verdrehungen bei kleinen Verzerrungen, Seile, Membrane, ggf. Balken
- Physikalische Nichtlinearität, d.h. nichtlineares Materialverhalten, wie Plastizität oder nichtlineare Elastizität, z.B. bei gummiartigen Werkstoffen oder Umformprozessen von Metall
- Stabilitätsprobleme, z.B. geometrische Instabilität wie Knicken, Beulen, bzw. materielle Instabilität wie Einschnürung von Proben, Risse, Scherbänder

- Nichtlineare Randbedingungen, z.B. Kontaktprobleme, Wärmestrahlung
- Gekoppelte Probleme, z.B. die Kopplung von unterschiedlichen Feldproblemen, z.B. thermo-mechanische Kopplung, Fluid-Struktur Interaktionen etc.

Im Rahmen dieser Arbeit werden großmaßstäbliche Versuche an Stahlbeton mit der FEM nachgerechnet. Hierfür ist die physikalische Nichtlinearität, die sich in nichtlinearen Materialgesetzen manifestiert, entscheidend, da weder große Deformationen noch Stabilitätsprobleme auftreten.

3.2 Grundlegende Aspekte der nichtlinearen FEM

Ausgangspunkt für die Approximation des mechanischen Problems ist die in Gl. (2.75) formulierte Impulsbilanz, die die Gleichgewichtsbedingung darstellt. Hieraus kann die Differentialgleichung hergeleitet werden, die das Kräftegleichgewicht in jedem Punkt des Körpers beschreibt. Weiterhin kann das Prinzip der virtuellen Arbeit hergeleitet werden, das auch als schwache Form des Gleichgewichts bezeichnet wird. In der allgemeinen Ausformulierung der schwachen Form handelt es sich um ein nichtlineares Funktional. Durch die Wahl diskreter Ansätze im Rahmen der Finite Elemente Methode wird dieses Funktional approximiert und es ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem. Um dieses Gleichungssystem numerisch lösen zu können, wird das Gleichungssystem linearisiert, wobei das nichtlineare Materialverhalten durch die Tangente in dem betrachteten Punkt, die tangentielle Steifigkeitsmatrix, angenähert wird. Handelt es sich sowohl um ein geometrisch als auch materiell nichtlineares Problem, beinhaltet die tangentielle Steifigkeit naturgemäß beide nichtlinearen Anteile.

Materielle Nichtlinearität Bei der nichtlinearen FEM muss zwischen geometrisch und materiell nichtlinearen Theorien unterschieden werden. Die in Kapitel 4 dargestellten Materialgleichungen korrespondieren zur materiell nichtlinearen Theorie. Die Spannungen sind nichtlinear von den Verzerrungen abhängig, das Problem kann jedoch unter der Voraussetzung der Theorie kleiner Verschiebungen geometrisch weiterhin linear formuliert sein. Unter der Annahme, dass die Differenz der Positionen zwischen Referenz- und der Momentankonfiguration sehr gering ist, können hierbei die nichtlinearen Anteile des GREENSchen Verzerrungstensors \mathbf{E} vernachlässigt werden. Unter Verwendung des verbliebenen linearen Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen und die Lösung kann durch die Linearisierung in der Umgebung der Referenzkonfiguration gut approximiert werden.

Geometrische Nichtlinearität Bei der geometrischen Nichtlinearität werden die nichtlinearen Anteile des GREENSchen Verzerrungstensors \mathbf{E} mitberücksichtigt. Dies führt dazu, dass selbst unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen den Spannungen \mathbf{S} und dem Elastizitätstensor \mathbb{C} , d.h. einem materiell linearen Materialgesetz, eine nichtlineare Abhängigkeit zwischen den Verzerrungen \mathbf{E} und den Spannungen \mathbf{S} vorliegt. Dies kann zu großen Verschiebungen trotz kleiner Verzerrungen führen und bewirkt, dass die aktuellen Spannungen von den aktuellen Verschiebungen abhängig sind.

3.2.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Ausgangspunkt ist die Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit, das aus der CAUCHYschen Bewegungsgleichung 2.74 hergeleitet werden kann. Nach Multiplikation mit einer Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$, Anwendung des Divergenztheorems und Integration über das Gebiet erhält man die schwache Form des Gleichgewichtes in der Momentankonfiguration:

$$R(\mathbf{u}; \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathbf{B}_t} \mathbf{T} : \text{grad } \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\mathbf{B}_t} \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial \mathbf{B}_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da, \quad (3.1)$$

bzw. in der Referenzkonfiguration:

$$R(\mathbf{u}; \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathbf{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathbf{B}_0} \rho \bar{\mathbf{b}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial \mathbf{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA \quad (3.2)$$

Dies entspricht der Forderung, dass innere und äußere Kräfte im Gleichgewicht stehen müssen. Das Residuum $R(\mathbf{u}; \boldsymbol{\eta})$ ist im Allgemeinen nichtlinear in \mathbf{u} , aber linear in $\boldsymbol{\eta}$. Dieses nichtlineare Funktional wird zur Aufbereitung für die Anwendung der FEM diskretisiert und in ein nichtlineares Gleichungssystem überführt. Auf die Details zur Diskretisierung wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen, s. hierzu die einschlägige Literatur wie [103], [104], [6]. Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird oftmals das NEWTON-Verfahren angewendet, das eine Linearisierung über eine TAYLOR-Reihen-Approximation erfordert.

Lineare Theorie Im Fall kleiner Verschiebungen kann der GREENSche Verzerrungstensor \mathbf{E} durch die lineare Approximation $\boldsymbol{\varepsilon}$ ausgedrückt werden. Dann ergibt sich folgender Ausdruck für die schwache Form des Gleichgewichtes:

$$R(\mathbf{u}; \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathbf{B}_0} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV - \int_{\mathbf{B}_0} \rho \bar{\mathbf{b}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial \mathbf{B}_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA \quad (3.3)$$

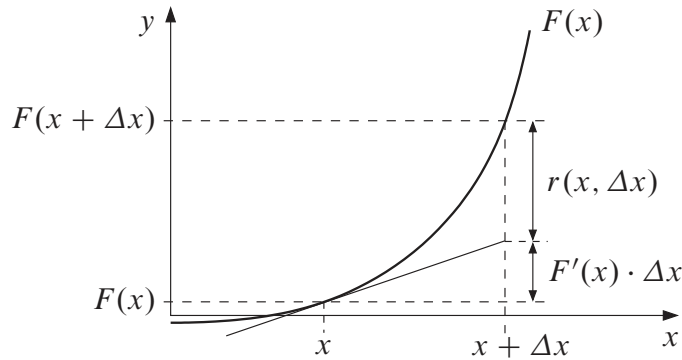
Das hierdurch entstehende Gleichungssystem ist linear und kann in einem Schritt gelöst werden.

3.2.2 Lösungsverfahren

Newton-Raphson-Verfahren Das wohl am häufigsten verwendete Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme ist das iterative NEWTON-RAPHSON-Verfahren, mit dem die Nullstellen einer Funktion bestimmt werden können, vgl. [103]. Hierbei wird zunächst die betrachtete Funktion, bzw. das nichtlineare Gleichungssystem, mithilfe einer TAYLOR-Reihenentwicklung in einem Ausgangspunkt linearisiert, d.h. die Tangente bestimmt. Die Nullstelle der Tangente wird als verbesserte Näherung der Nullstelle der Funktion verwendet und dient als Ausgangspunkt für den nächsten Iterationsschritt. Das Verfahren konvergiert quadratisch, sofern der Ausgangspunkt günstig gewählt ist. Abbildung 3.1 stellt das Vorgehen am eindimensionalen Beispiel schematisch dar.

Die Approximation der Funktion durch die TAYLOR-Reihe führt auf:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + DF(x) \cdot \Delta x + r(x, \Delta x) \quad (3.4)$$


Abbildung 3.1: Linearisierung einer Funktion

mit $r(x, \Delta x)$ als Restglied. Der lineare Anteil $DF(x) \cdot \Delta x = F'(x) \cdot \Delta x$ wird hierbei als Variation der Funktion F in Richtung Δx bzw. Richtungsableitung bezeichnet:

$$DF(x) \cdot \Delta x = \delta F(x, \Delta x) \quad (3.5)$$

Für kleine Δx kann der Restterm vernachlässigt werden und es gilt:

$$\delta F(x, \Delta x) \approx \Delta F \quad (3.6)$$

Für die Linearisierung der Funktion folgt somit:

$$L[F]_{x=\bar{x}} = F(\bar{x}) + \delta F(\bar{x}, \Delta x) = F(\bar{x}) + DF(\bar{x}) \cdot \Delta x \quad (3.7)$$

Mithilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens lassen sich die Nullstellen dieser Funktion an der bekannten Stelle \bar{x} bestimmen.

$$\begin{aligned} L[F]_{x=\bar{x}} &= F(\bar{x}) + DF(\bar{x}) \cdot \Delta x = 0 \\ DF(\bar{x}) \cdot \Delta x &= -F(\bar{x}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die unbekannte Größe Δx kann nun über eine NEWTON-RAPHSON-Iteration ermittelt werden:

$$\Delta x_i = [DF(x_i)]^{-1} F(x_i) \quad (3.9)$$

Die gesuchte Lösung ergibt sich dann zu:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad (3.10)$$

Das Vorgehen lässt sich auch auf n-dimensionale Problemstellungen übertragen. Die Linearisierung der Funktion führt auf:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + D\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \cdot \Delta \mathbf{x}_k + r(\mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Nach Vernachlässigung des Restterms ergibt sich das zu lösende lineare Gleichungssystem wie folgt:

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \cdot \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \quad (3.12)$$

Die Richtungsableitung von \mathbf{F} kann auch in folgender Form ausgedrückt werden:

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \cdot \Delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (3.13)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{K} im weiteren Verlauf die *tangentiale Steifigkeitsmatrix*.

Lösung des Residuums mit dem Newton-Raphson-Verfahren Das Residuum bzw. die schwache Form des Gleichgewichts (3.1) kann nach gerade geschildertem Vorgehen als TAYLOR-Reihe in Richtung der unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{u} wie folgt approximiert werden:

$$R(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\eta}_h) + \delta R(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{\eta}_h, \Delta \mathbf{u}_h) = 0 \quad (3.14)$$

Für die Variation des Residuums müssen nun die entsprechenden Größen ebenfalls linearisiert werden. Das entstehende Gleichungssystem kann anschließend mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren gelöst werden. Nach Linearisierung und Diskretisierung von Gleichung (3.14) ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} &= 0 \\ \boldsymbol{\eta}^T [\mathbf{R} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}] &= 0 \\ \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} &= -\mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Lösung sind die gesuchten globalen Verschiebungen, die in jedem Iterationsschritt aufdatiert werden:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i \quad (3.16)$$

In der tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} sind sowohl die geometrischen als auch materiellen Nichtlinearitäten enthalten. Im Rahmen der Theorie kleiner Verschiebungen kann der geometrische Anteil vernachlässigt werden.

Abgrenzung zur linearen FEM In der linearen FEM, wenn also weder geometrische noch materielle Nichtlinearitäten vorliegen, wie bspw. bei Verwendung der Theorie der kleinen Verzerrungen und unter Anwendung des linear-elastischen HOOKEschen Gesetzes, ist die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} unabhängig von den gesuchten Verschiebungen und damit konstant. Das Gleichungssystem ist dann ohne Iteration lösbar.

Weitere Lösungsverfahren Ein großer Vorteil des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens liegt in der quadratischen Konvergenz. Es lassen sich jedoch nicht alle Belastungspfade damit abbilden. Neben diesem klassischen Verfahren existiert noch eine Vielzahl weiterer Verfahren zur Berechnung nichtlinearer Gleichungssysteme. Hierzu zählen z.B. modifizierte NEWTON-Verfahren wie das Quasi-NEWTON-Verfahren, bei dem die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} nicht in jedem Iterationsschritt ermittelt wird, um Rechenaufwand zu sparen, das dadurch allerdings auch schlechter konvergiert. Häufig wird auch das Bogenlängen-Verfahren verwendet, bei dem statt der (Pseudo-)Zeit die Bogenlänge das Maß für den Berechnungsfortschritt darstellt. Somit können auch Durchschlagprobleme erfasst werden. Das Bogenlängenverfahren ist in den Programmen meist in unterschiedlichen Varianten implementiert, z.B. nach RIKS oder CRISFIELD. Es ist jedoch für elastoplastische Materialien nur bedingt geeignet, da auch instabile Gleichgewichtszustände durchlaufen werden können, sozusagen also die falsche Lösung gefunden wird, und dies zu unrealistisch großen Deformationen führen kann, vgl. [77].

Lösungsverfahren für ratenabhängige Gleichungssysteme Liegen ratenabhängige, bzw. inkrementelle Materialgesetze vor, z.B. in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{C}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t), \quad (3.17)$$

ist eine Diskretisierung des Problems über die Zeit erforderlich, d.h. es wird ein inkrementelles iteratives Lösungsschema benötigt. Die Zeitdiskretisierung lässt sich z.B. über das sogenannte EULER-Vorwärts-Verfahren (auch explizites EULER-Verfahren genannt), oder das EULER-Rückwärts- (implizites EULER-) Verfahren, erreichen. Allgemein kann eine ratenabhängige Funktion

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f[y(t)] \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

die ein Anfangswertproblem darstellt, wie folgt approximiert werden:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(1 - \alpha)y_n + \alpha f(y_{n+1}) \tag{3.19}$$

Hierbei ist $y_n = y(t_n)$ bzw. $y_{n+1} = y(t_{n+1})$. Für $\alpha = 0$ ergibt sich das EULER-Vorwärts-, mit $\alpha = 1$ das EULER-Rückwärts-Verfahren, welches aufgrund von besseren Stabilitätseigenschaften häufiger verwendet wird. Die Berechnungsvorschrift lautet dann:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(y_{n+1}) \tag{3.20}$$

Die Schwierigkeit liegt darin, dass auf der rechten Seite der Gleichung Größen vorkommen, die ebenfalls vom Zeitpunkt t_{n+1} abhängig, also noch unbekannt sind. Eine Möglichkeit zur Lösung ist ein zweischrittiges Näherungsverfahren mit einem Prädiktor- und einem Korrektorschritt. Im Prädiktorschritt werden als Startwert für die unbekanntenen Größen auf der rechten Seite die Werte aus dem bekannten Schritt t_n verwendet, um den gesuchten Funktionswert anzunähern. Im Korrektorschritt wird dann die Lösung überprüft und ggf. korrigiert. Dies führt zum einem iterativen Prozess, der z.B. über das NEWTON-RAPHSON-Verfahren gelöst werden kann. Derartige Lösungsverfahren werden bei der Ermittlung der Spannungen im Rahmen der Plastizität häufig angewendet und als *Return-Mapping-Algorithmus* bezeichnet, s. Abschnitt 4.3.7.

3.3 Elementwahl

Für die numerische Lösung eines mechanischen Problems mit der FEM muss eine geeignete Elementwahl getroffen werden. Es steht eine Vielzahl von Elementen zur Verfügung, die auf verschiedene Weise kategorisiert werden können, z.B. über

- die Dimension des Berechnungsmodells,
- die Elementdimension,
- den Elementtyp,
- den Grad der Ansatzfunktionen,
- die Elementformulierung.

Die folgenden Ausführungen sind teilweise [69] entnommen.

Elementdimensionen Bei den Elementdimensionen lassen sich 1-D-, 2-D und 3-D-Elemente unterscheiden. Zu den 1-D Elementen gehören Fachwerk oder Balkenelemente, zu den 2-D Elementen

Scheiben-, Platten- sowie Schalenelemente, die 3-D Elemente beinhalten Volumenelemente. Abbildung 3.2 zeigt schematisch 1D-, 2D- und 3D-Elemente:

Die Elementdimension sollte so gewählt werden, dass das betrachtete Problem genügend genau bei möglichst geringem Rechenaufwand approximiert werden kann.

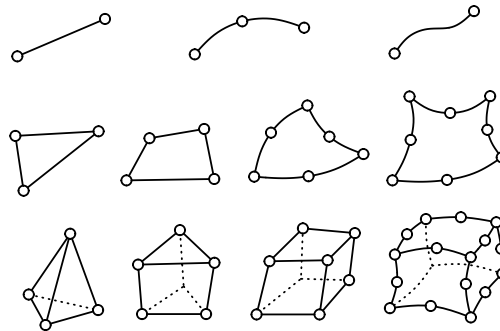


Abbildung 3.2: Elementdimensionen

3.3.1 Elementtyp

Bei den Elementtypen können *Kontinuumselemente* sowie *Strukturelemente* unterschieden werden.

Kontinuumselemente Kontinuumselemente können direkt aus der Diskretisierung kontinuumsmechanischer Gleichungen hergeleitet werden. Für den eindimensionalen Fall führt dies auf Fachwerk- oder Dehnstabelemente, für den zweidimensionalen Fall auf Scheibenelemente und für den dreidimensionalen Fall auf Volumenelemente. Diese Elemente besitzen nur Verschiebungsfreiheitsgrade an den Knoten.

Strukturelemente Im Gegensatz zu Kontinuumselementen werden Strukturelemente durch weitere Annahmen charakterisiert, die sich auf ein bestimmtes strukturmechanisches Problem beziehen. Beispielsweise werden im eindimensionalen Fall bei Balkenelementen die Freiheitsgrade und Annahmen für die konstitutiven Gleichungen auf die zugrunde liegende Theorie abgestimmt, z.B. auf die Theorien von BERNOULLI oder TIMOSHENKO. Für den 2-D-Fall erfolgt die Herleitung von Platten- und Schalenelementen z.B. auf Basis der Plattentheorien von KIRCHHOFF oder REISSNER-MINDLIN bzw. verschiedener Schalentheorien. Neben Verschiebungen sind auch Rotationen als Freiheitsgrade zugelassen. Die Abhängigkeit der kinematischen Größen voneinander unterscheidet sich je nach zugrunde liegender Theorie. Durch diese Annahmen sind die Anwendungsgebiete auf den speziellen Fall eingeschränkt, die Berechnung ist jedoch effizienter. Statt der Modellierung eines Biegebalkens mit mehreren Scheibenelementen über die Höhe ist beispielsweise stattdessen die Verwendung eindimensionaler Balkenelemente möglich, wobei die Einhaltung der Randbedingungen der zugrundeliegenden Theorieannahmen zu beachten ist, wie z.B. das passende Verhältnis von Länge zu Höhe etc. Grundsätzlich handelt es sich bei allen genannten Elementen um Verschiebungselemente in dem Sinn, dass Verschiebungen bzw. Verdrehungen an den Knoten die einzigen Freiheitsgrade darstel-

len. Zur weiteren Effizienzsteigerung oder zur Vermeidung von Konvergenzproblemen können die Elementformulierungen um weitere Annahmen ergänzt werden.

Der Wahl des richtigen Elementtyps für das betrachtete Problem kommt eine große Bedeutung zu. Beispielsweise kann mit klassischen Balkenelementen keine Aussage über die Verteilung der Schubkräfte gemacht werden. Zur Untersuchung von Schubproblemen sind sie daher nicht geeignet.

3.3.2 Elementformulierung

Ziel numerischer Berechnungen mit der FEM ist die Approximation der genauen Lösung eines strukturmechanischen Problems durch Diskretisierung der betrachteten Geometrie und Approximation der relevanten Feldgrößen. Hierfür existiert bei der Elementformulierung eine Vielzahl von Möglichkeiten. Aufgrund der generellen Anwendbarkeit hat sich für die meisten Problemstellungen das *isoparametrische Konzept* durchgesetzt, bei dem die Geometrie wie auch die gesuchten Feldgrößen, z.B. Verschiebungen, mit den gleichen Ansatzfunktionen interpoliert werden. Ferner ist dieses Konzept sehr gut für nichtlineare Problemstellungen geeignet, vgl. [103]. Die einfachste derartige Formulierung führt auf ein lineares isoparametrisches Verschiebungselement, bei dem die Knotenverschiebungen und ggf. Rotationen die einzigen Freiheitsgrade sind und mithilfe von Polynomansatzfunktionen approximiert werden. Zur Effizienzsteigerung und Stabilisierung können von dieser Grundstruktur ausgehend die Elemente weiter optimiert werden.

Ansatzfunktionen Als weitere Kategorisierung lassen sich die Elemente über den Polynomgrad ihrer Ansatzfunktionen unterscheiden. Über einen höheren Polynomgrad der Ansatzfunktionen kann der Verschiebungszustand innerhalb des Elements nichtlinear abgebildet werden. Der Vorteil liegt damit in einer geringeren Elementanzahl zur Abbildung desselben Problems, die jedoch pro Element einen deutlich höheren Rechenaufwand mit sich bringt. Abbildung 3.3 zeigt ein klassisches 8-knotiges Hexaeder-Volumenelement mit linearen Ansatzfunktionen sowie ein 20-knotiges Volumenelement mit quadratischem Ansatz für die Verschiebungen.

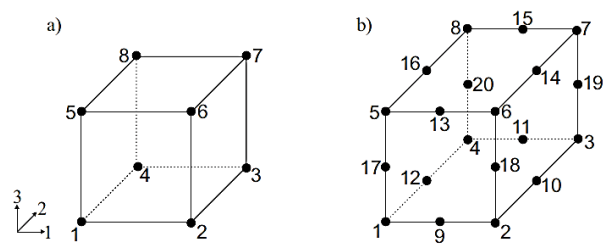


Abbildung 3.3: Volumenelement mit verschiedenen Ansatzfunktionen (aus [77])

Erweiterte Ansätze Zur Behebung von Schwächen der o.g. reinen Verschiebungselemente, wie z.B. Locking Effekte bei inkompressiblen Materialien oder Schubproblemen, und/oder zur Effizienzsteigerung existiert eine Vielzahl von Elementformulierungen mit erweiterten Ansätzen. Zu nennen sind z.B.

- Gemischte/hybride Elemente, z.B. B-Bar-Elemente

- Reduziert integrierte Elemente
- Elemente mit inkompatiblen Moden

Die Verwendung der spezifischen Elementformulierungen ist immer mit Vor- und Nachteilen verbunden und muss im Einzelfall geprüft werden.

3.3.3 Schublocking

Im Rahmen der Nachrechnung von Versuchen werden u.a. Volumenelemente mit linearem oder quadratischem Ansatz verwendet. Bei der Verwendung linearer Elemente kann es zum sogenannten Schublocking kommen, wie Abbildung 3.4 veranschaulicht. Aufgrund des linearen Ansatzes kann die Krümmung aus der Biegung nicht abgebildet werden, was zu einer Scherverzerrung an den GAUSSpunkten führt, obwohl keine Querkraft, die zu Schubspannungen korrespondiert, vorhanden ist. Damit ist das Element zu steif und bildet das vorliegende Biegeproblem nicht zutreffend ab. Abhilfe kann über verschiedene Ansätze geschaffen werden:

- Verwendung von höherwertigen, z.B. quadratischen Elementen
- Verwendung einer Stabilisierungsmethode
- feinere Vernetzung mit reduziert integrierten Elementen

Reduzierte Integration Die Integration des Elementes erfolgt mit weniger Integrationspunkten, so dass die fehlerhaften Schubverzerrungen damit unberücksichtigt bleiben. Für ein vormals 8-knotiges Volumenelement mit 8 GAUSSpunkten reduziert sich die Anzahl der GAUSSpunkte damit auf einen GAUSSpunkt in der Mitte. Der Nachteil dieser Methode liegt in der Gefahr des „Hourglassings“. Wie aus Abbildung 3.4 ersichtlich ist, kann sich dieses Element verformen, ohne dass im Integrationspunkt ebenfalls eine Verformung stattfindet. Die Verzerrung im GAUSSpunkt ist null, was zu fehlerhaften Ergebnissen führt. Zur Vermeidung dieses Effekts wurden verschiedene Stabilisie-

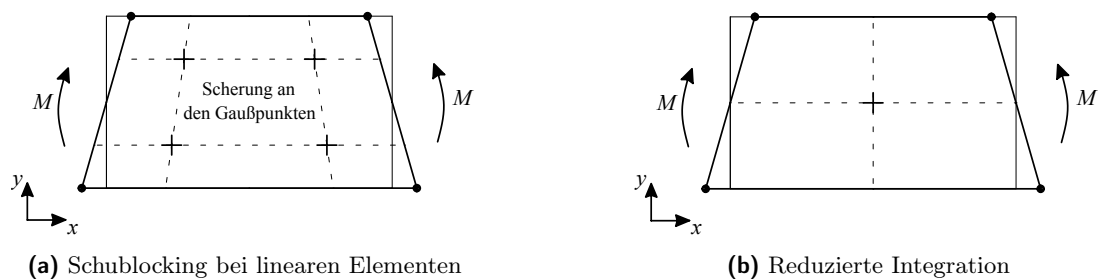


Abbildung 3.4: Schublocking und fehlendes Schublockings bei reduzierter Integration (aus [77])

rungsmethoden entwickelt, vgl. [103]. Eine feinere Vernetzung mit mehreren reduziert integrierten Elementen über die Höhe kann den Effekt zumindest vermindern, s. 3.5; vgl. auch [77].

Verwendung von quadratischen Elementen Zur Vermeidung von Schublocking können ferner Elemente mit Ansatzfunktionen höherer Polynomordnung verwendet werden, z.B. quadratische Elemente. Hiermit kann die Krümmung aus der Momentenbeanspruchung zutreffend, d.h. ohne fehlerhafte

Schubverzerrung, abgebildet werden. Aus Abbildung 3.5 ist der Effekt einer feineren Vernetzung über die Höhe sowie der Verwendung von quadratischen Elementen erkennbar. Werden mehrere Elemente über die Höhe verwendet, kann die Verformung aus der Biegung zumindest annähernd approximiert werden, ohne dass es zu fehlerhaften Schubverzerrungen kommt.

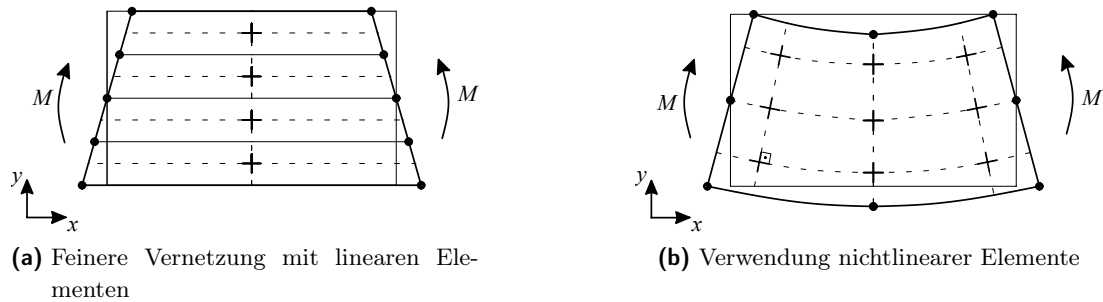


Abbildung 3.5: Maßnahmen zur Behebung des Schublockings (aus [77])

3.3.4 Anforderungen an die Modellierung von Stahlbetonstrukturen unter Schubbeanspruchung

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Finite Elemente Methode zur Nachrechnung von Versuchen an Stahlbetonbalken unter Schubbeanspruchung herangezogen. Das numerische Modell muss hierfür in der Lage sein, das physikalisch nichtlineare Materialverhalten zutreffend abzubilden. Die Grundlagen hierfür sind in Kapitel 4 zusammengefasst dargestellt, die Übertragung auf den Werkstoff Beton bzw. Stahlbeton erfolgt in Kapitel 5. Wichtigste Voraussetzung ist die Abbildung der Rissbildung des Betons, die zu einer Spannungsumlagerung in die Bewehrung und einem deutlich veränderten Tragverhalten führt. Hierbei ist die realistische Beschreibung der rissinduzierten Anisotropie des Werkstoffs Betons insbesondere unter Schubbeanspruchung von großer Wichtigkeit. Auf diesen Aspekt wird in Kapitel 5 ausführlich eingegangen. Die Modellierung in Bezug auf die Elementformulierungen ist grundsätzlich mit Scheibenelementen wie auch mit Volumenelementen möglich. Die Vereinfachung auf ein zweidimensionales Problem ist insofern gerechtfertigt, als dass für das Versagen eines Stahlbetonbalkens auf Schub entweder Bügelfließen oder das Versagen der Druckstrebe verantwortlich sind, und hierfür der Spannungszustand im Steg in guter Näherung als eben approximiert werden kann. Allerdings spielt die Materialmodellierung eine Rolle. Je nachdem, ob das Materialgesetz zwei- oder dreidimensional formuliert ist, ist die Abstimmung der Elementdimensionen hierauf erforderlich. Nicht zielführend ist dagegen eine Modellierung mit Balkenelementen, da die Entwicklung des Schubrissverhaltens im Steg und die Umlagerung der Spannungen in die Bügelbewehrung nicht nachvollzogen werden kann.

Kapitel 4

Grundlagen der nichtlinearen Materialtheorie

Im Rahmen dieser Arbeit werden bekannte und in kommerzieller FEM-Software implementierte Materialmodelle für Beton und Stahlbeton analysiert. Im folgenden Kapitel werden die für die Materialmodellierung von Beton und Stahlbeton relevanten Grundlagen der nichtlinearen Materialtheorie kurz aufgearbeitet und bereitgestellt. Der Fokus liegt auf den klassischen phänomenologischen Materialtheorien. Es wird hierbei auf die lineare und nichtlineare Elastizitätstheorie eingegangen. Die Plastizitätstheorie für kleine Verzerrungen und die Schädigungstheorie werden kurz dargestellt.

4.1 Einleitung

4.1.1 Konstitutive Gleichungen

Aus der Kinematik sowie den Gleichgewichtsbeziehungen lassen sich unter Berücksichtigung der Kompatibilitätsbedingungen zwischen Verzerrungen und Verschiebungen neun Gleichungen mit 15 Unbekannten (sechs Spannungen, sechs Verzerrungen sowie drei Verschiebungen) für den dreidimensionalen Fall bestimmen. Im Rahmen der Materialtheorie werden die fehlenden Bestimmungsgleichungen über sechs materialabhängige Beziehungen hergeleitet.

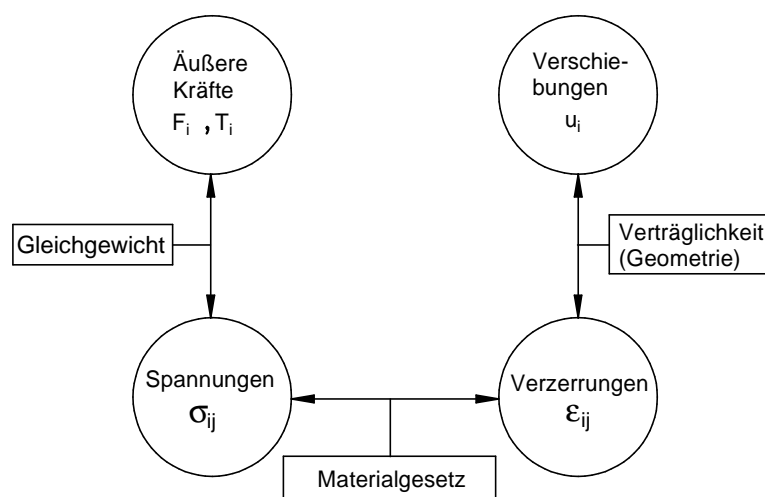


Abbildung 4.1: Verknüpfung von Spannungen und Verzerrungen

Diese sechs zusätzlichen Gleichungen werden auch als *konstitutive Gleichungen* der Materialien bezeichnet und stellen eine Verbindung zwischen den Spannungen und den Verzerrungen her. Abbildung 4.1 stellt den Zusammenhang zwischen Verschiebungen, Spannungen und Verzerrungen schematisch dar. Sobald diese konstitutiven Beziehungen für das jeweilige Material hergestellt sind, lässt sich das kontinuumsmechanische Problem lösen (vgl. [33], S.140).

Es ist das Ziel der konstitutiven Beziehungen, mathematische Modelle für das Material zu entwickeln, die das reale Materialverhalten möglichst zutreffend beschreiben. Die Herleitung erfolgt dabei i.d.R. auf der Grundlage der Thermodynamik unter Verwendung der Erkenntnisse über das Materialverhalten aus Experimenten. Gerade für Materialien, die sich durch ausgeprägt nichtlineares Materialverhalten auszeichnen, wie der Werkstoff Beton, ist die Bestimmung der konstitutiven Gleichungen nicht trivial. Daher existiert eine Vielzahl von Materialmodellen für den Werkstoff Beton. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Werkstoff Beton als homogenes Material idealisiert.

Konstitutive Prinzipien Die Herleitung der konstitutiven Gleichungen erfolgt in der Regel auf der Basis der thermodynamischen Bilanzgleichungen unter Beachtung weiterer Prinzipien, die die physikalische Richtigkeit der Theorie gewährleisten. Zu diesen Prinzipien gehören:

- Prinzip des Determinismus
- Prinzip der Äquipräsenz
- Prinzip der lokalen Wirkung
- Prinzip der materiellen Objektivität

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird nicht näher auf alle Prinzipien eingegangen, für weitergehende Ausführungen s. [103], [95],[43].

Objektivität Von besonderer Bedeutung bei der Herleitung von konstitutiven Materialgleichungen ist die Forderung der Objektivität. Das Materialgesetz muss gegenüber Beobachterwechseln invariant sein. Das bedeutet, dass die Werte der ermittelten Spannungen und Verzerrungen nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängig sein dürfen. Im Rahmen dieser Arbeit soll nicht näher auf das Problem der Objektivität eingegangen werden, es sei jedoch zumindest der Hinweis gegeben, dass bei der Herleitung bzw. Verwendung kontinuumsmechanischer Größen die Überprüfung, ob ebendiese Größen der Forderung nach Objektivität genügen, von großer Wichtigkeit ist.

Stabilitätsbedingung nach Drucker Eine weitere Einschränkung ist die sogenannte Stabilitätsbedingung von DRUCKER. Ein Material ist dieser Forderung zufolge dann stabil, wenn die Spannungsrate multipliziert mit der Verzerrungsrate immer positiv ist:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \geq 0 \tag{4.1}$$

Diese Bedingung kann für Materialien mit einer Entfestigung wie Beton nicht eingehalten werden. Dies führt in der numerischen Umsetzung zu einer Abhängigkeit der Ergebnisse von der Netzgröße und damit zur Notwendigkeit von Regularisierungsmaßnahmen, die die Objektivität der Ergebnisse dennoch gewährleisten. Dies geschieht üblicherweise mithilfe der Einbindung der Bruchenergie, die von der Elementgröße unabhängig sein muss. Hierauf wird bei der Modellierung der Rissbildung

näher eingegangen. Eine weitere Begleiterscheinung ist die Tatsache, dass eine Netzverfeinerung ohne Regularisierungsmaßnahmen im Entfestigungsbereich nicht zu verbesserten Ergebnissen führt, vgl. [46].

Durch die Beachtung der o.g. Prinzipien vereinfacht sich der Ansatz für die konstitutiven Gleichungen. Für die Bestimmung der konstitutiven Gleichungen werden im Rahmen der strukturmechanischen Theorie i.d.R. die Bewegung eines Körpers und seine Temperatur als konstitutive Variablen definiert. Alle anderen in den Bilanzgleichungen auftretenden Variablen werden als abhängige Variablen betrachtet. Für isotherme Prozesse können auch die Temperatur und ihre Ableitungen vernachlässigt werden.

Die Güte eines konstitutiven Modells zur Beschreibung des Verhaltens eines bestimmten Materials hängt in großem Maß von der Wahl eines geeigneten Sets interner Variablen ab. Kein Materialgesetz ist in der Lage, alle Spannungszustände während aller Prozesse richtig zu beschreiben. Die Gefahr bei der Entwicklung eines Materialgesetzes besteht darin, dass für bestimmte Fragestellungen wichtige Zustände nicht adäquat abgebildet werden.

4.1.2 Isotropie und Anisotropie

Ein Werkstoff kann durch isotropes oder anisotropes Materialverhalten gekennzeichnet sein. Diese Unterscheidung spielt eine große Rolle für die Herleitung eines adäquaten Materialmodells. Ein isotropes Material zeichnet sich durch identisches Materialverhalten in allen Richtungen aus, eine Drehung des Koordinatensystems verändert folglich nicht die Strukturantwort. Im Fall linearer Elastizität bedeutet das, dass die Richtung der Hauptspannungen mit der Richtung der Hauptverzerrungen übereinstimmt. Ferner muss dieselbe aufgebrachte Verzerrung in unterschiedlichen Materialrichtungen zu den denselben Spannungen führen. Mathematisch wird dies über die Anwendung des Rotationstensors \mathbf{R} , der eine Transformation des Koordinatensystems bewirkt, auf die Verzerrungen und die Spannungen beschrieben. Die Spannungen nach Multiplikation mit dem Rotationstensor müssen mit den Spannungen in Ausgangszustand übereinstimmen. Die Verknüpfung zwischen Spannungen und Verzerrungen erfolgt im Rahmen der kontinuumsmechanischen Theorien über einen vierstufigen Materialtensor mit den Koeffizienten C_{ijkl} . Aufgrund der Symmetrieeigenschaften lässt sich für einen vierstufigen, isotropen Tensors folgende Matrixdarstellung gewinnen:

Matrixdarstellung des isotropen vierstufigen Materialtensors

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_1 - C_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_1 - C_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_1 - C_2) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Einen derartigen isotropen Tensor stellt der aus dem HOOKEschen Gesetz hergeleitete Elastizitätstensor dar. Spielt die Richtung der Materialachsen relativ zum aufgebrachten Verzerrungszustand eine Rolle, handelt es sich um anisotropes Verhalten. Das Material verhält sich nun nicht mehr

in alle Richtungen gleich. Mathematisch erfordert dies einen vollbesetzten Tensor. Ein Sonderfall der Anisotropie ist die Orthotropie, bei der eine Drehung des Koordinatensystems um 180° zu demselben Spannungszustand führt. Die Symmetrierichtungen des Materials stimmen mit den Koordinatenachsen überein. Die Richtungen von Hauptspannungen und Hauptverzerrungen stimmen dagegen nur überein, wenn diese mit den Symmetrieachsen des Materials zusammenfallen. Beispiele für orthotrope Materialien sind der Werkstoff Holz, aber auch Beton. Aus der thermodynamischen Forderung nach der Symmetrie der Materialsteifigkeitsmatrix ergibt sich ein Tensor mit neun unabhängigen Koeffizienten. Die zugehörige allgemeine Matrixdarstellung eines orthotropen, vierstufigen Tensors lautet wie folgt:

Matrixdarstellung des orthotropen vierstufigen Materialtensors

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Im Rahmen der nichtlinearen Materialtheorien werden außerdem inkrementelle Beschreibungen der Spannungen und Verzerrungen benötigt. Die Inkremente der Spannungen werden wiederum mittels eines Materialtensors mit den inkrementellen Verzerrungen verknüpft. Die Einschränkungen für Isotropie bzw. Orthotropie bleiben bestehen, nun jedoch bezogen auf die Inkremente: Bei einem nichtlinearen isotropen Material stimmen die Richtungen der Spannungsinkremente mit den Richtungen der Verzerrungsinkremente überein. Dies bedeutet allerdings nicht, dass zwangsläufig auch die Hauptrichtungen der Gesamtverzerrungen mit den Hauptrichtungen der Gesamtspannungen übereinstimmen müssen. Im Rahmen der Plastizitätstheorie ist es möglich, dass sich aufgrund der Belastungsgeschichte ein anisotropes Materialverhalten einstellt. Dies hat eine Kopplung von Schubverzerrungen mit Normalspannungen bzw. umgekehrt zur Folge, d.h. Schubverzerrungen erzeugen Normalspannungen bzw. Normalverzerrungen erzeugen Schubspannungen.

4.2 Elastizitätstheorie

Ein elastisches Material ist dadurch gekennzeichnet, dass es nach Be- und Entlastung vollständig seine ursprüngliche Gestalt wiedererlangt. Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen kann hierbei nichtlinear oder linear sein. Viele Materialien verhalten sich bis zu einem gewissen Punkt linear-elastisch, d.h. die Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen ist linear. Nach Überschreiten der sogenannten Proportionalitätsgrenze kann sich ein nichtlinear-elastisches Verhalten anschließen. Die Herleitung von elastischen Materialgesetzen zur Beschreibung des linearen wie auch nichtlinearen Materialverhaltens kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Zunächst ist zwischen pfadunabhängigen und pfadabhängigen Materialmodellen zu unterscheiden. Pfadunabhängige Modelle hängen nur vom aktuellen Verzerrungszustand ab und besitzen kein Erinnerungsvermögen, die infolge der Belastung entstandenen Deformationen sind nach Wegnahme der Belastung

voll reversibel. Die Spannungen können direkt aus den aktuellen Verzerrungen ermittelt werden. Im Rahmen der Elastizitätstheorie fallen CAUCHY – und *hyperelastische* Materialien unter diese Klasse. Daneben existieren *hypoelastische* Materialien, die inkrementell formuliert sind. Das aktuelle Spannungsinkrement hängt vom aktuellen Verzerrungsinkrement und ggf. anderen Größen ab. Bei kleinen Änderungen ist das Material vollständig reversibel und elastisch, bei großen Verzerrungen ist aufgrund der inkrementellen Formulierung jedoch die Integration über die Verzerrungsinkremente zur Ermittlung der Spannungen aus der Dehnungsgeschichte erforderlich. Hypoelastischen Materialien können zu CAUCHY – oder GREEN – elastischen Materialien degenerieren.

4.2.1 Cauchy – Elastizität

Ein CAUCHY – elastisches Material zeichnet sich dadurch aus, dass der aktuelle Spannungszustand lediglich vom aktuellen Verzerrungszustand abhängt, was sich durch folgenden funktionalen Zusammenhang ausdrücken lässt:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{ij}) \quad (4.4)$$

Dabei sind F_{ij} die elastische Antwortfunktion und σ_{ij} bzw. ε_{ij} die Komponenten des Spannungsbzw. Verzerrungstensors. Das elastische Verhalten ist pfadunabhängig und reversibel; die Belastungsgeschichte ist für die Bestimmung des aktuellen Spannungszustands nicht relevant. Allerdings besteht ohne weitere Einschränkungen die Gefahr, dass ein derartiges konstitutives Materialgesetz bei bestimmten Be- und Entlastungsvorgängen Energie erzeugt. Dies wird durch die Formulierung GREEN-hyperelastischen Materialgesetzen vermieden, die im folgenden Abschnitt näher beschrieben werden.

4.2.2 Hyperelastizität

Die klassische Elastizitätstheorie ist strenggenommen Teil der sogenannten *Hyperelastizität*, die einen pfadunabhängigen, vollständig reversiblen Prozess beschreibt. Im Gegensatz zu den zuvor beschriebenen CAUCHY-elastischen Materialien erfolgt die Herleitung jedoch über die Folgerungen aus dem 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik und einer Verknüpfung der Spannungen und Verzerrungen über die sogenannte *Formänderungsenergie*. Die Basis ist dabei die freie HELMHOLTZsche Energie mit definierten Prozessvariablen, i.d.R. den Verzerrungen, der Temperatur sowie deren Gradient. Für elastische Festkörper wird gefordert, dass bei isothermen Prozessen die freie HELMHOLTZ-Energie nur von den Verzerrungen als einziger Prozessvariablen abhängt:

$$\psi \stackrel{!}{=} \psi(\mathbf{F}) \quad \text{bzw.} \quad \psi \stackrel{!}{=} \psi(\mathbf{E}) \quad (4.5)$$

Im Folgenden sollen zunächst Zusammenhänge für einen homogenen ideal elastischen, isotropen Körper unter isothermen Randbedingungen hergeleitet werden. Der Spannungstensor hängt in diesem Fall nur von der aktuellen Deformation ab, nicht von der Deformationsgeschichte. Der ermittelten Spannungen sind also wegunabhängig, vgl. Gl. (4.6).

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}) \quad (4.6)$$

Gilt diese Wegunabhängigkeit auch für die von den Spannungen geleistete Arbeit, spricht man von einem hyperelastischen Körper und es gilt:

$$\int_{t_0}^t \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} dt = \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{F} = \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} dW = W(\mathbf{F}) - W(\mathbf{F}_0) \quad (4.7)$$

Es wird in diesem Fall eine spezifische *Formänderungsenergiefunktion* der Form $W_{0S} = \hat{W}_{0S}(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ formuliert, die eine Potentialfunktion für den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor darstellt:

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \frac{\partial \hat{W}_{0S}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \quad (4.8)$$

Aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich unter Berücksichtigung der o.g. konstitutiven Prinzipien die Formänderungsenergie aus der Forderung, dass die Spannungen nur von den aktuellen Verzerrungen abhängen sollen, folgendermaßen mit der HELMHOLTZ-Energie verknüpfen: Für den elastischen, reversiblen Körper ohne Entropieproduktion gilt Gl. (2.119). Fordert man von der freien HELMHOLTZ-Energiefunktion ψ_0 ebenfalls, dass diese nur von \mathbf{F} abhängt, gilt:

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, t) \quad (4.9)$$

Für das vollständige Differential der HELMHOLTZ Energie lässt sich schreiben:

$$\dot{\psi}_0 = \frac{d\psi_0}{dt} = \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} \quad (4.10)$$

Setzt man diese Beziehung für ψ in Gl. (2.119) ein, erhält man:

$$-\rho_0 \dot{\psi}_0 + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = -\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad (4.11)$$

Zwischen der als Dichte formulierten Formänderungsenergie W_{0S} und der spezifischen HELMHOLTZ Energie ψ_0 gilt also der Zusammenhang:

$$W_{0S} = \rho_0 \psi_0, \quad (4.12)$$

wodurch Gl. 4.8 auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.13)$$

Durch die Betrachtung von anderen assoziierten Größen in Gl. (4.8) lassen sich auf analoge Weise Zusammenhänge für die anderen Spannungstensoren entwickeln:

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.14)$$

Über die zuvor dargestellten Ableitungen der HELMHOLTZ- Energie bzw. der Formänderungsenergie wird der gewünschte Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen hergestellt, das konstitutive Materialgesetz, das die Lücke zwischen den Gleichgewichtsbedingungen einerseits und

den kinematischen Bedingungen andererseits schließt. Abhängig von der Wahl der HELMHOLTZ-Energie ist ein linearer oder nichtlinearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen gegeben.

Die Spannungen sind von der Verzerrung \mathbf{E} abhängig, die wiederum von den Verschiebungen \mathbf{u} abhängen. Es gilt also:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \quad (4.15)$$

Es kann sich hierbei auf beiden Ebenen um einen nichtlinearen Zusammenhang handeln.

Lineare Elastizität: St. Venant-Kirchhoff-Material Aus den vorgestellten Beziehungen zwischen Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen lassen sich verschiedene elastische Materialgesetze herleiten. Ein einfaches isotropes elastisches Materialgesetz ist das ST. VENANT-KIRCHHOFF Material, das sich aus der Linearisierung der Spannungen bezogen auf die Verzerrungen entwickeln lässt. Hierbei wird der nichtlineare funktionale Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen durch die Linearisierung der Spannungen in der Umgebung der Referenzkonfiguration approximiert. Diese Approximation ist ausreichend genau, solange die Anwendung auf kleine Verzerrungen beschränkt bleibt. Die Linearisierung erfolgt über eine TAYLORreihenentwicklung. Für die Linearisierung der Spannungen in Bezug auf die Verzerrungen bedeutet das (vgl. S.197 [95]):

$$\text{Lin} [\mathbf{S}]_{\mathbf{E}} = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{E}}) + \overline{\mathbf{DS}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{E}}) + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}(\bar{\mathbf{E}}) : \mathbf{E} \quad (4.16)$$

Der lineare Anteil $\overline{\mathbf{DS}} \cdot \mathbf{E}$ entspricht der Richtungsableitung des Spannungstensors bezogen auf eine Veränderung der Verzerrungen. Für die Approximation der Spannung \mathbf{S} durch ihre Linearisierung gilt folgende Fehlerabschätzung:

$$\mathbf{S} = \text{Lin} [\mathbf{S}]_{\mathbf{E}} + o(\|\mathbf{E}\|), \quad (4.17)$$

d.h. in der Umgebung der Referenzkonfiguration stimmt die linearisierte Spannung $\text{Lin} [\mathbf{S}]_{\mathbf{E}}$ bis auf den Fehler $o(\|\mathbf{E}\|)$ mit der tatsächlichen Spannung \mathbf{S} überein.

Zur Herleitung des ST. VENANT-KIRCHHOFF Materials wird Formänderungsenergie in Abhängigkeit von den Verzerrungsinvarianten ausgedrückt und die Linearisierung der Invarianten an der unverformten Referenzkonfiguration herangezogen. Es lässt sich zeigen, dass für jedes isotrope, elastische Material folgende Bestimmungsgleichung in der Nähe der spannungsfreien Referenzkonfiguration gilt:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|) \quad (4.18)$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung ergibt sich der lineare Zusammenhang zwischen den Spannungen \mathbf{S} und den Verzerrungen \mathbf{E} :

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{E}) = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (4.19)$$

Beim ST. VENANT-KIRCHHOFF-Material wird also direkt eine lineare Beziehung zwischen den Spannungen und Verzerrungen formuliert. Allerdings ist der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor

nichtlinear von den Verschiebungen \mathbf{u} abhängig, da \mathbf{E} die nichtlinearen Anteile $\text{grad } \mathbf{u}^T \text{ grad } \mathbf{u}$ enthält. Durch diese nichtlineare Beziehung können trotz kleiner Verzerrungen große Verschiebungen auftreten, es handelt sich um ein materiell lineares, aber geometrisch nichtlineares Materialgesetz. Das Materialgesetz kann mit folgendem Ansatz für die Formänderungsenergiedichte formuliert werden:

$$W = \hat{W}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr } \mathbf{E}^2 \quad (4.20)$$

Die Spannungen können dann auch mit der Ableitung der Formänderungsenergiedichte nach dem GREENSchen Verzerrungstensor ausgedrückt werden:

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda (\text{tr } \mathbf{E}) \mathbf{I} \quad (4.21)$$

Über die Ableitung der Spannungen nach den Verzerrungen ergibt sich nach Gl. (4.16) der Materialtensor \mathbb{C} , der auch *Elastizitätstensor* genannt wird:

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I} \quad (4.22)$$

Damit kann die Formänderungsenergiefunktion auch in der Form

$$W = \hat{W}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : (\mathbb{C} : \mathbf{E}) \quad (4.23)$$

dargestellt werden. Der vierstufiger Materialtensor \mathbb{C} hängt offensichtlich nicht mehr vom Verschiebungszustand ab und ist somit konstant. Die Matrixdarstellung folgt in Ausdruck (4.28).

Die Ableitung der Spannungen nach den Verzerrungen kann auch in Abhängigkeit von der freien HELMHOLTZ-Energie formuliert werden:

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = 4\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (4.24)$$

Die Formulierung des Materialgesetzes mit Gl. (4.16) oder Gl. (4.19) führt auf denselben Zusammenhang, da das ST VENANT-KIRCHHOFF-Material per Definition linear formuliert ist.

Hookesches Gesetz Eine vollständig lineare Beziehung stellt das HOOKESche Gesetz dar: Statt des in \mathbf{u} nichtlinearen Verzerrungstensor \mathbf{E} wird der linearisierte Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ verwendet. Es lässt sich zeigen, dass die linearisierten Spannungen in der Nähe der Referenzkonfiguration zusammenfallen ([95]):

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{Lin}[\mathbf{S}]_{\mathbf{u}} = \text{Lin}[\mathbf{P}]_{\mathbf{u}} = \text{Lin}[\mathbf{T}]_{\mathbf{u}} \quad (4.25)$$

Damit erhält man das bekannte Werkstoffgesetz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.26)$$

bzw. in Indexschreibweise:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.27)$$

Bei \mathbf{C} handelt es sich um den schon bekannten Elastizitätstensor aus Gl. (4.22). Dieser weist die Struktur eines vierstufigen, isotropen Tensors auf und erfordert dadurch lediglich die Kenntnis von zwei Materialparametern. Die Gleichung (4.27) ist die einfachste Verallgemeinerung einer linearen Abhängigkeit von Spannungen zu Verzerrungen. Die Materialparameter können bei einem üblichen Zugversuch bestimmt werden kann, der im englischen Sprachraum als HOOKE's *experiment* bekannt ist. Daher wird Gl. (4.27) auch als *verallgemeinertes HOOKEsches Gesetz* bezeichnet. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften lässt sich der vierstufige Tensor auch in Matrixschreibweise darstellen und korrespondiert dann mit den Verzerrungen und Spannungen in VOIGT-Notation:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Statt mit den LAMÉ-Konstanten lässt sich das Materialgesetz auch mit dem Kompressionsmodul K und dem Schubmodul G ausdrücken:

$$\boldsymbol{\sigma} = K \boldsymbol{\varepsilon}_{vol} \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} \quad (4.29)$$

Hierbei sind $\boldsymbol{\varepsilon}_{vol}$ der volumetrische Anteil der Verzerrung, der nur mit dem hydrostatischen Spannungsanteil verbunden ist, und $\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}$, der ausschließlich mit dem deviatorischen, also gestaltändernden Anteil, den Schubspannungen gekoppelt ist.

Hauptachsen Als wichtige Anmerkung sei festgehalten, dass die Hauptachsen der Verzerrungen und der Spannungen für die vorgenannten elastischen Materialien zusammenfallen [17]. Dies ist aus Gl. (4.29) ersichtlich.

Nichtlineare Hyperelastizität Die bisher vorgestellten hyperelastischen Materialmodelle sind materiell linear. Es können jedoch auch nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehungen mit dieser Klasse von Materialmodellen abgebildet werden. Beispielsweise kann die Formänderungsenergiefunktion in Abhängigkeit von den Verzerrungsinvarianten dargestellt werden, die funktional auf unterschiedliche Weise kombiniert werden können. Eine weitere Möglichkeit ist die Modifikation von Materialparametern wie dem Elastizitätsmodul, der als Funktion abhängig von den Hauptspannungen bzw. durch die drei Spannungsinvarianten I_1 , J_2 und J_3 ausgedrückt werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf derartige Modelle nicht weiter eingegangen, Details können der weiterführenden Literatur, z.B. [33],[17] entnommen werden.

4.2.3 Hypoelastizität

Neben den hyperelastischen Modellen existieren zur Beschreibung von nichtlinear elastischem Materialverhalten auch Modelle einer Materialklasse, die *hypoelastisch* genannt werden und auf einer inkrementellen Spannungs-Verzerrungs-Beziehung beruhen. Die konstitutiven Beziehungen können

wie folgt beschrieben werden:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (4.30)$$

Die Rate der Spannungen ist eine Funktion der Rate der Verzerrungen und des aktuellen Wertes der Spannung, der ggf. vom Spannungspfad, der zum aktuellen Zustand geführt hat, abhängt, vgl. [17]. Für den isotropen Fall lässt sich das Materialgesetz weiter konkretisieren und inkrementell linear darstellen:

$$d\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl} \quad (4.31)$$

Der hier benötigte Tensor \mathbb{C}_{ijkl} wird als *tangentiale Materialsteifigkeit* bezeichnet, d.h. im Gegensatz zu nicht inkrementell formulierten hyperelastischen Modellen basiert ein inkrementell formuliertes hypoelastisches Material nicht auf dem Sekanten- sondern Tangentenmodul [33]. Im Rahmen eines hypoelastischen Materialgesetzes wird die aktuelle Materialsteifigkeit direkt in Abhängigkeit von den Raten der Spannungen und Verzerrungen beschrieben. Das Materialverhalten ist inkrementell reversibel, jedoch bei größeren Verformungen pfadabhängig. Mit einem hypoelastischen Modell ist es zwar grundsätzlich möglich, einen pfadabhängigen Prozess anzunähern, im Gegensatz zu plastischen Modellen werden jedoch keine inelastischen Deformationen berücksichtigt.

Die Schwierigkeit bei klassischen hypoelastischen Materialien liegt darin, dass die Materialsteifigkeitsmatrix im nichtlinearen Bereich durch die Formulierung in Raten anisotrop werden kann, selbst wenn ursprünglich isotropes Verhalten vorliegt. Dies bedeutet, dass das Verhalten in den Hauptspannungsrichtungen unterschiedlich ist und die Hauptachsen von Spannungen und Verzerrungen nicht mehr identisch sind. Dies führt zu einer Kopplung von Normalspannungen mit Schubverzerrungen, was für den allgemeinen dreiaxialen Spannungszustand die Definition von 21 Materialkonstanten für jeden Punkt des Belastungspfades erfordert, eine Aufgabe, die in der Praxis nicht zu bewältigen ist. Eine zweite Schwierigkeit betrifft ein Kriterium für Be- und Entlastung. Hier, wie auch in hyperelastischen Modellen, ist es möglich, dass z.B. eine Belastung auf Schub begleitet wird von einer Entlastung von Komponenten in Normalenrichtung. Dies erschwert eine geeignete Konstruktion der tangentialen Materialsteifigkeit. Trotz dieser Schwierigkeiten wurden einige sehr vereinfachte hypoelastische Modelle für Beton entwickelt, s. hierzu [17].

4.2.4 Konzept der äquivalenten einaxialen Verzerrungen

Das Konzept der äquivalenten einaxialen Dehnungen bzw. Verzerrungen wurde von DARWIN und PECKNOLD [19] zunächst für den zweidimensionalen Spannungszustand entwickelt. Es handelt sich im Grundsatz um ein inkrementell orthotropes Gesetz und kann zu den vereinfachten hypoelastischen Materialgesetzen gezählt werden. Das Ziel ist es dabei, bei der Ermittlung der Spannungen die beiden in der Realität miteinander verknüpften Richtungen zu entkoppeln, also den Effekt der Querdehnung zu eliminieren. Dieses Materialgesetz spielt in der numerischen Simulation von Stahlbeton eine wichtige Rolle, da es in verschiedenen kommerziellen Programmsystemen implementiert ist, u.a. SOFISTIK und ATENA. Ausgangspunkt ist zunächst die inkrementelle orthotrope Formulierung für einen zweidimensionalen Spannungszustand unter der Annahme der Forminvarianz des

Schubmoduls G :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} E_1 & \mu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \text{sym} & E_2 & 0 \\ & & \frac{1}{4}(E_1 + E_2 - 2\mu\sqrt{E_1E_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\text{mit } \mu^2 = \nu_1\nu_2$$

Es wird nun die Querdehnung elimiert, wodurch die beiden Richtungen entkoppelt werden. Zunächst wird Gl. (4.32) wie folgt ausgedrückt:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} E_1B_{11} & E_1B_{12} & 0 \\ E_2B_{21} & E_2B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= E_1 (B_{11}d\varepsilon_1 + B_{12}d\varepsilon_2) \\ d\sigma_2 &= E_2 (B_{21}d\varepsilon_1 + B_{22}d\varepsilon_2) \\ d\tau_{12} &= Gd\gamma_{12}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

bzw. in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

mit

$$d\varepsilon_{iu} = B_{i1}d\varepsilon_1 + B_{i2}d\varepsilon_2 \quad (4.36)$$

Diese Beziehung entspricht formal derjenigen für einaxiale Spannungszustände. Daher wird der Vektor auf der rechten Seite der Vektor der *inkrementellen äquivalenten einaxialen Verzerrungen* genannt. Die äquivalenten einaxiale Dehnung $d\varepsilon_{iu}$ kann also wie folgt beschrieben werden:

$$d\varepsilon_{iu} = \frac{d\sigma_i}{E_i} \quad (4.37)$$

Diese Verzerrung kann als die Verzerrung aufgefasst werden, die von der Spannung σ_i für einen einaxialen Zustand mit dem E-Modul E_i hervorgerufen würde. Es handelt sich um einen fiktiven Verzerrungszustand, der den Vorteil hat, dass die nichtlineare Spannungskurve nur von der Spannung σ_i abhängt. Somit können zwei-axiale Spannungs-Dehnungs-Zustände mit einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen beschrieben werden. Abbildung 4.2 veranschaulicht das Konzept.

Für die einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Werkstoffs Beton wird oft die Funktion nach SAENZ verwendet [33].

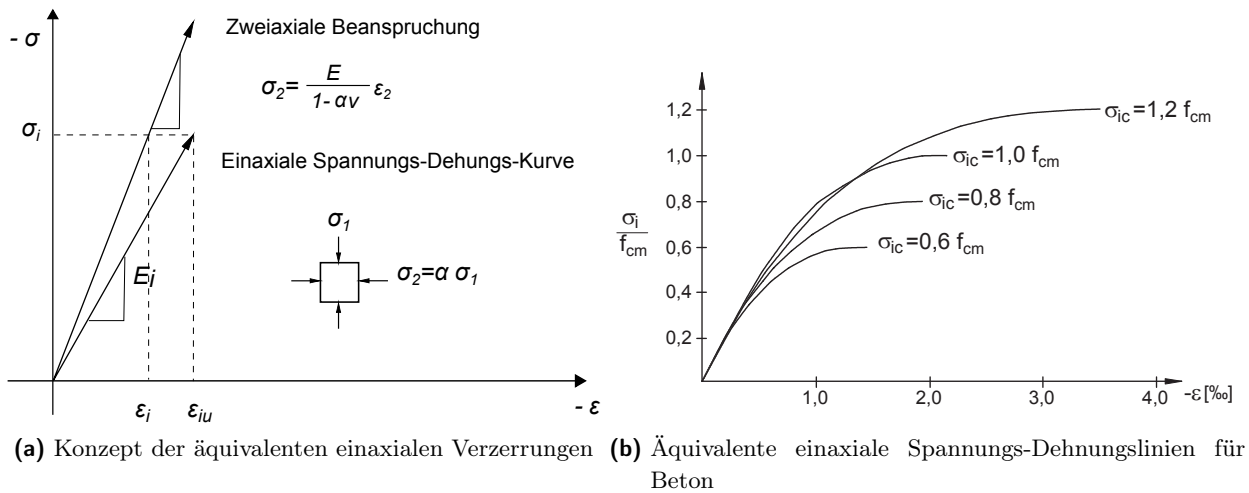


Abbildung 4.2: Konzept der äquivalenten einaxialen Verzerrungen

4.3 Plastizitätstheorie für kleine Verzerrungen

4.3.1 Einführung

Mit der Plastizitätstheorie lassen sich phänomenologisch irreversible Prozesse mit plastischen, d.h. bleibenden Verzerrungen beschreiben. Im Gegensatz zur vorher beschriebenen nichtlinearen Elastizitätstheorie werden somit neben dem nichtlinearen Materialverhalten auch Entlastungen und damit die Belastungsgeschichte berücksichtigt. Dadurch besteht kein eindeutiger Zusammenhang mehr zwischen Spannungen und Dehnungen. Abbildung 4.3 veranschaulicht schematisch den Unterschied zwischen Elastizität und Plastizität.

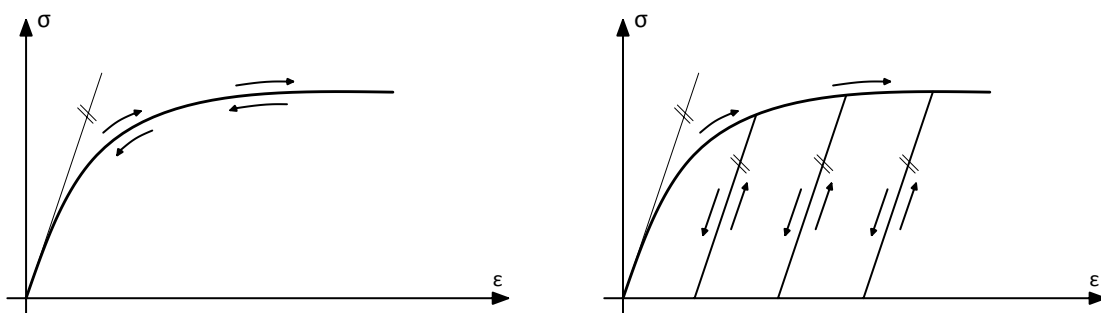


Abbildung 4.3: Vergleich zwischen elastischem und plastischem Verhalten

Im Folgenden wird eine kurze Übersicht über das Konzept der Materialmodellierung mittels der Plastizitätstheorie gegeben und ihre Anwendung für Beton umrissen. Die Beschreibungen folgen größtenteils [94], [93], [84] sowie [47].

4.3.2 Allgemeines konstitutives Modell

Im Rahmen der Plastizitätstheorie werden die Verzerrungen in Abhängigkeit von den Spannungen, der Temperatur und einem Set von internen Variablen dargestellt, die das irreversible Materialverhalten steuern:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = f(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \mathbf{q}) \quad (4.38)$$

Im Rahmen kleiner Verzerrungen wird wie zuvor dargestellt der nichtlineare Anteil der Verzerrungen vernachlässigt. Statt mit dem vollständigen Verzerrungstensor \mathbf{E} wird das plastische Materialgesetz mit den linearisierten Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ formuliert. Bei kleinen Deformationen gilt in guter Näherung eine additive Zerlegung der Verzerrungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (4.39)$$

s. auch Abbildung 4.4. Die dargestellte Ratenformulierung $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ist erforderlich, da die Evolution der

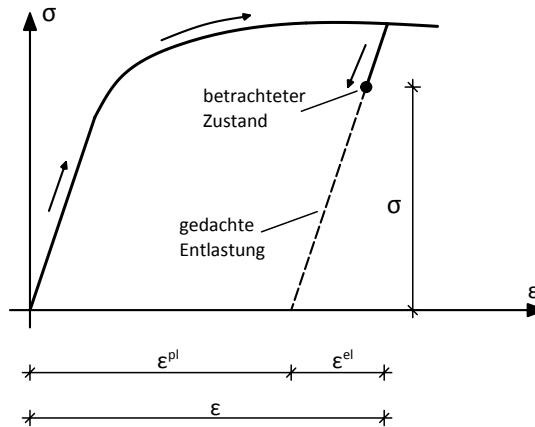


Abbildung 4.4: Additive Zerlegung der Verzerrungen

plastischen Verzerrungen und ggf. der Verfestigung im Rahmen dieses Modells inkrementell erfolgt. Sie beschreibt hierbei keine reale Zeitabhängigkeit, sondern lediglich eine Pseudozeit.

Grundgleichungen Ein plastisches Materialmodell auf Basis kleiner Verzerrungen beruht auf folgenden Annahmen und Beziehungen:

- der Trennung der Verzerrungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.40)$$

- der Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den elastischen Anteil

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.41)$$

- einem Fließkriterium zur Beurteilung, ob für einen bestimmten Spannungszustand elastisches oder plastisches Materialverhalten vorliegt

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (4.42)$$

- einer Fließregel zur Beschreibung der Evolution der plastischen Verzerrungen

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (4.43)$$

- sowie einem Verfestigungsgesetz, das aus zwei Teilen besteht: der Definition der Verfestigungsvariablen, normalerweise in Form einer Ratengleichung

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (4.44)$$

und der Beziehung der internen Variablen \mathbf{q} zu den Verfestigungsparametern,

$$\mathbf{q} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}) \quad (4.45)$$

Im Folgenden werden die einzelnen Gleichungen näher erläutert.

4.3.3 Thermodynamische Herleitung des elasto-plastischen Materialgesetzes

Plastisches Materialverhalten zeichnet sich dadurch aus, dass nach Überschreiten der Fließgrenze bei Entlastung irreversible Verzerrungen zurückbleiben. Thermodynamisch gehen irreversible Prozesse mit einer Energiedissipation einher. Bei der Plastizitätstheorie wird angenommen, dass die Energiedissipation ausschließlich durch die Entstehung der plastischen Verzerrungen erfolgt. Ein thermodynamisch konsistentes Materialgesetzes kann beispielsweise mit folgendem Ansatz für die freie HELMHOLTZ-Energie hergeleitet werden:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\kappa}) \quad (4.46)$$

Hierbei wird die freie HELMHOLTZ-Energie abhängig von drei internen Variablen, der gesamten Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}$, der plastischen Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ sowie einem Set interner Verfestigungsvariablen $\boldsymbol{\kappa}$ formuliert und in einen elastischen und einen plastischen Anteil additiv aufgesplittet, vgl.[94]:

$$\begin{aligned} \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\kappa}) &= \psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\kappa}) \\ &= \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\kappa}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung für isotherme Prozesse im Rahmen der Theorie kleiner Verzerrungen lautet:

$$-\rho_0 \dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \quad (4.48)$$

Für die zeitliche Ableitung der Energiefunktion ergibt sich:

$$\rho_0 \dot{\psi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} \quad (4.49)$$

Eingesetzt in die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung und unter Beachtung von Gl. (4.39) erhält man:

$$\begin{aligned} &-\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} \right) + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \geq 0 \\ \Rightarrow & \quad (4.50) \\ &(\boldsymbol{\sigma} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}}_{P_{dis}} \geq 0 \end{aligned}$$

Da die freie Energie unabhängig von $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ formuliert wurde, entfällt die Ableitung der freien Energie nach dieser Variablen. Diese Ungleichung muss für beliebige Raten der Prozessvariablen erfüllt werden, da diese durch die Prozessführung von außen beliebig gesteuert werden können. Dadurch ergibt sich das allgemeine elastische Materialgesetz für die Spannungs- Verzerrungsbeziehung für den elastischen Verzerrungsanteil aus der linearisierten Form Gl. (4.14):

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.51)$$

sowie die plastische Dissipationsungleichung

$$P_{dis} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0 \quad (4.52)$$

Hierbei wird für die Ableitung der freien Energie nach der Verfestigungsvariablen $\boldsymbol{\kappa}$ die spannungs- äquivalente Variable \mathbf{q} eingeführt:

$$\mathbf{q} := \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}}, \quad (4.53)$$

die im englischen Sprachgebrauch als *hardening thermodynamical force* bezeichnet wird und energetisch mit der Verfestigungsvariablen $\boldsymbol{\kappa}$ assoziiert ist. Aus der thermodynamischen Betrachtung lassen sich somit das elastische Materialgesetz sowie die plastische Dissipationsungleichung gewinnen, über die die Verfestigung gesteuert wird. Die Spannungen werden lediglich durch den elastischen Teil der Verzerrungen verursacht; im Rahmen der Verfestigung wird der Raum der zulässigen elastischen Spannungen vergrößert bzw. bei einer Entfestigung verkleinert.

Energiedissipation Die dissipierte Energie bzw. die plastische dissipierte Arbeit, s. Gl. (4.54) entspricht der Fläche unter dem Graphen aus Abbildung 4.5. Sie entsteht aufgrund der plastischen Mechanismen (z.B. Kristallgitterverschiebung) und kann nicht wiedergewonnen werden.

$$w^p = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \quad (4.54)$$

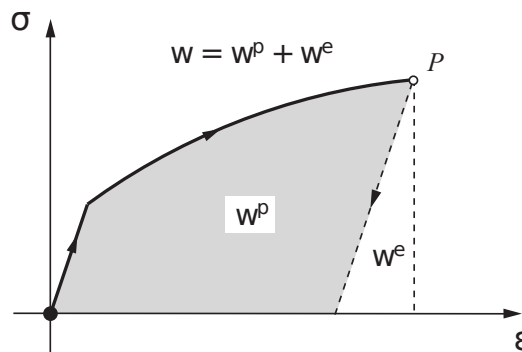


Abbildung 4.5: Energiedissipation, entnommen aus [94]

4.3.4 Fließkriterium

Zur Abgrenzung des linear-elastischen von plastischem Materialverhalten wird ein Fließkriterium eingeführt. Plastische Verzerrungen treten hiernach erst auf, sobald ein kritischer, materialspezifischer Wert, die Fließgrenze, überschritten wird. Diese Grenze wird durch die Fließfunktion definiert, die sich als Fläche im dreidimensionalen Hauptspannungsraum interpretieren lässt. Es handelt sich hierbei um eine skalare Funktion. Für alle Spannungszustände innerhalb dieser Fläche mit $\Phi < 0$ liegt elastisches Verhalten vor, alle Spannungszustände auf der Fläche mit $\Phi = 0$ repräsentieren plastisches Verhalten, $\Phi > 0$ ist nicht möglich. Allerdings können sich Form und Größe der Fließfläche mit wachsenden Variablen \mathbf{q} ändern. Die Variablen \mathbf{q} steuern die Verfestigung und führen dann je nach Verfestigungsgesetz zu einer schrumpfenden, sich ausdehnenden oder verschobenen Fließfläche.

An dieser Stelle ist es wichtig, die Fließfläche von der Bruchfläche zu unterscheiden. Während das Fließkriterium den Übergang von linear-elastischem zu nichtlinearem Materialverhalten beschreibt, stellt Bruchfläche die maximal aufnehmbaren Spannungen des Materials, die Festigkeit, dar. Unter einem kraftgesteuerten Versuch versagt das Material an dieser Stelle; bei einem weggesteuerten Versuch kann sich ein entfestigendes Verhalten anschließen, bei dem die Spannungen mit zunehmenden Verzerrungen abfallen.

Die Fließfunktion Φ ist vom gegebenen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und den internen Verfestigungsvariablen \mathbf{q} abhängig:

$$E_{\boldsymbol{\sigma}} := \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) | \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (4.55)$$

Zur Erfüllung der Fließbedingung sind alle Spannungszustände zulässig, für die gilt:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (4.56)$$

Für die Beschreibung der Fließbedingung hat sich die Formulierung in Invarianten durchgesetzt. Dabei werden in der Regel die schon bekannten Invarianten von Spannungstensor und Deviator verwendet:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

mit den Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 . Das Fließkriterium für einen ideal-plastischen Werkstoff ohne Verfestigung kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = F(\boldsymbol{\sigma}) - k = 0 \quad (4.57)$$

Hierbei stellt k einen aus Versuchen zu bestimmender Materialparameter dar.

Fließbedingungen unabhängig vom hydrostatischen Druck Eine der bekanntesten Fließfunktionen stellt die VON-MISES-Fließbedingung dar, die im Rahmen von Plastizität bei Metallen Anwendung findet. Sie lautet in Invarianten-Darstellung:

$$\Phi(J_2) = J_2 - k_0 = 0 \quad (4.58)$$

Die VON-MISES-Fließbedingung sagt aus, dass das Fließen ausschließlich von den Schubspannungen abhängt, also unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand ist. Dies lässt sich auch an der VON-MISES-Fließbedingung ablesen, die lediglich von J_2 abhängig ist. Im dreidimensionalen Hauptspannungsraum stellt die Fließbedingung einen Zylinder mit der hydrostatischen Achse ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) als Mittelachse dar, s. Abbildung 4.6a.

Der Parameter k_0 korrespondiert somit zur maximal aufnehmbaren Schubspannung des Materials. Diese kann aus der sehr einfach aus einem einaxialen Zugversuch zu bestimmende Fließspannung σ_0 ermittelt werden. Für einaxialen Spannungszustand gilt $J_2 = \sigma_1^2/3$ und somit:

$$k_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (4.59)$$

Fließbedingungen abhängig vom hydrostatischen Druck Bei bestimmten Materialien wie Böden oder Beton ist die Schubtragfähigkeit bzw. die Fließgrenze abhängig vom hydrostatischen Spannungszustand und nimmt mit größeren hydrostatischen Druckspannungszuständen beträchtlich zu. Weiterhin erfahren diese Materialien im Rahmen der Plastifizierung eine Volumenänderung. Die Fließfunktion muss in der Lage sein, diese beiden Phänomene realistisch abzubilden. Eine Annäherung an dieses Verhalten stellt beispielsweise die Fließfunktion nach DRUCKER-PRAGER dar, die auch in der Bodenmechanik verwendet wird:

$$\Phi(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k_0 = 0 \quad (4.60)$$

Geometrisch handelt es sich um einen Kegel im Hauptspannungsraum, siehe Abb. 4.6b. Mit dem Parameter α kann der Einfluss des hydrostatischen Anteils gesteuert werden. Während der Einfluss

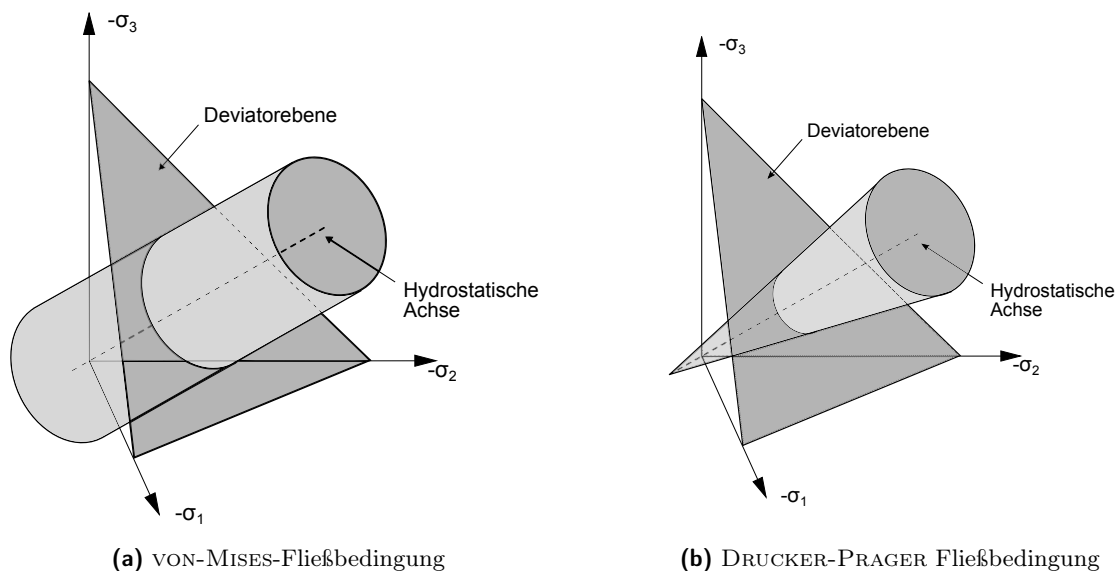


Abbildung 4.6: Fließbedingungen

des hydrostatischen Spannungszustandes damit berücksichtigt wird, beschreibt die Fließfunktion in

der Deviatorebene weiterhin einen Kreis. Wie im Weiteren noch erkennbar sein wird, trifft diese Annahme für Beton jedoch nicht zu. Daher muss die Form der Fließfunktion für den Werkstoff Beton in der Deviatorebene modifiziert werden. Dies geschieht mit Hilfe des in Gl. (4.61) definierten LODE-Winkels und führt auf:

$$f(I_1, J_2, \theta) = c_1 I_1 + c_2 r(\theta) \sqrt{J_2} + c_3 J_2 - 1 = 0 \quad (4.61)$$

Hierbei sind die Koeffizienten c_1 , c_2 , c_3 Materialparameter und $r(\theta)$ eine geeignete Funktion des LODE-Winkels.

4.3.5 Fließregel und Fließbedingung

Während bei den elastischen Spannungszuständen die Verzerrungen und Spannungen funktional voneinander abhängen, kann über die Evolution der plastischen Verzerrungen nach Erreichen der Fließgrenze zunächst keine Aussage gemacht werden. Für ideal-plastische Materialien ohne Verfestigung bleiben die Spannungen nach Erreichen der Fließfläche konstant, die plastischen Verzerrungen nehmen zu. Die Definition der Größe und Richtung dieser Verzerrungen erfolgt mithilfe der Fließregel, die die Rate der plastischen Verzerrungen, also deren inkrementelle Änderungen, festlegt. Dabei wird angenommen, dass die plastische Verzerrungsrate proportional zum Gradienten einer als plastisches Potential bzw. Fließpotential bezeichneten Funktion $\Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ ist:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{g} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.62)$$

Hier stellt die skalare Größe $\dot{\lambda} \geq 0$ den als Konsistenzparameter bezeichneten Skalierungsparameter für die Größe der plastischen Verzerrungen dar. Es gilt:

$$\dot{\lambda} > 0 \quad \text{für} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \neq 0 \quad (4.63)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0 \quad (4.64)$$

Der Vektor \mathbf{g} des plastischen Potentials bestimmt die Richtung der plastischen Verzerrungen. Aus Gl. (4.62) ist ersichtlich, dass die plastischen Verzerrungen nicht von den Spannungsinkrementen $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ abhängen, sondern vom aktuellen Zustand der kummulierten Spannungen. Die Richtung des plastischen Verzerrungsincrementes ist bei einer assoziierten Fließregel mit der Richtung der Hauptspannungen identisch. In Kombination mit dem Fließkriterium ergeben sich folgende Bedingungen für eine elastische bzw. plastische Belastung:

$$\Phi < 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \text{elastische Belastung bzw. Entlastung,}$$

$$\Phi = 0, \quad \dot{\lambda} > 0 \quad \Rightarrow \text{plastische Belastung,}$$

$$\Phi = 0, \quad \dot{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \text{neutrale Belastung.}$$

Falls das plastische Potential Ψ mit der Fließfunktion Φ übereinstimmt, spricht man von einer assoziierten Fließregel, andernfalls von einer nicht-assozierten Fließregel. Bei einer assoziierten Fließregel hängt also die Richtung der inkrementellen Verzerrungen direkt von der Fließregel Φ ab und stellt eine einfach umsetzende Annahme für das plastische Potential dar. Die Wahl einer unabhängigen

Potentialfunktion Ψ lässt allerdings mehr Möglichkeiten bei der Anpassung an Versuchswerte zu und ist daher für die Modellierung von Beton besser geeignet, denn aus Versuchen ist bekannt, dass sich die plastischen Dehnungen nicht normal zur Fließfläche entwickeln.

Die Fließregel und weitere Randbedingungen für das Auftreten des plastischen Prozesses lassen sich für den assoziativen Fall mathematisch aus dem *Prinzip der maximalen plastischen Dissipation* herleiten. Es besagt, dass für eine gegebene, aber beliebige Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}$ von allen möglichen Spannungszuständen σ^* , die die Fließbedingung erfüllen, der aktuelle Zustand (σ, \mathbf{q}) die Funktion Gl. (4.52) maximiert. Die Spannungsleistung $\sigma : \dot{\epsilon}$ muss dafür ein Maximum annehmen (vgl. [47], [84]). Dies bedeutet, dass die Projektion der zulässigen Spannungszustände auf die Richtung der plastischen Verzerrungsrate durch den aktuellen Spannungszustand maximiert wird, s. auch Abbildung 4.7.

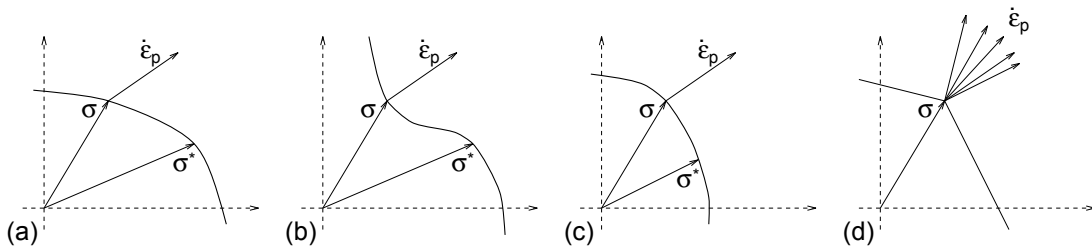


Abbildung 4.7: Plastische Potentialfunktion

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

- der elastische Bereich konvex und
- die Richtung der plastischen Verzerrungsrate normal zur Fließfläche ist.

Dies ist in Abbildung 4.7c) der Fall. Die inkrementellen Verzerrungen $\dot{\epsilon}^p$ stehen senkrecht auf der durch die plastischen Potentialfunktion definierten Fläche und bestimmen so die Richtung der Verzerrungen. Das *Prinzip der maximalen plastischen Dissipation* lässt sich auch als Maximierungsaufgabe unter Nebenbedingungen auffassen: Die Funktion aus (4.52) ist unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (4.55) zu maximieren. Durch Einführung des LAGRANGE-Multiplikators lässt sich das Problem folgendermaßen angeben ([84], [94]):

$$\mathcal{L}(\sigma, \mathbf{q}, \dot{\lambda}) = P_{dis} - \dot{\lambda} \Phi(\sigma, \mathbf{q}) = \sigma : \dot{\epsilon}^p - \mathbf{q} \dot{\kappa} - \dot{\lambda} \Phi(\sigma, \mathbf{q}) \quad (4.65)$$

Mit der Lösung des Minimierungsproblems erhält man zum einen die assoziierten Normalenregeln, sprich die assoziative Fließregel (4.43) und das Verfestigungsgesetz (4.44):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \Rightarrow \dot{\kappa} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{H} \quad (4.66)$$

sowie die plastischen Be- bzw. Entlastungsbedingungen, die auch als KUHN-TUCKER-Bedingungen bekannt sind.

Kuhn-Tucker Bedingungen:

$$\Phi(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} \cdot \Phi(\sigma, \mathbf{q}) = 0 \quad (4.67)$$

Aus der ersten Bedingung in Gl. (4.66) ist direkt die assoziierte Fließregel ersichtlich. Die Richtung der plastischen Verzerrungen entspricht dabei dem Gradienten des Spannungsvektors. Wenn sich das Material in einem elastischen Zustand befindet ($\Phi < 0$), impliziert die dritte Bedingung in Gl. (4.67) $\dot{\lambda} = 0$, und gemäß Gl. (4.42) sowie Gl. (4.44) bleiben die plastischen Verzerrungen und die Verfestigungsparameter konstant. Andernfalls ist im plastischen Zustand $\Phi = 0$ und die dritte KUHN-TUCKER-Bedingung beeinflusst nicht die Rate des plastischen Multiplikators. Diese darf nicht negativ werden, da \mathbf{g} in Gl. (4.43) die Richtung der Evolution der plastischen Dehnungen spezifiziert, die entweder 0 oder positiv, jedoch nicht negativ werden kann. Dies wird über eine zusätzliche Bedingung $\dot{\lambda} \geq 0$ beschrieben. Da Fließen nur stattfinden kann, wenn der aktuelle Zustand plastisch ist und für diesen Fall sowohl $\Phi = 0$ als auch $\dot{\Phi} = 0$ gelten muss, ergibt sich folgende Konsistenzbedingung:

$$\dot{\lambda}\dot{\Phi} = 0 \tag{4.68}$$

Sind die aktuellen Werte aller Variablen sowie die Rate der gesamten Verzerrungen bekannt, lassen sich mit den Grundgleichungen die Raten aller Variablen ermitteln. Wenn sich das Material in einem elastischen Zustand befindet ($\Phi < 0$), impliziert Gl. (4.68) $\dot{\lambda} = 0$. Gemäß Gl. (4.43) sowie Gl. (4.44) bleiben die plastischen Verzerrungen und die Verfestigungsparameter konstant und die Entwicklung der Spannungen folgt dem elastischen Materialgesetz. Im plastischen Zustand dagegen ist $\Phi = 0$ und der Zustand plastischen Fließens kann entweder fortgesetzt werden oder es findet eine elastische Entlastung des Materials statt. Im ersten Fall gilt $\dot{\Phi} = 0$ und $\dot{\lambda} > 0$. Im zweiten Fall erhält man $\dot{\lambda} = 0$ und die Rate der Fließfunktion muss abfallen.

Dilatanz Wie schon erwähnt, erfahren bestimmte Werkstoffe eine Volumenvergrößerung während des Fließens, *Dilatanz* genannt. Die Volumenänderung lässt sich anhand Abbildung 4.8 beschreiben, die einen Schnitt durch die Fließfläche entlang der hydrostatischen Achse darstellt: Da die

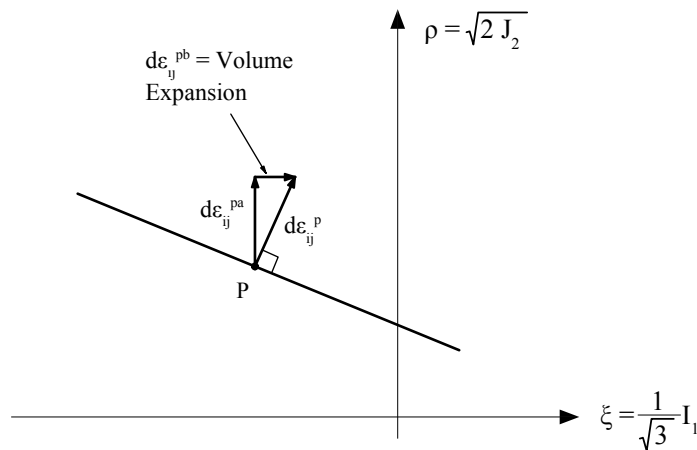


Abbildung 4.8: Dilatanz (entnommen aus [17])

plastischen Verzerrungen senkrecht auf der Fließfläche stehen, bewirkt die Neigung der Fließfläche, dass die plastischen Verzerrungen jeweils eine Komponente in Richtung der deviatorischen sowie der hydrostatischen Achse besitzen. Die Verzerrungskomponente in Richtung der hydrostatischen

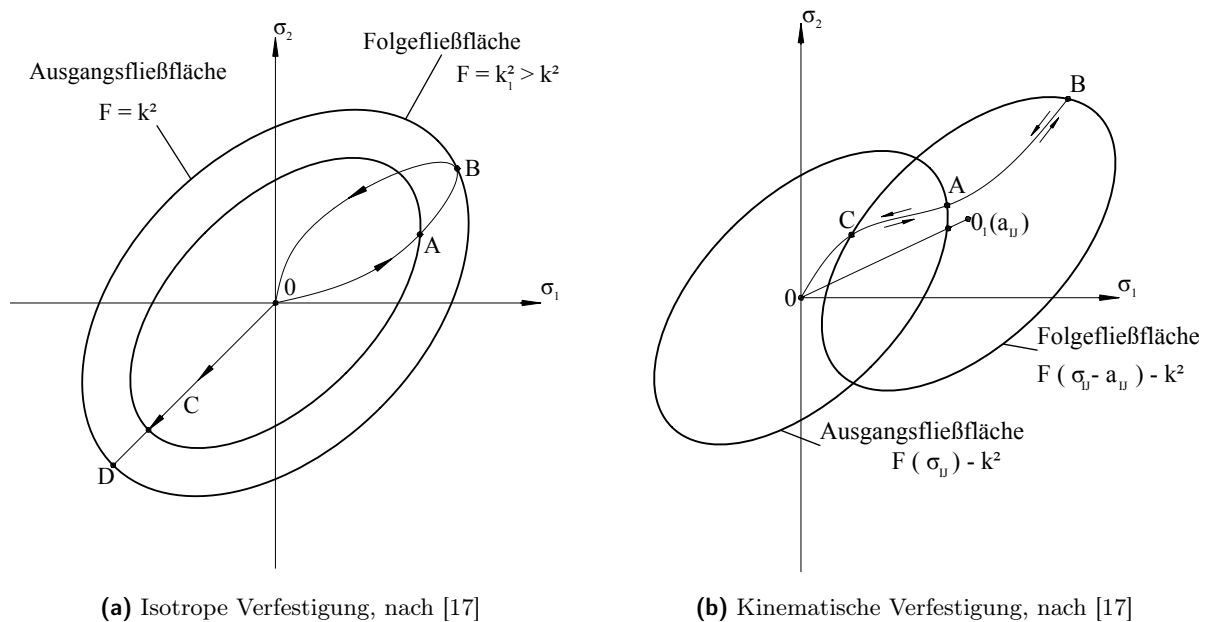


Abbildung 4.9: Isotrope und kinematische Verfestigung

Achse korrespondiert zu einer Volumenänderung. Wie man an Abbildung 4.8 erkennt, ist die horizontale Komponente der plastischen Verzerrungsincremente immer positiv. Plastisches Fließen geht somit immer mit einer Volumenvergrößerung einher, auch im Fall eines hydrostatischen Druckspannungszustandes. In Versuchen lässt sich beobachten, dass es bei Beton tatsächlich zu einer Volumenvergrößerung unter Druckspannungen kommt, allerdings nur in bestimmten Spannungsbereichen. Auch KUPFER berichtet von diesem Phänomen ([57]). Im Rahmen der Plastizität auf Basis eines DRUCKER-PRAGER-Kriteriums lässt sich zeigen, dass die plastische Volumenänderung nicht nur von den hydrostatischen Spannungsanteilen abhängt, sondern auch von den deviatorischen, also von den Schubspannungen ([17, Kap. 4.10]), und somit eine Kopplung von Schubspannungen mit volumetrischen Verzerrungen vorliegt. Der zugehörige Materialsteifigkeitstensor, die tangentielle Steifigkeit, ist dann anisotrop.

4.3.6 Verfestigung

Für idealplastische Materialien bleiben die Spannungen nach Erreichen der Fließfläche, also nach Verlassen des elastischen Bereichs, konstant. Diese Annahme trifft für viele Materialien, wie auch Beton, nicht zu. Stattdessen findet eine Ver- oder Entfestigung statt, die Auswirkungen auf die Lage und/oder Größe der Fließfläche hat. Im Rahmen einer Verfestigung erhöht sich der Wert für die Fließgrenze, d.h. bei Entlastung und erneuter Belastung verhält sich der Werkstoff länger elastisch. Für eine Entfestigung gilt das Gegenteil.

Hierbei ist zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung zu unterscheiden. Isotrope Verfestigung bedeutet, dass die Fließfläche im Hauptspannungsraum gleichförmig expandiert (bei Entfestigung schrumpft sie), s. Abbildung 4.9. Bei der kinematischen Verfestigung verschiebt sich die

Fließfläche wie ein starrer Körper im Hauptspannungsraum, siehe Abb. 4.9. Der Nullpunkt der Fließfläche wird dadurch verschoben.

Isotrope Verfestigung Anhand des Beispiels einer linearen isotropen Verfestigung werden die Grundprinzipien kurz erläutert. Zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens ist neben dem Fließkriterium als zusätzliche Bedingung ein *Verfestigungsgesetz* erforderlich. Die Fließfläche ist in diesem Fall eine von der Spannung bzw. deren Invarianten sowie der internen Variablen \mathbf{q} , die den Verfestigungsparameter κ , und damit die Größe der Fließspannung, steuert, abhängige Funktion:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (4.69)$$

Die ursprünglich konstante Fließspannung σ_0 ändert sich nun in Abhängigkeit von der Verfestigungsvariablen κ . Für die Wahl des Verfestigungsparameters κ stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Wird der Verfestigungsparameter κ als skalares Maß der Verzerrung definiert, spricht man von *strain hardening*; wird als Verfestigungsparameter die dissipierte plastische Arbeit verwendet, handelt es sich um das sogenannte *work hardening*. Die gewünschte Verfestigungskurve kann mithilfe der internen Variablen \mathbf{q} , die die Entwicklung des Verfestigungsparameters funktional beschreibt, linear oder nichtlinear formuliert werden. Im eindimensionalen Fall bietet sich als Verfestigungsparameter die plastische Verzerrung ε_{11}^p an. Somit gilt mit $\mathbf{q} = h(\kappa) = h(\varepsilon_{11}^p)$ für die Fließspannung:

$$\sigma_y(\varepsilon_{11}^p) = \sigma_{y0} + h(\varepsilon_{11}^p) \quad (4.70)$$

Für eine lineare Verfestigung mit dem Verfestigungsmodul H , der aus einem einaxialen Zugversuch ermittelt werden kann, gilt schließlich:

$$\sigma_y(\varepsilon_{11}^p) = \sigma_{y0} + H \cdot \varepsilon_{11}^p \quad (4.71)$$

Im dreidimensionalen Fall stellen die plastischen Verzerrungen einen Tensor 2. Stufe dar, der nicht als Verfestigungsparameter verwendet werden kann. Als skalares Maß für den Verfestigungsparameter bietet sich eine Ratenformulierung der sogenannten äquivalenten oder akkumulierten plastischen Verzerrung $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p$ an, deren Größe im Gegensatz zur totalen Formulierung immer positiv ist:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (4.72)$$

Der Skalierungsfaktor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist so gewählt, dass $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p$ im eindimensionalen Fall gerade der einaxialen plastischen Verzerrung entspricht (vgl. [48], S.44).

Der Ansatz einer isotropen Verfestigung stellt eine einfache Materialmodellierung dar. Mit der Formulierung einer isotropen Verfestigung gilt jedoch, dass eine Verfestigung im Zugbereich automatisch auch eine Verfestigung im Druckbereich nach sich zieht, da die Fließfläche gleichförmig expandiert. Anisotropes Verhalten, wie z.B. beim *BAUSCHINGER-Effekt*, kann mit dieser Methode nicht erfasst werden. Dies ist im Rahmen einer kinematischen Verfestigung möglich.

4.3.7 Return-Mapping-Algorithmus

Im Rahmen der Plastizität werden zur Ermittlung der Spannungen die Raten der elastischen bzw. plastischen Verzerrungen sowie der internen Variablen benötigt. Die numerische Approximation erfolgt über das implizite EULER-Verfahren, das in Abschnitt 3.2.2 bereits vorgestellt wurde. Die Raten werden diskretisiert und können so numerisch ermittelt werden. Zunächst wird ausgehend von den bekannten Verschiebungen \mathbf{u}_n , den inelastischen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$, den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_n$ und den internen Variablen $\boldsymbol{\kappa}_n$ eine globale NEWTON-RAPHSON-Iteration zur Ermittlung von \mathbf{u}_{n+1} durchgeführt. Hieraus ergibt sich das Gesamt-Verzerrungsinkrement $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$. Zur Ermittlung der Spannungen bzw. des Spannungsinkrementes wird jedoch der inelastische Anteil der Verzerrungen benötigt.

Hierfür kann der *Return-Mapping-Algorithmus* auf Elementebene verwendet werden. Zunächst erfolgt die Diskretisierung der Ratengleichungen:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p] \quad (4.73)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}) \quad \text{usw.} \quad (4.74)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \leq 0 \quad (4.75)$$

Im Prädiktorschritt werden die plastischen Variablen eingefroren und ein elastischer Spannungszuwachs angenommen. Damit wird das Spannungsinkrement für t_{n+1} ermittelt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p,tr} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{tr} = \boldsymbol{\kappa}_n \quad (4.76)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} [\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p,tr}] \quad (4.77)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{tr}) \quad (4.78)$$

Das Superskript $()^{tr}$ bezeichnet *trial* Größen, also die Prädiktor-Größen. Im Korrektor-Schritt wird die Fließregel überprüft.

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow & \text{elastisch} \\ > 0 \Rightarrow & \text{plastisch} \end{cases} \quad (4.79)$$

Falls aus der Überprüfung der Fließbedingung hervorgeht, dass es sich zum Zeitpunkt t_{n+1} tatsächlich um einen elastischen Zustand handelt, werden die Variablen am Ende des Zeitschritts aktualisiert und mit ihren Prädiktor-Werten gleichgesetzt. Der Berechnungsalgorithmus wird beendet. Im Falle eines plastischen Zustandes müssen die Spannungen korrigiert werden, d.h. von außerhalb der Fließfläche auf diese zurück projiziert werden. Daher auch der Name *Return-Mapping-Algorithmus*. Dies geschieht i.d.R. über eine NEWTON-RAPHSON-Iteration. Ferner muss global die schwache Form erfüllt werden, wofür eine globale NEWTON-RAPHSON-Iteration erforderlich ist. Hierfür wird die tangential Materialsteifigkeit benötigt. Details zur Herleitung finden sich z.B. in [103]. Im Gegensatz zur Elastizität hängt die Materialtangente von der gewählten Lösungsmethode ab, vgl. [103]. Abbildung 4.10 zeigt schematisch den Return-Mapping-Algorithmus.

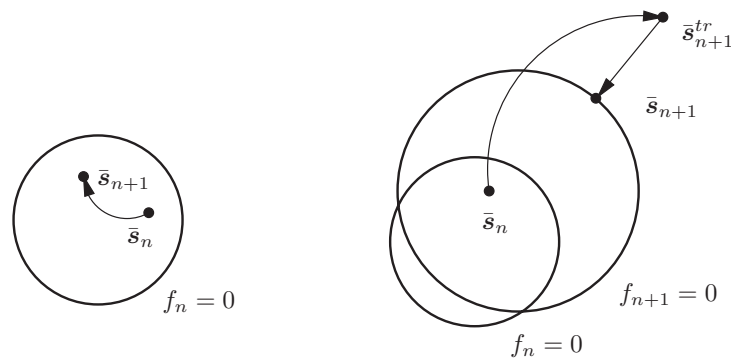


Abbildung 4.10: Return-Mapping-Algorithmus: elastischer und plastischer Zustand

4.4 Schädigungs- und Mikrorisstheorie

Die Schädigungstheorie wurde entwickelt, um phänomenologisch die Verschlechterung bzw. Degradation von Materialeigenschaften infolge von Mikrodefekten bzw. Mikrorissen zu beschreiben. Damit stellt sie eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung des Spannungsabfalls nach Überschreiten der Festigkeit eines Werkstoffs dar.

Die Grundidee der Schädigungstheorie basiert auf dem Konzept der effektiven Spannungen, das in Abbildung 4.11 für den einaxialen Fall veranschaulicht wird [60],[48]. In der Modellvorstellung

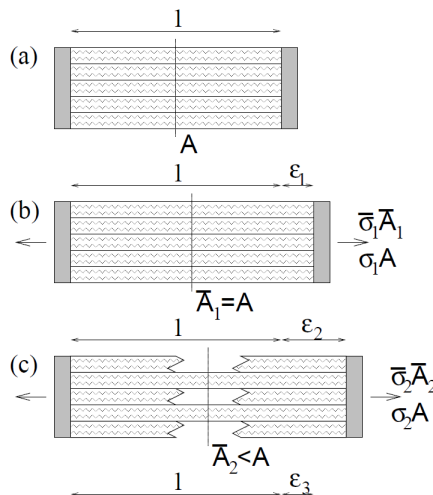


Abbildung 4.11: Konzept der effektiven Spannungen

besteht das Material aus einem Bündel paralleler Fasern. Im ungeschädigten Zustand sind alle Fasern intakt, so dass eine äußere Zugkraft über die gesamte Querschnittsfläche A übertragen wird. Mit zunehmender Dehnung versagen sukzessive einzelne Fasern, und es steht eine immer geringer werdende Restfläche \bar{A} zur Kraftübertragung zur Verfügung.

Auf der makroskopischen Ebene werden weiterhin die nominellen Spannungen σ betrachtet, die die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen müssen. Auf einer idealisierten mikroskopischen Ebene agieren hingegen die effektiven Spannungen $\bar{\sigma}$, für die das globale Gleichgewicht ebenfalls erfüllt

sein muss. Es gilt also:

$$F = \sigma \cdot A = \bar{\sigma} \cdot \bar{A} \quad (4.80)$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen nominellen und effektiven Spannungen definiert:

$$\sigma = \bar{\sigma} \cdot \frac{\bar{A}}{A} \quad (4.81)$$

und es kann der Einfluss aus der Schädigung ermittelt werden. Dazu wird die Schädigungsvariable ω als das Verhältnis zwischen dem ausgefallenen Anteil der Querschnittsfläche und der ursprünglichen Querschnittsfläche definiert:

$$\omega = \frac{A_d}{A} = \frac{A - \bar{A}}{A} \quad (4.82)$$

$$\sigma = (1 - \omega) \bar{\sigma} \quad (4.83)$$

Für die intakten Fasern soll weiterhin das HOOKEsche Gesetz gelten:

$$\bar{\sigma} = E \cdot \varepsilon \quad (4.84)$$

Eingesetzt in Gl. (4.83) ergibt sich die konstitutive Beziehung:

$$\sigma = (1 - \omega) \cdot E \cdot \varepsilon = E_d \cdot \varepsilon \quad (4.85)$$

Durch die Multiplikation der ursprünglichen Steifigkeit mit $(1 - \omega)$ wird die ursprüngliche Steifigkeit verringert, E_d kann hierbei als geschädigter E-Modul aufgefasst werden. Die „makroskopischen“ Spannungen nehmen demzufolge aufgrund des geschädigten E-Moduls mit zunehmender Schädigungsvariable ab.

Zur Beschreibung der Entwicklung der Schädigung ist es zunächst zweckmäßig, eine interne Variable κ einzuführen, die die maximal erreichte Verzerrung bis zu einer bestimmten Zeit t beschreibt:

$$\kappa(t) = \max \varepsilon(\tau), \tau \leq t \quad (4.86)$$

Die Variable t muss dabei nicht notwendigerweise der physikalischen Zeit entsprechen, sie kann ein beliebiger monoton steigender Parameter sein, der den Belastungsprozess kontrolliert. Die Entwicklung der Schädigung kann nun mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$$f(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon - \kappa, \quad (4.87)$$

mit der die Be- und Entlastungs-Bedingungen in der KUHN-TUCKER-Form dargestellt werden können:

$$f \leq 0 \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad \dot{\kappa} f = 0 \quad (4.88)$$

Die erste Bedingung besagt, dass die Schädigung nicht kleiner als die aktuelle Verzerrung sein kann, die zweite, dass eine Schädigung nie abnehmen kann. Gemäß der dritten Bedingung kann κ nur wachsen, wenn die aktuellen Werte von ε und κ gleich sind.

4.4.1 Isotrope Schädigung

Die für den einaxialen Fall vorgestellten Zusammenhänge lassen sich auf mehraxiale Spannungszustände erweitern. Die Erweiterung für ein einfaches, isotropes Schädigungsmodell führt auf:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega)\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.89)$$

sowie:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \omega)\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad ; \quad \mathbb{C}_d = (1 - \omega)\mathbb{C} \quad (4.90)$$

Hierbei sind \mathbb{C} und \mathbb{C}_d die Steifigkeitstensoren des ungeschädigten bzw. geschädigten Zustands. Die Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird im dreidimensionalen Fall durch eine äquivalente Verzerrung $\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon})$, die aus dem Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ermittelt wird, ersetzt. Damit ergibt sich:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa \quad (4.91)$$

Da eine Schädigung im Beton durch Mikrorisse infolge von Zugdehnungen entstehen, ist es naheliegend, nur positive Normalverzerrungen zu berücksichtigen. Dies führt auf folgende Darstellung der äquivalenten Verzerrung:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle} \quad (4.92)$$

Hierbei bedeutet $\langle \varepsilon_i \rangle = \varepsilon_i$ für $\varepsilon_i \geq 0$ und $\langle \varepsilon_i \rangle = 0$ für $\varepsilon_i < 0$.

4.4.2 Anisotrope Schädigung

Für die Modellierung der anisotropen Schädigung infolge der Rissbildung im Beton, existieren mehrere Konzepte. Zum einen ein „klassischer“ Ansatz, bei dem statt einer skalaren Größe ω ein Schädigungstensor vierter Stufe verwendet wird. Die Modellierung der Schädigung über Tensoren höherer Ordnung ist allerdings sehr komplex, auch weil die Interpretation der Tensorkomponenten schwierig ist. Das anisotrope Verhalten kann ferner anschaulich mittels eines Schädigungsvektors $\mathbf{d} = d_n \mathbf{n}$ beschrieben werden, wobei mit d_n die Schädigung der betreffenden Materialebene bezeichnet und \mathbf{n} den Normalenvektor auf diese Ebene, vgl. [39]. Dieses Konzept wurde im Rahmen der Microplane-theorie weiterentwickelt.

Kapitel 5

Materialmodellierung von Beton und Stahlbeton

Im folgenden Kapitel werden maßgebende Aspekte der Materialmodellierung für die Werkstoffe Beton und Stahlbeton skizziert. Es wird zunächst das physikalische Materialverhalten des Werkstoffs Beton erläutert und auf dessen Besonderheiten wie die durch die Rissbildung hervorgerufene Anisotropie sowie das Entfestigungs- und Lokalisierungsverhalten eingegangen. Im Anschluss werden klassische Bruchkriterien für Beton und Konzepte zur Beschreibung der Rissbildung vorgestellt. Ferner werden die Anforderungen an ein konstitutives Gesetz, d.h. ein Materialmodell für Beton, definiert. Abschließend erfolgt die Betrachtung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton.

5.1 Einleitung

Der Materialmodellierung kommt im Rahmen der nichtlinearen FEM eine entscheidende Bedeutung zu, insbesondere bei einem komplexen Werkstoff wie Beton. Als Stichworte seien hier das anisotrope Verhalten nach Rissbildung genannt oder die Abhängigkeit der Tragfähigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand. Das konstitutive Materialgesetz muss diesem komplexen Materialverhalten Rechnung tragen. In Kombination mit der Bewehrung entsteht der Verbundwerkstoff Stahlbeton, der ebenfalls einigen Besonderheiten unterliegt.

Für die mathematische Beschreibung des Materialverhaltens eines Werkstoffes existieren verschiedenen Konzepte. Die meisten Materialmodelle basieren auf der phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens auf makroskopischer Ebene, wobei die Struktur global als homogenes Kontinuum approximiert wird und sich beispielsweise Schädigungen in der Veränderung bestimmter Materialeigenschaften ausdrücken. Die klassische Elastizitätstheorie gehört ebenso zu den phänomenologischen Modellen wie die Plastizitäts- oder auch die Schädigungstheorie. Im Laufe der letzten Jahrzehnte wurde eine Vielzahl von Materialmodellen für Beton auf Basis dieser Theorien entwickelt. Einen Überblick verschaffen z.B. [48], [41], [40].

Es existieren demgegenüber auch Ansätze auf mikroskopischer Ebene, z.B. Mehr-Skalen-Modelle oder Formulierungen auf Partikelebene, deren Ziel es ist, die Entstehung einer Schädigung der Struktur, z.B. die Bildung von Rissen auf Mikroebene nachvollziehen zu können, vgl. z.B. [11]. Für die im Rahmen dieser Arbeit angestrebte Nachrechnung von Versuchen an großen Stahlbetonstrukturen sind diese Modelle jedoch weniger geeignet, da nicht die Entstehung einzelner Risse im

Vordergrund steht, sondern das globale Tragverhalten analysiert werden soll. Daher wird im Folgenden der Fokus auf die phänomenologischen Konzepte gelegt, die Rahmen dieser Arbeit verwendet werden. Insbesondere die Modellierung des Rissverhaltens wird näher betrachtet.

5.2 Materialverhalten von Beton

5.2.1 Einaxiales Betonverhalten

Der Werkstoff Beton zeichnet sich durch ein komplexes Materialverhalten aus. Die Zugfestigkeit ist um ein Vielfaches geringer als die Druckfestigkeit und das Versagen erfolgt relativ spröde. Gleichzeitig verhält sich der Werkstoff bis zum Erreichen der jeweiligen Festigkeiten unterschiedlich. Abbildung 5.1 zeigt das physikalische Verhalten unter einaxialer Druckbeanspruchung. Bis ca. 40% der Druckfestigkeit verhält sich der Werkstoff linear-elastisch, anschließend fällt die Steifigkeit ab, was zu einem nichtlinearen Spannungs-Dehnungsverlauf mit positiver Steigung bis zum Erreichen der Druckfestigkeit führt. Im Anschluss fällt die ertragbare Spannung mit zunehmender Verformung ab, bis das Material endgültig keine Spannung mehr aufnehmen kann. Unter Zugspannungen zeigt Beton

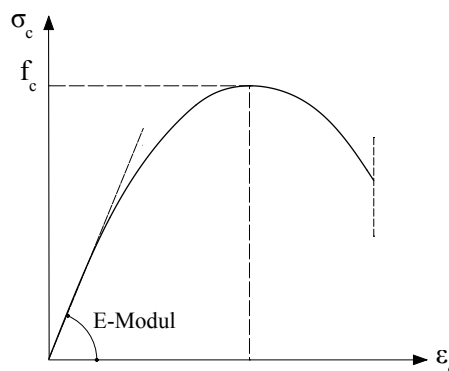


Abbildung 5.1: Verhalten von Beton unter einaxialem Druck

bis zum Erreichen der Zugfestigkeit (bei ca. 1/10 der Druckfestigkeit) annähernd linear-elastisches Materialverhalten. Anschließend fällt die ertragbare Zugspannung bei weiterer Verformung aufgrund der gleichzeitigen Mikrorissbildung in einem lokalisierten Rissband sehr schnell ab, bis bei Erreichen einer kritischen Rissöffnung keine Zugspannungen mehr aufnehmbar sind. Dieses Verhalten wird auch als „Softening“ bzw. „Entfestigung“ bezeichnet. Im σ -Verformungsdiagramm in Abbildung 5.2 ist das Verhalten unter einaxialem Zug dargestellt.

Die Bildung eines singulären Rissbandes führt zu einer inhomogenen Dehnungsverteilung im Querschnitt. Während im linear-elastischen Bereich die Dehnungen im gesamten Probekörper mehr oder weniger konstant verteilt sind (Abbildung 5.2, Punkt (A)), lässt sich eine zunehmende Lokalisierung der Dehnungen im Rissband beobachten (B). Nach Erreichen der Zugfestigkeit akkumulieren sich die Dehnungen im o.g. Band aus Mikrorissen, auch Bruch- oder Rissprozesszone genannt, und wachsen dort stark an (C). Die Breite des Rissbands nimmt nach Erreichen der Zugfestigkeit ab. Das anschließende Versagen geht mit der Bildung eines Makrorisses, hervorgehend aus den Mikrorissen im Rissband, einher, die verbleibende Endverformung der Probe entspricht der Rissbreite.

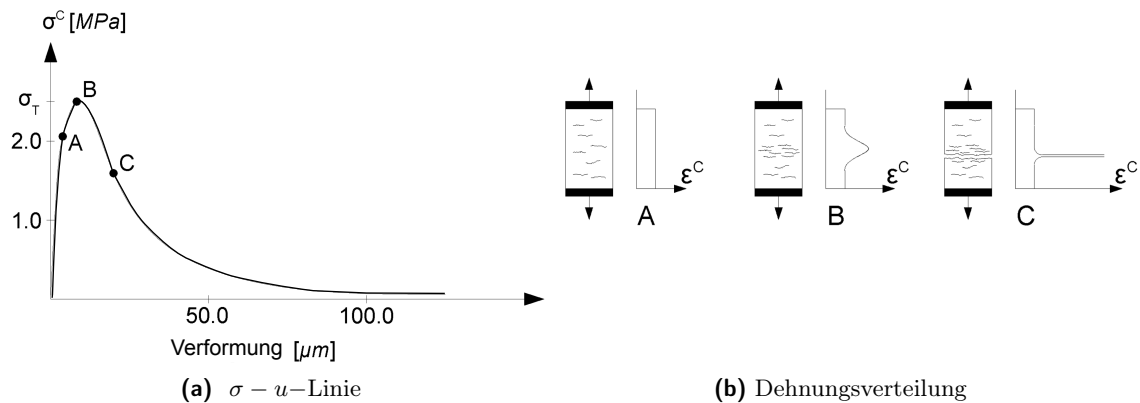


Abbildung 5.2: Verhalten von Beton unter einaxialem Zug, nach [41]

Im übrigen Teil der Probe gehen die Dehnungen dagegen aufgrund der abfallenden Spannungen zurück, da die Probe entlastet wird. Dies lässt sich aus Gleichgewichtsgründen erklären. Nach Erreichen der Zugfestigkeit nimmt mit zunehmender Verformung die Schädigung des Gefüges in der Bruchprozesszone zu; hier können immer weniger Spannungen übertragen werden. Die Abnahme der Spannung in der Bruchprozesszone führt jedoch auch im übrigen Teil der Probe zu einem Rückgang der Spannungen, da diese über die Länge des Bauteils gesehen konstant sein müssen.

Nicht-Objektivität der Spannungs-Dehnungs-Beziehung Aus Abbildung 5.3 ist ersichtlich, dass die Verformungen bezogen auf die Gesamtlänge der Probe unabhängig von der Probengröße, hier Probenlänge, ähnlich groß sind. Dies ist jedoch nicht der Fall bei den Dehnungen. Hier lässt sich

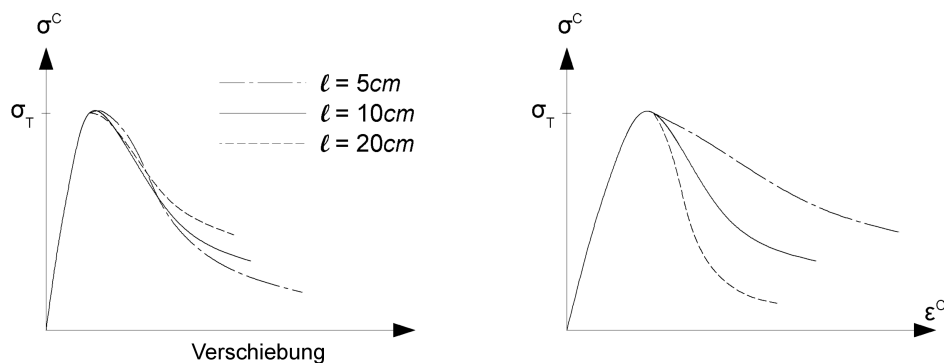


Abbildung 5.3: Einfluss der Probenlänge

eine Abhängigkeit von der Probengröße feststellen, d.h. die Spannungs-Dehnungs-Linien sind nicht mehr objektiv und somit nicht ohne weiteres zur Beschreibung des Zugverhaltens verwendbar. Dies lässt sich durch die bereits erwähnte Lokalisierung der Dehnungen und Verformungen erklären. Mit zunehmender Entfestigung akkumuliert sich die Dehnung fast vollständig in der Rissprozesszone. Aufgrund der beschriebenen Entlastung in den elastischen Bereichen gehen die Dehnungen und Verformungen dort mit sinkender Spannung immer weiter zurück. Die am Ende des Versuchs gemessene Verformung entspricht der Rissbreite w des Makrorisses, die unabhängig von der Probengröße (aber abhängig vom Größtkorndurchmesser und anderen materialspezifischen Parametern) immer gleich

groß ist. Somit kann die Rissbreite als Materialparameter angesehen werden. Bezieht man diese Rissbreite w nun aber auf die Probenlänge, um damit die Dehnung zu ermitteln ($\varepsilon = \Delta l/l$), erhält man unterschiedliche Dehnungsverläufe für verschiedene Probenlängen. Die Nicht-Objektivität der Spannungs-Dehnungslinie spielt in der Numerik eine entscheidende Rolle im Hinblick auf Netzabhängigkeiten und wird später näher betrachtet.

5.2.2 Zweiaxiales Betonverhalten

Zum mehraxialen Betonverhalten wurde eine Vielzahl von Versuchen durchgeführt. Die Ergebnisse variieren zum Teil sehr stark, dies wird jedoch u.a. mit unterschiedlichen Prüfmethode begründet [41]. Als eine der wichtigsten Beiträge zum Verständnis des zweiaxialen Betonverhaltens können die Versuche von KUPFER[57] angesehen werden.

Hierbei wurden unbewehrte Stahlbetonscheiben mit den Abmessungen 20x20x5 cm unter verschiedenen zweiaxialen Spannungsverhältnissen σ_1/σ_2 bis zum Bruch belastet, wobei die Spannungen proportional gesteigert wurden. Die Versuche wurden in Bezug auf das Verhältnis der maximalen aufnehmbaren Spannung zur einaxialen Druckfestigkeit ausgewertet. In Abbildung 5.4 ist die resultierende Versagenskurve, die sogenannte KUPFER-Kurve, im zweidimensionalen Hauptspannungsraum aufgetragen. Es wird deutlich, dass sich die Tragfähigkeit bei zweiaxialer Druckbeanspruchung

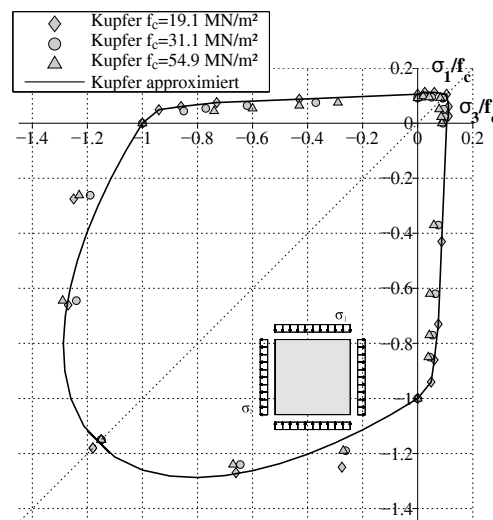


Abbildung 5.4: Versagenskurve nach KUPFER[57]

im Vergleich zur einaxialen Druckfestigkeit signifikant erhöht. Die Größe des Erhöhungsfaktors ist vom Spannungsverhältnis σ_1/σ_2 abhängig. Die maximal aufnehmbare Druckspannung ergibt sich bei einem Spannungsverhältnis von $\sigma_1/\sigma_2 = -0,52/ -1,0$ und beträgt ca. 125% der einaxialen Zylinderdruckfestigkeit. Bei einer gleichgroßen zweiaxialen Druckspannung (Spannungsverhältnis $\sigma_1/\sigma_2 = 1,0/1,0$) beträgt der Erhöhungsfaktor ca 1,16. Dieser Wert wird oftmals bei der Kalibrierung von Materialmodellen verwendet. Bei einaxialer und zweiaxialer Druck sowie Druck/Zug mit einer Zugspannung kleiner 1/15 der Druckspannung weist die Probe einen Druckbruch auf, während für einaxiale und zweiaxiale Zug- oder Druck-/Zugbeanspruchung mit einer Zugspannung

größer $1/15$ der Druckspannung ein einzelner Makroriss senkrecht zur maximalen Hauptzugspannung, also ein Zugversagen, resultiert. Querspannungen größer $1/15$ der Druckfestigkeit führen somit zu einer Abminderung der Druckfestigkeit. Bei einer zwei axialen Zugbeanspruchung beträgt die Festigkeit nahezu 100% der einaxialen Zugfestigkeit, es liegt also keine signifikante gegenseitige Beeinflussung vor.

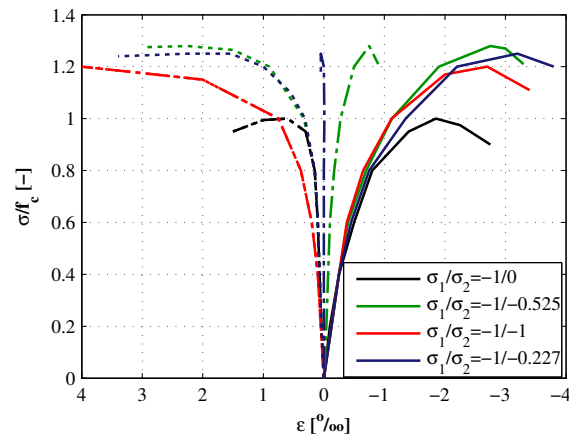


Abbildung 5.5: Spannungs-Dehnungs-Linien nach [57]

Wichtig sind neben den Versagenskurven (bzw. -flächen) die zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. Die Versagenskurven lassen sich durch Versuche eindeutig bestimmen, da für jede Spannungs-kombination ein Versagenspunkt in der Hauptspannungsebene aufgetragen werden kann. Jedoch verändert sich mit unterschiedlichen Spannungsverhältnissen auch der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linien, wie Abbildung 5.5 zeigt. Die o.g. Versagenspunkte repräsentieren das jeweilige Spannungsmaximum („peak“). Der Pfad dorthin wie auch das Nachbruchverhalten werden durch die Bruchkurven allein nicht spezifiziert. Sowohl dem Belastungspfad bis zum Bruch als auch dem Nachbruchverhalten müssen in einem Materialmodell Rechnung getragen werden. Allerdings sind für diese Bereiche die Formulierungen der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die Stoffgesetze nicht mehr eindeutig.

5.2.3 Dreiaxiales Betonverhalten

Dreiaxiale Versuche können in die so genannten konventionellen dreiaxialen Versuche mit zylindrischen Versuchskörpern und echte dreiaxiale Versuche unterteilt werden, vgl. [41]. Bei Versuchen mit Zylindern ist man auf Lastkombinationen mit zwei gleichgroßen Hauptspannungen $\sigma_3 = \sigma_2$ beschränkt, die über einen Flüssigkeitsdruck auf die seitliche Oberfläche des Zylinders erzeugt werden, und eine variable Spannung σ_1 . In echten dreiaxialen Tests können alle Hauptspannungen unabhängig voneinander variiert werden; hierfür werden in der Regel Würfel verwendet. Um eine gleichmäßige Spannungsverteilung im Inneren des Probekörpers zu gewährleisten, ist es wichtig, den Einfluss der Reibung zwischen den Lasteinleitungsflächen und dem Versuchskörper zu minimieren. Bei Versuchen mit Zylindern ist dieser Einfluss jedoch i.d.R. nicht gravierend. Es liegen deutlich mehr Daten für dreiaxiale Druckspannungszustände vor als für gemischte Spannungszustände, da

Versuche mit Zugspannungskomponenten deutlich schwieriger durchzuführen sind, wie auch schon bei einaxialen und biaxialen Versuchen erkennbar war.

Für dreiaxiale Druckspannungszustände und bei betragsmäßigen Spannungen $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ lassen sich verschiedene Versagensarten feststellen. Für Spannungen σ_2 und $\sigma_3 < 0,1\sigma_1$ entstehen Spaltrisse senkrecht zu $\sigma_2 - \sigma_3$ - Ebene. Die Festigkeitserhöhung gegenüber der einaxialen Druckfestigkeit bleibt relativ gering. Ist die kleinste Spannungen σ_3 betragsmäßig kleiner als $0,1\sigma_1$, jedoch $\sigma_2 > 0,15\sigma_1$, treten nur Risse senkrecht zur Richtung von σ_3 auf, was auf eine Umschnürungswirkung in Richtung σ_2 zurückzuführen ist. Letztlich tritt immer ein Versagen senkrecht zur Hauptzugspannungsrichtung auf, wobei die Zugspannungen hier aus Querszug im inhomogenen Betongefüge entstehen. Wenn alle drei Druckspannungen in ähnlicher Größenordnung aufgebracht werden, entsteht eine große Umschnürungswirkung und der Probekörper kann sehr hohe Spannungen ertragen. Dabei erfährt der Probekörper eine Volumenänderung.

In Abbildung 5.6 ist schematisch die Versagensfläche für dreidimensionale Spannungszustände gezeigt. Hier ist eine Besonderheit im Tragverhalten von unbewehrtem Beton zu erkennen, die das

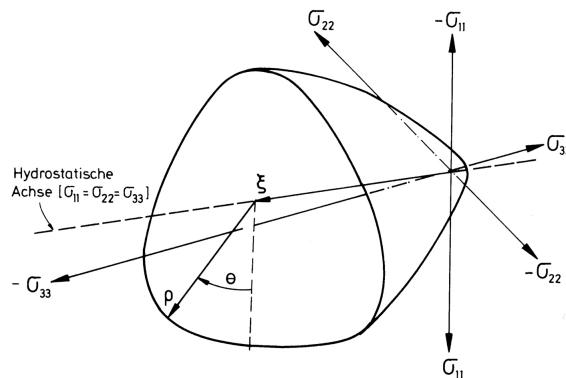


Abbildung 5.6: Versagensfläche für dreidimensionale Spannungszustände [72]

Versagen von Beton beispielsweise von dem von Metallen unterscheidet. Bei Metallen wird das Versagen nur von den Schubspannungen hervorgerufen; es ist somit unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand und bewirkt keine Änderung des Volumens. Bei Beton dagegen nimmt, ähnlich wie bei Böden, mit zunehmenden hydrostatischen Druckspannungen auch die aufnehmbare Schubspannung zu und es kommt zu der bereits erwähnten Volumenzunahme. Das bedeutet, dass das Versagen von Beton unter dreiaxialen Spannungszuständen vom hydrostatischen Druck abhängt, was bei der Entwicklung von Materialmodellen berücksichtigt werden muss.

5.2.4 Belastungsinduzierte Anisotropie

Während der Werkstoff Beton bei geringen Spannungen als isotrop angesehen werden kann, führen die unterschiedlich großen Materialfestigkeiten in Zug- und Druckrichtung sowie die damit verbundene Rissbildung nach Erreichen der Zugfestigkeit zu einer belastungsinduzierten Anisotropie, d.h. die Materialsteifigkeit nimmt orthogonal zum Riss ab, während in den anderen Richtungen die Steifigkeit kaum verändert wird. Dies spielt insbesondere bei der Materialmodellierung von Schub-

spannungszuständen eine wichtige Rolle, da hierbei immer eine Kombination von Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugspannungen vorliegt und die Rissbildung infolge einer Zugbeanspruchung die Steifigkeit in Querrichtung nicht maßgeblich beeinflussen sollte.

5.3 Bruchhypothesen für Beton

5.3.1 Abgrenzung Bruch- und Fließhypothesen

Im Rahmen der Materialmodellierung ist es zunächst erforderlich, die beiden Begriffe „Bruchhypothese“ und „Fließhypothese“ voneinander abzugrenzen. Die Bruchhypothese beschreibt strenggenommen den Versagenszustand eines Werkstoffes, nach dessen Erreichen eine Erhöhung der Spannungen nicht mehr möglich ist und bei einem kraftgeregelten Versuch eine Werkstoffprobe zerstört wird, während bei einem weggeregelten Belastungsversuch bei weiter zunehmender Verzerrung ein Spannungsabfall zu beobachten ist (z.B. im Rahmen eines Zug- oder Druckversuches.). Geometrisch lassen sich Bruchhypothesen auch als Flächen im dreidimensionalen Hauptspannungsraum darstellen, s. Abschnitt 2.4.5. Dem gegenüber beschreibt die Fließhypothese den Zeitpunkt, bei dem die Spannungen nicht länger linear-elastisch mit den Verzerrungen zusammenhängen. Im Rahmen der Plastizität kann sich an diesen Zeitpunkt elastisch-plastisches, verfestigendes oder entfestigendes Verhalten anschließen. Bei der Annahme von elastisch-plastischem Verhalten stimmen die Fließ-

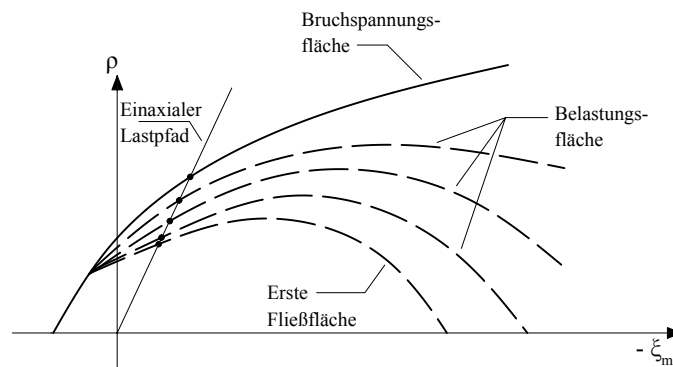


Abbildung 5.7: Entwicklung der Bruch- und Fließflächen von Beton, nach [17]

und die Bruchhypothese überein; nach Erreichen dieser Grenze können die Spannungen nicht weiter gesteigert werden, allerdings treten ohne weitere Restriktion den Bruchzustand betreffend große plastische Dehnungen auf. Bei verfestigendem oder entfestigendem Werkstoffverhalten nach Überschreitung der Fließgrenze stimmen Bruch- und Fließgrenze nicht überein und können ferner nicht ohne weiteres als affin zueinander vorausgesetzt werden, wie Abbildung 5.7 zeigt. Der Grund hierfür ist, dass bei Beton ein nichtlineares Materialverhalten auch bei hydrostatischen Spannungszuständen zu beobachten ist, so dass die Fließfläche geschlossen sein muss, während die Bruchfläche offen ist.

Bruchhypothesen Unter der Annahme eines isotropen Werkstoffverhaltens kann die Bruchfläche im kontinuumsmechanischen Kontext als Funktion abhängig von den drei Invarianten I_1, J_2 und J_3

bzw. ξ , ρ sowie θ formuliert werden:

$$\Phi(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Phi(\xi, \rho, \theta) = 0 \quad (5.1)$$

Schnitte durch die Deviatorebene bei verschiedenen Werten für den hydrostatischen Druck zeigen, dass die Form der entstehenden Bruchkurven in der Deviatorebene vom hydrostatischen Druck abhängt. Bei geringen hydrostatischen Druckspannungen entspricht die Form eher einem Dreieck, während bei höheren hydrostatischen Drücken die Kanten der Dreiecke zunehmend gekrümmt sind. Wie bereits erwähnt, ist das Werkstoffverhalten von Beton abhängig vom hydrostatischen Spannungszustand und zeichnet sich durch gekrümmte Meridiane aus. Abbildung 5.8 zeigt schematisch die Form der Meridiane bzw. der Deviatorebene, die aus Versuchen an Betonkörpern angenähert werden kann.

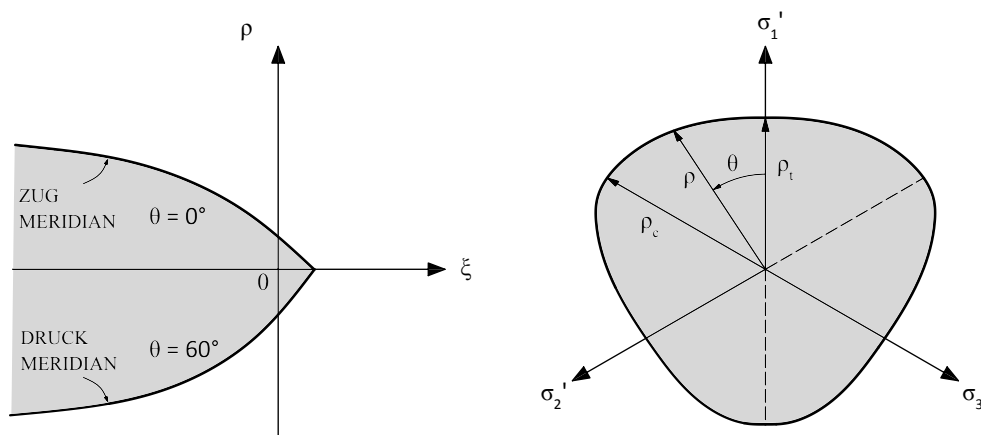


Abbildung 5.8: Meridiane und Deviatorebene der Betonbruchfläche nach [17]

Die Bezeichnungen Druck- bzw. Zugmeridian ergeben sich aus folgender Überlegung: Ein Schnitt entlang der hydrostatischen Achse kann an beliebiger Stelle durch die Deviatorebene geführt werden. Unter Berücksichtigung der Reihenfolge $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ergibt sich der Druckmeridian aus der Überlagerung eines hydrostatischen Spannungszustandes $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ mit einer Druckspannung in σ_3 -Richtung:

$$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3, \quad (5.2)$$

bzw. der Zugmeridian aus einer Überlagerung mit einer Zugspannung in σ_1 -Richtung, was folgendem Ausdruck entspricht:

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \quad (5.3)$$

Der Zugmeridian ergibt sich hierbei für einen LODE-Winkel von 0° , der Druckmeridian für einen Winkel von 60° . Deutlich erkennbar ist der Unterschied in der Tragfähigkeit für den Zug- bzw. Druckmeridian. Die drei Sektoren der Deviatorebene sind aufgrund der Annahme der Isotropie identisch. Aufgrund der komplizierten geometrischen Form der realen Bruchfläche existieren zahlreiche mathematische Beschreibungen, die das reale Verhalten näherungsweise erfassen. Im Folgenden wird lediglich auf die wichtigsten bzw. für die Arbeit relevanten Modelle eingegangen.

5.3.2 Drucker-Prager-Kriterium

Eine einfache Berücksichtigung der Abhängigkeit der Bruchfläche von dem hydrostatischen Spannungszustand lässt sich durch Erweiterung des VON MISES- Kriteriums um einen druckabhängigen Anteil erreichen, wie schon in Abschnitt 4.3.4 beschrieben. Aufgrund der kreisförmigen Deviatorfläche sowie den geraden Meridianen ergeben sich relativ große Abweichungen zur realen Bruchfigur des Werkstoffs Beton.

5.3.3 Mohr-Coulomb-Kriterium

Eine vereinfachte Annäherung an die Bruchfläche von Beton lässt sich mithilfe des MOHR-COULOMB-Kriteriums erreichen, das ursprünglich aus der Bodenmechanik stammt. Die Hypothese besagt, dass die Tragfähigkeit auf Schub mit wachsenden hydrostatischen Druckspannungen aufgrund der inneren Reibung zunimmt. Dies lässt sich mithilfe des MOHRschen Spannungskreises visualisieren: Der größtmögliche MOHRsche Spannungskreis korrespondierend zur minimalen und maximalen Hauptspannung verläuft tangential zur kritischen Linie, die durch den Winkel ϕ und die Kohäsion c bestimmt wird. Aus der Darstellung am MOHRschen Spannungskreis ist ersichtlich, dass die mittlere Spannung σ_2 für das Versagenskriterium keine Rolle spielt.

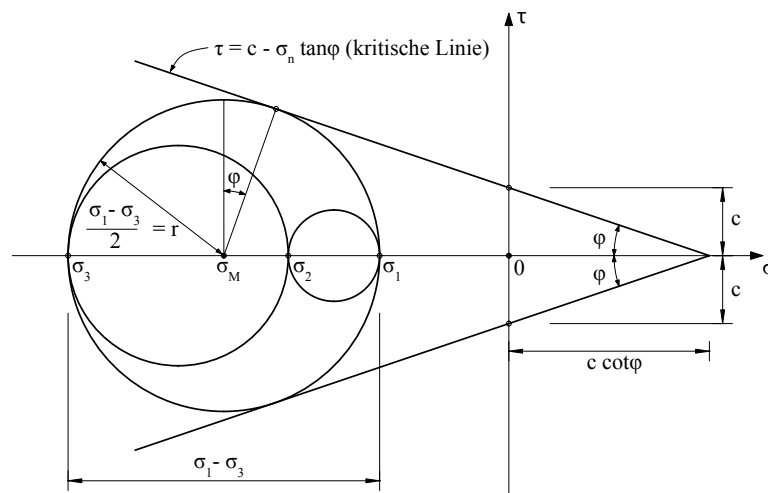


Abbildung 5.9: MOHR-COULOMB-Bruchkriterium

Die kritische Spannungskombination von Schubspannung τ und Normalspannung σ , die zum Versagen führt, lautet:

$$\tau = c - \sigma \tan \phi \quad (5.4)$$

Hierbei ist die Konstante c die Kohäsion und der Winkel ϕ der innere Reibungswinkel. Die kritische Spannungskombination kann auch wie folgt im Hauptspannungsraum ausgedrückt werden:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi = c - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi \right) \tan \phi \quad (5.5)$$

Als Fließ- oder Bruchkriterium ergibt sich:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (5.6)$$

Mithilfe weiterer Umformungen gelangt man zu folgendem Ausdruck:

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \phi}{2c \cos \phi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{2c \cos \phi} = 1 \quad (5.7)$$

bzw.:

$$(1 + \sin \phi) \sigma_1 - (1 - \sin \phi) \sigma_3 = 2c \cos \phi \quad (5.8)$$

Setzt man die einaxiale Zug- bzw. Druckfestigkeit für σ_1 bzw. σ_3 ein, erhält man:

$$f_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad \text{bzw.} \quad f_{ct} = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (5.9)$$

Hieraus ergeben sich die rechnerischen Konstanten für den Reibungswinkel ϕ und die Kohäsion c . Für ein übliches Verhältnis von $f_{ct}/f_c = 1/10$ erhält man $c=4,74$ und $\phi = 54,9^\circ$. Das MOHR-COULOMB-Kriterium lässt sich auch in Invarianten ausdrücken. Hierfür finden sich in der Literatur verschiedene Ausdrücke. Das Fließ- bzw. Bruchkriterium lautet gemäß [17]:

$$\Phi(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - c \cos \phi \quad (5.10)$$

In [94] findet sich folgender Ausdruck:

$$\Phi(p, J_2, \theta) = \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) \sqrt{J_2} + p \sin \phi - c \cos \phi \quad (5.11)$$

Im dreidimensionalen Hauptspannungsraum entspricht das MOHR-COULOMB-Kriterium einer Pyramide mit unregelmäßiger sechseckiger Grundfläche, s. Abbildung 5.10. Die Meridian- und Devia-

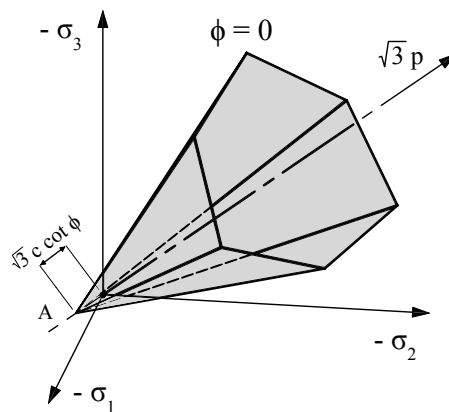


Abbildung 5.10: MOHR-COULOMB-Bruchkriterium im dreidimensionalen Hauptspannungsraum

torebene sind in Abbildung 5.11 dargestellt.

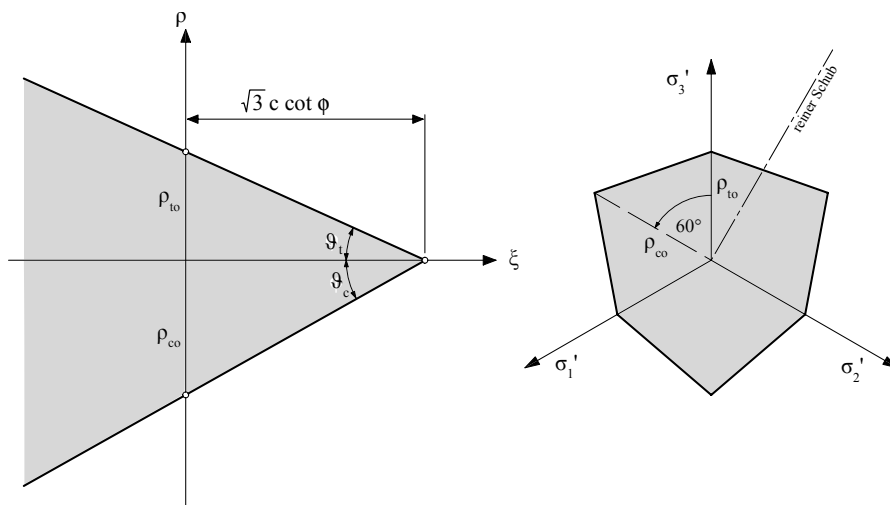


Abbildung 5.11: MOHR-COULOMB-Bruchkriterium in Meridian- und Deviatorebene

Sowohl aus der Darstellung der Meridianebene als auch aus der der Deviatorebene ist ersichtlich, dass die Tragfähigkeit für Spannungszustände auf dem Zugmeridian unter der für Spannungszustände auf dem Druckmeridian liegt. In Abhängigkeit des Reibungswinkels ergibt sich für diesen Unterschied folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\rho_c}{\rho_t} = \frac{3 + \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad (5.12)$$

Anpassung an das Drucker-Prager-Kriterium Der Nachteil der numerischen Umsetzung des MOHR-COULOMB-Kriteriums besteht darin, dass die Bruchfläche Unstetigkeitsstellen besitzt. Dieser Nachteil lässt sich durch die Verwendung des schon erwähnten DRUCKER-PRAGER-Kriteriums umgehen.

Die Anpassung dieses Kriteriums an die Festigkeitswerte aus Versuchen ist jedoch nicht für alle Spannungszustände gleichzeitig möglich. Für die Anpassung an das MOHR-COULOMB-Kriterium wird die DRUCKER-PRAGER-Fläche wie folgt definiert:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2} + a \cdot p - b \cdot c \quad (5.13)$$

Hierbei sind c die Kohäsion, p der hydrostatische Druck, sowie a und b Materialparameter, die entsprechend der gewünschten Spannungszustände angepasst werden können. Man kann zeigen, dass der Materialparameter a identisch ist mit dem inneren Reibungswinkel ϑ , dem Öffnungswinkel des Kegels, der bei Verwendung dieses Kriteriums als Fließregel auch die Dilanz steuert. Es gilt also:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2} + \tan \vartheta \cdot p - b \cdot c \quad (5.14)$$

Für ebene Spannungszustände ist die Anpassung des DRUCKER-PRAGER-Kegels an verschiedene Werte des MOHR-COULOMB-Kriteriums möglich. Der Kegel kann so gewählt werden, dass die inneren Kanten des MOHR-COULOMB-Kriteriums den Kreis des Kegels in der Deviatorebene tangieren,

s. Gl. (5.15); dies korrespondiert zu übereinstimmenden Werten für einaxialen Zug und zweiaxialen Druck.

$$a = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3 - \sin \phi}}; \quad b = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3 - \sin \phi}} \quad (5.15)$$

Demgegenüber können die Parameter des DRUCKER-PRAGER-Kegels auch so gewählt werden, dass die äußeren Kanten der MOHR-COULOMB-Pyramide berührt werden, was eine Übereinstimmung für einaxialen Druck und zweiaxialen Zug bedeutet. Die Spitzen der beiden geometrischen Körper stimmen dabei überein. Will man dagegen eine Übereinstimmung für einaxiale Druck- sowie einaxiale Zugspannungszustände erreichen, gelingt dies nur mit einer Formulierung, bei der die Spitzen der Körper nicht mehr an derselben Stelle der hydrostatischen Achse liegen. Es gilt:

$$a = \frac{3 \sin \phi}{\sqrt{3}}; \quad b = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}} \quad (5.16)$$

Zur Wahl der Parameter für den DRUCKER-PRAGER-Kegel siehe [94], [46], [17]. Das Kriterium sollte daher im Vorfeld an die zu erwartenden Spannungs- bzw. Versagenszustände angepasst werden. Der Vergleich mit verschiedenen Anpassungen des DRUCKER-PRAGER-Kegels ist in Abbildung 5.12 ersichtlich:

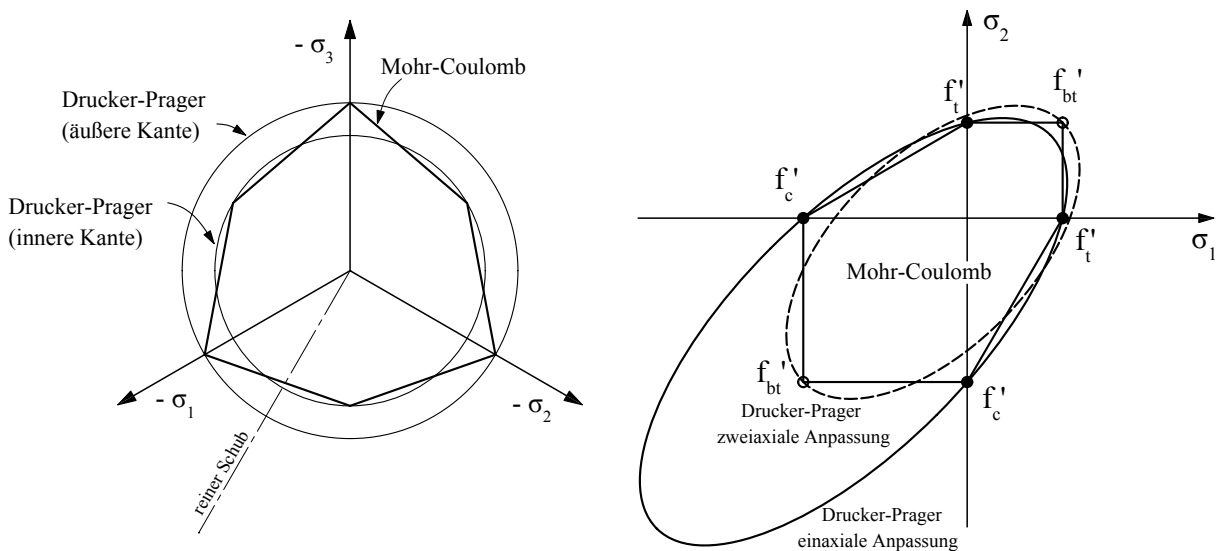


Abbildung 5.12: Anpassung DRUCKER-PRAGER an MOHR-COULOMB, in Anlehnung an [94]

Anmerkungen zur Dilatanz Wie bereits in Abschnitt 4.3.5 ausgeführt wurde, kommt es bei Verwendung eines druckabhängigen plastischen Materialmodells nach Überschreitung der Fließgrenze zu einer Volumenvergrößerung, genannt Dilatanz. Diese wird nicht nur von den volumetrischen, sondern auch von den deviatorischen Spannungen hervorgerufen. Grundsätzlich ist die Volumenvergrößerung auch im Versuch beobachtet worden. Bei Verwendung eines MOHR-COULOMB oder DRUCKER-PRAGER-Kriteriums mit assoziierter Fließregel wird die Dilatanz allerdings überschätzt.

Abhilfe schafft hier die Wahl eines nichtassozierten Fließgesetzes mit kleinerem Dilatanzwinkel. Bei Verwendung eines (hyper-) elastischen Materialmodells, z.B. linearer Elastizität bis zum Bruch, wird die Volumenvergrößerung infolge von Schubspannungen nicht realistisch abgebildet, da bei elastischen Materialgesetzen eine Volumenveränderung nur infolge von Normalspannungen auftreten kann.

Anmerkungen zum Reibungswinkel Bei der Verwendung des MOHR-COULOMB-Kriteriums wird der Reibungswinkel des verwendeten Materialmodells benötigt. Der tatsächliche Reibungswinkel ϕ in der τ - σ -Ebene ist offensichtlich nicht identisch zum Öffnungswinkel im dreidimensionalen Hauptspannungsraum. Für das MOHR-COULOMB-Kriterium ergeben sich im Gegensatz zum DRUCKER-PRAGER-Kriterium zwei unterschiedliche Winkel für Druck- und Zugmeridian. Für den Winkel ϑ_c des Druckmeridians lässt sich folgende Beziehung ermitteln (s. [46]):

$$\tan \vartheta_c = \frac{\rho_{comp}}{\xi - \xi_0} = 2\sqrt{2} \frac{\sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad (5.17)$$

Dieser stimmt naturgemäß mit dem Winkel aus Gl. (5.15) überein, da in diesem Fall der Druckmeridian aus dem MOHR-COULOMB-Kriterium identisch ist zu dem des DRUCKER-PRAGER-Kriteriums. Die so ermittelten modellimmanenten Reibungswinkel sind immer kleiner als die tatsächlichen Reibungswinkel des Betons. Der Ansatz des tatsächlichen Reibungswinkel prognostiziert daher eine zu große Dilatanz, wenn dieser als Dilatanzwinkel für ein plastisches Materialmodell verwendet wird.

5.3.4 Modifiziertes Mohr-Coulomb-Kriterium

Wie bereits erläutert, stammt die Formulierung für das Bruchkriterium nach MOHR-COULOMB ursprünglich aus der Bodenmechanik. Die Konstanten c für die Kohäsion und ϕ für den Reibungswinkel besitzen eine physikalische Bedeutung. Erfolgt die Anpassung des Kriteriums für Beton mithilfe der einaxialen Festigkeiten, geht die physikalische Bedeutung der Konstanten verloren. Jedoch lassen sich auch für Beton Reibungswinkel ermitteln. Näheres hierzu findet sich z.B. in [79], [67]. Abbildung 5.13 zeigt die ermittelten Reibungswinkel für Betone unterschiedlicher Güte. Eine Möglichkeit,

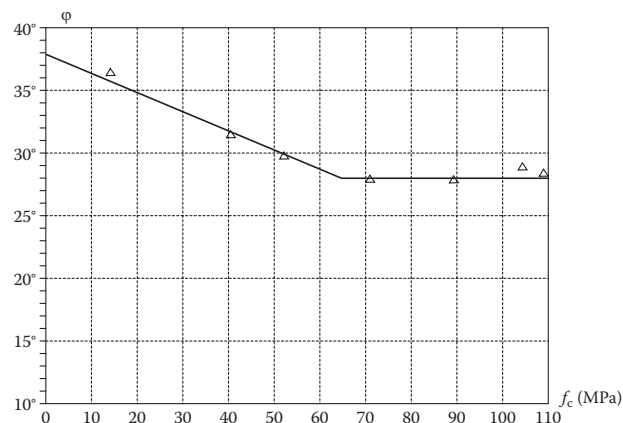


Abbildung 5.13: Reibungswinkel für Beton [aus [79]]

die physikalische Bedeutung aufrechtzuerhalten und die tatsächlichen Reibungswinkel zu verwenden, beschreibt die Anwendung eines modifizierten MOHR-COULOMB-Kriteriums mit Tension Cut Off. Das MOHR-COULOMB Kriterium wird hierbei um ein RANKINE-Spannungskriterium erweitert. Während der Versagenszustand bei MOHR-COULOMB durch Schubgleitung hervorgerufen wird und die Schubaufnahmefähigkeit wie beschrieben von den gleichzeitig wirkenden Normalspannungen abhängt, erfolgt beim RANKINE-Kriterium die Separation des Werkstoffs durch Überschreiten eines Hauptzugspannungskriteriums. Hierfür wird die Zugfestigkeit des Materials herangezogen.

Das modifizierte MOHR-COULOMB-Kriterium im σ - τ -Raum ist in Abbildung 5.14 dargestellt.

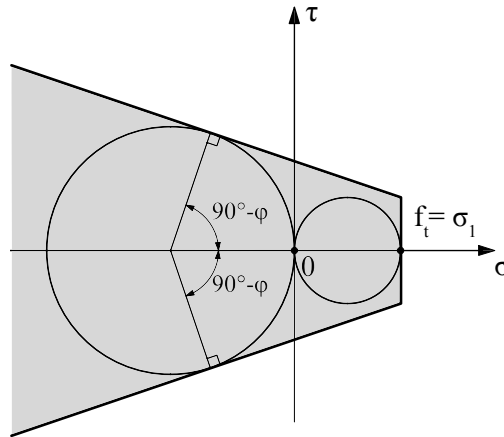


Abbildung 5.14: modifiziertes MOHR-COULOMB-Kriterium

In Kenntnis des Reibungswinkels für Beton, der z.B. aus [79] entnommen werden kann, ergibt sich die Modifikation des MOHR-COULOMB-Kriteriums wie folgt: Im Bereich des Versagens infolge Schubgleitung ergibt sich für den ebenen Spannungszustand mit

$$k = \frac{f_c}{f_{ct}} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (5.18)$$

eine Geradengleichung, deren Steigung vom Reibungswinkel ϕ bestimmt wird:

$$k\sigma_1 - \sigma_2 = f_c \quad (5.19)$$

Je nach Größe der zulässigen Hauptzugspannung wird diese Geradengleichung in Richtung positiver Spannungen begrenzt. In Abbildung 5.14 ist ersichtlich, dass im vorliegenden Fall bei einaxialem Zug die geringe Zugfestigkeit zu einem Versagen durch Separation führt. Die Kohäsion lässt sich durch Umformung von Gl. (5.9) bestimmen. Für $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_3 = -f_c$ ergibt sich:

$$f_c = 2c\sqrt{k} \quad (5.20)$$

Daraus folgt:

$$c = \frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} \frac{f_c}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}} \frac{f_c}{2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{f_c}{2} \quad (5.21)$$

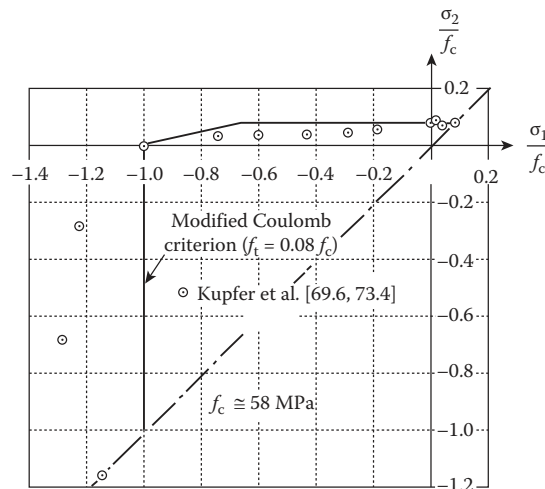


Abbildung 5.15: Vergleich des modifizierten MC-Kriteriums mit Versuchswerten [aus [79]]

Für einen Reibungswinkel von 37° , der für Betone niedrigerer Festigkeitsklasse realistisch ist, vgl. [79], [67], sowie einem Verhältnis von Zug- zu Druckfestigkeit von $1/10$ schneidet die Gerade aus dem Kriterium der Schubgleitung die Gerade aus dem RANKINE-Kriterium bei $0,6f_c$.

Mithilfe des modifizierten MOHR-COULOMB-Kriteriums lässt sich die KUPFER-Kurve im Bereich der Schubbeanspruchung, also eines gemischten Hauptspannungszustandes, besser approximieren als mit der ursprünglichen Formulierung, in der zudem ein nicht physikalisch begründeter Wert für den Reibungswinkel verwendet wird. Abbildung 5.15 zeigt den Vergleich der Versuchswerte von KUPFER mit einem modifizierten MOHR-COULOMB-Bruchkriterium.

Nachteil des modifizierten wie auch des ursprünglichen MOHR-COULOMB-Kriteriums ist, dass die höhere mehraxiale Tragfähigkeit unter Druckbeanspruchung nicht abgebildet werden kann. Das MOHR-COULOMB Materialmodell mit Tension Cut Off ist ein Drei-Parameter-Modell: Es werden zur Beschreibung des Betonmaterials die Zug- und die Druckfestigkeit sowie der Reibungswinkel benötigt.

5.3.5 Mehr-Parameter Modelle

Die bisher vorgestellten Bruch- bzw. Fließmodelle benötigen eine geringe Anzahl von Materialparametern zur Kalibrierung. Allerdings handelt es sich bei den vorgenannten Kriterien um relativ einfache Annäherungen an die wirkliche Versagensfläche. Aus Abbildung 5.8 geht beispielsweise hervor, dass die Meridiane gekrümmt sind und die Form der deviatorischen Ebenen weder kreisförmig, wie die des DRUCKER-PRAGER-Kriteriums, noch hexagonal sind wie beim MOHR-COULOMB-Kriterium angenommen. Die Form der Bruchfläche in der Deviatorebene ist abhängig vom hydrostatischen Spannungszustand. Bei sehr geringen hydrostatischen Drücken bzw. positiven hydrostatischen Druckspannungszuständen ist die Fläche eher dreieckig und entspricht damit eher dem RANKINE-Kriterium, was für dreidimensionale Zugspannungszustände auch plausibel ist.

Mit zunehmenden negativen hydrostatischen Druckspannungszuständen nähert sich die Form der Bruchfigur in der Deviatorebene immer weiter einer Kreisform an.

Ottosen Versagenskriterium Eines der bekanntesten Versagenskriterien für Beton wurde 1977 von OTTOSEN[83] entwickelt und wird auch im MODEL CODE 2010[27] als Bruchkriterium für Beton unter mehraxialer Beanspruchung vorgeschlagen. Die Begründung hierfür ist, dass es nicht zu kompliziert sei und gut mit Versuchsdaten übereinstimme, vgl.[17]. Das Kriterium nach OTTOSEN wird mithilfe der drei Invarianten I_1 , J_2 und J_3 definiert und zeichnet sich durch gekrümmte Meridiane und nicht-kreisförmige Deviatorebenen aus. Die mathematische Formulierung lautet:

$$\Phi = \Phi(I_1, J_2, J_3) = a \frac{J_2}{f_c^2} + r(\theta) \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + b \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \quad (5.22)$$

Hierbei ist $r(\theta)$ eine geeignete Funktion abhängig vom LODE-WINKEL, die die Form des deviatorischen Schnittes beeinflusst:

$$r(\theta) = \begin{cases} c_1 \cos \left[\frac{1}{3} \arccos (K \cos 3\theta) \right] & \text{falls } \cos 3\theta \geq 0 \\ c_1 \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos (K \cos 3\theta) \right] & \text{falls } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Die Koeffizienten a, b, c_1 und K ergeben sich aus der Anpassung an Versuchswerte und sind konstant. Hinweise zur Ermittlung dieser Koeffizienten finden sich in([17] und [27]. Allerdings unterscheiden sich die Angaben zur Ermittlung der Parameter in diesen beiden Werken, wobei die Funktion für das Versagenskriterium sehr sensitiv auf geringe Änderungen in den Eingangswerten reagiert. Als Vergleichswerte aus Versuchen werden die einaxiale Druck- und Zugfestigkeit benötigt sowie die zwei-axiale Druckfestigkeit und ein Spannungspunkt auf dem Druckmeridian ($\theta = 60^\circ$) zugehörig zu einem drei-axialen Spannungszustand. Zur Beschreibung der Versagensfläche werden somit vier Materialparameter benötigt, das Kriterium gehört somit zur Klasse der Vier-Parameter-Modelle. Der Parameter K ist ein Formfaktor, der die Abweichung von der Kreisform steuert. Die Funktion lässt sich über die Wahl der Koeffizienten an klassische Kriterien, wie das VON MISES-Kriterium mit $a = b = 0$ und $r = \text{konstant}$, sowie das DRUCKER-PRAGER-Kriterium mit $a = 0$ und $r = \text{konstant}$, anpassen [vgl.([17]), S.357]. Abbildung 5.16 veranschaulicht den Einfluss des Formfaktors K auf die Form der Bruchfläche im dreidimensionalen Hauptspannungsraum.

Der Einfluss des Parameters K lässt sich auch in der Deviatorebene erkennen. Hierbei zeigt sich, dass die Wahl eines Formfaktors $K > 0,9$ für die üblichen Betonfestigkeiten zu einer realistischeren Versagensfläche führt, da sie dann eher dem RANKINE-Kriterium entspricht und damit eine bessere Anpassung an die reale Versagensform im unteren Beanspruchungsbereich darstellt. Mit zunehmenden hydrostatischen Spannungen verändert sich die Versagensform in der hydrostatischen Ebene und nähert sich einer Kreisform an.

Vergleicht man das OTTOSEN-Versagenskriterium im für den ebenen Spannungszustand mit der Versagenskurve nach KUPFER, ist der Einfluss des Formfaktors K ebenfalls sehr offensichtlich. Die Übereinstimmung mit $K = 0,97$ ist für die einaxiale Druck- und Zugfestigkeit sowie die biaxiale Druckfestigkeit recht gut. Die Übereinstimmung im für Schubbeanspruchungen relevanten Druck-Zug-Bereich ist vertretbar, wenngleich die Tragfähigkeit im Bereich hoher Druckspannungen mit

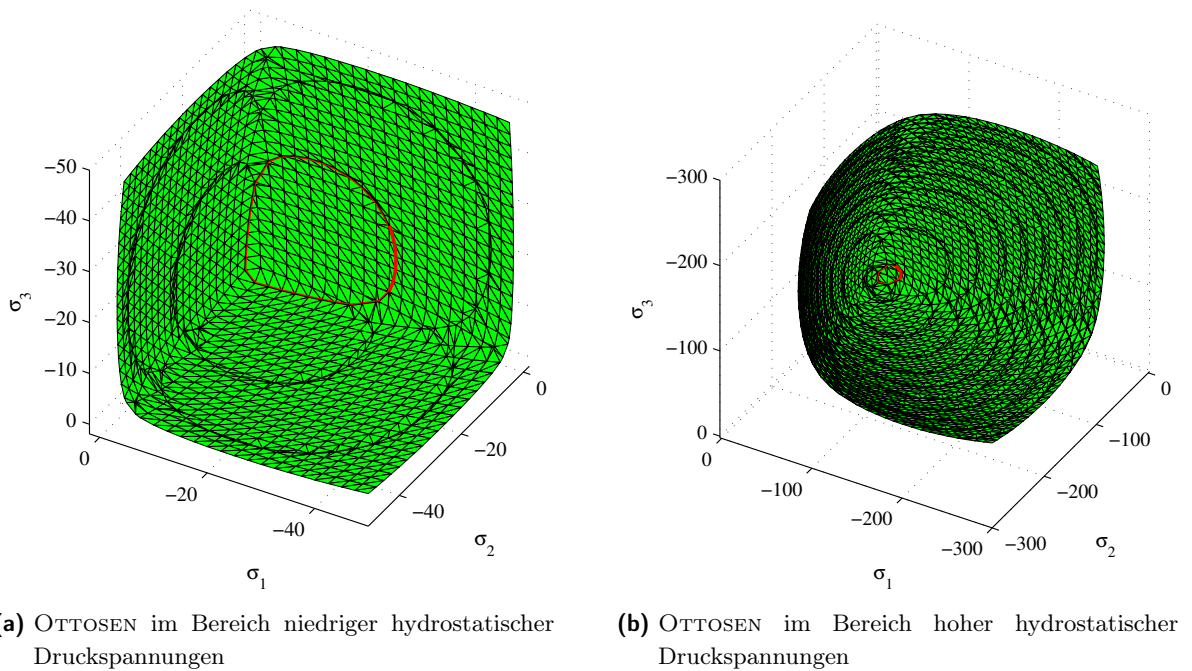


Abbildung 5.16: OTTOSEN-Versagenskriterium bei niedrigen und hohen Spannungszuständen

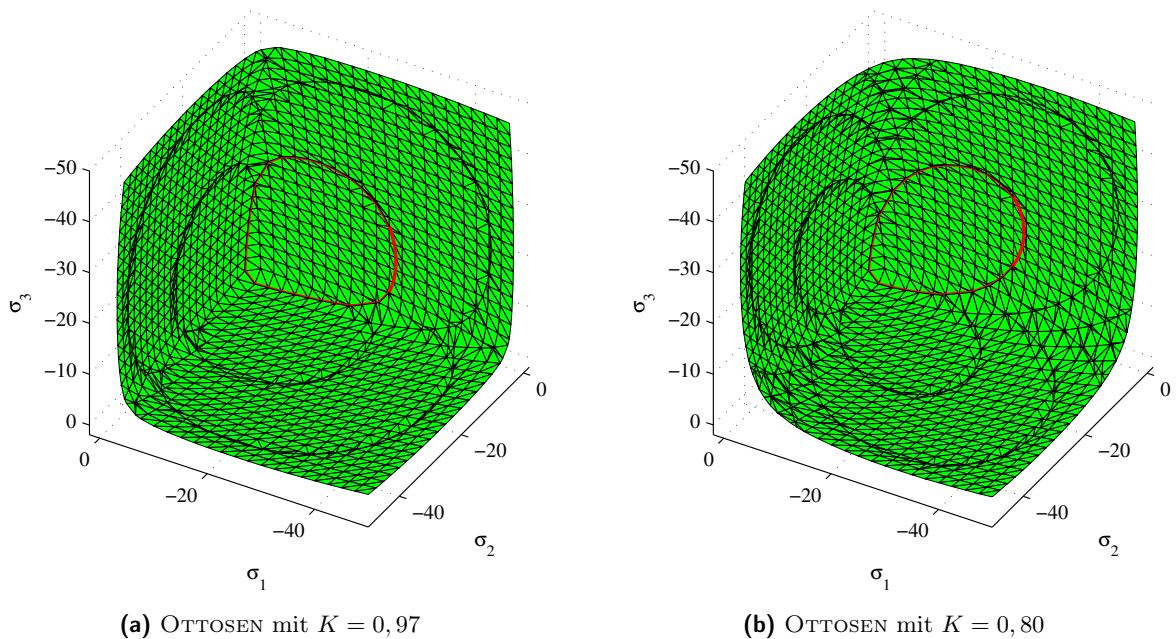


Abbildung 5.17: Einfluss des Formfaktors K auf die Form der Versagensfläche

dem OTTOSEN-Kriterium unterschätzt wird. Bei gemischten Druckspannungszuständen wird die Tragfähigkeit hingegen überschätzt. Bei der Verwendung eines Formfaktors $K = 0,8$ lässt sich eine deutlich schlechtere Übereinstimmung für fast alle Bereiche im ebenen Spannungszustand feststellen.

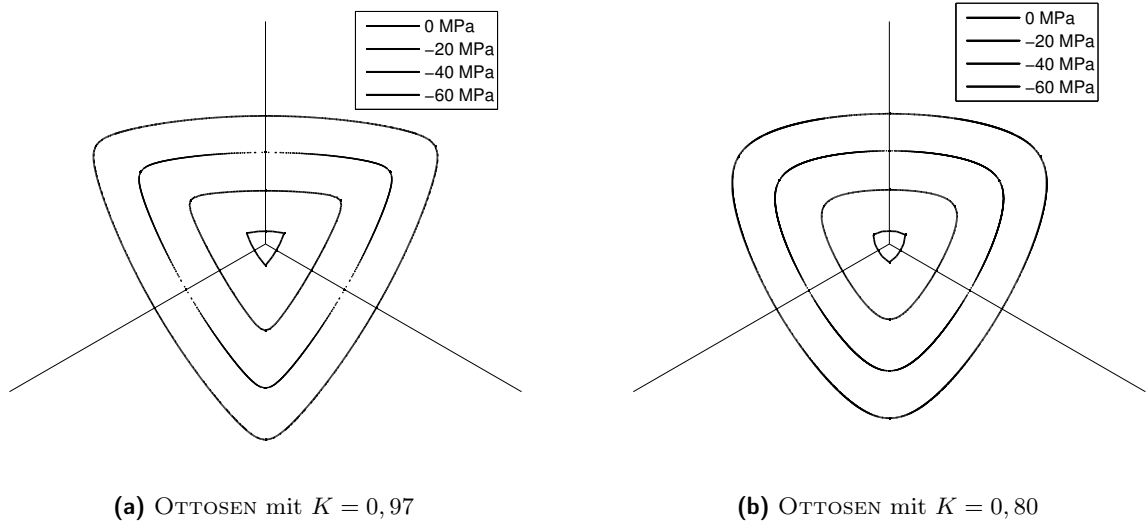


Abbildung 5.18: Einfluss des Formfaktors K auf die Form des deviatorischen Schnittes

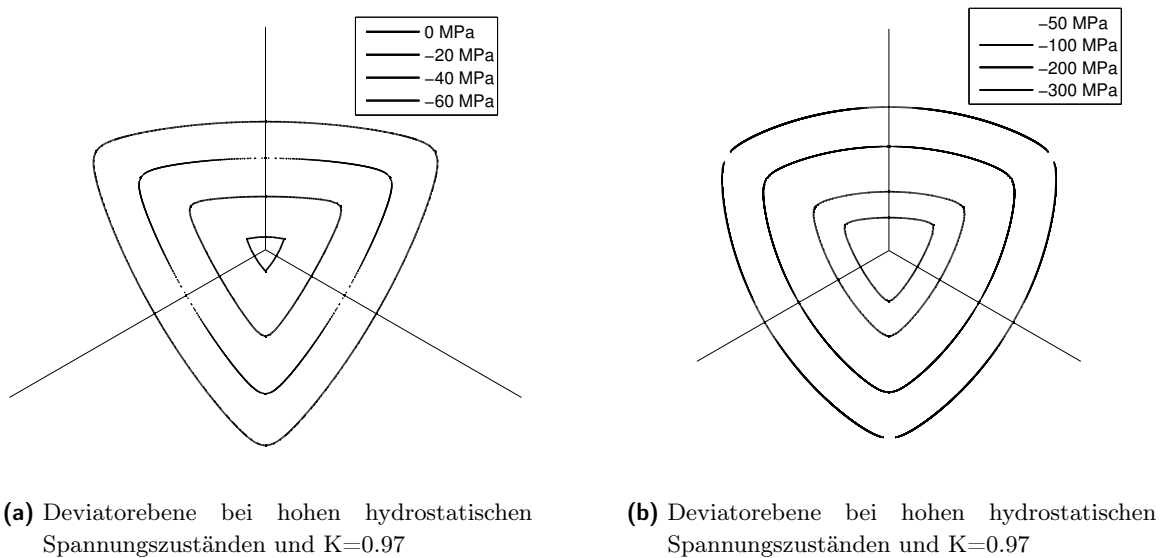


Abbildung 5.19: Deviatorflächen bei niedrigen und hohen Spannungszuständen

Da im Rahmen dieser Arbeit Schubbeanspruchungen im Steg untersucht werden, ist besonders eine gute Übereinstimmung für den ebenen Spannungszustand erstrebenswert.

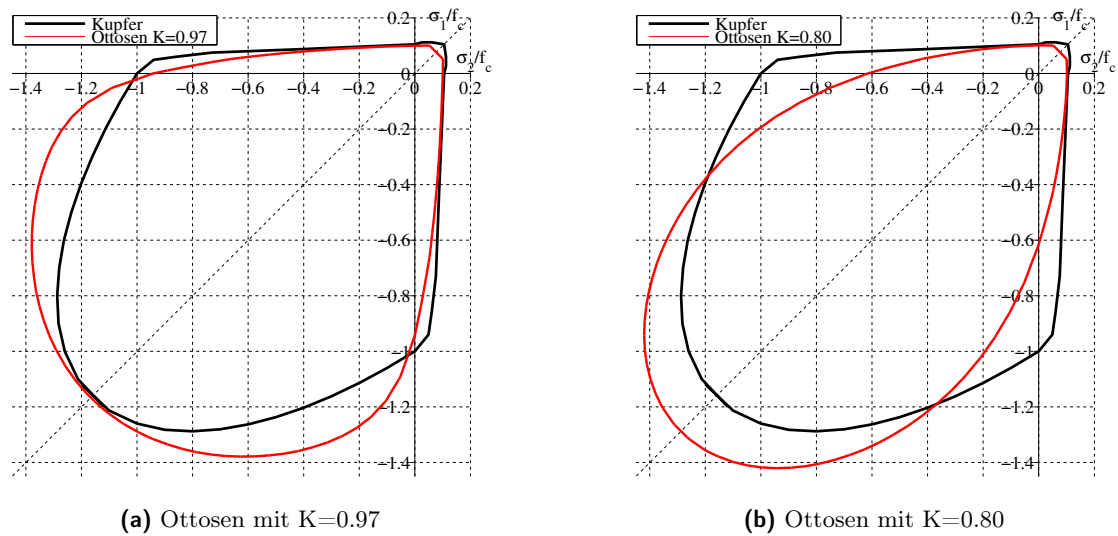


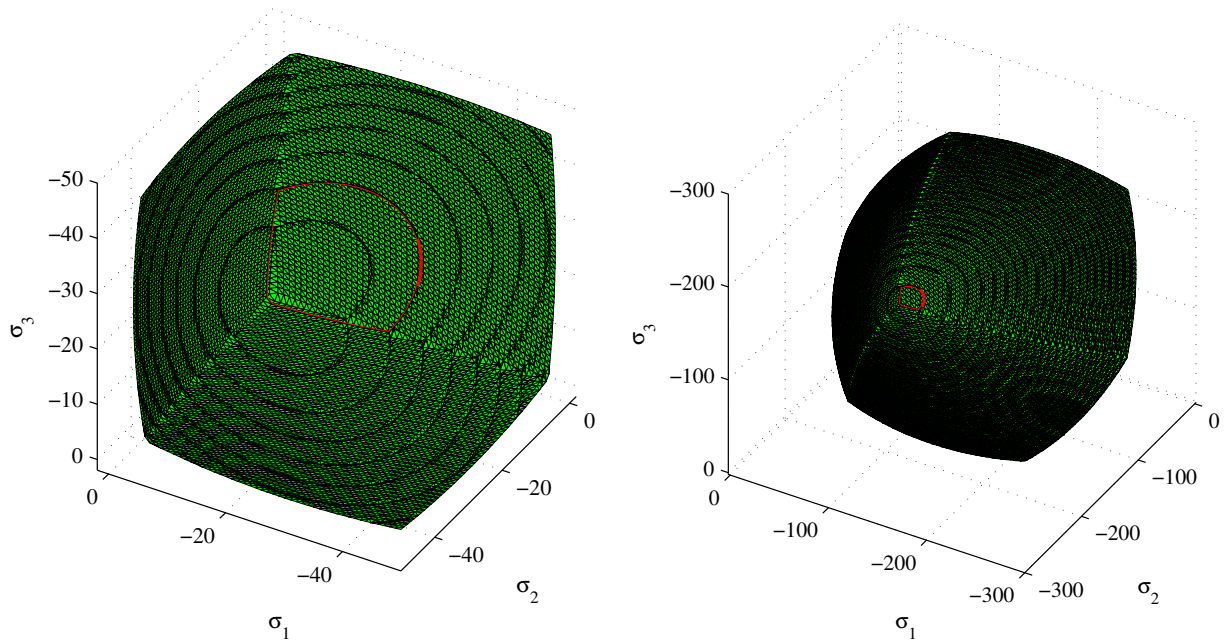
Abbildung 5.20: Vergleich des OTTOSEN-Versagenskriteriums mit der Versagenskurve nach KUPFER

Hsieh-Ting-Chen-Versagenskriterium Ein weiteres Versagenskriterium basierend auf vier Materialparametern ist das HSIEH-TING-CHEN-Versagenskriterium. Auch dieses benötigt vier Materialparameter; es handelt sich ebenfalls um die einaxiale Druck- sowie Zugfestigkeit, die biaxiale Druckfestigkeit sowie ein Spannungspunkt auf dem Druckmeridian, der sich jedoch von dem Punkt aus dem OTTOSEN-Kriterium unterscheidet. Für die Form in der Deviatorebene wird die Formulierung aus Gl. (5.23) durch einen einfacheren Ausdruck ersetzt:

$$r(\theta) = b \cos \theta + c \quad (5.24)$$

Die folgenden Abbildungen zeigen den Verlauf der Versagensfläche im dreidimensionalen Hauptspannungsraum sowie im Vergleich zur KUPFER-Kurve für den ebenen Spannungszustand. Die Übereinstimmung ist in den meisten Bereichen sehr gut, allerdings wird für Schubspannungszustände relevanten Bereich das Versagen durch eine linearisierte Funktion approximiert. Im Gegensatz zu dem OTTOSEN-Bruchkriterium beinhaltet die Formulierung nach HSIEH-TING-CHEN scharfe Kanten der Meridiane.

Weitere Informationen zu den Versagenskriterien finden sich in [46] oder [17].



(a) HSIEH-TING-CHEN im Bereich üblicher Spannungen (b) HSIEH-TING-CHEN im Bereich hoher Spannungen

Abbildung 5.21: HSIEH-TING-CHEN-Versagenskriterium

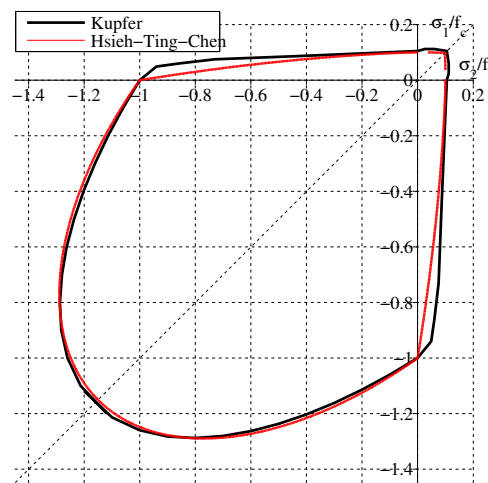


Abbildung 5.22: Vergleich des HSIEH-TING-CHEN-Versagenskriteriums mit der Versagenskurve nach KUPFER

Menétry-Willam Versagenskriterium Für das Kriterium nach MENÉTRY-WILLAM werden im Gegensatz zu den vorher vorgestellten Kriterien fünf Materialparameter benötigt. Insgesamt handelt es sich um eine komplexere Formulierung, bei der die gekrümmten Meridiane durch elliptische Kurven angenähert werden. Aus dieser Wahl folgt eine recht anspruchsvolle Formulierung für die Form in der Deviatorebene. Von WILLAM und WARNKE stammt die elliptische Funktion aus Gl. 5.25, die

die Form in der Deviatorebene bestimmt.

$$r(\theta, e) = \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) [4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e]^{1/2}} \quad (5.25)$$

MENÉTRY-WILLAM kombinieren diese mit einem allgemeinen Versagenskriterium für Beton. Dies führt zu einer Form mit parabolisch gekrümmten Meridianen, die die hydrostatische Achse im Punkt für einen dreiaxiale Zugspannungszustand schneiden. Die Wahl des Parameters e hat einen entscheidenden Einfluss auf die Form der Versagensfläche und dient zur Anpassung an bekannte Versagenskriterien: mit $e = 0,5$ ergibt sich eine RANKINE-Fläche, mit $e = 1,0$ die Form nach DRUCKER-PRAGER. Abbildung 5.23 zeigt das generalisierte Versagenskriterium nach MENÉTRY und WILLAM, angewendet auf das RANKINE- und MOHR-COULOMB-Kriterium. Die hexagonale

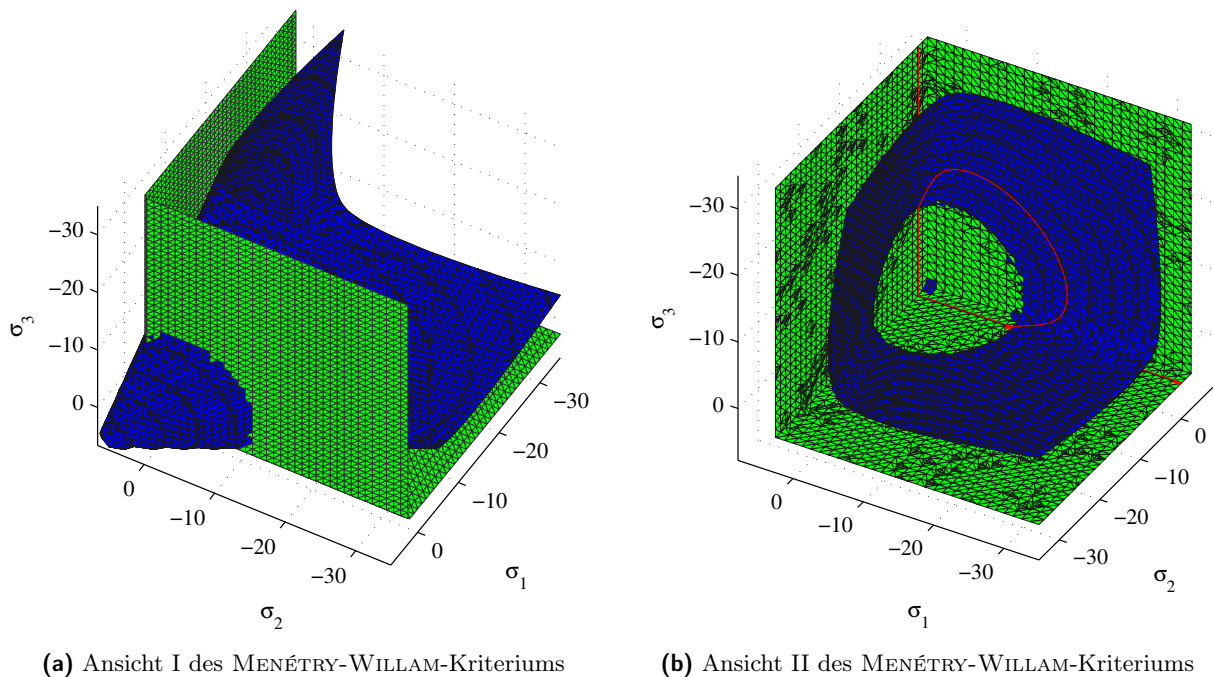


Abbildung 5.23: MENÉTRY-WILLAM-Versagenskriterium, angepasst an RANKINE und MOHR-COULOMB

Struktur des MOHR-COULOMB-Kriteriums kann nur approximiert werden. Die dargestellte Kombination dieser beiden Versagenskriterien entspricht dem MOHR-COULOMB-Modell mit Tension Cut Off. In ABAQUS wird diese Form der Versagensfunktion als Fließfunktion für das Materialmodell basierend auf dem MOHR-COULOMB-Versagenskriterium mit Tension Cut Off verwendet.

5.3.6 Darstellung der Bruchkriterien in Koordinatenspannungen

Die Bruch- bzw. Fließhypothesen werden in der Regel mithilfe der Spannungsinvarianten im Hauptspannungsraum dargestellt. Zur Beschreibung von Beanspruchungszuständen werden jedoch meist Koordinatenspannungen herangezogen. Für die Betrachtung der Querkraftkraftbeanspruchung in

Stahlbetonbalken kann für die Stege von Stahlbetonbalken vereinfacht von einem ebenen Spannungszustand (ESZ) ausgegangen werden, mit σ_x , σ_y sowie τ als maßgebende Spannungen. Zunächst wird der Zusammenhang zwischen Hauptspannungen und Koordinatenspannungen kurz dargestellt.

Umrechnung von Koordinatenspannungen in Hauptspannungen Die Umrechnung von Koordinatenspannungen in Hauptspannungen kann für einen zweidimensionalen Spannungszustand mit Hilfe folgender Formeln vorgenommen werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{1/2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}\quad (5.26)$$

Aus der Bedingung, dass die Determinante der Spannungsmatrix eine Invariante darstellt, lässt sich auch folgende Bedingung herleiten:

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \quad (5.27)$$

Daraus folgt:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2 \quad (5.28)$$

Mit $\sigma_x = 0$ bzw. $\sigma_y = 0$ ergibt sich:

$$\tau_{xy} = \sqrt{-\sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad (5.29)$$

Eine weitere Invariante ist die Summe der Normalspannungen:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \quad (5.30)$$

Ähnlich lässt sich auch die maximale Schubspannung ermitteln, die in manchen Bruch- oder Fließkriterien als Vergleichswert dient, z.B. beim TRESKA-Kriterium, bei dem davon ausgegangen, dass für das Versagen des Werkstoffes die größte Hauptspannungsdifferenz verantwortlich ist. Diese Hauptspannungsdifferenz entspricht dem doppelten Wert der maximalen Schubspannung. Es handelt sich dabei um den zweiten Term aus dem schon bekannten Hauptspannungskriterium aus Gl. (5.26), der im MOHRschen-Spannungskreis dem Radius entspricht:

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.31)$$

Drückt man dies direkt mit den Hauptspannungen aus, erhält man:

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (5.32)$$

Der Winkel zwischen den Koordinatenachsen und der Richtung der Hauptspannungen lässt sich mit der Bedingung für das Maximum der Spannungen bestimmen und ergibt sich dann zu:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5.33)$$

Der Winkel lässt sich auch in Abhängigkeit von einer Koordinaten-Normalspannung und den Hauptspannungen ermitteln:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad (5.34)$$

Mithilfe des MOHR'schen Spannungskreises, s. Abbildung 5.24, lassen sich die hergeleiteten Beziehungen auch anschaulich darstellen. Aus dieser Darstellung lässt sich eine weitere Möglichkeit zur

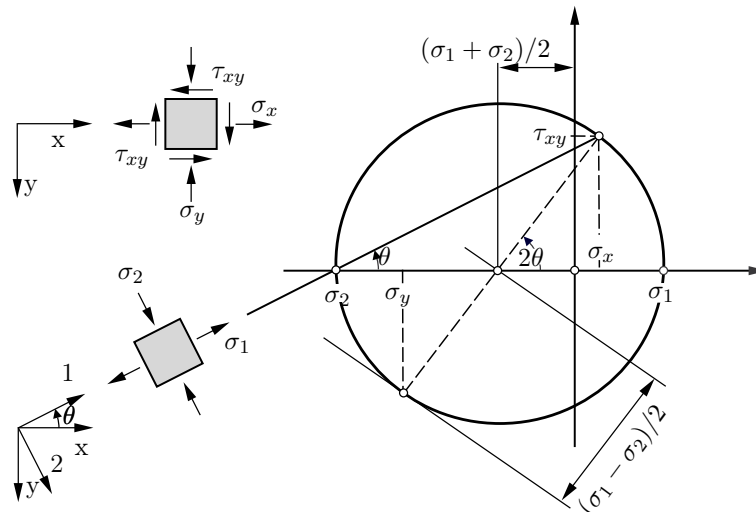


Abbildung 5.24: MOHR'scher Spannungskreis

Berechnung des Winkels, um den die Hauptspannungen von den Koordinatenachsen abweichen, gewinnen:

$$\tan \theta = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_1 + |\sigma_y|} \quad \text{bzw.} \quad \tan \theta = \frac{\tau_{xy}}{|\sigma_2| + \sigma_x} \quad (5.35)$$

Eine ähnliche Darstellung existiert auch für die Verzerrungen, der MOHR'sche Dehnungskreis.

Aus dem MOHR'schen Spannungskreis ist ersichtlich, dass unter Berücksichtigung der Festigkeiten ($\sigma_1 \leq f_{ct}$ bzw. $|\sigma_2| \leq f_c$) eine Zunahme von Schubspannungen τ_{xy} nur möglich ist, wenn gleichzeitig mindestens eine Druckspannung wirkt.

Abbildung 5.25 zeigt klassische Versagenkriterien für den ebenen Spannungszustand im Vergleich mit der Versagenkurve aus den KUPFERversuchen bezogen auf die $\tau - \sigma$ -Ebene. Es wird hierbei davon ausgegangen, dass nur die Spannungen σ_x und τ vorhanden sind.

Das Versagenkriterium von MOHR-COULOMB in Kombination mit einem RANKINE-Kriterium, also ein MOHR-COULOMB-Kriterium mit Tension Cut Off führt zu einer guten Approximierung der KUPFER-Versagenkurve.

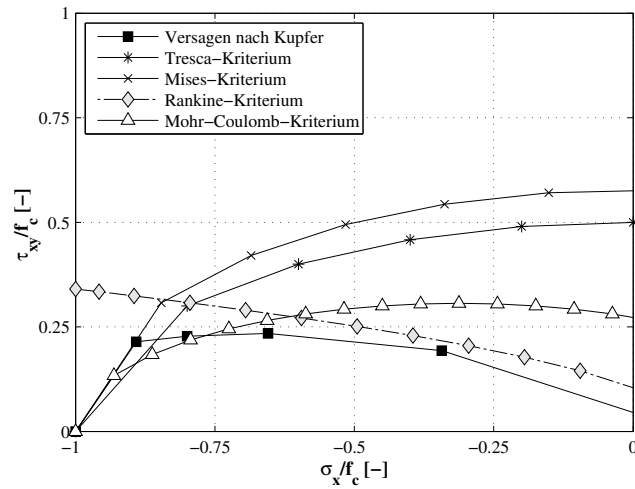


Abbildung 5.25: Darstellung verschiedener Versagenskriterien im $\tau - \sigma$ -Raum

5.4 Modellierung der Rissbildung von Beton

5.4.1 Einleitung

Aufgrund der geringen Zugfestigkeit des Betons sind Risse unter üblicher Beanspruchung unvermeidbar. Bei unbewehrten Bauteilen sind sie häufig tragfähigkeitsbestimmend, bei bewehrten führt die Rissbildung unter sukzessiver Laststeigerung zu Spannungsumlagerungen. Das Schubtragverhalten von Stahlbetonbalken wird maßgeblich durch die Umlagerung von Zugspannungen vom Beton in die Bewehrung aufgrund der Entstehung von Schubrisen bestimmt. Zur realistischen Erfassung beider Phänomene kommt der Modellierung des Rissverhaltens eine entscheidende Bedeutung zu. Daher werden im folgenden die theoretischen Hintergründe der Rissmodellierung kurz skizziert.

Grundsätzlich lassen sich spröde, duktile und quasi-spröde Brüche unterscheiden. Abbildung 5.26 veranschaulicht das unterschiedliche Bruchverhalten anhand der Spannungs-Dehnungs-Linien.

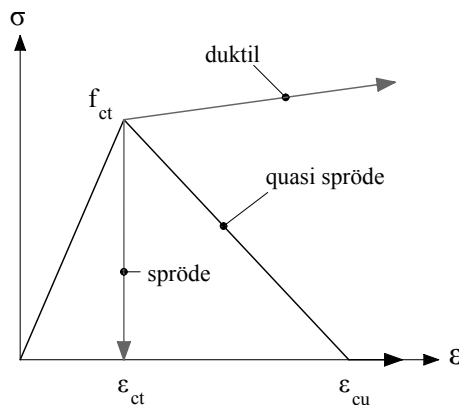


Abbildung 5.26: Brucharten

Spröde Brüche zeichnen sich dadurch aus, dass bei Erreichen der Festigkeit die Spannungen schlagartig abfallen. Dies gilt auch, wenn die Belastung wegeregelt aufgebracht wird. Die Formänderungsenergie des Körpers wird dabei umgewandelt in Energie zur Bildung neuer Rissoberflächen. Glass beispielsweise ist ein sprödes Material.

Duktile Brüche lassen sich zum klassischen plastischen Verhalten zuordnen. Nach Erreichen der Streckgrenze sinkt die Steifigkeit, jedoch ist noch eine weitere Laststeigerung bzw. zumindest eine weitere Steigerung der Verformung möglich, bis der Werkstoff endgültig versagt. Die Formänderungsenergie wird hierbei in erster Linie in Energie für Verschiebungen im Kristallgitter umgewandelt. Metalle sind bekannt für derartiges Verhalten.

Beton gehört zu den Werkstoffen mit *quasi-sprödem Materialverhalten*, welches sich durch die Bildung einer sogenannten Bruchprozesszone auszeichnet. Innerhalb dieser fallen die aufnehmbaren Spannungen sukzessive mit zunehmender Verformung ab, was an der Spannungs-Verzerrungs- bzw. eindeutiger an der Spannungs-Verformungs-Kurve ablesbar ist. Dieser Prozess wird als *Entfestigung* oder im Englischen als „*Strain Softening*“ bezeichnet. Dies ist auf eine Mikrorissbildung innerhalb des Werkstoffes zurückzuführen, die eine Schwächung des Materials bewirkt. Die Mikrorisse sind zunächst gleichmäßig über den gesamten Querschnitt verteilt, bis sie sich an der Stelle der geringsten Zugfestigkeit lokalisieren und sich schließlich zu einem Makroriss vereinigen, der das endgültige Versagen einleitet, und über den keine Spannungen mehr übertragen werden können. Die Formänderungsenergie wird in Energie für die Mikrorissbildung dissipiert.

Die analytische Beschreibung der Entstehung und des Wachstums von Rissen in einem Werkstoff ist Teil der Bruchmechanik. Die Bruchmechanik lässt sich in die *lineare* sowie die *nichtlineare Bruchmechanik* einteilen. Die Ansätze der linearen Bruchmechanik beschreiben die Bruchvorgänge mit der linearen Elastizitätstheorie und eignen sich zur Beschreibung von Sprödbrüchen. Sind die Bruchvorgänge jedoch auch durch inelastisches Materialverhalten gekennzeichnet, wie beispielsweise bei Metallen, können diese nur mit der *nichtlinearen Bruchmechanik* zutreffend beschrieben werden.

5.4.2 Kohäsive Rissmodelle

Für quasi-sprödes Rissverhalten ist der Ansatz der linearen Bruchmechanik nicht geeignet, da sich aufgrund der Mikrorissbildung eine Bruchprozesszone ohne klar definierte Risspitze bildet und die Singularitäten des Modells auf Basis der linearen Elastizitätstheorie nicht realistisch sind. DUGDALE entwickelte ein Rissmodell, bei dem von einer plastischen fiktiven Zone im Rissspitzenumfeld ausgegangen wird. Der Übergang von elastischem Materialverhalten im ungerissenen Körper zu den unbelasteten Rissflanken wird mit der Kohäsivzone beschrieben, die als Bruchprozesszone verstanden werden kann. Diese Kohäsivzone entspricht einer fiktiven Verlängerung des Risses. Im Gegensatz zum realen Riss sind über diesen fiktiven Riss weiterhin Spannungen übertragbar. DUGDALE geht innerhalb dieser Zone von ideal-plastischem Verhalten aus, bei dem die Spannungen konstant sind und der Fließspannung entsprechen. Eine Weiterentwicklung ist das Modell nach BARENBLATT, bei dem die Spannungsverteilung in der Kohäsivzone nicht mehr konstant ist, sondern vom betrachteten Material sowie vom Rissspitzenabstand x abhängt, jedoch unabhängig von der Belastung ist, vgl. [14]. Innerhalb dieser Zone lassen sich die abfallenden Spannungen als gradueller Prozess des

Verlustes der Kohäsivkräfte interpretieren. Hierbei ist die zutreffende Ermittlung der Länge der plastischen Zone problematisch.

Fictitious Crack Modell Eine der fundamentalen Grundlagen zur Rissmodellierung in Beton und anderen quasi-spröden Materialien ist das *Fictitious Crack Modell* von HILLERBORG [37],[38], das die Spannungsübertragung über die Rissufer mit der Bruchenergie als Materialparameter verbindet. Der Ansatz von HILLERBORG beruht ebenfalls auf der Idee des Kohäsivzonenmodells, erweitert diese jedoch um die Annahme, dass die Spannungen in der Bruchprozesszone nicht mehr vom Rissabstand, sondern von der Separation der Rissufer abhängen.

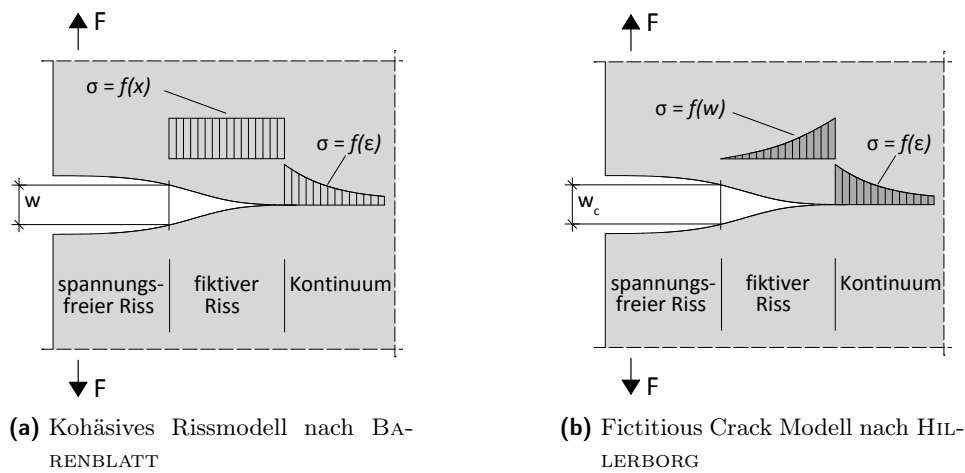


Abbildung 5.27: Rissmodelle für inelastische Materialien

Die Rissweite w lässt sich als Verschiebungsdiskontinuität zwischen den Rissufern darstellen:

$$\mathbf{w} = [\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad (5.36)$$

Innerhalb der Rissprozesszone wachsen die Verformungen mit gleichzeitig abnehmenden Spannungen an. Außerhalb der Rissprozesszone verhält sich der Werkstoff linear-elastisch bzw. elastisch-plastisch. Aus Gleichgewichtsgründen müssen die Spannungen in diesen Bereichen ebenfalls abnehmen, was mit einer (elastischen) Verkürzung der Bereiche einhergeht. Die Gesamtverformung während dieses Prozesses entspricht also immer der elastischen Verformung $\varepsilon \cdot (l_0 - u_{RPZ})$ in den ungestörten Bereichen sowie der zunehmenden Rissweite w . Wenn die maximale Rissweite erreicht ist, entspricht die Gesamtverformung Δl genau der Rissweite w , da keine Spannungen über den Riss übertragen werden können, und somit in den ungestörten Bereichen die Dehnungen aufgrund der elastischen Rückverformung ebenfalls bis auf 0 abgenommen haben. Abbildung 5.28 stellt die verschiedenen Verformungsanteile unter Ansatz einer verbleibenden plastischen Dehnung außerhalb der Bruchprozesszone dar. Weit verbreitet ist jedoch auch ein linear-elastischer Ansatz bis zum Erreichen der Zugfestigkeit, d.h. die Annahme linear-elastischen Verhaltens ohne bleibende plastische Dehnung:

$$\Delta l = u_{RPZ} + \varepsilon_{el} \cdot (l_0 - b_{RPZ}) \quad (5.37)$$

Im Rahmen des *Fictitious Crack Models* werden die in der Bruchprozesszone auftretenden inelastischen Verformungen aus benachbarten Mikrorissen zu einem einzelnen, fiktiven Riss mit einer Breite der Bruchprozesszone $b_{RPZ} = 0$ zusammengefasst, über den weiterhin Spannungen übertragbar sind. Hierbei nehmen die Spannungen, ausgehend von einem Maximalwert f_{ct} an der Risspitze abhängig von der Rissbreite w in der Bruchprozesszone kontinuierlich ab, siehe Abbildung 5.27. Das Model ist damit unabhängig von der Breite der Bruchprozesszone. Da im fiktiven Rissmodell die Bruchprozesszone als infinitesimal klein angenommen wird, verschwindet der elastische Anteil für diese in der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung:

$$\Delta l = w + \varepsilon_{el} \cdot l_0 \tag{5.38}$$

Die Bruchprozesszone wird also als fiktiver Riss modelliert, dessen Rissweite bis Erreichen der Zug-

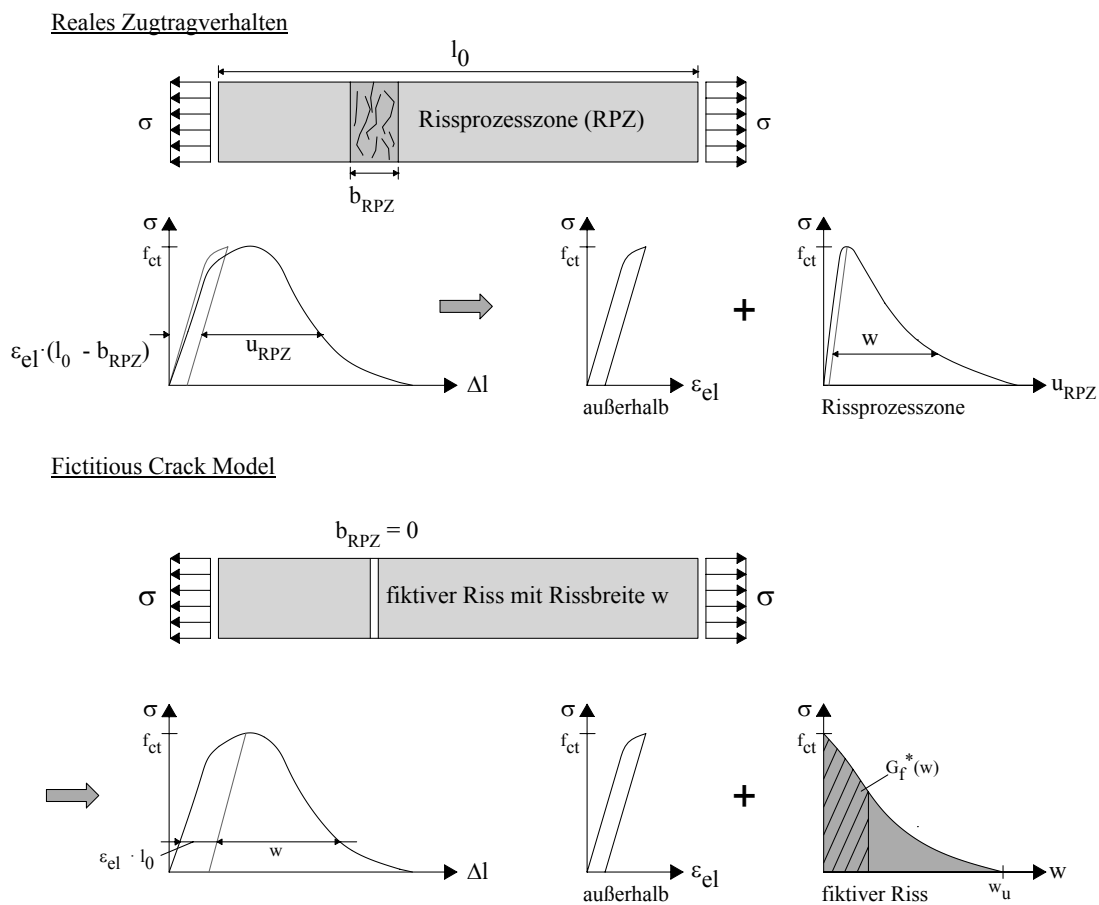


Abbildung 5.28: Zugtragverhalten von Beton mit Ausbildung einer Bruchprozesszone, in Anlehnung an [29]

festigkeit $w = 0$ beträgt. Das Verhalten dieses fiktiven Risses lässt sich mit folgendem Spannungs-Separations-Gesetz bzw. Spannungs-Rissöffnungs-gesetz beschreiben:

$$\sigma = f(w) \tag{5.39}$$

Die Besonderheit beim *Fictitious Crack Modell* besteht darin, dass eine Beziehung zwischen der (fiktiven) Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung $\sigma(w)$ und der dissipierten Bruchenergie G_f hergestellt wird, die der Fläche unterhalb des Graphen entspricht, wie aus Abbildung 5.28 ersichtlich ist. Die Bruchenergie entspricht der dissipierten Energie während des Bruchprozesses:

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (5.40)$$

Dadurch wird im *Fictitious Crack Model* die gesamte Bruchenergie aus der Verformung der Rissprozesszone in einem fiktiven Riss akkumuliert.

Sowohl die Bruchenergie G_f als auch die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung sind Materialparameter und können grundsätzlich experimentell bestimmt werden, wobei die Bruchenergie einfacher zu bestimmen ist als die vollständige Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung. Die in unterschiedlichen Versuchen ermittelten Größen unterliegen allerdings Streuungen, so dass in der Literatur recht unterschiedliche Angaben für den Wert der zu finden sind.

Objektivität Real ist die Breite der Bruchprozesszone von der Probekörpergeometrie unabhängig. Sie kann nach [37] 50-100 mm oder sogar mehr betragen. Die Lokalisierung der Verformungen innerhalb der Bruchprozesszone führt zum Verlust der Objektivität einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung, da die über die gesamte Probekörperlänge gemittelte Verzerrung die Verformung der Bruchprozessgröße mit einschließt. Betrachtet man zwei Probekörper mit der Länge $l_0 = a$ bzw. $l_0^* = 2a$, ergibt sich die Verzerrung des ersten Körpers nach Überschreiten der Zugfestigkeit und Ausbildung der Bruchprozesszone aus der Addition der Dehnung im ungestörten Bereich, die vereinfacht aus dem HOOKEschen Gesetz ermittelt werden kann, sowie der Dehnung in der Bruchprozesszone:

$$\varepsilon(l_0 = a) = \frac{\sigma}{E} + \frac{u_{RPZ}}{a} \quad (5.41)$$

Für den zweiten Probekörper gilt:

$$\varepsilon(l_0^* = 2a) = \frac{\sigma}{E} + \frac{u_{RPZ}}{2a} \quad (5.42)$$

Es ist offensichtlich, dass die kürzere Probengeometrie zu größeren Dehnungen bei der gleichen Spannung führt. Die Ermittlung einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung auf Basis der Gesamtverformung eines Probekörpers ist somit wenig sinnvoll. Dies lässt sich umgehen, indem die Verformung innerhalb der Bruchprozesszone u_{RPZ} sowie die zugehörige Spannung lediglich auf die Breite b_{BPZ} bezogen werden. Diese Ansätze werden sowohl beim *Fictitious Crack Model* von HILLERBORG als auch beim *Crack Band Model* von BAŽANT verwendet. Ein weiteres Phänomen bei der Ermittlung einer Spannungs-Dehnungs- oder auch Spannungs-Verformungs-Beziehung auf Basis eines Zugversuches ist die Gefahr des *Snap-Back*. Eine große Länge des Probekörpers im Verhältnis zur Verformung in der Bruchprozesszone führt dazu, dass die elastische Verkürzung in den ungestörten Bereichen außerhalb der Bruchprozesszone größer ist als die Verformung in der Bruchprozesszone selbst. Führt man einen weggeregelten Versuch durch, ist es denkbar, dass der abfallende Ast der Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Überschreiten der Zugfestigkeit nicht mehr durchlaufen werden kann, da die elastische Rückverkürzung größer ist als die zusätzliche positive Verformung aus der Zunahme der Rissweite („Snap-Back“). Weitere Details hierzu s. [21], [84].

Bruchenergie Die Bruchenergie G_F wird als die Energie pro Flächeneinheit des Trennrisses definiert, die erforderlich ist, um eine vollständige Separation eines Probekörpers zu erzielen. Zur Gewährleistung eines stabilen Bruchprozesses ohne Snap-Back-Phänomen muss die Länge der Zugprobe begrenzt werden. Andernfalls ist es möglich, dass die elastische gespeicherte Energie größer ist als die zur Separation erforderliche Bruchenergie, so dass nach Überschreiten der Zugfestigkeit die elastische Verkürzung der Probe die Verlängerung aus der Rissbildung übersteigt und somit die Spannungs-Verformungs-Linie im Zugversuch nicht stabil durchlaufen werden kann. Die kritische Probenlänge kann gemäß [98] über einen Vergleich der elastisch gespeicherten Energie U mit der Brucharbeit zur Durchtrennung der Probe erfolgen. Für eine Probe der Fläche A , der Länge l und einer Verschiebung Δu bis zum Erreichen der Zugfestigkeit f_{ct} ergibt sich die elastisch gespeicherte Energie wie folgt:

$$U = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{l} \cdot \Delta u^2 = \frac{1}{2} \frac{A \cdot l}{E} \cdot f_{ct}^2 \quad (5.43)$$

Die Brucharbeit entspricht:

$$W_B = G_f \cdot A \quad (5.44)$$

Der Grenzfall für ein gerade noch stabiles Versagen lässt sich durch Gleichsetzen der beiden Größen ermitteln. Daraus folgt für die kritische Probenlänge l_{krit} :

$$l_{krit} = \frac{2 \cdot E \cdot G_f}{f_{ct}^2} \quad (5.45)$$

HILLERBORG bezeichnet die Hälfte der kritischen Länge als *charakteristische Länge*, die er als Materialeigenschaft definiert und als Maß für die Duktilität eines Baustoffes ansieht [37], s. Gl. (5.46). Je spröder das Material, desto kleiner die charakteristische Länge.

$$l_{char} = \frac{G_f}{f_{ct}^2} \quad (5.46)$$

Neben der experimentellen Bestimmung kann die Bruchenergie gemäß MODEL CODE 1990[1] näherungsweise auch wie folgt ermittelt werden:

$$G_F = G_{f0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7} \quad (5.47)$$

Hierbei ist G_{f0} der vom Größtkorn d_{max} abhängige Grundwert der Bruchenergie und f_{ctm} die mittlere Zylinderdruckfestigkeit. Die Abhängigkeit der Bruchenergie vom Größtkorndurchmesser belegt z.B. TRUNK [98]. Typische Werte für die Bruchenergie von Beton liegen bei 50N/mm²-100N/mm². In MODEL CODE 2010 wird die Bruchenergie dagegen wie folgt festgelegt:

$$G_F = 73 \cdot f_{cm}^{0,18} \quad (5.48)$$

In beiden Ansätzen hängt die Bruchenergie von der Betondruckfestigkeit ab, und nicht von der Zugfestigkeit, was physikalisch sinnvoller wäre.

Tabelle 5.1: Grundwert der Bruchenergie nach MODEL CODE 1990 in Abhängigkeit vom Größtkorndurchmesser

Größtkorn d_{max} [mm]	G_{f0} [N/m]
8	25.0
16	30.0
32	58.0

Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung Für die σ - w -Beziehung existiert eine große Anzahl von Vorschlägen. Dabei lassen sich lineare/bilineare/multilineare Funktionen sowie Exponentialfunktionen unterscheiden. Ein Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz, das nach JIRASEK gute Übereinstimmung mit Versuchswerten liefert, vgl. [48], wurde von REINHARDT[89] entwickelt.

$$\frac{\sigma_t}{f_{ct}} = \left\{ 1 + \left(c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \quad (5.49)$$

bzw.

$$\sigma_t = \left\{ \left[1 + \left(c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right] \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \right\} f_{ct} \quad (5.50)$$

Die Koeffizienten c_1 und c_2 werden als Materialkonstanten angesehen. Die Rissöffnung w_c entspricht der kritischen Rissöffnung, bei der keine Spannungen mehr über den Riss übertragen werden können. HORDIJK erzielte die besten Übereinstimmungen mit Versuchen mit den Materialkennwerten $c_1 = 3,0$, $c_2 = 6,93$ sowie $w_c = 160 \mu\text{m}$, vgl. [44]. Da die kritische Rissöffnung schwer zu messen sei, handelt es sich laut HORDIJK bei w_c mehr oder weniger um einen Anpassungsparameter. Die Bruchenergie G_f lässt sich über die Integration der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung ermitteln. Für die Bruchenergie ergibt sich dann:

$$G_f = f_{ct} w_c \left[\frac{1}{c_2} \left\{ 1 + 6 \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^3 \right\} - \left\{ \frac{1}{c_2} + c_1^3 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{3}{c_2^2} + \frac{6}{c_2^3} + \frac{6}{c_2^4} \right) + 0,5(1 + c_1^3) \right\} \exp(-c_2) \right] \quad (5.51)$$

Für die gewählten Materialparameter ergibt sich eine einfache, proportionale Beziehung zur Ermittlung der Bruchenergie:

$$G_f = 0,1947 f_{ct} w_c \quad (5.52)$$

Eine einfachere Formulierung, die nach JIRASEK zu ebenfalls vertretbaren Ergebnissen führt, lautet:

$$\sigma_t = f_{ct} \exp \left(-\frac{w}{w_f} \right) \quad (5.53)$$

Das Integral aus Gl. (5.53) ergibt für die Bruchenergie folgende Formel:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw = E\varepsilon_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{w}{w_f}\right) dw = f_{ct} w_f \quad (5.54)$$

Der Kalibrierungsparameter w_f entspricht in diesem Fall nicht der tatsächlichen kritischen Rissöffnung, sondern kontrolliert die Steigung des abfallenden Astes. Er kann aus den physikalischen Größen G_f und f_{ct} wie folgt bestimmt werden:

$$w_f = \frac{G_f}{f_{ct}} \quad (5.55)$$

Integriert man statt bis ∞ lediglich bis zur Rissweite w_c , bei der der Riss als vollständig geöffnet und somit spannungsfrei definiert ist, beträgt die Abweichung zur genaueren Abschätzung nach Gl. (5.51) nur 0,6%. Für die Bruchenergie führt dies auf:

$$G_f = f_{ct} \int_0^{w_c} \exp\left(-\frac{w}{w_f}\right) dw = f_{ct} \left\{ w_f - w_f \exp\left(-\frac{w_c}{w_f}\right) \right\} \quad (5.56)$$

Vergleicht man die unterschiedlichen Ansätze zur Ermittlung der Bruchenergie, lassen sich deutliche Unterschiede feststellen. In der folgenden Tabelle 5.2 sind die Werte für übliche Betone dargestellt. Bei der Ermittlung der Bruchenergie nach MODEL CODE 1990 wurde von einem Größtkorndurch-

Tabelle 5.2: Vergleich verschiedener Ansätze für die Bruchenergie in N/m

f_{cm}	f_{ct}	HORDIJK (5.51)	MODEL CODE 1990	MODEL CODE 2010
20,00	2,21	68,86	48,74	125,17
25,00	2,56	79,90	56,97	130,30
30,00	2,90	90,23	64,73	134,65
35,00	3,21	100,00	72,11	138,44
36,00	3,27	101,89	73,54	139,14
40,00	3,51	109,31	79,17	141,81
45,00	3,80	118,24	85,97	144,84
50,00	4,07	126,84	92,56	147,62

messer $d_{max} = 16$ mm ausgegangen. Die Zugfestigkeit wurde mit folgender Formel aus MODEL CODE 2010 aus der Druckfestigkeit rückgerechnet:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3} \quad (5.57)$$

Es ist erkennbar, dass die Werte für die Bruchenergie stark streuen. Für die Modellierung von unbewehrtem Beton ist die Bruchenergie allerdings ein entscheidender Parameter und hat einen signifikanten Einfluss auf das Simulationsergebnis. Im Rahmen dieser Arbeit wird für numerische Simulationen der Ansatz nach HORDIJK nach Gl. (5.51) verwendet, da er zum einen zwischen den beiden Ansätzen der MODEL CODES liegt, und zum anderen mathematisch logisch aus

der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung hergeleitet wurde. Da die Funktion zur Beschreibung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung aus [44] die Versuchswerte gut abbildet, liegt es nahe, die aus dieser Kurve ermittelte Bruchenergie zu verwenden. Es erscheint daher sinnvoll, als Eingangsparameter die Zugfestigkeit zu verwenden, und nicht die Druckfestigkeit, wie in den Model Codes, da hier zudem die Problematik besteht, dass für die Ermittlung der Zugfestigkeit als Mittelwert der charakteristische Wert der Druckfestigkeit verwendet wird.

Crack Band Theory Einen etwas anderen Ansatz, der aber in die Fictitious Crack Methode überführt werden kann, beschreibt die *Crack Band Theory* nach BAŽANT[10]. Hierbei wird für die Breite der Rissprozesszone eine finite Rissbandbreite b_w von ca. dem 3-5fachen Größtkorndurchmesser angenommen. Die in der Bruchprozesszone lokalisierten Verformungen werden über die gegebene Rissbandbreite verschmiert. Statt mit einer Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung wird die Entfestigung nach Erreichen der Zugfestigkeit dann mit einer Funktion der Spannungen σ in Abhängigkeit von der fiktiven Rissdehnung ε_c beschrieben, die sowohl die lokalisierten Verformungen als auch die gesamten Verzerrungen in der Prozesszone umfassen, vgl.[85], S.28. Der Zusammenhang zum Fictitious Crack Modell ergibt sich zu

$$\varepsilon_c = \frac{w}{b_w} \quad (5.58)$$

Daraus folgt für das Spannungs-Verzerrungs-Gesetz für ein gerissenes Element (vgl.[48]):

$$\sigma = f_c(\varepsilon_c) =: f_w(b_w \varepsilon_c) \quad (5.59)$$

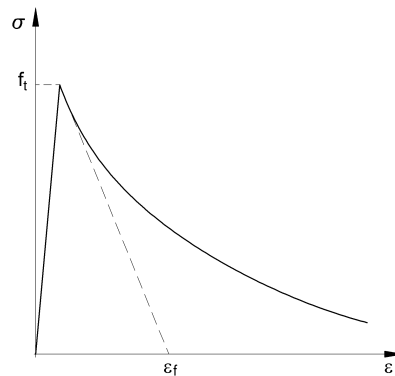
Zunächst handelt es sich um die Rissbandbreite b_w um einen realen Materialparameter. Dieser muss in der numerischen Berechnung jedoch auf Elementebene modifiziert werden. Hierzu wird statt des realen Materialparameters b_w die sogenannte *charakteristische Elementlänge* l_{ch} oder l_t verwendet, die von der Elementgröße und dem Elementansatz abhängt. Die richtige Wahl dieses Parameters ist entscheidend, um objektive, also netzunabhängige Ergebnisse zu erzielen, s.a. Abschnitt 5.6.

Die Überführung von einer Rissöffnungs- in eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung lässt sich über die Bruchenergie leicht herstellen:

$$G_f = \int_0^{w_c} \sigma_t(w) dw = b_w \int_0^{w_c/b_w} \sigma_t(\varepsilon_t) d\varepsilon_t \quad (5.60)$$

Wird beispielhaft die bekannte Exponentialfunktion für die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung gewählt, ergibt sich Zusammenhang zwischen fiktiver Dehnung, Rissbandbreite und der Bruchenergie wie folgt:

$$\begin{aligned} G_f &= \int_0^{\infty} \sigma(w) dw = E\varepsilon_0 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{w}{w_f}\right) dw = f_{ct} w_f \\ &= b_w \int_0^{\infty} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = f_{ct} b_w \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}\right) d\varepsilon = f_{ct} b_w \varepsilon_f \end{aligned} \quad (5.61)$$

Abbildung 5.29: $\sigma - \varepsilon$ -Beziehung

Für den Zusammenhang zwischen der Rissbreite w_f und der äquivalenten Verzerrung ε_f ergibt sich in Abhängigkeit von der Rissbandbreite b_w in diesem Fall folgender Zusammenhang:

$$\varepsilon_f = \frac{w_f}{b_w} = \frac{G_f}{b_w f_{ct}} \quad (5.62)$$

Somit kann das Entfestigungsgesetz als σ - ε -Beziehung formuliert werden und es gilt

$$\sigma(\varepsilon) = f_{ct} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}\right) \quad (5.63)$$

Mit diesem Ansatz ist nun eine objektive Beschreibung des Zugtragverhaltens von Beton im Rahmen numerischer Simulationen möglich. Der Ansatz eines fiktiven Risses ist für die Modellierung im Rahmen von Kontinuumsmodellen mit Diskontinuität gut geeignet, für Kontinuumsmodelle ohne Diskontinuität bietet sich jedoch die Crack Band Theorie an, da diese wegen der Aufrechterhaltung der Kontinuität einen rechentechnischen Vorteil darstellt.

5.5 Rissmodellierung in der FEM

5.5.1 Allgemeines

Für die numerische Umsetzung der analytischen Rissmodelle existieren verschiedene Konzepte. Die reale Diskontinuität kann entweder diskret abgebildet werden, z.B. in Anlehnung an das *Fictitious Crack Modell*, oder verschmiert, z.B. auf Basis der *Crack Band Theory*. Die folgenden Absätze sind z.T. den Ausführungen von KATTENSTEDT in [69] entnommen und behandeln die grundlegenden Aspekte der in dieser Arbeit verwendeten Modellierungskonzepte. Eine sehr gute, zusammenfassende Übersicht über die verschiedenen Modellierungskonzepte unter Angabe der Originalquellen findet sich in [48] sowie [42].

Kontinuumsmodelle mit Diskontinuität Die ersten Rissmodelle basierten auf einem diskreten Ansatz, d.h. im Rahmen der FEM wurde ein diskreter Riss über eine Verschiebungsdiskontinuität im FE-Netz modelliert, vgl. z.B. [78], [38]. Anfangs konnten zunächst nur bekannte Risspfade

modelliert und ihr Einfluss auf die Spannungen bewertet werden. Der Riss konnte ferner nur an Elementgrenzen, also zwischen Elementen auftreten. Über bestimmte adaptive Techniken konnte später auch die Rissinitiierung prognostiziert werden, die Elemente wurden dann an der entsprechenden Stelle getrennt, vgl. z.B. [99]. Die o.g. Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung kann mit sogenannten Interface-Elementen implementiert werden.

Im Laufe der Jahre hat sich die Methode stark weiterentwickelt. Es ist heute beispielsweise weder die Kenntnis des Ortes der Rissbildung erforderlich, noch besteht die Einschränkung, dass sich der Riss entlang von Elementgrenzen entwickeln muss. Stattdessen können Diskontinuitäten des Verschiebungsverlaufs innerhalb der Elemente abgebildet werden, indem die Elementformulierung um zusätzliche Freiheitsgrade erweitert wird, womit eine Art interne Teilung der Elemente bei der Rissentwicklung erfolgt. Hierbei wird bei der konkreten Umsetzung zwischen dem Ansatz der „Embedded discontinuities“, z.B. [22],[81], [82], und der „Extended Finite Elements Method (XFEM)“, z.B.[74] unterschieden.

Allerdings hat sich die XFEM in kommerziellen Programmen bisher nur begrenzt durchgesetzt. Zum einen ist die Modellierung von diskreten Rissen im dreidimensionalen Spannungsraum immer noch aufwendig und bisher nicht fehlerfrei. Zum anderen eignet sich diese Modellierung grundsätzlich eher für kleine Strukturen, bei denen die Modellierung weniger Makrorisse im Vordergrund steht. Bei Bauteilen, bei denen nicht der genaue Rissverlauf, sondern eher das globale Tragverhalten von Bedeutung ist, erweisen sich Modelle auf der Grundlage verschmierter Risse als zutreffend genug, bei wesentlich weniger aufwendiger Formulierung und geringerem Rechenaufwand.

Kontinuumsmodelle ohne Diskontinuität Eine andere Herangehensweise liegt allen Modellen zugrunde, mit denen die Risse nicht diskret, sondern in irgendeiner Weise „verschmiert“ modelliert werden. Real bildet sich in der Betonstruktur nach Überschreiten der Zugfestigkeit ein Riss, der ab einer bestimmten Rissöffnung spannungsfrei ist. Es existiert somit eine Verschiebungsdiskontinuität. Im Rahmen der Kontinuumsmodelle ohne Diskontinuität wird diese Verschiebungsdiskontinuität nicht abgebildet, sondern in eine kontinuierliche Beschreibung sowohl bezüglich der Verschiebungen als auch der Verzerrungen überführt. Dieser Ansatz korrespondiert mit der Crack Band Theory, da hier ebenfalls die Auswirkungen der Rissbildung auf ein Rissband mit endlicher Länge transformiert werden und anschließend eine σ - ε -Beziehung verwendet wird.

Bei der verschmierten Rissbildung werden die Auswirkungen der Rissbildung auf die Materialsteifigkeit oder -festigkeit auf Elementebene berücksichtigt. Dies geschieht über die anteilige Fläche oder das Volumen der einzelnen Integrationspunkte. Hierfür existieren unterschiedliche Ansätze, denen allen gemein ist, dass durch die Rissbildung die Steifigkeit in denjenigen Elementen abgemindert wird, bei denen mithilfe eines Risskriteriums die Rissbildung festgestellt wird. Somit besteht keine Notwendigkeit, das Elementnetz zu ändern. Der zu modellierende Körper wird weiterhin als Kontinuum behandelt, bei dem in bestimmten Elementen andere Materialeigenschaften vorliegen als bei den übrigen. Abbildung 5.30 stellt eine Übersicht über die Modellierungskonzepte dar.

Zur mathematischen Formulierung der Rissbildung sind folgende Parameter erforderlich:

- ein Kriterium zur Feststellung des Beginns der Rissbildung

- die schon vorgestellte Spannungs-Rissöffnungs- bzw. Spannungs-„Riss“-Dehnungs-Beziehung, mit der die Evolution des Risses von der Rissinitiierung bis zur Bildung eines Risses, über den keine Spannungen mehr übertragen werden können, beschrieben werden kann

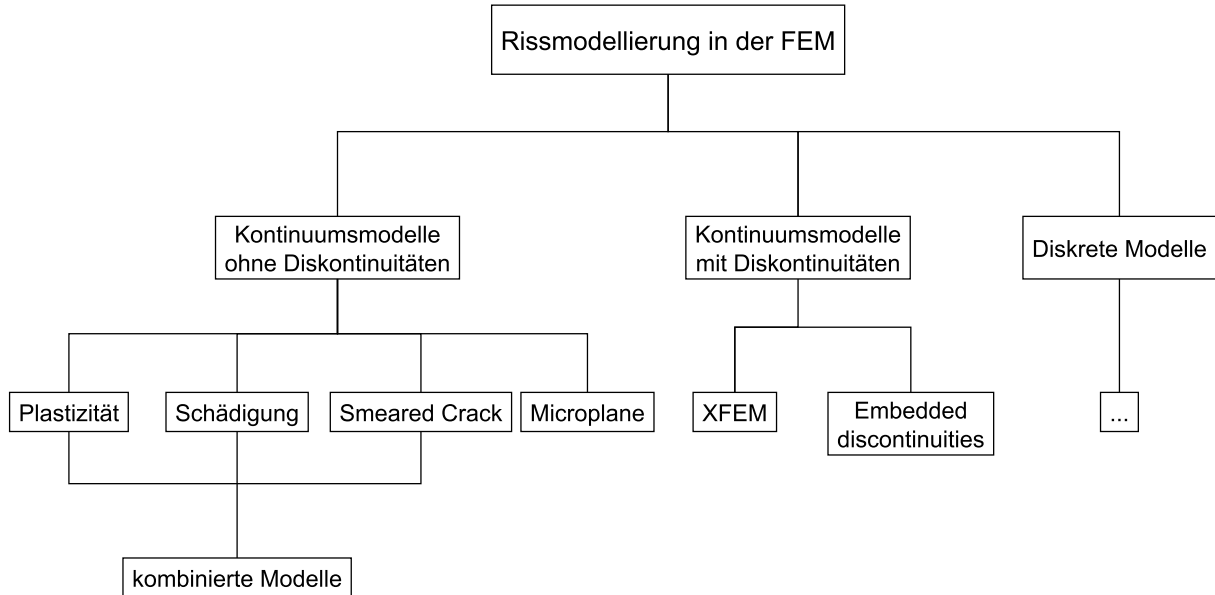


Abbildung 5.30: Rissmodellierung mit der FEM

Das Kriterium für die Rissbildung kann z.B. das Fließkriterium nach RANKINE sein, mit dem auch die Richtung der Risse festgelegt ist, welche nach diesem Kriterium normal zur Hauptzugspannung ist.

Die konkrete Umsetzung des Konzepts der verschmierten Risse unterscheidet sich je nach zugrunde liegender Theorie. Hierbei muss vor allem zwischen isotropen und anisotropen Ansätzen unterschieden werden. Gerade bei der Abbildung der Rissbildung infolge von Schubbeanspruchungen ist es wichtig, dass das Modell in der Lage ist, das anisotrope Verhalten von Beton zutreffend abzubilden. Konkret bedeutet das die zutreffende Approximation der Entfestigung in Hauptzugrichtung bei vergleichsweise geringer bzw. keiner Entfestigung in der Druckrichtung senkrecht dazu.

5.5.2 Smeared Crack Modelle

Die *Smeared Crack Modelle* gehören zu den ältesten Modellen, mit denen die Rissbildung von Beton beschrieben werden kann. Im Gegensatz zu vielen Modellen auf Basis der Plastizität oder der Schädigung handelt es sich bei klassischen Smeared Crack Modellen um einen vergleichsweise einfachen, „ingenieurmäßigen“ Ansatz, die durch Rissbildung induzierte Anisotropie des Werkstoffes Beton numerisch im Rahmen von Kontinuumsmodellen abzubilden. Die Besonderheit dieser Modelle liegt in ihrem mathematisch anisotropen, bzw. orthotropen Ansatz.

Das Konzept lässt sich in drei Unterkategorien einteilen:

- Modelle mit unveränderlichen, orthogonalen Rissebenen

- Modelle mit unveränderlichen Rissebenen, die beliebige Winkel einschließen können
- Modelle mit rotierenden Rissebenen

Modelle mit unveränderlichen, orthogonalen Rissebenen - Orthogonal Fixed Crack Model Rissmodelle mit unveränderlichen, orthogonalen Rissebenen beruhen auf den Annahmen, dass sich bei Erreichen der Zugfestigkeit des Betons in einem Integrationspunkt des finitem Elements ein Riss in der Ebene normal zur Richtung der maximalen Hauptzugspannung bildet, und sich anschließend die Richtung der Rissebene nicht mehr ändert. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen werden dann in dem betreffenden Punkt in einem lokalen Koordinatensystem formuliert, das im Falle eines ebenen Spannungszustands aus den beiden Achsen normal und parallel zur Rissebene besteht [39]. Ursprünglich wurden im Rahmen einer elastischen Berechnung nach Überschreiten der Zugfestigkeit in Richtung der Hauptzugspannung alle zur Hauptdehnung korrespondierenden Größen im Stoffgesetz gleich 0 gesetzt.

Ausgangspunkt ist das klassische, elastische Materialgesetz für orthotrope Materialien mit unterschiedlichen Werten für E-Modul und Querdehnzahl in den Orthotropierichtungen. Für einen biaxialen Spannungszustand mit einem Riss senkrecht zur lokalen 1-Richtung, die bei Rissinitiierung mit einer der Hauptrichtungen übereinstimmen muss, wird aus

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1\nu_2} \cdot \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_1\nu_2)G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

somit nach Überschreiten der Zugfestigkeit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Bei der Rissinitiierung ist $\tau_{12} = 0$. Für den Zustand der Rissinitiierung ist dies korrekt, da durch die Formulierung im Hauptspannungsraum keine Schubspannungen existieren und die Rissebene somit frei von Schubspannungen ist. Jedoch drehen sich die Hauptspannungen bei weiterer Belastung aufgrund der veränderten Materialsteifigkeiten, bei jedoch unveränderten Richtungen der Rissebenen. Real ist die Übertragung von Schubspannungen durch Rissverzahnungskräfte und die Dübelwirkung vorhandener Bewehrung möglich. Daher ist es sinnvoll, für die FE-Modellierung im weiteren Verlauf der Berechnung die Aufnahme von Schubspannungen zu gewährleisten. Dies geschieht durch den sogenannten *Shear Retention Faktor*, der in Abhängigkeit von der Rissdehnung formuliert werden kann.

Fixed Crack Model mit Aufspaltung in elastische Verzerrung und Rissverzerrung Bei dem zuvor vorgestellten Konzept sind die angegebenen Verzerrungen die Gesamtverzerrungen. Neben dieser totalen Formulierung wurde bei der Weiterentwicklung des Modells ähnlich dem Vorgehen bei der Plastizitätstheorie eine Aufspaltung der Dehnungen in einen elastischen und einen Rissanteil durchgeführt. Grundlegend für die Entwicklung eines derartigen Smeared Crack Modells sind die Arbeiten von DE BORST und NAUTA[13].

Ein Teil der Verzerrung wird der Deformation des ungerissenen Materials zugewiesen, der andere liefert den Anteil aus der Rissbildung. Dies führt auf:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^c \quad (5.66)$$

Wie im Falle der Plastizität gilt für die elastische Verzerrung das HOOKEsche Gesetz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5.67)$$

Die Rissdehnung, $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ repräsentiert in verschmierter Weise die zusätzliche Deformation resultierend aus der Rissöffnung. Die Rissbildung wird durch das Erreichen der Zugfestigkeit initiiert. Dies geschieht in vielen klassischen Modellen mit Hilfe des RANKINE-Bruchkriteriums bezogen auf die maximale Hauptspannung. Mithilfe des Risskriteriums wird auch die Rissrichtung festgelegt, denn definitionsgemäß verläuft die Rissebene senkrecht zur Hauptzugspannungsrichtung. In einem lokalen Koordinatensystem mit einer Achse n senkrecht zum Riss, und den Achsen m und l parallel zum Riss sind die einzigen Rissdehnungen $\neq 0$ die Dehnungen ε_{nn}^c , γ_{nm}^c und γ_{nl}^c . Das heißt, die Rissöffnung korrespondiert zu der Verzerrung in Normalenrichtung, während die Rissgleitung durch die Schubverzerrungen in den Ebenen senkrecht zur Rissebene hervorgerufen wird (vgl.[48]). Zur Vereinfachung wird im Modellierungskonzept ein Riss als perfekt eben angenommen. Seine Richtung kann eindeutig durch den Normalenvektor \mathbf{n} senkrecht zur Rissebene festgelegt werden. Der Spannungsvektor mit den zu den Rissspannungen korrespondierenden Spannungskomponenten kann aus den globalen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ gemäß der CAUCHYschen Annahme über die lokale Gleichgewichtsbedingung wie folgt bestimmt werden:

$$\mathbf{t}^c = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \quad (5.68)$$

Der Zusammenhang zwischen den globalen Spannungskomponenten und dem Rissspannungsvektor, definiert im lokalen Koordinatensystem in Rissrichtung, lässt sich leicht wie folgt herstellen:

$$\mathbf{t}^c = \sigma_{nn}\mathbf{n} + \sigma_{nm}\mathbf{m} + \sigma_{nl}\mathbf{l} \quad (5.69)$$

wobei $\sigma_{nn} = \mathbf{t}^c \mathbf{n} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ der Normalspannung entspricht, und $\sigma_{nm} = \mathbf{t}^c \mathbf{n} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}$ bzw. $\sigma_{nl} = \mathbf{t}^c \mathbf{n} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}$ den Schubspannungen im Riss. Die Spannungskomponenten sind über das Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz mit den jeweiligen Verzerrungen verbunden. Dieses muss also ggf. den Zusammenhang zu allen drei Verzerrungskomponenten beschreiben können. Es ist naheliegend, die Rissöffnung nur den Normalverzerrungen ε_{nn} zuzuordnen und die Rissgleitungen den Schubverzerrungen γ_{nm} sowie γ_{nl} . Diese entsprechen den Rissverzerrungen ausgedrückt im lokalen Koordinatensystem mit den Basisvektoren \mathbf{n} , \mathbf{m} und \mathbf{l} . Die globalen Verzerrungskomponenten erhält man über die übliche Koordinatentransformation. In Tensornotation ergibt sich:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \varepsilon_{nn}^c \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \gamma_{nm}^c (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})_{sym} + \gamma_{nl}^c (\mathbf{n} \otimes \mathbf{l})_{sym} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^c)_{sym}, \quad (5.70)$$

wobei

$$\mathbf{e}^c = \varepsilon_{nn}^c \mathbf{n} + \gamma_{nm}^c \mathbf{m} + \gamma_{nl}^c \mathbf{l} \quad (5.71)$$

den Rissdehnungsvektor assoziiert zu \mathbf{t}^c darstellt. Kombiniert man die Formeln (5.66), (5.67) und (5.70), erhält man das konstitutive Gesetz zur Spannungsermittlung unter Berücksichtigung der Rissbildung:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^c) = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^c) \quad (5.72)$$

Voigt-Notation Neben der tensoriellen Schreibweise lassen sich vorhergehende Definitionen auch in der VOIGT-Notation ausdrücken. Für die Rissverzerrung aus Gl. (5.70) lässt sich mit der VOIGT-Notation folgende Transformationsbeziehung aufstellen (vgl. [48]):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^c \\ \varepsilon_{22}^c \\ \varepsilon_{33}^c \\ \gamma_{23}^c \\ \gamma_{13}^c \\ \gamma_{12}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 m_1 & n_1 l_1 \\ n_2^2 & n_2 m_2 & n_2 l_2 \\ n_3^2 & n_3 m_3 & n_3 l_3 \\ 2n_2 n_3 & n_2 m_3 + m_2 n_3 & n_2 l_3 + l_2 n_3 \\ 2n_1 n_3 & n_1 m_3 + m_1 n_3 & n_1 l_3 + l_1 n_3 \\ 2n_1 n_2 & n_1 m_2 + m_1 n_2 & n_1 l_2 + l_1 n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn}^c \\ \gamma_{nm}^c \\ \gamma_{nl}^c \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Die Transformation der Rissverzerrungen im lokalen Koordinatensystem auf die Verzerrungen im globalen Koordinatensystem erfolgt mit der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{cf} . Hierbei sind n_i , m_i sowie l_i die Komponenten der Einheitsvektoren des lokalen Risskoordinatensystems. In Kurzschreibweise lässt sich obige Formel wie folgt ausdrücken:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \mathbf{T}_{cf} \mathbf{e}^c \quad (5.74)$$

Für die Spannungstransformation wird die umgekehrte Relation benötigt:

$$\mathbf{t}^c = \mathbf{T}_{cf}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (5.75)$$

Für die Beziehung zwischen den Rissspannungen \mathbf{t}^c und den Rissverzerrungen \mathbf{e}^c lassen sich die schon vorgestellten Spannungs-Separationsverzerrungen verwenden. Bisher wurde nur die Beziehung normal zur Rissebene, also bezogen auf die Hauptzugspannung, näher beleuchtet. Im Falle eines Fixed Crack Models, bei dem die Rissrichtung während des Belastungsprozesses unverändert bleibt, muss auch ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Schubspannung im Riss und der Rissgleitung aufgestellt werden. Es ist naheliegend, den Schubmodul zu modifizieren. Die ersten Konzepte sahen hierzu nur einen konstanten Abminderungsfaktor vor. Dies ist nicht realistisch, da somit bei sich drehenden Hauptspannungen große Schubspannungen übertragen werden könnten, obwohl der Riss schon weit geöffnet ist. Im Zuge der Weiterentwicklung des Konzeptes wurden ebenso wie für die Hauptspannungen funktionale Zusammenhänge in Abhängigkeit von der Rissöffnung für die Bestimmung des sogenannten *Shear Retention Factors* bestimmt. Die Grundlagen hierfür beruhen oftmals auf den Arbeiten von WALRAVEN[102], der sich mit dem Zusammenhang zwischen übertragbaren Schubspannungen, Normalspannungen, Rissgleitungen und Rissöffnungen beschäftigt hat. Falls dennoch ein konstanter Shear Retention Factor verwendet wird, empfiehlt JIRASEK[48], diesen mit einem sehr kleinen Wert festzusetzen, z. B. mit $\beta = 0,01$, um das sogenannte *stress locking* zu vermeiden.

Grundsätzlich lässt sich das kohäsive Riss-Gesetz als Verbindung zwischen dem Spannungsvektor und den Verzerrungen im Riss wie folgt definieren:

$$\mathbf{t}^c = \mathbf{f}(\mathbf{e}^c) \quad (5.76)$$

Mit dem tangentialen Riss-Steifigkeits-Tensor $\mathbf{C}_c = \partial \mathbf{f}_c / \partial \mathbf{e}^c$ ergibt sich folgende inkrementelle Formulierung:

$$\dot{\mathbf{t}}^c = \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{e}}^c \quad (5.77)$$

Da der Spannungsvektor im Riss \mathbf{t}^c , der mit den Rissverzerrungen \mathbf{e}^c gekoppelt ist, dem projizierten Spannungstensor entsprechen muss, der wiederum von den elastischen Verzerrungen abhängt, lassen sich die vorgestellten Beziehungen zu folgendem Ausdruck kombinieren:

$$\mathbf{t}^c = \mathbf{n} \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n} \mathbb{C} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^c) = \mathbf{n} \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{Q}_e \mathbf{e}^c \quad (5.78)$$

Hierbei ist $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \mathbb{C} \mathbf{n}$ der sogenannte *acoustic tensor*. Kombiniert man die beiden Gleichungen (5.76) sowie (5.78), erhält man auf der Grundlage des internen Gleichgewichts den Zusammenhang zwischen den Spannungen im Riss und den elastischen Spannungen:

$$\mathbf{n} \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{Q}_e \mathbf{e}^c = \mathbf{f}_c(\mathbf{e}^c) \quad (5.79)$$

Für ein vorgegebenes Verzerrungsinkrement kann die unbekannte Rissverzerrung \mathbf{e}^c iterativ unter Berücksichtigung von Gl.(5.79), z. B. mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren, bestimmt werden. Anschließend kann diese in Gl. (5.72) eingesetzt werden, um die korrespondierenden globalen Spannungen zu erhalten. Für die numerische Umsetzung ist die Bestimmung der tangentialen Riss-Steifigkeit von Vorteil, die die Verzerrungsrate mit der Spannungsrate verknüpft. Die Ratenformulierung der internen Gleichgewichtsbedingung aus Gl. (5.79),

$$\mathbf{n} \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{Q}_e \dot{\mathbf{e}}^c = \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{e}}^c, \quad (5.80)$$

führt auf die Rate der Rissverzerrung $\dot{\mathbf{e}}^c$:

$$\dot{\mathbf{e}}^c = (\mathbf{Q}_e + \mathbf{C}_c)^{-1} (\mathbf{n} \mathbb{C}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.81)$$

Damit ergibt sich die Ratenformulierung des Spannungs-Verzerrungs-Gesetzes zu:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_c : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{e}}^c) = \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbb{C} : \left[\mathbf{n} \otimes (\mathbf{Q}_e + \mathbf{C}_c)^{-1} \right] (\mathbf{n} \mathbb{C}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C}_{ec} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.82)$$

aus der der vierstufige tangentiale Steifigkeitstensor für ein elastisches Material mit Rissbildung hervorgeht:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C} - (\mathbb{C} \mathbf{n}) (\mathbf{Q}_e + \mathbf{C}_c)^{-1} (\mathbf{n} \mathbb{C}) \quad (5.83)$$

In VOIGT-Notation ergibt sich ein ähnlicher Zusammenhang mithilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{cf} . Der Vektor der Rissverzerrungen in Ratenform $\dot{\mathbf{e}}^c$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$\dot{\mathbf{e}}^c = (\mathbf{T}_{cf}^T \mathbf{C}_e \mathbf{T}_{cf} + \mathbf{C}_c)^{-1} \mathbf{T}_{cf} \mathbf{C}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.84)$$

Bei isotropen elastischen Materialien ist die Submatrix

$$\hat{\mathbf{C}}_e = \mathbf{T}_{cf}^T \mathbf{C}_e \mathbf{T}_{cf} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

in jedem Koordinatensystem gleich, so dass in diesem Fall eine Matrixmultiplikation nicht erforderlich ist ([48]). Da dann sowohl die elastische Materialmatrix als auch die Rissmatrix nur diagonal besetzt sind, sofern die Risskomponenten normal und parallel zum Riss entkoppelt sind, ist die Bildung der Inverse von $\hat{\mathbf{C}}_e + \mathbf{C}_c$ simpel. Die Akzentuierung mit $(\hat{\bullet})$ zeigt hierbei an, dass der Ausdruck im lokalen Koordinatensystem als 3×3 -Matrix definiert ist.

Die tangentielle Steifigkeitmatrix \mathbf{C}_{ec} des gerissenen Material zur Evolution der Spannungen ist somit durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\mathbf{C}_{ec} = \mathbf{C}_e - \mathbf{C}_e \mathbf{T}_{cf} \left(\hat{\mathbf{C}}_e + \mathbf{C}_c \right)^{-1} \mathbf{T}_{cf}^T \mathbf{C}_e \quad (5.86)$$

Dies führt zu folgender Evolutionsgleichung der globalen Spannungen:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ec} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (5.87)$$

Bewertung Bei dem Konzept der unveränderlichen, orthogonalen Rissebenen können weitere Risse nur in Ebenen orthogonal zum ersten Riss auftreten. Dies widerspricht der schon angesprochenen Tatsache, dass sich die Hauptspannungsrichtungen im weiteren Berechnungsverlauf ändern können und sich weitere Risse im betreffenden Punkt nicht in einer zur vorhandenen Rissebene orthogonalen Ebene bilden. Dies kann zu einer erheblichen Überschätzung der Traglast führen, weil die Möglichkeit besteht, dass die für das Versagen maßgebenden Richtungen der Rissebenen mit dem Modell nicht erfasst werden. Dies ist darin begründet, dass bei den nach Bildung der ersten Rissebene folgenden Rechenschritten nur Hauptspannungen senkrecht zu der vorhandenen Rissebene mit dem Risskriterium verglichen werden. Diese Schwächen wirken sich aber nicht nachteilig aus, wenn die Risse überwiegend in einer Rissebene auftreten.

Modelle mit unveränderlichen Rissebenen, die beliebige Winkel einschließen: Diese Modelle wurden entwickelt, um die oben erwähnte Schwäche beseitigen. Hierbei können in einem Punkt weitere Rissebenen berücksichtigt werden, die nicht orthogonal zu den bereits vorhandenen Rissebenen sein müssen. Um die theoretisch nun mögliche unendliche Anzahl von Rissen in einem Punkt einzuschränken, muss sich die Richtung eines neuen Risses mindestens um bestimmten vorgegebenen Winkel von der Richtung bereits vorhandener Risse unterscheiden. Somit es notwendig, das Öffnen und mögliche Schließen beliebig orientierter Risse zu modellieren. Dieser Nachteil hat bei diesen Rissmodellen oft zu Konvergenzproblemen geführt.

Modelle mit rotierenden Rissebenen – Rotating Crack Model (RCM) Eine weitere Möglichkeit ist die Modellierung mit rotierenden Rissebenen. Hierbei wird in jedem Berechnungsschritt die Richtung der Hauptspannungen überprüft und postuliert, dass ein Riss immer senkrecht zur Richtung der Hauptzugspannung auftritt (sofern diese die Zugfestigkeit überschreitet). Die Rissrichtung

stimmt somit immer mit der Richtung der Hauptspannungen und -verzerrungen überein. Im Gegensatz zu den Modellen mit unveränderlichen Rissebenen, die beliebige Winkel einschließen, wird jedoch immer nur der zuletzt gebildete Riss in einem Punkt berücksichtigt. Theoretisch können in einem räumlichen Spannungszustand bis zu drei Rissebenen entsprechend der drei Hauptspannungsrichtungen entstehen. Da in den aktuellen Rissebenen hierdurch keine Schubspannungen vorhanden sind, entfällt im Endzustand die in den unveränderlichen Modellen notwendige Beziehung für das Schubtragverhalten. Die Bezeichnung „rotierend“ basiert auf dem englischen Ausdruck „rotating crack“ und ist nicht als wirklich physikalische Rotation zu verstehen, sondern bezieht sich nur auf die Tatsache, dass sich die Richtung der Risse von einem zum nächsten Berechnungsschritt ändern kann.

Das *Rotating Crack Model* lässt sich auf ähnliche Weise herleiten wie das *Fixed Crack Model*. Aufgrund der entfallenden Schubterme besteht in diesem Fall der Vektor der Rissverzerrungen \mathbf{e}^c aus den Rissverzerrungskomponenten in Hauptrichtungen,

$$\mathbf{e}^c = [e_1^c, e_2^c, e_3^c]^T, \quad (5.88)$$

die zu drei orthogonalen Rissen korrespondieren. Der zu den Rissen assoziierte Spannungsvektor entspricht den Hauptspannungen. Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_{cr} verbindet die Koordinatenrichtungen mit den Hauptverzerrungs- bzw. Hauptspannungsrichtungen und besitzt eine andere Gestalt als \mathbf{T}_{cf} . Im Unterschied zum Fixed Crack Modell ist bei der Bildung der inkrementellen Form für die Materialsteifigkeitsmatrix auch die Transformationsmatrix \mathbf{T}_{cr} zeitlich veränderlich und muss daher ebenfalls abgeleitet werden. Dies bedeutet z. B. für die Rate der Rissverzerrungen:

$$\dot{\mathbf{e}}^c = \dot{\mathbf{T}}\mathbf{e}^c + \mathbf{T}\dot{\mathbf{e}}^c \quad (5.89)$$

Hierfür wird ein Hilfskoordinatensystem eingeführt, das mit dem Hauptachsensystem des betrachteten Inkrements übereinstimmt, sich in den weiteren Iterationsschritten räumlich jedoch nicht ändert. Somit entsprechen im ersten Berechnungsschritt die Koordinatenspannungen im Hilfskoordinatensystem den Hauptspannungen und die Schubterme entfallen. Da sich die Richtung der Hauptachsen im zeitlichen Verlauf ändern, sind die Raten der Schubspannungen und Verzerrungen jedoch i.d.R. ungleich 0. Nach einigen Zwischenschritten, s. [49], erhält man eine elegante Formulierung für die tangentielle Steifigkeitsmatrix, zunächst allerdings im lokalen Koordinatensystem formuliert:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{D}}_e + \tilde{\mathbf{D}}_c)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}}_s \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

Hierbei ist $\tilde{\mathbf{D}}_e$ der Block der elastischen Steifigkeitsmatrix, der zu den Komponenten in den Normalenrichtungen korrespondiert. Risse können in allen drei Hauptrichtungen auftreten. $\tilde{\mathbf{D}}_c$ ist die Rissnachgiebigkeitsmatrix, die nur diagonal definiert ist. Ihre Einträge sind die jeweiligen Inversen der Spannungs-Rissöffnungs- bzw. Spannungs-Rissdehnungs-Beziehungen in den drei Hauptrichtungen, die voneinander entkoppelt sind:

$$\tilde{\mathbf{D}}_c = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} g'_1(\sigma_1) & 0 & 0 \\ 0 & g'_2(\sigma_2) & 0 \\ 0 & 0 & g'_3(\sigma_3) \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

Zwar sind die Schubanteile am Ende des jeweiligen Iterationsschrittes = 0, nicht jedoch die Raten, sofern sich die Hauptrichtungen drehen. Aus diesem Grund existiert die Untermatrix $\tilde{\mathbf{C}}_s$:

$$\tilde{\mathbf{C}}_s = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Hierbei sind σ_i bzw. ε_i die Hauptspannungen bzw. -verzerrungen. Die Ausdrücke für die Schubsteifigkeitskoeffizienten basieren auf den Untersuchungen BAŽANTS, der in [7] zeigen konnte, dass für die Objektivität eines orthotropen Modells die Koaxialität der Achsen der Hauptspannungen sowie Hauptverzerrungen obligatorisch ist. Diese Bedingung kann nur eingehalten werden, wenn die Schubsteifigkeiten gemäß Gl. (5.92) ermittelt werden. Die Transformation von Gl. (5.90) auf die globalen Koordinaten kann mithilfe der bekannten Transformationsmatrizen erfolgen. Damit lassen sich schlußendlich die Spannungsinkremente iterativ ermitteln. Auf eine Schwäche des Modells wird in [48] hingewiesen. Die tangentielle Schubmoduli in Gl. (5.92) sind nur ordnungsgemäß definiert, wenn die Hauptverzerrungen unterschiedlich groß sind. Andernfalls ergeben sich in Gl. (5.92) singuläre Einträge. Falls die Geschichtsvariablen der Verzerrungen mit dem gleichen Wert ebenfalls gleich sind, ist eine konsistente Behandlung dieses Problems möglich, indem die Schubmoduli aus den Steifigkeitsmoduli in Normalenrichtung ermittelt werden. Falls jedoch die Geschichtsvariablen unterschiedliche Werte annehmen, kann es zu numerischen Problemen kommen.

Für die Ermittlung der Spannungsinkremente aus den Verzerrungsinkrementen kann, ähnlich wie bei der Plastizität ein *Return-Stress-Algorithmus*, verwendet werden.

Bewertung Das *Rotating Crack Model* ist numerisch weniger aufwendig und benötigt außer der Beziehung (5.92) keine Abschätzung für die Übertragung von Schubspannungen über den Riss. In vielen Fällen liefert das Model sehr gute Übereinstimmungen, andererseits ist die Annahme „rotierender“ Risse physikalisch nicht korrekt. Versteht man eine Riss im Rahmen des Modells allerdings als partiell geschädigtes Material, und nicht als die Repräsentation eines einzelnen Risses, ist die Wahl des Rotating Crack Models für Beschreibung dieser Schädigung gut geeignet. Hinweise zur Herleitung und Bewertung der Modelle finden sich u.a. in [90]. Eine weitere Schwäche des Modells ist die thermodynamische Inkonsistenz, s. [48, S.106].

Locking Effekte Die Modellierung mit klassischen Smeared Crack Modellen birgt neben einigen Vorteilen, insbesondere der einfachen Berücksichtigung der rissinduzierten Anisotropie, auch einige Risiken. Besonders hervorzuheben ist hierbei das *stress locking*. Hierbei handelt es sich um fälschlicherweise zu große Spannungsübertragung bei einem schon weit geöffneten Riss. Bei den Fixed Crack Modellen wurde schon darauf hingewiesen, dass Locking Effekte aufgrund der über den Riss übertragenen Schubspannungen auftreten können, wenn sich die Richtungen des fixierten Risse von denen der Spannungen stark unterscheiden. Dies führt zur Überschätzung der Tragfähigkeit. Aber auch bei den Rotating Crack Models können Locking Effekte auftreten. Dies ist darin begründet, dass die lokale Richtung eines Risses im Model, ermittelt aus der Hauptverzerrungsrichtung im

Gaußpunkt, nicht immer mit der globalen Richtung des makroskopischen Risses übereinstimmt [48, S. 107 ff]. ROTS weist in [90] auf mehrere Locking-Phänomene hin, die die Berechnungsergebnisse verfälschen, u.a. das Phänomen des stress-locking aufgrund der notwendigen Verschiebungskompatibilität, das bei allen Ansätzen mit Entfestigungsverhalten, also z.B. auch bei Plastizitätstheoretischen Ansätzen, auftreten kann.

5.5.3 Modelle auf Basis der Plastizitätstheorie

Die Schädigung infolge eines Risses kann auch als Entfestigung im Rahmen der Plastizitätstheorie beschrieben werden. Die zuvor beschriebenen Modelle entstanden im Rahmen einer Formulierung des Materialmodells auf der Grundlage der (ggf. Nichtlinearen) Elastizitätstheorie. Falls ein Materialmodell basierend auf der Plastizitätstheorie verwendet wird, bietet es sich an, auch ein auf dieser Grundlage basierendes Rissmodell zu verwenden. Dies impliziert die Verwendung eines Risskriteriums, z.B. nach RANKINE, und die Formulierung eines Entfestigungsgesetzes für die Zugbeanspruchung nach Überschreiten des Risskriteriums. Dies kann z.B. das schon aus Gl. (5.55) bekannte exponentielle Entfestigungsgesetz sein, das in Kombination mit der Bruchenergie zu objektiven Ergebnissen führt. Statt von der Rissöffnung ist die Funktion ebenfalls von der Verzerrung ε abhängig, die mittels der Bruchenergie regularisiert, d.h. auf die Elementgröße angepasst wird. Mit anderen Worten, auch hier wird die Crack Band Theorie angewendet und das Konzept statt auf die reale Prozesszonenbreite b_w auf die Elementgröße bzw. -breite h_b angepasst (s.a. Abschnitt 5.6.1):

$$\sigma(\varepsilon_c) = f_{ct} \exp\left(-\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_f}\right) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_f = \frac{G_f}{h_b \cdot f_{ct}} \quad (5.93)$$

Hierbei ist der Unterschied zwischen isotropen und anisotropen Formulierungen zu beachten. Isotrope Ansätze sind einfach zu implementieren und benötigen relativ wenige physikalische Materialparameter aus Versuchen, haben jedoch den schon beschriebenen Nachteil, dass sie aufgrund der Isotropie gleichartiges Verhalten in alle Richtungen zeigen. Die Strukturantwort in den unterschiedlichen Richtungen ist gekoppelt. Während isotrope Ansätze für uniaxiale Beanspruchungszustände gut geeignet sind, stoßen sie daher bei mehraxialen gemischten Spannungszuständen an ihre Grenzen. Nach Überschreiten der Fließgrenze kann abhängig von internen Variablen entweder eine Verfestigung in alle Richtungen oder eine Entfestigung stattfinden. Wie stark diese ausfällt, hängt von den internen Formulierungen ab. Das bedeutet jedoch, dass die Anisotropie aus der Rissbildung ggf. nicht korrekt im Modell umgesetzt werden kann. Ob dies eine spürbare Auswirkung hat, hängt vom gestellten Problem ab. Ein Biegeversagen kann auch mit einem isotropen Ansatz gut abgebildet werden, da es aufgrund der sehr kleinen Hauptdruckspannungen in den zugbeanspruchten Randelementen nicht entscheidend ist, ob senkrecht zur maximalen Hauptzugspannungsrichtung ebenfalls eine Entfestigung stattfindet.

Bei Schubspannungszuständen bzw. Schub überlagert mit Druckspannungen dagegen liegt eine positive und eine betragsmäßig mindestens gleich große negative Hauptspannung vor. Entfestigt die Hauptzugspannungsrichtung aufgrund der Rissbildung, ggf. sogar soweit, dass keine Zugspannungen mehr aufnehmbar sind, geschieht dasselbe auch in der anderen Richtung. Dies kann zu einer zu

großen Entfestigung im Druckbereich führen, die ggf. eine Auswirkung auf die Gesamttraglast des Systems hat.

Mehrflächenplastizität Ein weiterer Ansatz zur Materialmodellierung von Beton in einem Plastizitätstheoretischen Rahmen besteht in der Verwendung eines Materialmodells auf Basis der *Mehrflächenplastizität*. Hierbei wird nicht nur eine Fließfläche verwendet, sondern das Fließkriterium durch mehrere Fließflächen definiert, die das unterschiedliche Verhalten von Beton von unter Druck- und Zugbeanspruchung abbilden. Dazu korrespondieren entsprechend mehrere Fließregeln, die die Evolution von Verzerrungen und somit auch Spannungen für Druck- sowie Zugspannungszustände bestimmen. Ein derartiges Modell wurde z.B. von FEENSTRA und DE BORST in [25] entwickelt. Dieses Materialmodell bietet die Möglichkeit, den Entfestigungsmechanismus in Zugrichtung von dem Verfestigungsmechanismus in Druckrichtung zu entkoppeln, vgl.[48] und [25].

5.5.4 Modelle auf Basis der Schädigungstheorie

Wie bereits erwähnt, bietet sich das Konzept der Schädigungstheorie zur Modellierung der abnehmenden Steifigkeit und des damit entfestigenden Materialverhaltens an. Die o.g. Exponentialfunktion kann direkt für die Schädigungsfunktion verwendet werden. Es handelt sich um ein einfach umzusetzendes Konzept. Auch hier behalten die Ausführungen bzgl. der Abbildung der spannungsinduzierten Anisotropie ihre Gültigkeit. Der Nachteil einer isotropen Formulierung versuchte MAZARS[70], [71] über eine Formulierung zu beheben, bei der sich die Gesamtschädigung ω in Abhängigkeit von zwei Schädigungsvariablen ω_c sowie ω_t zusammensetzt. Diese sind bezogen auf die einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Druck bzw. für Zug. Ein ähnlicher Ansatz liegt dem Modell von COMI und PEREGO[18] zugrunde. Damit konnten die Nachteile der isotropen Formulierung jedoch nicht gänzlich beseitigt werden, insbesondere in Bezug auf den Steifigkeitsverlust in alle Richtungen aufgrund einer großen lateralen Dehnung. Da in dieser Arbeit kein Ansatz auf Basis der Schädigungstheorie verwendet wird, wird auf die Möglichkeiten der Rissmodellierung an dieser Stelle nicht näher eingegangen.

5.5.5 Microplane Theorie

Neben den vorgestellten, recht weit verbreiteten Kontinuumsmodellen existieren noch weitere Ansätze zur Rissmodellierung und der damit verbundenen Anisotropie im Rahmen der FEM. Ein vielversprechender Ansatz ist beispielsweise die *Microplane Theorie*, vgl. z.B. [8]. Hierbei wird die Beschreibung des makroskopisch dreidimensionalen Verhaltens in einem Punkt auf die Beschreibung des Materialverhaltens in mehreren, beliebig orientierten Ebenen in diesem Punkt, den sogenannten Microplanes, zurückgeführt. Die Materialgesetze werden auf der Mikroebene definiert und vereinfachen sich hierdurch. Über die Projektion der Spannungs- und Verzerrungstensoren auf beliebig orientierte Mikroebenen wird somit statt eines tensoriellen ein vektorieller Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen postuliert. Die Auswertung der vereinfachten Materialgesetze auf den verschiedenen Mikroebenen führt zu einer makroskopisch anisotropen Materialbeschreibung. Eine Übersicht über diese Klasse der Materialmodelle findet sich beispielsweise in [55]. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieses Modell jedoch nicht untersucht.

5.6 Regularisierung und Lokalisierung

Wie schon mehrfach angesprochen, zeichnet sich der Werkstoff Beton durch ein Entfestigungsverhalten aus, d.h. die Verzerrungen nehmen zu bei gleichzeitiger Abnahme der Spannungen. Dies geht bei Beton wie auch bei anderen Materialien einher mit einer Lokalisierung der Verzerrungen in einem kleinen Bereich, wie auch schon bei der Beschreibung des Materialverhaltens von Beton unter Zugbeanspruchung in Abschnitt 5.2 am Beispiel des Zugstabes gezeigt wurde. Im Rahmen der Modellierung dieses Materialverhaltens mit der nichtlinearen FEM ergeben sich mehrere Besonderheiten.

Wie grundsätzlich bei allen Materialgesetzen werden auch bei der FE-Modellierung der Rissbildung objektive, d.h. netzunabhängige Ergebnisse gefordert. Während bei Materialgesetzen ohne entfestigendes Verhalten in der Regel objektive Ergebnisse auf der Basis von Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen möglich sind, ist dies bei entfestigenden Materialien mit quasi-sprödem Verhalten aufgrund der Lokalisierung der Verformungen in einer begrenzten Bruchprozesszone und der damit verbundenen Abhängigkeit von der Probengröße nicht der Fall. Dies lässt sich auch auf die Anwendung einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung zur Abbildung des entfestigenden Materialverhaltens in der FEM übertragen. Wie bereits dargestellt, kommt es ohne weitere Maßnahmen bei Verwendung einer Spannungs-Dehnungsbeziehung zu einer Netzabhängigkeit, welche zu nicht mehr objektiven Ergebnissen führt. Es ist also eine Modifikation der Spannungs-Dehnungs-Beziehung auf das gewählte Netz erforderlich. Die Anpassung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung auf das FE-Netz wird als *Regularisierung* bezeichnet.

Die Notwendigkeit einer Regularisierung ergibt sich auch aus den allgemeinen (thermodynamischen) Anforderungen an ein Materialgesetz. Eine elementare Forderung stellt das Stabilitätspostulat von DRUCKER nach Gl. (4.1) dar:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \geq 0$$

Diese Bedingung kann offensichtlich von entfestigenden Materialien nicht erfüllt werden. Im Gegensatz zu Materialien, die das Stabilitätspostulat von DRUCKER erfüllen, benötigen Materialien mit Entfestigung daher eine Regularisierungsstrategie, vgl. [46].

5.6.1 Regularisierung und Objektivität

Die Forderung nach Objektivität kann erfüllt werden, in dem die naturgemäß objektive Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung mit Hilfe der Bruchenergie auf eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung umgerechnet wird. Die Bruchenergie muss für Strukturen mit Materialien, die ein Entfestigungsverhalten aufweisen, unabhängig von der Diskretisierung richtig wiedergegeben werden. Es erfolgt also eine netzabhängige Skalierung der Rissdehnung unter Berücksichtigung der Bruchenergie.

Hierbei wird die Rissbreite auf eine charakteristische Elementlänge bzw. -fläche oder -volumen bezogen, und so über die Bruchenergie kalibriert. Mithilfe eines derartigen Regularisierungskonzeptes wird eine netzunabhängige Energiedissipation sichergestellt. Für die Rissdehnung ergibt sich somit folgender Zusammenhang:

$$\varepsilon_c = \frac{w}{h_b} \tag{5.94}$$

Die maximale Verzerrung bei Erreichen der kritischen Rissöffnung w_c ist dann:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{w_c}{h_b} \quad (5.95)$$

Dieser Ansatz entspricht im Grunde den Überlegungen der Rissbandtheorie, mit dem Unterschied, dass bei der Rissbandtheorie die Rissdehnung ε_c auf die physikalische Rissprozesszone bezogen wird, die nach BAŽANT[10] mit ca. dem 3,5fachen des Größtkorndurchmesser angenommen werden kann, während im Finite Elemente Modell die Größe h_b in geeigneter Form auf die Elementabmessungen bezogen werden muss. Falls die physikalische Rissbandbreite b_w nicht mit der Elementbreite bzw. der charakteristischen Länge h_b übereinstimmt, kann die auf der *Crack Band Theory* bezogene Spannungs-Dehnungs-Beziehung $\sigma(\varepsilon_c)$ nicht direkt übernommen werden. Es ist eine Modifikation der Rissdehnung ε_c mit dem Verhältnis reale Rissbandbreite zu numerischer Rissbandbreite b_w/h_b erforderlich bzw. die Rissdehnung sollte direkt aus der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung ermittelt werden. Die Gleichwertigkeit des Ansatzes einer rissöffnungs- und dehnungsbezogenen Formulierung mittels der Bruchenergie wurde schon in Abschnitt 5.4.2 gezeigt.

Ist die kritische Rissöffnung w_c und die Funktion zur Beschreibung des Spannungs-Rissöffnungs-Verhaltens bekannt, ergibt sich die Bruchenergie hieraus implizit. Umgekehrt lässt sich die kritische Rissöffnung aus der Bruchenergie für einen vorgegebenen Funktionsverlauf ermitteln, wenn diese z. B. aus dem MODEL CODE verwendet wird. Während HORDIJK[44] für die von ihm aufgestellte Funktion die besten Übereinstimmungen mit Versuchswerten unter Ansatz von $w_c = 160 \mu\text{m}$ für die kritische Rissöffnung erreicht hat, geht MARK in seiner Habilitation von einem Wert von $w_c = 180 \mu\text{m}$ aus. Nimmt man ein vereinfachtes Spannungs-Rissöffnungsgesetz an, z. B. mit der schon bekannten Formulierung eines Exponentialgesetzes aus Gl. (5.53), ergibt sich als charakterisierende Größe w_f nach Gl. (5.55). Diese ist, wie bereits erwähnt, jedoch nicht mit der kritischen Rissöffnung gleichzusetzen, sondern definiert die Neigung des abfallenden Astes und dient somit als Kalibrierung der Funktion.

Charakteristische Länge Die auf die Elementgeometrie bezogene Größe, hier h_b genannt, wird in der Literatur oftmals als *charakteristische Länge* l_{ch} bezeichnet, nicht zu verwechseln mit der charakteristischen Länge als Materialparameter.

In kommerziellen FEM-Codes wird für die charakteristische Länge bei Flächenelementen folgende Abschätzung vorgeschlagen:

$$h_b = \sqrt{A} \quad (5.96)$$

Entsprechend ergibt sich für Volumenelemente:

$$h_b = V^{1/3} \quad (5.97)$$

Dies ist allerdings nur für Flächen- bzw. Volumenelemente mit einem Integrationspunkt zutreffend, also auch abhängig vom Elementansatz. Genaugenommen muss die dissipierte Energie auf die zu einem Integrationspunkt bezogene Fläche bzw. das Volumen bezogen werden, nicht auf die gesamten Elementabmessungen. Die richtige Wahl dieser Größe ist Gegenstand ausführlicher Forschung, vgl.

[80], [29]. Die naheliegende Annahme, hierfür bei Flächenelementen z.B. die Elementbreite zu wählen, führt oftmals zu verfälschenden Ergebnissen, da die Rissrichtung einen Einfluss bei der Wahl von h_b haben kann. Dies verdeutlicht Abbildung 5.31:

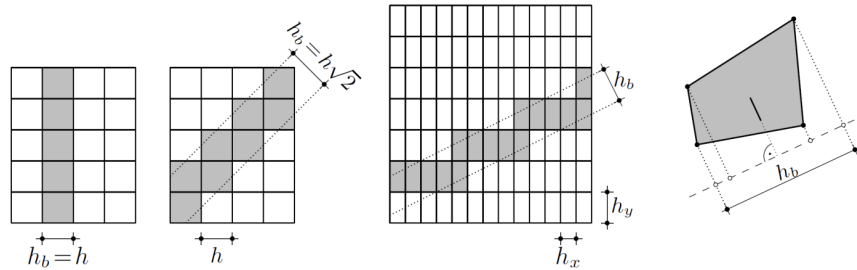


Abbildung 5.31: Wahl der charakteristischen Länge, entnommen aus [48]

Falls der Riss parallel zu den Elementkanten auftritt, ist der Ansatz, die Rissweite auf die Elementbreite zu beziehen, sinnvoll und gerechtfertigt. Der Riss mit der Weite w_c wird dann auf die komplette Breite als Verzerrung $\varepsilon_c = w_c/h_b$ verschmiert und die Verformung als Integration der Verzerrungen stimmt mit der Rissweite überein:

$$w = \int_0^{h_b} \varepsilon(x) dx = \int_0^{h_b} \varepsilon_c dx = \varepsilon_c \cdot h_b = \frac{w_c}{h_b} \cdot h_b = w_c \quad (5.98)$$

Bildet sich der Riss jedoch nicht entlang der Elementkanten aus, ist ersichtlich, dass die Ergebnisse mit $h = h_b$ nicht mehr auf dieselbe Rissweite führen können. Da die Verzerrungen in den Gaußpunkten ermittelt werden, muss die Spannungs-Verzerrungsbeziehung auf die Anzahl der Gaußpunkte angepasst werden, denn es ist möglich, dass nur in einem Integrationspunkt das Risskriterium überschritten wird. Sind die Elemente nicht annähernd quadratisch oder würfelförmig, können die o.g. Abschätzungen ebenfalls nicht zu den richtigen Ergebnissen führen. Eine Verbesserung der Genauigkeit bieten hier beispielweise Projektionsmethoden, bei denen die Rissbandbreite aus der Projektion des betrachteten Elementes auf die angenommenen Rissbandrichtung ermittelt wird. OLIVER hat in [80] einen eigenen Ansatz zur Bestimmung der Rissbandbreite vorgestellt, der mit Hilfsfunktionen ähnlich den Ansatzfunktionen für Knotenverschiebungen aus der FEM arbeitet.

Der Einfluss der Rissbandbreite auf die Simulationsergebnisse ist zwar vorhanden und grundsätzlich nicht vernachlässigbar. Jedoch ist dieser nach Meinung der Autorin deutlich ausgeprägter für Bauteile aus unbewehrtem Beton. Insbesondere für Stahlbetonbauteile unter Schubbeanspruchung spielen andere Einflüsse eine größere Rolle. Hierzu zählt vor allem der Modellierungsansatz für die Rissbildung selbst und dessen Fähigkeit, die Richtung der Risse korrekt zu approximieren sowie das aus der Rissbildung resultierende anisotrope Verhalten korrekt darzustellen. Daher wird an dieser Stelle auf eine weitere Beleuchtung der Thematik verzichtet. Ausführliche Betrachtungen zur Schwierigkeit der Auswahl einer zutreffenden Rissbandbreite h_b finden sich z. B. in [29] und [48].

5.6.2 Lokalisierung

Im Rahmen der numerischen Modellierung der Rissbildung soll auf einige Aspekte der Lokalisierung von Verformungen bzw. Verzerrungen eingegangen werden. Das Phänomen der Lokalisierung wurde schon mehrfach angesprochen: Im Gegensatz zum verzerrungsbasierten elastischen Materialgesetz kommt es in der Realität zu einer Verformungslokalisierung in Form des Risses bzw. mehrerer Risse, die an der Stelle der geringsten Zugfestigkeit auftreten. Grundsätzlich lässt sich, wie schon dargestellt, die reale diskontinuierliche Verformung über den Regularisierungsansatz mit einem netz-abhängigen Rissband in eine kontinuierliche Verformung mit ebenfalls kontinuierlichen, wenn auch stark lokalisierten Verzerrungen überführen.

Allerdings weist dieses Modell dann Schwächen auf, wenn das betrachtete Problem in großen Bereichen gleiche Spannungszustände aufweist. Schon bei einem einfachen Zugstab stellt sich die erwartete Lokalisierung nicht ohne weitere Modifikationen ein, da alle Elemente den gleichen Spannungszustand besitzen und damit auch gleichzeitig die Zugfestigkeit überschreiten. Hierbei treten gleich zwei Phänomene auf: zum einen das erwähnte Fehlen einer lokalisierten Zone. Statt einem kleinen Rissband sind über die vollständige Länge alle Elemente gerissen. Zum anderen kann hier auch die Regularisierungsstrategie fehlschlagen. Die Ermittlung der kritische Länge unter Annahme eines Rissbandes mit der Elementbreite h_b führt aufgrund der großen Anzahl der gerissenen Elemente zu einer falschen Energiedissipation und damit auch Strukturantwort, zumindest im Nachbruchbereich.

Das folgende Beispiel zeigt die Auswirkungen verschiedener Modellierungsarten ebenso wie den Snap-Back-Effekt. Zunächst wurde ein Zugstab mit 2×20 Elementen modelliert, s. Abbildung 5.32. Die numerische Simulation erfolgte mit dem elastoplastischen Materialmodell *Concrete Damaged Plasticity*, das im FEM-Paket ABAQUS implementiert ist. Alle Elemente wurden mit einem isotropen, plastischen Materialgesetz mit einem Entfestigungsansatz modelliert, der über die Bruchenergie regularisiert wird. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung wurde für die Ausbildung eines Rissbandes in einer Elementreihe kalibriert. Der Zugstab wird mit einer Verformung von 5,0 mm inkrementell belastet.

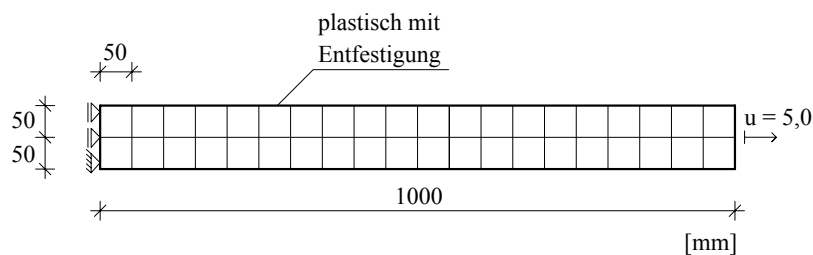
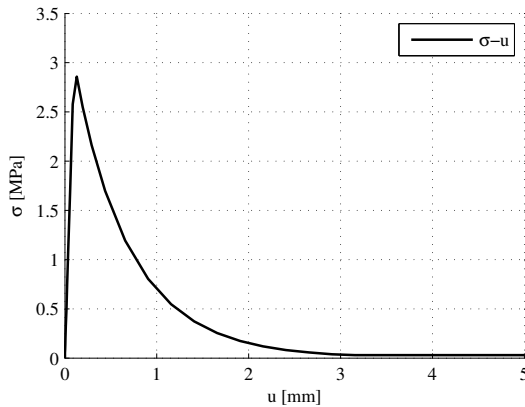


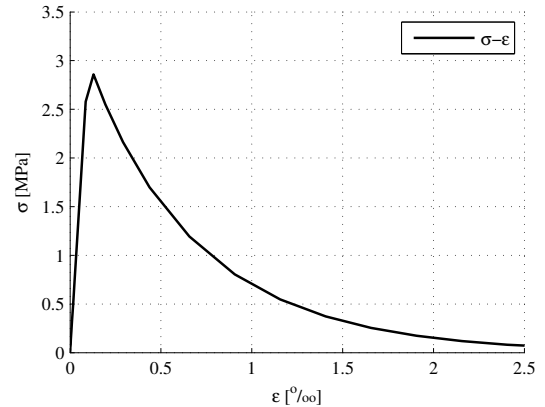
Abbildung 5.32: Zugstab; alle Elemente mit plastischem Materialgesetz

Aufgrund der gleichen Eigenschaften aller Elemente kommt es nach Überschreitung der Zugfestigkeit des Betons nicht zu einer Lokalisierung, sondern alle Elemente entfestigen gleichzeitig. Somit schlägt die Regularisierungsstrategie fehl, was sich sowohl in der Gesamtverschiebung u als auch in der Energiebilanz ausdrückt. Aus dem Verschiebungsplot in 5.33 ist ersichtlich, dass die Spannungsübertragung bei $u = 2,0$ mm fast nicht mehr möglich ist. Allerdings sollte dies schon bei einer Verschiebung von $u = 0,2$ mm = 200 μ m spätestens der Fall sein, da die kritische Rissweite aus

dem Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz bei $180\ \mu\text{m}$ definiert wurde¹. Unter Annahme einer Bruchenergie von $G_f = 0,1\text{N/mm}$ müsste sich bei einem Rissband von $h_b = 50\text{mm}$ als gesamte dissipierte Energie $W = G_f \cdot h_b \cdot h = 0,1 \cdot 50 \cdot 100 = 500\text{Nmm}$ ergeben. Tatsächlich erreicht die Bruchenergie von ca. $10\,000\text{Nmm}$. Dies ist der Wert, der der aufsummierten Bruchenergie von 2×20 Elementen entspricht, wenn diese alle gerissen sind. Die gewünschte Lokalisierung stellt sich also ohne weitere Modifikationen nicht ein; die Energiedissipation wird somit falsch approximiert.



(a) Spannungs-Verformungs-Kurve Gesamtstab



(b) Spannungs-Dehnungs-Kurve Gesamtstab

Abbildung 5.33: Spannungs-Verformungs- sowie Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Zugstabes - alle Elemente gerissen

In Abbildung 5.34 wird neben der plastischen Dissipation der Verlauf der Formänderungsenergie über die Zeit dargestellt. Deutlich erkennbar ist die unterschiedliche Größenordnung der beiden

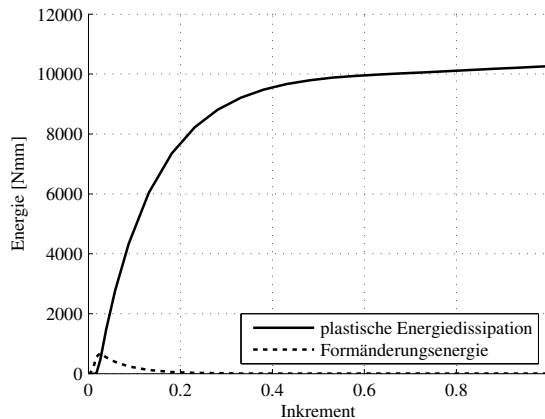


Abbildung 5.34: Energiedissipation ohne Lokalisierung

Energieformen. Die Formänderungsenergie nimmt mit Erreichen der Zugfestigkeit ihren Maximalwert an und geht im Zuge der Entfestigung fast vollständig auf 0 zurück. Dies bestätigt, dass keine

¹Die vollständig realistische Modellierung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung ist nicht möglich, da programmieren die Eingabe von Spannungen geringer als 1% der Zugfestigkeit nicht möglich ist.

innere elastische Arbeit verrichtet wird, sondern die Deformation im Rahmen der Entfestigung rein plastisch ist.

Im Beispiel aus Abbildung 5.35 wurde nur eine Elementreihe mit der plastischen Spannungs-Dehnungsbeziehung modelliert. Für die anderen Elemente wurde ein linear-elastisch elastisches Materialgesetz gewählt. Ziel ist, die Lokalisierung damit in einer Elementreihe zu provozieren. Ab-

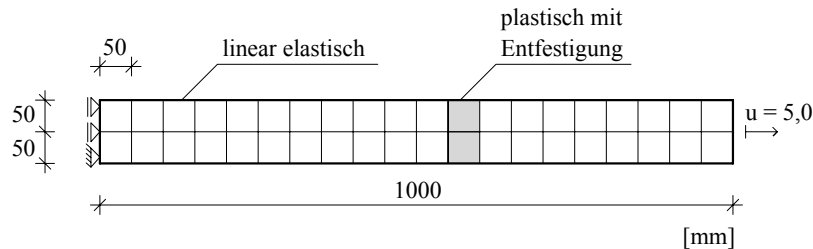


Abbildung 5.35: Zugstab; eine Elementreihe mit plastischem Materialgesetz

Abbildung 5.36 zeigt einen sehr starken Spannungsabfall bei Erreichen der Zugfestigkeit, nahezu ein Snap-Back-Verhalten. Der Grund hierfür ist die schon erwähnte elastische Verkürzung infolge der Entlastung aufgrund der großen Probenlänge, die rechnerisch zu einem Snap-Back-Verhalten führt: Ein Spannungsabfall von $\Delta\sigma = 2,5 \text{ MN/m}^2$ hat eine Differenz in der Rissdehnung $\Delta\varepsilon = 1,2\%$ zur Folge, was einer Verformungsdifferenz $\Delta u = 0,0012 \cdot 50 = 0,06 \text{ mm}$ entspricht, während die elastische Verkürzung bereits eine Verformungsdifferenz von $\Delta u = 2,5/30000 \cdot 950 = 0,079 \text{ mm}$ bewirkt. Das heißt, die elastische Verkürzung ist größer als die plastische Rissverformung und führt

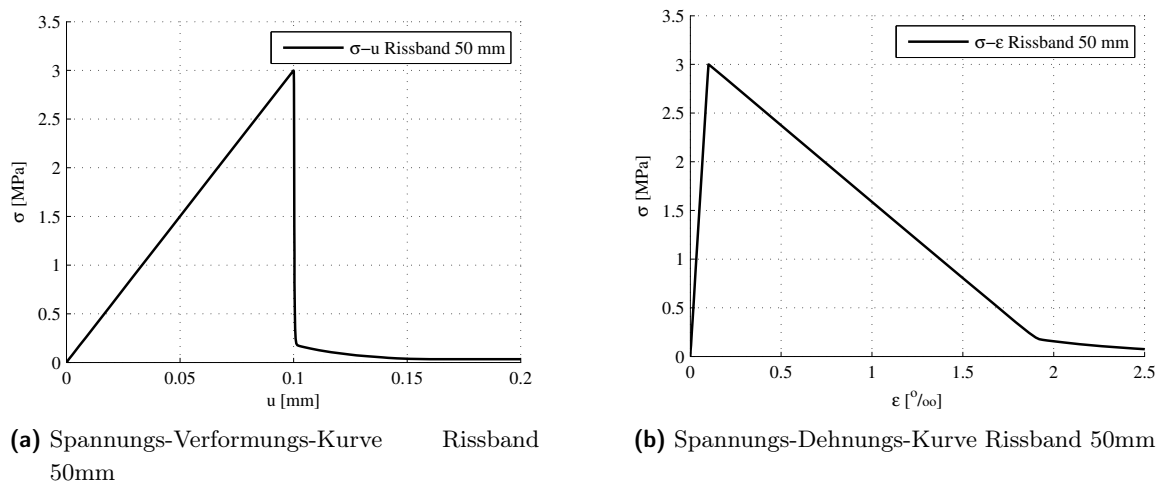


Abbildung 5.36: Spannungs-Verformungs- sowie Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Zugstabes mit Rissband 50 mm

zu einem Snap-Back-Verhalten. Dies lässt sich in der numerischen Rechnung aufgrund der inkrementell aufgetragenen Verschiebung in Kombination mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren nicht abbilden.

Stattdessen lässt sich auch ein Anstieg der künstlichen Energie feststellen, der auf künstliche Stabilisierungseffekte deutet, sowie eine veränderte Spannungs-Dehnungs-Beziehung im gerissenen Element, die zu einer vergrößerten plastischen Energiedissipation führt. Außerdem lassen sich im Bereich des abrupten Spannungsabfalls Hour-Glassing Effekte in den gerissenen und den angrenzenden Elemente beobachten. Dies tritt noch viel ausgeprägter auf, wenn der Zugstab nur mit einem Element über die Höhe modelliert wird. Diese Verformungen treten aufgrund der geforderten Verschiebungs-kompatibilität auf und führen zu Stress-Locking in den angrenzenden Elementen. Auch dies scheint intern durch Stabilisierungsmaßnahmen von ABAQUS kompensiert zu werden, da diese Effekte nach einigen weiteren Lastschritten verschwinden.

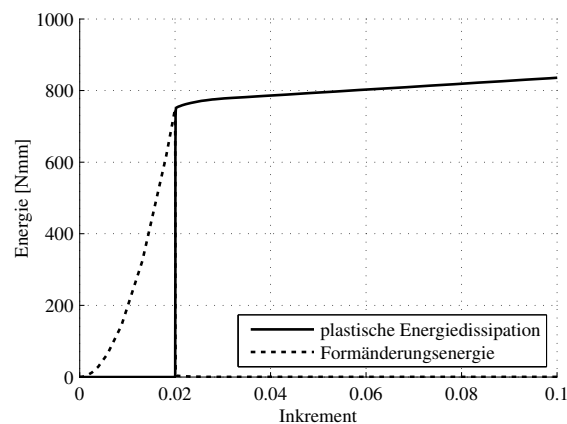


Abbildung 5.37: Energiedissipation mit Rissband 50mm

Um derartige Effekte von vornherein auszuschließen, wird im letzten Beispiel ein Zugstab mit 3x2 Elementen mit einer Gesamtlänge von nur 150 mm modelliert. Tatsächlich verhält sich dieses Modell stabiler; aufgrund der kurzen Probenlänge stellt die elastische Verkürzung während der Entlastung kein Problem dar.

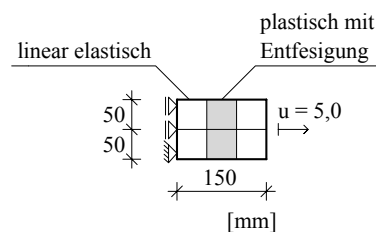


Abbildung 5.38: Zugstab mit 3 Elementen modelliert

Bei dieser Modellierungsvariante lokalisiert sich erwartungsgemäß die Verformung in der mittleren Elementreihe, da die angrenzenden Elemente mit einem linear-elastischen Materialgesetz definiert wurden. Sowohl die Spannungs-Dehnungs- als auch die Spannungs-Verformungsbeziehung stimmen mit den vorgegebenen Kurven überein, und die plastische Energiedissipation entspricht der Bruchenergie für ein Rissband mit der Breite 50 mm und der Höhe 100 mm, vgl. Abbildungen 5.39 sowie 5.40.

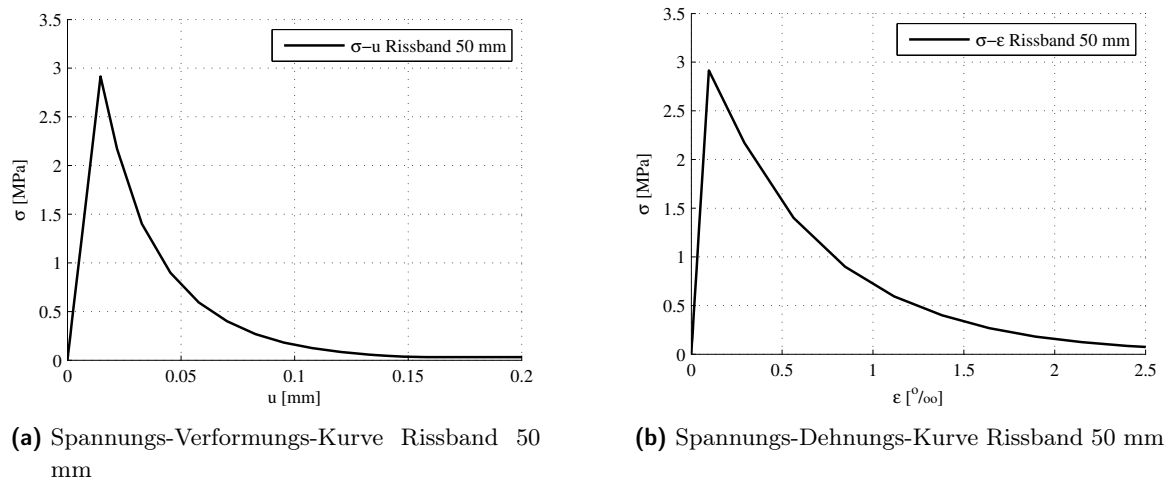


Abbildung 5.39: Spannungs-Verformungs- sowie Spannungs-Dehnungs-Verhalten mit Rissband 50 mm bei 3 Elementen

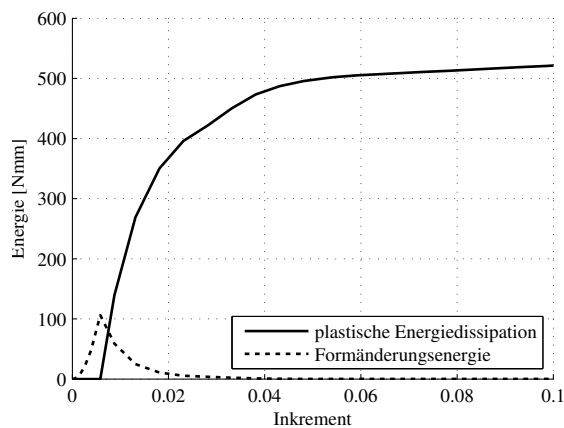


Abbildung 5.40: Energiedissipation mit Rissband 50 mm

Die vorgestellten Beispiele machen deutlich, dass die Umsetzung der lokalisierten Rissbildung über einen verschmierten Ansatz ggf. zu Schwierigkeiten führen kann. Die Frage der Regularisierung und Lokalisierung muss daher kritisch betrachtet werden. Die hier geschilderten Phänomene treten z.B. auch bei reiner Torsion auf, da auch hier eine große Anzahl von Elementen den gleichen Zugspannungs- bzw. -verzerrungszustand aufweist. Selbst bei einem Biegeproblem kann diese Art der verschmierten Rissbildung zu problematischen Ergebnissen führen. Statt mehrerer Einzelrisse bildet das Modell eine größere Anzahl von Elementen und damit einen ganzen Bereich als gerissen ab. Dies kann bei isotropen plastischen Materialgesetzen zu Problemen mit einer ggf. auftretenden Entfestigung senkrecht zur Rissrichtung verbunden sein, die zu einer mangelhaften Übertragung von Druckspannungen führen kann, wie im weiteren noch zu sehen sein wird.

5.7 Anforderungen an ein geeignetes Materialmodell für Beton

5.7.1 Allgemeines

Die Wahl eines geeigneten Materialmodells für den Werkstoff Beton ist aufgrund der Komplexität des Materials stark abhängig vom zu untersuchenden Problem. Kein konstitutives Gesetz für Beton ist in der Lage, alle Beanspruchungszustände zutreffend abzubilden. Ein konstitutives Gesetz für Beton erfordert grundsätzlich Aussagen zu folgenden Aspekten:

- geeignetes Bruchkriterium
- Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Vorbruchbereich
- Rissmodellierung/Beschreibung des entfestigenden Verhaltens im Nachbruchbereich

Abbildung 5.41 stellt die einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für den Zug- und Druckbereich dar. Die Anforderungen treffen jedoch ebenfalls auf Materialgesetze für allgemeine dreidimensionale Spannungszustände zu.

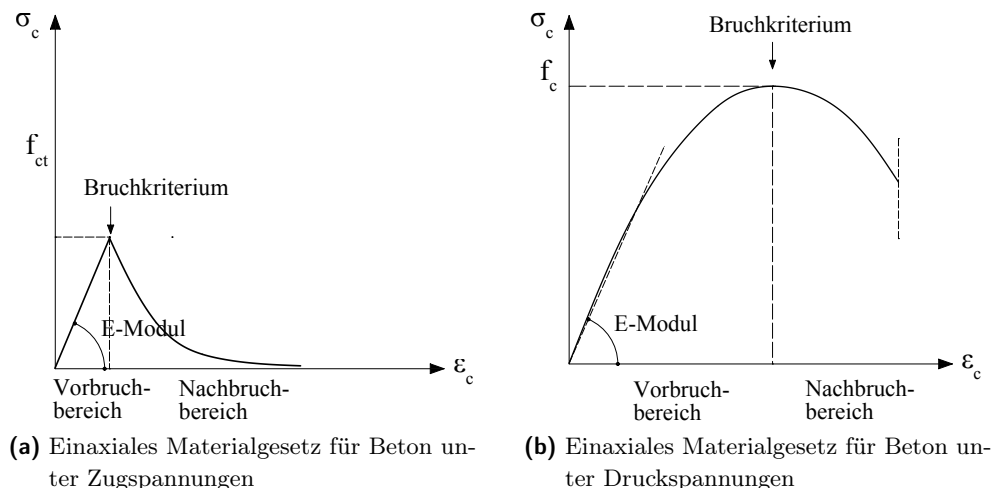


Abbildung 5.41: Spannungs-Verzerrungs-Gesetze für Beton

5.7.2 Bruchkriterium

Aus den vorherigen Abschnitten wird deutlich, dass eine Vielzahl von Versagenskriterien für Beton existieren, die sich stark in ihrer Komplexität und Approximationsgüte unterscheiden. Die Wahl des Bruchkriteriums allein ist allerdings noch nicht ausschlaggebend für die Güte der Ergebnisse einer nichtlinearen FEM-Simulation. Die Bruchkriterien beschreiben das Verhalten des Betons zum Zeitpunkt des Versagens, bzw. genauer für die maximal aufnehmbare Spannung, sagen zunächst jedoch nichts über das Materialverhalten vor bzw. nach Erreichen der maximal aufnehmbaren Spannung aus. Insbesondere bei mehraxialen Spannungszuständen hat die Beschreibung des Entfestigungsverhaltens einen direkten Einfluss auf die Güte des Materialmodelles, vor allem im Hinblick auf die Abbildung der Anisotropie des Betons. In Kombination mit einem realistisch abgebildeten Nach-

bruchverhalten kann auch ein weniger komplexes Bruchkriterium zu guten Ergebnissen führen. Im Sinne einer möglichst simplen Anwendung sind einfache Bruchkriterien ggf. sogar zu bevorzugen, da diese weniger Materialparameter benötigen und deshalb einfacher zu kalibrieren sind.

5.7.3 Modellierung des nichtlinearen Verhaltens von Beton

Während der Verlauf der Zugspannungen im Vorbruchbereich gut mit einer linearen Spannungs-Dehnungs-Linie und somit mit dem HOOKEschen Gesetz beschrieben werden kann, verhält sich Beton unter Druckspannungen schon ab einer Spannung von ca. $0,4f_c$ bis zum Bruch nicht mehr linear-elastisch.

Für die Materialmodellierung von Beton sind elastische Stoffgesetze nur bedingt geeignet. Nichtlineare Modelle auf Basis der hyperelastischen Bruchmechanik eignen sich für Beton und proportionale Belastungspfade relativ gut, sind jedoch nicht in der Lage, inelastische Deformationen abzubilden, vgl.[17]. Ferner bilden hyperelastische Modelle die durch die Rissbildung initiierte Anisotropie i.d.R. nicht zutreffend ab. Hypoelastische Materialgesetze erfassen anisotrope Vorgänge, jedoch ist die Bestimmung von mindestens 21 Materialparametern erforderlich, um ein solches Modell aufzustellen, was durch experimentelle Untersuchungen nicht möglich ist. Ferner verschwindet die Übereinstimmung zwischen den Hauptspannungs- und Hauptverzerrungsachsen, was grundsätzlich für gerissenen Beton zutreffend sein kann, jedoch zu einem deutlich höheren numerische Aufwand führt. Daher existieren in verfügbaren FEM-Programmen nur sehr vereinfachte hypoelastische Materialmodelle, z.B. auf Basis des Konzeptes der äquivalenten einaxialen Verzerrungen. Die numerische Komplexität eines anisotropen Materialgesetzes, das für die Beschreibung von Beton zutreffend wäre, stellt jedoch generell ein Problem dar. Obwohl zahlreiche kontinuumsmechanische anisotrope Ansätze veröffentlicht wurden, sind in den meisten kommerziell verfügbaren FEM-Programmen Materialmodelle auf Basis der isotropen Plastizitäts- oder der Schädigungstheorie implementiert. Isotrope Ansätze sind numerisch deutlich einfacher zu realisieren und benötigen weniger Eingangswerte. Dafür kann allerdings die Anisotropie des Betons bei gemischten mehrdimensionalen Spannungszuständen u.U. nicht realistisch approximiert werden. Bei einem anisotropen Ansatz auf Basis der Plastizitäts- oder Schädigungstheorie werden vierstufige Materialtensoren erforderlich, deren Koeffizienten nicht mehr physikalisch interpretiert werden können und daher schwierig zu bestimmen sind. Je nach Problemstellung können vereinfachte Modelle jedoch gute Ergebnisse erzielen. Beispielsweise lässt sich mit einem isotropen Bruchkriterium in Kombination mit idealer Plastizität anisotropes Materialverhalten im Rahmen von einigen Einschränkungen in Bezug auf das Last-Verformungsverhalten zutreffend bzw. genügend genau abbilden, wie das selbst entwickelte plastische Materialmodell MCTC (s. hierzu 6.3.1) auf Basis eines MOHR-COULOMB-Versagenskriteriums mit Tension Cut Off zeigt.

Bei einem orthotropen Smeared Crack Modell können die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Druck und Zug voneinander unabhängig definiert werden. Auch hier wird ein Kriterium zur Rissinitiation benötigt. Das entfestigende Verhalten nach der Rissbildung wird mit dem mathematischen Konzept des Fixed oder Rotated Crack Modells abgebildet.

5.7.4 Abbildung der Anisotropie des Betons

Wie mehrfach erwähnt, zeichnet sich der Werkstoff Beton durch eine spannungsinduzierte Anisotropie aus, der bei der Entwicklung konstitutiver Gesetze Rechnung getragen werden muss.

Es ist grundsätzlich möglich, mit einem isotropen Versagenskriterium anisotropes Materialverhalten in Bezug auf die unterschiedlich großen Materialfestigkeiten in Zug- und Druckrichtung zutreffend abzubilden. Obwohl die Bruchkriterien unterschiedliche Materialfestigkeiten für Zug- und Druckspannungen zulassen, verhält sich das Material in Bezug auf die Steifigkeiten jedoch weiterhin isotrop. Für proportionale Belastungspfade, bei denen die Struktur ohne die Erfordernis von Spannungsumlagerungen nach Erreichen der Festigkeit versagt und somit lediglich von Bedeutung ist, dass die Bruchspannungen zutreffend wiedergegeben werden, können derartige isotrope Materialmodelle gute Ergebnisse liefern. Dies belegen auch den Nachrechnungen der KUPFER-Versuche mit den vorgestellten Bruchkriterien.

Ein weiterer Aspekt der belastungsbezogenen Anisotropie von Beton betrifft jedoch das Verhalten nach der Rissbildung. Durch die Rissbildung wird die Materialsteifigkeit quer zum Riss stark verringert, während die Steifigkeit in den anderen Richtungen deutlich weniger betroffen ist. Dieses unterschiedliche Materialverhalten nach Erreichen der Festigkeit kann mit einem isotropen Materialgesetz i.d.R. bei gemischten mehrdimensionalen Spannungszuständen nicht zutreffend wiedergegeben werden.

Dies trifft z.B. auf Stahlbetonbalken unter Querkraftbeanspruchung zu, bei denen nach Rissbildung eine Spannungsumlagerung der Zugspannungen vom Beton in die Bewehrung auftritt. Schubspannungszustände zeichnen sich durch einen gemischten Spannungszustand mit mindestens einer positiven und einer negativen Hauptspannung aus. Die Zugfestigkeit in der Hauptzugspannungsrichtung kann hierbei längst erreicht sein, während die Druckfestigkeit bei weitem nicht erschöpft ist. Eine durch die Rissbildung ausgelöste isotrope Steifigkeitsabminderung, z.B. in Form einer Entfestigung bei isotropen plastizitätstheoretischen Modellen, kann für die Druckrichtung hierbei deutlich zu stark ausfallen, und ggf. zu einem völlig falschen globalen Tragverhalten führen, wie bereits in Abschnitt 5.5.3 erläutert wurde und im weiteren Verlauf noch genauer betrachtet wird.

Zwar ist eine Abminderung der Druckfestigkeit infolge Querkzug bzw. Querdehnung belegt, die Angaben bzgl. der Größenordnung variieren jedoch stark und sind ferner unterschiedlich für reinen Beton im Vergleich zu Stahlbeton. Eine zusammenfassende Betrachtung verschiedener Ansätze findet sich beispielsweise in MÜLLER[73]. Eine Abminderung der Druckfestigkeit auf weniger als 70 – 75% erscheint jedoch nicht gerechtfertigt.

Abhilfe können orthotrope Materialgesetze oder Formulierungen schaffen, bei denen das Verhalten in den unterschiedlichen Spannungsrichtungen entkoppelt ist. Dies ist beispielsweise bei Modellen auf Basis der äquivalenten einaxialen Verzerrungen der Fall, bei denen der Ansatz so gewählt ist, dass den unterschiedlichen Beanspruchungszuständen in den orthogonalen Hauptspannungsrichtungen Rechnung getragen werden kann, mathematisch die Richtungen jedoch entkoppelt sind. Die klassischen Smeared Crack Modelle beruhen in der Regel auf einem derartigen Konzept.

Einen Ansatz bietet auch die Microplane Theorie, bei der die Anisotropie dadurch abgebildet werden kann, dass die Verknüpfung von Spannungen und Verzerrungen auf verschiedenen Mikroebenen stattfindet, vgl. z.B. [8].

Eine weitere Möglichkeit wird im Rahmen dieser Arbeit über ein Materialgesetz auf Basis isotroper Plastizität gezeigt, das jedoch nur in Kombination mit Bewehrung anwendbar ist. Die Beschreibung erfolgt in Abschnitt 6.3.1. Hierbei wird die Problematik der isotropen Entfestigung durch Herabsetzen der Zugfestigkeit und elastisch-plastisches Verhalten nach Erreichen der Festigkeit umgangen.

5.8 Materialmodelle für Stahl

Auf die Materialmodellierung von Stahl wird hier nur in aller Kürze eingegangen. Im Rahmen der Modellierung von Stahlbetonbalken sind für das Materialverhalten der Bewehrung nur einaxiale Spannungszustände von Bedeutung. Klassischerweise wird das nichtlineare Materialverhalten von Stahl mit der Plastizitätstheorie, i.d.R. mit der VON MISES-Fließfunktion und einem bilinearen Verfestigungsansatz approximiert.

5.9 Modellierung von Stahlbeton

Nachdem die Materialmodellierung der beiden Werkstoffe Beton und Stahl separat betrachtet wurde, erfolgt nun die Beschreibung der Materialmodellierung von Stahlbeton. Im Folgenden werden einige Aspekte der Modellierung näher beleuchtet.

5.9.1 Berücksichtigung des Verbundes

Der reale Werkstoff Stahlbeton unterliegt einem komplexen Mechanismus der Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrungsstahl. Die Zugspannungen des Betons werden sukzessive über Verbund in einen Bewehrungsstab eingeleitet, hierbei entstehen zwischen Beton und Stahl Relativverschiebungen, der sogenannte Schlupf. Die genauen Tragmechanismen hängen hierbei auch von der Art des Bewehrungsstabes ab, ob dieser glatt oder gerippt ist. Aufgrund der Lasteinleitung vom Beton in den Stab bzw. umgekehrt herrscht ein dreidimensionaler Spannungszustand im Beton. Der Aufbau der Verbundspannungen sowie der Einfluss des Schlupfes können funktional nichtlinear dargestellt und als Verbund-Schlupf-Gesetz auch numerisch z.B. mit Kopplungselementen berücksichtigt werden, was dann jedoch mit erhöhtem Aufwand verbunden ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf die Berücksichtigung der genauen Modellierung des Verbundverhaltens mit Hilfe eines Verbundgesetzes verzichtet. Stattdessen wird vollständiger, starrer Verbund vorausgesetzt. Das bedeutet, dass keine Relativverschiebungen zwischen Beton und Stahl vorhanden sind und somit die Spannungen im Stahl direkt am ersten Elementknoten vollständig wirken. Diese Vereinfachung erscheint bei der Größenordnung des Modells sowie der zu untersuchenden Problemstellung vertretbar, da das Hauptaugenmerk auf dem globalen Tragverhalten liegt und nicht auf dem Tragverhalten eines begrenzten Diskontinuitätsbereichs. Zu ähnlichen Schlussfolgerungen kommt auch GÖDDE in [29].

5.9.2 Tension stiffening

Ein weiteres Phänomen im Zusammenhang mit der Rissbildung von Stahlbeton ist das *Tension Stiffening*. Allgemein wird darunter der Versteifungseffekt des Betons zwischen singulären Rissen verstanden. Diese Sichtweise korrespondiert streng genommen zu einer Modellvorstellung, bei der die Tragfähigkeit des Betons in gerissenen Bereichen gänzlich vernachlässigt wird. Da sich real der ungerissene Beton zwischen den Rissen am Lastabtrag beteiligt, kommt es gegenüber der idealisierten Modellvorstellung zu dem genannten Versteifungseffekt. Der Traganteil bezieht sich auf den Unterschied der aufnehmbaren Kraft oder Spannung des gerissenen Verbundwerkstoffs im Gegensatz zu reinen Stahlspannung. Während oftmals der gesamte Versteifungseffekt als *Tension Stiffening*, bezeichnet wird, teilen z.B. FEENSTRA[23] und FEENSTRA, DE BORST[24] den Gesamteffekt einen „Tension Stiffening“ und einen „Tension Softening“-Anteil auf. Der „Tension Softening“-Anteil wird hierbei dem Traganteil des gerissenen Betons, also der Spannungsaufnahme während der Entfestigung zugeschrieben. Abbildung 5.42 veranschaulicht den Effekt.

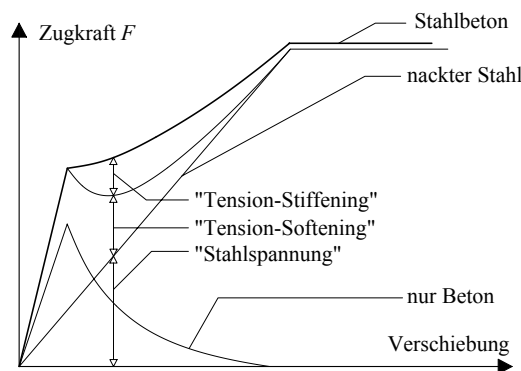


Abbildung 5.42: Tension Stiffening & Tension Softening (aus [84])

Im Rahmen üblicher FEM-Berechnungen z.B. mit Stabelementen, wird dieser Effekt oftmals über eine Modifikation der Stahlarbeitslinie abgebildet, insbesondere, wenn die Tragfähigkeit des Betons nach Überschreiten der Zugfestigkeit tatsächlich vernachlässigt wird. Diese Modifikation in Höhe des gesamten Versteifungseffektes führt allerdings zu einer Überschätzung der Tragfähigkeit, wenn gleichzeitig im konstitutiven Gesetz für den Beton das Entfestigungsverhalten des Betons berücksichtigt wird, da dann der Effekt des Tension Softening doppelt vorhanden ist. Bei verschmierten Rissmodellen wäre es allerdings sinnvoll, den Effekt des Tension Stiffenings über eine Modifikation der Stahlarbeitslinie zu berücksichtigen, da singuläre Risse mit ungestörtem Beton dazwischen nicht realistisch abgebildet werden können. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt allerdings keine Modifikation der Stahlarbeitslinie. Zum einen unterscheiden sich die Modelle in ihrer Berücksichtigung des Tragvermögens des gerissenen Betons, so dass in einigen Fällen der gesamte Versteifungseffekt modelliert werden müsste und in anderen nur der des Tension Stiffenings. Zum anderen wird aus Gl. (5.42) ersichtlich, dass die Berücksichtigung des Effektes nur einen Einfluss auf Steifigkeit bzw. das Verformungsverhalten hat, nicht jedoch auf die Höhe der Traglast. Da das Verformungsverhalten je nach Modell ohnehin nicht korrekt wiedergegeben werden kann, erübrigt sich auch die genaue Modellierung des Tension Stiffening Effektes.

5.9.3 Modellierung mit diskreter Bewehrung

Im Rahmen von Kontinuumsmodellen kann die Berücksichtigung der Bewehrung in verschiedener Art und Weise erfolgen. Im Rahmen dieser Arbeit werden Betonelemente, z.B. Volumen- oder Schalelemente, und Stahlelemente als Fachwerkelemente separat definiert.

Klassische Methode Bei der klassischen Methode erfolgt die Anordnung der Beton- und Bewehrungselemente so, dass die Knoten der Bewehrungselemente und der Betonelemente übereinstimmen, d.h. Bewehrungselemente können nur entlang von Kanten der Betonelemente definiert werden, was bei der Netzgenerierung beachtet werden muss. Durch die Übereinstimmung der Knoten sowie eine sinnvolle Wahl entsprechender Ansatzfunktionen wird eine Verformungskompatibilität erreicht. In der Steifigkeitsmatrix wird an den entsprechenden Knoten die Steifigkeit der Stahlelemente addiert.

Modellierung mit eingebetteter Bewehrung Die Nachteile der o.g. Methode liegt in den Einschränkungen bei der Bildung des FE-Netzes und dem damit verbundenen erhöhten Modellierungsaufwand. Diese Nachteile können mit der Methode der *embedded elements* umgangen werden. Auch hier werden Beton und Bewehrungselemente separat definiert und Bewehrungselemente diskret modelliert. Diese werden dann frei in sogenannte Host-Elemente eingebettet. Eine Übereinstimmung

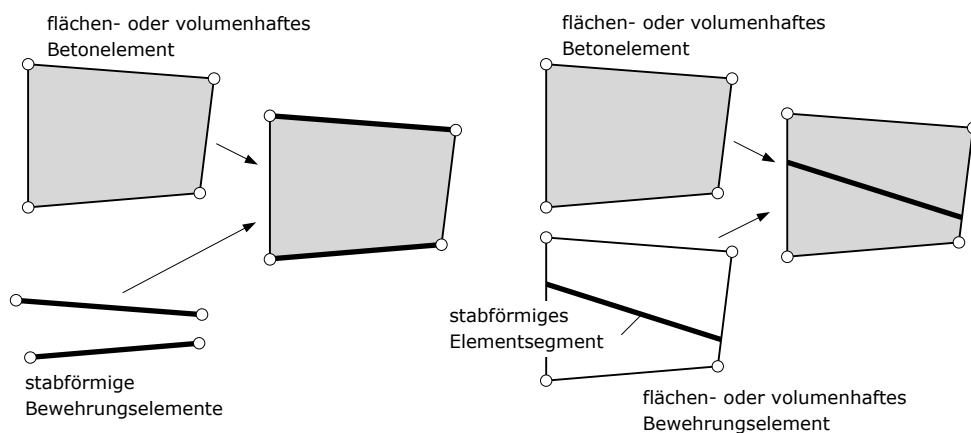


Abbildung 5.43: Unterschiedliche Varianten der Bewehrungsmodellierung (aus [29])

der Knoten von Host-Elementen und eingebetteten Elementen ist nicht erforderlich, was den großen Vorteil dieser Methode ausmacht. Stattdessen werden die Freiheitsgrade der eingebetteten Elemente eliminiert und an die Freiheitsgrade der Host-Elemente gekoppelt. Die Verschiebungen der eingebetteten Knoten ergeben sich dann aus der geometrischen Interpolation der Verschiebungen der Knoten des Hostelements. Es können nur Verschiebungsfreiheitsgrade gekoppelt werden. Die eingebetteten Elemente dürfen Rotationsfreiheitsgrade besitzen, diese sind dann jedoch unabhängig vom Host-Element. Abbildung 5.43 zeigt die beiden Methoden diskreter Bewehrungsmodellierung.

5.9.4 Modellierung mit verschmierter Bewehrung

Statt mit separaten Kontinuums-elementen für Beton und Stahl unter Einbindung diskreter Bewehrungselemente kann die Modellierung von Stahlbeton auch mit Strukturelementen, sogenannten Layer-elementen erfolgen.

Layerkonzept Grundsätzlich handelt sich hierbei um Scheiben- oder Schalenelemente, die über die Querschnittsdicke in einzelne übereinander liegende Betonschichten unterteilt werden. In die Betonschichten werden Stahlschichten für die Bewehrung eingebettet. Hierbei wird in den einzelnen Schichten ein konstanter, ebener Spannungszustand vorausgesetzt. Die Ermittlung der Spannungen erfolgt je Schicht nur in einem Integrationspunkt, im Gegensatz zu sonst üblichen Schalenelementen. Den einzelnen Schichten werden Werkstoffgesetze für Beton und Stahl unter Berücksichtigung des Verbundes zwischen beiden Baustoffen zugewiesen. Abbildung 5.44 veranschaulicht das Konzept. Weitere Details s.[72].

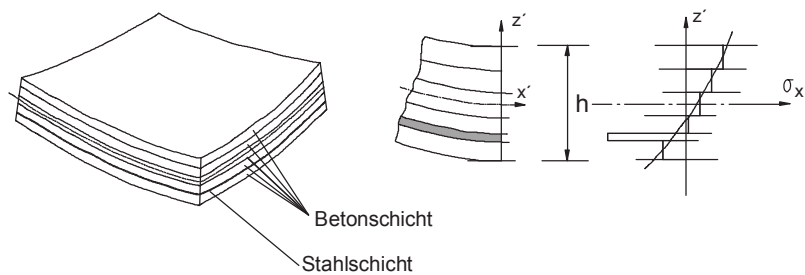


Abbildung 5.44: Layer-element mit Bewehrung

Kapitel 6

Vorstellung und Verifikation der verwendeten Materialmodelle für Beton und Stahlbeton

Im Folgenden werden vier unterschiedliche Materialmodelle für Beton bzw. Stahlbeton vorgestellt und analysiert. Es handelt sich um zwei isotrope Modelle auf Basis der Plastizitätstheorie, sowie zwei orthotrope Modelle. Der Fokus liegt hierbei auf der Eignung der Modelle für die numerische Simulation und Modellierung des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken.

6.1 Einleitung

Bei der Entwicklung vieler kontinuumsmechanischer Materialmodelle für Beton stand die realistische Erfassung dreidimensionaler Druckspannungszustände im Vordergrund, da der Werkstoff Beton zunächst aufgrund seiner geringen Zugfestigkeit hauptsächlich für die Aufnahme von Druckspannungen geeignet scheint. In Kombination mit der Bewehrung, die in der Lage ist, Zugspannungen aufzunehmen, entsteht ein komplexer Verbundwerkstoff, bei dem zusätzlich die zutreffende Erfassung mehraxialer gemischter Spannungszustände im Beton und die Umlagerung von Spannungen im System von großer Wichtigkeit sind. Ein entscheidender Aspekt ist die lastinduzierte Anisotropie des Werkstoffes Beton, deren Auswirkungen bei Bauteilen mit Biegeversagen nicht denselben Stellenwert haben wie beim Schubversagen. Während bei Biegeproblemen eine Vielzahl von Materialmodellen gute Ergebnisse liefern, ist dies bei schubbeanspruchten Strukturen nicht der Fall. Bei einem Stahlbetonbauteil mit Biegeversagen ist letztlich nur die korrekte Abbildung der Spannungen in einer Hauptspannungsrichtung von Bedeutung. In der Biegedruckzone zeigt sich in Längsrichtung ab ca. 40% der Druckfestigkeit verfestigendes Verhalten, die Spannungs-Dehnungslinie entspricht mehr oder weniger der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehung. In der Zugzone dagegen stellt sich nach Überschreitung der Zugfestigkeit entfestigendes Verhalten ein, die Spannungen lagern sich in die Bewehrung um. Die beiden anderen Hauptspannungsrichtungen erfahren nur geringe Spannungen, das Materialverhalten in diesen Richtungen spielt für den Versagenszustand kaum eine Rolle. Dem gegenüber ist die Querkraftbeanspruchung im Steg eines Stahlbetonbalkens durch einen gemischten Hauptspannungszustand mit nicht vernachlässigbaren Druckspannungen quer zur Hauptzugrichtung charakterisiert. Die Rissbildung im Beton aufgrund der geringen Zugfestigkeit führt zu einer lastinduzierten Anisotropie, die das Materialmodell korrekt abbilden muss, da nun das Materialverhalten in allen Hauptspannungsrichtungen für das Versagen von Bedeutung ist.

6.2 Plastisches Materialmodell CDP

6.2.1 Einleitung

Für die Untersuchung des Tragverhaltens von Beton und Stahlbeton mit einem Materialmodell auf Basis der Pastizitätstheorie, insbesondere unter Schubbeanspruchung, wird zunächst das Materialmodell *Concrete Damaged Plasticity* (CDP) der FEM-Software ABAQUS vorgestellt, das in der Forschung häufig zur Berechnung von Betonstrukturen verwendet wird, vgl. z.B. [66], [29]. Es handelt sich hierbei um ein dreidimensionales, isotropes elasto-plastisches Materialgesetz, das um eine Schädigungskomponente erweitert wurde und damit auch in der Lage ist, zyklische Belastungen abzubilden vgl. [66], [29]. Auf die Berücksichtigung des Einflusses der Schädigung wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet, da zum einen im Rahmen der Arbeit keine zyklischen Versuche modelliert werden, zum anderen zwar Spannungsumlagerungen im Belastungsverlauf möglich und sogar wahrscheinlich sind, der Fokus im Rahmen dieser Arbeit jedoch auf der Bewertung des isotropen plastischen Ansatzes selbst liegt. Eine gleichzeitige Berücksichtigung des isotropen Schädigungsansatzes erschwert die Bewertung der Ergebnisse bzw. beobachteten Effekte, da nicht geklärt werden kann, ob diese auf den plastischen oder den Schädigungsaspekt zurückzuführen sind.

6.2.2 Modellannahmen

Fließkriterium Das Materialmodell *Concrete Damaged Plasticity* in ABAQUS beruht bei Berücksichtigung der Schädigungskomponente auf folgender Fließ- bzw. Bruchfläche:

$$\tilde{F} = \frac{1}{1-\alpha}(\bar{q} - 3\alpha\bar{p} + \beta(\tilde{\varepsilon}^{pl} \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle - \gamma \langle -\hat{\sigma}_{max} \rangle) - \bar{\sigma}_c(\tilde{\varepsilon}^{pl})) = 0, \quad (6.1)$$

bzw. ohne Berücksichtigung der Schädigung:

$$\tilde{F} = \frac{1}{1-\alpha}(q - 3\alpha p + \beta(\tilde{\varepsilon}^{pl} \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle - \gamma \langle -\hat{\sigma}_{max} \rangle) - \sigma_c(\tilde{\varepsilon}^{pl})) = 0, \quad (6.2)$$

die sich in den verwendeten Spannungen unterscheiden. Bei einem Schädigungsansatz ist das Materialgesetz von den effektiven Spannungen $\bar{\sigma}$ abhängig:

$$\bar{\sigma} = (1-d)\sigma \quad (6.3)$$

Ohne Einfluss der Schädigung, also mit $d = 0$ gilt somit $\sigma = \bar{\sigma}$. Das Materialmodell geht ursprünglich auf LUBLINER ET AL. [65] zurück und wurde von LEE und FENVES [59] modifiziert. Die Beschreibung der Fließfläche in Invarianten (ohne Einfluss einer Schädigung, daher $\sigma = \bar{\sigma}$) lautet wie folgt:

$$F = \frac{1}{1-\alpha}(\alpha I_1 + \sqrt{3J_2} + \beta(\varepsilon^{pl} \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle - \gamma \langle -\hat{\sigma}_{max} \rangle) - \sigma_c(\varepsilon^{pl})) = 0 \quad (6.4)$$

$\hat{\sigma}_{max}$ bezeichnet hierbei die maximale Hauptspannung. Ferner werden $\sigma_c(\tilde{\varepsilon}_c)$ und $\sigma_t(\tilde{\varepsilon}_t)$ als die positiv definierten einachsigen Druck- bzw. Zugfließspannungen definiert, deren Evolution durch die plastischen Verzerrungen gesteuert wird. Für die Verifikation der Bruchfläche werden diese mit

den jeweiligen Materialfestigkeiten gleichgesetzt. σ_{c0} und σ_{b0} bezeichnen die ein- bzw. zweiachsialen Druckfestigkeiten.

Die Vorfaktoren α, β und γ in den o.g. Formeln ergeben sich (in der Notation wie im ABAQUS Manual) wie folgt:

$$\alpha = \frac{\sigma_{b0} - \sigma_{c0}}{2\sigma_{b0} - \sigma_{c0}} \quad (6.5)$$

$$\beta(\tilde{\varepsilon}^{pl}) = \frac{\sigma_c(\tilde{\varepsilon}_c)}{\sigma_t(\tilde{\varepsilon}_t)} (1 - \alpha) - (1 + \alpha) \quad (6.6)$$

$$\gamma = \frac{3(1 - K_c)}{2K_c - 1} \quad (6.7)$$

Der Faktor K_c steuert die Form der Bruch- bzw. Fließfläche in der Deviatorebene. Es wird von der MACAULY-Klammer Gebrauch gemacht, die dafür sorgt, dass der Eintrag nur verwendet wird, wenn er positiv ist.

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} \cdot (|x| + x) \quad (6.8)$$

Der Beitrag aus $\gamma \langle -\hat{\sigma}_{max} \rangle$ kommt hierdurch lediglich bei dreiaxialen Druckspannungen zum Tragen und der Summand $\beta(\varepsilon)^{pl} \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle$ entfällt. Somit kann die Form der Fließfläche abhängig von den Druck- bzw. Zugspannungszuständen kontrolliert werden. Weitere Details können dem ABAQUS-Manual bzw. einschlägiger Literatur, z.B. [66] entnommen werden. Eine ausgezeichnete, sehr detaillierte Untersuchung des Materialmodells *Concrete Damaged Plasticity* findet sich in [29].

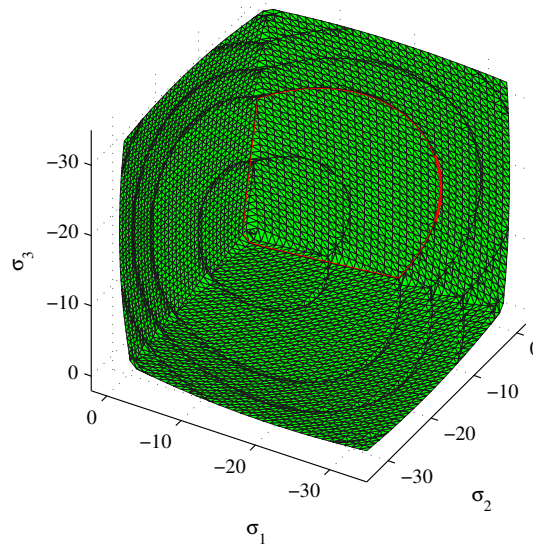


Abbildung 6.1: Versagenskriterium CDP

Abschließend sei noch der Hinweis gegeben, dass im Materialgesetz die Möglichkeit des Schließens der Risse nach Entlastung und Wiederbelastung mit einer Druckspannung implementiert ist.

Fließregel Bei dem Materialmodell *Concrete Damaged Plasticity* wird eine nicht-assozierte Fließregel verwendet. Es handelt sich um eine hyperbolische DRUCKER-PRAGER-Funktion. Das plastische

Potential, d.h. die plastische Potentialfunktion in Abhängigkeit des hydrostatischen Druckes p und der deviatorischen Komponente q (vgl. Gl. (2.59) sowie Gl. (2.58)) lautet dabei wie folgt:

$$G = \sqrt{(e_{cc} \sigma_{t0} \tan \psi)^2 + q^2} - p \tan \psi \quad (6.9)$$

Die ursprüngliche lineare DRUCKER-PRAGER-Funktion

$$G = q - p \tan \psi \quad (6.10)$$

wird dabei durch eine hyperbolische Funktion angenähert und stellt damit eine kontinuierliche Kombination des RANKINE-Kriteriums und des DRUCKER-PRAGER-Kriteriums dar. Hierbei bezeichnet σ_{t0} die einaxiale Zugfestigkeit. Bei der Variablen e_{cc} , Exzentrizität genannt, handelt es sich nicht um einen realen Materialparameter, sondern diese dient zur Festlegung der Rate, mit der sich die Fließfunktion der Asymptote annähert. Die Richtung des Vektors der plastischen Verzerrungen ist aufgrund der fehlenden Unstetigkeitsstelle an der Kegelspitze damit eindeutig definiert. Nach [52] kann die Exzentrizität als Verhältnis zwischen der Zug- und Druckfestigkeit ermittelt werden; der von ABAQUS vorgeschlagene Wert $e_{cc} = 0,1$ stimmt somit mit üblichen Verhältniswerten von Zug- zu Druckfestigkeit gut überein.

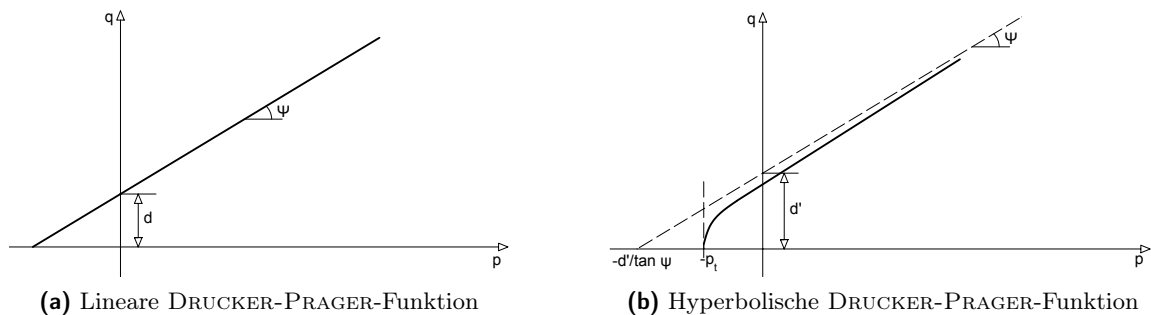


Abbildung 6.2: Fließregel mit DRUCKER-PRAGER-Funktionen

Maßgeblich für die Evolution der plastischen Verzerrungen ist offensichtlich der Dilatanzwinkel ψ . In [101] werden Methoden zur Ermittlung des Dilatanzwinkels von Beton aus Versuchen dargestellt. Allerdings bezogen sich die Untersuchungen auf ein MOHR-COULOMB-Materialmodell, und nicht wie in ABAQUS auf ein DRUCKER-PRAGER-Kriterium. Somit ist eine Umrechnung der Winkel erforderlich. Hierbei muss zwischen dem Reibungswinkel ϕ des MOHR-COULOMB-Kriteriums in der σ - τ -Ebene und dem Dilatanzwinkel ψ , der im Hauptspannungs- bzw. p - q -Raum definiert ist, unterschieden werden. Die Umrechnung der Reibungswinkel für das MOHR-COULOMB-Kriterium erfolgt gemäß Gl. (5.17). Je nach Anpassung des DRUCKER-PRAGER-Kegels an das MOHR-COULOMB-Kriterium liegen die inneren Reibungswinkel bei einer für Beton typischen Reibung von $30 \leq \phi \leq 40^\circ$ (vgl. z.B.[79],[67]) bei $\approx 35^\circ \leq \phi^* \leq 48^\circ$.

Dem gegenüber sind die aus Versuchen ermittelten Dilatanzwinkel deutlich kleiner. VERMEER ET AL [101] geben Größenordnungen von $\psi = 11 - 15^\circ$ für übliche Betone an, bezogen auf eine nicht-assozierte MOHR-COULOMB-Fließregel. In den Original-Quellen für das hier postulierte Materialmodell werden von LUBLINER ET AL. bei einer MOHR-COULOMB-Fließregel gute Ergebnisse mit

$\psi = \arctan 0,2 = 11,3^\circ$ erzielt. In [66] wie auch dem ABAQUS-Manual [96] werden demgegenüber Werte zwischen 30° und 40° vorgeschlagen und mit guten Simulationsergebnissen bestätigt.

Leitet man zur Bestimmung der plastischen Verzerrungszuwächse die Fließregel nach den Spannungen ab, erhält man (s. a. [29]), folgende Ausdrücke für die Verzerrungszuwächse, die im Hauptspannungsraum definiert sind¹:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}^{pl} \left(\frac{\tan \psi^{pq}}{3} \cdot \mathbf{I} + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\kappa^2 + q^2}} \right) \quad \text{mit:} \quad \kappa = e_{cc} \cdot \sigma_{t0} \cdot \tan \psi^{pq} \quad (6.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}^{pl} = \dot{\lambda} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\tan \psi^{pq}}{3} + \frac{3(\sigma_1 - p)}{2\sqrt{(\kappa^2 + q^2)}} \\ \frac{\tan \psi^{pq}}{3} + \frac{3(\sigma_2 - p)}{2\sqrt{(\kappa^2 + q^2)}} \\ \frac{\tan \psi^{pq}}{3} + \frac{3(\sigma_3 - p)}{2\sqrt{(\kappa^2 + q^2)}} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Anhand der Formel (6.12) ist die Volumenzunahme sowohl unter Druck- als auch unter Zugbeanspruchungen im Falle plastischen Fließens erkennbar. Der erste Summand korrespondiert zu den volumetrischen Spannungen und ist direkt von der Größe des Dilatanzwinkels ψ abhängig. Der zweite Summand korrespondiert zu den deviatorischen Spannungen und damit auch zu den deviatorischen Verzerrungen, die keinen Beitrag zu einer Volumenzunahme leisten. Dies lässt sich auch durch Addition der drei deviatorischen Anteile belegen, die in Summe 0 ergeben. Somit ergibt sich immer eine Volumenzunahme im plastischen Belastungsbereich, die umso größer ist, je größer der Dilatanzwinkel gewählt wird. Als Eingangswerte für die plastischen Verzerrungen dienen die uniaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Materials.

Ver- und Entfestigung Die Ver- und Entfestigung wird im Materialmodell mit $\sigma_c(\tilde{\varepsilon}_c)$ bzw. $\sigma_t(\tilde{\varepsilon}_t)$ über die uniaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Materials kontrolliert. Diese sind von zwei internen Verzerrungsparametern $\tilde{\varepsilon}_c$ bzw. $\tilde{\varepsilon}_t$ abhängig, die als äquivalente plastische Dehnungen aufgefasst werden. Für einaxiale wie auch reine mehraxiale Druck- bzw. Zugspannungszustände entsprechen die plastischen Dehnungen bzw. deren Raten den tatsächlichen plastischen Dehnungen. Um mehraxiale gemischte Beanspruchungszustände abzubilden, wird eine Wichtungsfunktion $r(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ eingeführt:

$$r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} & \text{für } \hat{\boldsymbol{\sigma}} \neq 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

Die äquivalenten plastischen Dehnungen werden dann aus den tatsächlichen plastischen Dehnungen wie folgt ermittelt:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{mit:} \quad \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \begin{bmatrix} r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(r(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) - 1) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

¹Im Gegensatz zu [29] wird hier die Definition $p = 1/3I_1$ verwendet, was die Vorzeichen ändert

Durch diese Wichtung ergibt sich gewissermaßen eine gemittelte Ver- bzw. Entfestigung für gemischte Spannungszustände.

Viskositätsparameter Eine weitere wichtige Eingangsgröße ist der sogenannte Viskositätsparameter. Dieser ist nicht physikalisch begründet, es handelt sich vielmehr um einen künstlichen Dämpfungsparameter zur Stabilisierung der nichtlinearen Rechnung. Vergleichsrechnungen zeigen, dass mit zunehmenden Werten für den Viskositätsparameter die Rechnungen in der Tat stabiler werden. Die Lastverformungskurven werden glatter und es werden höhere Traglasten erreicht. Das Problem besteht jedoch darin, dass bei Verwendung des Viskositätsparameter dem System künstliche Energie zugeführt wird und die ermittelte Traglast von der Größe des Viskositätsparameters abhängt. Daher sollte dieser möglichst klein gewählt werden.

Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Druck Als Eingangswerte sind neben den schon erwähnten modellimmanenten Parametern wie Dilatanzwinkel und Viskositätsparameter die Spannungs-Dehnungs- bzw. Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen für eine einachsige Druck- bzw. Zugbeanspruchung erforderlich. Es existieren sowohl für Druck als auch für Zugspannungen unterschiedliche Ansätze für die Spannungs-Dehnungs- bzw. Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen.

Für die einachsige Arbeitslinie unter Druckbeanspruchung wird folgende Bestimmungsgleichung verwendet, die auch in [84] bzw. [66] zur Anwendung kommt:

$$\sigma_c = - \frac{E_{ci} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^2}{1 + (E_{ci} - 2) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}} \quad (6.15)$$

Sie entspricht im Grundsatz der nichtlinearen Arbeitslinie nach MODEL CODE 90, allerdings mit einem linearen Bereich bis $0,4f_{cm}$. Die Verzerrung ε_{c2} entspricht der Verzerrung bei Erreichen der Festigkeit f_{cm} . Der Tangentenmodul E_{ci} wird so bestimmt, dass die Arbeitslinie den Punkt bei $\sigma_{cy} = 0,4f_{cm}$, der das Ende des elastischen Bereiches charakterisiert, schneidet, vgl. [66]:

$$E_{ci} = \frac{2}{3E_{cm}} \left(\frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 - \frac{4f_{cm}}{3\varepsilon_{c2}} + \frac{5}{3}E_{cm} \quad (6.16)$$

mit E_{cm} als Sekantenmodul.

Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Zug Hier wird die schon bekannte Formulierung von REINHARDT[89] bzw. HORDIJK[44] nach Gl. (5.49) als Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung verwendet, da sie physikalisch hergeleitet ist und die aus ihr errechnete Bruchenergie zwischen den Werten aus MODEL CODE 1990 sowie MODEL CODE 2010 liegt:

$$\frac{\sigma_t}{f_t} = \left\{ 1 + \left(c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2)$$

mit $c_1 = 3$, $c_2 = 6,93$ sowie $w_c = 160 \mu\text{m}$

Für die Bruchenergie ergibt sich aus der Integration die ebenfalls bereits vorgestellte Beziehung 6.17. Das bedeutet, dass mit der Wahl der o.g. Arbeitslinie die Bruchenergie automatisch nach

CORNELISSEN ermittelt wird.

$$G_f = 0,1947 f_t w_c \quad (6.17)$$

In ABAQUS kann beim Materialmodell CPD für den Beton wahlweise direkt die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung oder eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung verwendet werden. Da im Rahmen der Kontinuumsmechanik und des verschmierten Rissansatzes aber eine Umrechnung auf Verzerrungen unumgänglich ist, wird diese manuell vorgenommen. Die Umrechnung ist abhängig von der Elementgröße und dem Elementansatz, sprich der Anzahl Integrationspunkte, s.a.[66] bzw. Abschnitt 5.6.1. Im vorliegenden Fall werden reduziert integrierte Verschiebungselemente mit einem Integrationspunkt verwendet, so dass die Bruchenergie bzw. die charakteristische Länge auf das gesamte Elementvolumen bezogen wird.

6.2.3 Validierung durch Nachrechnung der Scheibenversuche von KUPFER

Zur Verifikation bzw. Validierung des Modells werden die Scheibenversuche von KUPFER nachgerechnet. Statt des gesamten Systems wird unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen lediglich ein Viertel der Scheibe modelliert, s. Abbildung 6.3a bzw. 6.3b.

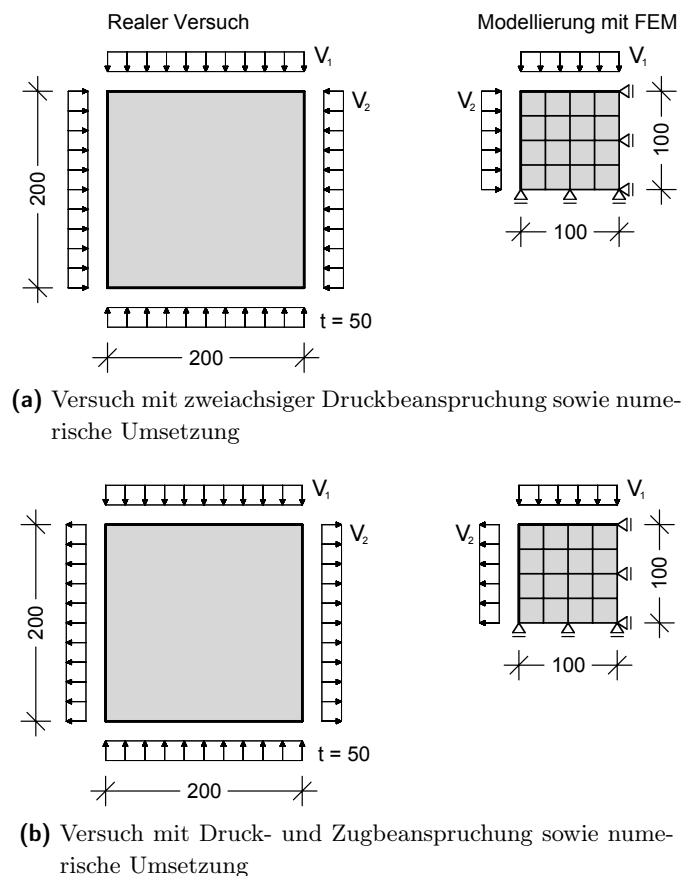


Abbildung 6.3: Numerische Simulation der KUPFER-Versuche

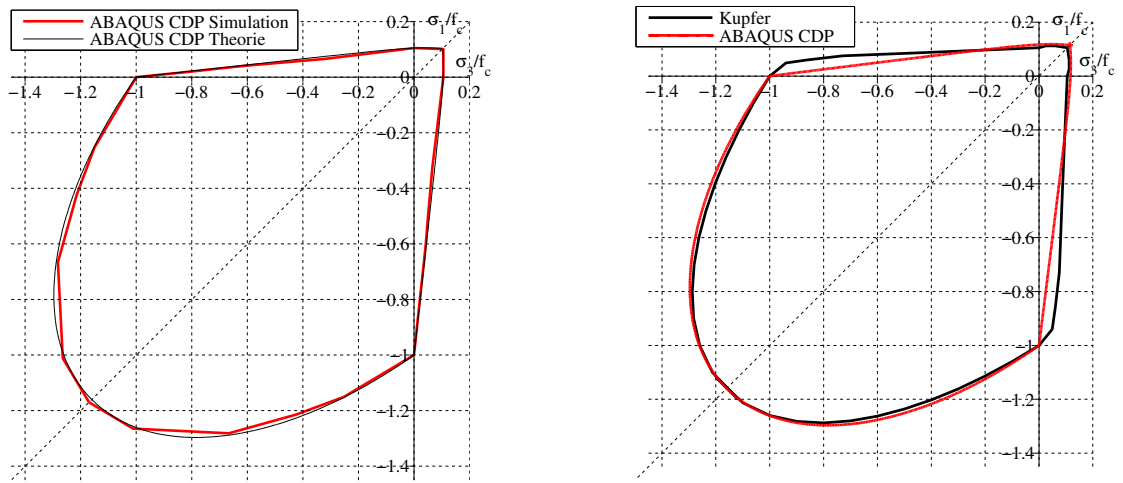
Im Rahmen der Verifikation des Modells werden sowohl die Bruchlasten als auch die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der realen Versuche mit den Simulationsergebnissen verglichen. In Abbildung 6.4 sind die Ergebnisse aus den Nachrechnungen der KUPFER-Versuche im Vergleich zu der aus Versuchen approximierten KUPFER-Kurve dargestellt. Die Umrechnung der Fließfunktion aus Gl. (6.4) auf den ebenen Spannungszustand ergibt folgende Gleichung für den Zug-Druck-Bereich:

$$\Phi = \frac{1}{1 - \alpha} \left[\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} + \alpha(\sigma_1 + \sigma_2) + \beta\sigma_{max} \right] - \sigma_{c0} \leq 0 \quad (6.18)$$

Für den Bereich zweiachsiger Druckspannungen vereinfacht sich die Gleichung auf:

$$\Phi = \frac{1}{1 - \alpha} \left[\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} + \alpha(\sigma_1 + \sigma_2) \right] - \sigma_{c0} \leq 0 \quad (6.19)$$

Man erkennt die Gleichung einer Ellipse, die sich aus dem DRUCKER-PRAGER-Kriterium ergibt. In Abbildung 6.4a werden zunächst die analytische Lösung sowie die Ergebnisse aus den Nachrechnungen der KUPFER-Versuche für den Bruchzustand dargestellt. Hierbei wurde die Simulation mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren durchgeführt, mit dem bei einem lastgeregelten Versuch lediglich die Bruchlasten, nicht jedoch der abfallende Ast abgebildet werden kann². Man erkennt



(a) Theoretische und numerische Umsetzung der Bruchkurve aus dem CDP-Modell

(b) Vergleich der KUPFER-Kurve des CDP-Modells

Abbildung 6.4: Bruchkurven auf der Grundlage der KUPFER-Versuche

eine gute Übereinstimmung der Bruchkurven, jedoch lassen sich im Vergleich zu den tatsächlichen Werten aus den Versuchen insbesondere Abweichungen im Zug-Druck-Bereich erkennen. Hierbei unterschätzt die implementierte Bruchfunktion die Tragfähigkeit insbesondere im Bereich kleiner

²Im Druck-Druck-Bereich wurden die Versuchsdaten durch eine Ellipse approximiert, die KUPFER in seinen Ausarbeitungen vorgeschlagen hat. Die realen Versuchswerte weichen also z.T. ebenfalls von den Simulationsergebnissen ab, liegen aber nahezu auf der Ellipse

Verhältnisse von Zug- zu Druckspannungen. Beispielsweise kann im Versuch bei einem Druck-Zug-Spannungsverhältnis von $-1 : 0,05$ noch 94% der einachsigen Druckfestigkeit als Druckspannung aufgenommen werden, während bei gleichem Spannungsverhältnis in der Simulation nur 66% der Druckfestigkeit aufgenommen werden kann bei entsprechend geringerer Zugspannung.

Einfluss des Dilatanzwinkels Vergleicht man neben den Bruchlasten auch die zugehörigen Spannungs-Dehnungslinien, lässt sich eine recht gute Übereinstimmung in der Hauptbeanspruchungsrichtung feststellen, jedoch sind insbesondere in den höheren Laststufen deutliche Abweichungen erkennbar und das Modell verhält sich tendenziell zu steif. Außerdem ist der Einfluss unterschiedlicher Dilatanzwinkel ersichtlich. Während in der Haupttrichtung vor Erreichen des Fließplateaus keine Unterschiede feststellbar sind, sondern lediglich im Anschluss höhere plastische Dehnungen bei größeren Dilationswinkeln auftreten, unterscheiden sich die Spannungs-Dehnungslinien in der anderen Beanspruchungsrichtung deutlicher, s. Abbildung 6.5. Hierbei werden im Druck-Druck-Bereich bessere Übereinstimmungen mit den theoretisch realistischen, kleineren Dilatanzwinkeln erzielt. Kleinere Dilatanzwinkel gehen mit tendenziell etwas größeren Druckstauchungen einher. Allerdings hat sich im späteren Verlauf herausgestellt, dass die vermeintlich realistischen Winkel bei der Simulation von Großversuchen mit Schubversagen zu unbefriedigenderen Ergebnissen führen als die ebenfalls in anderen Quellen vorgeschlagenen Werte von ca. $\approx 35^\circ$, z.B. [66]. Außerdem konnte festgestellt werden, dass in den höheren Beanspruchungsbereichen bessere Ergebnisse unter Vernachlässigung der Querdehnzahl erzielt werden können.

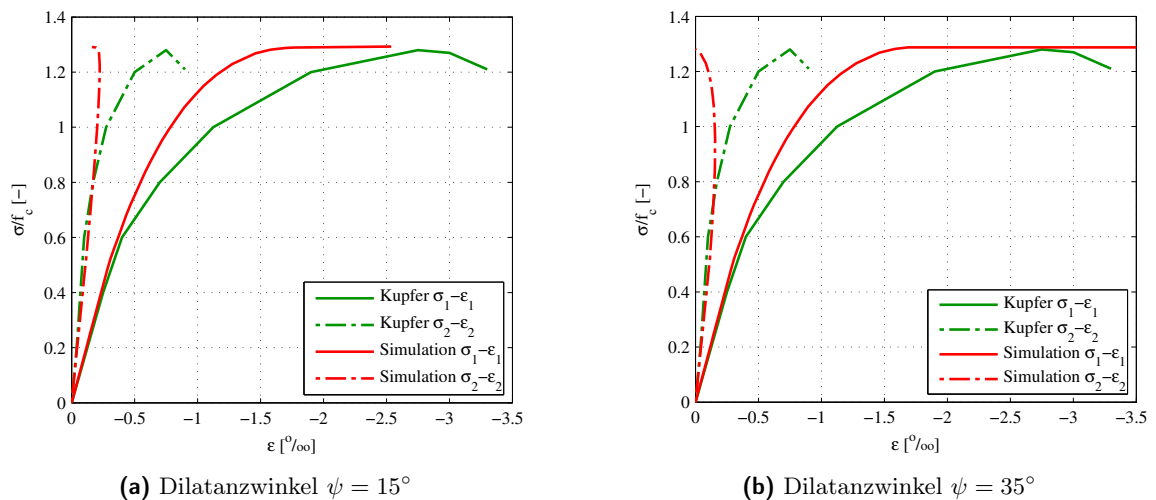


Abbildung 6.5: Spannungs-Dehnungs-Kurven für zweiachsiale Druckbeanspruchung, $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0,52$

6.2.4 Einfluss des isotropen Ansatzes

Verhalten unter sequenzieller Zug-Druck-Belastung Das Materialmodell Concrete Damaged Plasticity (CDP) verfügt über die Möglichkeit, das Schließen von Rissen und einen anschließende Rückgewinn der Steifigkeit in Bezug auf Druckbeanspruchungen zu berücksichtigen. Damit wird verhindert, dass der isotrope Ansatz zu einer fehlerhaften Abminderung der Steifigkeit in Druckrichtung führt, wenn die Zugbeanspruchung wieder zurückgenommen wird, und die Struktur mit Druckspannungen belastet wird. Abbildung 6.6 verdeutlicht das Prinzip. Zunächst wird eine un-

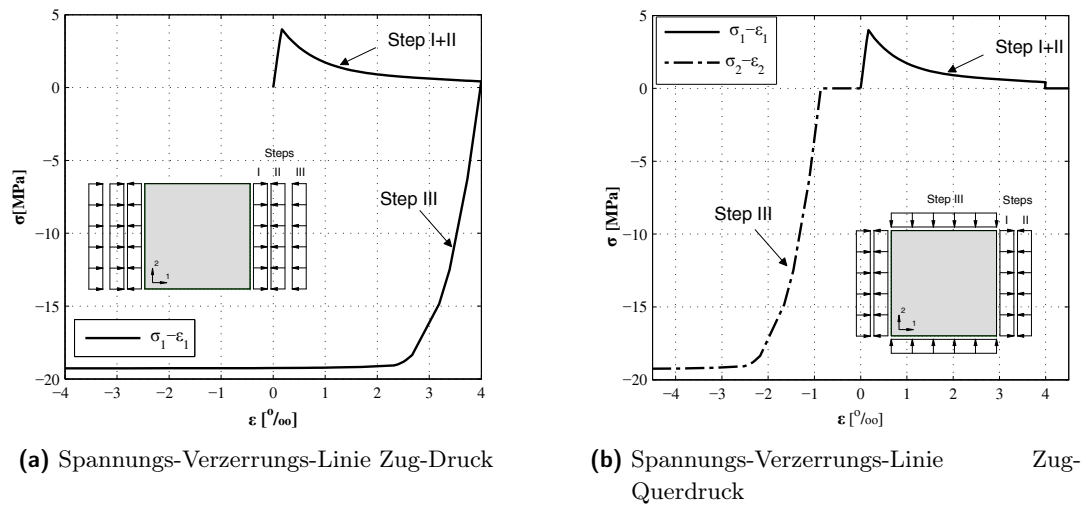


Abbildung 6.6: Spannungs-Dehnungs-Linie Zug mit anschließender Druckbeanspruchung

bewehrte Stahlbetonscheibe mit einer Zugdehnung belastet (Step I); die anschließende Entlastung (Step II) führt zu einem vollständigen Spannungsrückgang mit bleibenden plastischen Dehnungen. Gleichzeitig treten plastische Dehnungen senkrecht zur Beanspruchungsrichtung auf, wie gemäß der Fließregel auch zu erwarten ist. Bei der anschließenden Belastung in Form einer Druckspannung (Step III) kann die einaxiale Druckfestigkeit zu 100% erreicht werden. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Druckbeanspruchung nach Entlastung in der gleichen Richtung wie zuvor die Zugbeanspruchung aufgebracht wird oder senkrecht dazu.

Einfluss einer Verformungsbehinderung Falls nach Durchlaufen des abfallenden Astes bis zu einer bestimmten Dehnung die Scheibe nicht entlastet wird, sondern die Verformung konstant gehalten wird, kann sogar eine Steigerung der aufnehmbaren Druckspannungen über die einaxiale Festigkeit hinaus beobachtet werden, s. Abbildung 6.7. Dies ist darin begründet, dass diese Verformungsbehinderung zu einem mehraxialen Druckspannungszustand führt, der mit höheren aufnehmbaren Spannungen verbunden ist. Dies resultiert ferner in einem Spannungsaufbau in der Zugrichtung.

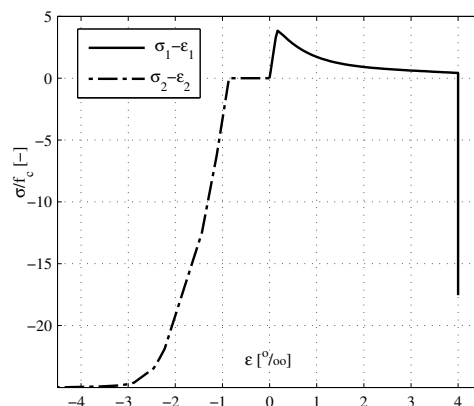


Abbildung 6.7: Zug- und Druckbeanspruchung bei behinderter Verformung in Zugrichtung

Verhalten unter sequenzieller Zug-Zug-Belastung Wird dagegen eine Zugbeanspruchung bis in den Entfestigungsbereich hinein in 1-Richtung aufgebracht, so lässt sich die Probe darauffolgend quer zur ersten Belastungsrichtung lediglich mit einer Zugbeanspruchung bis auf den Restwert der Zugspannung belasten. Hierbei sind die Auswirkungen aus dem isotropen Ansatz deutlich erkennbar. Dies ist unabhängig davon, ob die Zugbeanspruchung aus dem ersten Belastungszyklus bestehen bleibt oder zurückgenommen wird und widerspricht damit dem realen Verhalten, dass ein Riss in einer Richtung das Zugtragverhalten in die andere Richtung nicht beeinflusst. Es steht außerdem in einem Widerspruch zu einer gleichzeitigen Lastaufbringung in zwei Richtungen; hierbei kann die Probe nämlich gemäß des RANKINE-Kriteriums bis zur vollen Zugfestigkeit in allen Belastungsrichtungen beansprucht werden. Auch hier lässt sich der Einfluss des Dilatanzwinkels ψ feststellen. Ein

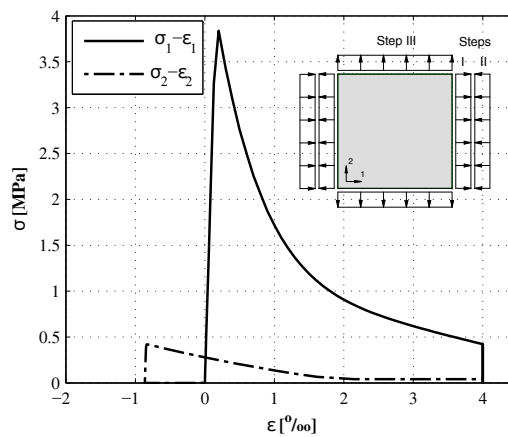


Abbildung 6.8: Spannungs-Dehnungs-Linie Zug mit anschließender Zugbeanspruchung senkrecht dazu

kleinerer Dilatanzwinkel führt aufgrund der geringeren Volumenzunahme zu betragsmäßig größeren negativen plastischen Dehnungen.

Verhalten unter sequenzieller Zug-Querzug-Druck-Belastung Während sich die Druck- und Zugentfestigung bei nacheinander aufgebrachten Beanspruchungszuständen gegenseitig nicht beeinflussen, vgl. Abbildung 6.6, kann eine durch den isotropen Plastizitätsansatz hervorgerufene Zugentfestigung auch zu einer herabgesetzten Druckfestigkeit führen. Im folgenden Beispiel wurde zunächst weggeregelt eine Zugbeanspruchung in 1-Richtung aufgebracht, die fast zu vollständigen Entfestigung führt. Anschließend erfolgte die Entlastung sowie eine orthogonal dazu aufgebrachte lastgeregelt Zugbeanspruchung. Aufgrund des isotropen Ansatzes kann diese Zugspannung maximal die Höhe der Zugspannung vor Entlastung erreichen. Im ersten Beispiel beträgt die Zugspannung 83,3% der Resttragfähigkeit. Wird diese Spannung nun beibehalten und gleichzeitig eine Druckbeanspruchung in Richtung 1, also wieder in Richtung der ursprünglichen Zugbeanspruchung, aufgebracht, beträgt die maximal aufnehmbare Spannung lediglich 16,8% der ursprünglichen Druckfestigkeit. Die Abminderung fällt noch massiver aus, wenn die Zugdehnung größer und damit die aufnehmbare Zugspannung noch geringer wird, wie Abbildung 6.9b verdeutlicht. Das bedeutet, dass der isotrope Entfestigungsansatz zu einer massiven Herabsetzung der Drucktragfähigkeit führen kann, wenn es zuvor bereits zu einer Entfestigung gekommen ist.

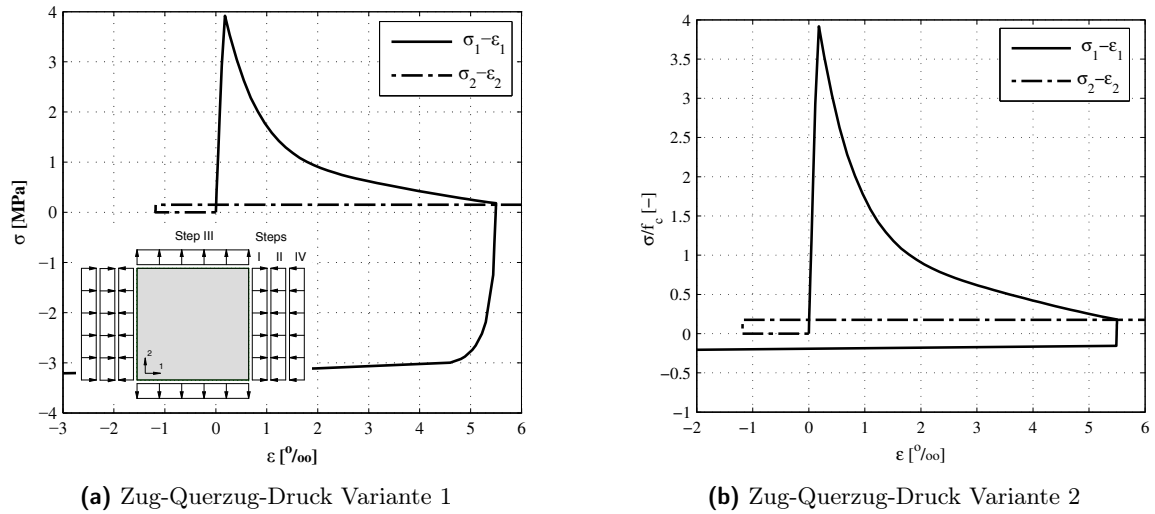


Abbildung 6.9: Auswirkungen der isotropen Entfestigung auf Aufnahme von Druckspannungen

Verhalten unter gleichzeitiger Zug-Druck-Belastung Bezogen auf eine gleichzeitige Beanspruchung lassen sich wichtige Auswirkungen aus dem isotropen Ansatz, insbesondere im Druck-Zug-Bereich erkennen. In Abbildung 6.10 werden sowohl die Fließ- als auch die Bruchkurve aus den Simulationen der KUPFER-Versuche dargestellt.

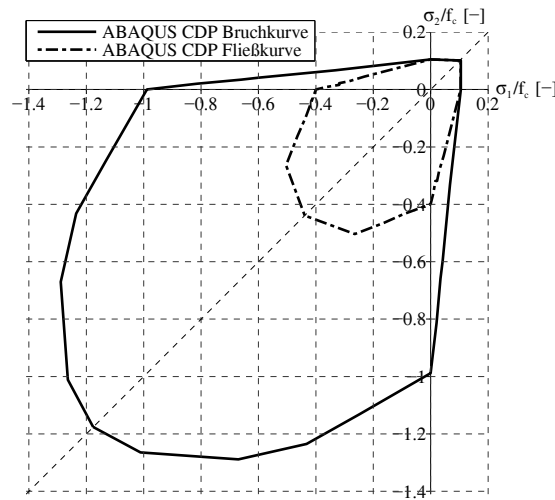


Abbildung 6.10: Fließ- und Bruchkurve CDP

Man erkennt, dass für einachsigen Druck die Fließgrenze wie definiert bei $\approx 0,4f_c$ beginnt und im Druck-Druck-Bereich die Fließkurve affin zur Bruchkurve verläuft. Ebenfalls erwartungsgemäß stimmen Fließ- und Bruchgrenze für ein- und zweiachsige Zugspannungszustände überein, da für Zugspannungen linear-elastisches Verhalten bis zum Bruch definiert wurde. Die Fließgrenze im Druck-Zug-Bereich wird nun linear zwischen der Fließgrenze für einachsigen Druck und der einachsigen Zugfestigkeit approximiert. Dies führt jedoch zur schon erwähnten Unterschätzung der

Bruchfestigkeiten. Im den gemischten Spannungsbereichen kommt es in der Simulation naturgemäß aufgrund des isotropen Plastizitätsansatzes zu einer isotropen Verfestigung ab der Fließgrenze hin zur Bruchgrenze. Eine gleichzeitige Verfestigung auf Zug und Druck widerspricht dem realen Tragverhalten und zeigt die Schwäche des isotropen Ansatzes auf: Real verhält sich Beton auf Zug nahezu linear-elastisch bis zum Bruch, ohne Verfestigung, und es sind Spannungszustände möglich, bei denen die Druckspannungen gleichzeitig im Verfestigungsbereich liegen.

Die Auswirkungen des isotropen Ansatzes, insbesondere auch im Nachbruchbereich, lassen sich in Abbildung 6.11 ebenfalls gut erkennen. Es zeigt die Spannungs-Dehnungs-Linien aus einer Nachrech-

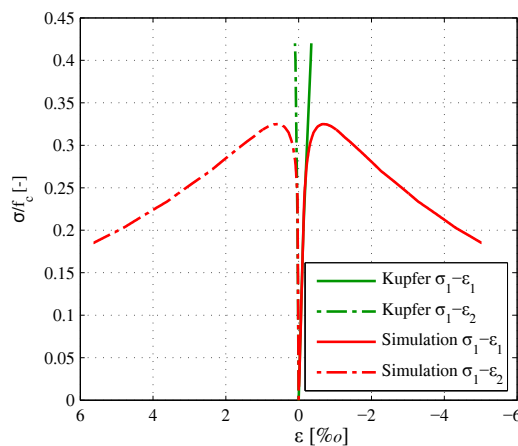


Abbildung 6.11: Spannungs-Dehnungs-Linie für Druck- und Querzugbeanspruchung mit dem Verhältnis $-1/0,202$

nung eines KUPFER-Versuches mit einer gemischten Druck-Zug-Beanspruchung. Hierbei wurde das Bogenlängen-Verfahren verwendet, das erlaubt, auch den Nachbruchbereich bei lastgeregelter Beanspruchung darzustellen. Aufgrund der großen Zugbeanspruchung im Vergleich zur Druckfestigkeit versagt der Werkstoff real so früh auf Zug, dass das Spannungs-Dehnungsverhalten in beiden Richtungen linear-elastisch bleibt. In der Simulation dagegen findet eine isotrope Verfestigung statt. Die maximale Tragfähigkeit wird bei diesem Spannungsverhältnis um fast 23% unterschätzt. Im Nachbruchbereich kommt es zu einer starken Entfestigung sowohl im Druck- als auch im Zugbereich, die letztlich durch die Notwendigkeit der Entfestigung auf Zug ausgelöst wird. Dies hat zur Folge, dass auch die Tragfähigkeit auf Druck massiv gesenkt wird. Zwar ist eine Abhängigkeit der Tragfähigkeit auf Druck von lateralen Zugbeanspruchungen bekannt, jedoch erscheint die massive Abnahme der Drucktragfähigkeit zu konservativ und nicht plausibel, sondern lediglich dem isotropen Ansatz geschuldet. Hierdurch kann das in verschiedenen Richtungen unterschiedliche Verhalten und damit die spannungsinduzierte Anisotropie des Werkstoffs Beton nicht zutreffend wiedergegeben werden.

6.3 Plastisches Materialmodell Mohr-Coulomb mit Tension Cut Off

6.3.1 Einleitung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein eigenes Materialmodell für Stahlbeton entwickelt, im Folgenden „MCTC“ genannt, das einen ähnlichen Ansatz verfolgt wie das in Abschnitt 6.5 vorgestellte Modell basierend auf der Elasto-Plastischen Spannungsfeld-Methode, jedoch auf klassischen isotropen Materialgesetzen basiert. Es handelt sich um ein plastisches Materialmodell auf Basis eines MOHR-COULOMB-Versagenskriteriums mit Tension Cut Off, das für die Anwendung in Stahlbetonstrukturen modifiziert wird. Aufgrund dieser Modifikationen ist es möglich, die spannungsinduzierte Anisotropie von Beton auch mit einem isotropen plastischen Materialgesetz abzubilden. Es kann ebenso wie das EPSF-Modell nur für Stahl- bzw. Spannbeton, also nur in Kombination mit im Modell vorhandener Bewehrung, verwendet werden. Die Materialgesetze für Beton und Stahl werden dabei separat definiert.

6.3.2 Modellannahmen

Fließ- bzw. Versagenskriterium für Beton Für den Beton wird ein klassisches MOHR-COULOMB-Bruchkriterium mit Tension-Cutoff verwendet. Es ist möglich, mit einem isotropen Versagenskriterium anisotropes Materialverhalten abzubilden. Dies geschieht über die Definition einer sehr kleinen Zugfestigkeit, wodurch der Beton sehr früh auf Zug ausfällt und die Anisotropie infolge Rissbildung qualitativ richtig erfasst wird. Das anisotrope Verhalten wird somit über die unterschiedlich großen Versagensspannungen auf Zug und Druck sowie die Definition von elastisch-plastischem Materialverhalten erreicht.

Fließregel Im vorliegenden Modell wird das plastische Fließen sowohl für das RANKINE-Kriterium als auch für das MOHR-COULOMB-Kriterium nicht-assoziert über das MENÉTRY-WILLAM-Fließpotential gesteuert. Die Wahl dieses Potentials ermöglicht eine glatte Fläche und vermeidet damit Unstetigkeitsstellen, die zu numerischen Komplikationen führen können. Die Form der Fläche kann theoretisch über die Wahl der Modellparameter ϵ_t und e_t beeinflusst werden. In ABAQUS ist diese Möglichkeit jedoch nicht implementiert. Die erzeugte Fläche ist geometrisch sehr ähnlich zur RANKINE-Fläche, jedoch ohne scharfe Kanten, weder in der Meridian- noch in der Deviatorebene. Dies führt jedoch dazu, dass der Vektor der plastischen Verzerrungen nicht mehr senkrecht auf der ursprünglichen Fließfläche steht. Dadurch entstehen z.B. beim Fließen nach Erreichen des RANKINE-Kriteriums nicht nur plastische Dehnungen in Richtung der maximalen Zugspannung, sondern auch in den anderen Hauptrichtungen. Abbildung 6.12 veranschaulicht die Fließregel für das RANKINE-Fließkriterium.

Dilatanzwinkel Der Dilatanzwinkel ist bei einem RANKINE-Kriterium ebenso wie einem MOHR-COULOMB-Kriterium nicht eindeutig, da der Zugmeridian einen anderen (kleineren) Winkel mit der hydrostatischen Achse einschließt als der Druckmeridian. Aufgrund der nicht-assozierten Fließregel kommt es zu Abweichungen bei der Dilatanz im Vergleich zum ursprünglich RANKINE-bzw. MOHR-COULOMB-Kriterium. Die größten Abweichungen bei der Dilatanz zum originären RANKINE-

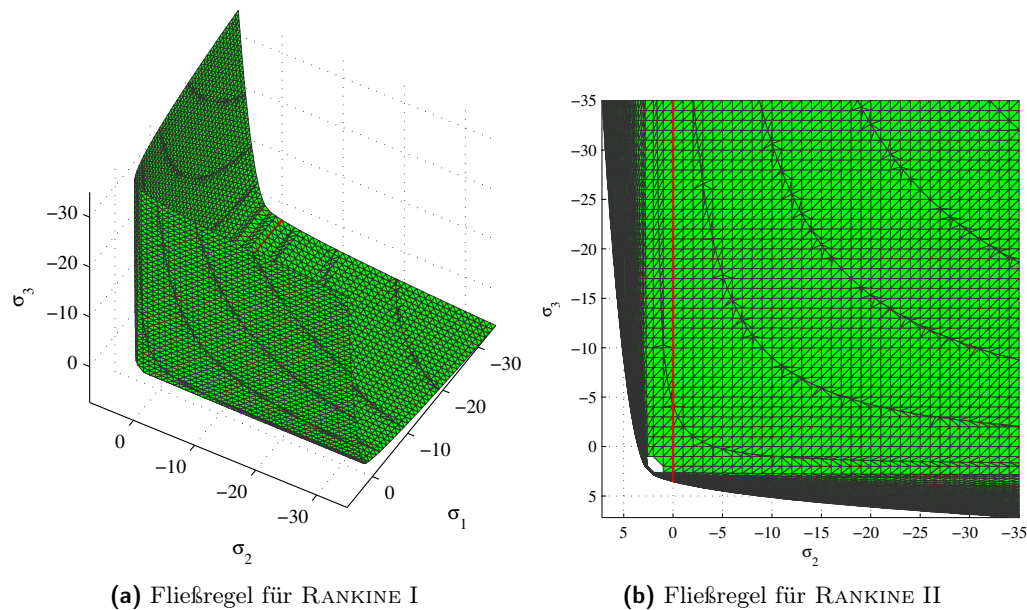


Abbildung 6.12: Umsetzung des RANKINE-Kriteriums mit MENÉTRY-WILLAM-Fließregel

Kriterium treten bei sehr kleinen positiven und insbesondere kleinen hydrostatischen Spannungszuständen auf, da die Kegelspitze abgerundet ist und der plastische Fließvektor stärker in Richtung hydrostatischer Achse gerichtet ist.

Einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Beton Es wird bis zum Erreichen der einaxialen Druckfestigkeit wie auch der Zugfestigkeit von linear-elastischem Materialverhalten ausgegangen, das Modell verhält sich elastisch-plastisch. Es existieren somit weder im Zug- noch im Druckbereich eine Ver- oder Entfestigung. Dies hat den Vorteil, dass keine Netzabhängigkeit infolge einer Entfestigung berücksichtigt werden muss. Um das Rissverhalten, sprich den Ausfall des Betons nach Überschreiten der Zugfestigkeit, dennoch abbilden zu können, wird für die Zugfestigkeit nicht die reale Materialfestigkeit verwendet, sondern diese auf $f_{ct,mod} = 0,05f_{ct}$ begrenzt. Anstatt der Modellierung eines Spannungs-Rissöffnungs-Gesetzes bzw. einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Zug inkl. der Beschreibung eines abfallenden Astes wird dem Beton somit von vornherein nur eine sehr geringe Zugfestigkeit zugewiesen. Der fast vollständige Ausfall des Betons bei Zugspannungen wird im Modell durch eine Umlagerung in die Bewehrung kompensiert. Aus numerischen Gründen kann die Zugfestigkeit nicht zu 0 gesetzt werden, da dann die Spannungsumlagerung nicht mehr möglich ist. Zu beachten ist, dass die Energiedissipation aufgrund der fehlenden Entfestigung nicht zutreffend erfasst werden kann.

Abbildung 6.13 stellt die gewählten Annahmen grafisch dar: Theoretisch steht der plastische Verzerrungsvektor $\dot{\epsilon}$ senkrecht auf der Versagensfläche; die plastischen Verzerrungen entwickeln sich somit z.B. bei Zugversagen nur in Zugrichtung. In der Praxis ist bei ABAQUS jedoch eine ausgerundete Versagensfläche implementiert, die nicht umgangen werden kann. Für die Traglast spielt dieses abweichende Verhalten jedoch keine Rolle.

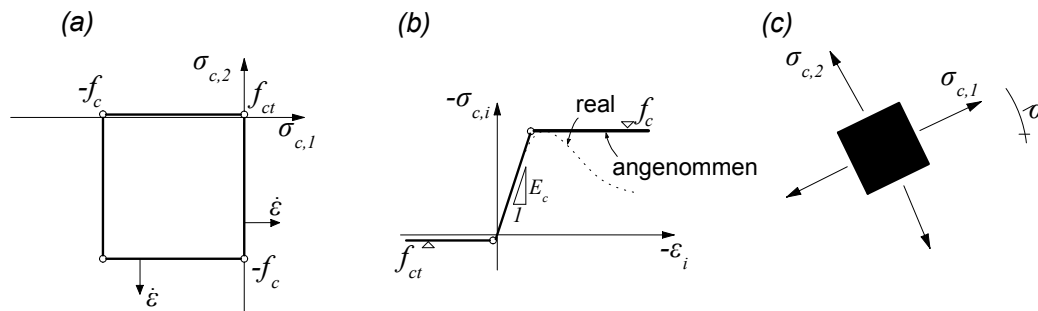


Abbildung 6.13: MCTC-Modell

Rissmodellierung Die Rissmodellierung erfolgt in diesem Modell über das modifizierte Versagenskriterium. Der Beton fällt sehr früh auf Zug aus, die betroffenen Elemente „reißen“ also. Im Anschluss erfolgt im Rahmen der elastisch-plastischen Modellannahmen eine Zunahme der Verzerrungen, ohne Veränderung der Spannungen, die auf dem Niveau der modifizierten Zugfestigkeit $f_{ct,mod}$ verbleiben. Es handelt es sich somit auch hier um ein verschmiertes Rissmodell.

Druckfestigkeit von gerissenem Beton Die Druckfestigkeit von Beton wird in diesem Modell nicht von den Querspannungen beeinflusst, d.h. es existiert keine Abminderung der Druckfestigkeit infolge von Querspannungen.

Materialparameter für Beton Als Materialparameter werden nur die Kenngrößen für das linear-elastische Materialverhalten sowie für das MOHR-COULOMB-Kriterium mit Tension Cut Off benötigt. Dies sind E-Modul und Querdehnzahl sowie der Reibungswinkel und die Kohäsion für das MOHR-COULOMB-Bruchkriterium im Druckbereich und die modifizierte Zugfestigkeit für das Tension Cut Off.

Berücksichtigung von Bewehrung Die Berücksichtigung der Bewehrung ist essentiell für das Modell, da ansonsten keinerlei Zugspannungen übertragen werden können. Die Bewehrung wird wie bei dem CDP-Modell diskret über die Embedded-Elements-Methode modelliert.

6.3.3 Validierung durch Nachrechnung der Scheibenversuche von KUPFER

Die Nachrechnung der Scheibenversuche von KUPFER bestätigen die theoretischen Modellannahmen. Die Zunahme der Druckfestigkeit infolge von zweiachsialen Druckspannungszuständen kann mit dem MCTC-Modell nicht abgebildet werden. Das Tension Cut Off-Kriterium führt zu dem erwünschten Effekt, dass nur sehr geringe Zugspannungen übertragen werden können, der Beton also direkt aufreißt. Damit können die KUPFER-Versuche an Scheibenversuchen aus unbewehrtem Beton erwartungsgemäß nicht zutreffend abgebildet werden. Für die Modellierung von Stahlbeton ist das Modell jedoch geeignet.

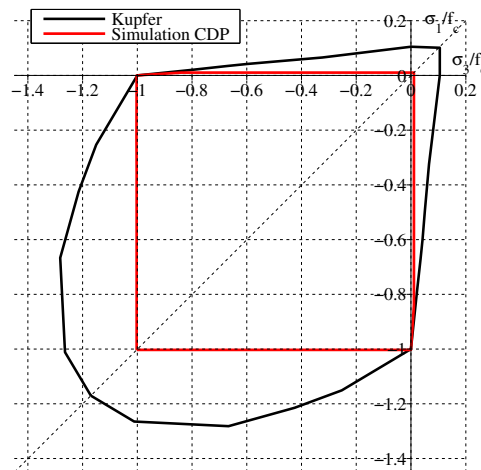


Abbildung 6.14: Vergleich der KUPFER-Kurve mit dem MCTC-Modell

Zusammenfassung und Bewertung des Modells Das neu entwickelte MCTC-Modell auf Basis der isotropen Plastizitätstheorie ist kein orthotropes Modell im mechanischen Sinn, kann jedoch die Anisotropie durch einige Modifikationen des isotropen Ansatzes abbilden:

- isotropes Bruchkriterium mit unterschiedlich großen Festigkeiten in Druck und Zugrichtung (MOHR-COULOMB mit Tension Cut Off)
- Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit
- elastisch-plastische Spannungs-Dehnungslinie
- keine Entfestigung und keine Notwendigkeit der Regularisierung
- Zusammenwirken von Beton und Bewehrungsstahl

Der Vorteil des Modells liegt darin, dass auch nach Rissbildung in einem Element, sprich nach Überschreiten der Zugfestigkeit, die Druckfestigkeit in die andere Richtung im Gegensatz zum in ABAQUS implementierten Materialmodell für Beton, Concrete Damaged Plasticity, nicht abgemindert wird, da ein elastisch-plastisches Verhalten definiert wird. Das Element kann somit in vollem Umfang Druckspannungen übertragen. Eine direkte Berücksichtigung einer Abminderung infolge Querszug, wie z.B. beim EPSF-Modell, kann nicht berücksichtigt werden. Allerdings kann dies über eine manuelle Kontrolle der Druckspannungen in den querkräftbeanspruchten Bereichen erfolgen, was im Rahmen dieser Arbeit bei der Nachrechnung von Versuchen auch geschieht. Wie das EPSF-Modell, verhält sich auch dieses Modell im Vergleich zu realen Versuchen zunächst zu weich, da die Querschnitte aufgrund der extrem geringen Zugfestigkeit sehr schnell aufreißen. Im weiteren Belastungsverlauf verhält sich das Modell dann zu steif, da die Annahme des linear-elastischen Materialverhaltens bis zum Erreichen der Druckfestigkeit den Steifigkeitsverlust des Betons nicht zutreffend abbildet. Wie in späteren Kapiteln gezeigt wird, ist das Modell trotz des vergleichsweise einfachen Materialgesetzes in der Lage, die realen großmaßstäblichen Versuche gut abzubilden.

6.4 Zweidimensionales Smeared Crack Modell SBETA

6.4.1 Einleitung

Neben den beiden dreidimensionalen Materialmodellen auf Basis der Plastizitätstheorie werden auch zwei zweidimensionale Materialmodelle untersucht. Bei dem Materialmodell „SBETA“ (Abkürzung für Stahlbetonanalyse) von ATENA handelt es sich um ein klassisches Smeared Crack Modell. Hierbei wird im Rahmen der Rissbildung die Steifigkeitsmatrix orthotrop. Das nichtlineare Verhalten des Betons auf Druck wird bis zur Versagensspannung mit dem schon vorgestellten Konzept der äquivalenten einaxialen Dehnungen abgebildet, s. Abschnitt 4.2.4. Die folgenden Ausführungen sind dem ATENA Theory Manual, [15], entnommen.

6.4.2 Modellannahmen

Einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Beton Für die einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Beton unter Druckbeanspruchung kommt die Formel aus dem MODEL CODE 1990 zur Anwendung. Nach Erreichen der Maximalspannung wird das entfestigende Verhalten mit dem „Fictitious Compression Plane Model“ abgebildet, das ähnlich wie das „Fictitious Crack Model“ in Kombination mit der Rissbandtheorie funktioniert. Das Verhalten des Betons unter Zugspannungen wird vor Erreichen der Zugfestigkeit linear-elastisch approximiert, anschließend erfolgt die Abbildung des abfallenden Astes mit dem „Fictitious Crack Model“ auf Basis einer Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung und der Bruchenergie in Kombination mit dem Rissbandmodell. Für die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung wird die schon bekannte Formulierung von HORDIJK [44] verwendet.

Versagenskurve Bei der Versagenskurve wird die KUPFER-Kurve verwendet. Eingangswerte sind die einaxiale Zylinderdruckfestigkeit sowie die einaxiale Zugfestigkeit. Es werden vier Bereiche mit unterschiedlichen Spannungszuständen definiert, die durch entsprechende Bestimmungsgleichungen für die Modifikation der Spannungen in Richtung 1 infolge einer Spannung in Richtung 2 abgebildet werden.

Rissmodellierung Die Modellierung der Risse erfolgt wie oben erläutert auf Basis des klassischen Smeared Crack Ansatzes, d.h. mit einem orthotropen Materialgesetz, basierend auf der Crack-Band-Theorie. Es sind sowohl ein Rotated Crack Model, also ein Modell mit rotierenden Rissen, bei dem die Hauptspannungs- mit der Hauptverzerrungsrichtung übereinstimmt, als auch ein Fixed Crack Modell mit feststehenden Rissen, über die bei einer Rotation der Spannungen Schubkräfte übertragen werden müssen, verfügbar. Für die Rissbandbreite in Zug- und Druckrichtung, der charakteristischen Länge, wird ein von CERVENKA ET AL.[?] entwickelte Ansatz verwendet, der sowohl den Effekt der Elementgröße als auch der Elementorientierung berücksichtigen soll, s. Abbildung 6.16. Hiernach wird als Länge des Rissbandes die Projektion der Abmessungen des finiten Elementes orthogonal zur Rissrichtung vorgeschlagen. Falls das Netz sehr unregelmäßig ist, wird die Rissbandbreite mit folgender Gleichung modifiziert:

$$L'_t = \gamma L_t, \quad L'_d = \gamma L_d \quad \text{mit} \quad \gamma = 1 + (\gamma^{max} - 1) \frac{\theta}{45} \quad (6.20)$$

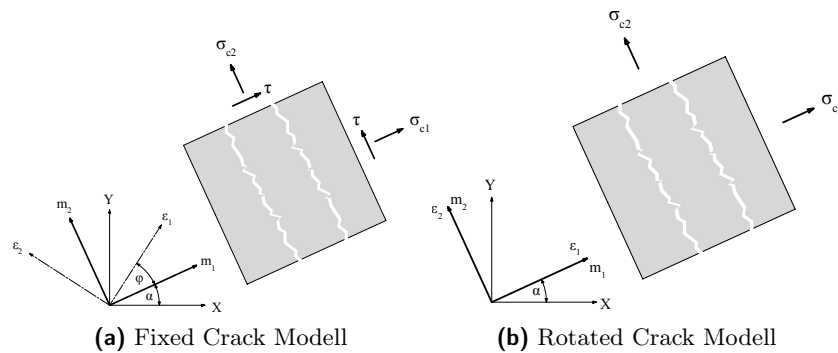


Abbildung 6.15: Fixed und Rotated Crack Modell

Der Winkel γ beschreibt hierbei den Winkel zwischen der Normalenrichtung des Risses und den Elementkanten.

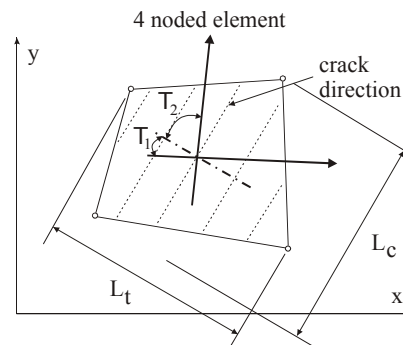


Abbildung 6.16: Definition der Rissbandbreite [15]

Shear Retention Faktor Aufgrund der nach Rissinitierung feststehenden Rissrichtung wird beim Fixed Crack Modell ein Schubmodul benötigt, um bei einer Rotation der Hauptspannungsrichtung Schubspannungen über den feststehenden Riss übertragen zu können. Hierzu kann ein konstanter Faktor verwendet werden. Da jedoch basierend auf WALRAVENS[102] Arbeiten bekannt ist, dass die Fähigkeit, Schubspannungen über den Riss zu übertragen, mit zunehmender Rissöffnung kleiner wird, existieren empirische Ansätze zur Erfassung dieses Effektes. Bei dem SBETA-Modell von ATENA wird ein Ansatz nach KOLMAR[54] verwendet, der von den Zugdehnungen quer zum Riss, also der Rissöffnung im FEM-Modell, und dem Bewehrungsgrad abhängig ist.

Der Schubmodul G^* ist dann wie folgt definiert:

$$G^* = r_g G$$

$$r_g = c_3 \frac{-\ln\left(\frac{1000\varepsilon_{tt}}{c_1}\right)}{c_2} \quad (6.21)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen vom Bewehrungsgrad ab, die Konstante c_3 wird als „User’s scaling factor“ bezeichnet und ist standardmäßig gleich 1,0. In ATENA wird die Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad nicht berücksichtigt, so dass sich die Konstanten zu $c_1 = 5,33$ und $c_2 = 10,835$

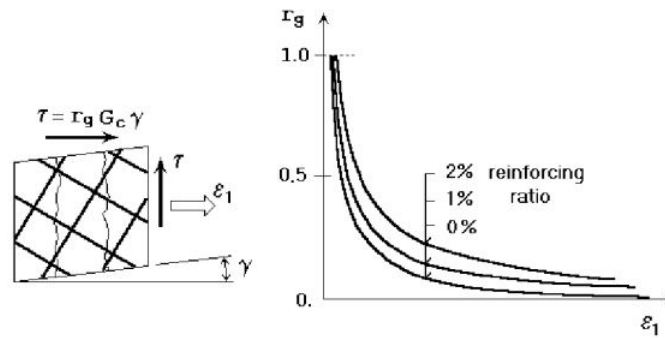


Abbildung 6.17: Definition des Shear Retention Faktors [15]

ergeben. Als Randbedingung ist ferner definiert, dass die Schubspannungen im Riss nicht größer als die Zugfestigkeit werden dürfen.

Druckfestigkeit von gerissenem Beton Ähnlich zum Ansatz von VECCIO & COLLINS wird auch in ATENA die Druckfestigkeit parallel zu den Rissen reduziert. Allerdings wird nicht die Formulierung nach VECCIO & COLLINS[100] verwendet, sondern eine Formulierung, die auf Versuchsdaten von KOLLEGER[53] unter Berücksichtigung der Daten von VECCIO & COLLINS abgeleitet wurde. Für die abgeminderte Druckfestigkeit ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$f_c^{ef} = r_c f_c' \quad r_c = c + (1 - c)e^{(-128\varepsilon_u)^2} \quad (6.22)$$

Die Abminderung erfolgt abhängig von der lateralen Zugdehnung. Standardmäßig wird die Druckfestigkeit im SBETA-Modell auf minimal $0,8f_c$ abgemindert.

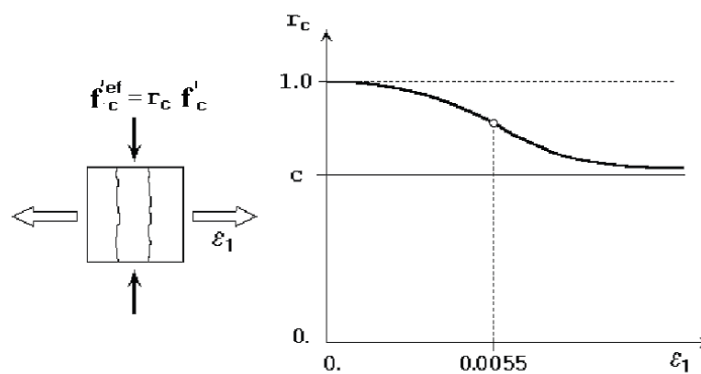


Abbildung 6.18: Abminderung der Druckfestigkeit infolge Quersugdehnungen [15]

Berücksichtigung von Bewehrung Bei der Modellierung von Stahlbeton kann die Bewehrung entweder verschmiert oder diskret als Stab berücksichtigt werden. Um bei den verwendeten Modellierungen von Stahlbetonbalken mit unterschiedlichen Beton-Materialgesetzen möglichst eine einheitliche Basis zu haben, wird die Modellierung mit diskreten Stäben gewählt.

6.4.3 Validierung durch Nachrechnung der Scheibenversuche von Kupfer

Die Nachrechnung der KUPFER-Versuche erfolgt auch hier mit einem symmetrischen Teilsystem und lastgeregelt. Die Bruchlasten der Nachrechnung der KUPFER-Versuche stimmen sehr gut mit den singulären Versuchswerten überein. Leichte Abweichungen ergeben sich zu der von KUPFER selbst vorgeschlagenen Approximation durch eine Ellipse. Im Druck-Zug-Bereich liegen die Bruchlasten von ATENA bei hohen Druckspannungen sogar höher als die Versuchswerte. Analysiert man die

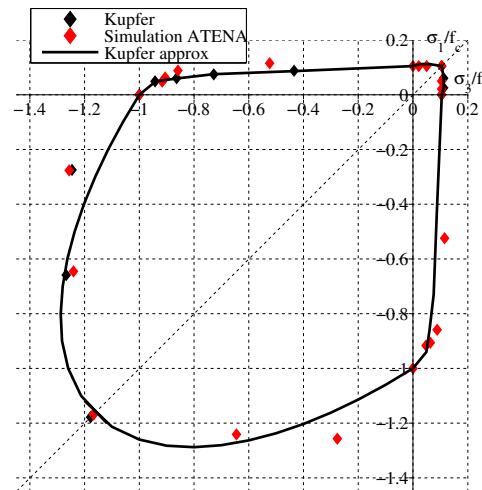


Abbildung 6.19: Bruchkurve ATENA im Vergleich mit KUPFER

Last-Verformungs-Kurven für die unterschiedlichen Spannungsverhältnisse, fällt allerdings auf, dass die Simulationen mit ATENA deutlich steifer verlaufen, fast linear bis zum Erreichen der Bruchlast, wie beispielhaft Abbildung 6.20 zeigt.

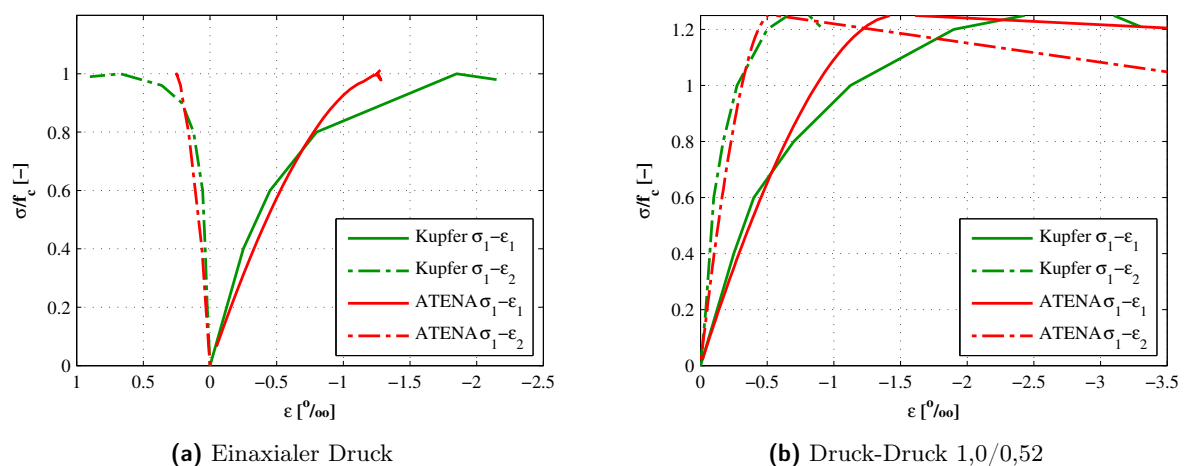


Abbildung 6.20: Spannungs-Dehnungslinien ATENA unter verschiedenen Druckspannungsverhältnissen

6.5 Modell auf Basis der Elasto-Plastischen Spannungsfeldmethode

6.5.1 Einleitung

An der EPFL Lausanne wurde ein zweidimensionales Finite-Elemente-Modell für Stahlbetonstrukturen auf Basis der Elasto-Plastischen-Spannungsfeldtheorie (EPSF) entwickelt [26]. Dieses ist unter dem Namen „iconc“ als Java-Applet sowie auch als Stand-alone-Lösung unter dem Namen „jconc“ frei verfügbar. Die Nachrechnung diverser Stahlbetonstrukturen hat gute Übereinstimmungen mit den Versuchsergebnissen gezeigt, vgl. z.B. [26].

6.5.2 Einführung in Spannungsfeldmodelle

Zum besseren Verständnis des Modells erfolgt zunächst eine kurze Einführung in die Theorie der Spannungsfeldmethode. Sie wird an einem Stahlbetonquerschnitt hergeleitet, also unter Berücksichtigung der Bewehrung, und hat einen engen Bezug zur Plastizitätstheorie. Stabwerk- und Spannungsfeldmodelle sind statisch gleichwertige Modelle, unterscheiden sich jedoch in Bezug auf den Grad der Idealisierung. Die Modellvorstellung beruht auf dem Gleichgewicht eines geneigten Spannungsfeldes, das nur Druckspannungen aufnehmen kann, sowie der Querkraftbewehrung, die nur Zugkräfte aufnimmt. Zusätzlich zu den Kräftegleichgewichtsbedingungen können auch Verträglichkeitsbedingungen berücksichtigt werden. Eine Übersicht über Spannungsfeldmodelle findet sich beispielsweise in [76], [67], [32], [50].

Zwischen der Fachwerkanalogie und dem Spannungsfeldmodell gibt es Parallelen, aber auch Unterschiede. Beispielsweise wird in den ursprünglichen Spannungsfeldmodellen angenommen, dass die Tragfähigkeit des Druckspannungsfeldes gleichzeitig mit dem des Zugspannungsfeldes erreicht wird, indem sich die Neigung des Druckspannungsfeldes variabel anpasst. Diese ist somit nicht identisch mit dem Risswinkel. Dem gegenüber wird in den meisten Fachwerkmodellen von einer bestimmten, feststehenden Rissneigung, die der Druckstrebenneigung im Fachwerk entspricht, sowie von einem zusätzlichen Betontraganteil ausgegangen. Dieser wird je nach Modell unterschiedlichen Tragmechanismen zugerechnet, z.B. der Übertragung von Schubkräften über Rissreibung, einem Betontraganteil über eine Sprengwerk- oder Bogenwirkung oder einem zusätzlicher Schubkraftanteil im Obergurt des Fachwerkes. Es existieren verschiedene Ansätze, die beiden Modellvorstellungen ineinander zu überführen.

Elastisch-gerissene Spannungsfelder Bei elastisch-gerissenen Spannungsfeldern werden die Materialien Stahl und Beton als linear-elastisch angesehen, die Betonzugfestigkeit jedoch komplett vernachlässigt. Die Grundidee geht auf KUPFER [56] und seine Erweiterung der MÖRSCHSchen Fachwerkanalogie zurück, bei der er mittels des Prinzips der Formänderungsarbeit einen von 45° abweichenden Druckstrebenwinkel ermittelt hat. Aufgrund der fehlenden Festigkeitsbegrenzung findet das Modell in der Praxis jedoch keine Anwendung [91].

Starr-plastische Spannungsfelder Die starr-plastischen Spannungsfeldmodelle werden auch als klassische Spannungsfeldmodelle bezeichnet und gehen u.a. auf Arbeiten von NIELSEN ET AL [79] sowie THÜRLIMANN [97] zurück. Im Rahmen der klassischen Spannungsfeldmodelle werden fikti-

ve, frei drehbare Risse mit infinitesimalem Rissabstand betrachtet. Die Risse sind spannungsfrei und verlaufen parallel zur Hauptdruckspannungsrichtung. Somit sind die Hauptspannungs- und Hauptverzerrungsrichtung identisch [50]. Das Materialverhalten von Beton und Stahl wird hierbei unter Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit als starr-plastisch formuliert, d.h. letztlich wird hier lediglich das Kräfte- oder Spannungsgleichgewicht ohne Berücksichtigung von Verträglichkeitsbedingungen beachtet. Klassische Spannungsfelder entsprechen daher der Lösung gemäß dem unteren oder statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie, wonach jede Belastung kleiner oder gleich der Traglast ist, die zu einem statisch zulässigen Spannungszustand korrespondiert, der die Fließbedingungen nicht verletzt. Der Querkraftwiderstand wird durch das gleichzeitige Erreichen der

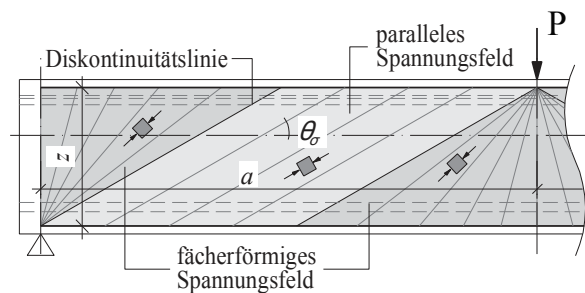


Abbildung 6.21: Starr-plastisches Spannungsfeld (aus [91])

Tragfähigkeit der Querkraftbewehrung sowie des geeigneten Betondruckspannungsfeldes bestimmt. Der Nachteil dieses Modells ist, dass die Verzerrungen von Beton und Stahl nicht bekannt sind. Unter der Prämisse, dass die Stegdruckfestigkeit infolge von Querdehnungen abgemindert wird, führt die Anwendung der klassischen Spannungsfeldmethode zu Problemen bzw. erfordert im Vorfeld eine entsprechende konservative Abminderung der Betondruckfestigkeit.

Erweiterte starr-plastische Spannungsfelder Um den o.g. Nachteil der starr-plastischen Spannungsfelder zu beheben, werden im Rahmen der erweiterten, oder auch Verallgemeinerten Spannungsfeldmodelle (VSF) Verformungsverträglichkeitsbedingungen einbezogen. Dies erfolgt über die Betrachtung der als Unbekannte definierten Verzerrungen ε_x , ε_z und ε_3 am MOHRschen Verzerrungskreis. Die Gleichgewichtsbedingungen können dann in Abhängigkeit von den unbekanntenen Verzerrungen ausgedrückt werden. Hierfür müssen die Materialgesetze von Beton und Bewehrung bekannt sein bzw. Vorgaben für die Verzerrungen gemacht werden, z.B. für die maximale Druckstauchung des Betons ε_3 . Es werden weitere Annahmen für die Werte der anderen unbekanntenen Verzerrungen getroffen. Für die Dehnung in Richtung der Bügelbewehrung kann beispielsweise die Fließdehnung gesetzt werden. Die Trägerlängsdehnung ε_x wird an einem bestimmten Punkt im Steg bestimmt, meist die halbe Steghöhe. Eine Möglichkeit ist dabei, vom Ebenbleiben der Querschnitte auszugehen, so dass die Trägerlängsdehnung z.B. aus der Druckgurtstauchung und der Zuggurtdehnung ermittelt werden kann [91]. Das Ziel der erweiterten starr-plastischen Spannungsfelder ist neben der Berechnung der Traglast u.a. die Ermittlung der Druckfeldneigung, die vom Verzerrungszustand abhängt. Die erweiterten Spannungsfeldmodelle haben einen direkten Bezug zur Plastizitätstheorie, da Grenzdehnungen verwendet werden, sprich davon ausgegangen wird, dass die Tragwiderstände gleichzeitig sowohl auf Druck als auch Zug erreicht werden. Dies ist auch einer der Nachteile der

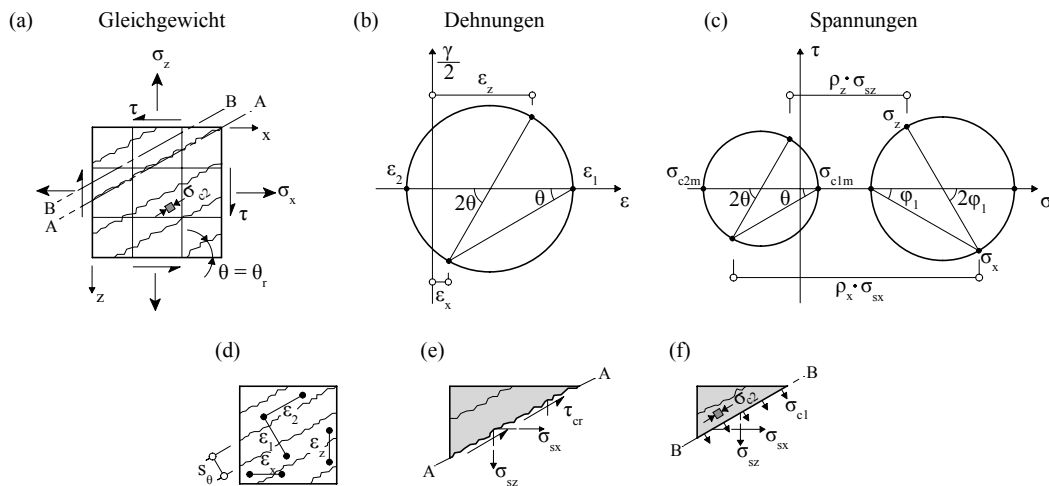


Abbildung 6.22: Annahmen der MCFT (aus [58])

Theorie, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass bei Erreichen des Querkraftwiderstandes sowohl die Beton- als auch die Bewehrungstragfähigkeit erreicht wird.

Modified Compression Field Theory Die von VECCHIO/COLLINS[100] entwickelte MODIFIED COMPRESSION FIELD THEORY berücksichtigt neben nichtlinearen Materialgesetzen und dem Einfluss der Querdehnung auf die Betondruckfestigkeit bei gerissenen Stahlbetonscheiben auch die Verbundwirkung, die in den klassischen Spannungsfeldmodellen vernachlässigt wird. Die Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen werden hier am Verbundwerkstoff auf Basis von mittleren Spannungen hergeleitet. Diese Annahmen wurden anhand von Versuchen bestimmt und stellen somit eine empirische Komponente dar, während die elasto-plastische Spannungsfeldmethode bis auf die Gleichung zur Berücksichtigung des Einflusses der Querdehnung rein mechanisch motiviert ist.

Elasto-plastische Spannungsfelder (EPSF) Eine Weiterentwicklung der starr-plastischen Spannungsfeldmethode stellt die elasto-plastische Spannungsfeldmethode dar. Hierbei werden elasto-plastische Materialgesetze für Beton und Stahl separat definiert, die Betonzugfestigkeit wird wiederum vernachlässigt, ebenso wie die POISSONSche Querdehnzahl. Auch hier wird angenommen, dass die Richtungen der Hauptverzerrungen und Hauptspannungen übereinstimmen. Als Eingangswerte dienen die Hauptverzerrungen ε_1 und ε_3 , mit denen die Spannungen ermittelt werden.

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \quad (6.23)$$

Diese sind abhängig von beiden Hauptdehnungen ε_1 und ε_2 und werden auf Basis der elasto-plastischen Materialgesetze definiert. Hierbei wird der Einfluss der Querdehnung auf die Betondruckfestigkeit auf Basis der von VECCHIO/COLLINS[100] empirisch ermittelten Gleichung ermittelt:

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{0,8 + 170 \cdot \varepsilon_1} \quad (6.24)$$

Ferner wird die Betondruckfestigkeit aufgrund des spröden Bruchverhaltens bei hohen Festigkeiten gemäß [75] zusätzlich abgemindert:

$$\eta_{fc} = \left(\frac{30}{f_c}\right)^{1/3} \leq 1,0 \tag{6.25}$$

Ebenso wie beim MCTC-Modell werden nur die einaxialen Festigkeiten berücksichtigt; die höhere Druckfestigkeit unter zweiaxialen Druckspannungszuständen, die sich in der KUPFER-Kurve zeigt, kann nicht abgebildet werden. Abbildung 6.23 stellt die Modellannahmen für den Beton grafisch dar.

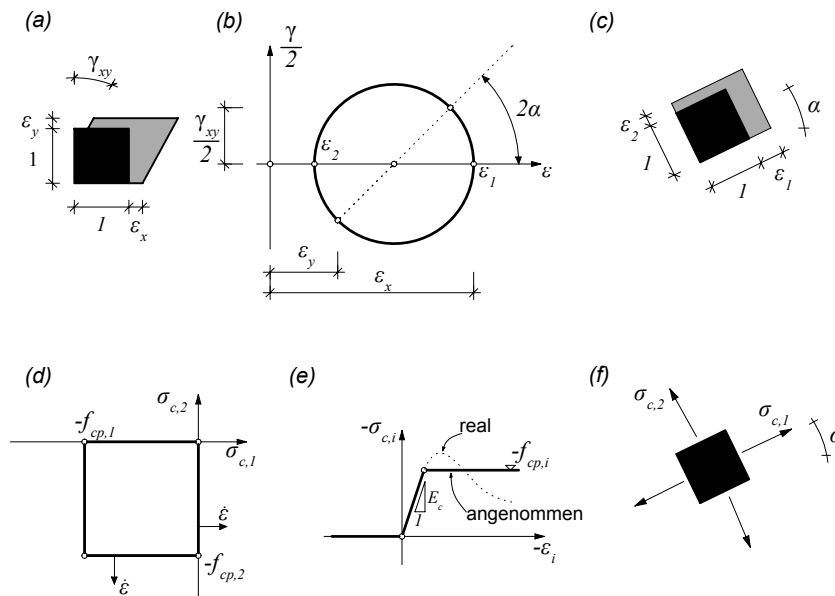


Abbildung 6.23: Elasto-Plastisches Spannungsfeldmodell (aus [26])

Die Materialeigenschaften des Stahl werden bilinear, also elastisch-plastisch mit Verfestigung definiert.

6.5.3 Numerische Umsetzung der elasto-plastischen Spannungsfeldmethode (EPSF)

Die Annahmen der elasto-plastischen Spannungsfeldmethode wurden numerisch im an der EPFL entwickelten zweidimensionalen FE-Modell im Programm „iconc“ bzw. „jconc“ umgesetzt[26]. Die Verträglichkeitsbedingungen können so in jedem finiten Element des Stahlbetonbauteils berücksichtigt werden. Damit wird die Genauigkeit entscheidend gegenüber den anderen Modellen verbessert, die von mittleren Verzerrungen in Kontrollpunkten ausgehen. Für die Modellierung werden lineare Dreieckselemente für den ebenen Spannungszustand verwendet.

Einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehungen für Beton Wie bereits erwähnt, wird elastisch-plastisches Materialverhalten unter Berücksichtigung des Einflusses der Querdehnung auf die

Druckfestigkeit definiert. Die Steifigkeitsdegradation auf Druck wird somit vernachlässigt. Die Betonzugfestigkeit wird bis auf einen numerisch erforderlichen Wert vernachlässigt.

Materialparameter für Beton Es werden lediglich die Betondruckfestigkeit als Zylinderdruckfestigkeit sowie der E-Modul benötigt.

Versagenskurve Das Versagen wird nicht über eine zweiachsig Abhängigkeit der Spannungsverhältnisse, wie bei KUPFER, sondern die Druckfestigkeit in Abhängigkeit der Querdehnung definiert. Dies führt zu einer Entkopplung der Gleichungen. Die Versagenskurve hat die Form aus Abbildung 6.23.

Rissmodellierung Aufgrund der verschwindend geringen Zugfestigkeit ohne Definition eines abfallenden Astes sind die Risse als verschmierte Risse modelliert. Das Modell verhält sich ähnlich wie ein Rotated Crack Modell, da die Richtungen der Hauptverzerrungen sich mit denen der Hauptspannungen mitdrehen.

Druckfestigkeit von gerissenem Beton Die Druckfestigkeit des gerissenen Betons wird mit Gleichung 6.24 abgemindert. Die Abminderungen können bei entsprechend großen Dehnungen beträchtlich sein. Bei einer Querdehnung von $\varepsilon_1 = 10\%$ ergibt sich beispielsweise $\eta_\varepsilon = 0,4$. Es stellt sich die Frage, ob eine Abminderung in der Größenordnung realistisch ist bzw. ob die im numerischen Modell aufgrund des verschmierten Rissansatzes in Kombination mit den elastisch-plastischen Materialgesetzen auftretenden Dehnungen zu überhöhten Abminderungen führen.

Elementwahl Zur Modellierung des Betons kommen lineare Dreieckselemente für den ebenen Spannungszustand zur Anwendung.

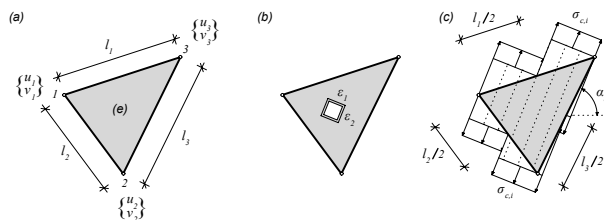


Abbildung 6.24: Dreieckselement für Beton

Berücksichtigung von Bewehrung Die Bewehrung wird mit Stabelementen diskret definiert. Hierbei müssen die Stabelemente auf den Kanten der Betonelemente liegen und die Knoten übereinstimmen.

6.5.4 Validierung durch Nachrechnung der Scheibenversuche von Kupfer

Ebenso wie das MCTC-Modell ist das EPSF-Modell aufgrund der fehlenden Betonzugfestigkeit nur sinnvoll bei Stahlbetonstrukturen anwendbar, bei denen die Bewehrung die Zugspannungen aufnehmen kann. Die Nachrechnung der KUPFER-Versuche führt auf Abbildung 6.23(d).

Kapitel 7

Nachrechnung von Großversuchen unter Querkraftbeanspruchung

Zur Analyse und Bewertung der Güte verschiedener Konzepte für die Struktur- und Materialmodellierung in Bezug auf die Abbildung des Querkrafttragverhaltens werden fünf Versuche mit den vorgestellten Materialmodellen nachgerechnet. Im folgenden werden diese Versuche kurz vorgestellt. Weitere Details zu den Versuchen können den Originalquellen entnommen werden. Im Anschluss erfolgt die Nachrechnung mit den verschiedenen Materialmodellen sowie ein Vergleich der Versuchsergebnisse.

7.1 Einleitung

Im Rahmen dieser Arbeit werden fünf Versuchsbalken nachgerechnet und in Bezug auf das Querkrafttragverhalten analysiert. Zum einen soll herausgearbeitet werden, inwiefern sich die vorgestellten Materialmodelle zur Abbildung des Querkrafttragverhaltens eignen, zum anderen werden aus dem Modelltragverhalten Rückschlüsse auf das reale Bauteilverhalten gezogen. Es werden im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich Versuche mit Querkraftbewehrung analysiert, da von den vier bzw. fünf Materialmodellen zwei aufgrund ihres Ansatzes nicht in der Lage sind, Querkraftversagen ohne Schubbewehrung abzubilden (das Modell auf Basis der elasto-plastischen Spannungsfeldtheorie, EPSF, sowie das isotrope Plastizitätsmodell auf Basis eines modifizierten MOHR-COULOMB-Kriteriums, MCTC). Es handelt sich um fünf Plattenbalken, die alle ein Querkraftversagen in Form von Biegeschub- oder Schubzugversagen aufwiesen. Da analytische Modelle insbesondere bei niedrigen Querkraftbewehrungsgraden Defizite aufweisen, und im Rahmen von Brückennachrechnungen insbesondere Tragreserven für diese Fälle von Interesse sind, liegt der Fokus auf Balken mit vergleichsweise niedrigem Schubbewehrungsgrad.

Versuchskenngrößen Zur besseren Vergleichbarkeit und Klassifikation der Versuche werden folgende dimensionslose Kenngrößen eingeführt:

- der geometrische Längsbewehrungsgrad ρ_l :

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \quad [-] \quad (7.1)$$

- der geometrische Schubbewehrungsgrad ρ_w :

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s_w} \quad [-] \quad (7.2)$$

- der mechanische Schubbewehrungsgrad ω_w :

$$\omega_w = \rho_w \cdot \frac{f_{yw}}{0,8 \cdot f_{1c}} \quad [-] \quad (7.3)$$

- die dimensionslose Bruchquerkraft $v_{u,Test}$:

$$v_{u,Test} = \frac{V_{u,Test}}{b_w \cdot z \cdot f_{cw}} \quad (7.4)$$

mit $f_{cw} = 0,8 \cdot f_{1c}$ als Stegdruckfestigkeit gem. fib-Recommandations (s. [28, S. 1-10])

und $z = 0,9 \cdot d$

- der theoretische Druckstebenwinkel $\cot \theta$:

$$\cot \theta = \frac{v_{u,Test}}{\omega_w} \quad (7.5)$$

Umrechnung von Materialkenngrößen Für die Nachrechnung mit der FEM werden je nach Materialmodell unterschiedliche Materialparameter benötigt. In der Regel liegen aus den Versuchen die Würfel- oder Zylinderdruckfestigkeit, selten die zentrische, sondern meist entweder die Spaltzug- oder Biegezugfestigkeit, und die Stahlzugfestigkeit bzw. die Streckgrenze sowie der E-Modul des Stahls vor. Falls für das Modell erforderliche Materialparameter nicht vorhanden sind, werden diese aus vorhandenen Werten zurückgerechnet. Dabei werden die Umrechnungsformeln aus [28] verwendet. Die wichtigsten Umrechnungen sind in Anhang B dokumentiert.

7.2 Vorstellung der betrachteten Versuchsserien

7.2.1 Versuchsserie 1: Plattenbalken ET2 & ET3 von Leonhardt/Walter

Im Jahre 1962 führten LEONHARDT/WALTER eine Vielzahl von Schubversuchen an Balken mit und ohne Schubbewehrung zur genaueren Analyse der Einflüsse auf das Schubtragverhalten durch[63]. Eine Fragestellung war der Einfluss der Stegbreite auf die Schubtragfähigkeit von T-Balken mit schwacher Bügelbewehrung, die im Rahmen der Versuchsreihen „ET“ und „GT“ untersucht wurde. Die Versuche der „ET“-Reihe wurden als Vierpunkt-Versuche mit zwei Einzellasten durchgeführt, die „GT“-Reihe wurden mit einer Gleichlast beansprucht. Zwei der dort getesteten Balken, die Balken ET2 und ET3, werden hier für die numerischen Simulationen herangezogen.

Versuchsaufbau Bei den hier untersuchten Versuchsbalken handelt es sich um Plattenbalken mit einer Gesamthöhe von 350mm, einer Plattenbreite von 300 mm, einer Plattendicke von 75mm sowie den Stegbreiten 100mm bzw. 150mm. Die Spannweite betrug 3,00m. Die Balken wurden mit zwei Einzellasten bis zum Bruch belastet. Die Lagerung erfolgte auf beiden Seiten mit frei drehbaren und längsverschieblichen Rollen. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 7.1 dargestellt.

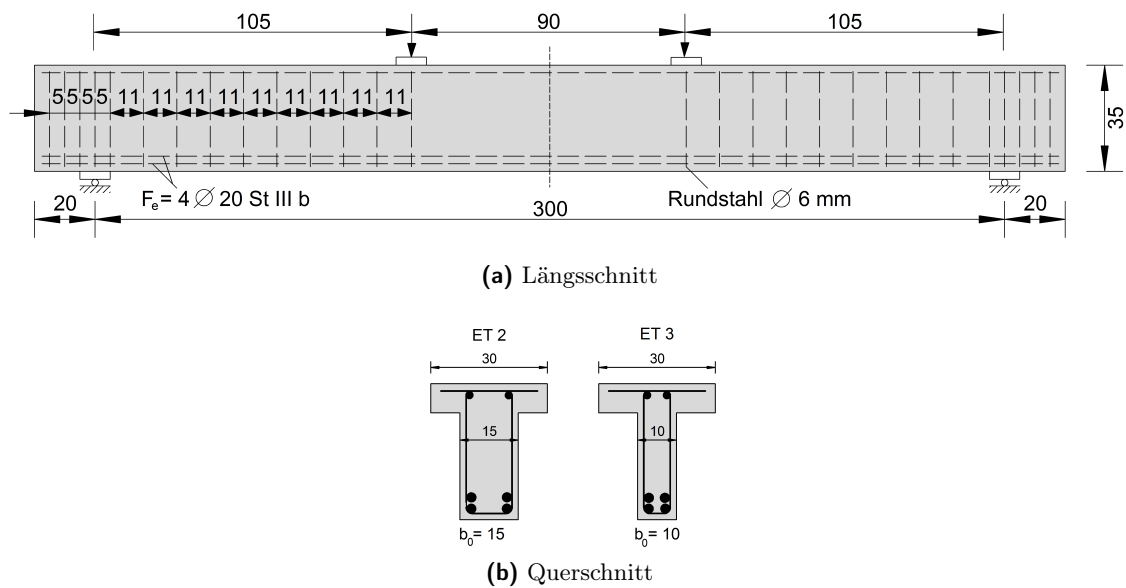


Abbildung 7.1: Versuchsträger ET-Serie

Materialkennwerte Die Würfeldruckfestigkeit, die Zylinderdruckfestigkeit sowie die Biegezugfestigkeit wurden als Mittelwerte von Betonproben einheitlich für die Serie dokumentiert, s. Tabelle 7.1. Die Balken wurden mit senkrechten Bügeln bewehrt, die nach damaligem Kenntnisstand etwa für die halbe Schubkraft bemessen waren. Die zweischnittigen Bügel aus Rundstahl mit $\phi = 6,0$ mm der Betonstahlgruppe I wurden im Schubbereich im Abstand von 11 cm angeordnet und waren im Druckbereich rechtwinklig abgebogen. Die unten liegende Längsbewehrung bestand aus $4\phi 20$ der Güte BSt IIIb. Dies entspricht einem Längsbewehrungsgrad von 1,36%. Die Materialeigenschaften der Bewehrung sind in Tabelle 7.2 angegeben.

Tabelle 7.1: Betonkennwerte Balken ET2 & ET3

	$f_{c,cube}$ [MN/m ²]	$f_{c,cyl}$ [MN/m ²]	$f_{ct,bz}$ [MN/m ²]	f_{ctm} [MN/m ²]
ET2	28,5	26,2	4,19	2,52
ET3	28,5	26,2	4,19	2,52

Tabelle 7.2: Materialparameter des Bewehrungsstahls ET2 & ET3

	f_y [MN/m ²]	f_u [MN/m ²]	E_s [MN/m ²]
$\phi 6$	320	408	200000
$\phi 20$	428	535	200000

Rissbild und Versagen Beide Balken versagten erwartungsgemäß auf Schub, der Balken ET2 bei einer Maximallast von 263 kN, der Balken ET2 bei 255 kN. Während es sich bei dem Balken ET2 um einen Biegeschubbruch handelte, d.h. die Druckzone aufgrund des Hineinwachsens eines Schubrisses zerstört wurde, trat bei Balken ET3 ein Grenzfall zwischen den Brucharten Biegeschubbruch und Schubzugbruch auf. Zwar wurden auch hier die maximalen Druckstauchungen von $\varepsilon_{cu} \geq 3\text{‰}$ neben der Lastplatte überschritten, gleichzeitig stellte sich jedoch auch eine Zerstörung des Steges in der linken unteren Balkenhälfte ein. In beiden Fällen war das Fließen der Bügel zu beobachten, laut Versuchsbericht bei noch relativ geringen Dehnungen von 1,85‰. Wie in Abbildung 7.2 zu erkennen

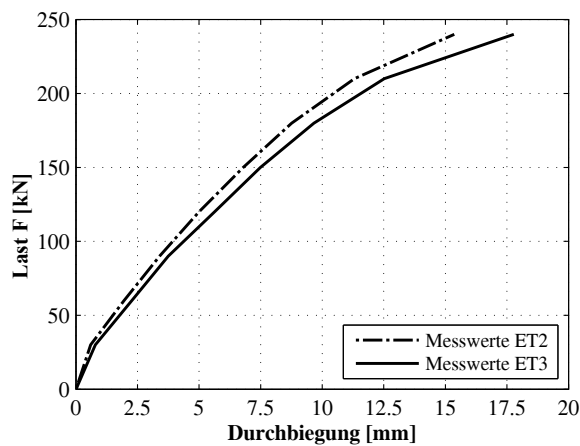


Abbildung 7.2: Last-Verformungskurven ET2 & ET3

ist, zeigt die Last-Verformungskurve eine Abhängigkeit von der Stegbreite. Die Verformungen sind bei dem Balken ET3 mit schmalerem Steg erkennbar größer. Jedoch ist die absolute Traglast des Balken ET3 nur geringfügig kleiner als die von ET2. Rechnet man die Traglast auf bezogene Größen um, erreicht ET3 sogar eine größere Traglast. Abbildung 7.3 zeigt das Rissbild nach Erreichen der maximalen Last. Die Risswinkel mit ca. 30° liegen deutlich unterhalb von 40°.

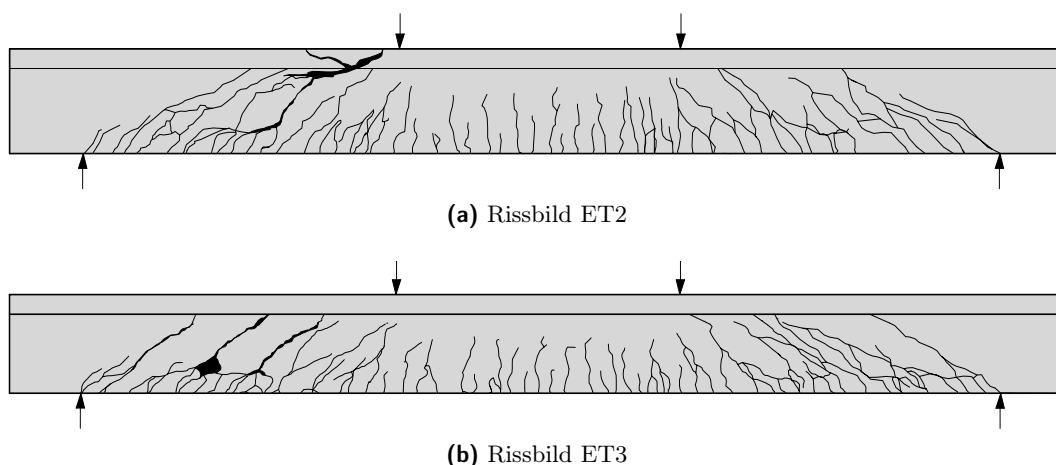


Abbildung 7.3: Rissbilder der Versuchsträger der ET-Serie

In Tabelle 7.6 sind die relevanten Versuchskennwerte zusammengefasst.

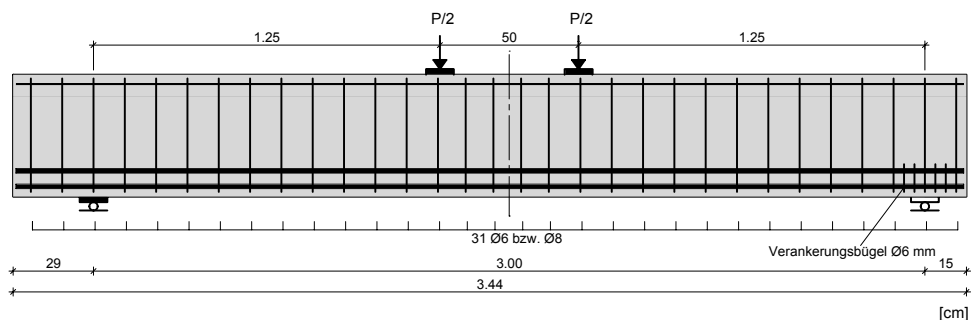
Tabelle 7.3: Versuchs- und Querschnittswerte ET2 & ET3

	$F_{u,test}$	$V_{u,test}$	v_u	a_{sw}	ρ_w	ω_w
	[MN]	[MN]	[-]	[cm ² /m]	[%]	[-]
ET2	0,263	0,131	0,163	5,14	0,3427	0,0550
ET3	0,255	0,1275	0,237	5,14	0,5141	0,0826

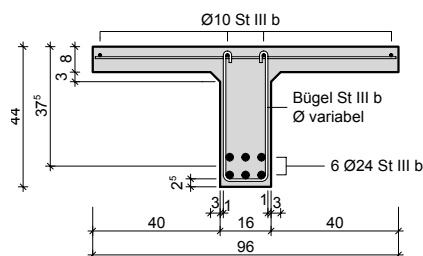
7.2.2 Versuchsserie 2: Plattenbalken TA11, TA12 & TA15 von Leonhardt/Walter

Im Jahre 1963 wurden von LEONHARDT und WALTHER[64] weitere Schubversuche an Plattenbalken durchgeführt. Im Vergleich zur ET-Serie wurde die Druckplatte deutlich breiter ausgeführt. Für die Nachrechnung mit der FEM unter Ansatz nichtlinearer Materialmodelle werden die Versuche TA11, TA12 und TA15 herangezogen. Die Balken wurden mit derselben Geometrie hergestellt und unterschieden sich in den Festigkeiten sowie in der Art und Höhe der Schubbewehrung.

Versuchsaufbau Die hier ausgewählten drei Balken gehören zu den Gruppen II bzw. III und weisen ein Bügelfließen auf, sie versagten somit entweder mit einem Biegeschubbruch oder einem Schubzugbruch. Die Balken TA11 und TA12 unterscheiden sich durch einen unterschiedlichen Schubbewehrung



(a) Längsschnitt



(b) Querschnitt

Abbildung 7.4: Versuchsträger TA-Serie

rungsgrad bei gleicher Druckfestigkeit. Der Balken TA15 weist den gleichen Bewehrungsgrad wie Balken TA11 auf, allerdings eine kleinere Druckfestigkeit. Sie wurden ebenfalls mit zwei Einzellasten bis zum Bruch belastet. In Abbildung 7.4 sind die Geometrie sowie die Bewehrung der Balken der TA-Serie dargestellt.

Materialkennwerte Neben der Würfeldruckfestigkeit wurden auch die Zylinderdruckfestigkeit sowie die Biegezugfestigkeit experimentell bestimmt. Die untere Längsbewehrung besteht aus 6 ϕ 24 der Güte STIIIb, die obere Längsbewehrung aus 2 ϕ 10. Die Bügelbewehrung besteht aus zweischnittigen Bügeln ϕ 8 bei den Balken TA11 und TA15 sowie aus zweischnittigen Bügeln ϕ 6 beim Balken TA12, ebenfalls der Güte StIIIb. In den Tabellen 7.4 sowie 7.5 sind die Materialparameter für den Beton und die Bewehrung zusammengefasst.

Tabelle 7.4: Betonkennwerte der Balken TA-Serie

	$f_{c,cube}$ [MN/m ²]	$f_{c,cyl}$ [MN/m ²]	$f_{ct,bz}$ [MN/m ²]	f_{ctm} [MN/m ²]
TA11	33,3	24,9	4,1	2,733
TA12	33,3	24,9	4,1	2,667
TA15	23,7	17,4	4,0	2,733

Tabelle 7.5: Materialparameter des Bewehrungsstahls TA-Serie

	f_y [MN/m ²]	f_u [MN/m ²]	E_s [MN/m ²]
ϕ 6	449	581	195000
ϕ 8	426	536	210000
ϕ 10	434	548	210000
ϕ 24	417	546	205000

Rissbild und Versagen Abbildung 7.5 zeigt die Last-Verformungs-Kurve der drei betrachteten Balken. Der Balken TA11 mit der höchsten Druckfestigkeit und gleichzeitig starker Schubbewehrung versagt deutlich später und verhält sich auch steifer als die beiden anderen Balken. Die bezogene Traglast liegt dagegen bei TA15 am höchsten. Hierbei scheinen Druck- und Zugstrebe auch am besten aufeinander abgestimmt zu sein. Bei allen Versuchen wurde das Versagen vom Fließen der Bügel begleitet. Der Balken TA11 und TA15 versagten mit einem Biegeschubbruch, während der Balken TA12 als Schubzugbruch dokumentiert ist. Die maximalen plastischen Bügeldehnungen betragen unter der Versagenslast bei TA11 7,1‰, bei TA12 sogar 16,85‰. Dies ist etwas überraschend und deutet möglicherweise auf das Durchreißen des betreffenden Bügels hin (der nächstkleinere Wert betrug 8,1‰). Bei TA15 wurden geringere Dehnungen von lediglich 3,9‰ festgestellt. Bei Balken

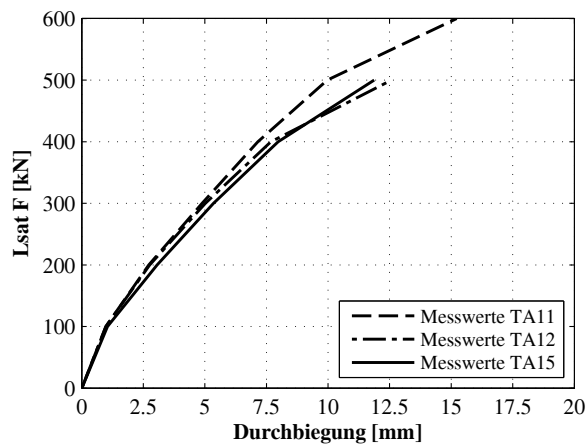


Abbildung 7.5: Last-Verformungskurven TA-Serie

TA12, einem Balken mit schwacher Schubbewehrung, wurde beobachtet, wie sich mit zunehmender Belastung neue, flachere Risse, z.T. über vorhandene Schubrisse hinweg, bildeten, vgl.[64].

Abbildung 7.6 zeigt das Rissbild nach Erreichen der maximalen Last. Alle Risswinkel liegen unterhalb von 40° . Die flachsten Risswinkel treten bei dem am schwächsten bewehrten Balken TA12 mit ca. $25\text{-}27^\circ$ auf, was für die Hypothese spricht, dass geringere Schubbewehrungsgrade zu einer stärkeren Rotation der Druckstrebe führen. Somit können mehr Bügel aktiviert werden. Dies stimmt in der Tendenz mit den Annahmen der Plastizitätstheorie überein, allerdings ist diese Rotation nicht mit beliebig kleinen Bewehrungsgraden bzw. bis zu beliebig kleinen Winkeln möglich.

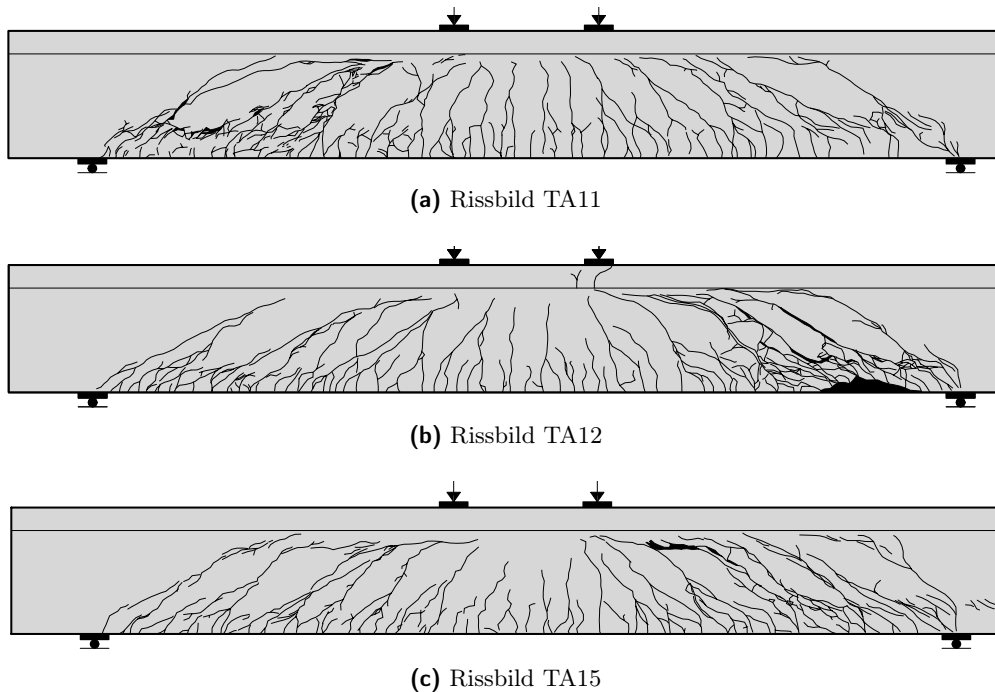


Abbildung 7.6: Rissbilder der Versuchsträger der TA-Serie

Außerdem konnte LEONHARDT bei allen Versuchsbalken Zugdehnungen an der Balkenoberseite bis etwa $1,5h$ vom Auflager entfernt feststellen.

In Tabelle 7.6 sind die relevanten Versuchskennwerte zusammengefasst.

Tabelle 7.6: Versuchs- und Querschnittswerte TA-Serie

	Bruchlast		Querkraft			
	$F_{u,test}$	$V_{u,test}$	v_u	a_{sw}	ρ_w	ω_w
	[MN]	[MN]	[-]	[cm^2/m]	[%]	[-]
TA11	0,684	0,342	0,334	8,9	0,566	0,125
TA12	0,540	0,270	0,263	5,0	0,313	0,074
TA15	0,596	0,298	0,409	8,9	0,566	0,179

7.2.3 Untersuchte Parameter

Zur Beurteilung der Güte der numerischen Simulationen werden in der Regel die Traglasten und Last-Verformungskurven der numerischen Simulation mit denen des realen Versuches verglichen. Allerdings lassen sich mit entsprechender Kalibrierung hierbei recht gute Übereinstimmungen erzielen, insbesondere in Bezug auf die Traglasten, obwohl das Modelltragverhalten das reale Tragverhalten nicht zutreffend widerspiegelt. Somit ist der alleinige Vergleich der Traglasten zur Beurteilung der Güte der Nachrechnung nicht ausreichend. Im Rahmen dieser Arbeit werden daher folgende Parameter zur Beurteilung der Simulationsergebnisse herangezogen und, sofern möglich, mit den Daten aus den Versuchen verglichen:

- Traglast
- Last-Verformungskurve
- Rissbildung
- Bügelspannungen bzw. -dehnungen
- Betondehnungen und Druckspannungstrajektorien

Der Vergleich der o.g. Parameter mit den entsprechenden Größen aus den Versuchen bzw. die eingehende Analyse der Tragmechanismen und inneren Kräfte in der Simulation, wie Druckspannungstrajektorien, soll eine genauere Beurteilung des numerischen Modells ermöglichen.

7.3 Versuchsnachrechnungen mit dem Plastizitätsmodell CDP

Zunächst werden die vorgestellten Versuche mit dem Programmsystem ABAQUS unter Verwendung des isotropen Plastizitätsmodells CONCRETE DAMAGE PLASTICITY, kurz „CDP“, als Materialgesetz für den Beton nachgerechnet. Alle Balken werden in ähnlicher Weise modelliert. Es werden dreidimensionale Kontinuumsэлеmente, genauer lineare Verschiebungselemente mit reduzierter Integration (Elementtyp C3D8R) für den Beton verwendet. Die Elementgröße beträgt im Mittel 25mmx25mmx25mm. Über die Verwendung mehrerer reduziert integrierter Elemente über die Höhe wird das Shear-Locking verhindert. Die Materialkennwerte werden entsprechend den wahren Versuchskennwerten angesetzt. Die Bewehrung wird mit eindimensionalen Fachwerkelementen (T3D2) unter Verwendung eines plastischen Materialgesetzes nach VON MISES mit gleichmäßiger isotroper Verfestigung abgebildet und in die Kontinuumsэлеmente eingebettet. Dies geschieht mit der in ABAQUS zur Verfügung stehenden Methode der „embedded elements“. Die Größe der Bewehrungselemente ist auf die Größe der Volumenelemente abgestimmt.

Von besonderer Bedeutung sind die im Rahmen dieses Materialgesetzes zu wählenden Modellparameter. Das Verhältnis der zweiachsialen zur einachsialen Druckfestigkeit f_{b0}/f_{c0} ebenso wie der Formparameter K sind physikalisch begründet. Wie bereits ausgeführt, ist der Dilatanzwinkel ebenfalls eine entscheidende Größe, der im Rahmen dieser Arbeit zu $\psi = 35^\circ$ gesetzt wird. Wie zuvor und auch in [29] ausgeführt, entspricht dies eigentlich nicht dem realistischen Wert für Beton, der deutlich kleiner ist, jedoch konnten mit den realistischen Werten in eigenen Vorstudien keine zufriedenstellenden Ergebnisse erzielt werden. Dies wird auch in der Literatur bestätigt [66], in der $\psi = 35^\circ$ als geeignete Wahl für die Modellierung von Beton bei Verwendung des Materialmodells CDP vorgeschlagen wird. Von großem Einfluss auf die Ergebnisse ist der Viskositätsparameter, der jedoch nicht physikalisch motiviert ist. Im Rahmen der Berechnungen wird ein möglichst kleiner Wert verwendet, um den Einfluss der künstlichen Dämpfung gering zu halten. Sofern nicht anders angegeben, werden folgende Modellparameter für den Beton verwendet:

Tabelle 7.7: Kennwerte des Materialmodells CDP

Materialmodell	CDP
Dilatation Angle	35
Eccentricity	0,1
f_{b0}/f_{c0}	1,16
K	0,667
Viscosity Parameter	1,00E-6

Die Stahlplatten der Lasteinleitung werden vereinfacht mit dem linear-elastischen HOOKEschen Gesetz modelliert.

7.3.1 Nachrechnung Versuchsserie 1

Strukturmodellierung Abbildung 7.7 zeigt die Strukturmodellierung des Balkens ET3. Zur besseren Darstellung der eingebetteten Bewehrung wurden die Betonelemente bereichsweise ausgeblendet. Um die Rechenzeit zu verringern, wurden die Symmetriebedingungen des Balkens ausgenutzt und nur ein Viertel des Balkens modelliert. Die hier beispielhaft für den Balken ET3 dargestellte Modellierung wurde auch bei den anderen Balken verwendet.

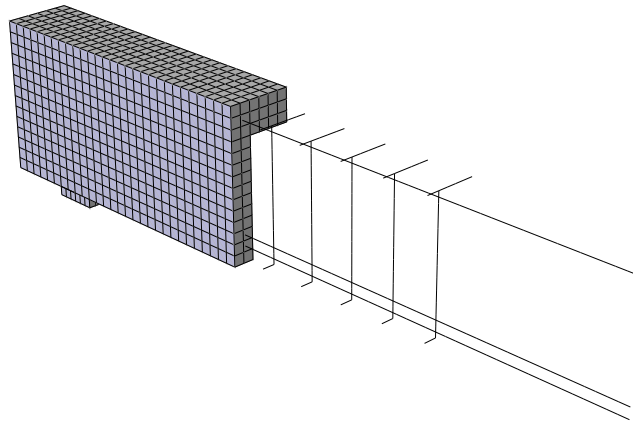


Abbildung 7.7: ABAQUS-Strukturmodell des Balkens ET3

Materialkennwerte Es werden die in 7.2.1 dokumentierten Festigkeiten für Beton und Bewehrung verwendet. Die Arbeitslinien werden gemäß 6.2.2 definiert und über die Bruch- bzw. Zerstauchungsenergie an die Elementgröße angepasst.

Lastaufbringung Die Lasten werden in zwei Schritten („Steps“) aufgebracht. Zunächst wird im ersten Lastschritt das Eigengewicht inkrementell aktiviert. Im zweiten Lastschritt wird der Balken weggesteuert mit der Einzellast belastet, d.h. es wird inkrementell eine Verschiebung auf die Lasteinleitungsplatte aufgebracht.

Vergleich der Bruchlasten Die Berechnungen mit dem Materialmodell CDP mit 1,0-facher und 2,0-facher Zugfestigkeit führen zu unterschiedlich guter Übereinstimmung für die Balken ET2 und ET3. Während die Rechnung mit 1,0-facher Zugfestigkeit für den Balken ET2 mit einer Unterschreitung der Traglast um 15% noch zufriedenstellende Ergebnisse liefert, werden mit Simulation des Balkens ET3 unter 1,0-facher Zugfestigkeit lediglich knapp 62% der Traglast des Versuches erreicht. In beiden Fällen bringt die Verdoppelung der Zugfestigkeit eine deutliche Traglaststeigerung mit sich, um 27,8% im Falle des Balkens ET2 und sogar um 48,6% für den Balken ET3. Auf den Einfluss der Zugfestigkeit wird im folgenden Abschnitt näher eingegangen.

Tabelle 7.8: Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3 mit CDP

		ET2	ET3
$F_{u,test}$	[kN]	263	255
$F_{CDP;1,0f_{ct}}$	[kN]	221,4	157,3
$F_{CDP;2,0f_{ct}}$	[kN]	283,0	233,7

7.3.1.1 Ergebnisse Balken ET3

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Der Vergleich der Last-Verformungskurven des Versuchs mit denen der numerischen Simulation zeigt keine zufriedenstellende Übereinstimmung. Die Simulation mit 1,0-facher Zugfestigkeit weist zu Belastungsbeginn zunächst eine ähnliche Steifigkeit wie der Versuch auf, im weiteren Belastungsverlauf verhält sich der Balken in der Simulation zunehmend zu weich und versagt rechnerisch bei lediglich 62% der experimentellen Traglast. Die Simulation mit verdoppelter Zugfestigkeit führt zu einer guten Überstimmung der Traglasten, allerdings verhält sich der Balken in der Simulation über weite Bereiche zu steif. Zudem ist die künstliche Erhöhung der Zugfestigkeit zur Verbesserung des Ergebnisses nicht physikalisch begründbar, insbesondere, da bei schubbewehrten Stahlbetonbalken, die im Versuch durch Fließen der Bügel versagen, die Größe der Zugfestigkeit nur einen geringen Einfluss auf das Ergebnis haben dürfte. Dies bestätigen auch die Traglasten der Versuche, die sich nur um 3% unterscheiden.

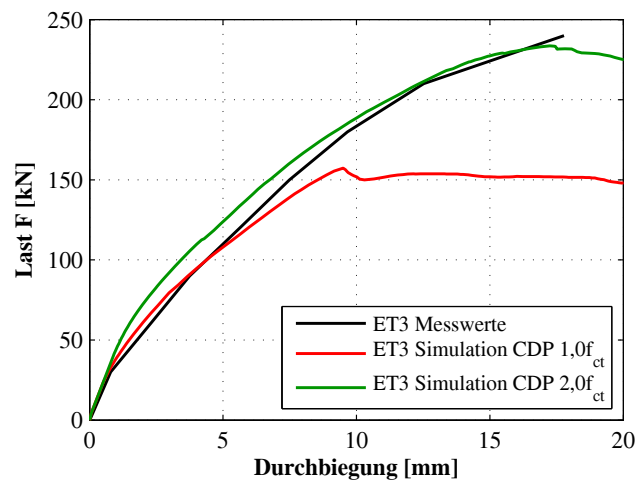


Abbildung 7.8: Last-Verformungskurven des Balkens ET3 mit dem CDP-Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen In den folgenden Abbildungen sind die plastischen Hauptzugdehnungen im Beton sowie die minimalen Hauptdruckspannungen dargestellt.

Die Farbskala ist abgestuft zwischen Rot für die Maximalwerte und Blau für die Minimalwerte der betrachteten Größen. Bei den Betondruckspannungen weisen grüne bis blaue Schattierungen auf

betragsmäßig große Druckspannungen hin, umgekehrt werden bei den plastischen Dehnungen große Dehnungen durch Rot- und Orangeschattierungen veranschaulicht.

Aus dem Höhenflächenplot der Hauptdruckspannungen Abbildung 7.9 lässt sich anhand der Intensität der Spannungen der Tragmechanismus erkennen: Zusätzlich zu einzelnen Druckstreben im Steg, die ein fachwerkähnliches Tragverhalten andeuten, ist insbesondere die Ausbildung einer Druckstreben- oder Druckbogenwirkung in Richtung Auflager ersichtlich. In Abbildung 7.10 ist deutlich die verschmierte Rissbildung im Steg im Vergleich zur Einzelrissbildung im realen Versuch zu erkennen. Große Teile im unteren Bereich des Steges weisen plastische Hauptzugdehnungen auf, sind also „gerissen“. Anhand des Höhenflächenplots der plastischen Hauptzugdehnungen lassen sich nur bedingt Rückschlüsse auf das Rissverhalten ziehen, da sich die Rissrichtung und damit der Risswinkel hieraus nicht erkennen lassen. Die Höchstwerte der plastischen Zugdehnungen im Beton betragen fast 24‰ bei der Maximallast und erreichen 44‰ im Nachbruchbereich. Bei Erreichen der maximalen Traglast bildet sich ein weiterer Bereich mit großen plastischen Dehnungen im oberen Bereich des Steges am Plattenanschnitt aus. Im Gegensatz zum realen Versuch wird das Versagen somit durch eine zusätzliche Rissbildung unterhalb der Gurtplatte eingeleitet.

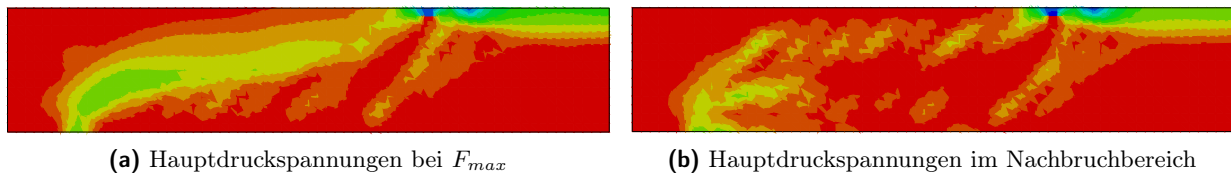


Abbildung 7.9: Flächenplot der Hauptdruckspannungen des Balkens ET3 mit CDP

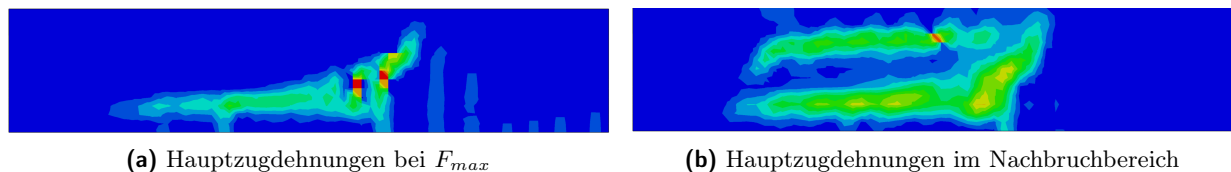


Abbildung 7.10: Flächenplot der maximalen plastischen Dehnungen des Balkens ET3 mit CDP

Analyse der Bügelspannungen Die Bügel weisen nur in sehr kleinen Bereichen plastische Verzerrungen auf, die mit den Elementen, in denen große plastische Dehnungen des Betons zu verzeichnen sind, korrespondieren und somit als singuläre Spannungsspitzen zu werten sind. Die Tragfähigkeit der Bügel ist bei weitem noch nicht erreicht.

Die Art der Bügelbeanspruchung scheint auf den ersten Blick überraschend, da nur gewisse Bereiche der Bügel, hauptsächlich im unteren Stegdrittel, beansprucht werden. Die Bügel scheinen aus „Verträglichkeitsgründen“ beansprucht zu werden, wie Abbildung 7.12 andeutet, bei dem die Bügeldehnungen und -spannungen mit den plastischen Betondehnungen in z-Richtung, also in Richtung der Bügel überlagert dargestellt sind. Da die Beton- und Stahlelemente starr miteinander verbunden sind, müssen die Verzerrungen aus Verträglichkeitsgründen kompatibel sein. Die großen Betonverzerrungen führen also auch zu entsprechenden Verzerrungen in den Bügeln. Aus den Verzerrungen

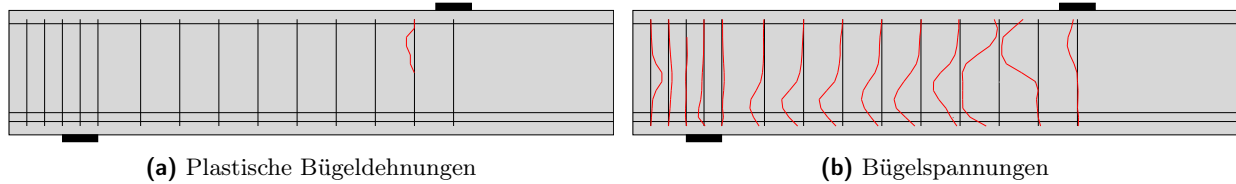


Abbildung 7.11: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET3 mit CDP

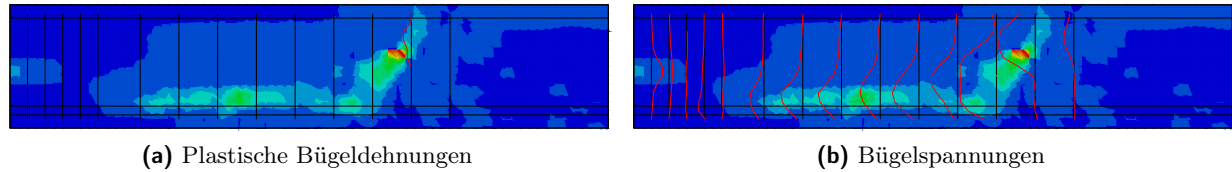


Abbildung 7.12: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen sowie plastische Betondehnungen in z-Richtung

ergeben sich dann die Bügelspannungen. Die Bügel wirken nur dort mit, wo der Beton große Verzerrungen aufweist.

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Zunächst wird die Zugfestigkeit erwartungsgemäß im unteren Bereich des Steges im Bereich der maximalen Momente erreicht, was zu plastischen Hauptverzerrungen senkrecht zur Längsachse in diesem Bereich führt. Diese können als in den Elementen verschmierte Biegerisse interpretiert werden. Der Bereich der plastischen Dehnungen weitet sich in Richtung Auflager aus. Unter Einfluss der Schubspannungen ist der Dehnungsvektor geneigt, es kommt sozusagen zu geneigten Schubrissen. Der Steg ist großflächig „gerissen“. In den Bereichen mit plastischen Hauptzugdehnungen treten gleichzeitig auch plastische Druckverzerrungen auf, es erfolgt eine modellbedingte Entfestigung sowohl im Zug- als auch im Druckbereich. Dies führt im weiteren Belastungsverlauf zu einer Spannungsumlagerung. Es ist eine starke Rotation der Druckspannungen im Beton zu beobachten, die im Belastungsverlauf immer flacher geneigt sind.

Im Gegensatz zum Versagen im Experiment ist das Versagen des Balkens in der numerischen Simulation nicht auf die Tragfähigkeit der Bügel zurückzuführen, sondern auf die Tragfähigkeit der Druckstreben des Betons, was die deutliche Steigerung der Tragfähigkeit bei einer Verdoppelung der Zugfestigkeit bestätigt. Interessant ist ein Vergleich der Druckspannungstrajektorien mit den Trajektorien der plastischen Dehnungen, wie in den Abbildungen 7.13 bis 7.15 ersichtlich ist.

Wie insbesondere Abbildung 7.15 eindrucksvoll zeigt, beeinflussen die plastischen Zugdehnungen die Fähigkeit des Betons, in der anderen Richtung Druckspannungen aufzunehmen. In den Elementen, die nennenswerte plastische Zugdehnungen aufweisen, treten kaum bis gar keine Druckspannungen auf. Dies ist auf die isotrope Entfestigung zurückzuführen. Das isotrope Modell ist nicht in der Lage, gleichzeitig im Zugbereich zu ent-, jedoch im Druckbereich zu verfestigen, was eigentlich erforderlich wäre, um die rissinduzierte Anisotropie realistisch abzubilden. Die Entfestigung betrifft auch den Druckbereich und ist zu stark ausgeprägt. Aus den Abbildungen ist ersichtlich, dass

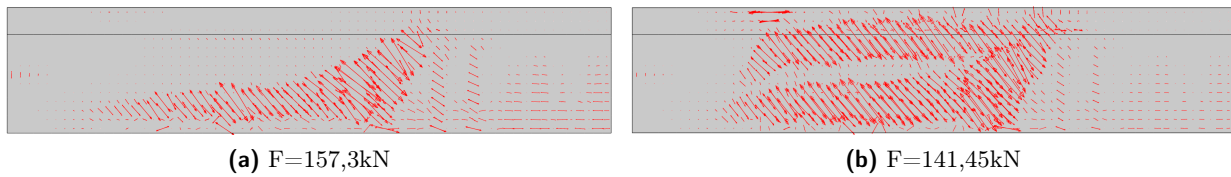


Abbildung 7.13: Trajektorien der maximalen plastischen Dehnungen des Balkens ET3 mit CDP

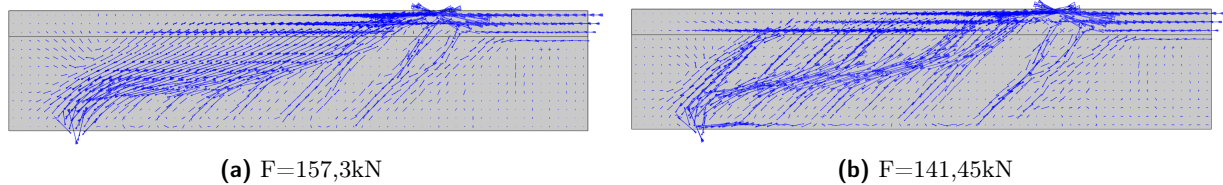


Abbildung 7.14: Hauptdruckspannungstrajektorien des Balkens ET3 mit CDP

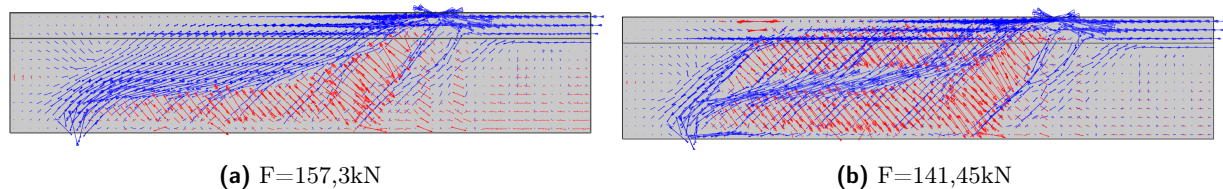


Abbildung 7.15: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens ET3 mit CDP

nennenswerte Druckspannungen nur in ungerissenen Elementen übertragen werden können. Diese Restriktion führt zu einer Spannungsumlagerung und einem vom Versuch abweichenden Tragverhalten. Im Modell wird ein erheblicher Teil der Querkraft über die Ausbildung eines Druckbogens bzw. Sprengwerkes direkt in das Auflager abgetragen. Aufgrund der beschriebenen Entfestigung der Druckstreben können die Spannungen nicht in entsprechendem Umfang in die Bügel umgelagert werden und es bildet sich nicht das erwartete Fachwerk aus. Die Tragfähigkeit des Modells wird also maßgeblich von einem Betontraganteil bestimmt, und nicht wie im Versuch primär durch die Fachwerktragwirkung bzw. die Bügeltragfähigkeit.

Wenn aufgrund der Entfestigung im unteren Bereich des Balkens kaum noch Druckspannungen übertragen werden können, und gleichzeitig das Druckfeld durch die Entfestigung im oberen Bereich eingeschnürt wird, ist die Tragfähigkeit des Balkens erreicht. Maßgeblich für die Traglast des Balkens ist also die Fähigkeit, Druckspannungen zu übertragen, die aufgrund der isotropen Entfestigung des Materialmodells allerdings direkt an das Zugtragverhalten nach Überschreiten der Zugfestigkeit gekoppelt ist.

Einfluss der Zugfestigkeit Unter Ansatz der doppelten Zugfestigkeit lässt sich eine Traglaststeigerung um gut 46% erzielen. Vergleicht man Abbildung 7.16 mit Abbildung 7.15, ist ersichtlich, dass bei einer Last, die ungefähr der Traglast der Nachrechnung mit 1,0-facher Zugfestigkeit ent-

spricht, der Bereich der plastischen Zugdehnungen kleiner ist. Gleichzeitig entsprechen bei Erreichen der höheren Traglast die Bereiche der Hauptdruckspannungen sowie der plastischen Zugdehnungen qualitativ denen der Nachrechnung mit 1,0-facher Zugfestigkeit bei Erreichen der dortigen Maximallast. Aufgrund der späteren Rissbildung und damit einhergehenden später einsetzenden isotropen Entfestigung ist das Modell länger in der Lage, Betondruckspannungen aufzunehmen. Denselben Effekt hat statt einer Erhöhung der Zugfestigkeit die Erhöhung der Bruchenergie bei gleichbleibender Maximalspannung, s. auch MUELLER[73]. Die Vergrößerung der Bruchenergie führt zu einem flacheren Verlauf des abfallenden Astes, was naturgemäß einen positiven Effekt auf das Entfestigungsverhalten im Nachbruchbereich hat.

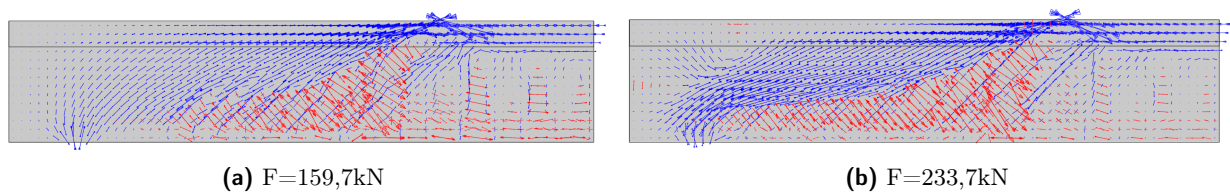


Abbildung 7.16: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens ET3 mit CDP und $2,0f_{ct}$

Physikalisch hat jedoch die Betonzugfestigkeit bei ausreichend schubbewehrten Balken einen deutlich geringeren Einfluss. Zwar setzt die Rissbildung zu einem späteren Zeitpunkt ein und die Last-Verformungskurve wird dadurch beeinflusst, für die finale Traglast spielt die Größe der Zugfestigkeit real jedoch kaum eine Rolle, da sich ein fachwerkähnliches Tragverhalten bildet, bei dem die Zugspannungen über die Bewehrung aufgenommen werden und der Beton nur für die Übertragung der Druckkräfte in den Druckstreben verantwortlich ist. Lediglich die Spannungsumlagerung, sprich die Rotation der Druckstreben, könnte durch eine höhere Zugfestigkeit beeinflusst werden.

Einfluss des Viskositätsparameters Zur Vermeidung von Konvergenzproblemen bei Materialien mit entfestigendem Verhalten verfügt das Materialmodell Concrete Damage Plasticity über einen Stabilisierungsmechanismus, der über den Viskositätsparameter μ gesteuert werden kann. Bei dem Viskositätsparameter handelt es sich um einen modellimmanenten, künstlichen Dämpfungsparameter, der dafür sorgt, dass die tangentielle Steifigkeit für ausreichend kleine Zeitinkremente positiv wird (vgl. [96]). Es wird ein visko-plastisches Verhalten erzeugt, bei dem temporär Spannungen außerhalb der Fließfläche erlaubt sind. Der Viskositätsparameter μ beschreibt die Relaxationszeit des Materials. Eine visko-plastische Regularisierung mit einem ausreichend kleinen Viskositätsparameter im Vergleich zum gewählten Zeitinkrement soll dazu führen, dass die Lösung der visko-plastischen Rechnung gegen die des nicht-viskosen Falls relaxiert. Der Viskositätsparameter sollte also möglichst klein gewählt werden, da dann die Relaxation schneller stattfindet und damit die nicht-viskose Lösung besser angenähert wird. Das bedeutet umgekehrt jedoch auch, dass bei zu großen Viskositätsparametern eine „falsche“ Lösung ermittelt werden kann. Studien mit unterschiedlichen großen Werten für den Viskositätsparameter zeigen deutlich den Einfluss auf Traglast und Tragverhalten.

Abbildung 7.17 zeigt die Last-Verformungskurven für Berechnungen mit unterschiedlichen Werten für den Viskositätsparameter. Rechnungen mit Werten von $\mu = 5 \times 10^{-6}$ bzw. 5×10^{-5} führen zu na-

hezu identischen Traglasten, die jedoch deutlich unterhalb der Traglast des Versuches liegen. Eine

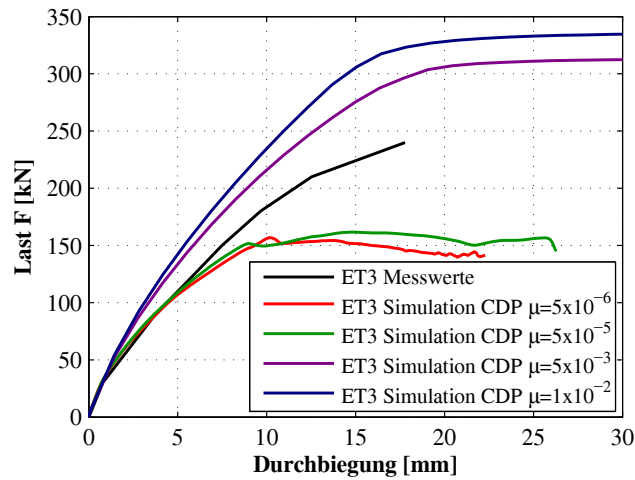


Abbildung 7.17: Einfluss des Viskositätsparameters auf die Last-Durchbiegungskurve des Balkens ET3

deutliche Erhöhung des Viskositätsparameters führt zu einer signifikanten Traglaststeigerung mit einer Überschätzung der Traglasten. Es lässt sich bei hohen Werten für den Viskositätsparameter auch ein verändertes Tragverhalten feststellen. Das Modell verhält sich schon kurz nach der Rissbildung deutlich zu steif. Analysiert man das Spannungs-Dehnungs-Verhalten der theoretisch gerissenen Betonelemente, lässt sich dies durch das visko-plastische Verhalten erklären. Abbildung 7.18 zeigt die Hauptzugspannungen und -dehnungen eines Betonelementes im Schubfeld bei unterschiedlichen Werten für den Viskositätsparameter μ im Vergleich zu vorgegebenen Arbeitslinie (in Rot).

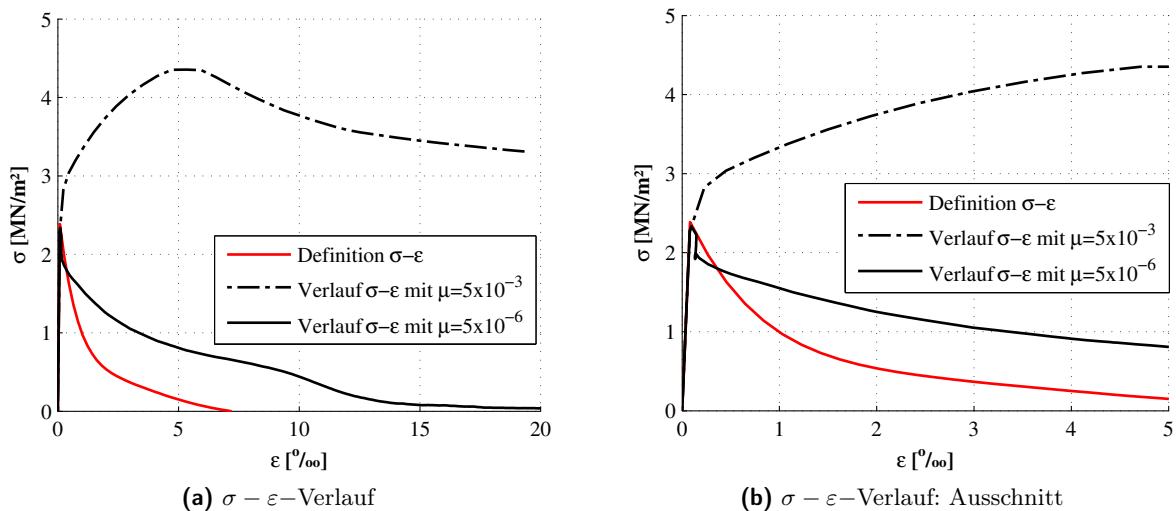


Abbildung 7.18: Einfluss des Viskositätsparameters auf die $\sigma - \varepsilon$ -Beziehung

Es ist ersichtlich, dass die Spannungs-Dehnungsbeziehung schon für $\mu = 5 \times 10^{-6}$ von der definierten Arbeitslinie abweicht, allerdings erst nach Überschreiten der zur Zugfestigkeit gehörigen Dehnung. Der abfallende Ast ist weniger steil, d.h. die Bruchenergie ist höher als vorgegeben. Bei einem vergleichsweise hohen Wert von $\mu = 5 \times 10^{-3}$ kommt es dagegen zu einer Überschreitung der Zugfestigkeit aufgrund des viskosen Verhaltens mit Spannungen außerhalb der Fließgrenze. Die Betonzugspannung erreicht fast den doppelten Wert der Zugfestigkeit, zusätzlich verläuft der abfallende Ast deutlich flacher. Offenbar findet die Relaxation auf den vorgegebenen Wert der Zugfestigkeit bei derart hohen Werten für den Viskositätsparameter nicht schnell genug statt, so dass Spannungs-Dehnungs-Verläufe erzeugt werden, die nicht mehr den Vorgaben der Materialarbeitslinien entsprechen. Dieses Verhalten lässt sich in ähnlicher Form bei anderen „gerissenen“ Betonelementen feststellen und führt global ebenfalls zu einem veränderten Tragverhalten. Da die Entfestigung aufgrund der hohen aufnehmbaren Zugspannung später einsetzt und langsamer verläuft, kann das Modell deutlich länger Druckspannungen über die Betonelemente übertragen. Der negative Effekt der isotropen Entfestigung wird also durch hohe Viskositätsparameter abgeschwächt. Damit ergibt sich ein ähnlicher Einfluss wie bei der manuellen Erhöhung der Zugfestigkeit des Betons. In beiden Fällen ist die erzielte Traglaststeigerung jedoch nicht physikalisch begründet, sondern lediglich auf die Manipulation der Modellparameter zurückzuführen, welche bewirkt, dass dem Beton ein zu großer Traganteil auf Zug zugewiesen wird.

7.3.1.2 Ergebnisse Balken ET2

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven In Abbildung 7.19 ist die rechnerische Last-Verformungskurve des Balkens ET2 der des Versuchs gegenübergestellt. Die Übereinstimmung zwi-

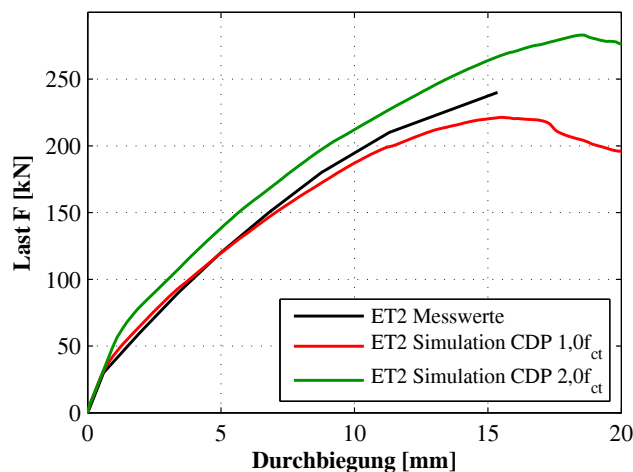


Abbildung 7.19: Last-Verformungskurven des Balkens ET2 mit dem CDP-Modell

sehen Versuch und numerischer Simulation ist deutlich besser als für den Balken ET3. Auch hier bewirkt die Verdoppelung der Zugfestigkeit eine nennenswerte Traglaststeigerung.

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Abbildung 7.20 zeigt die plastischen Hauptzugdehnungen sowie Hauptdruck-

spannungen im Beton. Auch hier lässt sich die Ausbildung einer direkten Druckstrebe zusätzlich zu den Druckstreben im Steg erkennen. Bei der Traglast werden im Beton für die plastischen Zugdehnungen Maximalwerte von 28‰ erreicht.

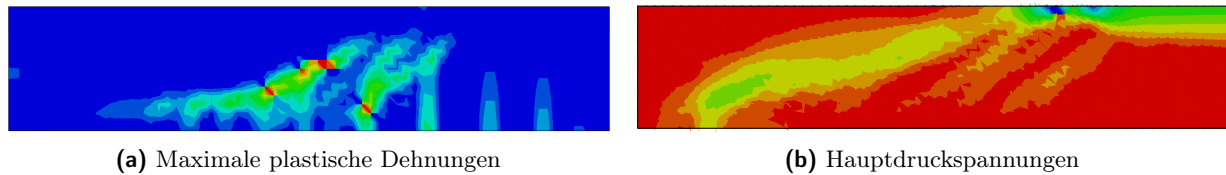


Abbildung 7.20: Plastische Hauptzugdehnungen und Hauptdruckspannungen im Beton des Balkens ET2 mit CDP

Analyse der Bügelspannungen Wie schon bei dem Balken ET3 wird die Fließdehnung in den Bügeln nur vereinzelt überschritten. Der Balken versagt somit im Gegensatz zum Versuch wiederum nicht aufgrund des Fließens der Bügel.

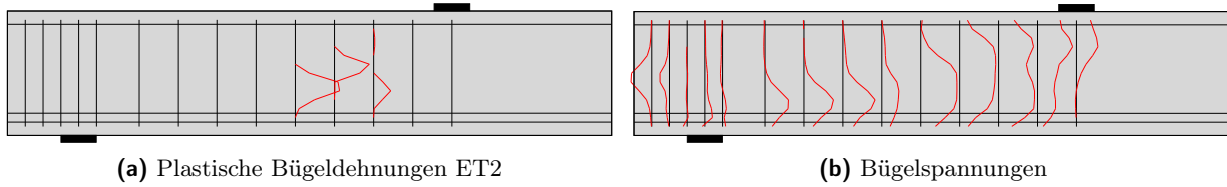


Abbildung 7.21: Maximale plastischen Dehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens ET2 mit CDP

Analyse des Tragverhaltens / Vergleich des Versagensmechanismus Trotz der auf den ersten Blick besseren Ergebnisse lassen sich über die Analyse des Tragverhaltens auch für den Balken ET2 die zuvor erwähnten Schwächen des Materialmodells CDP in Bezug auf die Abbildung des Schubtragverhaltens feststellen. Auch hier wird die Tragfähigkeit letztlich durch den Betontraganteil bestimmt, und nicht durch die Bügel. Aus den Abbildungen 7.20 sowie 7.23 ist ersichtlich, dass in Bereichen großer plastischer Zugdehnungen im Beton kaum Druckspannungen übertragen werden können, was wiederum auf die isotrope Entfestigung zurückzuführen ist. Diese führt zur Ausbildung eines anderen Tragmechanismus in Form eines Druckbogens, da die Druckspannungen aufgrund der starken Entfestigung im Steg nicht mehr in ausreichendem Maß durch die Druckstreben in die Bügel übertragen werden können. Somit stellt sich auch hier nicht das im Versuch beobachtete Fachwerktragverhalten ein.

Die höhere Tragfähigkeit des Balkens ET2 ist durch die größere Stegbreite begründet. Die Zugfestigkeit wird bei einer späteren Laststufe erreicht bzw. die plastischen Zugdehnungen im Beton sind bei gleicher Laststufe im Vergleich zum ET3 kleiner. Die Entfestigung der Druckstrebe ist also weniger stark ausgeprägt. Im weiteren Belastungsverlauf ist aufgrund der größeren Stegbreite die Lastabtragung über die direkte Druckstrebe bzw. das Druckfeld ins Auflager länger möglich. Die

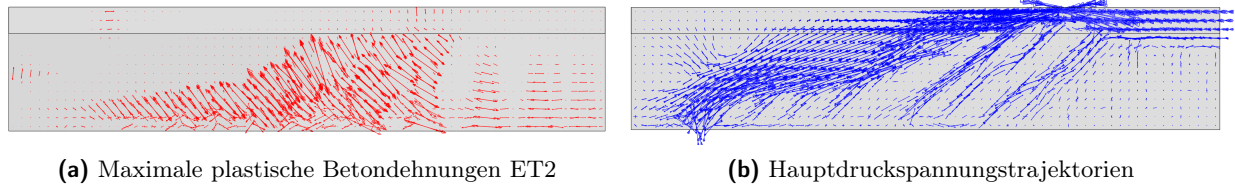


Abbildung 7.22: Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens ET2 mit CDP

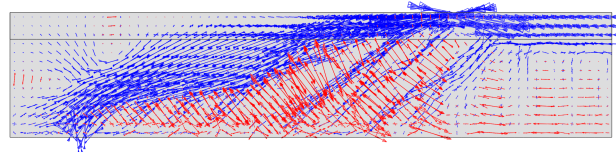


Abbildung 7.23: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen von ET2 mit CDP

größere Betonfläche im Steg hat somit einen ähnlichen Einfluss wie die Vergrößerung der Betonzugfestigkeit. Auch hier handelt es um einen anderen Versagensmechanismus als im Versuch. Real war das Fließen der Bügel die Ursache für das Versagen, die Betonfestigkeit hatte dagegen nur einen untergeordneten Einfluss.

7.3.2 Nachrechnung Versuchsserie 2

Da sich die drei Versuche, wie schon aus Abschnitt 7.2.2 ersichtlich, lediglich in den Festigkeiten und Schubbewehrungsgraden unterscheiden, aber dieselbe Geometrie aufweisen, eignen sie sich gut zum Vergleich des Einflusses der unterschiedlichen Parameter auf die Ergebnisse und werden daher hier gemeinsam untersucht.

Strukturmodellierung/Materialkennwerte/Lastaufbringung Das Vorgehen in Bezug auf die Strukturmodellierung, die Bestimmung der Materialparameter sowie der Lastaufbringung entspricht dem der Versuchsserie 1.

Vergleich der Bruchlasten In der folgenden Tabelle ?? werden die Bruchlasten der Versuche den Berechnungsergebnissen der FEM-Simulation gegenüber gestellt.

Tabelle 7.9: Vergleich der Bruchlasten der Balken TA11, TA12 und TA15 mit CDP

		TA11	TA12	TA15
F_{test}	[kN]	684	540	596
$F_{FEM,1 \times 10^{-6}}$	[kN]	438,8	321,9	400,1
$F_{FEM,2 \times f_{ctm}}$	[kN]	534,9	470,5	470,0

Ebenso wie im Versuch versagt der Balken TA12 mit dem geringsten Schubbewehrungsgrad zuerst, jedoch bei deutlich geringerem Lastniveau. Die höchste Tragfähigkeit erreicht der Balken TA11. In der Simulation lässt sich der im Versuch vorhandene Einfluss der Druckfestigkeit auf die Traglast kaum beobachten. Während die Erhöhung der Druckfestigkeit von $f_{cm,cyl} = 17,3 \text{ MN/m}^2$ auf $f_{cm,cyl} = 24,9 \text{ MN/m}^2$ im Versuch eine Traglaststeigerung von fast 15% bewirkt, beträgt der Unterschied in den numerischen Berechnungen lediglich 7%, allerdings auf einem deutlich niedrigeren Traglastniveau. Bezieht man den Unterschied auf die Versuchstraglasten, beträgt der Unterschied lediglich 4,8%. Es lässt sich ferner feststellen, dass unter Ansatz der Mittelwerte der Materialfestigkeiten nur 60-69% der Versuchstraglasten erreicht werden. Eine besondere Rolle spielt hier erwartungsgemäß die Größe der Zugfestigkeit, die die isotrope Entfestigung maßgeblich beeinflusst. Unter Ansatz der doppelten Zugfestigkeit können bis zu 88% der experimentellen Bruchlasten erreicht werden.

Zusammenfassung der Simulationsergebnisse Bei allen Balken wurde der schon beschriebene Tragmechanismus in Form einer Druckstrebenwirkung zum Auflager hin beobachtet, und ebenso wie bei Versuchsserie 1 wurde das Versagen nicht durch das Fließen der Bügel ausgelöst, sondern durch Versagen der Betondruckstrebe. Dennoch lässt sich ein Einfluss des Schubbewehrungsgrades feststellen, da der geringer schubbewehrte Balken TA 12 eher versagte als Balken TA 11. Jedoch ist nicht die Bügeltragfähigkeit entscheidend, sondern es scheint die geringere Steifigkeit der Bügelbewehrung die Ursache für das schneller eintretende Versagen zu sein. Da die Ergebnisse der numerischen Simulation mit dem Materialmodell CPD qualitativ mit denen der Nachrechnung der Versuchsserie 1 übereinstimmen, wird auf eine Vorstellung der Einzelergebnisse an dieser Stelle verzichtet, sondern auf den Anhang C.1 verwiesen. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das Materialmodell CPD auch bei Nachrechnung von Versuchsserie 2 nicht zu zufriedenstellenden Ergebnissen führt und auch hier die isotrope Entfestigung einen anderen Trag- und Versagensmechanismus als im Versuch bewirkt. Auch bei Versuchsserie 2 war in der numerischen Simulation ein Betonversagen statt eines Bügelversagens zu beobachten.

7.3.3 Analyse des Materialmodells CDP

Im Folgenden wird das CDP-Modell auf Element-Ebene genauer analysiert, insbesondere in Bezug auf die Auswirkungen einer unterschiedlich hohen isotropen Entfestigung. Hierzu werden beispielhaft einzelne Elemente des Balkens ET3 im Steg genauer untersucht und gegenübergestellt. Hierzu werden zunächst die Elemente 828 und 831 ausgewählt, s. Abbildung 7.24. Diese beiden Elemente sollen als Referenzelemente für ein schwach bzw. stark entfestigendes Element dienen. Allerdings stellte sich bei der Analyse heraus, dass das vermeintlich nicht oder nur schwach entfestigende Element 828 sehr wohl ein entfestigendes Verhalten aufgrund großer plastischer Zugdehnungen aufweist, nicht jedoch das genau dahinter liegenden Element 366. Es werden im Folgenden alle drei Elemente zur Analyse auf Elementebene herangezogen. Die Auswirkungen der unterschiedlich hohen Entfestigung werden nachfolgend auf Elementebene analysiert.

Anhand der genaueren Analyse der Verzerrungen und Spannungen lassen sich die im globalen Tragverhalten erkennbaren Mechanismen bestätigen. Die aufnehmbaren Druckspannungen hängen si-

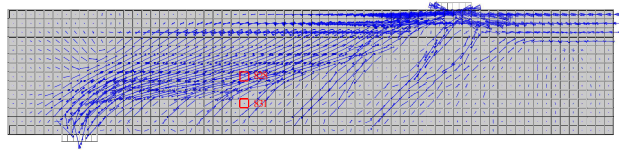


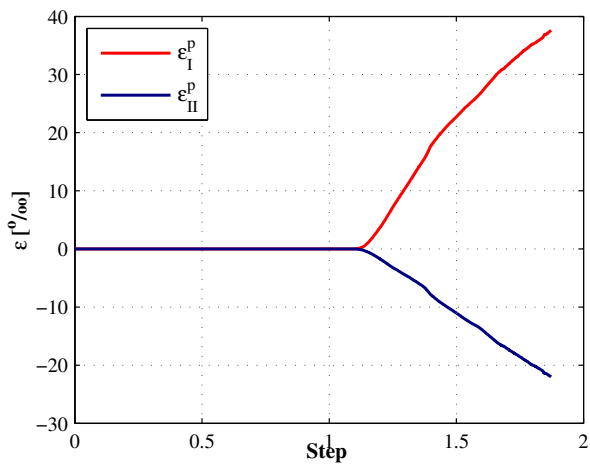
Abbildung 7.24: Elemente 828 und 831

gnifikant von den vorherrschenden plastischen Verzerrungen ab. Die Größenordnung der maximalen Verzerrungen unterscheidet sich um fast den Faktor 100 zwischen einem stark entfestigten Element im gerissenen Steg (Element 831) und einem kaum entfestigten Element der direkten Druckstrebe (Element 366), wie die folgende Tabelle zeigt:

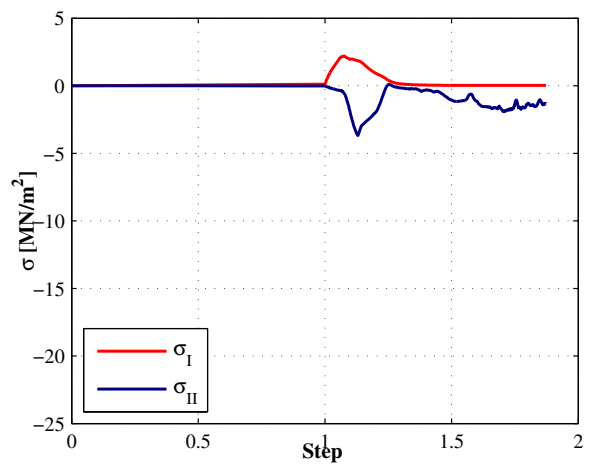
Tabelle 7.10: Maximale plastische Verzerrungen der Elemente 366, 828 & 831 mit CDP

Element	ε_{max}^p	ε_{min}^p
366	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$-2,35 \cdot 10^{-4}$
828	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$-1,1 \cdot 10^{-3}$
831	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$-2,2 \cdot 10^{-2}$

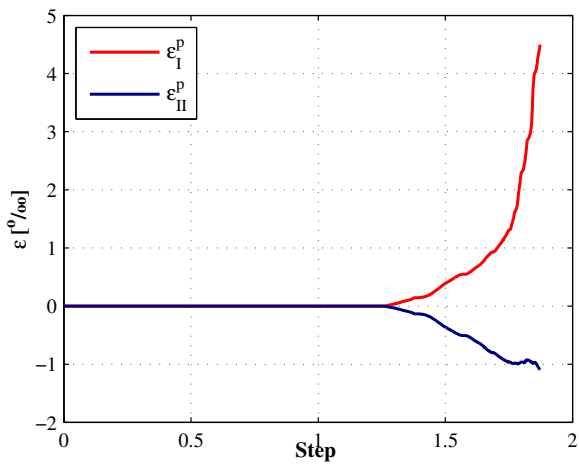
Dies hat offenbar einen direkten Einfluss auf die aufnehmbaren Druckspannungen im betrachteten Element: Bei Element 366 sind Spannungen bis zu $-23,6 \text{ MN/m}^2$ möglich. Hier treten extrem kleine plastische Zugdehnungen von nur $2,35 \cdot 10^{-4}$ auf. Offenbar korrespondieren kleine plastische Zugdehnungen zu großen aufnehmbaren Druckspannungen. Aus Abbildung 7.25 ist die Entwicklung der plastischen Verzerrungen und der Spannungen der betrachteten Elemente über die Zeit ersichtlich.



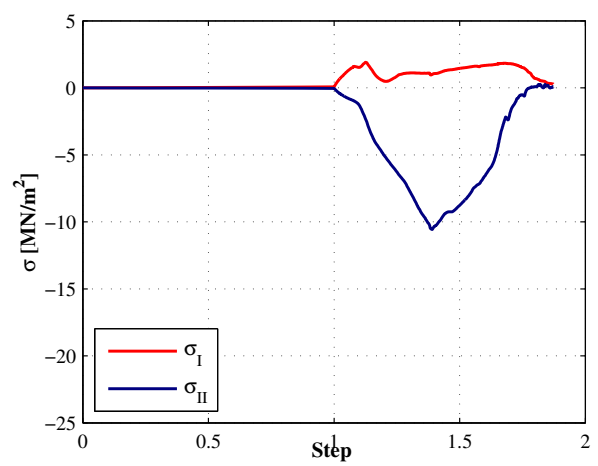
(a) Plastische Hauptverzerrungen 831



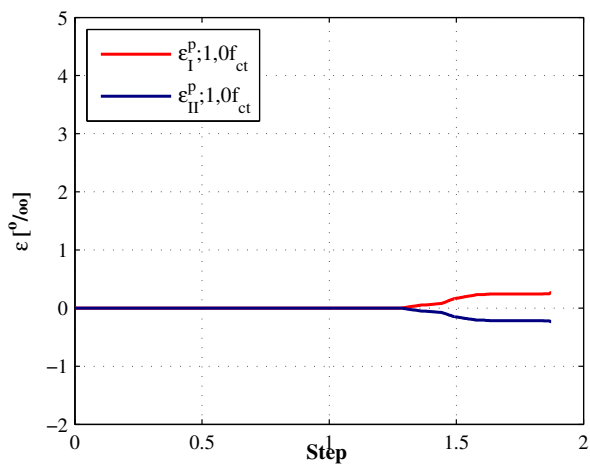
(b) Hauptspannungen 831



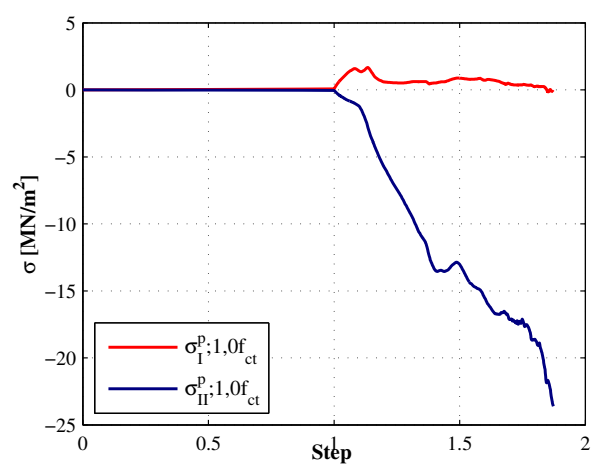
(c) Hauptverzerrungen 828



(d) Hauptspannungen 828



(e) Hauptverzerrungen 366



(f) Hauptspannungen 366

Abbildung 7.25: Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen der Elemente 831, 828 & 366

Gut zu erkennen ist die unterschiedliche Größenordnung der plastischen Verzerrungen. Während bei Element 831 plastische Verzerrungen bis 36‰ auftreten, korrespondierend zu einer betragsmäßig maximalen Druckspannung von $-2,7 \text{ MN/m}^2$, kann die Druckspannung im Element 828 bei plastische Verzerrungen von „nur“ 4,5‰ fast um den Faktor 4 auf $-10,6 \text{ MN/m}^2$ gesteigert werden. In beiden Fällen scheinen die plastischen Verzerrungen so groß zu sein, dass eine starke Entfestigung auch im Druckbereich zu beobachten ist. Im Gegensatz dazu kann die Druckspannung im Element 366 bis zum Ende der Berechnung, d.h. nach Aufbringen des vorgegebenen Weges, gesteigert werden. Die hier auftretenden plastischen Verzerrungen werden im Gegensatz zu den beiden anderen Elementen offenbar hauptsächlich von der Verfestigung im Druckbereich bestimmt und nicht von der Entfestigung aufgrund der Zugdehnungen. Abbildung 7.26 stellt die Verzerrungen und Spannungen der drei Elemente vergleichend gegenüber.

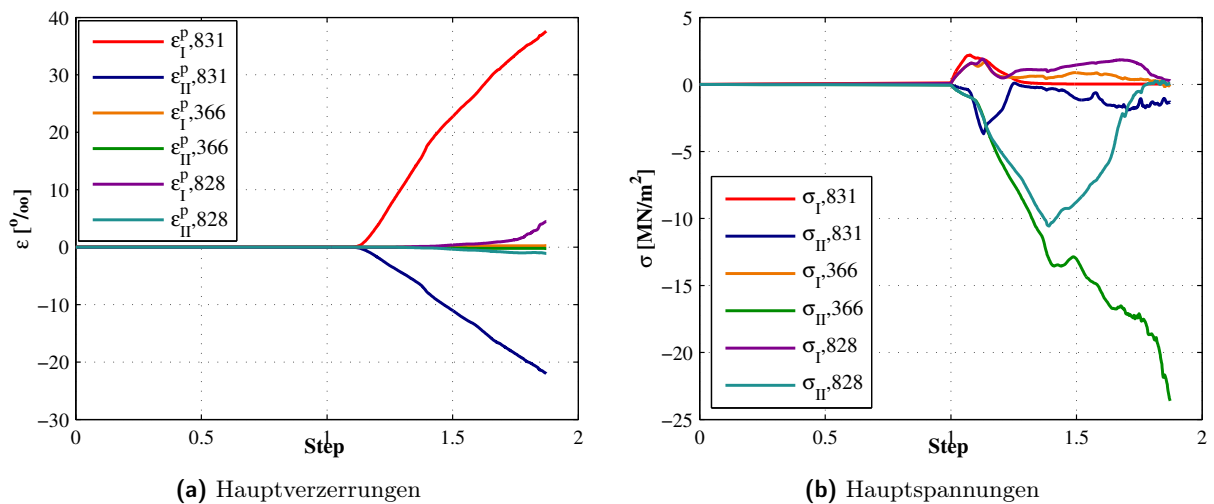


Abbildung 7.26: Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen der betrachteten Elemente

In Abbildung 7.27 ist der Einfluss der Verdoppelung der Zugfestigkeit zu erkennen: Bei den Elementen 828 und 831, bei denen große plastische Zugdehnungen zu einer geringeren Druckspannungsaufnahme führen, ergeben sich durch die Erhöhung der Zugfestigkeit offenbar geringere plastische Verzerrungen und damit auch größere aufnehmbaren Druckspannungen. Der Einfluss ist allerdings bei Element 828 größer als bei Element 831. Hier sind die plastischen Verzerrungen so groß, dass die Erhöhung der Zugfestigkeit keinen ausgeprägten positiven Effekt mehr zu haben scheint. Nachdem das Element einmal vollständig auf Druck entfestigt hat, ist ein erneuter Anstieg der Druckspannungen zu beobachten. Dies ist vermutlich auf den Vorzeichenwechsel der Druckspannungen zurückzuführen, der einer Rissöffnung und -schließung entspricht. Hierdurch wird der Effekt der vorherigen Entfestigung gelöscht, das Element kann wieder den normalen Belastungszyklus durchlaufen. Im Gegensatz dazu ändert sich die aufnehmbare Druckspannung in Element 366 kaum, was für die These spricht, dass hier die plastischen Druckstauchungen die bestimmende Größe sind, und nicht die Zugdehnungen. Der Verlauf der Druckspannungen ist lediglich etwas „glatter“. Abschließend erfolgt in Abbildung 7.28 die Darstellung der Spannungen über die Verzerrungen.

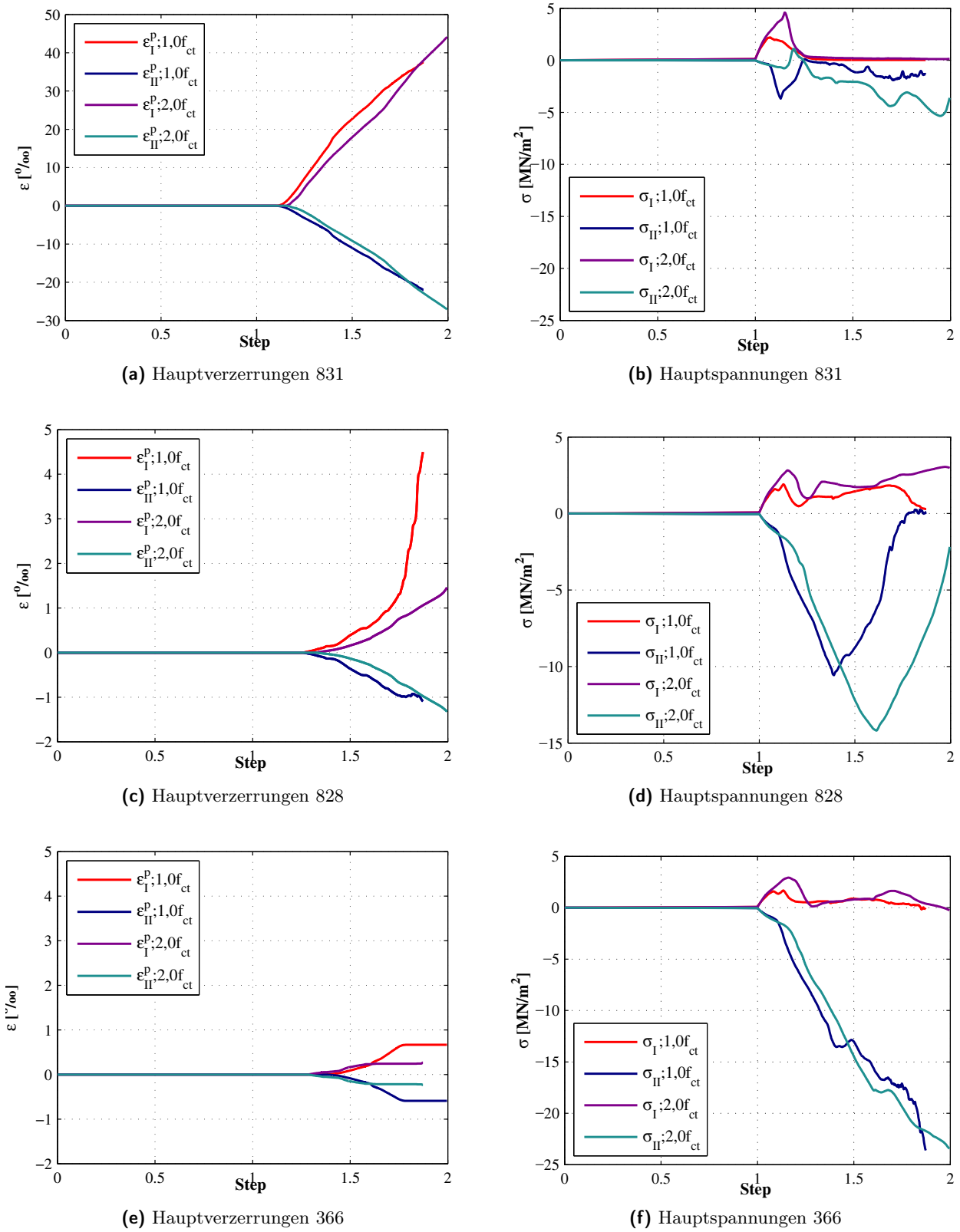
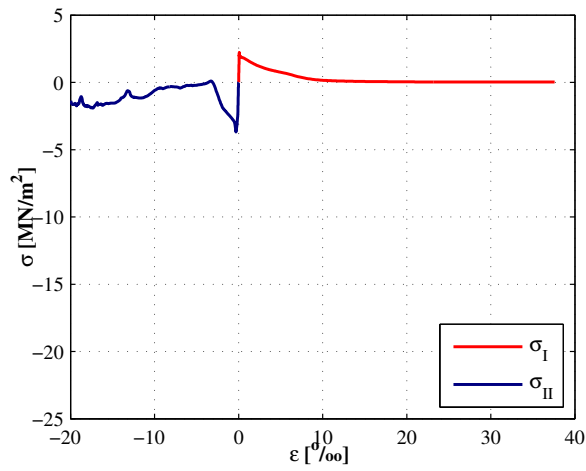
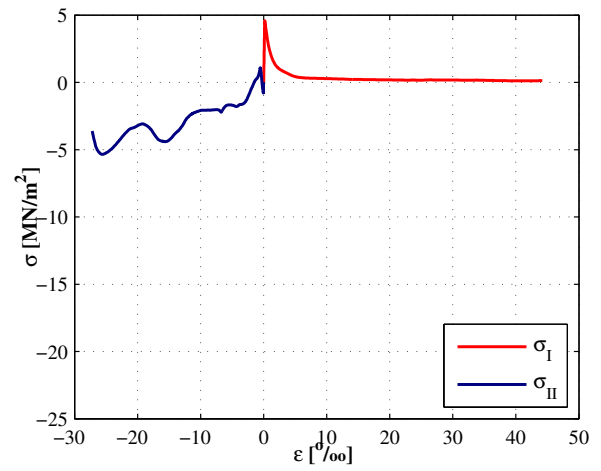


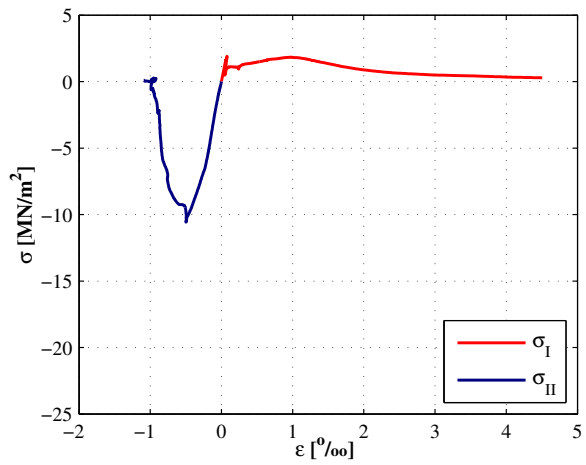
Abbildung 7.27: Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen mit $1,0f_{ct}$ sowie $2,0f_{ct}$



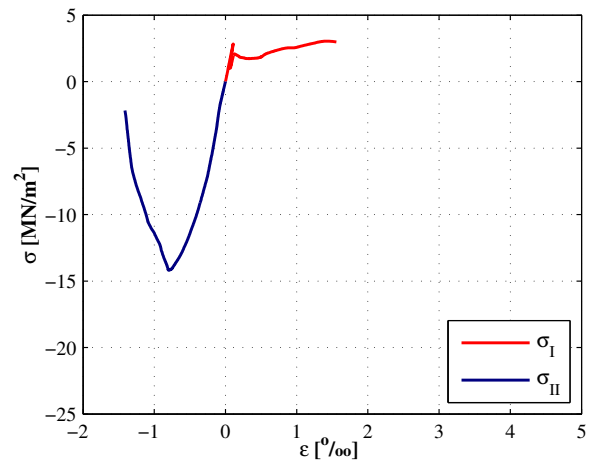
(a) Element 831 1,0 f_{ct}



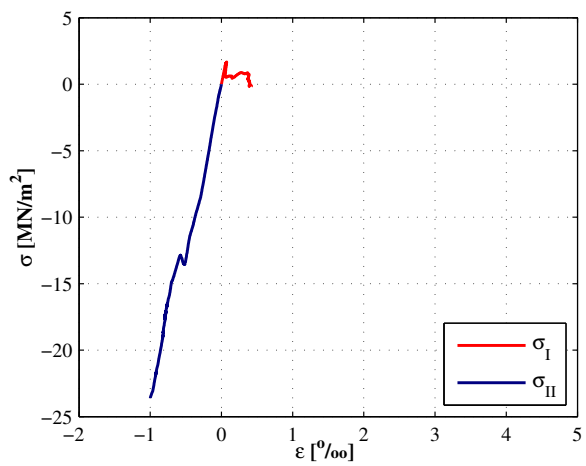
(b) Element 831 2,0 f_{ct}



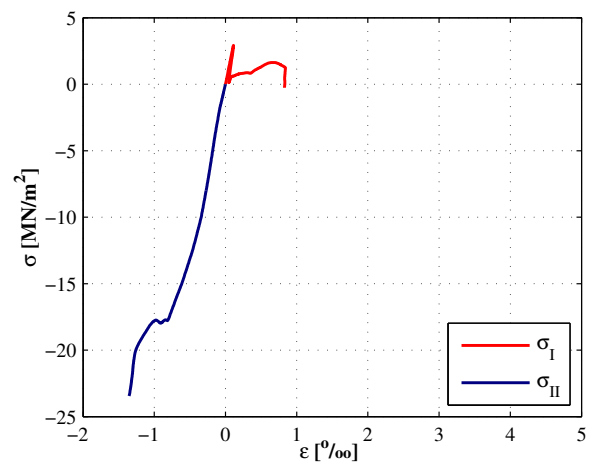
(c) Element 828 1,0 f_{ct}



(d) Element 828 2,0 f_{ct}



(e) Element 366 1,0 f_{ct}



(f) Element 366 2,0 f_{ct}

Abbildung 7.28: Hauptspannungen und -verzerrungen aller Elemente mit 1,0 f_{ct} sowie 2,0 f_{ct}

7.3.4 Bewertung des Materialmodells CDP

Die Nachrechnungen der vorgestellten Balken mit Querkraftversagen mit dem isotropen plastischen Materialmodell *Concrete Damaged Plasticity* lassen deutliche Schwächen erkennen.

Unter Ansatz realistischer Materialparameter, insbesondere der Betonzugfestigkeit, wird in allen Fällen die Traglast massiv unterschätzt. Im Gegensatz zu den Versuchen wird auch der Versagensmechanismus, Schubzugversagen nach Erreichen der Streckgrenze bzw. Bruch der Bügel, bzw. Biegeschubbruch durch Einschnüren der Biegedruckzone, nicht zutreffend wiedergegeben.

Grund hierfür ist die zu ausgeprägte Entfestigung der Elemente im schubbeanspruchten Steg, die auf den isotropen Ansatz zurückzuführen ist. Diese Elemente weisen einen gemischten Hauptspannungszustand mit einer Hauptzugspannung in einer Richtung und einer Hauptdruckbeanspruchung orthogonal dazu auf. Die isotrope Formulierung bewirkt nicht nur eine Entfestigung in Zugrichtung nach Überschreitung der maximal aufnehmbaren Zugspannung, sondern auch eine gleichzeitige Entfestigung in Druckrichtung. Ein ähnliches Phänomen ist das Auftreten von großen plastischen Betonzugdehnungen in den unteren Stegelementen bis in den dreistelligen Promillebereich hinein, die dadurch die aufnehmbare Druckspannung massiv reduzieren. Aufgrund dieser Entfestigung kann sich in der Simulation nicht das im Versuch beobachtete Fachwerkverhalten einstellen. Den Haupttragmechanismus stellt dagegen die Ausbildung einer direkten Betondruckstrebe bzw. eines Druckbogens zum Auflager dar. Damit ähnelt das Modelltragverhalten dem eines Balkens ohne Querkraftbewehrung. Das Versagen des Balkens erfolgt durch Einschnüren dieser Druckstrebe infolge der Entfestigung weiterer Elemente unterhalb der Gurtplatte bei Plattenbalken. Das Versagen wird zwar durch den Schubbewehrungsgrad beeinflusst, wie aus der Analyse des Versuches TA12 ersichtlich ist, letztlich handelt es sich aber um ein Betonversagen. Die Schwäche des Modells ist weniger ausgeprägt, sofern der betrachtete Balken auch in der Realität einen großen Teil der Last über einen Betontraganteil abträgt.

Das Materialmodell CDP ist somit nur bedingt in der Lage, das rissinduziert anisotrope Betontragverhalten bei schubbeanspruchten Balken realistisch abzubilden, da die Entfestigung aufgrund von Zugdehnungen in einer Richtung sich auch auf die Druckfestigkeit quer dazu auswirkt. Diese Problematik besteht bei einem Biegeversagen nicht, da in diesem Fall das Materialverhalten in Richtung senkrecht zur gerissenen Biegezugzone für die Tragfähigkeit keine Rolle spielt.

Obwohl das Materialmodell CDP in der Forschung oft verwendet wird, ist es für die Abbildung des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken nur bedingt geeignet. Wie auch die Nachrechnungen mit dem modifizierten MOHR-COULOMB-Modell zeigen, ist mit anderen Materialmodellen, die die rissinduzierte Anisotropie besser abbilden, die Ausbildung eines Fachwerkes möglich und führt zu realistischeren Ergebnissen bei den Simulationsrechnungen.

7.4 Versuchsnachrechnungen mit dem modifizierten Mohr-Coulomb-Modell (MCTC)

Im folgenden Abschnitt werden die Versuche mit dem selbst entwickelten Modell „MCTC“ nachgerechnet. Es handelt sich hierbei um ein isotropes plastisches Modell auf Basis eines modifizierten MOHR-COULOMB-Bruchkriteriums. Im Gegensatz zum Modell CDP lässt sich jedoch mit diesem Modell die belastungsinduzierte Anisotropie trotz des formal isotropen plastischen Ansatzes besser abbilden. Grund ist die Modifikation der Arbeitslinien des Betons, konkret die Wahl der Zugfestigkeit $f_{ct,mod} = 0,05f_{ctm}$, in Kombination mit elastisch-plastischem Materialverhalten. Da hierdurch keine Entfestigung stattfindet, sondern die vollen Materialfestigkeiten auf Zug und Druck nach Überschreiten der Fließgrenze erhalten bleiben, ist die Druckspannungsübertragung über den Steg auch nach Rissbildung gewährleistet. Da es mit dem modifizierten MOHR-COULOMB-Kriterium für den Druckbereich nicht möglich ist, die höhere Druckfestigkeit infolge zwei- oder dreiaxialer Druckspannungszustände abzubilden, an den Lasteinleitungsplatten jedoch Spannungsspitzen auftreten, wird die Druckfestigkeit im Modell erhöht.

7.4.1 Nachrechnung Versuchsserie 1

Modellierung Die Strukturmodellierung der Balken entspricht der in Abschnitt 7.3, es wird lediglich das Materialgesetz für Beton ausgetauscht. Als einzige weitere Modifikation wird der E-Modul der Stahlplatten herabgesetzt, um Spannungsspitzen an der Lasteinleitung und am Auflager zu minimieren.

Vergleich der Bruchlasten In der folgenden Tabelle 7.11 werden die Bruchlasten der Versuche den Berechnungsergebnissen der FEM-Simulation gegenüber gestellt. Die Simulationen mit dem

Tabelle 7.11: Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3 mit MCTC

		ET2	ET3
F_{test}	[kN]	263	255
F_{MCTC}	[kN]	(268,8) 280,2	234,8 (251,6)

Beton-Materialmodell auf Basis eines modifizierten MOHR-COULOMB-Kriteriums führen zu deutlich höheren Bruchlasten im Vergleich zu den Berechnungen mit dem Modell CDP. Es werden im Falle des Trägers ET2 die Bruchlasten sogar überschätzt. Allerdings ist dies auch der höher gewählten Druckfestigkeit geschuldet, worauf im Weiterem noch eingegangen wird. Ein weiterer Einfluss auf die Traglast ist die Breite der Lasteinleitungsplatte, bezogen auf die Stegbreite. Auch auf dieses Phänomen wird später eingegangen. Die Bruchlasten in der ersten Zeile ergeben sich mit einer Breite von 100mm (bzw. 50mm am halben System), was der Stegbreite des ET3 entspricht. Die Werte in der zweiten Zeile resultieren aus der Berechnung mit einer Plattenbreite von 150mm (bzw. 75mm am halben System), der Stegbreite des ET2. Die Werte in Klammern beziehen sich immer auf die Breite, die nicht zur tatsächlichen Stegbreite korrespondiert.

7.4.1.1 Ergebnisse Balken ET3

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Die Last-Verformungskurve der Simulation des Trägers ET3 mit dem Materialmodell auf Basis eines modifizierten MOHR-COULOMB-Kriteriums zeichnet sich durch die sehr frühe Rissbildung mit damit einhergehendem Steifigkeitsverlust aus und verläuft im Anschluss nahezu linear. Die Steifigkeit des Systems wird anfänglich aufgrund der fehlenden Mitwirkung des Betons auf Zug unterschätzt, im späteren Belastungsstadium dann aufgrund der linear-elastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Druckbereich überschätzt. Die Traglast aus dem Versuch wird nicht ganz erreicht, die Unterschreitung mit diesem Modell beträgt knapp 8%.

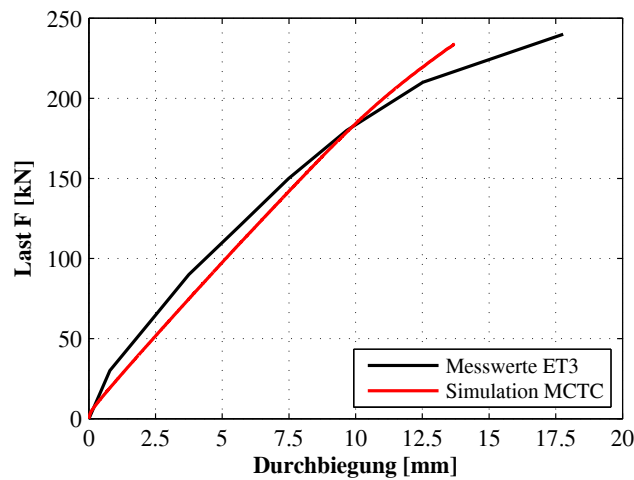


Abbildung 7.29: Last-Verformungskurven des Balkens ET3 mit dem MCTC-Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Im Folgenden werden die Hauptdruckspannungen sowie die Hauptzugdehnungen des Betons als Höhenplot dargestellt. Die maximalen plastischen Hauptzugdehnungen betragen maximal 8,27‰, sind also deutlich geringer als bei der Berechnung mit dem Materialmodell CDP. Die Verteilung der Spannungen und Verzerrungen ist deutlich gleichmäßiger als mit dem CDP-

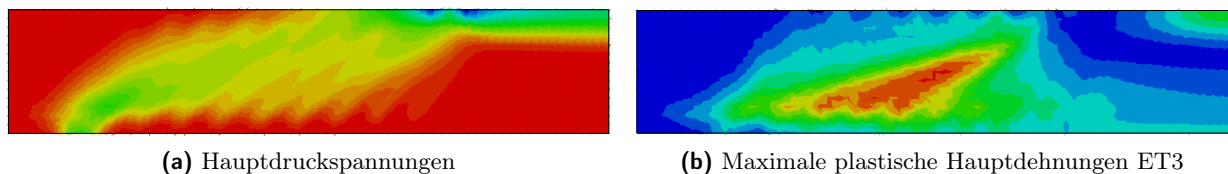


Abbildung 7.30: Maximale plastischen Betondehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens ET3 mit MCTC

Modell und es lässt sich aus dem Höhenplot ablesen, dass auch die Bügel in größerem Umfang am Lastabtrag beteiligt werden. Jedoch lässt sich auch hier erkennen, dass ein Teil der Spannungen offenbar über eine direkte Druckstrebenwirkung oder einen Druckbogen in die Auflager geleitet wird. Die maximale Druckspannung wird an der Lasteinleitungsplatte mit $41,0 \text{ MN/m}^2$ erreicht.

Da in der Nähe der Lasteinleitungsplatten aufgrund der starren Verbindung im numerischen Modell Spannungsspitzen unvermeidlich sind, wurde zum einen zur Verringerung dieser Spannungsspitzen der E-Modul der Stahlplatten herabgesetzt, zum anderen wurden für die Betonfestigkeit höhere Werte als f_{cm} gewählt. Ob das Modell ggf. auf Druck im Bereich der Biegedruckzone oder gar bei dünnen Stegen durch einen Stegdruckbruch versagt, lässt sich nur händisch durch eine Kontrolle der Druckspannungen in den relevanten Bereichen feststellen.

Aus Abbildung 7.32 ist erkennbar, dass der Verlauf der Druckspannungstrajektorien über die Höhe sowie entlang der Längsachse des Trägers veränderlich ist. Im Schubfeld ist sie flacher, in der Nähe der Lasteinleitung und des Auflagers steiler. Daher ist die Bestimmung eines Druckstreben- bzw. Risswinkels nicht eindeutig möglich. Er liegt im Mittel bei ca. $24-26^\circ$ und ist damit deutlich flacher als die nach klassischer Fachwerktheorie erwarteten 40° , allerdings auch etwas flacher als die im Versuch beobachteten Risswinkel, die ca. 30° betragen.

Analyse der Bügelspannungen Der deutlich andere Lastabtrag im Vergleich zu den Nachrechnung mit dem Materialmodell CDP lässt sich durch eine Analyse der Bügelspannungen und plastischen Bügeldehnungen bestätigen. Aus Abbildung 7.31 ist ersichtlich, dass alle Bügel im querkraftrelevanten Bereich fließen, die Maximalwerte der plastischen Dehnung betragen im vorliegenden Fall $4,2\%$. Dies korrespondiert auch zum Spannungsverlauf in den Bügeln. Die Bügel sind im Querkraftbereich voll ausgenutzt.

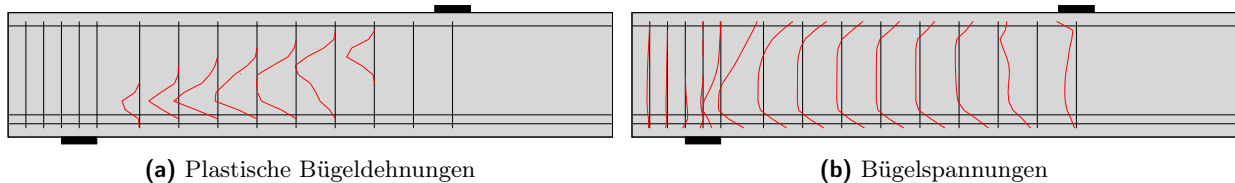


Abbildung 7.31: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET3 mit MCTC

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Analysiert man die Trajektorien der Hauptdruckspannungen sowie der plastischen Zugdehnungen, lassen sich deutliche Unterschiede zum Tragverhalten des CDP-Modells feststellen. Die Hauptdruckspannungen sind gleichmäßig über den Steg verteilt und es ist klar ersichtlich, dass sie sich in die Bügel abstützen. Die Richtung der Trajektorien entspricht der Rissrichtung im verschmierten Rissmodell. Wie schon aus den Bügelspannungen bzw. -dehnungen erkennbar ist, bildet sich hier im Gegensatz zum CDP-Modell das erwartete Fachwerktragverhalten aus. Die Hauptzugdehnungen sind ebenfalls im gesamten Steg verteilt. Es ist sozusagen der gesamte Stegbereich gerissen. Interessant ist ferner, dass im Gegensatz zum CDP-Modell keine Beeinflussung der Drucktragfähigkeit durch die plastischen Zugdehnungen stattfindet, wie aus den Abbildungen 7.32 bzw. 7.33 ersichtlich ist. Auch in Bereichen großer Zugdehnungen können die Druckspannungen noch voll übertragen werden. Dies ist darin begründet, dass zwar ein isotropes Versagenskriterium gewählt wurde, die Anisotropie des Betons aufgrund der extrem kleinen Zugfestigkeit jedoch gut abgebildet werden kann. Mit dem vorliegenden Modell

wird der reale Versagensmechanismus, nämlich ein Schubzugbruch durch Bügelfließen, grundsätzlich richtig wiedergegeben.

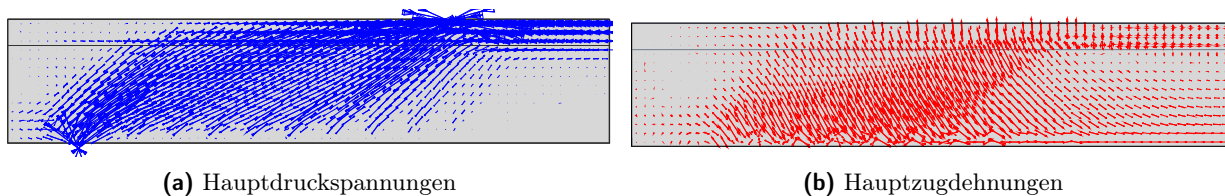


Abbildung 7.32: Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens ET3 mit MCTC

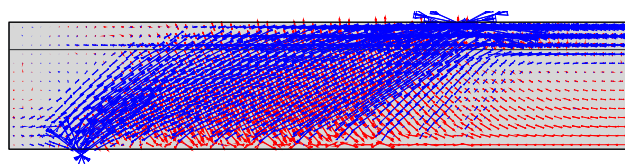


Abbildung 7.33: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens ET3 mit MCTC

Aus dem Verlauf der plastischen Bügeldehnungen wie auch aus dem Höhenplot der Hauptdruckspannungen des Betons lässt sich erkennen, dass neben der reinen Fachwerktragwirkung jedoch auch noch ein weiterer Traganteil eine Rolle zu spielen scheint. Die Intensität der Hauptdruckspannungen deutet auf einen Betontraganteil in Form einer direkten Druckstrebe bzw. eines Druckbogens hin. Diese These wird dadurch gestützt, dass die Bügel in der Nähe des Auflagers lediglich in den unteren Bereichen bzw. gar nicht mehr fließen. Insbesondere in der Nähe des Auflagers erfolgt der Lastabtrag somit nicht mehr hauptsächlich durch das Fachwerk, sondern durch den zusätzlichen Betontraganteil in Form einer direkten Abstützung auf das Auflager.

Einfluss der Querdehnung auf die Stegtragfähigkeit Wie bereits erwähnt, kann im Materialmodell MCTC der Einfluss der Querdehnung auf die Tragfähigkeit der Druckstreben im Steg nicht berücksichtigt werden. Die Hauptdruckspannungen liegen im vorliegenden Fall jedoch ebenso unter dem in EUROCODE 2 [3] bzw. [2] auf $f_{cw} = 0,75f_{cm}$ festgelegten Wert der Stegdruckfestigkeit, wie auch unterhalb der Empfehlungen der FIB, nach denen $f_{cw} = 0,8f_{cm}$ zulässig ist. Somit hätte eine Abminderung der Tragfähigkeit auf o.g. Werte keinen Einfluss auf die Ergebnisse.

In Abbildung 7.34 sind die Bereiche mit Spannungen $\sigma_c \geq 0,75f_{cm}$ dunkelgrau dargestellt. Lediglich im Bereich der Biegedruckzone werden derart große Werte erreicht. Allerdings ist diese Überschreitung unkritisch zu sehen, da im MCTC-Modell ein linear-elastischer Spannungsverlauf vorhanden ist. Real bildet sich infolge plastischen Fließens ein parabelförmiger Verlauf über die Druckzonenhöhe aus. Diese Spannungsumlagerung kann mit dem Modell nicht abgebildet werden. Über einen Vergleich der Völligkeitsbeiwerte kann aber belegt werden, dass eine Überschreitung der Druckfestigkeit in der Biegedruckzone unkritisch ist. Während ein dreieckiger Verlauf mit einem Völligkeitsbeiwert von 0,5 korrespondiert, besitzt der nicht-lineare, parabelförmige Verlauf eine Völligkeit von ca. 0,8,

d.h. die parabelförmige Fläche ist 1,6mal größer. Somit sind nach Erreichen der Druckfestigkeit am oberen Rand noch ausreichend Spannungsreserven vorhanden.

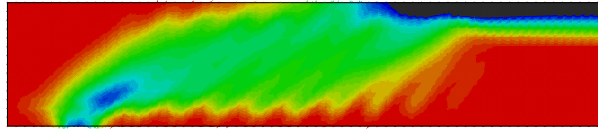


Abbildung 7.34: Hauptdruckspannungen des Balkens ET3 mit $\sigma_{II} \leq 0,75f_{cm}$

7.4.1.2 Ergebnisse Balken ET2

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Der Träger verhält sich in der Nachrechnung mit dem MCTC-Modell ähnlich wie Träger ET3, d.h. zunächst aufgrund der geringen Zugfestigkeit zu weich sowie im weiteren Verlauf zu steif, da der Steifigkeitsabfall für den Druckbereich nicht abgebildet werden kann. Die Traglast wird unter Ansatz einer Druckfestigkeit von 48 MN/m^2 mit 286 kN relativ deutlich überschätzt.

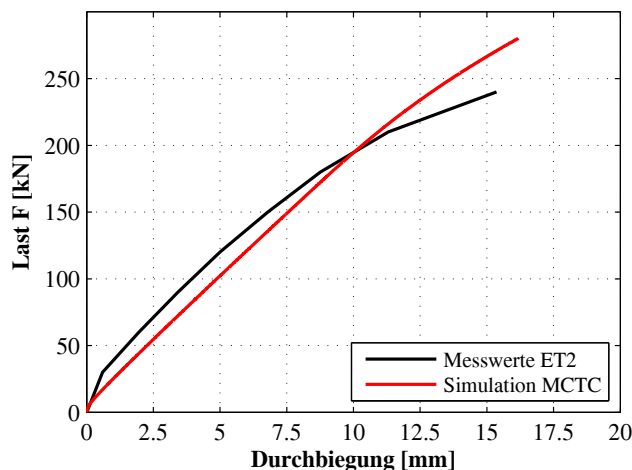


Abbildung 7.35: Last-Verformungskurven des Balkens ET2 mit dem MCTC-Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Im Folgenden werden die Hauptdruckspannungen sowie die Hauptzugdehnungen des Betons als Höhenplot dargestellt. Wiederum ist die großflächige, verschmierte Rissbildung gut zu erkennen. Die plastischen Hauptzugdehnungen betragen maximal $12,2\%$. Die Verteilung der Hauptdruckspannungen über die Steghöhe erscheint hier weniger gleichmäßig als bei dem Balken ET3. Dies deutet auf ein vergleichsweise weniger ausgeprägtes Fachwerktragverhalten, dafür aber einen größeren Traganteil über eine direkte Druckstrebe zum Auflager hin. Allerdings ist das Ergebnis aufgrund der größeren Stegdicke etwas verfälscht. Im Inneren des Steges, in der Symmetrieachse, stellen sich die Spannungen so dar wie in Abbildung 7.36. Betrachtet man die Ebene, in der die Bügel liegen, ist eine gleichmäßigere Spannungsverteilung vorhanden, d.h. die Druckstreben, die sich in die Bügel stützen, sind klar erkennbar.

Die „mittleren“ Risswinkel sind etwas flacher als beim Balken ET3 und betragen ca. 23° - 24° , wie aus Abbildung 7.40 erkennbar ist.

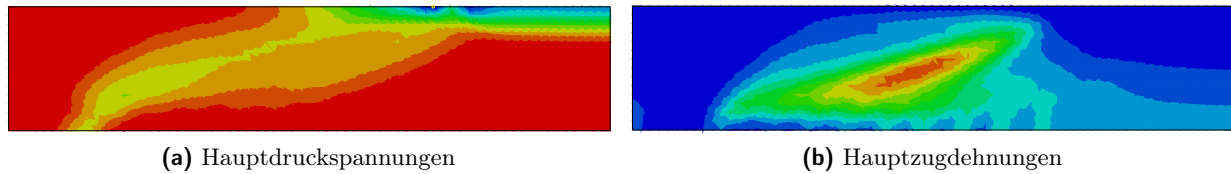


Abbildung 7.36: Maximale plastischen Betondehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens ET2 mit MCTC

Die Überschätzung der Traglast mit dem Ansatz der erhöhten Druckfestigkeit ist aus Abbildung 7.37 gut erkennbar. In der Biegedruckzone wird der Wert der realen Druckfestigkeit überschritten. Die reale Druckfestigkeit wird am Rand bei einer Last von ca. 214kN erreicht. Auch hier handelt es sich jedoch, wie schon zuvor dargestellt, um einen linear-elastischen Spannungsverlauf im Gegensatz zur real nichtlinearen parabelförmigen Verteilung. Somit ist die Last bei Erreichen der Druckfestigkeit am Rand auf der sicheren Seite als untere Grenze anzusehen. Aus Abbildung 7.37 ist auch ersichtlich, dass die Spannungen in den Druckstreben selbst in der hohen Laststufe weniger als $\sigma_c = 0,75f_{cm}$ betragen. Somit hat die fehlende Möglichkeit einer Abminderung der Druckfestigkeit im Steg infolge Querkzug in diesem Fall erneut keinen Einfluss auf das Ergebnis.

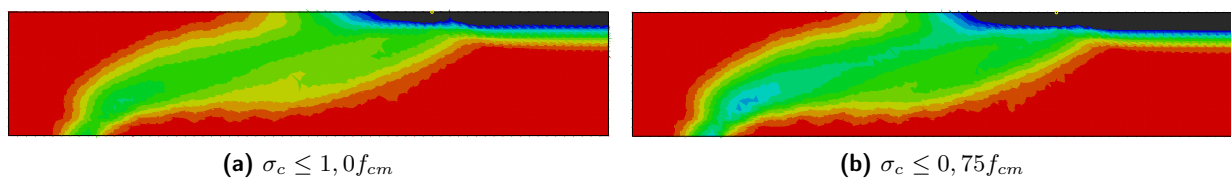


Abbildung 7.37: Hauptdruckspannungen des Balkens ET2 mit $\sigma_c \le 1,0f_{cm}$ bzw. $\sigma_c \le 0,75f_{cm}$

Analyse der Bügelspannungen Aus Abbildung 7.38 ist ersichtlich, dass alle Bügel im querkraftrelevanten Bereich fließen. Die zur letzten Laststufe gehörigen plastischen Bügeldehnungen ergeben

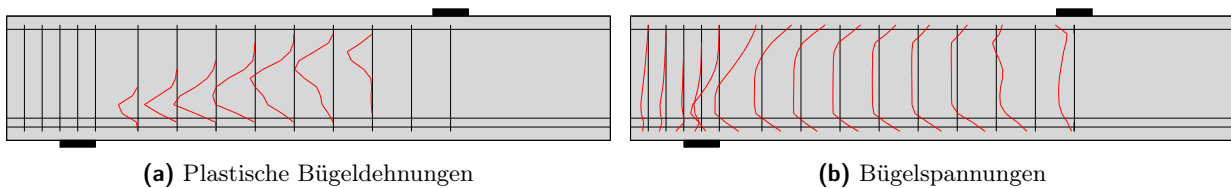


Abbildung 7.38: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET2 mit MCTC

sich zu 7,4%. Dies korrespondiert auch zum Spannungsverlauf in den Bügeln. Die Bügel im Schubfeld sind voll ausgenutzt. Allerdings sind im Modell vermutlich nicht die Bügel maßgebend für die Traglast, sondern die Druckfestigkeit im Lasteinleitungsbereich, wie die Rechnungen mit höheren Festigkeiten zeigen. In der Simulation sind Bügeldehnungen bis zu 9,2 % vorhanden, Werte, die

deutlich über den real im Versuch dokumentierten Dehnungen liegen. Dies korrespondiert zu den im Vergleich zum Versuch höheren Traglasten. Möglicherweise sind diese auf eine stärkere Rotation der Druckstreben im Modell zurückzuführen.

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Der Balken ET2 verhält sich im Modell ähnlich wie der Balken ET3 und bestätigt damit die Modellannahmen. Es ist erkennbar, dass sich die Hauptdruckspannungen zum einen in die Bügel stützen, zum anderen deutet die höhere Intensität in einem Band von Lasteinleitung zum Auflager auf einen weiteren Betontragnanteil hin. Bei höheren Laststufen scheint der Lastabtrag über den Betonanteil zuzunehmen. Es wird weiterhin erneut deutlich, dass die Tragfähigkeit auf Druck unabhängig von den plastischen Zugdehnungen ist. Wie die Überlagerung der beiden Trajektorien in Abbildung 7.40 zeigt, herrschen in den Stegelementen sowohl große plastische Dehnungen als auch hohe Druckspannungen.

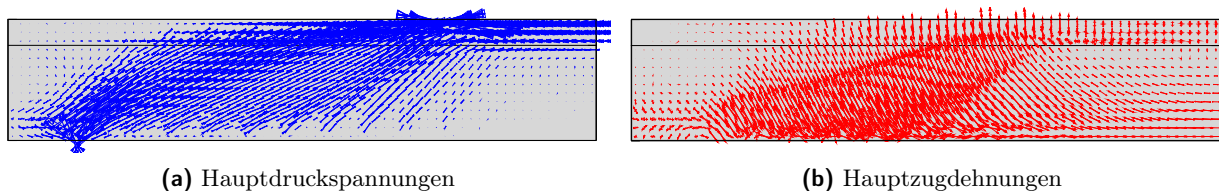


Abbildung 7.39: Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens ET2 mit MCTC

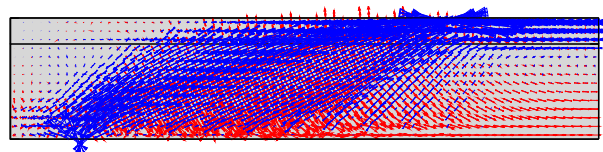


Abbildung 7.40: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens ET2 mit MCTC

Einfluss der Größe der Lasteinleitungsplatte Im Zuge der Nachrechnungen hat sich herausgestellt, dass die Breite der Lasteinleitungsplatte in Stegdickenrichtung einen Einfluss auf die Größe der Traglast hat. Eine größere Lasteinleitungsplatte führt zu einer höheren Traglast. Vermutlich hängt dies mit einer veränderten Spannungsverteilung in der Umgebung der Lasteinleitungsplatte zusammen, bei der die Verbreiterung der Platte zu einer Vergleichmäßigung der Spannungen und damit zu geringeren Spannungsspitzen führt.

In der folgenden Tabelle sind die Traglasten für drei verschiedene Breiten bzw. Tiefen der Lasteinleitungsplatte zusammengestellt: Einmal wird die Platte so breit wie der Steg von ET3 gewählt, einmal so breit wie der Steg von ET2 und einmal über die komplette Gurtbreite. In allen Fällen erreicht der Balken ET2 eine höhere Traglast als der Balken ET3. Die Unterschiede zwischen der kleinsten und größten Plattentiefe betragen fast 50kN beim ET3, beim ET2 nur 30kN. Allerdings sind die Traglasten sowie die Größe des Einflusses der Plattenabmessung kritisch zu hinterfragen. Zum einen sind bei den Simulationen mit diesem Modell teilweise Stabilitätsprobleme zu beobach-

Tabelle 7.12: Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3

		b=50mm	b=100mm	$b = b_G$
ET3	[kN]	234,8	251,6	285,5
ET2	[kN]	268,8	280,2	299,8

ten, d.h. die Rechnung bricht aufgrund von Konvergenzproblemen ab, nicht, weil die physikalische Traglast erreicht ist. Da die Konvergenzschwierigkeiten auch mit Spannungssingularitäten zusammenhängen können, führt eine breitere Platte ggf. zu einem stabileren Rechenlauf. Zum anderen ist das Problem der Spannungsspitzen in der Realität nicht so ausgeprägt, da dort zum einen keine starre Kopplung zwischen Platte und Betonkörper herrscht und die Spannungsspitzen zum anderen aufgrund der höheren dreiaxialen Betondruckfestigkeit und Umlagerungsmöglichkeiten infolge von Plastifizierungen nicht zum Versagen führen.

7.4.2 Nachrechnung Versuchsserie 2

7.4.2.1 Ergebnisse Balken TA11

Vergleich der Bruchlasten Die Ergebnisse für die Träger TA11, TA12 und TA15 bestätigen die Eignung des MCTC-Modells. Im Falle des Balkens TA11 werden die Bruchlasten um 12% unterschätzt, bei Balken TA12 sogar ganz geringfügig überschätzt. Allerdings werden dort größere plastische Dehnungen in Beton und Bewehrung erreicht. Auch die Druckspannungen im Beton erreichen eher kritische Werte, z.B. bezogen auf die Biege- oder Stegdruckfestigkeit. Die rechneri-

Tabelle 7.13: Vergleich der Bruchlasten der Balken TA11, TA12 & TA15 mit MCTC

		TA11	TA12	TA15
F_{test}	[kN]	684	540	596
F_{MCTC}	[kN]	599	544	(550)

sche Traglast des Balkens TA15 lässt sich nicht eindeutig bestimmen, da sich TA11 und TA15 nur durch die Betonfestigkeit unterscheiden. Es kann durch Überprüfung der Betonfestigkeit ein Anhaltswert für die Traglast ermittelt werden. Die vergleichsweise geringe Traglast des Balkens TA11 im Vergleich zu TA12, die auch zu relativ geringen Beton- und Stahldehnungen korrespondiert, ist z.T. auf numerische Effekte zurückzuführen. Wie bereits ausgeführt, weisen die Berechnungen mit dem MOHR-COULOMB-Modell aufgrund der sehr geringen Zugfestigkeit, die in großem Maß Spannungsumlagerungen erfordert, teilweise numerische Instabilitäten auf. Der Abbruch einer Berechnung aufgrund mangelnder Konvergenz hängt somit nicht zwangsläufig mit dem Erreichen der physikalischen Traglast zusammen. Allerdings ist aufgrund der Größe der Betondruckspannungen die erreichte Traglast durchaus plausibel.

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Es kann das schon bekannte Tragverhalten beobachtet werden: Der Träger verhält sich in der Nachrechnung mit dem MCTC-Kriterium anfänglich zu weich, im weiteren Belastungsverlauf dann zu steif, wie Abbildung 7.41 belegt.

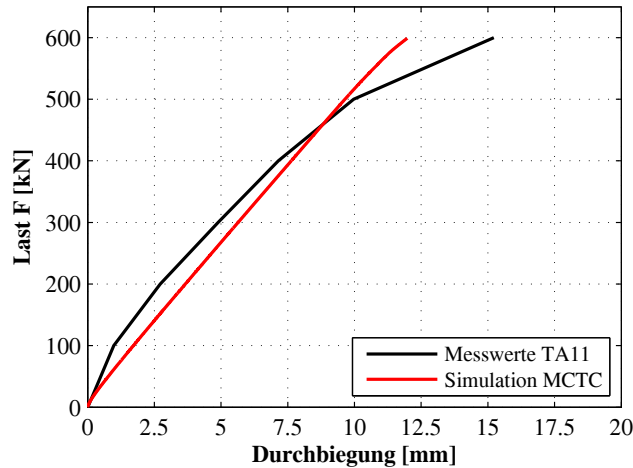


Abbildung 7.41: Last-Verformungskurven des Balkens TA11 mit dem MCTC-Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Die Verteilung der Hauptdruckspannungen sowie plastischen Dehnungen entspricht den bisherigen Ergebnissen mit dem MCTC-Modell. Der Steg ist gleichmäßig „gerissen“; der Lastabtrag erfolgt auch hier über den schon beschriebenen kombinierten Mechanismus aus Fachwerk und zusätzlichem Betontraganteil in Form einer Betondruckstrebe bzw. eines Druckbogens. Aufgrund der geringeren Intensität der Druckspannungstrajektorien scheint dieser Traganteil weniger stark ausgeprägt zu sein als beispielsweise beim ET2. Die maximalen plastischen Hauptzugdehnungen im Beton betragen 6,4‰. Auch hier wurde eine höhere Druckfestigkeit angesetzt, um

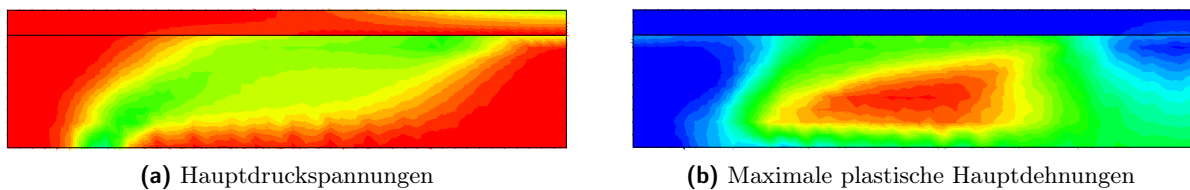


Abbildung 7.42: Maximale plastische Betondehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens TA11 mit MCTC

Spannungsspitzen an den Lasteinleitungsbereichen auszugleichen. Stellt man die Bereiche mit Spannungen $\sigma_c \leq 1,0f_{cm}$ bzw. $\sigma_c \leq 0,75f_{cm}$ dar (s. Abbildung 7.43, ist erkennbar, dass im Bereich der maximalen Momente in der Biegedruckzone die Druckfestigkeit unter Ansatz des linear-elastischen Materialverhaltens überschritten wird. Dies korrespondiert zum angesprochenen Biegeschubbruch. Im Bereich des Steges werden lediglich direkt am Auflager höhere Werte als $\sigma_c = 0,75f_{cm}$ erreicht. Eine Abminderung der Festigkeit auf diesen Wert ist in diesem Bereich jedoch noch nicht erforder-

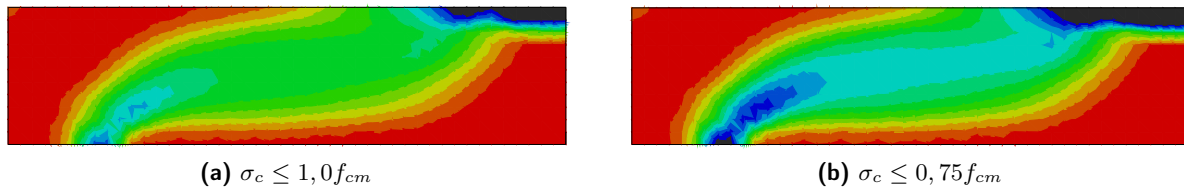


Abbildung 7.43: Hauptdruckspannungen mit $\sigma_c \leq 1,0 f_{cm}$ bzw. $\sigma_c \leq 0,75 f_{cm}$

lich, da dort kaum laterale Dehnungen auftreten, wie aus der Verteilung der plastischen Dehnungen in Abbildung 7.42 ersichtlich ist.

Der Druckstrebenwinkel, der im MCTC-Modell dem Risswinkel entspricht, beträgt lediglich ca. 26-27° in der letzten Laststufe. Im Bereich der Auflager kommt es zu geringfügigen Zugspannungen in der oberen Längsbewehrung $\sigma_{sl} \leq 10 \text{ MN/m}^2$.

Analyse der Bügelspannungen Bei den Bügeln zwischen Lasteinleitungsbereich und Auflager wird die Fließgrenze überschritten. Die Spannungsverteilung der Bügel ist sehr gleichmäßig, was für das erwartete Fachwerktragverhalten spricht. Die plastischen Bügeldehnungen betragen lediglich

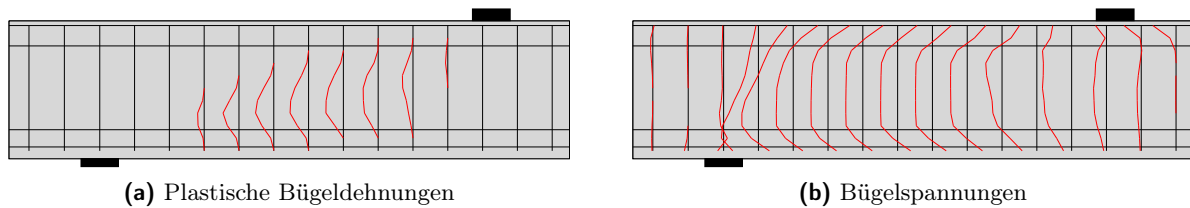


Abbildung 7.44: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA11 mit MCTC

bis zu 1,4‰. Aufgrund der relativ kleinen plastischen Dehnungen und der vergleichsweise großen Ausnutzung der Betondruckspannungen handelt es sich nicht um ein eindeutiges Bügelversagen. Dies stimmt jedoch grundsätzlich mit dem Versuch überein, bei dem es zu einem Biegeschubbruch mit gleichzeitigem Fließen der Bügel sowie Versagen der Biegedruckzone kam.

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Die Verläufe der Druckspannungstrajektorien sowie der plastischen Zugdehnungen bestätigen die Ergebnisse aus Abbildung 7.42. Die gleichmäßige Verteilung der Druckspannungen weist darauf hin, dass sich die Druck-

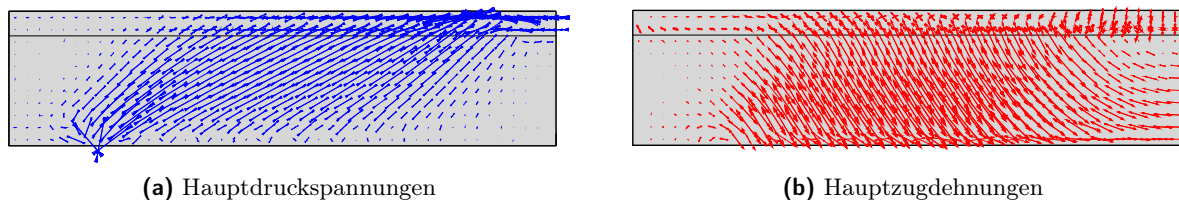


Abbildung 7.45: Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens TA11 mit MCTC

spannungen in die Bügel stützen. Ebenso wird deutlich, dass die plastischen Zugdehnungen die Ausbildung der Betondruckstreben nicht beeinflussen.

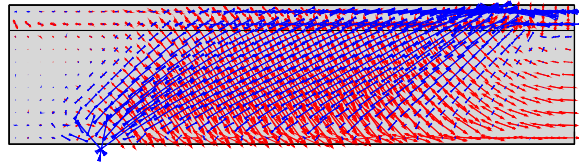


Abbildung 7.46: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens TA11 mit MCTC

7.4.2.2 Ergebnisse Balken TA12

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Das Tragverhalten des Balkens TA12 stimmt qualitativ mit dem von TA11 überein. Aus Abbildung 7.47 ist erkennbar, dass der geringere Schubbewehrungsgrad einen Einfluss auf die Traglast und die Steifigkeit des Trägers im Vergleich zu TA11 hat.

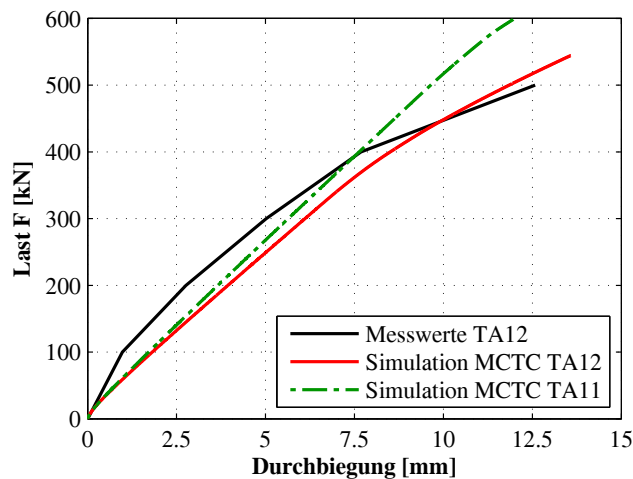


Abbildung 7.47: Last-Verformungskurven des Balkens TA12 mit dem MCTC-Modell

Die Traglast wird hier im Vergleich zum Versuch überschätzt. Die Größe der Betondruckspannungen sowie der plastischen Dehnungen deuten jedoch daraufhin, dass die Traglast vermutlich kleiner ist, wenn die tatsächliche Druckfestigkeit zugrunde gelegt wird.

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Die Verläufe der Betondruckspannungen und der plastischen Zugdehnungen ähneln stark denen des Trägers TA11; die plastischen Betondehnungen betragen allerdings bis zu 16‰.

Aus der Darstellung der Betondruckspannungen mit den Grenzwerten $\sigma_c \leq 1,0f_{cm}$ bzw. $\sigma_c \leq 0,75f_{cm}$, ist erkennbar, dass bei der maximalen Traglast nicht nur im Bereich der maximalen Mo-

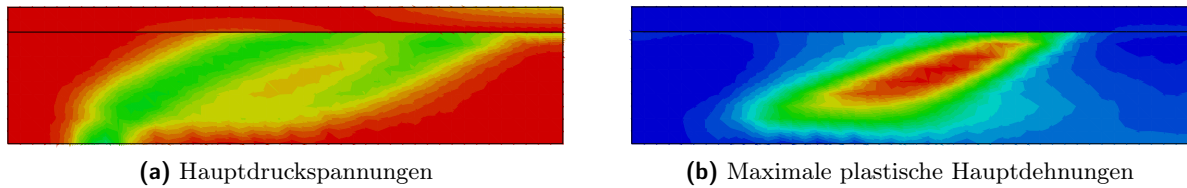


Abbildung 7.48: Maximale plastischen Betondehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens TA12 mit MCTC

mente in der Biegedruckzone die Druckfestigkeit unter Ansatz des linear-elastischen Materialverhaltens überschritten wird, sondern auch im Bereich des Steges Werte $\sigma_c \geq 0,75f_{cm}$ erreicht werden. In Kombination mit den relativ großen plastischen Zugdehnungen im Beton und in der Bewehrung spricht dies dafür, dass die numerisch ermittelte Traglast zu groß ist und mit dem erhöhten Wert der Betondruckfestigkeit zusammenhängt. Der Grenzwert $\sigma_c = 0,75f_{cm}$ im Steg wird bei einer Laststufe von $F=502\text{kN}$ erreicht. Dies entspricht 93% der realen Traglast und erscheint realistisch. Der Risswinkel ist bei Balken TA12 noch einmal flacher als bei den bisher betrachteten Balken und liegt bei ca. 24° .

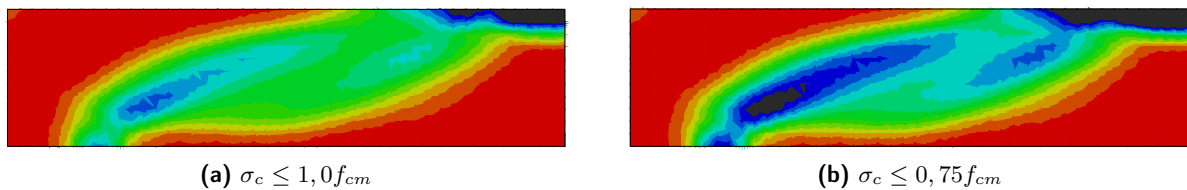


Abbildung 7.49: Hauptdruckspannungen von TA12 mit $\sigma_c \leq 1,0f_{cm}$ bzw. $\sigma_c \leq 0,75f_{cm}$

Analyse der Bügelspannungen Bei der errechneten maximalen Last von $F=544\text{kN}$ betragen die plastischen Bügeldehnungen bis zu 10%. Bei der aus der Beschränkung der Stegdruckfestigkeit

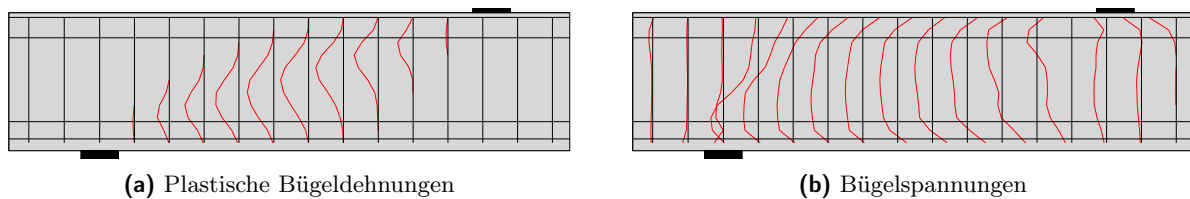


Abbildung 7.50: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA12 mit MCTC

ermittelten Last von $F=502\text{kN}$ werden plastische Bügeldehnungen von maximal 7% erreicht. Die Bügel fließen auch hier und die gleichmäßige Spannungsverteilung spricht ebenso wie die Spannungsverteilung im Beton dafür, dass sich das erwartete Fachwerktragverhalten einstellt.

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Die Trajektorien von Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptzugdehnungen im Beton zeigen das schon bekannte

fachwerkähnliche Tragverhalten überlagert mit einer Druckstrebenwirkung. Die Zugdehnungen beeinflussen nicht den Verlauf der Druckspannungstrajektorien.

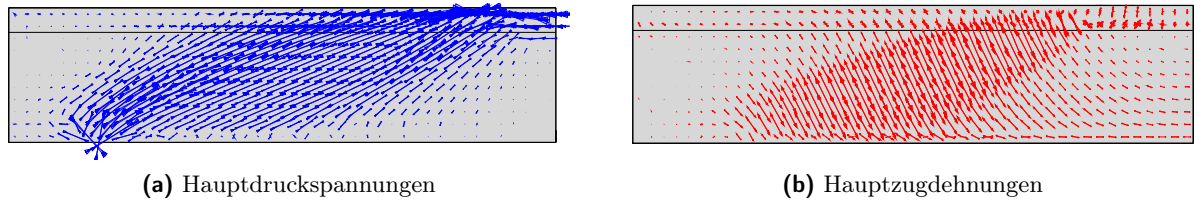


Abbildung 7.51: Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens TA12 mit MCTC

In Abbildung 7.52 sind die Trajektorien der Hauptdruckspannungen von TA11 und TA12 vergleichend gegenübergestellt. Der flachere Verlauf sowie die deutlichere Ausbildung eines Spannungsfeldes in Richtung Auflager scheint dafür zu sprechen, dass geringere Schubbewehrungsgrade zu flacheren Druckstreben führen.

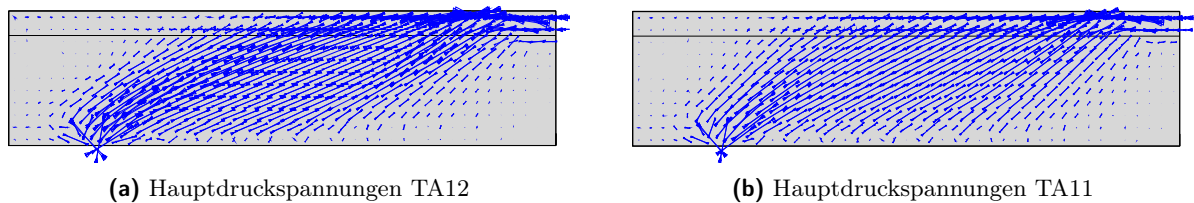


Abbildung 7.52: Trajektorien der Hauptdruckspannungen TA12 im Vergleich zu TA11

feldes in Richtung Auflager scheint dafür zu sprechen, dass geringere Schubbewehrungsgrade zu flacheren Druckstreben führen.

7.4.2.3 Ergebnisse Balken TA15

Der Balken TA15 unterscheidet sich durch die geringere Betondruckfestigkeit und den geringeren E-Modul vom Balken TA11. Da im MOHR-COULOMB-Modell zur Verringerung des Einflusses von Spannungsspitzen die Druckfestigkeit in der Rechnung erhöht wurde, kann die Traglast von TA15 nur mithilfe von Plausibilitätskontrollen ermittelt werden. Wird als maßgebendes Kriterium hier das Erreichen der maximalen Betondruckfestigkeit herangezogen, ergibt sich eine Traglast von mindestens 490kN, da dann in der Biegedruckzone erstmals die Druckfestigkeit überschritten wird. Unter der Annahme, dass sich real in der Biegedruckzone eine nichtlineare plastische Spannungsverteilung einstellt, ist eine Traglast von ca. 550kN plausibel. Wird als Grenzwert dagegen eine maximale Stegdruckfestigkeit von $f_{cw} \leq 0,75f_{cm}$ postuliert, kann lediglich eine Traglast von 455kN erreicht werden, was 76% der realen Last entspricht. Aufgrund der hohen Versuchstraglast von 596kN erscheint diese sehr geringe numerische Traglast nicht plausibel. Bei dieser Laststufe wird außerdem in den Bügeln die Fließgrenze noch nicht erreicht. Da im Versuch das Versagen eindeutig auf Fließen der Bügel zurückzuführen war, erscheint die Abminderung der Stegdrucktragfähigkeit auf $f_{cw} \leq 0,75f_{cm}$ als etwas zu groß. Selbst bei der Beschränkung der Spannungen auf $\sigma_{cw} \leq 1,0f_{cm}$ für den Steg und unter Ansatz einer plastischen Spannungsverteilung in der Biegedruckzone werden

lediglich plastische Dehnungen von $0,7\text{‰}$ erreicht. Andererseits scheint die Betondruckfestigkeit trotz Bügelversagens einen Einfluss auf die Traglast zu haben, da in der Realität der Balken mit der höheren Betondruckfestigkeit eine um 15% höhere Tragfähigkeit hatte. Der Druckstrebenwinkel ist mit etwa 29° bei 550kN relativ steil und bestätigt damit die Annahme, dass der Druckstrebenwinkel vom Schubbewehrungsgrad abhängt.

7.4.3 Analyse und Bewertung des Materialmodells MCTC

Im folgenden Abschnitt erfolgt die Analyse des Modelltragverhaltens unter Verwendung des MCTC-Modells exemplarisch am Balken ET3. Es werden die Spannungszustände eines Betonelementes betrachtet, das sich etwas unterhalb der elastischen Spannungsnulllinie befindet, s. Abbildung 7.53. Im Element herrscht somit anfänglich ein Schubspannungszustand, der mit einer geringen Zugspannung überlagert ist.

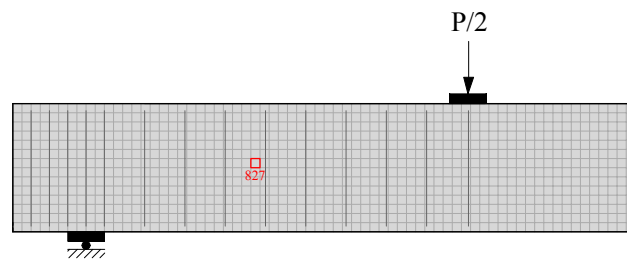


Abbildung 7.53: Analyse der Spannungen in Betonelement 827 mit MCTC

In Abbildung 7.54 ist die Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen sowie der Koordinatenspannungen über die Zeit, d.h. im Belastungsprozess, dargestellt. Es ist ersichtlich, dass das betreffende Element kurz nach Aufbringen der gesamten Eigengewichtslast die Fließspannung, d.h. die modifizierte Betonzugfestigkeit, erreicht. Definitionsgemäß verbleibt die maximale Hauptspannung bei weiterer Laststeigerung (den Einzellasten in Loadstep 2) gemäß des RANKINE-Kriteriums bei der vorgegebenen modifizierten Zugfestigkeit von $0,05f_{ct}$. Der Belastungsprozess wird begleitet von rasch ansteigenden plastischen Hauptzugdehnungen. Gleichzeitig nehmen die Hauptdruckspannungen zu. Auch hier treten plastische Verzerrungen auf, jedoch deutlich geringer als in Zugrichtung. Im Gegensatz zum CDP-Modell findet keine Entfestigung und damit Abnahme der Druckspannungen statt.

In Abbildung 7.55 ist neben den Betonspannungen des betrachteten Elementes die Spannung im nächstgelegenen Bügel auf etwa derselben Höhe aufgetragen. Es ist erkennbar, dass sich das Tragverhalten nach Rissbildung ändert, die Bügel aktiviert werden und statt eines elastischen Scheibenspannungszustands die Spannungen nun über ein Fachwerk- bzw. Spannungsfeldmechanismus abgetragen werden. Die Bügelspannungen steigen nach Erreichen der Zugfestigkeit des Betons stark an, d.h. global erfolgt die Aufnahme der Zugspannungen nun durch die Bügel. Kurz nach Überschreiten der Fließspannung der Bügel tritt das globale Versagen des Balkens ein.

Aus der Entwicklung der Koordinatenspannungen des Elementes über die Zeit, s. Abbildung 7.56, lässt sich erkennen, dass alle Spannungen mit Ausnahme der Spannung in Dickenrichtung σ_z kontinuierlich ansteigen. Damit erscheint zum einen die Vereinfachung, die Spannungszustände in einem

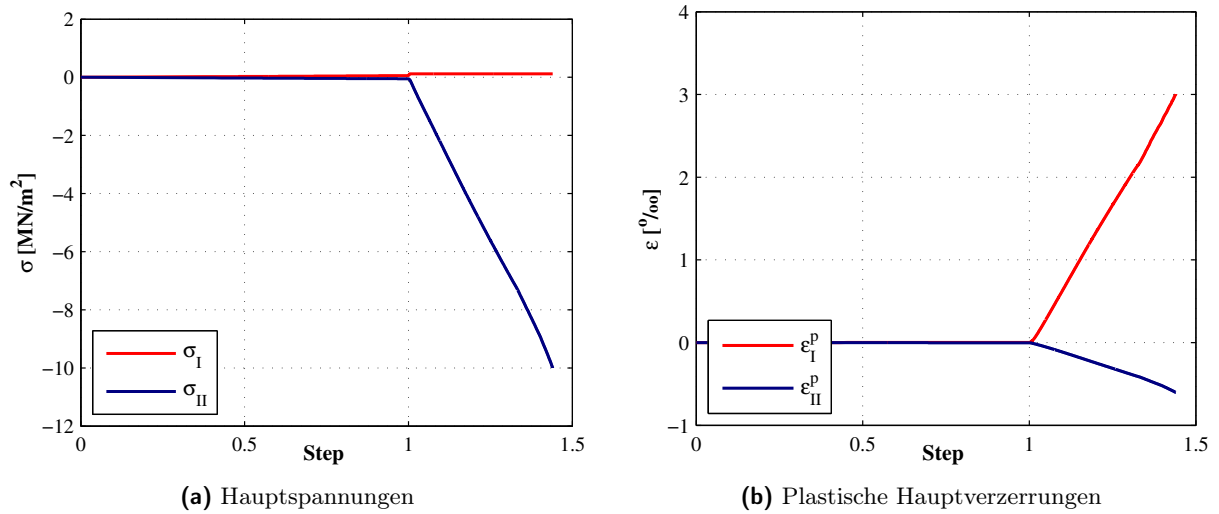


Abbildung 7.54: Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen ET3 in Betonelement 827

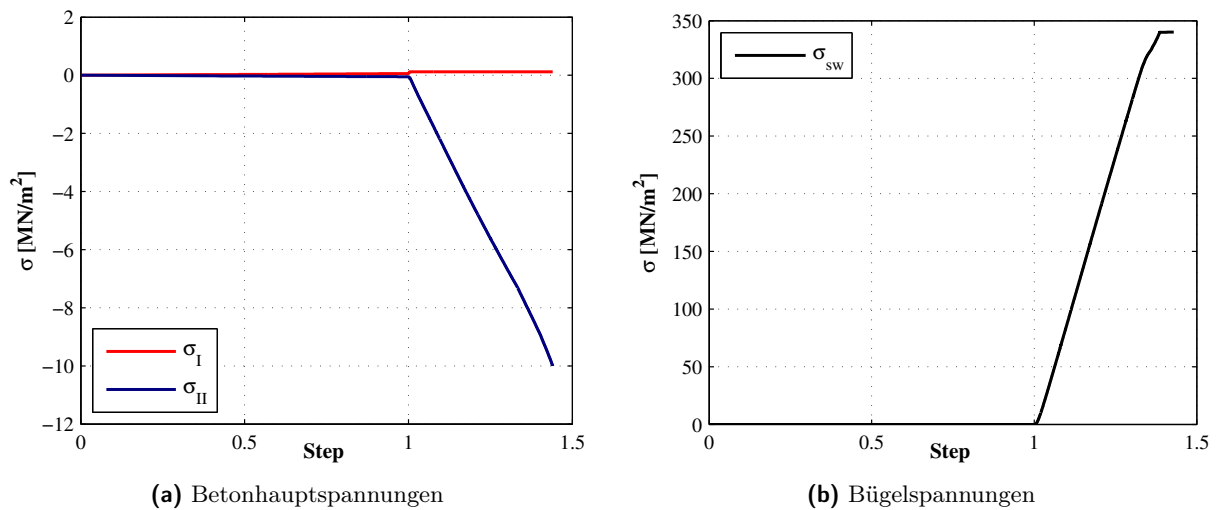


Abbildung 7.55: Entwicklung der Betonhauptspannungen und Bügelspannungen ET3

Balkensteg durch einen zweiachsigen Spannungszustand anzunähern, als gerechtfertigt. Gleichzeitig zeigt sich, dass auch im plastischen Bereich alle anderen Spannungsanteile, inklusive der Schubspannungen, am Lastabtrag beteiligt sind. Während im elastischen Bereich das betrachtete Element in Längsrichtung unter einer geringen Zugspannung σ_x steht, ändert sich im Zuge der Spannungsumlagerung das Vorzeichen dieser Spannung. Gleichzeitig bauen sich eine Schubspannung τ_{xy} sowie eine Druckspannung σ_y als zweite Koordinatenspannung in Stegeebene auf.

In Abbildung 7.57 sind die Spannungen σ bzw. τ über die zugehörigen Verzerrungen ε bzw. γ aufgetragen. Während die Schubsteifigkeit im plastischen Bereich deutlich abfällt, und naturgemäß die Steifigkeit in Richtung der Hauptzugspannungen gegen 0 absinkt, ändert sich die Steifigkeit in

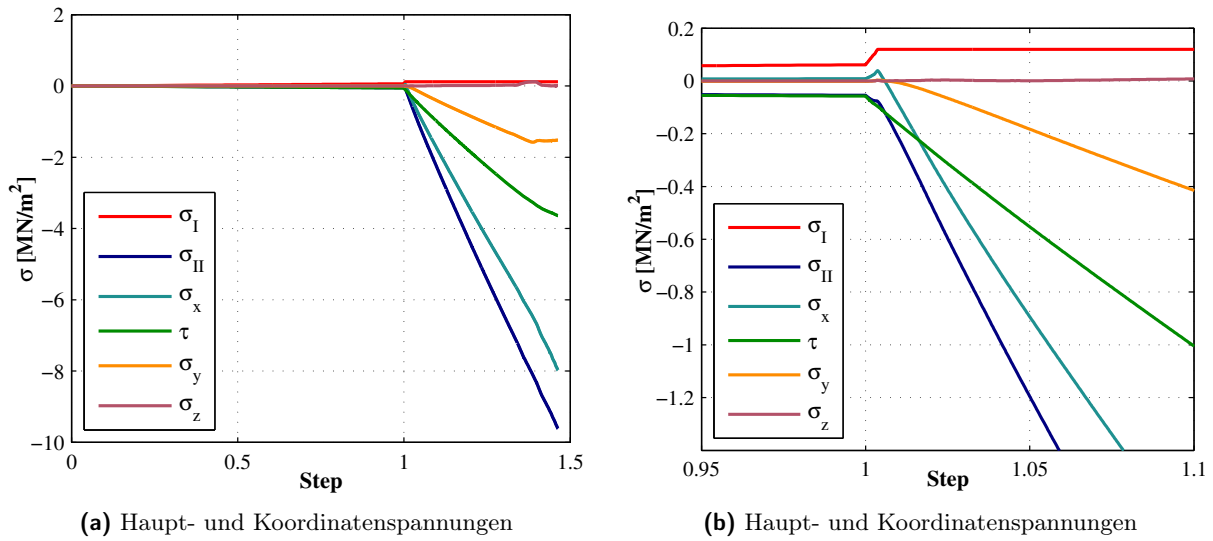


Abbildung 7.56: Entwicklung der Haupt- und Koordinatenspannungen ET3

Richtung der Hauptdruckspannungen vergleichsweise wenig, entspricht jedoch auch nicht mehr der Steifigkeit im Zustand I.

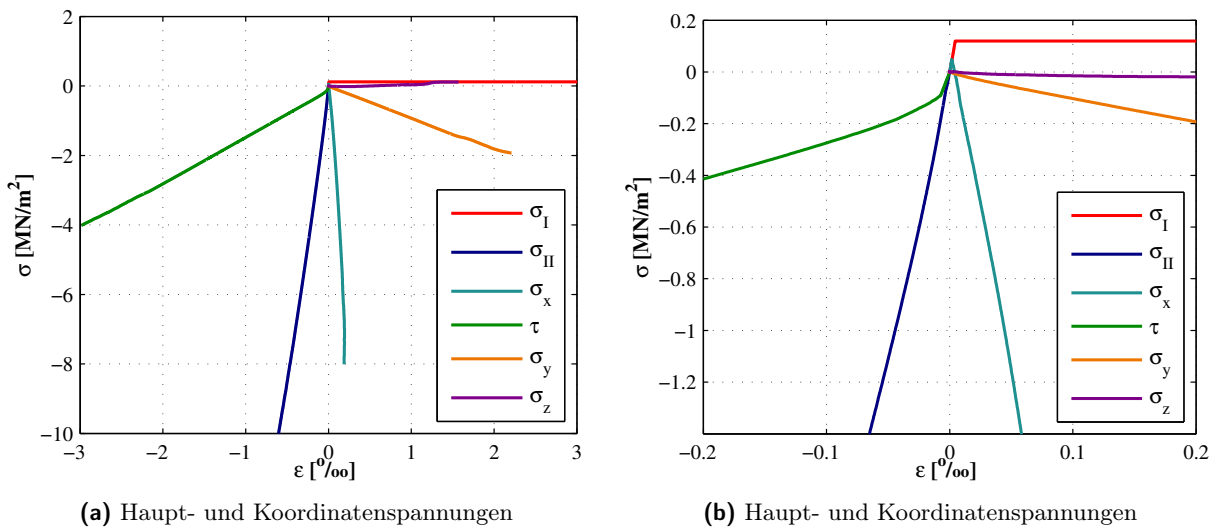


Abbildung 7.57: Entwicklung der Haupt- und Koordinatenspannungen ET3 über ϵ

Dilatanz In Abbildung 7.57 fällt auf, dass die Koordinatenspannungen σ_x und σ_y negative Vorzeichen bei positiven Verzerrungen aufweisen. Dies ist auf die modellimmanente Dilatanz zurückzuführen. Wie bereits erwähnt, ergibt sich bei Anwendung des RANKINE-Kriteriums ebenfalls eine Volumenzunahme bei plastischem Fließen. Die Größe der Dilatanz ist abhängig von der Wahl der Fließregel. Ist diese assoziiert, kann der Dilatanzwinkel nicht modifiziert werden, da er ausschließ-

lich von der geometrischen Form der RANKINE-Fließfläche abhängig ist. Im vorliegenden Modell wird das plastische Fließen nicht-assoziert über das MENÉTRY-WILLAM-Fließpotential gesteuert, auf deren Form jedoch kein Einfluss genommen werden kann, und die von der ursprünglichen RANKINE-Formulierung abweicht.

Grundsätzlich geht unabhängig von der Größe des Winkels das plastische Fließen mit einer Volumenzunahme auch unter Druckspannungen einher, wie auch hier zu sehen ist. Die Volumenveränderung $\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z$ ist im plastischen Bereich durchgehend positiv. Auch die vermeintlich sehr große Steifigkeit in Richtung σ_x lässt sich über die Dilatanz erklären. Zu der äußeren Druckspannung korrespondiert theoretisch eine Druckstauchung; diese wird jedoch vom Phänomen der Dilatanz und damit einhergehenden Volumenzunahme beeinflusst. Die tatsächliche Verzerrung entspricht der Überlagerung beider Effekte.

Schubsteifigkeit Aus Abbildung 7.57 ist erkennbar, dass die Schubverzerrungen im plastischen Bereich stark zunehmen. Im plastischen Modell verändern sich die „elastischen“ Materialparameter E-Modul und Schubmodul nicht; jedoch ändert sich die tangentielle Steifigkeitsmatrix, und damit auch die Beziehungen zwischen den Spannungen und Verzerrungen. Ermittelt man einen fiktiven Schubmodul mittels der gleichen Formel wie im elastischen Fall, nämlich:

$$G^* = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}, \quad (7.6)$$

ergibt sich im plastischen Beanspruchungsbereich eine Schubsteifigkeit von nur noch ca. 10%. In Abbildung 7.58 ist die Veränderung der Schubsteifigkeit eines Betonelements im Zuge der Rissbildung dargestellt.

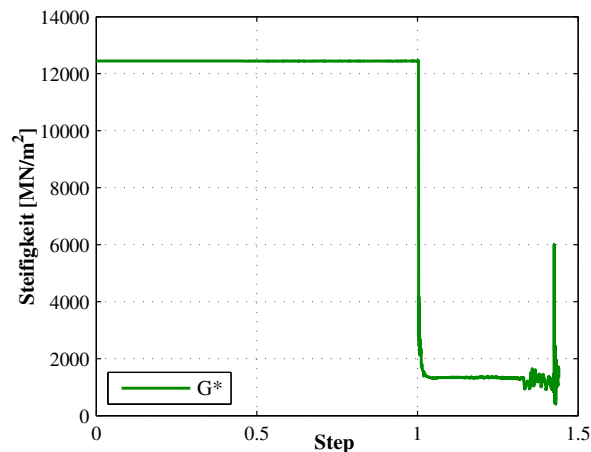


Abbildung 7.58: Abfall der Schubsteifigkeit infolge plastischen Fließens

Die Unregelmäßigkeiten kurz vor dem Versagen sind auf numerische Effekte und die vereinfachte Ermittlung der Steifigkeit zurückzuführen. Das „gerissene“ Element ist somit in der Lage, Schubspannungen aufzunehmen, aufgrund des Steifigkeitsabfalls jedoch bei deutlich größeren Verzerrungen als im elastischen Bereich.

7.4.4 Bewertung des Material-Modells MCTC

Das MCTC-Modell zeichnet sich dadurch aus, dass es im Gegensatz zu dem vorher dargestellten isotropen Plastizitätsmodell CDP in der Lage ist, Druck- und Zughauptspannungen voneinander entkoppelt abzubilden. Dies ist für die realistische Abbildung von Schubspannungszuständen, denen immer ein gemischter Hauptspannungszustand zugrunde liegt, von entscheidender Bedeutung. Aus den Abbildungen 7.23 oder 7.46 ist ersichtlich, dass das Auftreten großer plastischer Zugverzerungen keinen Einfluss auf die Druckfestigkeit in Querrichtung und somit auf die Ausbildung der Druckstrebe hat. Dies ist direkt auf die Materialmodellierung zurückzuführen und stellt den großen Vorteil des Modells im Vergleich zum CDP dar. Wie im realen Versuch beobachtet, stellt sich ein Fachwerk mit geneigten Betondruckstreben ein, die sich in die Bügel als Zugstreben stützen. Ein Querkraftversagen durch Schubzugbruch, das sich aus dem Fließen bzw. Bruch der Bügel ergibt, kann somit zutreffender als mit dem Modell CDP abgebildet werden.

Das Modell hat allerdings Einschränkungen, die in den vereinfachten Modellannahmen begründet sind. Aufgrund der idealisierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den Beton lässt sich das Lastverformungsverhalten von Stahlbetonbalken nicht zutreffend abbilden. Durch den frühen Ausfall des Betons auf Zug setzt die Rissbildung zu früh ein, was zunächst zu einer zu weichen Strukturantwort führt. Aufgrund des elastischen Materialverhaltens des Betons auf Druck bis zum Bruch verhält sich das Material im weiteren Verlauf dann zu steif.

Durch die Verwendung des MOHR-COULOMB-Kriteriums lässt sich ferner die Erhöhung der Druckfestigkeit infolge mehraxialer Druckspannungszustände nicht abbilden. Ein vorzeitiges Versagen im Bereich der Auflager und Lasteinleitungsplatten aufgrund von Spannungsspitzen lässt sich nur durch eine generelle Erhöhung der Betondruckfestigkeit vermeiden. Eine Erhöhung der Druckfestigkeit nur in Teilbereichen war aufgrund von numerischen Instabilitäten in der Rechnung nicht möglich. Diese Instabilitäten führen teilweise ferner zu einem vorzeitigen Abbruch der Rechnungen. Die Erhöhung der Druckfestigkeit wie auch die Entkopplung der Druckfestigkeit von lateralen Dehnungszuständen führt zur Notwendigkeit von Plausibilitätskontrollen. Das Versagen lässt sich letztlich nur bestimmen, indem überprüft wird, ob entweder die Druckspannungen im Steg einen sinnvollen Wert überschreiten, z.B. $0,75f_c$. Andernfalls kann wie dargestellt die Traglast überschätzt werden, wenn es sich um ein Druckstrebenversagen handelt, da die entfestigende Wirkung der Querdehnung im Modell nicht berücksichtigt werden kann. Dies ist bei den klassischen Druckfeldmodellen ebenfalls der Fall, vgl. auch [32]. Ferner muss überprüft werden, ob die reale Betondruckfestigkeit in der Biegedruckzone erreicht ist. Hier ist ein weiteres Defizit des stark vereinfachten Materialmodells erkennbar: In der Realität käme es bei Erreichen der Druckfestigkeit nicht zu einem Versagen, sondern es bildet sich eine plastische Zone mit parabelförmigen Verlauf aus. Die Tragfähigkeit der Druckzone ist dann höher als nach linear-elastischer Spannungsverteilung bei geringerem Hebelarm. Dies kann mit dem vorliegenden Modell nicht zutreffend abgebildet werden.

In der Regel kann mit dem Modell die Tragfähigkeit bzw. zumindest ein unterer Grenzwert relativ gut abgeschätzt werden. Den Schwächen des Modells kann mit den aufgezeigten Plausibilitätskontrollen begegnet werden. Insgesamt eignet sich trotz der dargestellten Einschränkungen das Modell gut für die Abbildung des Querkrafttragverhaltens von querkraftbewehrten Stahlbetonbalken.

7.5 Versuchsnachrechnungen mit dem Smeared Crack Modell SBETA

Im Folgenden erfolgt die Nachrechnung der vorgestellten Versuche mit dem klassischen zweidimensionalen Smeared Crack Modell „SBETA“ von ATENA. Wie bereits erwähnt, handelt es sich um eine zweidimensionale Modellierung mit einem orthotropen Materialgesetz. Die Modellierung erfolgt mit isoparametrischen vierknoten Scheibenelementen als Verschiebungselemente mit vier Gaußpunkten („CCIsoQuad“). Die Bewehrung kann verschmiert oder diskret abgebildet werden. Zur besseren Vergleichbarkeit mit den anderen verwendeten Modellen wird hier von der zweiten Möglichkeit Gebrauch gemacht.

7.5.1 Nachrechnung Versuchsserie 1

Modellierung Die Modellierung der Balken ET3 und ET2 erfolgt am symmetrischen System mit diskreter Bewehrung, wie die Darstellung des Strukturmodells in Abbildung 7.59 zeigt.

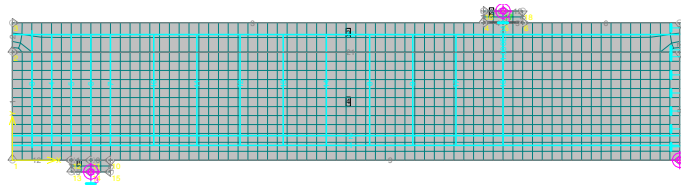


Abbildung 7.59: ATENA-Strukturmodell der Balken ET2 und ET3

Lastaufbringung Wie auch in den Berechnungen mit ABAQUS wird die Last inkrementell geregelt aufgebracht, um das Nachbruchverhalten besser beurteilen zu können und gleichzeitig eine möglichst stabile Rechnung zu gewährleisten.

Materialkennwerte Wie bereits bei den vorausgegangen Berechnungen mit den anderen Materialmodellen werden die Materialparameter gemäß der an Probekörpern im Rahmen der Versuche ermittelten Werte angesetzt. Im Gegensatz zu den Materialgesetzen in ABAQUS wird hier die Würfeldruck- und nicht die Zylinderdruckfestigkeit des Betons verwendet. Die weiteren Materialparameter werden dann programmintern entsprechend der implementierten Beziehungen ermittelt. Eine manuelle Eingabe der anderen Materialparameter wie E-Modul oder Zugfestigkeit ist möglich. Im Falle der hier vorliegenden Versagensmechanismen von Schubzugversagen bzw. Biegeschubbruch ist davon auszugehen, dass die Traglasten in hohem Maß von den Materialkennwerten der Bewehrung sowie der Druckfestigkeit des Betons abhängen. Die Parameter E-Modul bzw. Betonzugfestigkeit lassen lediglich einen Einfluss auf das Verformungsverhalten, nicht jedoch auf die Traglast erwarten.

Vergleich der Bruchlasten Die folgende Tabelle zeigt den Vergleich der Bruchlasten der beiden Balken. Die Simulation wurde sowohl mit dem Rotated Crack Modell als auch mit dem Fixed Crack Modell durchgeführt. Die Lasten werden bei der Verwendung des Rotated Crack Modells in beiden Fällen um gut 8% überschätzt. Die hier dargestellten Ergebnisse mit dem Fixed Crack Modell liegen

Tabelle 7.14: Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3 mit SBETA

		ET2	ET3
F_{test}	[kN]	263	255
$F_{rotated}$	[kN]	286	282
F_{fixed}	[kN]	238	294

deutlich unter den Traglasten des Rotated Crack Modells. Die Ursachen hierfür sind in der Wahl des Shear Retention Faktors begründet und werden im Weiteren noch erläutert.

7.5.1.1 Ergebnisse Balken ET3

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven In Abbildung 7.60 sind die Last-Verformungskurven von drei SBETA-Berechnungen im Vergleich zu den Versuchskurven dargestellt. Die Berechnungen mit dem Fixed Crack Modell erfolgen mit zwei unterschiedlichen Ansätzen für den Shear-Retention Faktor, einmal mit einem variablen Shear Retention Faktor sowie mit einem konstanten Wert von 0,1. Aus dem Vergleich der rechnerischen Last-Verformungskurven mit denen des

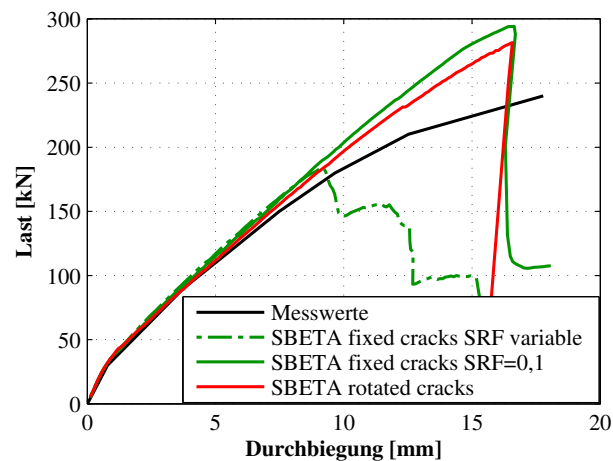


Abbildung 7.60: Last-Verformungskurven des Balkens ET3 mit dem SBETA Fixed Crack & Rotated Crack Modell

Versuches ist anfänglich eine gute Übereinstimmung erkennbar. Die Anfangssteifigkeit wird in der numerischen Simulation geringfügig überschätzt. Die Rissbildung setzt im Modell etwas später ein als im Versuch, was möglicherweise auf eine etwas zu hohe Zugfestigkeit in der Simulation schließen lässt. Im weiteren Belastungsverlauf sind sowohl die Simulation mit dem Fixed Crack als auch mit dem Rotated Crack Modell zu steif. Erwartungsgemäß verhält sich das Fixed Crack Modell mit variablen Shear Retention Faktor etwas steifer als das Rotated Crack Modell, versagt jedoch dann sehr viel früher. Die Berechnung mit dem Rotated Crack Modell verhält sich zunehmend zu steif im Vergleich zum realen Verformungsverhalten, die Traglast wird um knapp 11% überschätzt. Die Ursache für das zu steife Verhalten scheint in der generell zu steifen Formulierung der Spannungs-

Dehnungs-Linien für den Beton zu liegen, da auch die Nachrechnung der KUPFER-Versuche dasselbe zu steife Verformungsverhalten zeigten. Die Nachrechnung mit dem Fixed Crack Modell und einem konstanten Shear Retention Faktor verhält sich noch steifer und überschätzt die Tragfähigkeit bei einer rechnerischen Traglast von 294kN sogar um gut 15%.

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen In Abbildung 7.61 sind die Hauptdruckspannungen und Hauptzugdehnungen im Beton dargestellt. Die Farbskala verläuft von betragsmäßig geringen Werten in Blau zu betragsmäßig großen Werten in Orange/Rot bei den Hauptdruckspannungen, für die Zugdehnungen ist es genau umgekehrt. Die Plots lassen große Ähnlichkeit zu den Abbildungen der Rechnungen

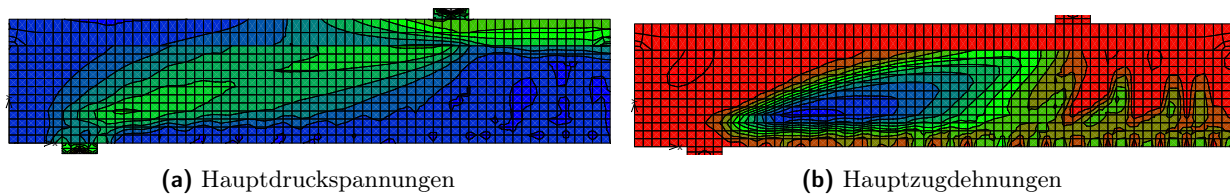


Abbildung 7.61: Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens ET3 mit SBETA Rotated Crack Modell

mit dem Modell MCTC auf Basis des modifizierten MOHR-COULOMB-Kriteriums erkennen: Sowohl die Verteilung der Hauptzugdehnungen als auch der Hauptdruckspannungen weisen aufgrund der gleichmäßigen Verteilung auf ein Fachwerktragverhalten hin. Die unterschiedliche Intensität der Hauptdruckspannungsverteilung deutet auch hier auf einen Betontraganteil aus einem Druckbogen oder einer Druckstrebe hin. Die betragsmäßig maximalen Druckspannungen im Steg erreichen in einem kleinen Bereich nahe des Auflagers Werte bis zu $22,5 \text{ MN/m}^2$, die maximalen Hauptzugdehnungen inkl. elastischem Anteil betragen 13%.

ATENA ist das einzige der verwendeten Programme, das ein Rissbild ausgibt. Die Rissrichtung

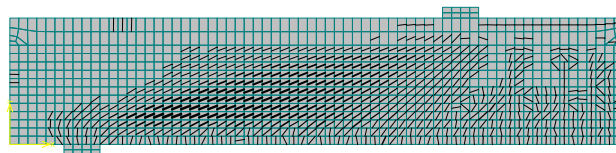


Abbildung 7.62: Rissbild des Balkens ET3 mit SBETA Rotated Crack Modell

scheint erwartungsgemäß mit der Richtung der Hauptdruckspannungen übereinzustimmen. Korrespondierend zu dem verschmierten Rissansatz ist der Steg großflächig gerissen. Die Risswinkel sind dabei relativ flach und betragen $\approx 22 - 24^\circ$. Interessant ist, dass an der Balkenoberseite über dem Auflager ebenfalls feine Risse zu erkennen sind. Wie bei den vorherigen Simulationen ist auch hier eine Rotation der Druckstrebe zu erkennen, d.h. die Spannungen lagern sich mit zunehmender Belastung aufgrund der Rissbildung und des Ausfalls des Betons auf Zug in die Bügel um.

Analyse der Bügelspannungen Die Bügelspannungen und -dehnungen sind mit denen des MCTC-Modells vergleichbar. Die Bügel erreichen die Streckgrenze und sind gleichmäßig beansprucht, was

auf ein Fachwerktragverhalten schließen lässt. Die maximalen plastischen Dehnungen betragen 9,8‰. Auffällig ist, dass die Bügel nahe des Auflagers kaum Spannungen erhalten und auch die Hauptzugdehnungen hier sehr klein sind. Hier scheint die Tragwirkung der direkten Druckstrebe zu dominieren.

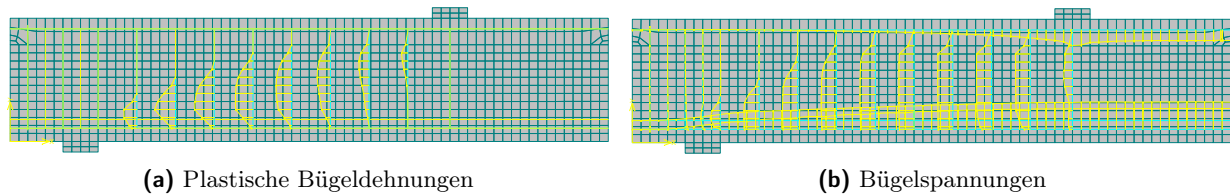


Abbildung 7.63: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET3 mit SBETA

Sensitivitätsanalyse Zugfestigkeit Sensitivitätsanalysen mit verdoppelter Zugfestigkeit allein sowie verdoppelter Zugfestigkeit und Bruchenergie führen erwartungsgemäß nicht zu höheren Traglasten, d.h. die Ergebnisse bestätigen grundsätzlich die Vorstellung des Fachwerktragverhaltens, bei dem die Traglast von der Bügeltraglast und der Druckstrebenfestigkeit abhängt, nicht jedoch von der Betonzugfestigkeit.

Vergleich Rotated Crack mit Fixed Crack Modell Interessant ist der Vergleich der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugverzerrungen des Rotated Crack Modells mit denen des Fixed Crack Modells unter Verwendung des variablen Shear Retention Faktors bei der jeweiligen Maximallast. Aus der Last-Verformungskurve ist ersichtlich, dass die Traglast deutlich kleiner ist. Die Ursache kann in den maximalen Hauptverzerrungen der Betonelemente gefunden werden. Beim Fixed Crack Modell mit variablem Shear Retention Faktor können Spannungsumlagerungen im Belastungsverlauf nur dadurch erfolgen, dass Schubspannungen über die feststehenden Risse übertragen werden. Die Größe der Schubspannungsübertragung hängt nach KOLMAR[54] von den zugehörigen Zugdehnungen ab. Im vorliegenden Fall ist eine starke Lokalisierung der Verzerrungen entlang der Längs-

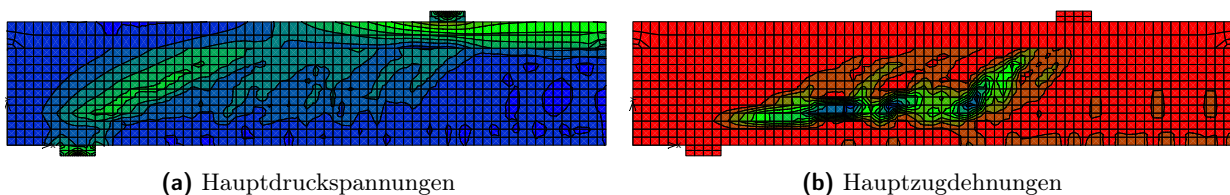


Abbildung 7.64: Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens ET3 mit SBETA Fixed Crack Modell und variablen Shear Retention Faktor

bewehrung zu beobachten. Bei Erreichen der Maximallast werden bereits Verzerrungen von 12‰ erreicht, die jedoch schnell weiter ansteigen. Offenbar können bei derart großen Verzerrungen im FE-Modell kaum noch Schubspannungen über die Risse übertragen werden, die Spannungen können sich nicht entsprechend in die Bügel umlagern. Das Tragverhalten ähnelt dem des CDP-Modells: Auch hier bildet sich statt des Fachwerktragverhaltens ein Druckspannungsfeld direkt zum Auflager

aus, wie die höheren Spannungsintensitäten in der Nähe des Auflagers im Vergleich zu denen im Rotated Crack Modell andeuten. Diese Annahme scheint sich durch die Analyse der Bügelspannungen und -dehnungen zu bestätigen: Im Gegensatz zum Rotated Crack Modell sind die Bereiche plastischer Bügeldehnungen ungleichmäßiger verteilt, auch die Spannungsverteilung entspricht nicht der gleichmäßigen Beanspruchung im Rotated Crack Modell. Wird statt mit einem variablen Shear

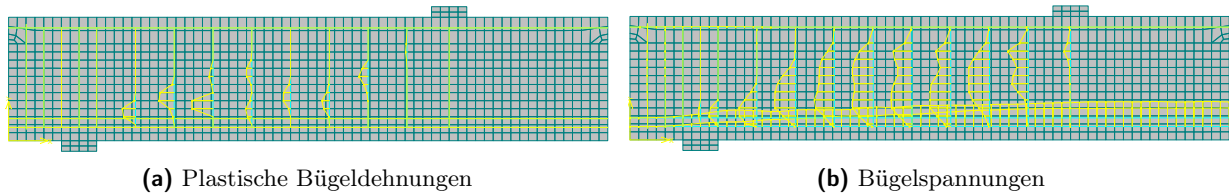


Abbildung 7.65: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET3 mit SBETA Fixed Crack Modell, variablen Shear Retention Faktor

Retention Faktor, der sehr sensitiv auf die Größe der Zugdehnungen reagiert, mit einem konstanten Wert von 0,1 gerechnet, kann dagegen eine deutlich höhere rechnerische Traglast erreicht werden, die sogar über der des rotierenden Rissmodells liegt. Dies bestätigt die in der Literatur anzutreffenden Aussagen, dass das Fixed Crack Modell auf zu steife Ergebnissen führt (s. z.B. [90],[85]).

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Die Ergebnisse der Rechnungen mit dem ATENA 2D-Modell SBETA und dem Rotated Crack Modell ähneln stark den Ergebnissen des MCTC-Modells. Es bildet sich in beiden Fällen ein Fachwerk aus, die Bügel fließen und die Rissbildung erfolgt sehr gleichmäßig über den Steg. Aufgrund der Modellannahmen erfolgt eine Abminderung der Stegdruckfestigkeit infolge von Querkzug bzw. Querdehnung auf bis zu $0,8f_{cm}$, im Gegensatz zu den Simulationen mit dem Model CDP ist dennoch ein Fachwerktragverhalten mit Druckstreben, die sich in die Bügel stützen, zu erkennen. Auch hier lässt sich eine Rotation der Druckstrebe im FE-Modell feststellen, d.h. es ist ein ähnliches Tragverhalten zu beobachten wie nach der Plastizitätstheorie postuliert. Grundsätzlich verhält sich das Modell aufgrund der implementierten Spannungs-Dehnungsbeziehungen jedoch etwas zu steif und überschätzt die reale Tragfähigkeit. Die großen Bügel- und Betondehnungen weisen auf ein Versagen der Zugstrebe hin. Das Versagen wird letztendlich allerdings vermutlich durch einen Biegeschubbruch ausgelöst, erkennbar an den hohen Betonstauchungen unterhalb der Lasteinleitungsplatte.

Analysiert man das Fixed Crack Modell mit variablem Shear Retention Faktor, fallen Ähnlichkeiten mit dem CPD-Modell auf. Wenn eine Spannungsumlagerung in die Bügel nicht in ausreichendem Maß möglich ist, ähnelt das Tragverhalten dem eines unbewehrten Balkens: Es bildet sich ein Spannungsfeld direkt in das Auflager aus, d.h. die Tragfähigkeit wird dann vom Werkstoff Beton bestimmt.

7.5.1.2 Ergebnisse Balken ET2

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Der Vergleich der Last-Verformungskurven und Bruchlasten zeigt ein ähnliches Bild wie für den Balken ET3. Mit dem Rotated Crack Modell

wird bei zu hoher Steifigkeit insbesondere im späteren Belastungsbereich die Traglast überschätzt. Im Vergleich zum ET3 ergibt sich lediglich eine um 4kN größere Traglast. Die größere Stegdicke hat somit in der numerischen Simulation nur einen geringen Einfluss auf die Traglast. Das Fixed Crack Modell mit variablem Shear Retention Faktor versagt aus den schon genannten Gründen erneut deutlich eher.

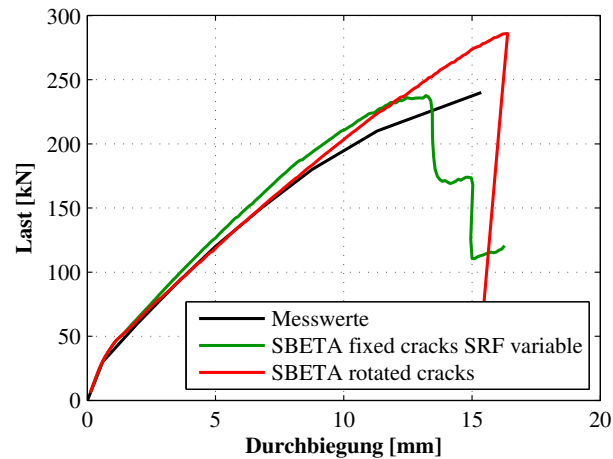


Abbildung 7.66: Last-Verformungskurven des Balkens ET2 mit dem SBETA Fixed Crack & Rotated Crack Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen In Abbildung 7.67 sind Hauptdruckspannungen und Hauptzugdehnungen der numerischen Simulation mit dem Rotated Crack Modell dargestellt. Der Maximalwert der Hauptzugdehnungen beträgt 13‰. Der Balken weist ein ähnliches Tragverhalten auf wie ET3, allerdings

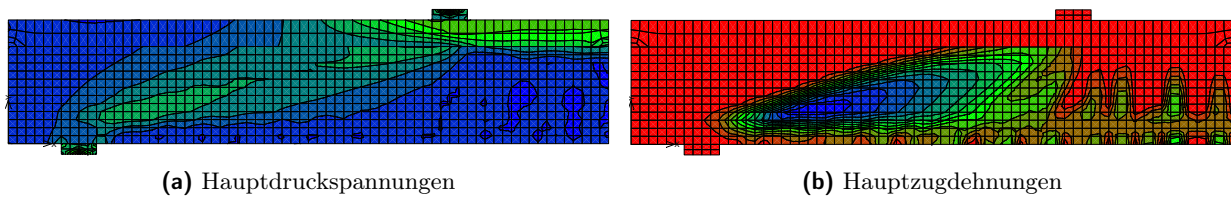


Abbildung 7.67: Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens ET2 mit SBETA Rotated Crack Modell

mit geringeren Druckspannungen im Steg von maximal 17,5 MN/m².

Das Rissbild ähnelt ebenfalls stark dem des Balkens ET3. Der Steg ist großflächig gerissen, was zu den plastischen Hauptzugdehnungen korrespondiert. Allerdings treten bei ET2 keine Risse in der Platte oberhalb des Auflagers auf. Die maximalen Rissbreiten sind minimal geringer als bei der Nachrechnung des Balkens ET3, die Risswinkel unterscheiden sich dagegen kaum. Die Risse reichen in der Nähe des Auflagers weniger weit in den Steg hinein. Dies spricht dafür, dass der Tragmechanismus über den Betontraganteil etwas ausgeprägter ist.

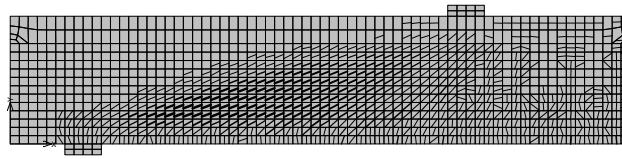


Abbildung 7.68: Rissbild des Balkens ET2 mit SBETA Rotated Crack Modell

Analyse der Bügelspannungen Auch die Bügelspannungen und plastischen Bügeldehnungen stimmen qualitativ mit denen des Balkens ET3 überein. Die plastischen Dehnungen korrespondieren zu den Bereichen mit großen plastischen Zugdehnungen, die Streckgrenze wird im Bereich aller Bügel des Schubfeldes erreicht, bei plastischen Dehnungen von bis zu 9,6‰.

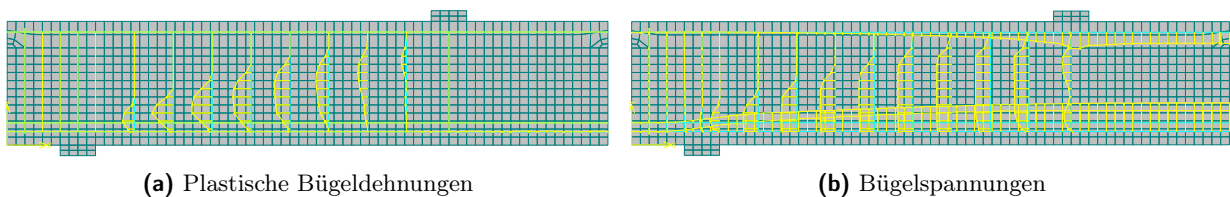


Abbildung 7.69: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET2 mit SBETA Fixed Crack Modell

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Die gleichmäßige Ausnutzung der Bügel sowie der Verlauf der Druckspannungen lässt wie beim Balken ET3 ebenfalls auf ein Fachwerktragverhalten schließen. Die höhere Intensität der Druckspannungen zwischen Lasteinleitung und Auflager deutet darauf hin, dass neben der Fachwerkwirkung ein Betontraganteil in Form einer direkten Druckstrebe bzw. ein Druckbogenanteil existiert. Der Versagensmechanismus stimmt mit dem des Balkens ET3 überein. Auch hier werden unterhalb der Lastplatte singular große Druckstauchungen erreicht, die in Kombination mit dem Fließen der Querkraftbewehrung zum Versagen führen.

7.5.2 Nachrechnung Versuchsserie 2

Modellierung Die Nachrechnung der Balken TA11, TA12 und TA15 erfolgt im Gegensatz zu den Balken der ET-Serie am Gesamtsystem, da Rechnungen am symmetrischen System aufgrund von Spannungsspitzen im Bereich der Lasteinleitung zu früh versagten. Alle weiteren Modellierungsparameter wie Lastaufbringung und Materialkennwerte werden wie bei Versuchsserie 1 angesetzt.

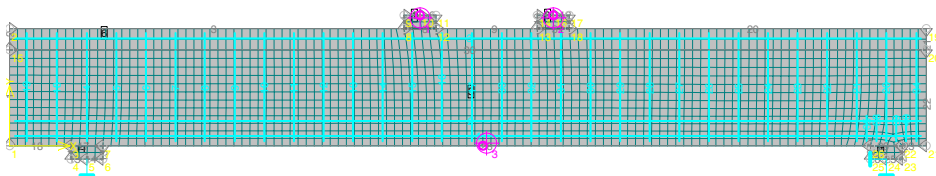


Abbildung 7.70: ATENA-Strukturmodell der Balken TA11, TA12 und TA15

parameter wie Lastaufbringung und Materialkennwerte werden wie bei Versuchsserie 1 angesetzt.

Vergleich der Bruchlasten Die folgende Tabelle zeigt den Vergleich der Bruchlasten der Balken unter Verwendung des Rotated Crack Modells sowie des Fixed Crack Modells. Die Übereinstimmung mit den Versuchstraglasten ist unterschiedlich gut. Während beim Balken TA11 die numerische Bruchlast minimal unter der Versuchstraglast liegt, wird die Traglast bei den Simulationen von TA12 überschätzt bzw. bei TA15 genau erreicht. Wie schon bei den Balken ET2 und ET3 sind die Traglasten mit dem Rotated Crack Modell deutlich höher als mit dem Fixed Crack Modell mit variablen Shear Retention Faktor. Im Gegensatz zu den Versuchen werden die geringsten Traglasten in der Simulation bei Balken TA15 erreicht, der eine deutlich geringere Druckfestigkeit als Balken TA11 besitzt. In der numerischen Simulation erreicht Balken TA11 mit der größeren Druckfestigkeit und dem höheren Schubbewehrungsgrad die höchste Traglast.

Tabelle 7.15: Vergleich der Bruchlasten der Balken TA11,TA12 und TA15 mit SBETA

		TA11	TA12	TA15
F_{test}	[kN]	684	540	596
$F_{rotated}$	[kN]	666	612	596
F_{fixed}	[kN]	495	-	-

7.5.2.1 Ergebnisse Balken TA11

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Die Last-Verformungskurve stellt sich in Teilbereichen ähnlich dar wie bei den zuvor betrachteten Balken ET2 und ET3. Die Anfangsstei-

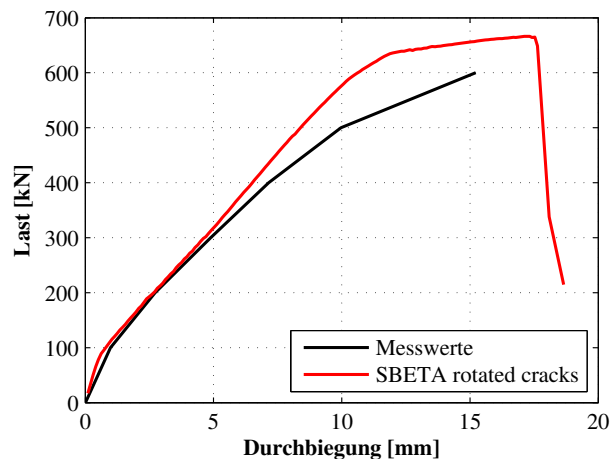


Abbildung 7.71: Last-Verformungskurven des Balkens TA11 mit dem SBETA Rotated Crack Modell

figkeit ist etwas höher als im Versuch, die Rissbildung setzt bei einer ähnlichen Laststufe ein. Im weiteren Belastungsfortschritt zeigt sich die Nachrechnung wiederum zu steif. Im Gegensatz zu den vorherigen Rechnungen erfolgt das Versagen jedoch nicht plötzlich, sondern es bildet sich zuvor ein ausgeprägter Fließbereich aus. Ursache hierfür ist das Fließen der Längsbewehrung, d.h. der Bal-

ken versagt gleichzeitig auf Schub und Biegung. Die Traglast stimmt gut mit der Versuchstraglast überein, sie liegt mit 666kN 2,5% unter der realen Traglast.

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen In Abbildung 7.72 sind die Hauptdruckspannungen und Hauptzugdehnungen der numerischen Simulation mit dem Rotated Crack Modell dargestellt. Die Verläufe der Hauptdruckspannungen und Hauptzugdehnung stimmen qualitativ mit denen des Balkens ET3 überein. Auch hier sind höhere Spannungsintensitäten zwischen Lasteinleitung und Auflager erkennbar, was wiederum für einen Betontraganteil in Form einer direkten Druckstrebe bzw. ein Druckbogenanteil spricht. Die maximalen Hauptzugdehnungen betragen 8,7‰ bei der Versagenslast, die betragsmäßig größten Hauptdruckspannungen werden nur in kleinen Bereichen in der Biegedruckzone mit $25,4 \text{ MN/m}^2$ erreicht. Auch das Rissbild entspricht grundsätzlich denen der vorher betrachteten Bal-

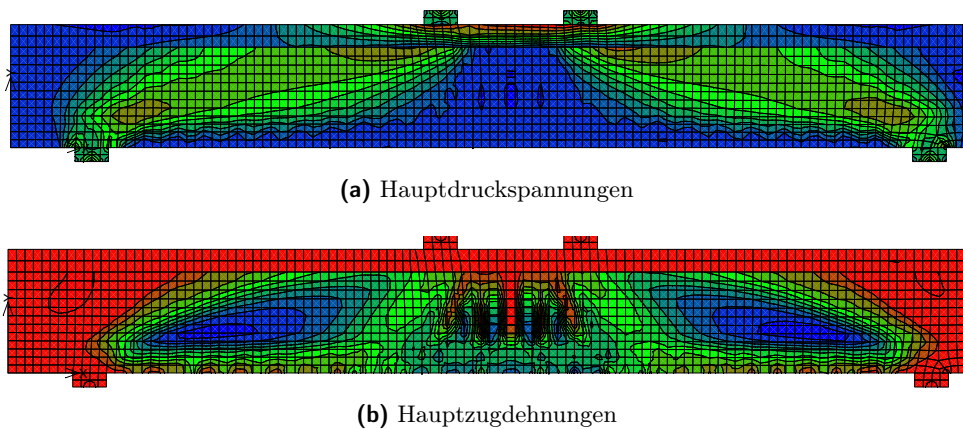


Abbildung 7.72: Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens TA11 mit SBETA Rotated Crack Modell

ken und dem verschmierten Rissmodell. Der Steg ist wiederum großflächig gerissen. Die Risswinkel sind steiler als bei den Balken ET2 und ET3. Sie liegen bei etwa 25-27°.

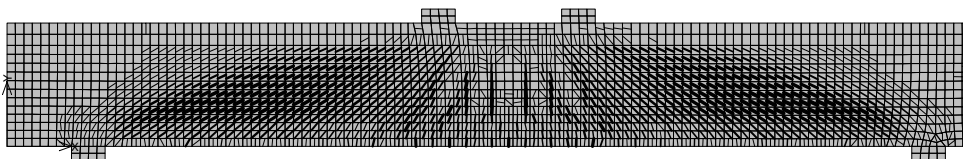


Abbildung 7.73: Rissbild des Balkens TA11 mit SBETA Rotated Crack Modell

Analyse der Bügelspannungen Bei den Bügelspannungen und plastischen Bügeldehnungen sind ebenfalls Ähnlichkeiten zu den vorherigen Ergebnissen erkennbar. Die plastischen Dehnungen korrespondieren zu den Bereichen mit großen plastischen Zugdehnungen. Die Streckgrenze wird im Bereich aller Bügel des Schubfeldes bei einer maximalen plastischen Dehnung von maximal 7‰ erreicht. Allerdings fließt hier ebenfalls die Längsbewehrung. Der Balken versagt nach der Ausbildung eines plastischen Verfestigungsbereiches letztendlich wie zuvor aufgrund singulärer Spannungsüber-

schreitungen im Lasteinleitungsbereich, allerdings ist dies als sekundäres Versagen aufgrund des Fließens der Längs- und Schubbewehrung zu deuten. Grundsätzlich lässt die gleichmäßige Ausnutzung der Bügel darauf schließen, dass sich auch hier ein Fachwerktragmechanismus ausbildet.

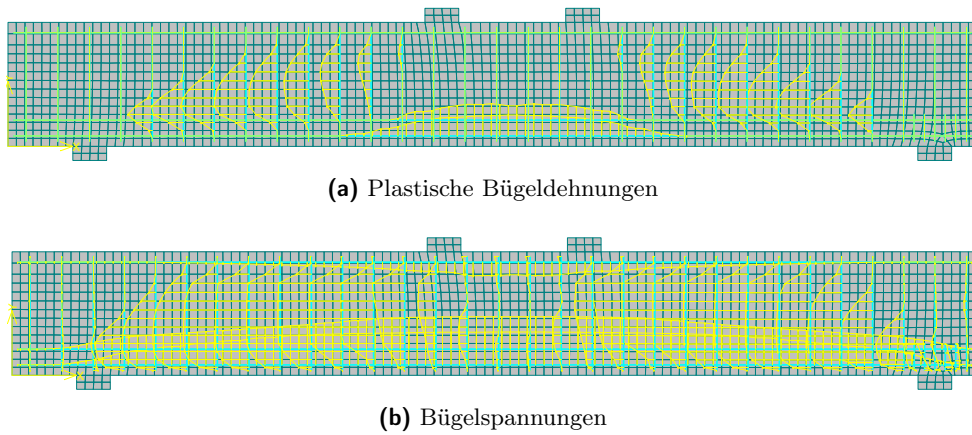


Abbildung 7.74: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA11 mit SBETA Rotating Crack Modell

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Wie bereits erwähnt, versagt der Balken in der numerischen Simulation gleichzeitig auf Schub und Biegung, im Gegensatz zum Versuch, bei dem die Biegebewehrung nicht geflossen ist. Ansonsten stimmt das Tragverhalten grundsätzlich mit dem der anderen numerischen Simulationen mit dem ATENA SBETA-Materialmodell überein.

7.5.2.2 Ergebnisse Balken TA12

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Die Analyse der Last-Verformungskurve bestätigt grundsätzlich die bisherigen Ergebnisse.

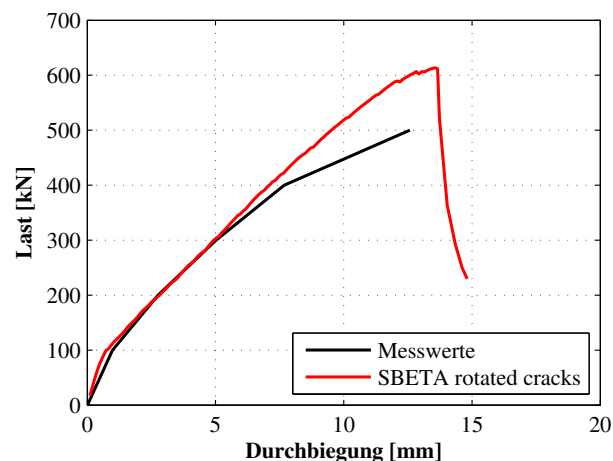


Abbildung 7.75: Last-Verformungskurven des Balkens TA12 mit dem SBETA Rotated Crack Modell

Die numerische Simulation verhält sich zu steif, insbesondere zu späteren Belastungszeitpunkten. Allerdings wird die Traglast des Balkens relativ deutlich überschätzt.

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Grundsätzlich zeigen sich wiederum Übereinstimmungen mit den bisherigen Ergebnissen. Es ergeben sich jedoch mit 16‰ deutlich größere Hauptzug- und betragsmäßig ebenfalls größere Hauptdruckspannungen als beim Balken TA11.

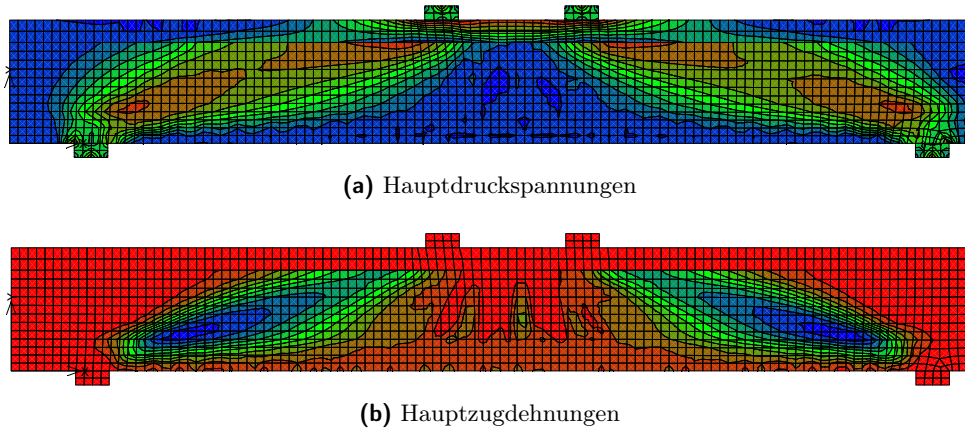


Abbildung 7.76: Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens TA12 mit SBETA Rotated Crack Modell

Sowohl die Biegedruckzone als auch die Druckstrebe mit lokalen Maximalwerten zwischen $20,0 \text{ MN/m}^2$ und $22,5 \text{ MN/m}^2$ sind stark ausgenutzt. Es erfolgt keine nennenswerte Abminderung infolge von Querdehnungen. Dies erklärt möglicherweise auch die höhere Tragfähigkeit als im Versuch. Es lassen sich in der letzten konvergenten Laststufe lokal große Druckstauchungen in der direkten Druckstrebe in der Nähe des Auflagers und neben der Auflagerplatte beobachten, die das Versagen begleiten. Beim Rissbild fallen lokal größere Rissweiten im Bereich der direkten Druckstrebe, der auch mit dem Bereich der größten Hauptzugdehnungen übereinstimmt, auf. Grundsätzlich stellt sich allerdings ein plausibles, gleichmäßiges Rissbild ein. Auch hier sind über dem Auflager an der Plattenoberseite feine Risse erkennbar. Die Rissneigung ist mit $22\text{-}24^\circ$ flacher als beim Balken TA11

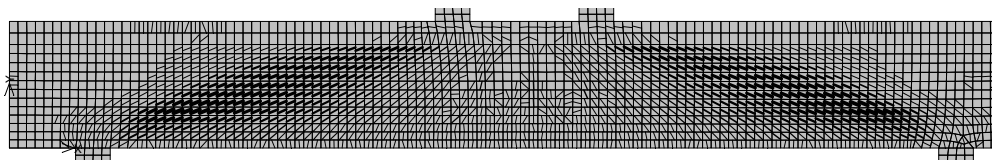
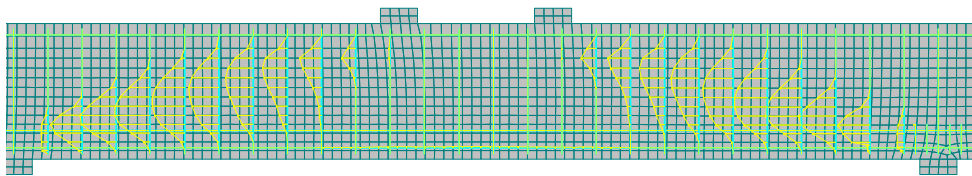


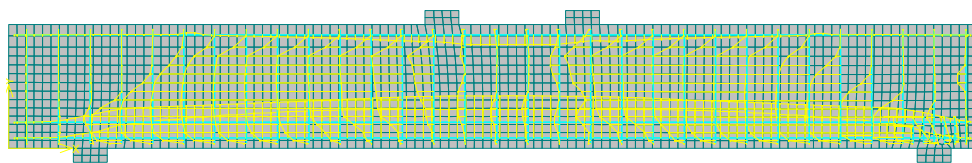
Abbildung 7.77: Rissbild des Balkens TA12 mit SBETA, Rotated Crack Modell

und entspricht eher der der Balken ET2 und ET3, die einen ähnlichen mechanischen Schubbewehrungsgrad aufweisen. Offenbar bewirkt die geringere Tragfähigkeit der Bügel eine stärkere Rotation der Druckstrebe sowie eine Spannungsumlagerung, es bildet sich also neben der Fachwerkwirkung eine Druckstreben- oder Druckbogenwirkung mit einem größeren Betontraganteil aus.

Analyse der Bügelspannungen Die plastischen Bügeldehnungen sind mit 11,5‰ knapp doppelt so hoch wie bei Balken TA11. Die Bügel weisen aber ebenfalls eine gleichmäßige Ausnutzung auf.



(a) Plastische Bügeldehnungen



(b) Bügelspannungen

Abbildung 7.78: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA12 mit SBETA Rotating Crack Modell

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Wie bereits erwähnt, stimmt der Versagensmechanismus nicht vollständig mit dem des Versuches überein, da im Versuch eindeutig die Bügel versagt haben, während in der Simulation lokal gleichzeitig hohe Druckspannungen in der Druckstrebe vorhanden sind, was auf ein gleichzeitiges Versagen von Zug- und Druckstrebe hindeutet. Allerdings wird die Traglast in der numerischen Simulation um 13% überschätzt. Es ist eine relativ starke Rotation der Druckstreben mit damit einhergehenden flachen Rissen und einem größeren Traganteil aus einer direkt ins Auflager laufenden Druckstrebe oder eines Druckbogens zu beobachten. Dieser Umlagerungsmechanismus wird durch die höheren Bügeldehnungen ermöglicht und bestätigt die Beobachtungen von LEONHARDT[62].

7.5.2.3 Ergebnisse Balken TA15

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Die Traglast des Balkens wird mit der numerischen Simulation genau erreicht, bei dem schon zuvor beobachteten zu steifen Verformungsverhalten. Im Vergleich zur Simulation des Balkens TA11, der eine höhere Betonfestigkeit aufweist, verhält sich der Balken TA15 bei den höheren Laststufen etwas weicher und läuft nicht, wie der Balken TA11, in einen ausgeprägten Verfestigungsbereich.

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Der Balken TA15 zeichnet sich in der Simulation durch vergleichsweise große Druckspannungen sowohl im Bereich der Biegedruckzone als auch im Steg aus. In der letzten konvergenten Laststufe erreichen diese im Bereich der Lasteinleitung die Druckfestigkeit, aber auch die Druckfestigkeit im Steg in der Nähe des Auflagers ist nahezu ausgenutzt. Der gleichmäßigere Verlauf der Druckspannungen im Schubfeld sowie die weniger stark ausgeprägte Rotation der Druckstrebe weisen auf eine ausgeprägtere Fachwerkwirkung als bei Balken TA12 hin. Die maxi-

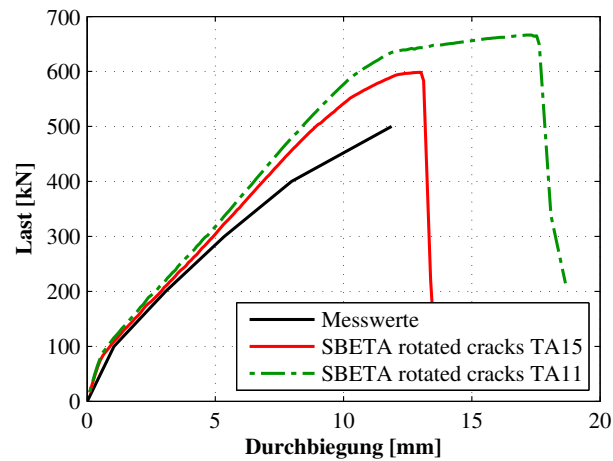
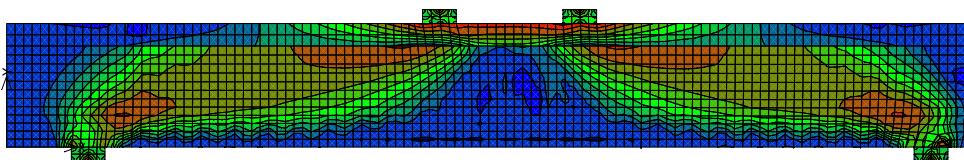
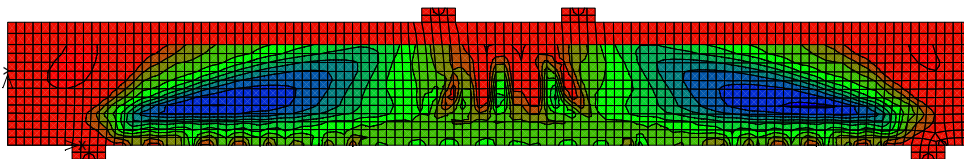


Abbildung 7.79: Last-Verformungskurven von TA15 mit dem SBETA Rotated Crack Modell



(a) Hauptdruckspannungen



(b) Hauptzugdehnungen

Abbildung 7.80: Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens TA15 mit SBETA Rotated Crack Modell

malen Hauptzugdehnungen des Betons betragen $7,2\%$ und liegen damit deutlich unter denen des Balkens TA12.

Das Rissbild ähnelt dem des Balkens TA11 und weist eine etwas steilere Rissneigung von etwa $27-28^\circ$ auf. Dies korrespondiert zu dem höheren mechanischen Schubbewehrungsgrad.

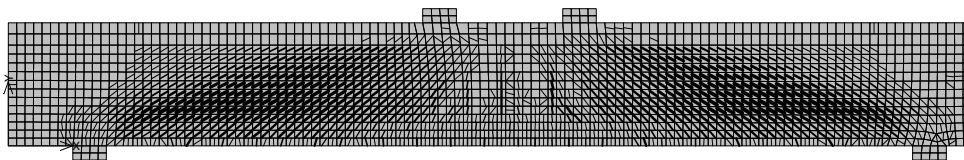


Abbildung 7.81: Rissbild des Balkens TA15 mit SBETA Rotated Crack Modell

Analyse der Bügelspannungen Es werden plastische Bügeldehnungen von bis zu $3,5\%$ erreicht, also deutlich geringere Werte als zuvor. Die gleichmäßige Ausnutzung der Bügel über die Streckgren-

ze hinaus spricht jedoch auch hier klar für die Ausbildung einer Fachwerktragwirkung. Allerdings beginnt die Zugbewehrung ebenfalls zu fließen. Somit ist auch die Biegetragfähigkeit fast erreicht.

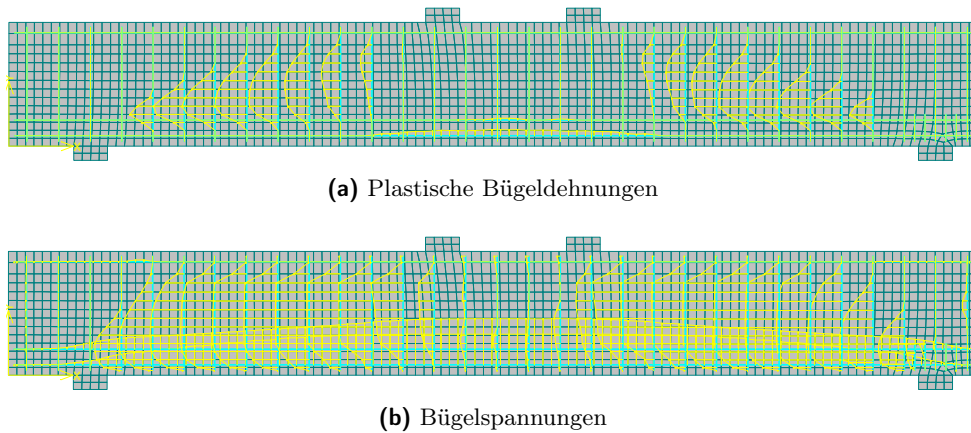


Abbildung 7.82: Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA15 mit SBETA Rotating Crack Modell

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus In der Simulation versagt der Balken TA15 nach Erreichen der Streckgrenze der Bügel infolge der Überschreitung der Druckfestigkeit neben der Lasteinleitung, allerdings in Kombination mit hohen lokalen Hauptdruckspannungen und -stauchungen in der Druckstrebe nahe des Auflagers. Im Versuch soll das Versagen aufgrund von Bügelfließen ausgelöst worden sein, jedoch sind ebenso wie in der Simulation die Bügeldehnungen geringer als bei den Balken TA11 und TA12. An anderer Stelle wird als Versagensursache ein sekundärer Biegeschubbruch infolge des Einschnürens der Druckzone genannt. Obwohl also die Bügel fließen, ist letztlich die Betonfestigkeit ein wichtiger Parameter für die Traglast in der Simulation, da sich bei geringerer Druckfestigkeit eher ein Biegeschubbruch einstellt bzw. die Druckfestigkeit in der direkten Druckstrebe eher erschöpft ist.

7.5.3 Analyse und Bewertung des Materialmodells SBETA

Das Modell verhält sich ähnlich wie das MCTC-Modell, ist aber stabiler in der Rechnung. Ebenso wie beim MCTC-Modell ist ein kombinierter Tragmechanismus aus Fachwerk- und Sprengwerk- bzw. Bogentragwirkung erkennbar, deren Ausprägung vom Schubbewehrungsgrad abhängt. Wie das MCTC-Modell verhält sich das Modell SBETA allerdings zu steif und die Traglasten werden z.T. überschätzt. Die Güte der Ergebnisse hängt stark vom verwendeten Rissmodell ab. Die Nachrechnungen mit den verschiedenen Rissmodellen haben gezeigt, dass das Rotated Crack Modell die besten Resultate liefert. Das Fixed Crack Modell mit variablen Shear Retention Faktor führt zu niedrigeren Traglasten, da die dehnungsabhängige Abminderung des Shear Retention Faktors offenbar zu groß ist. Demgegenüber verhält sich das Fixed Crack Modell mit konstantem Shear Retention Faktor und der Verwendung der empfohlenen Werten zu steif und führt zu Traglastüberschätzungen. Die Abminderung der Druckfestigkeit infolge der Querdehnung spielt bei den untersuchten Balken kaum eine Rolle, da in Bereichen mit großen Dehnungen die Hauptdruckspannungen meist unter-

halb der Festigkeiten liegen. Bei niedrigen Schubbewehrungsgraden erfolgt eine starke Rotation, die mit hohen plastischen Betonzug- und Bügeldehnungen einhergeht. Allerdings ist real möglicherweise die Umlagerung nicht im gleichem Maß möglich wie in der Simulation, da die Beanspruchung der Bügel durch das verschmierte Rissverhalten in der Simulation gleichmäßiger als in der Realität ist und dort ein einzelner Bügel aufgrund von singulären Beanspruchungen durch einen kreuzenden, breiten Riss versagt haben könnte.

Vergleicht man die Traglasten mit SBETA mit den Annahmen der klassischen Plastizitätstheorie, s. Abbildung 7.83, die das gleichzeitige Versagen von Druck- und Zugstrebe postuliert, fällt auf, dass die Traglasten der TA-Balken deutlich höher liegen als die der ET-Balken, und die Traglasten nach Plastizitätstheorie sogar überschreiten. Eine Ausnahme bildet Balken TA11, der in der numerischen Simulation auf Biegung versagt. Die höheren numerischen Traglasten lassen sich vermutlich auf die größere Gurtbreite der TA-Balken zurückführen. Hierdurch werden die zur Festigkeit korrespondierenden Betonstauchungen in der Biegedruckzone neben der Lasteinleitung später erreicht. Insgesamt sind im numerischen Modell offenbar größere Umlagerungskapazitäten vorhanden als in der Realität.

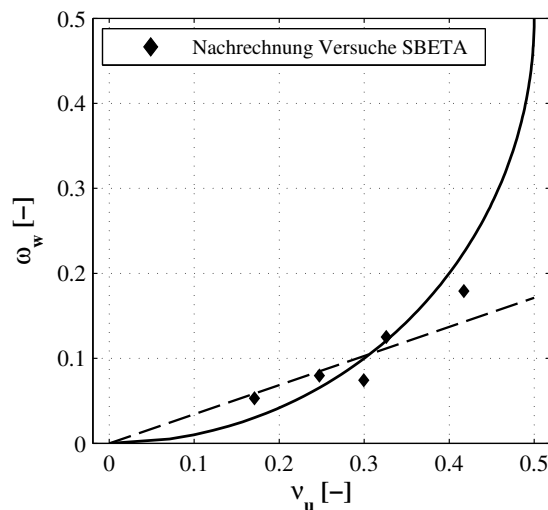


Abbildung 7.83: Ergebnisse der Nachrechnungen mit dem Materialmodell SBETA am Plastizitätskreis

Die Ergebnisse der Nachrechnungen zeigen, dass sowohl ein isotropes Modell mit anisotropem Bruchkriterium wie das MCTC-Modell als auch das definitionsgemäß anisotrope Smeared Crack Modell ein ähnliches Modelltragverhalten aufweisen und damit unter den genannten Einschränkungen grundsätzlich dazu geeignet sind, das Querkrafttragverhalten von Stahlbetonbalken realitätsnah abzubilden.

7.6 Nachrechnung auf Basis der elastoplastischen Spannungsfeldmethode (EPSF)

Abschließend erfolgt die Simulation der Balken auf Basis der Elasto-Plastischen Spannungsfeldmethode („EPSF“), deren numerische Umsetzung an der EPFL Lausanne unter Prof. Muttoni erfolgte. Es handelt sich um ein zweidimensionales anisotropes Modell, bei dem über die Vernachlässigung der Querdehnzahl eine Entkopplung der beiden Hauptdehnungsrichtungen erfolgt. Die Betonzugfestigkeit wird vernachlässigt. Als Materialkennwerte werden lediglich die Materialfestigkeiten sowie E-Moduln benötigt, ggf. unter Berücksichtigung einer Verfestigung bei den Stahl-Parametern. Eine weitere Besonderheit des Modells liegt darin, dass der Einfluss der Querkraftdehnung auf die Betondruckfestigkeit bei zweiaxialen Spannungszuständen berücksichtigt werden kann. Dies geschieht über den Ansatz nach VECCHIO/COLLINS. Mit den getroffenen Modellannahmen weist das EPSF-Modell Ähnlichkeiten mit dem Rotated Crack Modell, aufgrund der Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit jedoch auch mit dem MOHR-COULOMB-Modell mit Tension Cut Off auf. Die Modellierung der Balken erfolgt entweder am halben System unter Ausnutzung der Symmetrie oder am Gesamtsystem. Die Bewehrung wird diskret abgebildet.

7.6.1 Nachrechnung Versuchsserie 1

Strukturmodellierung Die Modellierung erfolgt im Falle der Balken ET2 und ET3 unter Ausnutzung der Symmetrie mit dreiknotigen Scheibenelementen für den Beton und eindimensionalen Fachwerkelementen für die Bewehrung. Da es sich um ein zweidimensionales Modell handelt, kann der Einfluss der Gurtplatte nur über eine größere Elementdicke erfasst werden.

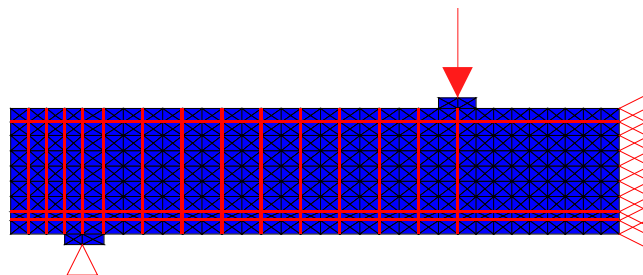


Abbildung 7.84: Strukturmodell des Balkens ET3 mit dem EPSF-Modell

Materialparameter Wie eingangs erwähnt, werden lediglich die Festigkeiten und E-Moduln des Betons und Bewehrungsstahls benötigt. Es werden die in Abschnitt 7.2.1 definierten Festigkeiten verwendet und als Mittelwerte angesehen. Bei der Bewehrung wird eine lineare Verfestigung angenommen.

Lastaufbringung Die Lastaufbringung erfolgt in diesem Modell lastgesteuert.

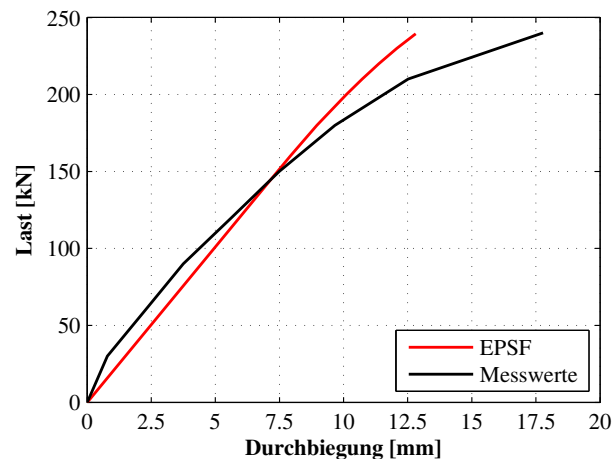
Vergleich der Bruchlasten Die folgende Tabelle zeigt die Bruchlasten der Balken aus Versuchsserie 1 der Nachrechnungen mit EPSF-Modell.

Tabelle 7.16: Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3

		ET2	ET3
F_{test}	[kN]	263	255
F_{EPSF}	[kN]	243	235,4

7.6.1.1 Ergebnisse Balken ET3

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Das Modell auf Basis der elasto-plastischen Spannungsfeldmethode verhält sich ähnlich wie das klassische Smeared Crack Modell von ATENA sowie das MCTC-Modell. Aufgrund der fehlenden Zugfestigkeit wird die Steifigkeit bei den frühen Laststufen in der numerischen Berechnung unterschätzt; im weiteren Belastungsverlauf verhält sich das Modell wegen des elastisch-plastischen Ansatzes im Druckbereich zu steif. Die Traglast wird im Falle des ET3 mit 238kN um knapp 8% unterschätzt.

**Abbildung 7.85:** Last-Verformungskurven des Balkens ET3 mit dem EPSF-Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der maximalen Hauptdruckspannungen Das an der EPFL entwickelte Programm verfügt nur über begrenzte Ausgabemöglichkeiten. In Abbildung 7.86a sind die Ausnutzung der Betondruckstrebe sowie die Bügelausnutzung, in Abbildung 7.86b der Verlauf der Hauptdruckspannungstrajektorien sowie die Bügelspannungen dargestellt.

Der Verlauf der Hauptdruckspannungen ähnelt den Verläufen der beiden zuvor dargestellten Modelle und bestätigt die schon zuvor beobachtete Fachwerktragwirkung. Die Richtung der Hauptspannungen stimmt mit der Rissrichtung überein. Es bildet sich ein kontinuierliches Spannungsfeld mit über die Balkenhöhe veränderlicher Neigung aus. Die Druckspannungen stützen sich gleichmäßig in die Bügel. Diese werden, wie der dunkelrote Farbton anzeigt, über die Streckgrenze hinaus beansprucht, d.h. der Mechanismus des Bügelfließens wird richtig erfasst. Die maximalen Bügeldehnungen betragen 8,0%. Es handelt sich hierbei im Gegensatz zu den anderen Modellen nicht um die plastischen, sondern die Gesamtdehnungen. Die verschiedenen Graustufen der Elemente zeigen weiterhin die

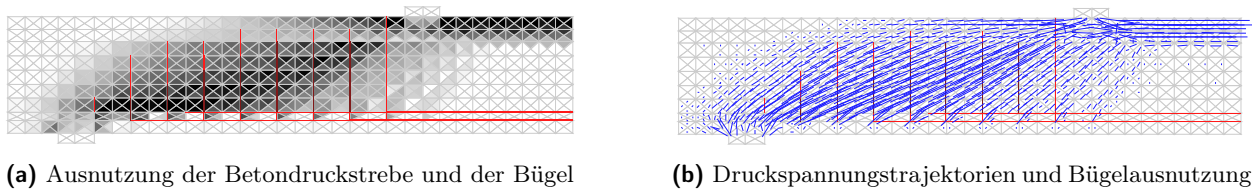


Abbildung 7.86: Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckfestigkeit des Balkens ET3 mit EPSF

Ausnutzung der Druckstrebe unter Berücksichtigung der Abminderung der Festigkeit aus Querkzug bzw. Querdehnung nach VECCHIO/COLLINS. Es sind sowohl im Stegbereich als auch in der Biegedruckzone sehr dunkel gefärbte Betonelemente erkennbar, d.h. der Beton ist stark auf Druck ausgenutzt. Die Abminderung der Druckfestigkeit beträgt im Steg bis zu 60%, ist also deutlich höher als z.B. beim SBETA-Modell, bei dem die Druckfestigkeit maximal auf $0,8f_{cm}$ abgemindert wird. Die Neigung der Druckstreben ist wiederum sehr flach und liegt z.T. bei nur $21-22^\circ$, also unter 25° . Auch hier ist eine starke Rotation der Druckstrebe zu erkennen.

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Die Nachrechnung des Balkens ET3 mit dem EPFS-Modell weist große Ähnlichkeiten mit den zuvor vorgestellten Modellen MCTC und SBETA auf. Es ist ein ähnlicher Tragmechanismus zu beobachten. Allerdings versagt der Balken ET3 nicht nur aufgrund des Fließens der Bügel, sondern auch, weil die Druckstreben-tragfähigkeit infolge der starken Abminderung erschöpft ist, es liegt also das nach der Plastizitätstheorie postulierte gleichzeitige Versagen von Zug- und Druckstrebe vor. Die starke Abminderung der Druckfestigkeit erklärt auch die niedrigeren Traglasten im Vergleich zu den beiden zuvor untersuchten Modellen.

7.6.1.2 Ergebnisse Balken ET2

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Die Last-Verformungskurve des Balkens ET2 zeigt ein sehr ähnliches Tragverhalten wie der Balken ET3. Die Traglast in der numerischen Simulation wird auch hier um ca. 7% unterschätzt. Die Vergrößerung der Stegdicke führt lediglich zu einer geringfügigen Erhöhung der Traglast.

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der maximalen Hauptdruckspannungen Die Neigung der Druckstreben ET2 und ET3 unterscheiden sich nur geringfügig, d.h. auch hier ist der Druckstrebenwinkel sehr flach. Aus Abbildung 7.88 ist eine geringere Ausnutzung der Druckstreben erkennbar, was aufgrund der größeren Stegdicke plausibel ist. Die Abminderung der Stegdruckfestigkeit beträgt hier dennoch immerhin 50%. Die Bügel sind über die Streckgrenze hinaus ausgenutzt, bei einer etwas geringeren Dehnung von 6‰. Die Druckstrebenwinkel entsprechen in etwa denen des Balkens ET3.

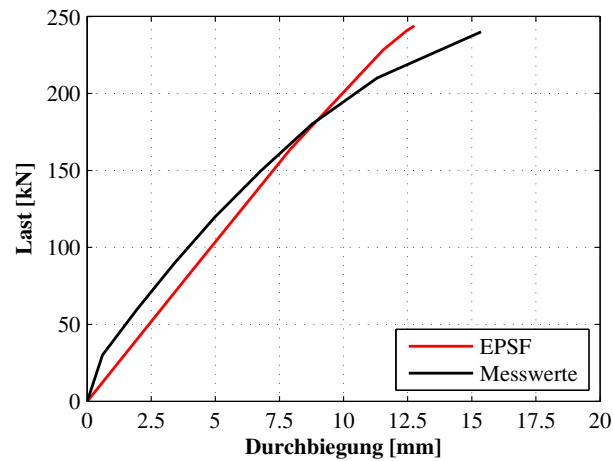


Abbildung 7.87: Last-Verformungskurven des Balkens ET2 mit dem EPSF-Modell

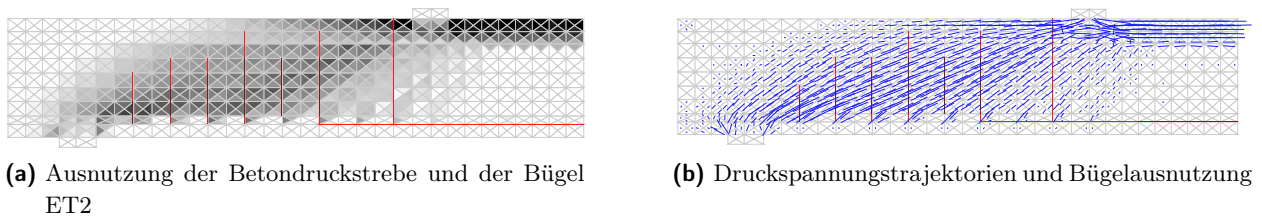


Abbildung 7.88: Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckfestigkeit des Balkens ET2 mit EPSF

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Die Traglast liegt nur geringfügig über der des ET3. Es fließen die Bügel, jedoch beginnt auch die Längsbewehrung zu fließen. Dies und die hohe Ausnutzung der Biegedruckzone deutet auf ein gleichzeitiges Schub- und Biegeversagen hin. Im Gegensatz zu Balken ET3 wird die (abgeminderte) Stegdruckfestigkeit in der Druckstrebe nicht erreicht.

7.6.2 Nachrechnung Versuchsserie 2

Strukturmodellierung Die Nachrechnung der Balken TA11, TA12 und TA15 erfolgt am Gesamtsystem.

Materialparameter/Lastaufbringung Für die Materialparameter und die Lastaufbringung gelten die Aussagen aus Abschnitt 7.6.1

Vergleich der Bruchlasten Tabelle 7.17 zeigt die Bruchlasten der Balken aus Versuchsserie 2 der Nachrechnungen mit EPSF-Modell. In allen Fällen wird in den numerischen Simulationen die tatsächliche Traglast unterschätzt.

Tabelle 7.17: Vergleich der Bruchlasten der Balken TA11,TA12 und TA15

		TA11	TA12	TA15
F_{test}	[kN]	684	540	596
F_{EPSF}	[kN]	586	468	514

7.6.2.1 Ergebnisse Balken TA11

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Die Last-Verformungskurve zeigt ein ähnliches Bild wie bei den Balken zuvor. Die Traglast wird allerdings deutlicher unterschätzt, sie beträgt mit 586kN nur 86% der Versuchstraglast.

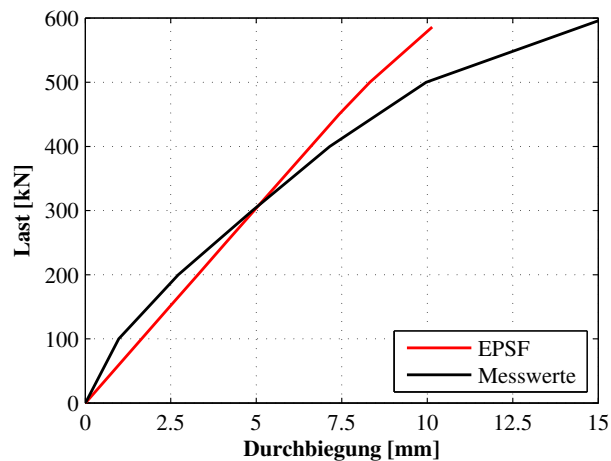


Abbildung 7.89: Last-Verformungskurven des Balkens TA11 mit dem EPSF-Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der maximalen Hauptdruckspannungen Die numerische Simulation mit dem EPSF-Modell zeigt auch für den Balken TA11 ein ähnliches Tragverhalten. Ähnlich wie bei der Simulation mit dem Rotated Crack Modell SBETA sind hier allerdings die Hauptdruckspannungstrajektorien, also die Risse, wieder steiler, der Winkel beträgt ca. 26°-28°. Gleichzeitig beträgt die maximale Abminderung der Stegdruckfestigkeit „nur“ 50%. Die Bügel fließen, die maximale Bügeldehnung ist mit 4,9‰ etwas geringer als in der Simulation mit dem Rotated Crack Modell, allerdings bei deutlich niedrigerer Traglast. Der höhere Schubbewehrungsgrad führt auch hier zu einem ausgeprägteren Fachwerkverhalten und einer offenbar geringeren Rotation der Druckstreben. Wie bei dem Balken ET2 beginnt auch hier die Biegezugbewehrung zu fließen und die Biegedruckzone ist stark ausgenutzt, was auf einen Biegeschubbruch hindeutet.

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Auch im Falle des Balkens TA11 tritt das Versagen gleichzeitig in Zug- und Druckstrebe auf. Im Modell ist ferner die Biegetragfähigkeit nahezu erreicht. Die starke Abminderung der Stegdruckfestigkeit führt zu einem deutlich früheren Versagen als bei den anderen Modellen.

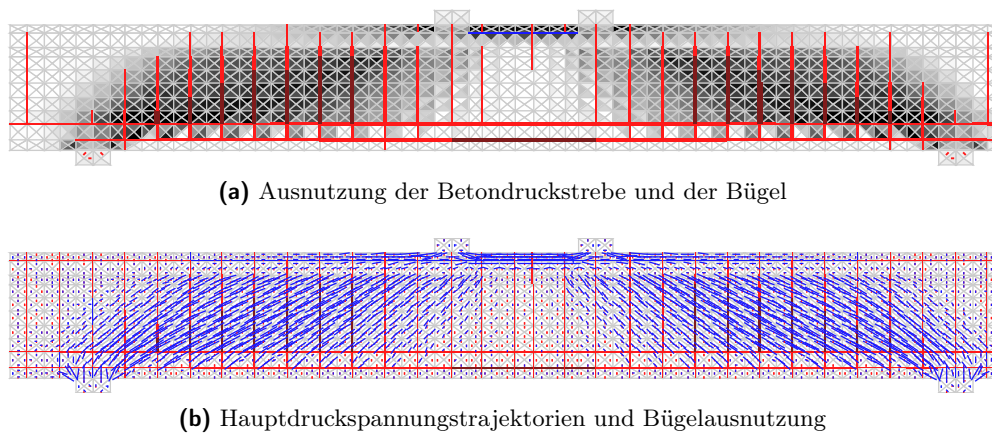


Abbildung 7.90: Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckfestigkeit des Balkens TA11 mit EPSF

7.6.2.2 Ergebnisse Balken TA12

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Auch bei Balken TA12 wird die Traglast relativ deutlich um 14% unterschätzt. Das Last-Verformungsverhalten ähnelt dem der anderen mit dem EPSF-Modell nachgerechneten Balken.

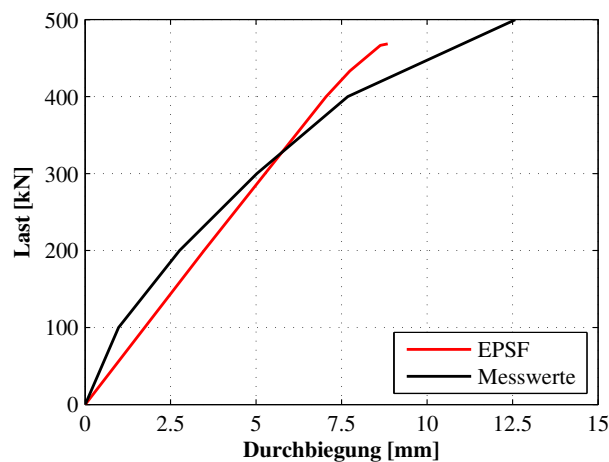


Abbildung 7.91: Last-Verformungskurven des Balkens TA12 mit dem EPSF-Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der maximalen Hauptdruckspannungen Der Balken TA12 zeichnet sich in der Nachrechnung durch relativ flache Druckstrebenwinkel von ca. 22° - 23° aus. Somit wird auch mit dem EPSF-Modell bestätigt, dass geringere Schubbewehrungsgrade zu einer größeren Rotation der Druckstreben und somit einem flacheren Druckstreben- bzw. Risswinkel führen. Auch hier werden die Bügel über die Streckgrenze hinaus beansprucht, die maximalen Bügeldehnungen betragen wie bei Balken ET3 $7,9\%$. Auch die Abminderung der Druckfestigkeit erreicht mit maximal 62% eine ähnliche Größenordnung wie bei Balken ET3.

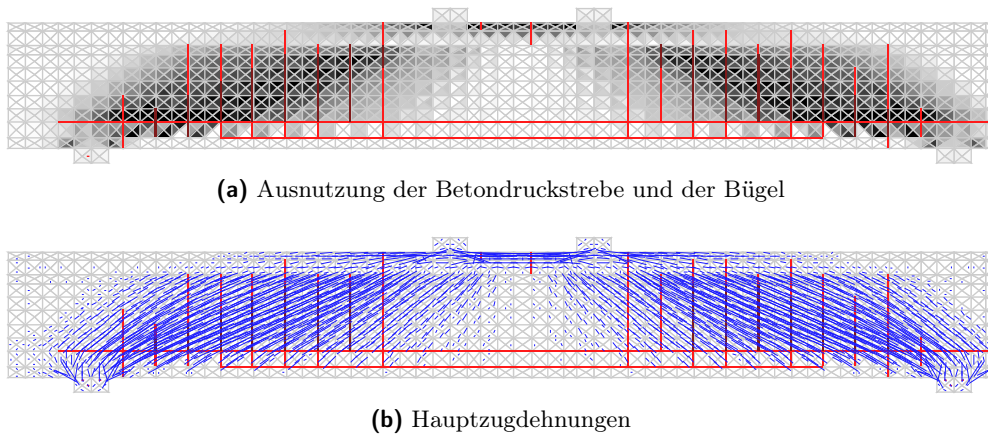


Abbildung 7.92: Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckfestigkeit des Balkens TA12 mit EPSF

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Der Balken TA12 weist das schon mehrfach beobachtete Fachwerkverhalten auf. Auch in diesem Fall tritt aufgrund der starken Abminderung der Stegdruckfestigkeit das Versagen von Zug- und Druckstrebe gleichzeitig auf.

7.6.2.3 Ergebnisse Balken TA15

Vergleich der Bruchlasten/Last-Verformungskurven Die Last-Verformungskurve bestätigt die bisherigen Ergebnisse. Die Traglast wird um knapp 14% unterschätzt.

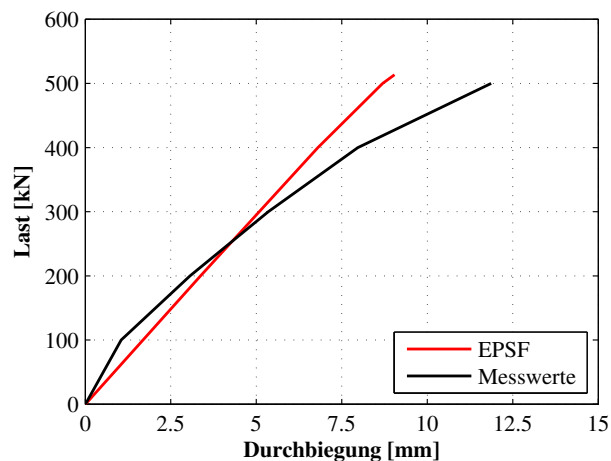


Abbildung 7.93: Last-Verformungskurven des Balkens TA15 mit dem EPSF-Modell

Vergleich der Rissbilder bzw. Analyse der maximalen Hauptdruckspannungen Der Verlauf der Druckspannungstrajektorien sowie die Ausnutzung der Druckstreben in Abhängigkeit der Querdehnung ähneln denen des Balkens TA11. Die maximale Abminderung der Druckstreben beträgt knapp 38%, die maximale Bügeldehnung nur 3,4‰. Die Neigung des Druckspannungsfeld ist ebenfalls wie-

der steiler als beim Balken TA12 und beträgt ca. 25° - 27° . Die Ausnutzung der Betondruckspannungen ist im Bereich der Biegedruckzone und des Steges z.T. sehr hoch und führt auch hier zum Versagen.

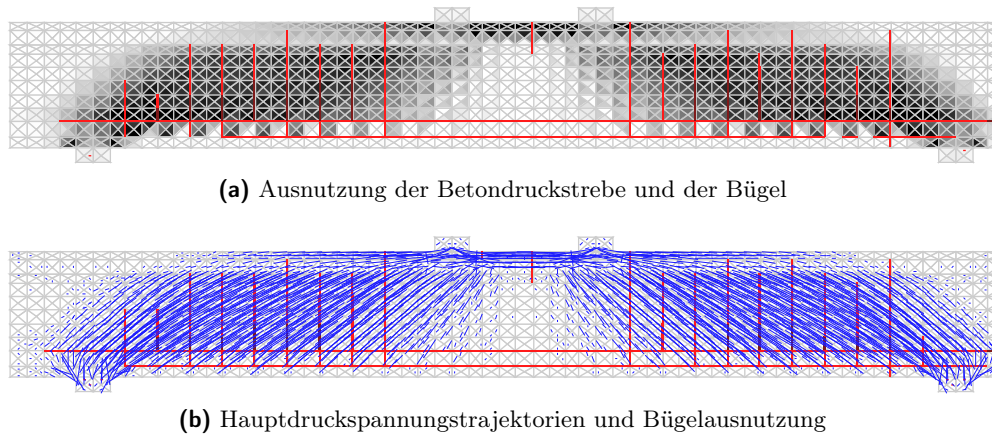


Abbildung 7.94: Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckstrebe des Balkens TA15 mit EPSF

Analyse des Tragverhaltens/Vergleich des Versagensmechanismus Die Nachrechnung des Balkens TA15 bestätigt die bisherigen Ergebnisse.

7.6.3 Analyse und Bewertung des Modells „EPSF“

Die numerischen Simulationen mit dem Modell auf Basis der Elasto-Plastischen Spannungsfelder führt in allen Fällen zu einer Unterschätzung der Traglast, im Unterschied zu den Nachrechnungen mit dem Rotated Crack Modell SBETA von ATENA sowie dem MCTC-Modell. Grundsätzlich ähnelt das Modelltragverhalten jedoch stark dem des MOHR-COULOMB- sowie Rotated Crack Modells, und zeigt ähnliche Abhängigkeiten: Es bildet sich ein Fachwerktragverhalten aus, ggf. mit einem zusätzlichen Sprengwerk- bzw. Druckbogenanteil. Die Druckstreben stützen sich in die Bügel, das Fließen der Bügel wird zutreffend erfasst. Ebenso werden auch hier die Druckstrebenwinkel bei geringerem mechanischen Schubbewehrungsgrad flacher. Die Unterschiede in der Traglast, insbesondere zum Rotated Crack Modell, sind z.T. mit den Modellannahmen erklärbar: Im Gegensatz zum in ATENA implementierten Modell SBETA kann die größere Druckfestigkeit bei zweiaxialen Druckspannungszuständen nicht abgebildet werden. Außerdem erfolgt aufgrund der Umsetzung des Ansatzes von VECCHIO/COLLINS eine deutlich stärkere Abminderung der Druckfestigkeit infolge Querkzug. Dies führt bei allen Balken bis auf ET2 zu einem gleichzeitigen Versagen der Zug- und Druckstrebe. Die z.T. recht deutliche Unterschätzung der realen Traglasten deutet auf eine zu große Abminderung der Stegdruckfestigkeit hin. Wie bei den zuvor betrachteten Materialmodellen gehen auch hier niedrigere Schubbewehrungsgrade mit größeren Dehnungen einher, die eine größere Rotation der Druckstrebe ermöglichen. Die relativ gute Übereinstimmung der rechnerischen mit den Versuchstraglasten sowie das Modelltragverhalten, das große Ähnlichkeiten zu dem der Modelle MCTC und SBETA aufweist, lassen auch das EPSF-Modell als grundsätzlich geeignet zur Abbildung des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken erscheinen.

7.7 Vergleich der Versuchsnachrechnungen mit verschiedenen Materialmodellen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der verschiedenen Materialmodelle vergleichend gegenüber gestellt. Neben den Traglasten werden auch die Last-Verformungskurven, das Tragverhalten sowie die Druckstrebenwinkel verglichen.

7.7.1 Vergleich der Traglasten bzw. der Querkrafttragfähigkeit

In Tabelle 7.18 sind die Bruchlasten für die untersuchten Balken mit den einzelnen Materialmodellen dargestellt. Es wird deutlich, dass die numerischen Simulationen mit dem plastischen CDP-Modell zu den geringsten Traglasten führen, die Simulationen mit SBETA zu den höchsten. Die Traglasten der beiden Modelle MCTC sowie EPSF liegen dazwischen. Die Erhöhung der Zugfestigkeit beim CDP-Modell führt zwar zu höheren rechnerischen Traglasten, ist aber physikalisch unbegründet.

Tabelle 7.18: Vergleich der Bruchlasten mit verschiedenen Materialmodellen

	ET2	ET3	TA11	TA12	TA15
$F_{u,test}$	263,0	255,0	684,0	540,0	596,0
CDP	221,4	157,3	439,0	321,9	400,1
CDP, $2,0f_{ct}$	283,0	233,7	534,9	470,5	470,0
MCTC	280,2	251,6	599,0	544,0	550,0
SBETA	286,0	276,0	665,0	612,0	596,0
EPSF	243,0	235,4	586,0	468,0	514,0

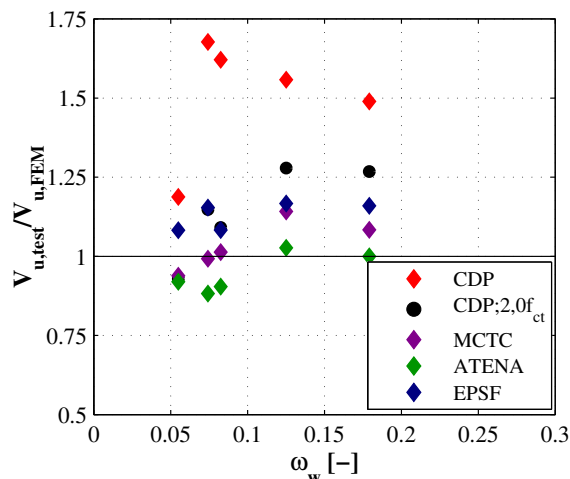
In Tabelle 7.19 sind die Quotienten $\gamma_{mod} = V_{u,FEM}/V_{u,test}$ der realen Querkrafttragfähigkeit zur der numerischen Simulationen sowie deren Mittelwert „MW“ und Variationskoeffizient „VK“ aufgeführt. Der Quotient γ_{mod} kann als Modellunsicherheitsbeiwert aufgefasst werden. Hinsichtlich der Streuungen der experimentell ermittelten Traglasten der Versuchsbalken werden die Versuchswerte als Mittelwerte angesehen. Bei den numerischen Simulationen werden daher die Mittelwerte der Materialparameter verwendet (Festigkeiten, Steifigkeiten). Eine gute Übereinstimmung zwischen Rechenmodell und Versuch ist dann gegeben, wenn der Quotient $\gamma_{mod} = V_{u,FEM}/V_{u,test}$ mit möglichst geringen Abweichungen um 1,0 schwankt.

In Abbildung 7.95 sind die Quotienten ferner graphisch über den mechanischen Bewehrungsgrad aufgetragen. Die erhebliche Unterschätzung der Querkrafttragfähigkeit mit dem CDP-Modell ist deutlich erkennbar, dagegen wird die Tragfähigkeit mit dem Materialmodell SBETA von ATENA tendenziell überschätzt, insbesondere bei kleinen Bewehrungsgraden. Die Simulationen mit dem MCTC-Modell sowie dem EPSF-Modell weisen ähnliche Tragfähigkeiten auf. Die stärkere Abminderung der Druckstrebenfestigkeit führt zu geringeren Tragfähigkeiten beim EPSF-Modell, während beim MCTC-Modell das Versagen z.T. auf Konvergenzschwierigkeiten zurückzuführen ist. Im Mittel erzielt das MCTC-Modell die besten Ergebnisse, allerdings mit einem etwas höheren Variationsko-

Tabelle 7.19: Vergleich $V_{u,test}/V_{u,FEM}$ mit verschiedenen Materialmodellen

	ET2	ET3	TA11	TA12	TA15	MW	VK
CDP	1,19	1,62	1,56	1,68	1,49	1,507	0,114
CDP;2,0 f_{ct}	0,93	1,09	1,28	1,15	1,27	1,143	0,112
MCTC	0,94	1,01	1,14	0,99	1,08	1,034	0,069
SBETA	0,92	0,90	1,03	0,88	1,00	0,947	0,06
EPSF	1,08	1,08	1,17	1,15	1,16	1,129	0,034

effizienten als die Simulationen mit SBETA und EPSF. Tendenziell werden die Tragfähigkeiten bei kleinen Bewehrungsgraden unterschätzt. Grundsätzlich lässt mit den drei Modellen MCTC, SBETA und EPSF jedoch eine gute Übereinstimmung der rechnerischen mit den Versuchstragtragfähigkeiten erzielen.

Abbildung 7.95: Vergleich $F_{u,test}/F_{u,FEM}$ in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgrads

7.7.2 Vergleich der Last-Verformungskurven

Der Vergleich der Last-Verformungskurven zeigt Unterschiede zwischen realem und Modelltragverhalten. Die beiden Modelle CDP und SBETA, die auch die Zugfestigkeit des Betons berücksichtigen, können die Anfangssteifigkeit des Versuchs gut abbilden. Während sich das CDP-Modell im weiteren Verlauf deutlich zu weich verhält und die Traglasten nicht erreicht, zeigt das SBETA-Modell das entgegengesetzte Verhalten: Es verhält sich zunehmend zu steif und überschätzt z.T. die Traglast sogar. Grund für das zu steife Verhalten ist vermutlich die nicht zutreffende Abbildung der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Linien unter zweiachsialer Beanspruchung, wie schon in Abschnitt 6.3.3 erläutert wurde.

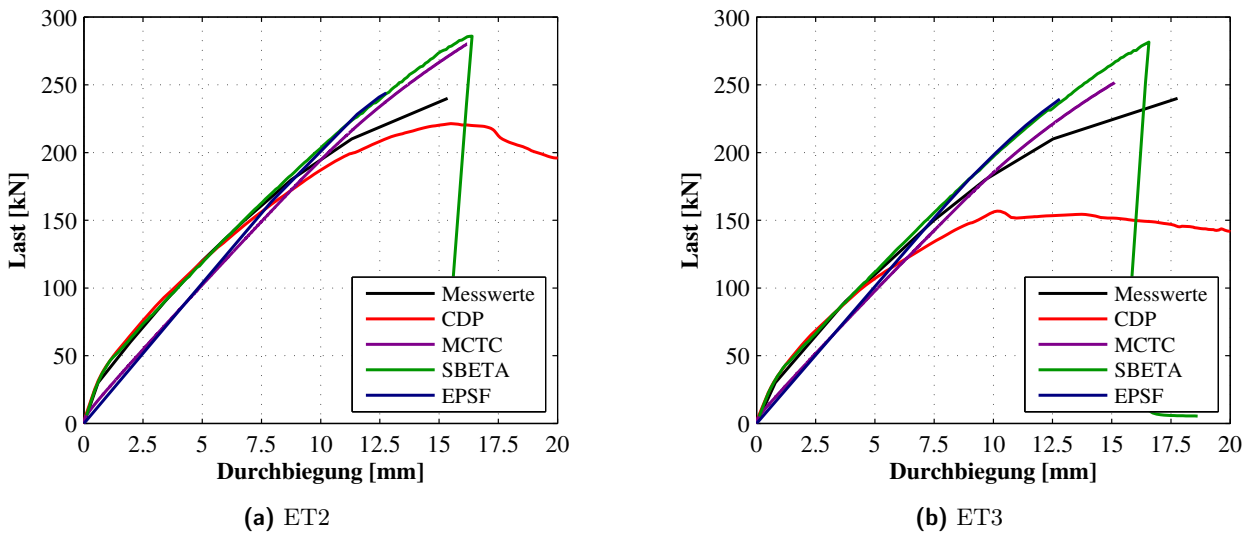


Abbildung 7.96: Last-Verformungskurven der Balken ET2 & ET3 mit verschiedenen Materialmodellen

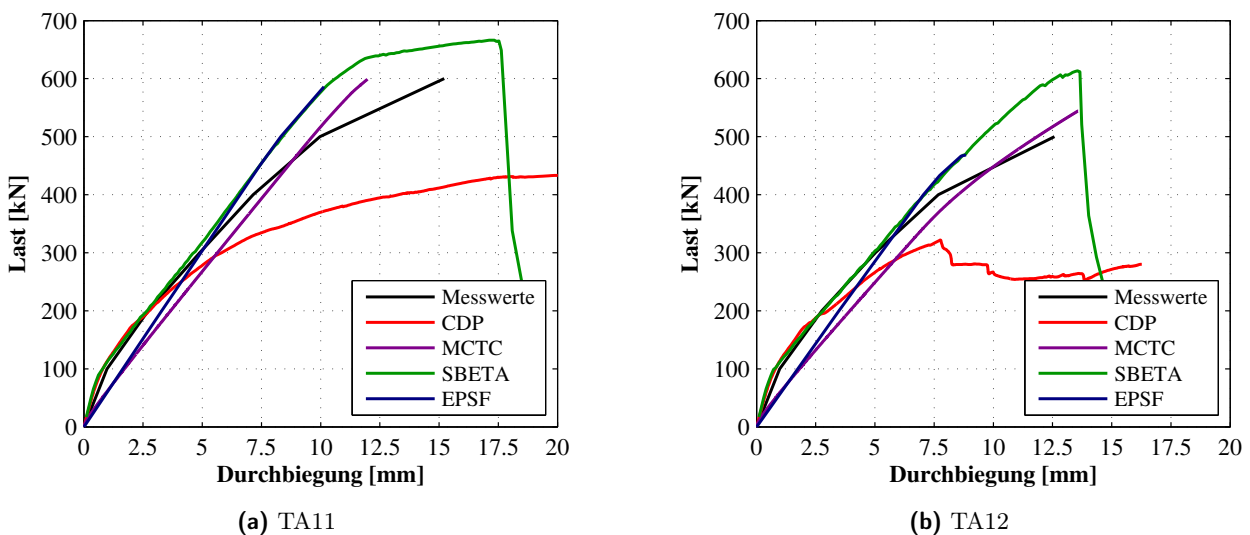


Abbildung 7.97: Last-Verformungskurven der Balken TA11 & TA12 mit verschiedenen Materialmodellen

Die beiden Modelle ohne Berücksichtigung der Zugfestigkeit, MCTC und EPSF, können erwartungsgemäß den Zeitpunkt der Rissbildung nicht richtig erfassen und verhalten sich daher in den unteren Laststufen zu weich, in den späteren Laststufen zu steif. Grund hierfür ist die linear-elastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung bis zum Bruch. In den höheren Laststufen lassen sich Unterschiede zwischen den Balken ET2 und ET3 sowie TA11, TA12 und TA15 erkennen. Bei den Balken ET2 und ET3 verlaufen die Kurven sehr ähnlich. Die EPSF-Simulationen sind im späteren Verlauf fast deckungsgleich mit den Last-Verformungskurven von ATENA. Die MCTC-Kurve liegt etwas unterhalb dieser beiden Kurven. Bei den Balken TA11, TA12 und TA15 ist jedoch eine größere Ab-

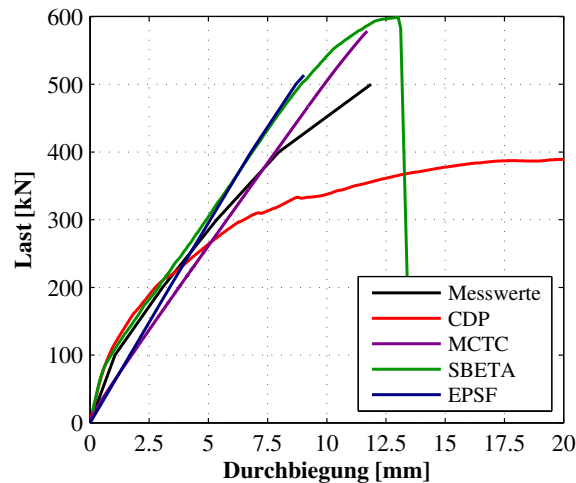


Abbildung 7.98: Last-Verformungskurven des Balkens TA15 mit verschiedenen Materialmodellen

weichung der Steifigkeiten zu erkennen. Die Steifigkeit scheint in der Simulation nicht richtig erfasst worden zu sein. Die Tragfähigkeit der MCTC-Simulationen ist jedoch höher als die der EPSF-Simulationen, allerdings auch bei höheren Beton- und Bügeldehnungen. Grundsätzlich verhalten sich die drei Modelle SBETA, MCTC und EPSF sehr ähnlich.

7.7.3 Vergleich des Tragverhaltens

Auf das Tragverhalten wurde bei den einzelnen Abschnitten schon genauer eingegangen. Hier werden die Unterschiede zusammenfassend und vergleichend dargestellt.

Sehr auffällig ist die Abweichung des Tragverhaltens von Modell CDP im Vergleich zu allen anderen Modellen. Die Ursache hierfür wurde bereits ausführlich geschildert: Der Lastabtrag erfolgt nicht über eine Fachwerktragwirkung mit Betontraganteil, sondern das Tragverhalten des CPD-Modells ähnelt eher dem eines Balkens ohne Schubbewehrung. Da sich die drei anderen Modelle zueinander sehr ähnlich verhalten und das CDP-Modell ferner die Traglasten deutlich unterschätzt, ist davon auszugehen, dass das Modelltragverhalten das reale Tragverhalten nicht zutreffend widerspiegelt. Das CDP-Modell scheint daher für die Abbildung des Querkrafttragverhaltens von bewehrten Stahlbetonbalken nach den bisherigen Erkenntnissen von allen untersuchten Materialmodellen am wenigsten geeignet zu sein.

Die drei anderen Modelle weisen große Ähnlichkeiten im Tragverhalten auf: Bei allen ist eine Fachwerktragwirkung erkennbar. Die Bügel werden ebenso wie im Versuch bis über die Streckgrenze beansprucht. Die Stahldehnungen unterscheiden sich allerdings von Modell zu Modell, was z.T. auf die unterschiedlich großen Traglasten zurückzuführen ist. Die Bügel sind im Schubfeld relativ gleichmäßig über die Höhe ausgenutzt, im Bereich der Lasteinleitung und des Auflagers werden die Bereiche der Bügel nahe der Last bzw. des Auflagers dagegen weniger beansprucht. Dies spricht für die Fachwerktragwirkung im Schubfeld, jedoch auch für die Existenz eines weiteren Traganteils bzw. Tragmechanismus in Form einer direkten Druckstrebe bzw. eines Druckbogens. Eine weitere Gemeinsamkeit aller Modelle ist die zu beobachtende Rotation des Druckstrebenwinkels über den

Belastungsfortschritt sowie die Abhängigkeit vom Schubbewehrungsgrad. Je geringer dieser ist, desto flacher ist die Druckstrebe geneigt.

7.7.4 Vergleich des Druckstreben- bzw. Risswinkels

Eine Aussage zum Riss- bzw. Druckstrebenwinkel im klassischen Sinn ist schwierig. Die Neigung der Hauptdruckspannungen variiert über die Höhe der Querschnitte. Am oberen Rand und in der Biegedruckzone verlaufen die Hauptdruckspannungen flacher als im Schubfeld selbst, dagegen sind sie, wenn sie sich in die Bügel stützen, nahezu um 45° zur Längsachse geneigt.

Tabelle 7.20: Vergleich der Risswinkel in Grad mit verschiedenen Materialmodellen

	ET2	ET3	TA11	TA12	TA15
MCTC	23.5	24.0	26.5	23.0	28.0
ATENA	23.0	23.0	26.0	23.0	27.0
EPSF	22.0	22.5	25.0	22.5	26.5

Daher lässt sich ein eindeutiger Winkel schwer bestimmen. Dennoch lässt sich sagen, dass die Winkel unabhängig vom gewählten Modell und betrachteten Versuch bei unter 30° liegen. Tendenziell ist auch zu erkennen, dass niedrige mechanische Bewehrungsgrade flachere Druckstrebenwinkel zur Folge haben. Allgemein sind die Winkel mit dem MCTC-Modell geringfügig steiler als mit den anderen Modellen. Die Winkel aus den numerischen Simulationen sind ferner im Mittel um bis zu 5° flacher als die Risswinkel aus den realen Versuchen. Tabelle 7.20 stellt eine Übersicht über die mittleren Druckstrebenwinkel dar.

7.7.5 Fazit

Die numerischen Simulationen der fünf Versuche an Stahlbetonbalken mit verschiedenen Materialmodellen belegen den Einfluss der Materialmodellierung. Es lassen sich Unterschiede in der Traglast, im Lastverformungsverhalten wie auch dem Tragverhalten feststellen. Die größte Abweichung von den Versuchsergebnissen ergeben sich mit dem Modell CDP auf Basis der isotropen Plastizität, das sich auch im Tragverhalten deutlich von den anderen Modellen unterscheidet. Die drei anderen Materialmodelle weisen bei quantitativen Unterschieden, z.B. bei den Beton- oder Stahldehnungen, qualitativ dasselbe Tragverhalten auf, das im Grundsatz auch mit dem realen Tragverhalten übereinstimmt. Aufgrund der großen Ähnlichkeiten im Tragverhalten, insbesondere in Bezug auf die Ausbildung des Fachwerktragverhaltens mit Rotation der Druckstrebe scheinen die drei Modelle MCTC, EPSF und SBETA gut geeignet zur numerischen Simulation und Abbildung des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken. Gemeinsam ist diesen Modellen, dass sie in der Lage sind, das rissinduzierte anisotrope Verhalten unter Querkraftbeanspruchung zu erfassen. Während das SBETA- und EPSF-Modell orthotrope Modelle im mechanischen Sinn sind, kann die Anisotropie bei dem isotropen MCTC-Modell auf Basis der Plastizitätstheorie nur durch einige Modifikationen abgebildet werden, wie bei der Modellbeschreibung schon dargestellt wurde.

7.8 Analyse des Modelltragverhaltens

Bei den Nachrechnungen der Großversuche zeigen drei der vier verwendeten Materialmodelle ein sehr ähnliches Modelltragverhalten und eine gute Übereinstimmung mit den Versuchen, sowohl im Hinblick auf die Traglasten als auch auf den Versagensmechanismus. Daher wird im Folgenden das Modelltragverhalten eingehender untersucht, um hieraus Rückschlüsse auf das tatsächliche Tragverhalten zu ziehen. Der reale Versuch spiegelt die physikalische Wirklichkeit wider, lässt jedoch nur Messungen an diskreten Stellen zu. Demgegenüber können bei den numerischen Simulationen auch der Verlauf der inneren Kräfte visualisiert und Tragmechanismen für den Querkraftlastabtrag identifiziert werden.

7.8.1 Spannungsumlagerung und Rotation der Druckstrebe

In den numerischen Simulationen ist unabhängig vom Materialmodell eine starke Rotation des Hauptspannungswinkels zu beobachten, die zur Spannungsumlagerung infolge der Rissbildung und der Ausbildung des Fachwerktragverhaltens korrespondiert, s. Abbildung 7.99. Im Folgenden wird

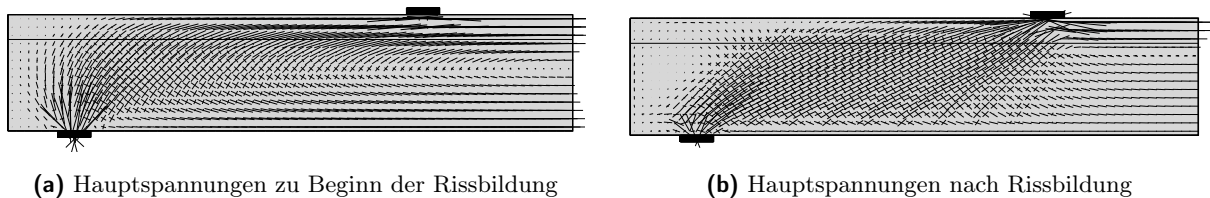


Abbildung 7.99: Trajektorien der Hauptspannungen und Rotation des Druckstrebenwinkels θ

das Phänomen anhand der Ergebnisse der numerischen Simulation des Balkens ET3 mit dem Materialmodell MCTC genauer untersucht. Hierfür werden erneut die Spannungszustände eines Betonelementes betrachtet, das sich etwas unterhalb der elastischen Spannungsnulllinie befindet, s. Abbildung 7.53. Abbildung 7.100 zeigt die zeitliche Entwicklung des Hauptspannungswinkels θ , der dem Druckstrebenwinkel im Fachwerkmodell entspricht, im Belastungsverlauf. Aus der Betrachtung der Entwicklung der Koordinatenspannungen lassen sich das Tragverhalten des Modells und die Spannungsumlagerungen im Belastungsverlauf gut ablesen. Die Verläufe der Spannungen und des Hauptspannungswinkels zum Zeitpunkt der Rissbildung sind in Abbildung 7.101 dargestellt. Zu Belastungsbeginn wirkt im betrachteten Element auf das x-y-Koordinatensystem bezogen eine Schubspannung τ_{xy} , überlagert mit einer geringen Zugnormalspannung σ_x . Dies korrespondiert zu einem negativen Hauptspannungswinkel in Höhe von -44° . Im Belastungsverlauf steigen die Schubspannung sowie die Zugnormalspannung σ_x zunächst weiter an. Vor der Rissbildung ändert sich der Winkel geringfügig infolge der Tatsache, dass die Schubspannung etwas schwächer ansteigt als die Zugnormalspannung. Er bleibt negativ, solange die Koordinatenspannung σ_x positiv ist. Im Zuge der Rissbildung ändern sich sowohl das lokale als auch das globale Modelltragverhalten. Nach Erreichen der Betonzugfestigkeit ist aufgrund des RANKINE-Kriteriums die Aufnahme zusätzlicher Schubspannungen nur durch die Überlagerung mit einem Druckspannungszustand möglich. Während die Querkraft bzw. die daraus resultierende Schubspannung im Steg zuvor über den linear-elastischen Scheibenspannungszustand abgetragen wurde, erfolgt im Rahmen der Rissbildung der Übergang

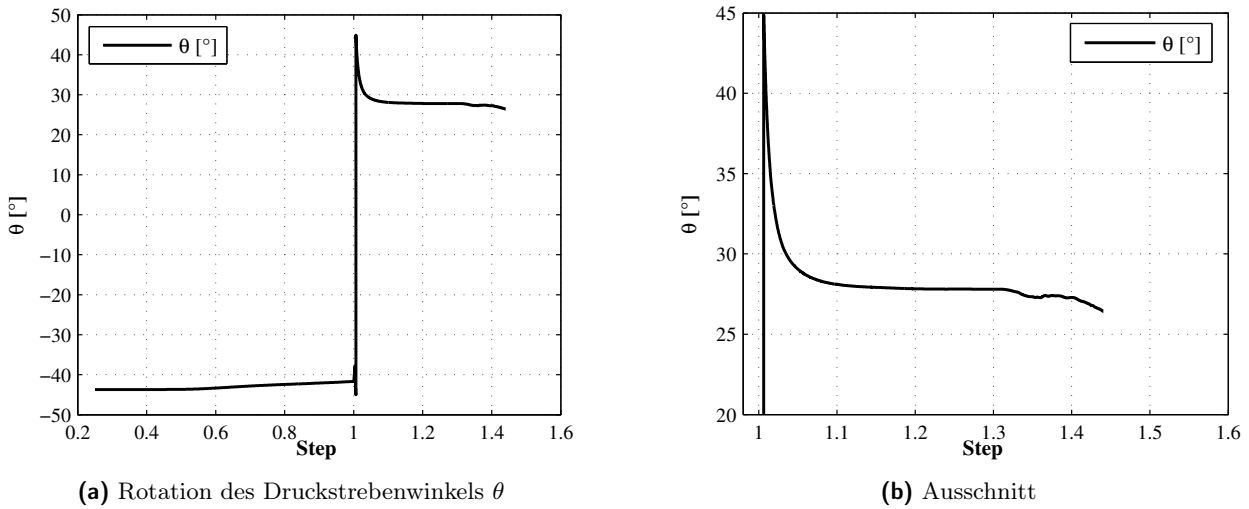


Abbildung 7.100: Rotation des Druckstrebenwinkels θ

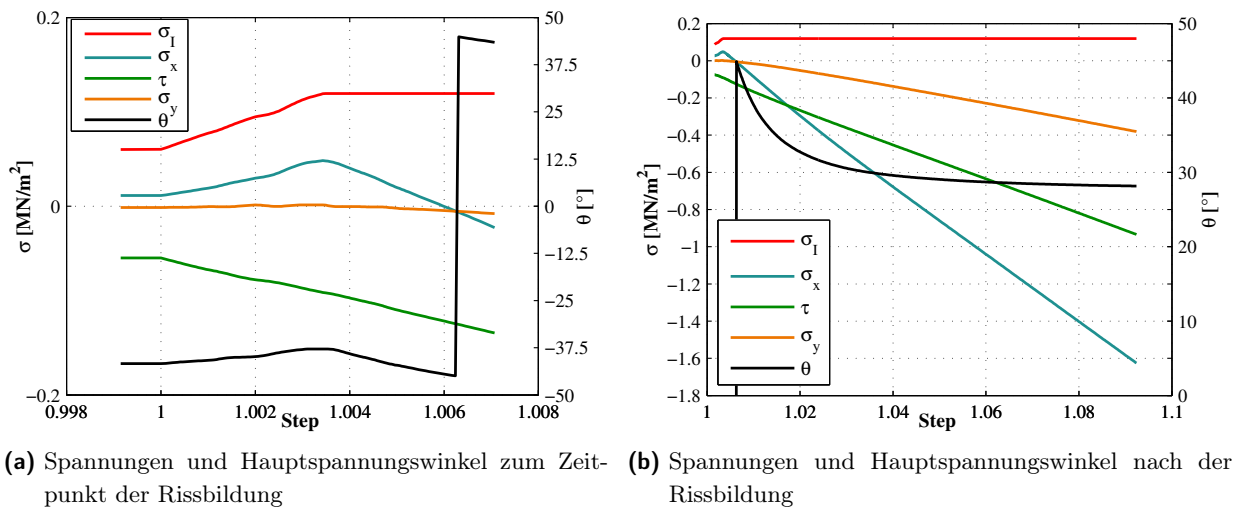


Abbildung 7.101: Entwicklung der Haupt- und Koordinatenspannungen sowie θ von ET3

zu einem Tragverhalten ähnlich den elasto-plastischen Spannungsfeldern und die Umlagerung von Zugspannungen in die Bewehrung.

Die Spannungsumlagerung geht mit einer Rotation des Hauptspannungswinkels einher, was sich sowohl auf globaler als auch lokaler Ebene erkennen lässt. Zunächst nimmt die bisher positive Koordinatenspannung σ_x ab und wird anschließend negativ. Der Winkel θ bleibt zunächst weiterhin negativ, wird nun jedoch wieder steiler. Beim Übergang von σ_x vom Zug- in den Druckbereich wechselt auch der Winkel das Vorzeichen, da nun die Spannung σ_y die größere Spannung ist. Zur Aufnahme weiterer Schubspannungen muss auch die Druckspannung σ_x zunehmen und die Druckstrebe, bzw. das Druckspannungsfeld wird flacher, s. Abbildung 7.102.

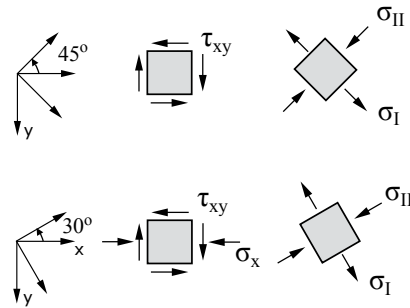


Abbildung 7.102: Rotation der Hauptspannungen infolge zusätzlicher Drucknormalspannung σ_x

Die hier vorgestellten Zusammenhänge lassen sich gut mit Hilfe des MOHRschen Spannungskreises veranschaulichen. Abbildung 7.103 zeigt die Entwicklung der Spannungen für das betrachtete Betonelement. Die Existenz der Spannung σ_y ist sowohl lokal als auch global aus Gleichgewichtsgründen

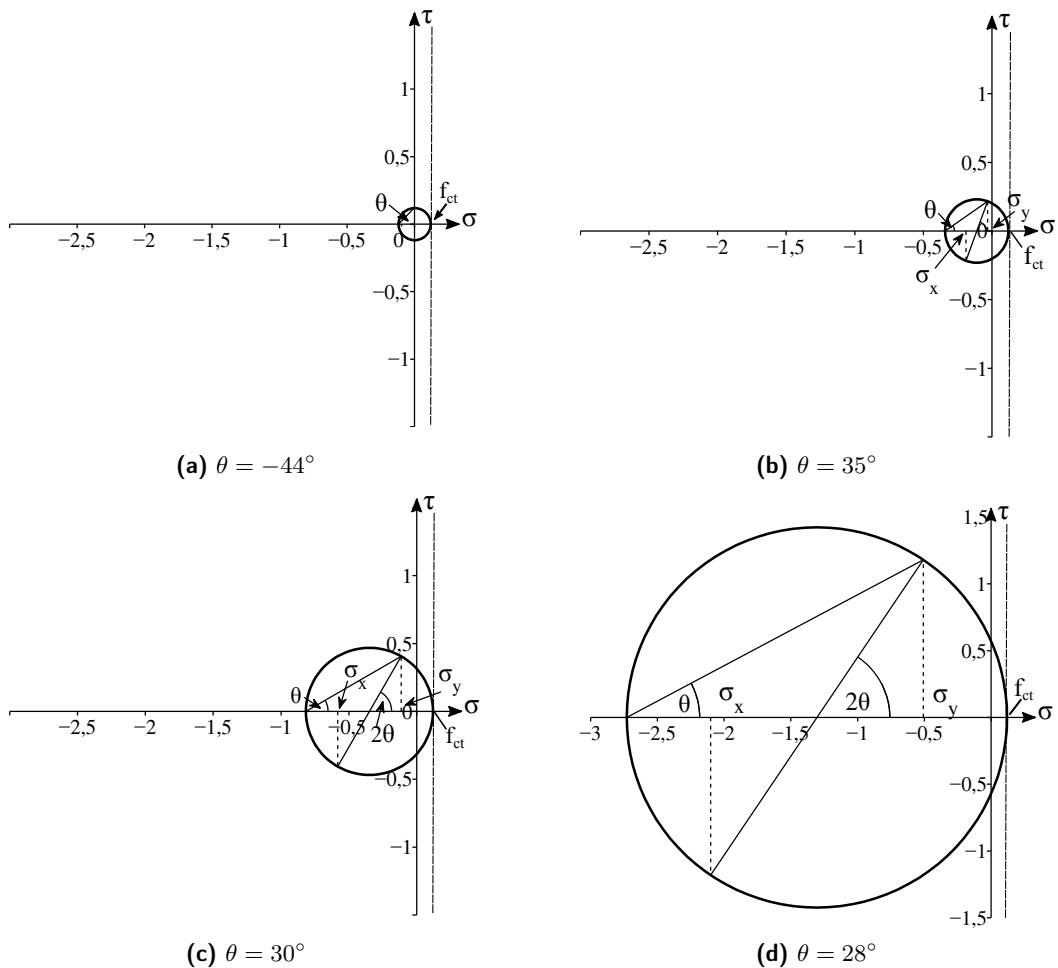


Abbildung 7.103: Entwicklung der Haupt- und Koordinatenspannung sowie des Hauptspannungswinkels θ bei Balken ET3

aufgrund der Spannungsumlagerung im gerissenen Zustand erforderlich. Da die Hauptspannung σ_1 auf die Betonzugfestigkeit beschränkt ist, und diese nur eine sehr kleine Vertikalkomponente besitzt, können die Gleichgewichtsbedingungen am Betonelement in vertikaler Richtung nur mithilfe der Spannung σ_y erfüllt werden, vgl. Abbildung 7.104.

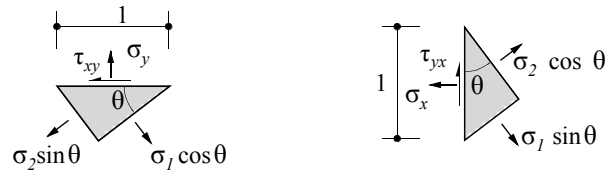


Abbildung 7.104: Lokales Gleichgewicht am Betonelement

Auf globaler Ebene stehen die Betonspannungen σ_y mit den Bügelkräften im Gleichgewicht, was sich an einem horizontalen Freischnitt zeigen lässt, s. Abbildung 7.105. Die Spannungen σ_y steigen erst an, wenn aufgrund der Rissbildung die Umlagerung der Zugspannungen in die Bügel erfolgt. Die Bügel spielen eine wichtige Rolle, da sie für das globale Gleichgewicht erforderlich sind und die

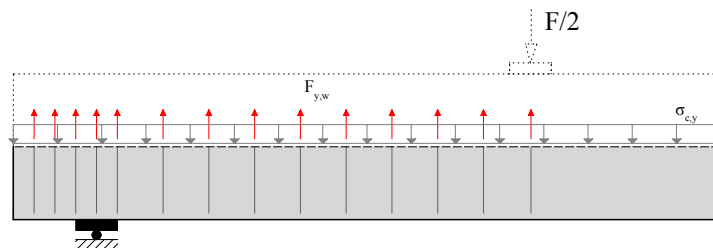


Abbildung 7.105: Gleichgewicht der Bügelkräfte mit den Betonspannungen σ_y

Weiterleitung der Zugspannungen übernehmen. Ist die Neigung der Druckspannung in einem Betonelement zu flach, um die Spannung direkt ins Auflager zu transportieren, dient der nahegelegene Bügel als lokales Auflager. Die Druckspannung wird durch den Bügel als Zugspannung wieder in die Druckzone transportiert, es bildet sich ein fachwerkähnliches Tragverhalten aus.

Wie aus Abbildung 7.101 ersichtlich ist, erfolgt die Umlagerung der Spannungen, und damit auch die Rotation der Hauptspannungen sowie die Ausbildung des Fachwerktragverhaltens relativ schnell nach Beginn der Rissbildung. Die Spannungen nehmen nahezu proportional zu und der Hauptspannungswinkel erreicht sehr schnell einen nahezu konstanten Wert, der lediglich kurz vor Versagen noch etwas kleiner wird. Ist ein stabiler Gleichgewichtszustand gefunden, ändern sich die Hauptspannungswinkel somit nur noch geringfügig, die Bügelspannungen steigen ebenso wie die Betonspannungen kontinuierlich an.

Einfluss des Bewehrungsgrades auf den Hauptspannungswinkel In den numerischen Simulationen konnte beobachtet werden, dass die Rotation des Hauptspannungswinkels vom Schubbewehrungsgrad abhängt und geringere Schubbewehrungsgrade tendenziell zu flacheren Hauptspannungswinkeln führen, wie in Abbildung 7.106 zu erkennen ist. Somit werden Beobachtungen aus realen Versuchen bestätigt, nach denen ein geringerer Schubbewehrungsgrad zu flacheren Rissneigungen

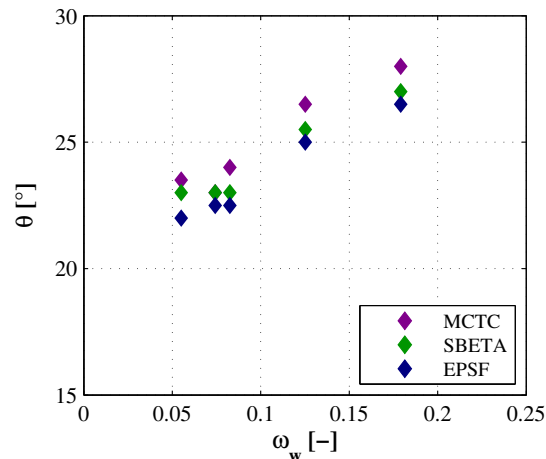


Abbildung 7.106: Druckstrebenwinkel FEM in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgrades ω_w

korrespondiert, vgl. [64], [92]. Es erfolgt eine stärkere Rotation der Druckstreben, wodurch eine größere Anzahl von Bügeln aktiviert werden kann. Die numerischen Simulationen deuten ferner daraufhin, dass bei geringeren Schubbewehrungsgraden die Sprengwerk- oder Druckbogenwirkung gegenüber der Fachwerkwirkung zunimmt. Diese Schlussfolgerung hat auch LEONHARD [64] aus seinen Schubversuchen gezogen, und GÖRTZ [31] durch seine Arbeiten bestätigt. Der Zusammenhang zwischen Schubbewehrungsgrad und Druckstrebenwinkel wurde im Rahmen verschiedener analytischer Theorien zur Beschreibung des Querkrafttragverhaltens behandelt. Hierauf wird in Abschnitt 7.8.3 näher eingegangen.

7.8.2 Schubspannungsverteilung im gerissenen Beton

Wie bereits erläutert wurde, ändert sich der Tragmechanismus im Steg eines Stahlbetonbalkens nach Rissbildung deutlich. Bei der Frage nach dem Querkraftlastabtrag und der Aufnahme von Schubspannungen im gerissenen Beton muss zwischen dem realen und dem Modelltragverhalten in der numerischen Simulation unterschieden werden. Bei einem realen Bauteil mit singulären Rissen können Schubspannungen über diese nur mittels Rissverzahnung übertragen werden. Zwischen den Rissen ist der Beton jedoch größtenteils ungestört und in der Lage, Schubspannungen aufzunehmen. Im numerischen Modell mit verschmierter Rissbildung ist der Steg großflächig gerissen. Wie gezeigt

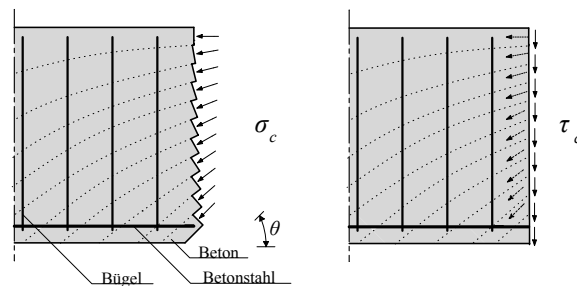


Abbildung 7.107: Betonspannungen am Sägeschnitt und vertikalem Schnitt

wurde, ist der gerissene Beton dennoch in der Lage, Schubspannungen zu übertragen. Kontinuums-

mechanisch betrachtet lassen sich Schubspannungen als reine Rechengrößen interpretieren, die bei einem Bezugskoordinatensystem entstehen, das nicht mit dem Hauptachsensystem übereinstimmt. Der Spannungszustand in einem Betonelement kann über die geneigte Hauptdruckspannung sowie die zugehörige Hauptzugspannung ausgedrückt werden, oder im gedrehten Koordinatensystem durch die entsprechenden Koordinatenspannungen, siehe Gleichung (5.26) und Abbildung 7.107. Somit ist eine, wenn auch geringe, Schubsteifigkeit im numerischen Modell erforderlich, da nur so die Spannungsumlagerung mit einer Rotation der Hauptspannungen und Ausbildung eines geneigten Druckspannungsfelds erfolgen kann. Die Existenz der Schubsteifigkeit in gerissenen Elementen erklärt möglicherweise auch das im Vergleich zu den Versuchen größere Umlagerungsvermögen mit flacheren Druckspannungswinkeln.

Die Integration der Schubspannungen in jedem Schnitt ergibt aus Gleichgewichtsgründen genau die Querkraft.

$$V = \int_0^h \tau_c \, dz \quad (7.7)$$

Abbildung 7.108 stellt beispielhaft den Verlauf der Schub- und Normalspannungen aus der numerischen Simulation des Balkens ET3 mit dem Materialmodell MCTC über die Querschnittshöhe an zwei diskreten, vertikalen Schnitten dar. Der Schnitt verläuft mittig entlang der Längsachse des dreidimensionalen Modells. Sowohl die Schub- als auch die horizontalen Drucknormalspannungen in

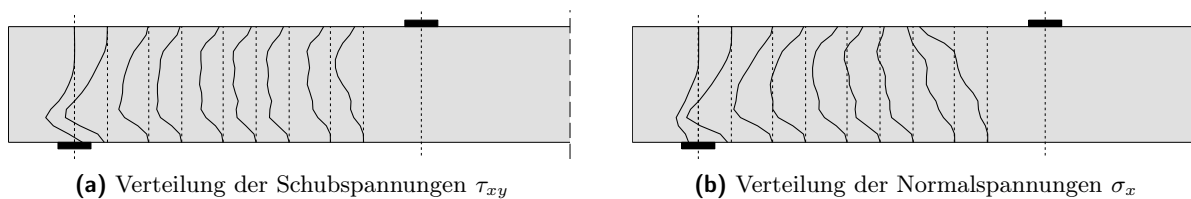


Abbildung 7.108: Schub- und Normalspannungen entlang senkrechter Schnitte bei Balken ET3

einem Schnitt im weitestgehend ungestörten Bereich zwischen Auflager und Lasteinleitung sind über die statische Nutzhöhe nichtlinear verteilt. Der ungleichmäßige Verlauf lässt darauf schließen, dass die Intensität des Druckspannungsfeldes unterschiedlich hoch ist. Aufgrund der schiefen Hauptdruckspannungen sind die Normalspannungen in x-Richtung negativ, obwohl der Steg gerissenen ist. In der Nähe des Auflagers konzentrieren sich die Spannungen im unteren Bereich des Balkens. Diese Spannungsverteilung korrespondiert zum Verlauf der Hauptdruckspannungstrajektorien und bestätigt die Annahme, dass es im Schubfeld zu einer Überlagerung mit einer Druckstrebe kommt, die direkt in das Auflager abgetragen wird. Die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte der üblichen Balkenstatik trifft in diesen Bereichen nicht zu.

7.8.3 Verbindung zu Spannungsfeldmodellen

Die Ergebnisse aus den numerischen Berechnungen zeigen Parallelen, aber auch Unterschiede zu den Spannungsfeldmodellen. Unabhängig vom gewählten Spannungsfeldmodell lauten die Gleichgewichtsbedingungen unter der Annahme, dass im Riss keine Schubspannungen übertragen werden

(vgl. [50]):

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \rho_x \sigma_{sxx} + \sigma_{cnr} \sin^2 \theta_r + \sigma_{ctr} \cos^2 \theta_r \\
 \sigma_y &= \rho_z \sigma_{szz} + \sigma_{cnr} \cos^2 \theta_r + \sigma_{ctr} \sin^2 \theta_r \\
 \tau_{xy} &= (\sigma_{cnr} - \sigma_{ctr}) \cos \theta_r \sin \theta_r
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Die hierbei dem Beton zugewiesene (Haupt-)Zugspannung σ_{cnr} im Riss ist auf die Zugfestigkeit des Betons beschränkt. In den ursprünglichen Spannungsfeldmodellen wird diese meist vernachlässigt, so dass sich Gleichung (7.8) nochmals vereinfacht. Abbildung 7.109 stellt das Gleichgewicht am gerissenen, bewehrten Scheibenelement dar.

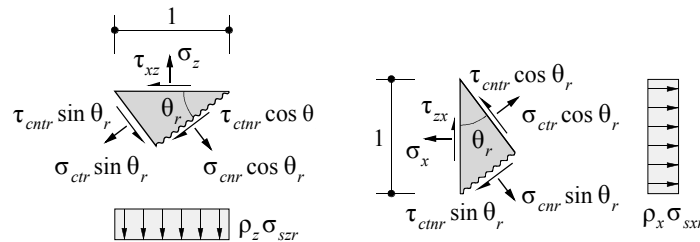


Abbildung 7.109: Gleichgewicht am gerissenen Scheibenelement

Die Kompatibilitätsbedingung der Verzerrungen kann direkt aus dem MOHRschen Verzerrungskreis entnommen werden und führt auf den Hauptverzerrungswinkel:

$$\cot^2 \theta = \frac{(\varepsilon_z - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_x - \varepsilon_2)} \tag{7.9}$$

In den meisten Spannungsfeldmodellen werden übereinstimmende Richtungen von Hauptverzerrungen und Hauptspannungen vorausgesetzt. Da die Spannungsfeldmodelle von gleichmäßig bewehrten Scheibenelementen ausgehen, dies jedoch aufgrund der diskreten Modellierung der Bewehrung bei den numerischen Modellen nicht für jedes Element zutrifft, sind die analytischen Modelle nicht vollständig auf die numerischen Simulationen übertragbar. Eine größere Übereinstimmung ergäbe sich bei der Betrachtung eines größeren, bewehrten Bereichs im Steg, allerdings ist abweichend zur Modellvorstellung der Druckfeldwinkel nicht konstant über die Scheibengeometrie, da die einzelnen Elemente unterschiedlich große Neigungen der Hauptdruckrichtung aufweisen können.

Die Gleichgewichts- wie auch die Kompatibilitätsbedingungen sind für die einzelnen Betonelemente erfüllt. Allerdings ergeben sich Abweichungen bei den ermittelten Dehnungen, die bei Spannungsfeldmodellen, die Verzerrungskompatibilitätsbedingungen berücksichtigen, Bestandteil des zu lösenden Gleichungssystems sind. Für deren Ermittlung werden vereinfachte Annahmen getroffen, i.d.R. auch das Ebenbleiben der Querschnitte. Wie sich aus den FEM-Berechnungen entnehmen lässt, trifft diese Annahme jedoch für das geeignete Druckspannungsfeld nicht zu.

Mit den getroffenen Annahmen der Spannungsfeldmodelle hängt auch die Frage nach dem dem minimalen Druckstrebenwinkel zusammen. Bei den elastisch gerissenen Spannungsfeldern nach KUPFER[56] ergibt sich der Winkel basierend auf dem Minimum der Formänderungsarbeit. Idealplastische Spannungsfeldtheorien, vgl. z.B. NIELSEN[79], nehmen idealplastische Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen an und gehen davon aus, dass sich das Gleichgewicht so einstellt, dass die

Tragfähigkeit von Zug- und Druckstrebe gleichzeitig erreicht wird. Der Druckstrebenwinkel ergibt sich dann nur aus den Gleichgewichtsbedingungen und führt bei sehr geringen Bewehrungsgraden in Kombination mit hohen Betonfestigkeiten zu sehr flachen und unrealistischen Werten. Daher wird in der klassischen Plastizitätstheorie der Druckstrebenwinkel meist auf einen Minimalwert begrenzt. In den numerischen Simulationen ist eine derart starke Rotation ebenfalls nicht zu beobachten, bzw. wird durch die Modellannahmen, z.B. die Abminderung der Druckstrebenfestigkeit, verhindert. Offenbar ist die Rotation des Druckstrebenwinkels aus Gleichgewichtsgründen nicht unbegrenzt möglich. Auch in Versuchen lassen sich extrem flache Risswinkel von $< 20^\circ$ nicht feststellen. Es wurde jedoch beobachtet, dass sich im Belastungsfortschritt neue, flachere Risse bilden, die die alten Risse kreuzen und deutlich flacher sind als 40° , vgl. z.B. [64], [92], [66], [86]. Dies spricht grundsätzlich für die Hypothese, dass die Druckstrebe rotiert und sich der vorhandenen Bewehrung sowie dem Belastungszustand anpasst.

Wird das Konzept des Spannungsfeldmodells numerisch umgesetzt, wie beispielsweise bei der *Compression Field Theory* mithilfe des Programms *Response 2000*, lassen sich dennoch recht gute Übereinstimmungen mit Versuchstraglasten erzielen. Die Abweichungen sind etwas geringer als mit dem klassischen Fachwerkmodell, allerdings ist eine Handrechnung nicht mehr möglich.

7.9 Erkenntnisse für das Querkrafttragverhalten von Stahlbetonbalken

Aus den Simulationen lassen sich einige Erkenntnisse für das Tragverhalten unter Querkraftbeanspruchung gewinnen. Da ausschließlich Balken mit Schubzug- oder Biegeschubversagen untersucht wurden, also Balken, bei denen die Bügel die Streckgrenze überschritten haben und diese Überschreitung unmittelbar oder mittelbar zum Versagen geführt hat, lassen sich die Aussagen ohne weitere Untersuchungen nicht für alle Arten des Schubversagens verallgemeinern. Die wichtigsten Erkenntnisse aus den vorangegangenen Abschnitten lassen sich kurz wie folgt zusammenfassen:

- Das Tragverhalten in den FE-Modellen weist Ähnlichkeiten zu den analytischen Fachwerk-, aber auch zu den Spannungsfeldmodellen auf.
- Es ist eine Rotation der Druckstreben in Abhängigkeit des mechanischen Schubbewehrungsgrades erkennbar.
- Die Hauptspannungswinkel und damit implizit die Risswinkel sind flacher als nach analytischen Fachwerkmodellen üblicherweise angenommen.
- Das im Rahmen der klassischen Plastizitätsmodelle postulierte gleichzeitige Versagen von Druck- und Zugstrebe stellt sich lediglich bei erheblichen Abminderungen der Druckstrebenfestigkeit ein
- Die numerischen Berechnungen deuten auf einen kombinierten Tragmechanismus aus Fachwerk- und Betontraganteil in Form eines geneigten Druckbogens bzw. einer geneigten Druckgurtkraft infolge Biegung hin.
- Die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte trifft im Schubfeld nicht mehr zu.

Auf die Existenz eines Betontraganteils in Form eines Druckbogens oder einer direkten Druckstrebe zusätzlich zur Fachwerkwirkung lassen nicht nur die numerischen Simulationen schließen, sondern auch die Ergebnisse der realen Versuche. Aufschlussreich ist der Vergleich zwischen realem Risswinkel und rechnerischem Druckstrebenwinkel, der sich unter der Annahme eines idealisierten Fachwerks mit horizontalem Zug- und Druckgurt aus $\cot \theta_{calc} = \nu_{u,Test}/\omega_w$ ergibt. In Abbildung 7.110

Tabelle 7.21: Bezogene Bruchlasten und Druckstrebenwinkel der verschiedenen Versuche

	ET2	ET3	TA11	TA12	TA15
ν_u	0,163	0,237	0,335	0,264	0,417
ω_w	0,055	0,083	0,125	0,074	0,179
$\cot \theta_{calc}$	2,96	2,87	2,67	3,560	2,33
θ_{calc}	18,7	19,2	20,5	15,7	23,2

sind die bezogenen Traglasten aus den Versuchen in Relation zum mechanischen Schubbewehrungsgrad aufgetragen. Ferner sind der Plastizitätskreis, der die Tragfähigkeit auf Basis der analytischen Plastizitätstheorie beschreibt, sowie die Traglasten bei Annahme eines Druckstrebenwinkels von 40° und die in einigen Normen festgelegte untere Grenze für den Druckstrebenwinkel $\cot \theta = 2,5$ dargestellt. Bei der Tragfähigkeit auf Basis der Plastizitätstheorie wurde eine Abminderung der Druckstrebenfestigkeit auf $0,8f_{cm}$ berücksichtigt.

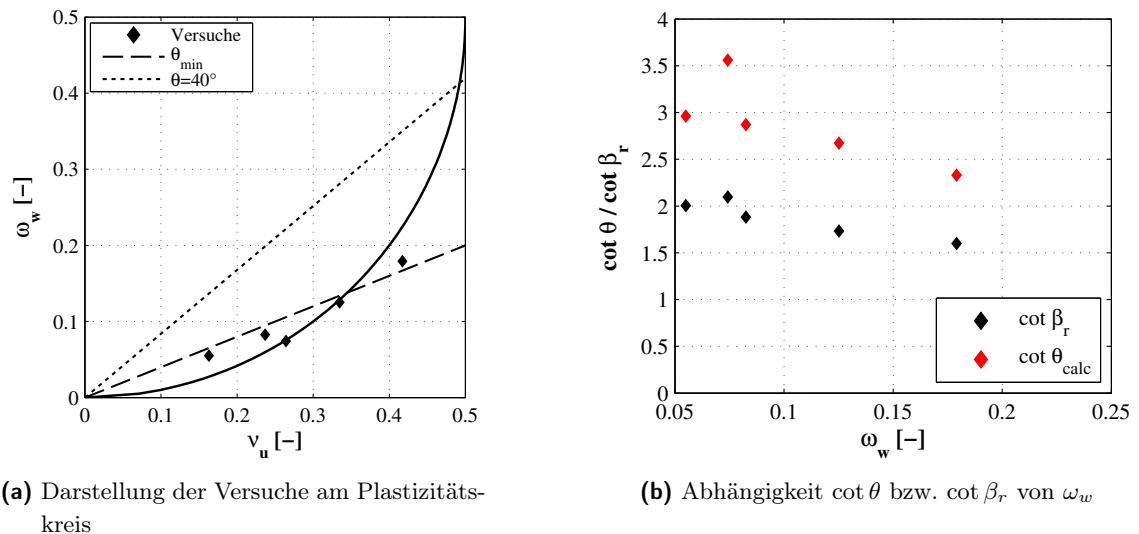


Abbildung 7.110: Auswertung der Versuche

Wie sowohl aus Tabelle 7.21 als auch aus Abbildung 7.110 erkennbar ist, stimmen die rechnerischen Druckstrebenwinkel nicht mit den realen Risswinkeln überein, sondern sind deutlich flacher. Die Differenz der Winkel kann nur durch einen über ein idealisiertes Fachwerk oder Spannungsfeld hinausgehenden Tragmechanismus erklärt werden. Abbildung 7.110 bestätigt jedoch auch, dass die Plastizitätstheorie gerade bei geringen Bewehrungsgraden die Traglasten überschätzt, und die

Festlegung einer Grenze von $\cot \theta \leq 2,5^\circ$ grundsätzlich sinnvoll ist. Die nach der Plastizitätstheorie ermittelten Druckstrebenwinkel sind ebenfalls deutlich kleiner als die realen Risswinkel. Dies lässt den Schluss zu, dass die Annahme eines Fachwerkes, bei der die Druckstrebe soweit rotiert, bis sich ein gleichzeitiges Versagen von Druck- und Zugstrebe einstellt, insbesondere für Balken mit niedrigen Schubbewehrungsgraden eine starke Idealisierung darstellt und den wahren Tragmechanismus nicht zutreffend widerspiegelt.

Sowohl bei den Risswinkeln als auch bei den rechnerisch ermittelten Druckstrebenwinkeln ist eine Abhängigkeit vom Schubbewehrungsgrad vorhanden, und sie sind deutlich flacher als nach dem klassischen Fachwerkmodell mit einem konstanten Risswinkel von $\beta_r = 40^\circ$. Der in diesem Modell der Rissreibung zugewiesene additive Betontraganteil wird aufgrund der großen Rissbreite im Versagenszustand angezweifelt, vgl. [34]), [45]. Im Folgenden wird der Ansatz eines Systemtraganteils in Form eines geneigten Biegedruckgurtes, wie LEONHARDT in [64] vorschlug, weiter verfolgt. Eine nähere Betrachtung des Betontraganteils und Herleitung eines mechanischen Modells erfolgt in Kapitel 8. Die hier dargestellten Zusammenhänge werden durch die Auswertung einer Vielzahl von Versuchen einer Schubdatenbank grundsätzlich bestätigt, vgl. [31], [28] und lassen sich in der Tendenz auch bei den numerischen Berechnungen erkennen. Auch hier weichen die aus der Versagenslast rechnerisch ermittelten Druckstrebenwinkel von denen aus der Simulation ab. Allerdings ist aufgrund der zwar geringen, aber konstant vorhandenen Schubsteifigkeit der gerissenen Elemente in der numerischen Simulation ein größeres Umlagerungsvermögen vorhanden und die Druckstrebenwinkel stellen sich flacher ein als in der Realität. Dies erklärt vermutlich auch die z.T. recht hohen numerischen Traglasten. Die hohen Tragfähigkeiten in den Versuchen gerade bei niedrigen Bewehrungsgraden sind auf zwei Phänomene zurückzuführen: die größere Rotation der Druckstrebe sowie ein additiver Betontraganteil. Im Gegensatz zur Simulation kann im realen Versuch der über die Fachwerkwirkung hinausgehende Resttraganteil in Form der geneigten Druckstrebe nur oberhalb des Versagensrisses abgetragen werden.

Weiterhin konnte in einigen Simulationen eine Rissbildung an der Balkenoberseite im Bereich des Auflagers beobachtet werden. Auch einige Versuche von LEONHARDT und GÖRTZ wiesen entweder Risse oder Zugdehnungen an der Balkenoberseite im Bereich des Auflagers auf. Diese Rissbildung deutet auf einen Lastabtragungsmechanismus hin, den MUTTONI ursprünglich an Balken ohne Schubbewehrung beobachtet hat, vgl. Abbildung 7.111. Hierbei wird die Druckstrebe aufgrund der

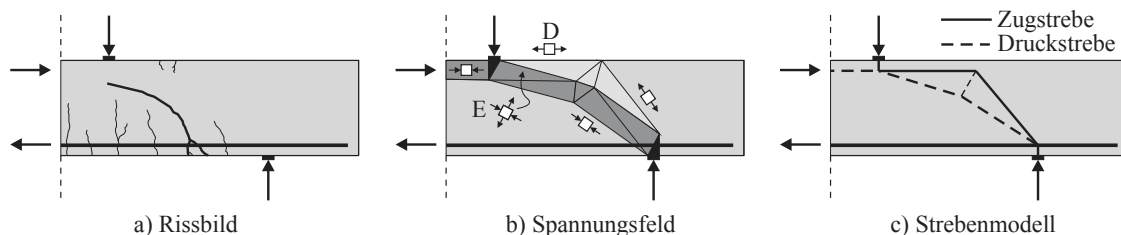


Abbildung 7.111: Lastabtrag über eine umgelenkte Druckstrebe nach [75]

fortschreitenden Rissbildung im Steg umgelenkt. Die hieraus resultierenden Umlenkkräfte sind für die Rissbildung an der Plattenoberseite verantwortlich.

Kapitel 8

Mechanisches Modell für die Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonbalken

Im folgenden Kapitel wird auf Basis der aus den numerischen Simulationen gewonnenen Erkenntnisse über das Querkrafttragverhalten von Stahlbetonbalken mit Querkraftbewehrung ein analytisches Modell entwickelt, das zusätzlich zu einer Fachwerkwirkung einen weiteren Betontraganteil in Form eines Sprengwerks bzw. einer Bogenwirkung enthält, das Druckbogenmodell (DBM). Es erweitert das Vereinfachte Druckbogenmodell, das die zusätzliche Druckbogenkomponente aus der Differenz der Größe und Höhenlage der Biegedruckkraft ermittelt, um den Einfluss der horizontalen Druckkraftkomponente aus den schrägen Betondruckstreben im Steg, und ist damit nicht nur für Spannbeton-, sondern auch für Stahlbetonstrukturen anwendbar.

8.1 Einleitung

In den voran gegangenen Kapiteln wurde gezeigt, dass die Ergebnisse von numerischen Simulationen des Querkrafttragverhaltens von Beton- und Stahlbetonstrukturen in hohem Maße vom verwendeten Materialmodell abhängen. Es ist deutlich geworden, dass beispielsweise das in ABAQUS für Beton implementierte isotrope elasto-plastische Materialmodell „CONCRETE DAMAGED PLASTICITY“ Schwächen bei der Abbildung von Schubspannungszuständen von bewehrten Stahlbetonbalken aufweist. Dagegen konnten sowohl mit den definitionsgemäß anisotropen Materialmodellen „SBETA“ des Programmsystems ATENA sowie der numerischen Umsetzung der elasto-plastischen Spannungsfeldmethode („EPSF“) als auch mit dem im Rahmen dieser Arbeit selbst entwickelten modifizierten isotropen plastischen Modell unter Anwendung des MOHR-COULOMB-Kriteriums mit Tension Cut Off („MCTC“) gute Übereinstimmungen mit den Versuchswerten erzielt werden. Die qualitative Analyse des Modelltragverhaltens deutet neben einer Fachwerktragwirkung auf einen additiven Betontraganteil in Form einer geneigten Druckstrebe hin, der insbesondere bei kleinen Schubbewehrungsgraden signifikant am Lastabtrag beteiligt ist. Weiterhin sind die Druckstrebenwinkel flacher als erwartet und es lässt sich eine vom Schubbewehrungsgrad abhängige Rotation der Druckstrebe feststellen.

Im Folgenden wird exemplarisch der Stahlbetonbalken ET2 von LEONHARDT zur Analyse des Modelltragverhaltens und für einen Vergleich zu ausgewählten analytischen Modellen herangezogen. Als Ergebnis wird das Druckbogenmodell (DBM) als analytisches Modell zur Beschreibung des Querkrafttragverhaltens abgeleitet.

8.2 Analyse und Vergleich der numerischen Ergebnisse mit analytischen Modellen

8.2.1 Vorstellung der analytischen Modelle

Bei den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten analytischen Modellen handelt es sich um folgende wissenschaftlich anerkannte Modelle, die in nationalen oder internationalen Normen Eingang gefunden haben:

- Fachwerkmodell mit Rissreibung nach REINECK[87]
- Fachwerkmodell mit zusätzlichem Betontraganteil nach GÖRTZ [31], bzw. HEGGER & GÖRTZ, [34], [35]
- Fachwerkmodell auf Basis der Plastizitätstheorie mit gleichzeitigem Versagen der Druck- und der Zugstrebe [97], [76],[75], [79]
- Modified Compression Field Theory [100], [12]

Die ersten drei der genannten analytischen Modelle basieren auf einer Fachwerktragwirkung, die allerdings nicht mehr der klassischen Vorstellung von MÖRSCH eines Fachwerkes mit um 45° geneigten Druckstreben entspricht, sondern darüber hinausgehenden Traganteile berücksichtigt und diese mithilfe unterschiedlicher Modellvorstellungen herleitet. Eine Ausnahme bildet die *Modified Compression Field Theory*, die die konstitutiven Beziehungen nicht an einem Fachwerk herleitet, sondern an einer bewehrten Scheibe. Schon seit LEONHARDT ist ein additiver Betontraganteil zusätzlich zur reinen Fachwerkwirkung unstrittig, wie LEONHARDT anhand der Abweichung von gemessenen Bügelspannungen in Versuchen im Vergleich zu den rechnerischen Werten aufzeigen konnte vgl. [63], [62], [61], s. Abbildung 8.1.

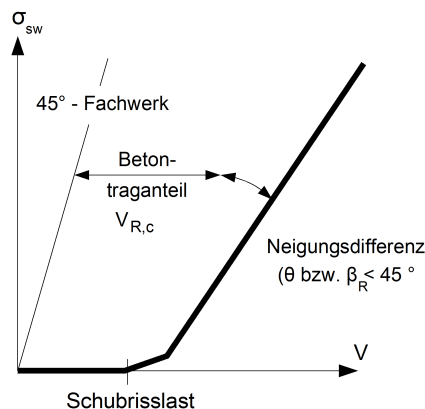


Abbildung 8.1: Betontraganteil nach LEONHARDT

Ferner stellte LEONHARDT fest, dass die Risswinkel flacher als rechnerisch ermittelt verlaufen. Bis heute existieren jedoch unterschiedliche und z.T. umstrittene Ansätze für diesen Anteil. Die wichtigsten Modelle werden im Folgenden kurz skizziert.

Fachwerkmodell mit Rissreibung (FW RR) Das Fachwerkmodell mit Rissreibung von REINECK beruht auf einem klassischen Fachwerkmodell und der Annahme, dass sich ein auf dem Hauptzugskriterium nach Zustand I basierender Risswinkel von $\cot \theta = 1,2$ einstellt. REINECK weist den zusätzlichen Traganteil der Rissreibung zu, d.h. der Schubkraftübertragung über verzahnte Risse.

Fachwerkmodell mit zusätzlichem Betontraganteil (H/G) Im Modell von HEGGER & GÖRTZ wird zu einem parallelgurtigen Fachwerk mit konstant geneigter Betondruckstrebe ein weiterer Betontraganteil addiert, der dem Querkraftwiderstand eines Balkens ohne Querkraftbewehrung entspricht und auf den Untersuchungen von ZINK[105] basiert. Hier wird ein großer Querkrafttraganteil der Schubtragfähigkeit der ungerissenen Druckzone zugewiesen. Zusätzlich werden im analytischen Modell deutlich flachere Druckstrebenwinkel als $\cot \theta = 1,2$ zugelassen.

Modified Compression Field Theory (MCFT) Auf die *Modified Compression Field Theory* wurde bereits in 6.5.2 kurz eingegangen. Es handelt sich um ein Spannungsfeldmodell, das neben nichtlinearen Materialgesetzen und dem Einfluss der Querdehnung auf die Betondruckfestigkeit bei gerissenen Stahlbetonscheiben auch die Verbundwirkung berücksichtigt, die in den klassischen Spannungsfeldmodellen vernachlässigt wird.

Fachwerkmodell basierend auf der Plastizitätstheorie (PT) Bei dem Modell auf Basis der Plastizitätstheorie handelt es sich um ein stark idealisiertes Fachwerkmodell, bei dem neben der reinen Fachwerkwirkung keine weiteren Traganteile berücksichtigt werden. Stattdessen wird von starrplastischem Tragverhalten ausgegangen, bei dem sich das Versagen gleichzeitig in der Zug- und Druckstrebe einstellt. Eine Besonderheit ist, dass der Druckstrebenwinkel frei bzw. frei innerhalb bestimmter Grenzen gewählt werden kann, da davon ausgegangen wird, dass sich die Druckstrebe variabel anpasst. Daher ist das Modell auch unter dem Namen Fachwerkmodell mit variabler Druckstrebenneigung bekannt.

Alle Modelle wurden zusätzlich empirisch an Versuchen kalibriert, wobei der Ansatz von REINECK die geringsten Anpassungen enthält. Diese Anpassungen sind den komplexen Zusammenhängen bei der Schubkraftübertragung geschuldet, die durch ein einfach zu handhabendes analytisches Modell naturgemäß nicht völlig zutreffend erfasst werden können. Jedoch sollte das zugrundeliegende Modell die wesentlichen Tragmechanismen möglichst gut abbilden. Es ist allerdings nicht immer eindeutig feststellbar, inwieweit die zugrunde liegende Modellvorstellung zutreffend die Realität widerspiegelt oder ob lediglich durch die empirische Kalibrierung zufriedenstellende Ergebnisse erreicht werden.

Für eine statistisch abgesicherte Aussage müsste eine größere Anzahl von Versuchen berücksichtigt werden. Das ist aber nicht das Ziel der vorliegenden Arbeit, hier soll vielmehr exemplarisch das qualitative Tragverhalten an wenigen Versuchen studiert werden.

8.2.2 Analyse und Ergebnisvergleich für Balken ET2

Ermittelt man die Tragfähigkeiten des Balkens ET2 analytisch auf Basis des Fachwerkmodells mit Rissreibung, nach den Überlegungen von HEGGER & GÖRTZ sowie mit der Modified Compression Field Theory unter Ansatz der Mittelwerte der Materialfestigkeiten, erhält man rechnerische Traglasten, die um bis zu 27% unter den Versuchstraglasten liegen, s. Tabelle 8.1. Die Plastizitäts-

theorie überschätzt hier dagegen die Tragfähigkeit um 13%, selbst wenn die Abminderungen für die Druckstreben­tragfähigkeit nach EC2 berücksichtigt werden.

Tabelle 8.1: Vergleich $V_{u,calc}$ zu $V_{u,test}$ für Balken ET2

	PT	FW RR	H/G	MCFT
$V_{u,calc}$	0,1486	0,102	0,096	0,103
$V_{u,test}$	0,1315	0,1315	0,1315	0,1315
$V_{u,test}/V_{u,calc}$	0,89	1,29	1,37	1,28

In Tabelle 8.2 werden ferner die bezogenen Tragfähigkeiten sowie die sich daraus ergebenden Druckstrebenwinkel dargestellt. Wie erwähnt, handelt es sich bei den aus den Traglasten rückgerechneten Druckstreben­winkeln nicht um die tatsächlichen Druckstreben- oder Risswinkel, sondern sie sind als „fiktive“ Druckstrebenwinkel zu verstehen, die einem idealisierten Fachwerk mit horizontalen Gurten und geneigten Druckstreben entsprechen, bei dem der Winkel θ den wie auch immer gearteten Beton­traganteil implizit enthält.

Tabelle 8.2: ET2 v_u , $\cot \theta$ und θ

	PT	FW RR	H/G	MCTC
v_{calc}	0,247	0,151	0,144	0,154
v_{exp}	0,163	0,163	0,163	0,163
$\cot \theta_{calc}$	3,35	2,30	2,22	2,48
$\cot \theta_{exp}$	2,96	2,96	2,96	2,96
θ_{calc}	14,7	23,5	24,3	23,1
θ_{exp}	18,7	18,7	18,7	18,7

Fachwerkmodell mit Rissreibung In Tabelle 8.3 sind der Querkrafttraganteil des reinen Fachwerkes unter Ansatz verschiedener Druckstreben­neigungswinkel θ sowie unter Ansatz des additiven Beton­traganteils resultierend aus Rissreibung nach REINECK dargestellt. Dieser ist in der deutschen Fassung des EUROCODE 2 [3] bzw. [2] verankert. Hierbei stimmt also der Druckstreben­winkel θ mit dem Riss­neigungswinkel β_r überein, da der Anteil aus Rissreibung separat ermittelt wird.

Bei Stahlbetonbalken geht REINECK von einem Riss­winkel $\cot \beta_r = 1,2$ aus, der sich aus dem Haupt­spannungskriterium ergibt. Für den Traganteil aus Rissreibung steht strenggenommen lediglich der Bemessungswert zur Verfügung, während für die Nachrechnung von Versuchen der Mittelwert realistischer wäre. REINECK selbst verwendet in [28] einen nicht näher hergeleiteten bezogenen Wert für den Anteil aus Rissreibung im Versagenszustand, der sich aus folgender Formel ergibt:

$$v_{cru} = 0,5647 \cdot \frac{(f_{1c}/0,95)^{1/3}}{f_{1c}/0,95} \tag{8.1}$$

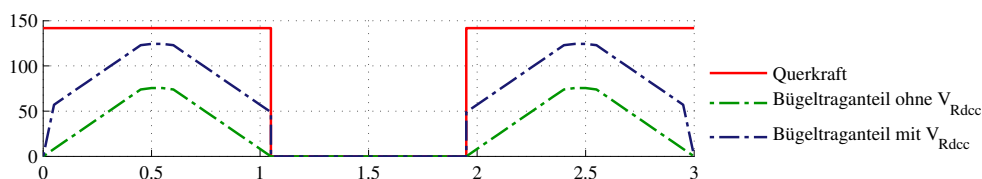
Tabelle 8.3: Vergleich der realen Querkrafttragfähigkeit $V_{u,test}$ mit $V_{u,calc}$ nach der Fachwerktheorie mit Rissreibung gem. DIN EN 1992-1/NA für Balken ET2

		$\cot \theta = 1,2$	$\cot \theta = 1,5$	$\cot \theta = 1,7$
V_{FW}	[kN]	56,6	70,8	80,2
V_{cru}	[kN]	48,9	48,9	48,9
V_{ges}	[kN]	105,5	119,7	129,1
$V_{u,test}$	[kN]	131,5	131,5	131,5
$V_{FW}/V_{u,test}$	[%]	37,2	53,9	65,7
$V_{ges}/V_{u,test}$	[%]	80,2	91,0	98,2

Zurückgeführt auf den absoluten Traganteil führt dies auf:

$$V_{cru} = 0,5647 \cdot \frac{(f_{1c}/0,95)^{1/3}}{f_{1c}/0,95} \cdot b_w \cdot f_{cwu} \quad (8.2)$$

Ausgewertet ergibt sich für den betrachteten Balken ET2 damit ein Betontraganteil aus Rissreibung von $V_{cru} = 48,9$ kN. Dem gegenüber steht unter Ansatz von $\cot \beta_r = 1,2$ ein Fachwerkanteil von 56,6 kN. Insgesamt ergibt das eine Querkrafttragfähigkeit von 105,5 kN im Vergleich zur realen Tragfähigkeit von 131,5 kN. Der Rissreibung wird fast 50% der Tragwirkung zugewiesen. Aus Tabelle 8.3 ist ersichtlich, dass mit einem Risswinkel von $\cot \beta_r = 1,2$ selbst unter Ansatz eines additiven Betontraganteils aus Rissreibung sowohl die experimentelle als auch die numerisch ermittelte Bruchquerkraft um knapp 14% unterschätzt wird. Setzt man allerdings $\cot \beta_r = 1,5$ an, was einem Winkel von $\beta_r = 30,5^\circ$ entspricht, erhält man ohne Ansatz von Rissreibung knapp 54% der Tragfähigkeit, mit Rissreibung 91%. In Abbildung 8.2 ist die Gesamtquerkraft des Fachwerkmodells mit einem Risswinkel von $\cot \beta_r = 1,7$ und Rissreibung dargestellt. Hierbei wurde bei der Ermittlung des Fachwerkanteils an der Stelle der Lasteinleitung und am Auflager berücksichtigt, dass sich die Querkraft dort fächerförmig ausbreitet bzw. direkt ins Auflager abgeleitet wird und somit der Fachwerkanteil noch nicht vollständig aktiviert wird.

**Abbildung 8.2:** Traganteile an der Querkrafttragfähigkeit für den Balken ET2 mit $\cot \beta_r = 1,7$

Allerdings ist von mehreren Autoren die Existenz der Rissreibung im Versagenszustand in Frage gestellt worden, da die Rissbreiten dann bis zu mehreren Millimetern betragen können. Dies macht einen nennenswerten Anteil einer Schubkraftübertragung über die Rissufer fast unmöglich (s. z.B.[34]). Ferner ist die nach WALRAVEN [102] und REINECK [87] erforderliche Relativverschiebung der Rissufer auch bei Versuchen am Lehrstuhl Betonbau der TU Dortmund nicht in der erforderli-

chen Größenordnung beobachtet worden. Allerdings ist eine Rissreibungskomponente in den unteren Beanspruchungsbereichen plausibel, da in Versuchen beobachtet wurde, dass sich im Belastungsfortschritt neue, flachere Risse bilden, die die alten Risse kreuzen und deutlich flacher sind als 40° , vgl. z.B. [64], [92], [66], [86]. Diese Spannungsrotation ist nur über eine Übertragung von Schubspannungen über die alten Risse möglich. Dies spricht dafür, dass der Ansatz von $\cot \beta_r = 1,2$ als Risswinkel für Stahlbetonbalken unabhängig vom Schubbewehrungsgrad ggf. zu konservativ ist. Auch der hier nachgerechnete Versuch wies flachere Risswinkel auf, im Versagensriss von $\beta_r \approx 33^\circ$.

Fachwerkmodell mit Schubtraganteil aus der ungerissenen Druckzone Ein anderer Erklärungsansatz für den zusätzlichen Traganteil besteht darin, der ungerissenen Biegedruckzone einen Schubtraganteil zuzuordnen, wie es HEGGER & GÖRTZ vorschlagen. Die Verteilung der Schubspannung ist hierbei strittig, vgl. HUBER [45]. Der Querkraftlastabtrag und damit die Verteilung der Schubspannungen im Beton sind für Balken mit und ohne Querkraftbewehrung unterschiedlich, da sich ohne Querkraftbewehrung keine geneigte Betondruckstrebe ausbilden kann. Es ist plausibel, dass der Querkraftlastabtrag eines Balkens ohne Schubbewehrung maßgeblich vom Betontraganteil in der ungerissenen Betondruckzone herrührt und hierzu dort eine parabelförmige Schubspannungsverteilung, bzw. eine Verteilung nach ZINK[105] korrespondiert. Bei einem Balken mit Schubbewehrung dagegen sind die Schubspannungen über die gesamte statische Höhe des Balkens vorhanden. Eine weitere Schwierigkeit besteht in der Ermittlung der Druckzonenhöhe bei dieser Modellvorstellung. Man kann im Bereich des Schubfeldes eines querkraftbewehrten Stahlbetonbalkens im gerissenen Zustand nicht mehr explizit von „ungerissener“ Druckzone sprechen, da aufgrund der schiefen Hauptdruckspannungen die Normalspannungen in x-Richtung über die gesamte Höhe negativ sind, obwohl der Steg gerissen ist, wie aus Abbildung 7.108 hervorgeht. Im Gegensatz zu Bereichen unter ausschließlicher Biegebeanspruchung lässt sich die Druckzone daher im Schubfeld, insbesondere in Richtung der Auflager, nicht mehr unter der BERNOULLISCHEN Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte ermitteln. Es stellt sich weiterhin die Frage, ob der Traganteil der ungerissenen Druckzone mit der Bogen- oder Sprengwerkwirkung gleichgesetzt werden kann, wie GÖRTZ vermutet hat. Auch bei Bauteilen ohne Schubbewehrung wird ein Großteil der Last über eine Bogen- oder Sprengwirkung als Systemtraganteil abgetragen, insbesondere bei geringen Schubslankheiten. Hier unterschätzt der Ansatz nach ZINK die reale Traglast deutlich, wie GÖRTZ durch eine Auswertung an über 400 Stahlbetonbalken belegt, vgl. [31]. Er konnte auch zeigen, dass der Bogen- oder Sprengwerkanteil mit geringer werdendem Schubbewehrungsgrad ausgeprägter wird und zu flacheren Rissneigungen führt. Neben dem Betontraganteil der ungerissenen Druckzone wird in diesem Modell der Risswinkel in Abhängigkeit des Schubbewehrungsgrad ermittelt. Dennoch wird die Traglast in diesem Modell um knapp 27% unterschätzt.

Fachwerkmodell basierend auf der Plastizitätstheorie Bei der Plastizitätstheorie erfolgt der Querkraftlastabtrag über ein idealisiertes Fachwerk ohne expliziten weiteren Traganteil. Allerdings ist der hierbei ermittelte Druckstrebenwinkel von $\theta = 14,7^\circ$ nicht mehr realistisch und nur als fiktiver Winkel des analytischen Modells zu verstehen, der die über die Fachwerkwirkung hinausgehende Anteile implizit erfasst. Zur Vermeidung derart flacher Winkel wird dieser mit $\cot \theta \leq 2,5$ nach unten begrenzt. Für höherfeste Betone ist zudem eine Abminderung der Betondruckstreben-

festigkeit im EC2 vorgesehen, die zu kleineren Traglasten als nach reiner Plastizitätstheorie führt. Wie bereits gezeigt wurde, handelt es sich bei dem Fachwerkmodell mit variabler Druckstrebenneigung um ein stark idealisiertes Modell, das bei entsprechender Kalibrierung, d.h. Abminderung der Druckstrebenfestigkeit, zu zufriedenstellenden Ergebnissen führt, jedoch nicht das reale Tragverhalten widerspiegelt.

Modified Compression Field Theory Die Modified Compression Field Theory stellt eine Verfeinerung der Plastizitätstheorie dar, die im Gegensatz zu dieser an einer bewehrten Scheibe hergeleitet wurde. Eine Unterscheidung in einen Fachwerkanteil mit einem bestimmten Druckstrebenwinkel sowie einem zusätzlichen Betontraganteil ist hierbei nicht mehr möglich. Die Übereinstimmung mit der experimentellen Traglast ist hierbei am besten. Der Druckstrebenwinkel entspricht im Modell auch dem Risswinkel, der mit $23,1^\circ$ im rechnerischen Mittel jedoch nicht mit dem tatsächlichen Risswinkel übereinstimmt.

Insgesamt kann die Traglast mit keinem der analytischen Modelle ähnlich gut angenähert werden wie mit den numerischen Berechnungen.

8.2.3 Analyse und Bewertung der Ergebnisse der numerischen Simulation

Aus den vorangegangenen Abschnitten wurde deutlich, dass mithilfe von Nachrechnungen mit der nichtlinearen FEM eine deutlich bessere Übereinstimmung der Traglasten mit denen der realen Versuche erzielt werden kann als mit den analytischen Modellen. Im Folgenden werden die Ergebnisse der numerischen Simulationen näher analysiert, um aus dem Modelltragverhalten der FE-Modelle Rückschlüsse auf die realen Tragmechanismen zu ziehen. Exemplarisch wird hierfür die numerische Simulation des Balkens ET2 mit dem EPSF-Modell herangezogen. In Tabelle 8.4 werden die Traglast des Versuchs sowie die daraus resultierenden Druckstrebenwinkel den entsprechenden Größen der numerischen Simulation gegenübergestellt.

Tabelle 8.4: ET2: Vergleich von v_u , $\cot \theta$ und θ aus dem Versuch mit FEM-Berechnungen

	V_u	v_u	$\cot \theta_{calc, EPSF}$	θ_{calc}	$\cot \theta_{real}$	θ_{real}
Test	131,5	0,163	2,96	18,7	1,73	30,0
EPSF	122,0	0,151	2,59	21,1	2,25	24,0

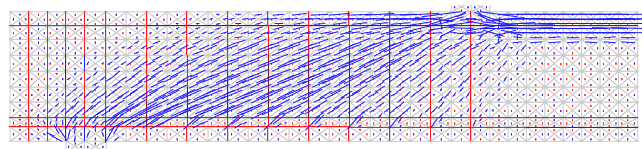


Abbildung 8.3: Druckspannungstrajektorien nach EPSF

In Abbildung 8.3 sind die Hauptdruckspannungstrajektoren sowie die Bügelspannungen für die Versagenslaststufe aus der numerischen Berechnung des Balkens ET2 mit der elasto-plastischen

Spannungsfeldmethode (EPSF) dargestellt. Es lässt sich deutlich eine Fachwerkwerktragwirkung mit schrägen Druckstreben erkennen, die sich in die Bügel abstützen. Die Versagenslast wird in der numerischen Berechnung um 7% unterschätzt, was als sehr gute Übereinstimmung bewertet werden kann. Wie im Versuch ist ein Schubzugversagen zu beobachten, allerdings ist in der numerischen Rechnung auch die Biegetragfähigkeit nahezu erschöpft. Die Ergebnisse der numerischen Berechnung bestätigen somit, dass das analytische Fachwerkmodell grundsätzlich zur Beschreibung des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken geeignet ist.

Die Druckspannungstrajektorien verlaufen in der numerischen Simulation flacher als erwartet, es ergeben sich Winkel von $\theta \leq 25^\circ$ in Höhe der maximalen Schubbeanspruchung. Wie bereits erläutert, ist im Gegensatz zu den analytischen Modellen der Hauptspannungswinkel in der numerischen Simulation über die Bauteilhöhe variabel. Die Druckspannungen im Schubfeld zwischen der

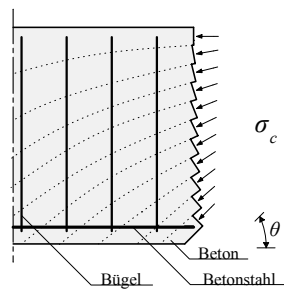


Abbildung 8.4: Über die Höhe veränderlicher Verlauf der Druckspannungstrajektorien

Lasteinleitung und dem Auflager sind bereits knapp unterhalb der Oberkante leicht geneigt, der Druckstrebenwinkel wird nach unten steiler. Die Biegedruckkraft in der Biegedruckzone verläuft somit geneigt. Zum Auflager hin nehmen die Spannungen im oberen Teil des Balkens weiter ab, die Druckspannungen verlaufen geneigt zum Auflager. Statt einer Aufteilung in ein parallelgurtiges Fachwerk mit horizontalen Biegedruckspannungen und einheitlich geneigten Druckstreben erfolgt der Lastabtrag somit durch ein Spannungsfeld mit unterschiedlich stark geneigten Hauptdruckspannungen, deren Verteilung ferner entlang der Längsachse des Balkens variiert. Die Auswertung der Spannungen in den Druckstreben ergibt, dass die Druckstrebenfestigkeit in diesem Fall nicht erreicht wird und sich somit nicht, wie in der Plastizitätstheorie angenommen, ein gleichzeitiges Versagen der Zug- und Druckstrebe einstellt. Ferner kann im numerischen Modell kein Traganteil der Rissreibung zugewiesen werden, da sich das Modell wie ein Rotated Crack Model verhält und somit im Versagenszustand kein Schub über die Risse übertragen werden kann. Da der kalkulatorische Druckstrebenwinkel $\cot \theta_{calc, EPSF} = \nu_{u, EPSF} / \omega_w = 2,59$ größer ist als der Hauptspannungswinkel aus dem Modell, muss der zusätzliche Traganteil über einen anderen Mechanismus erreicht werden.

Aufschlussreich bezogen auf die Spannungsverteilung ist Abbildung 8.5, die die Verteilung der horizontalen und vertikalen Knotenkräfte sowie die Lage der jeweiligen Gesamtergebnisse in vertikalen Schnitten darstellt.

Es ist ersichtlich, dass sowohl die Resultierende der Schubkräfte im Beton als auch die horizontale Komponente der Druckkraftresultierenden zum Auflager geneigt verlaufen. Aufgrund der geometrischen Verhältnisse ist der B-Bereich des Balkens relativ klein. Dort ist zu erkennen, dass die

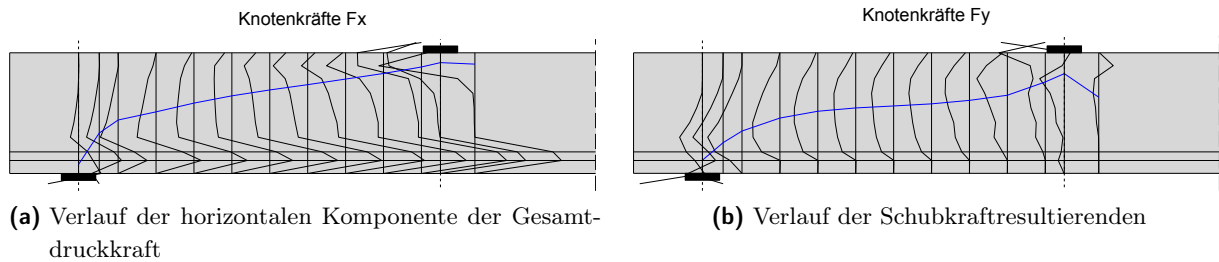


Abbildung 8.5: Verlauf der horizontalen Druck- und Schubkraftresultierenden sowie deren Verteilungen nach EPSF in vertikalen Schnitten

Schubkraftverteilung F_y über die Querschnittshöhe mit den Annahmen der klassischen technischen Mechanik übereinstimmt. Die Summe der Schubkräfte aller Elemente in einem vertikalen Schnitt über die Höhe entspricht erwartungsgemäß der Querkraft. Die horizontale Komponente der Druckkraftresultierenden ist jedoch auch hier geneigt. Im Bereich der Lasteinleitung bzw. zum Auflager hin ist auch die Schubkraftresultierende geneigt. Der geneigte Verlauf der Schubkraftresultierenden sowie der horizontale Komponente der Druckkraftresultierenden deutet auf einen additiven Betontaganteil in Form einer geneigten Betondruckstrebe bzw. eines Druckbogens hin und bestätigt, dass die BERNOULLISCHE Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte bei gerissenen Stahlbetonbalken unter Querkraftbeanspruchung nicht zutrifft.

Aus der Verteilung der Kräfte wird ebenfalls klar, dass die Annahme einer gleichmäßigen Spannungsverteilung der Schubkräfte über die Trägerhöhe, bzw. die statische Höhe d , in der Nähe des Auflagers eine starke Vereinfachung darstellt. Stattdessen konzentrieren sich inneren Kräfte am Auflager, was mit der tieferen Lage der Resultierenden korrespondiert. Die numerischen Ergebnisse belegen damit die intuitive Vorstellung, dass die Querkraft im Bereich des Auflagers über eine direkte Druckstrebe ins Auflager geleitet wird und in diesem Bereich das Tragverhalten nicht mehr dem eines Balkens nach Technischer Biegelehre entspricht.

Dieses Ergebnis kann ebenfalls durch die Trajektorienverläufe in Abbildung 8.3 bestätigt werden. Es wird ferner deutlich, dass für die Tragfähigkeit der Druckstrebe in der Realität der Bereich nahe des Auflagers maßgebend wird. Die Konzentration der Spannungen am Auflager bei gleich großer Querkraft führt zu einer höheren Spannungsintensität als im Schubfeld, wo die Spannungen gleichmäßig über die Höhe verteilt sind. Die Ermittlung der Tragfähigkeit der Druckstrebe $V_{Rd,max}$ am Auflagerrand unter Annahme einer gleichmäßigen Spannungsverteilung über die Höhe führt also ggf. zu einer Überschätzung der Tragfähigkeit, die im bisherigen Fachwerkmodell allerdings durch den konservativen Ansatz von $\cot \theta = 1,2$ ausgeglichen wird.

8.3 Druckbogenmodell (DBM)

8.3.1 Traganteil aus Druckbogenwirkung - vereinfachter Ansatz

Aus den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte wird im Folgenden ein analytisches Modell zur Beschreibung der Querkrafttragfähigkeit von querkraftbewehrten Stahlbetonbalken hergeleitet. Der

hier verfolgte Ansatz zur Ermittlung eines additiven Betontraganteils besteht in der Weiterentwicklung der Idee LEONHARDS von einem Fachwerk mit überlagertem Druckbogen. Die Annahme eines zusätzlichen Traganteils aus einer überlagerten Bogen- oder Strebentragwirkung wurde von KIZILTAN [51] sowie MAURER & KIZILTAN[68] bereits aufgegriffen. Der Fokus lag hierbei jedoch auf Bauteilen aus Spannbeton. Voraussetzung ist in dieser Modellvorstellung zunächst das Ebenbleiben der Querschnitte. Über die Dehnungsebenen, die sich nach Zustand I und II für einzelne Schnitte aus den äußeren Schnittgrößen ermitteln lassen, werden Größe und Lage der Biegedruckkraft ermittelt. Der Druckbogen ergibt sich dann aus der unterschiedlichen Höhenlage der horizontalen Komponente der Biegedruckkraft. Aus dem Verlauf dieses Druckbogens und den resultierenden Neigungsunterschieden lässt sich ein zusätzlicher vertikaler Traganteil für die Querkrafttragfähigkeit ermitteln. Dieser Ansatz liefert gute Ergebnisse bei Spannbeton im Zustand I sowie bei reiner Biegerissbildung im Zustand II, allerdings lässt er sich nicht auf Stahlbetonbalken übertragen, da ohne Vorspannung unter der Voraussetzung ebenbleibender Querschnitte die Lage der Biegedruckkraft fast konstant bleibt und sich somit kein Druckbogen einstellen kann.

8.3.2 Traganteil aus Druckbogenwirkung - erweiterter Ansatz

Schon LEONHARDT hat auf der Grundlage eigener Versuche die These aufgestellt, dass die resultierende Biegedruckkraft nicht, wie in den klassischen Fachwerkmodellen angenommen, über die gesamte Trägerlänge den konstanten Hebelarm z besitzt und somit die Lage nicht verändert, sondern in Richtung Auflager bogenförmig geneigt verläuft, s.[61] sowie Abbildung 8.6.

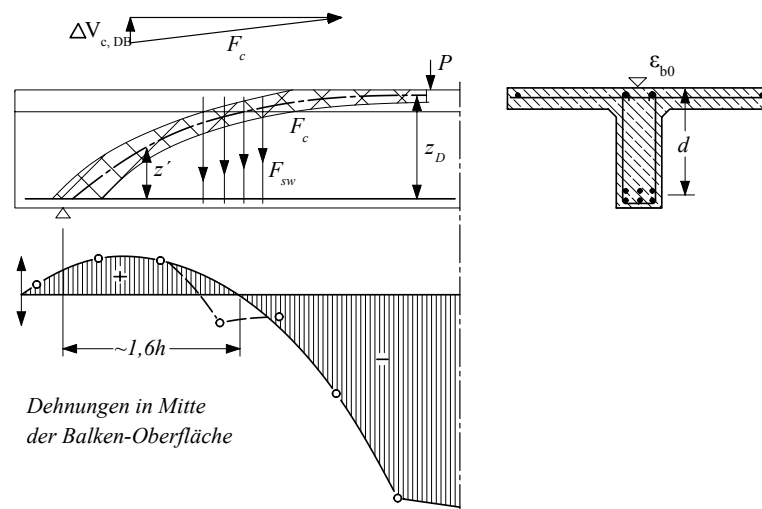


Abbildung 8.6: Geneigter Druckgurt nach LEONHARDT, aus [61]

LEONHARDT stützte seine Vorstellung auf die Tatsache, dass im Bereich des Auflagers an der Plattenoberseite bis etwa $1,6d$ vom Auflager entfernt Zugdehnungen im Beton gemessen wurden. Die durchgeführten nichtlinearen numerischen Rechnungen bestätigen diese Vermutung. Auch hier entstehen Zugdehnungen im Beton sowie geringe Zugspannungen in der oberen Längsbewehrung. Weiterhin ergibt sich aus der Lage der resultierenden Gesamtdruckkraft sowie dem Verlauf der Spannungstrajektorien, die im Bereich des Auflagers nicht mehr über die volle Höhe des Querschnitts

verlaufen, sondern sich zunehmend im unteren Drittel konzentrieren, die Notwendigkeit, dass die Biegedruckkraft gekrümmt Richtung Auflager verläuft. Ähnliches lässt sich auch für die Resultierende der vertikalen Spannungen beobachten, s. Abbildung 8.5, d.h. die Querschnitte bleiben nicht mehr eben. Für eine gekrümmte Druckgurt- oder Bogentragwirkung spricht ferner die Beanspruchung der Bügel im Bereich des Auflagers. Dies ist nur möglich, wenn der Druckgurt gekrümmt verläuft, da nur so eine zusätzliche Einleitung von Lasten aus den Bügeln in den Obergurt möglich ist.

Die gesamte Querkraft im Beton ergibt sich somit in einem vertikalen Schnitt aus der Summe der Vertikalkomponenten der Druckstreben sowie der des geneigten Biegedruckgurt, s. Gleichung 8.3 sowie Abbildung 8.7:

$$V_R = V_{cc} + F_{c_{wv}} \quad V_R \equiv V_E \tag{8.3}$$

Aus der Addition der Horizontalkomponenten der Biegedruckkraft sowie aus der schrägen Druckstre-

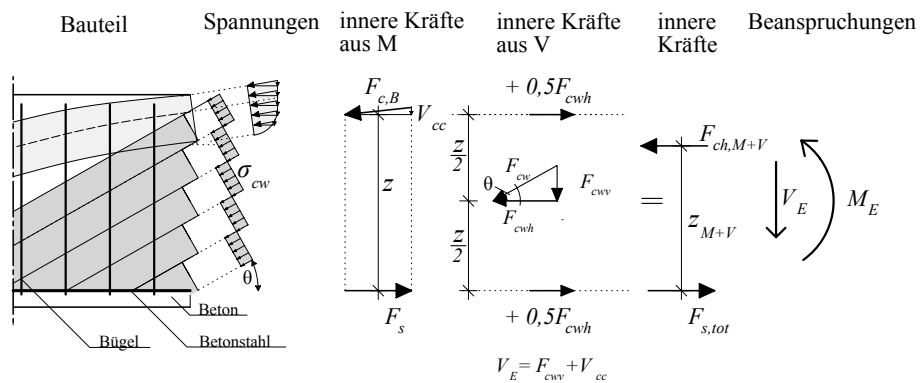


Abbildung 8.7: Analytisches Fachwerkmodell mit geneigtem Druckgurt

benkraft F_{cw} ergibt sich die resultierende Horizontalkraft $F_{ch,M+V}$ mit dem Hebelarm z_{M+V} , dessen Verlauf in Abbildung 8.5a) ersichtlich ist.

Die Modellvorstellung eines Fachwerkes mit geneigtem Druckgurt und einem System aus Zug- und Druckstreben stellt eine Idealisierung der Realität dar. Wie zuvor ausgeführt, ändert sich die Neigung der Druckspannungen kontinuierlich über die Höhe. Die Unterscheidung zwischen einem diskreten Biegedruckgurt mit einer bestimmten Neigung sowie diskreten Druckstreben mit einer davon abweichenden Neigung trifft somit nicht zu, vielmehr stellen sich die Spannungen so ein, dass sowohl das Moment als auch die Querkraft abgetragen werden. Als idealisiertes analytisches Modell ergibt sich die in Abbildung 8.7 dargestellte Situation: Durch die Neigung beteiligt sich der Biegedruckgurt an der Querkraftaufnahme mit der Komponente V_{cc} .

Der Traganteil des Druckbogens variiert stark in Abhängigkeit von der Neigung und der betrachteten Stelle sowie dem Anteil aus den Druckstreben. Der Bogen ist am Auflager stark geneigt, hat demzufolge eine große Vertikalkomponente, und kann einen erheblichen Anteil der Querkraft abtragen. Gleichzeitig ist hier die Druckstrebe aus dem Fachwerk kaum ausgeprägt, da das Druckspannungsfeld zum Auflager hin ausläuft. Der Lastabtrag erfolgt hier also hauptsächlich über den Bogen. Im weiteren Verlauf nimmt die Neigung des Obergurtes stark ab, bis er horizontal verläuft. Es

kann somit immer weniger Last über den Bogen aufgenommen werden, bis im horizontalen Bereich aufgrund der fehlenden Vertikalkomponente kein Querkraftanteil über eine Bogenwirkung mehr abgetragen werden kann und der Lastabtrag allein über die schrägen Druckstreben des Fachwerkes erfolgt.

Bei dem vorgestellten Modell bzw. dem zusätzlichen Betontraganteil aus dem Druckbogen handelt es sich um einen Systemtraganteil, nicht um einen Querschnittstraganteil, da die Neigung und der Verlauf des Druckbogens von den spezifischen geometrischen Randbedingungen des betrachteten Systems abhängen, z.B. dem h/b -Verhältnis des Balkens, der Schubslankheit etc. Der Verlauf des gekrümmten Biegedruckgurtes lässt sich daher nicht eindeutig und allgemeingültig bestimmen.

8.3.3 Umsetzung im analytischen Modell - DBM

Die Schwierigkeit des vorgestellten Modelles besteht darin, dass der genaue Verlauf des gekrümmten Druckbogens, bzw. des geneigten Druckgurtes, nicht bekannt ist und sich aus den numerischen Ergebnissen nicht genau konstruieren lässt. Eine Möglichkeit, den gekrümmten Verlauf zu bestimmen, bestünde in einer numerischen Formoptimierungsanalyse für ein in der Ausgangslage parallelgurtiges Fachwerk. Dies ist jedoch nicht Bestandteil dieser Arbeit und wäre zunächst auch nur für den untersuchten Fall gültig. Eine Vereinfachung bzw. Modifikation des Druckbogenmodells auf Basis eines geneigten Biegedruckgurtes lässt sich über das klassische Fachwerkmodell und der Neigung der horizontalen Gesamtergebnierenden gewinnen. Abbildung 8.8 veranschaulicht das Vorgehen.

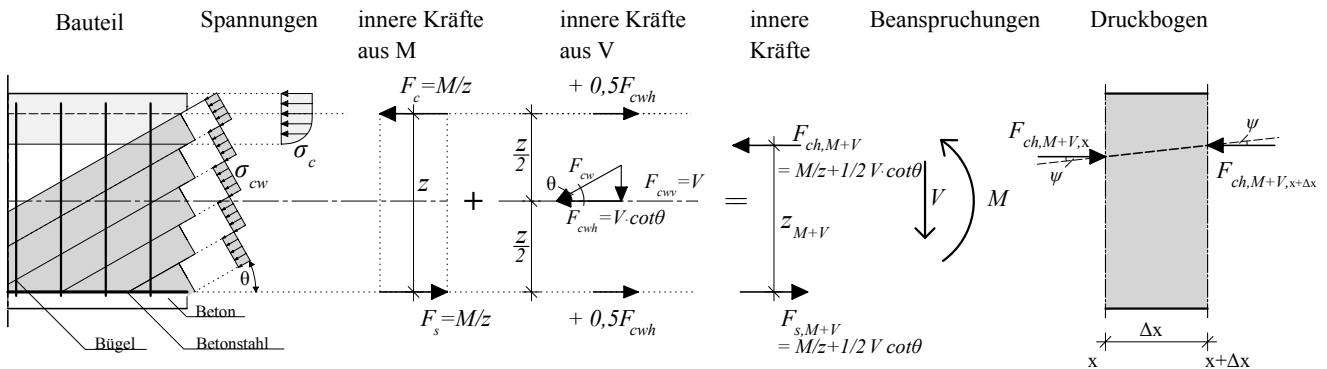


Abbildung 8.8: Druckbogenmodell

Hierbei wird von einem parallelgurtigem Fachwerk mit konstantem Hebelarm z ausgegangen. Aus der Biegedruckkomponente F_c und der Horizontalkomponente der schrägen Druckstrebe F_{cwh} wird die horizontale Gesamtergebnierende $F_{ch,M+V}$ und deren Lage z_{M+V} bestimmt. Der Anteil aus dem Druckbogen wird vereinfacht aus der Gesamtergebnierenden $F_{ch,M+V}$ und über die Differenz der Höhenlage als Maß für den Winkel hergeleitet. Es gilt dann:

$$V_{cc} = F_{ch,M+V} \cdot \tan \psi \quad (8.4)$$

$$F_{ch,M+V} = (F_c - 1/2 \cdot V \cdot \cot \theta) + V \cdot \cot \theta = F_c + 1/2 \cdot V \cdot \cot \theta \quad (8.5)$$

$$F_{s,M+V} = F_s + 1/2 \cdot V \cdot \cot \theta \quad (8.6)$$

$$z_{M+V} = \frac{(F_c - 1/2 \cdot V \cdot \cot \theta) \cdot z + V \cdot \cot \theta \cdot z/2}{F_c + 1/2 \cdot V \cdot \cot \theta} = \frac{F_c \cdot z}{F_{ch,M+V}} = \frac{M}{F_{ch,M+V}} \quad (8.7)$$

Die Größe und Lage der Gesamtresultierenden aus dem analytischen Modell stimmt sehr gut mit den jeweiligen Werten aus der FEM-Berechnung überein, wie aus den Abbildungen 8.9 sowie 8.10 ersichtlich ist. Dieses zunächst überraschende Ergebnis kann mit dem Versatzmaß des Fachwerkmodelles erklärt werden. Aufgrund des horizontalen Kräftegleichgewichtes muss die Horizontalkomponente aus dem Fachwerk mit der Betondruckkraft im Obergurt und der Stahlzugkraft im Untergurt, die sich aus dem Moment ergeben, ins Gleichgewicht gesetzt werden. Dies bedeutet eine Verringerung der Betondruckkraft im Obergurt sowie eine Vergrößerung der Stahlzugkraft im Untergurt. Da bei einer Beanspruchung durch Einzellasten die Querkraft abschnittsweise konstant, das Moment aber linear veränderlich ist und zum Auflager abnimmt, kommt es in dem analytischen Modell ab einem Abstand von $z/2 \cdot \cot \theta$ vom Auflager rechnerisch zu Zugkräften im Obergurt, die Biegedruckkraft F_c wird betragsmäßig um $0,5 \cdot F_{cwh}$ verringert, die Biegezugkraft in der Bewehrung um den gleichen Betrag vergrößert. Hierbei wurde berücksichtigt, dass sich die Druckstreben im Bereich der

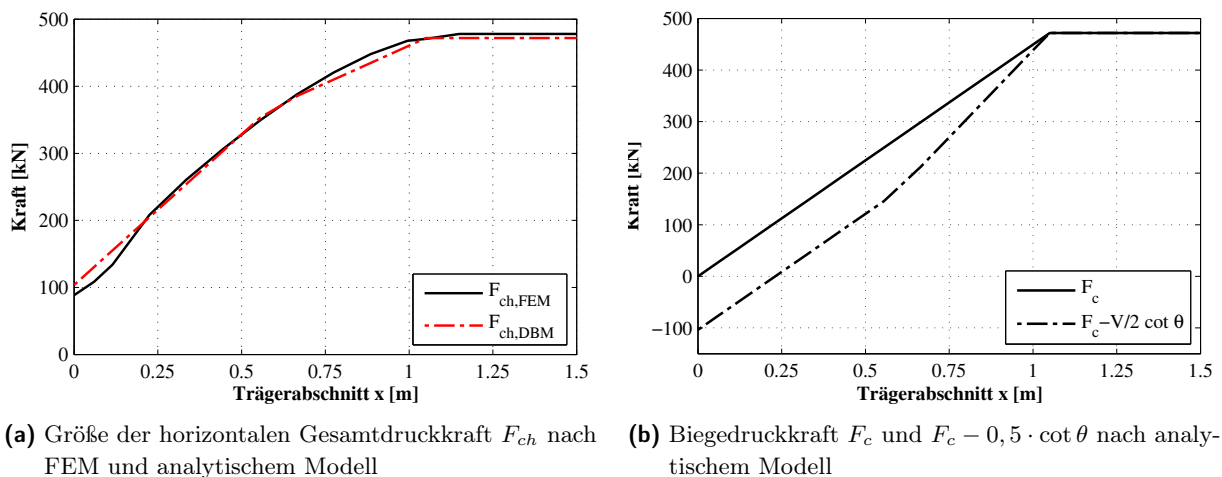


Abbildung 8.9: Horizontale Gesamtdruckkraft sowie Biegedruckkraft und abgeminderte Biegedruckkraft (am halben symmetrischen Balken dargestellt)

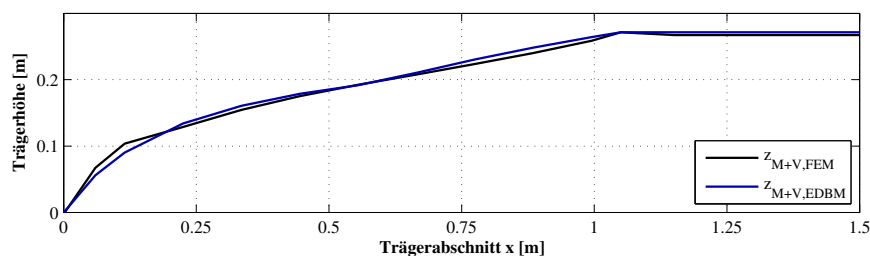


Abbildung 8.10: Vergleich der Hebelarme z_{M+V} nach FEM und analytischem Modell

Lasteinleitung fächerförmig ausbreiten und das volle Versatzmaß erst nach $0,5 \cdot z \cdot \cot \theta$ wirksam

wird. Dadurch verschiebt sich die Lage des Hebelarms z_{M+V} in Richtung Auflager sukzessive nach unten und stimmt gut mit der Lage des Hebelarms aus der FEM-Berechnung überein.

Die Ergebnisse für die Ermittlung der Querkrafttragfähigkeit mit dem *Druckbogenmodell* (DBM) sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Hierbei ist wiederum berücksichtigt, dass sich die Last zunächst fächerförmig ausbreitet und die Bügel weiterhin ebenfalls erst sukzessive im Abstand d von der Lasteinleitung bzw. Auflager beansprucht werden.

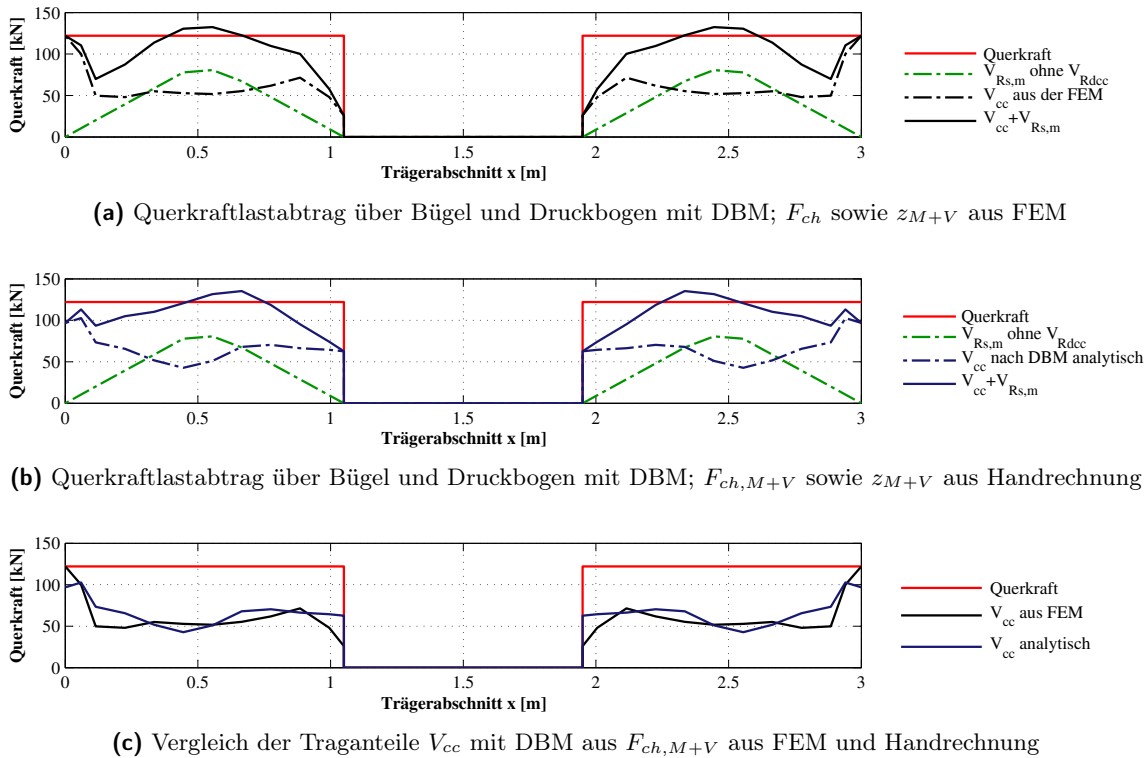


Abbildung 8.11: Querkrafttragfähigkeit mit dem Druckbogenmodell, Vergleich aus FEM und analytischer Ermittlung

In Abbildung 8.11a werden der Traganteil aus der Bügelbewehrung $V_{Rs,m}$ sowie aus dem Druckbogen V_{cc} auf Basis der FEM-Berechnung der einwirkenden Querkraft gegenübergestellt. Die Gesamtsresultierende F_{ch} sowie der innere Hebelarm z_{M+V} stammen hierbei aus der FEM-Berechnung, Lage und Größe des Druckbogenanteils werden hieraus ermittelt. In Abbildung 8.11b werden die beiden Größen dagegen mithilfe der Fachwerk-Analogie und den Gleichungen (8.5) sowie (8.7) ermittelt. Die auf Basis des Druckbogenmodells vorgestellten Traglasten stimmen gut mit der äußeren Querkraft aus der Einzellast überein. Im B-Bereich wird die Traglast mit dem Modell etwas überschätzt.

In Abbildung 8.11c werden die beiden Betontraganteile aus der Bogenwirkung separat gegenübergestellt. Es ist eine gute Übereinstimmung zwischen $V_{cc,FEM}$ auf Basis der FEM-Berechnung und dem analytisch ermittelten Traganteil $V_{cc,DBM}$ erkennbar. Der auf diese Weise ermittelte additive Betontraganteil beträgt in diesem Fall ca. 40% der Gesamtquerkraft.

Die Schwierigkeit bei der Anwendung des Druckbogenmodells für die Bemessung besteht darin, dass nicht eine zuvor unbekannte maximale Querkrafttragfähigkeit ermittelt werden kann, sondern für eine gegebene Querkraft geprüft werden muss, ob das System in der Lage ist, diese mithilfe des Fachwerkes in Addition mit der Bogentragwirkung aufzunehmen. Insofern ist es in erster Linie dazu geeignet, das Querkrafttragverhalten besser zu verstehen und anschaulich darzustellen. Die Ergebnisse der FEM-Berechnungen können damit plausibel gemacht werden.

Einfluss des Druckstrebenwinkels Von großer Bedeutung ist die Wahl der Druckstrebenneigung bzw. des Risswinkels $\cot \beta_r$, sowohl für den Traganteil aus der Bewehrung $V_{Rs,m}$ als auch für den Druckbogenanteil V_{cc} . Wie zuvor ausgeführt, ist der Ansatz $\cot \beta_r = 1,2$ nach REINECK in vielen Fällen zu konservativ, da sich die Risse unter flacheren Winkeln einstellen. Dies ist auch bei dem hier betrachteten Versuch ET2 der Fall. Da sich die Risse bei dem realen Versuch in einem Winkel von $\beta_r = 30^\circ - 33^\circ$ eingestellt haben und in der numerischen Simulation der mittlere Druckstrebenwinkel in der Druckstrebe ebenfalls $\beta_r \leq 30^\circ$ beträgt, wurde dieser Wert für die Ermittlung der Tragfähigkeit mit dem Druckbogenmodell verwendet. Im Vorfeld ist der Druckstreben- bzw. Risswinkel nicht bekannt. In diesem Fall bietet sich zur Ermittlung des Druckstreben- bzw. Risswinkels der Ansatz nach HEGGER/GÖRTZ an, der hier für das analytische Modell verwendet wird. Im Falle nicht profilierter Querschnitte ergibt sich:

$$\cot \beta'_r = 1 + 0,15/\omega_{w,ct} - 0,18 \cdot \sigma_x/f_{ctm} \quad (8.8)$$

Für profilierte Querschnitte darf der Winkel modifiziert werden, was zu größeren Werten für $\cot \beta_r$ führt:

$$\cot \beta'_r = \cot \beta_r + 0,5 \cdot (b_{OG} - b_w) / z \quad (8.9)$$

Wendet man die Formel im vorliegenden Fall an, ergibt sich ein Winkel von $\cot \beta_r = 1,6$. Der Wert liegt auf der sicheren Seite unter dem gemessenen Risswinkel aus dem Versuch wie auch unter dem aus der numerischen Berechnung, gleichzeitig ist der Wert jedoch deutlich größer als der Ansatz von REINECK mit $\cot \beta_r = 1,2$.

Analyse des Modells Das erweiterte Druckbogenmodell auf der Basis eines Druckbogens, der aus dem geneigten Verlauf der horizontalen resultierenden Gesamtdruckkraft resultiert, stellt eine starke Vereinfachung des realen Tragverhaltens dar. Im Folgenden werden die Abweichungen, die sich aus dem vereinfachten analytischen Modell im Vergleich zur Annahme eines zusätzlichen Bogentraganteils aus der geneigten Biegedruckkraft ergeben, analysiert. Da sich aus der numerischen Simulation der Verlauf des geneigten Biegedruckgurtes nicht eindeutig konstruieren lässt, erfolgt die Analyse an einem idealisierten Fachwerkmodell, s. Abbildung 8.12.

Zunächst werden die Querkraftanteile aus den Vertikalkomponenten aller Stabkräfte in einem senkrechten Schnitt ermittelt, wobei dann dem geneigten Obergurt ein seiner Neigung entsprechender Anteil der Querkraft zufällt. Ferner werden die Kräfte analytisch nach dem Druckbogenmodell ermittelt und aus der daraus resultierenden Lage und Größe von $F_{ch,M+V,DBM}$ ein zusätzlicher Querkrafttraganteil errechnet. Auch hier stimmt die resultierende horizontale Gesamtdruckkraft

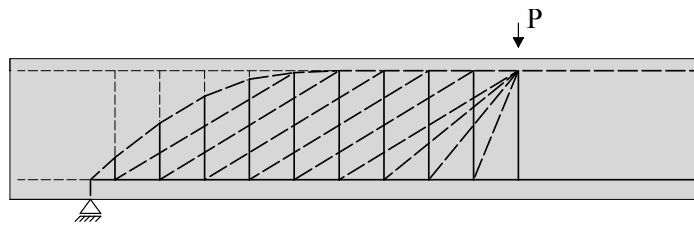
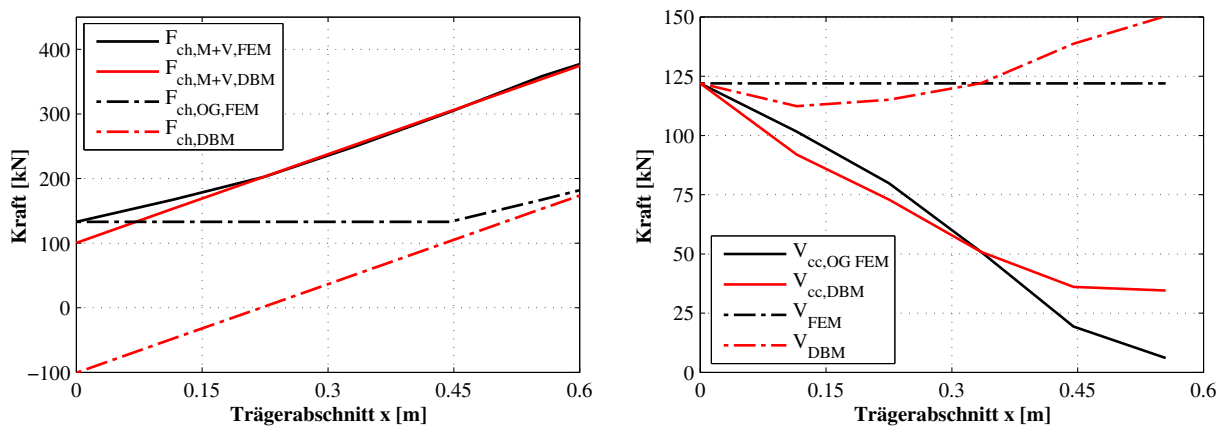


Abbildung 8.12: Idealisiertes Fachwerk für Balken ET2

$F_{ch,M+V,FEM}$ recht gut mit der resultierenden horizontalen Gesamtdruckkraft $F_{ch,M+V,DBM}$ aus dem analytischen Druckbogenmodell überein.



(a) $F_{ch,OG}$ sowie $F_{ch,DBM}$ nach FEM und analytischem Modell (b) Traganteil V_{cc} nach FEM und analytischem Modell

Abbildung 8.13: Horizontale Gesamtdruckkraft sowie Querkraftanteil des geneigten Obergurts aus FEM und analytisch nach DBM

Da im idealisierten Fachwerk alle Kräfte bekannt sind, kann die Summe der Vertikalkräfte gebildet werden. Dabei zeigt sich, dass die Summe der Vertikalkräfte zutreffend in allen Schnitten der äußeren Querkraft entspricht, wenn die zusätzliche Druckbogenkomponente $V_{cc,OG,FEM}$ aus dem geneigten Obergurt $F_{c,OG}$ ermittelt und dann zu den Vertikalkomponenten der Druckstreben addiert wird:

$$V_{FEM} = \Sigma F_{c,wv} + V_{cc,OG,FEM} = V_u = 122\text{kN} \quad (8.10)$$

Ermittelt man allerdings den zusätzlichen vertikalen Traganteil $V_{cc,DBM}$ des Druckbogens aus der Größe und Lage von $F_{ch,M+V,DBM}$, erhält man sehr ähnliche Ergebnisse in der Nähe des Auflagers, im weiteren Verlauf aber wird der zusätzliche Traganteil aus der Bogentragwirkung mit dem Druckbogenmodell überschätzt:

$$\max V_{DBM} = F_{c,wv} + V_{cc,DBM} = 150,8\text{kN} > V_u \quad (8.11)$$

Dies ist darauf zurückzuführen, dass real (mindestens) zwei Traganteile mit unterschiedlichen Winkeln existieren, die des geneigten Biegedruckgurtes und die aus den Betondruckstreben des Fach-

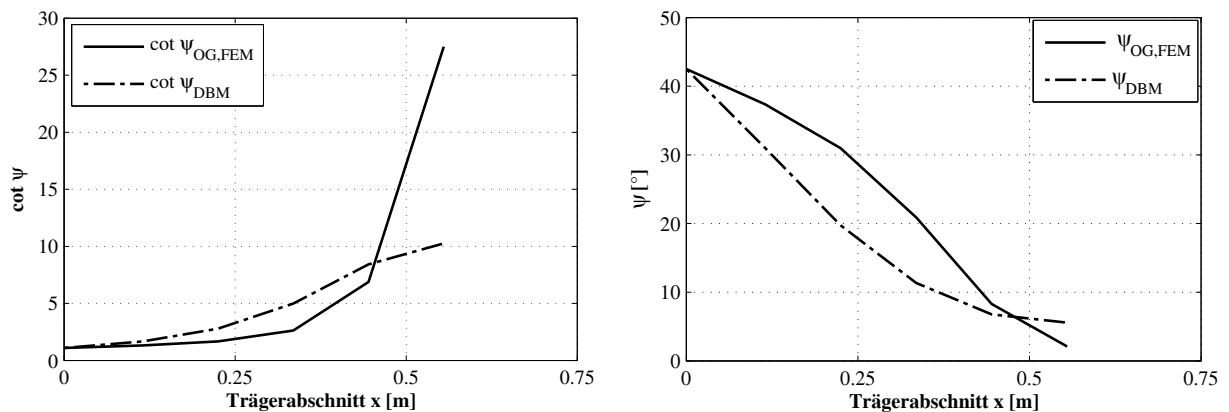
werkes, die zusammen die Querkraft ergeben:

$$V_u = F_{OG} \cdot \sin \psi_{OG} + F_{cw} \cdot \sin \theta = F_{ch,OG} / \cot \psi_{OG} + F_{cwh} / \cot \theta \quad (8.12)$$

Während in der Nähe des Auflagers die Querkraft hauptsächlich durch den geneigten Biegedruckgurt mit relativ steilem Winkel abgetragen wird, und der Traganteil der Druckstrebe mit dem Druckstrebenwinkel $\cot \theta$ geringer ausfällt, dreht sich dieses Verhältnis mit flacher werdendem Obergurt zunehmend um, bis der Obergurt im Extremfall irgendwann horizontal verläuft und keinen Beitrag zum Querkraftabtrag mehr leistet. Wenn der Obergurt horizontal verläuft, wird die gesamte Querkraft über die schräge Druckstrebe abgetragen, es gilt:

$$V_u = F_{cwh} / \cot \theta \quad (8.13)$$

Im analytischen Modell wird jedoch eine mittlere horizontale Resultierende $F_{ch,M+V,DBM}$ mit einem mittleren Hebelarm $z_{M+V,DBM}$ gebildet. Während in der Nähe des Auflagers mit dieser Modellvorstellung die tatsächliche vertikale Druckbogenkomponente noch recht zutreffend erfasst wird, wird diese bei zunehmendem Einfluss der Druckstreben überschätzt, denn der Winkel des Druckbogens ist in Richtung Lasteinleitung real flacher als der gemittelte Winkel $\cot \psi$ aus dem gemittelten Hebelarm $z_{M+V,DBM}$. Ebenso wird die Größe der Betondruckkraft im Vergleich zum Fachwerkanteil zunehmend überschätzt, wie aus Abbildung 8.13 deutlich wird.



(a) $\cot \psi$ ermittelt am geneigten Obergurt bzw. aus $F_{ch,M+V}$ bzw. $F_{ch,M+V}$ (b) ψ ermittelt am geneigten Obergurt bzw. aus $F_{ch,M+V}$ bzw. $F_{ch,M+V}$

Abbildung 8.14: $\cot \psi$ bzw. ψ aus Fachwerkberechnung

Anfänglich wird über die Mittelung die Größe der horizontalen Druckbogenkraft $F_{ch,M+V,DBM}$ im Vergleich zur Horizontalkomponente des Obergurtes $F_{ch,OG}$ überschätzt, der Winkel ψ_{DBM} gleichzeitig jedoch zu steil im Vergleich zum geneigten Obergurt ermittelt, so dass sich diese Effekte in Summe aufheben. In Richtung Lasteinleitung summiert sich allerdings der Einfluss der zu flachen Neigung des Winkels sowie der zu großen Druckkraft, so dass der Druckbogenanteil mit dem analytischen Druckbogenmodell überschätzt wird. In Summe ergibt sich dann eine Vertikalkraft, die größer ist als die einwirkende Querkraft.

Zwar lassen sich die Ergebnisse des idealisierten Fachwerks nicht vollständig auf die komplexere Situation in Stahlbetonbalken übertragen, da hier die Druckstreben nicht über die Höhe und Länge des Trägers konstant denselben Druckstrebenwinkel aufweisen und die eindeutige Aufteilung in einen Fachwerk- und einen Druckbogenanteil schwierig ist. Ferner ist der genaue Verlauf des Druckbogens, bzw. des geneigten Biegedruckgurtes nicht bekannt, jedoch gilt der am idealisierten Fachwerk bewiesene Zusammenhang qualitativ auch für den realen Stahlbetonbalken. Dies bedeutet, dass das Druckbogenmodell die Tragfähigkeit trotz der Vereinfachungen in der Nähe des Auflagers sehr gut abbildet, weiter in Richtung Lasteinleitung jedoch die Traglast aufgrund der Unterschiede zwischen gemitteltem und realem Winkel des gekrümmten Obergurtes zunehmend überschätzt. Daher wird empfohlen, die Anwendung des analytischen Druckbogenmodells auf die Bereiche nahe des Auflagers zu beschränken oder eine konservative Wahl für $\cot \theta$ zu treffen.

8.3.4 Bewertung und Fazit

Das vorgestellte analytische *Druckbogenmodell* stellt ein relativ einfaches und sehr anschauliches Modell dar, mit dem der zusätzliche Betontraganteil auf Basis von Handrechnungen unter Ermittlung der Dehnungsebenen nach Rissbildung abgeschätzt werden kann. Im Gegensatz zum Vereinfachten Druckbogenmodell ist die Anwendung nicht nur bei Spannbeton-, sondern auch bei Stahlbetonstrukturen möglich. Für die Anwendung auf Bemessungsaufgaben bedarf es noch weitergehender Untersuchungen und einer Weiterentwicklung. Es wird empfohlen, die Anwendung auf auflagernahe Bereiche zu beschränken, da andernfalls die Gefahr besteht, die Querkrafttragfähigkeit zu überschätzen. Für die Ermittlung des Druckstrebenwinkels $\cot \theta$ wird der Ansatz nach HEGGER/GÖRTZ vorgeschlagen. Die so ermittelten Winkel sind flacher als nach klassischer Fachwerktheorie, liegen aber im Vergleich zu den Ergebnissen aus numerischen Simulationen auf der sicheren Seite. Das DBM kann für Plausibilitätsprüfungen von nichtlinearen FEM-Berechnungen herangezogen werden.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war die Untersuchung des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken auf der Basis von nichtlinearen numerischen Simulationen. Im ersten Teil der Arbeit standen die Modellierung und die Frage nach der zutreffenden Erfassung des Schubtragverhaltens von Stahlbetonbalken im Vordergrund, insbesondere in Bezug auf die Wahl der konstitutiven Materialgesetze. Ferner wurden die Gründe für zutreffendes oder abweichendes Tragverhalten analysiert. Im zweiten Teil der Arbeit wurden auf der Basis von Nachrechnungen von Großversuchen mit der nichtlinearen FEM Rückschlüsse auf das Tragverhalten von Stahlbetonbalken unter Querkraftbeanspruchung gezogen und ein mechanisches Modell zur Beschreibung des Querkrafttragverhaltens weiterentwickelt.

Da einer der Schwerpunkte der Arbeit die Analyse der Materialmodellierung für Stahlbeton unter Schubbeanspruchung war, wurden zunächst die kontinuumsmechanischen Grundlagen und die allgemeinen Grundlagen der Materialtheorie zusammenfassend dargestellt. Anschließend wurde die Materialmodellierung für Beton und Stahlbeton näher beleuchtet. Es wurden hierbei gängige Bruchkriterien vorgestellt sowie vor allem auf die Rissmodellierung unter Berücksichtigung der spezifischen Probleme bei der Umsetzung in der nichtlinearen FEM eingegangen, wie z.B. die Problematik der Lokalisierung und Regularisierung bei Materialgesetzen mit Entfestigung.

Hierbei wurde herausgearbeitet, dass neben dem Bruchkriterium selbst auch die Modellierung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens vor und nach Erreichen der Festigkeit von großer bzw. sogar entscheidender Bedeutung ist. Die Modellierung des Nachbruchverhaltens, sprich die Beschreibung des abfallenden Astes nach Erreichen der Betonzugfestigkeit, kann auf unterschiedliche Weise erfolgen und hat einen großen Einfluss auf die Erfassung der spannungsinduzierten Anisotropie. Es lassen sich isotrope Ansätze, bei der die Beschreibung des abfallenden Astes z.B. im Rahmen einer Entfestigung auf plastizitätstheoretischer Basis erfolgt, von orthotropen Ansätzen, wie klassischen Smeared Crack Modellen, unterscheiden.

Es wurde die These aufgestellt, dass die Notwendigkeit des Rissmodells, die spannungsinduzierte Anisotropie auch für unterschiedliche zwei- oder dreidimensionale Spannungszustände abzubilden, von der Aufgabenstellung abhängt. Es konnte gezeigt werden, dass bei Schubspannungszuständen das unterschiedliche Verhalten in den Hauptspannungsrichtungen nach Rissentstehung von entscheidender Bedeutung bei der Modellierung ist.

Während bei einem Biegeversagen das Materialverhalten orthogonal zur Hauptzugspannungsrichtung die Tragfähigkeit kaum beeinflusst, muss bei einer Querkraftbeanspruchung, die zu einer positiven Hauptspannung in einer Richtung und einer negativen orthogonal dazu führt, auch das anisotrope Verhalten unter mehraxialen Spannungszuständen zutreffend erfasst werden, insbesondere bezogen auf die Druckfestigkeit orthogonal zur Hauptzugspannungsrichtung.

Real sinkt in Zugrichtung die Spannungsaufnahme mit zunehmenden Verzerrungen, bis keine Spannungen mehr übertragbar sind. In Druckrichtung kann der Werkstoff jedoch weiterhin große Druckspannungen aufnehmen. Es ist möglich, mithilfe eines isotropen Bruchkriteriums die Anisotropie in Bezug auf die unterschiedlichen Festigkeiten des Werkstoffs Beton in Zug- und Druckrichtung zu erfassen, die zutreffende Abbildung des unterschiedlichen Verhaltens in Zug- und Druckrichtung nach Erreichen der maximalen Zugspannung ist jedoch problematisch. Während bei isotropen Ansätzen eine Entfestigung in alle Richtungen auftritt, also eine Entfestigung in Zugrichtung auch eine Entfestigung in Druckrichtung mit sich bringt, sind bei orthotropen Modellen die Hauptrichtungen entkoppelt. Es wurde festgestellt, dass eine zu große Entfestigung im Druckbereich bei isotropen Modellen zu Problemen bei der Erfassung von Schubspannungszuständen in Stahlbetonbetonbalken führt. Dies spricht dafür, dass orthotrope Modelle besser für die Abbildung des Querkrafttragverhaltens in gerissenen Stahlbetonstrukturen geeignet sind als isotrope Formulierungen, sofern sich bei diesen nach Überschreitung der Zugfestigkeit eine Entfestigung anschließt.

Zur Überprüfung dieser These wurden im Anschluss vier verschiedene Materialmodelle näher untersucht und verglichen. Zwei der untersuchten Modelle basieren auf isotropischen plastizitätstheoretischen Ansätzen, die beiden anderen Modelle auf orthotropen Formulierungen.

Bei dem ersten Modell handelt es sich um das dreidimensionale isotrope plastische Materialmodell Concrete Damaged Plasticity, implementiert in dem Programmsystem ABAQUS, das vielfach in der Forschung verwendet wird. Weiterhin wurde im Rahmen dieser Arbeit ein eigenes Materialmodell entwickelt („MCTC“ genannt), das ebenfalls auf einem isotropen Plastizitätsansatz basiert, jedoch so modifiziert wurde, dass die Anisotropie des Betons auch nach der Rissbildung zutreffend erfasst werden kann. Dies gelang mithilfe eines klassischen MOHR-COULOMB-Bruchkriteriums mit Tension Cut Off in Kombination mit einer sehr geringen Zugfestigkeit. Das Materialmodell für Beton kann somit nur in Verbindung mit Bewehrung verwendet werden, die die Zugspannungen aufnehmen kann. Die Spannungs-Dehnungsbeziehung wurde in Zug- und Druckrichtung elastisch-plastisch angenommen, ohne Ansatz einer Ver- oder Entfestigung. Dies umgeht die Probleme der Lokalisierung und Regularisierung sowie den negativen Einfluss der isotropen Entfestigung. Nach Überschreitung der Zugfestigkeit verhält sich das Modell in Zugrichtung plastisch, während die Entwicklung der Druckspannungen in der orthogonalen Richtung bis zum Erreichen der Druckfestigkeit hiervon nicht beeinflusst wird.

Neben den plastizitätstheoretischen Modellen wurden zwei mechanisch orthotrope Modelle untersucht. Bei dem ersten Modell handelt es sich um ein klassisches zweidimensionales anisotropes Smeared Crack Modell, das sowohl mit fester als auch rotierender Rissneigung verwendet werden kann. Als weiteres orthotropes Modell wurde ein Programm der EPFL Lausanne eingesetzt, das auf der elasto-plastischen Spannungsfeldmethode (EPSF) unter vollständiger Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit basiert und daher ebenfalls nur für bewehrte Querschnitte geeignet ist. Eine Be-

sonderheit des Modells ist, dass lediglich die Festlegung von zwei Materialparametern für Beton erforderlich ist, nämlich der Betondruckfestigkeit und des E-Moduls.

Im Anschluss wurden Versuche an Stahlbetonbalken mit Querkraftversagen in Form von Schubzug- oder Biegeschubversagen mit den vorgestellten Materialmodellen nachgerechnet. Da analytische Modelle insbesondere bei niedrigen Querkraftbewehrungsgraden Defizite aufweisen, und im Rahmen von Brückennachrechnungen insbesondere Tragreserven für diese Fälle von Interesse sind, lag der Fokus auf Balken mit vergleichsweise niedrigem Schubbewehrungsgrad. Die Auswertung der Nachrechnungen der Versuche ergab weitestgehend eine Bestätigung der o.g. These.

Die Nachrechnungen der vorgestellten Balken mit dem isotropen plastischen Materialmodell Concrete Damaged Plasticity lassen deutliche Schwächen erkennen. Unter Ansatz realistischer Materialparameter wird in allen Fällen die Traglast erheblich unterschätzt. Dabei ist eine physikalisch nicht plausible Abhängigkeit von der Größe der Betonzugfestigkeit zu erkennen. Die Größe der Zugfestigkeit spielt bei querkraftbewehrten Stahlbetonbalken in der Realität für die Traglast kaum eine Rolle, sie besitzt lediglich einen Einfluss auf den Zeitpunkt der Rissbildung und ggf. die Größe der Verformungen. Dagegen ist bei den Versuchsnachrechnungen mit dem Materialmodell CDP die Traglast in hohem Maße von der gewählten Betonzugfestigkeit abhängig. Im Gegensatz zu den Versuchen wird auch der Versagensmechanismus, Schubzugversagen nach Erreichen der Streckgrenze oder Bruch der Bügel, bzw. Biegeschubbruch durch Einschnüren der Biegedruckzone, nicht zutreffend wiedergegeben. Als Grund hierfür ist die zu ausgeprägte Entfestigung der Elemente auf Druck im schubbeanspruchten Steg zu vermuten, die auf den isotropen Ansatz zurückzuführen ist. Aufgrund dieser Entfestigung kann sich nicht das erwartete Fachwerktragverhalten einstellen, da die Ausbildung von Betondruckstreben, die sich in die Bügel stützen, nicht in ausreichendem Maß möglich ist. Stattdessen lässt sich als Haupttragmechanismus die Ausbildung einer direkten Betondruckstrebe bzw. eines Druckbogens zum Auflager beobachten. Das Versagen wird eingeleitet, wenn aufgrund der isotropen Entfestigung die Betondruckstrebe versagt, es handelt sich somit bei diesem Modell um ein Betonversagen. Das Modell ist nicht in der Lage, die rissinduzierte Anisotropie des Betons zutreffend abzubilden. Auch die Wahl des Viskositätsparameters spielt eine große Rolle, wie in Abschnitt 7.3.1.1 gezeigt wurde, und beeinflusst sowohl die Spannungs-Dehnungs-Linie im Zugbereich als auch die Entfestigung im Druckbereich. Wird der Viskositätsparameter entsprechend groß gewählt, kann die Versuchstraglast erreicht werden, jedoch ist das Tragverhalten nicht mehr physikalisch plausibel. Obwohl das Materialmodell CDP in der Forschung oft verwendet wird, scheint es für die Abbildung des Querkrafttragverhaltens von querkraftbewehrten Stahlbetonbalken nur bedingt geeignet zu sein.

Mit dem in Abschnitt 7.4 untersuchten MCTC-Modell ist es trotz des isotropen plastizitätstheoretischen Ansatzes möglich, das unterschiedliche Verhalten in Hauptdruck- und Hauptzugspannungsrichtung nach Rissbildung qualitativ zutreffend abzubilden. Das Auftreten großer plastischer Zugverzerrungen hat aufgrund der fehlenden Entfestigung keinen Einfluss auf die Druckfestigkeit in Querrichtung und somit auf die Ausbildung der Druckstreben im Stegfachwerk. Es stellt sich ein Fachwerk mit geneigten Betondruckstreben ein, die sich in die Bügel als Zugstreben stützen. Die Versagensart Schubzugbruch kann somit zutreffender als mit dem Modell CDP abgebildet werden. Die Analyse der Ergebnisse deutet ferner darauf hin, dass neben der reinen Fachwerkwirkung ein

weiterer Betontraganteil in Form eines Druckbogens oder einer direkten Druckstrebe existiert. In den numerischen Simulationen lässt sich darüber hinaus eine Rotation der Druckstrebe beobachten. Mit Einsetzen der Rissbildung und damit dem Übergang von Zustand I in Zustand II ändert sich das Tragverhalten und die Neigung des Druckstrebenwinkels. Es ist ferner eine Abhängigkeit vom Schubbewehrungsgrad zu erkennen. Je geringer dieser ist, desto flacher werden die Druckspannungswinkel. Das Modell hat allerdings auch Einschränkungen. Grundsätzlich lässt sich das Lastverformungsverhalten von Stahlbetonbalken aufgrund der Modellannahmen nicht zutreffend abbilden. Durch den frühen Ausfall des Betons auf Zug setzt die Rissbildung zu früh ein, was zu einer zu weichen Strukturantwort führt. Aufgrund des elastischen Materialverhaltens des Betons auf Druck bis zum Bruch verhält sich das Material im weiteren Verlauf dann zu steif. Ferner lassen sich die Druckfestigkeitssteigerungen infolge mehraxialer Druckspannungszustände nicht abbilden.

Das orthotrope Smeared Crack Modell SBETA von ATENA verhält sich ähnlich wie das MCTC-Modell, ist aber stabiler in der Rechnung. Hierbei kann die Druckfestigkeit infolge von Querkzug abgemindert werden. Wie beim MCTC-Modell ist ein kombinierter Tragmechanismus aus Fachwerk- und Sprengwerk- oder Bogenwirkung erkennbar, deren Ausprägung vom Schubbewehrungsgrad abhängt. Ebenso wie das MCTC-Modell verhält sich das Modell allerdings zu steif. Die Traglasten werden z.T. leicht überschätzt. Die Güte der Ergebnisse hängt stark vom verwendeten Rissmodell ab. Die Nachrechnungen mit den verschiedenen Rissmodellen haben gezeigt, dass das Rotated Crack Modell die besten Resultate liefert. Das Fixed Crack-Modell mit variablen Shear Retention Faktor führt auf zu niedrige Traglasten.

Die numerischen Simulationen mit dem Modell auf Basis der elasto-plastischen Spannungsfeldmethode (EPSF) führt in allen Fällen zu einer Unterschätzung der Traglast, im Unterschied zu den Nachrechnungen mit dem Rotated Crack Modell von ATENA. Die Druck- und Zugrichtungen sind grundsätzlich entkoppelt, allerdings wird der Einfluss des Querkzuges auf die Druckfestigkeit über die Formulierung von VECCHIO/COLLINS erfasst. Das Modelltragverhalten ähnelt stark dem des MOHR-COULOMB und Rotated Crack Modells, und zeigt auch ähnliche Abhängigkeiten: Es bildet sich ein Fachwerktragverhalten mit einem zusätzlichen Sprengwerk- bzw. Druckbogenanteil aus. Die Druckstreben stützen sich in die Bügel, das Fließen der Bügel wird zutreffend erfasst. Ebenso werden auch hier die Druckstrebenwinkel bei geringem mechanischen Schubbewehrungsgrad flacher. Die Unterschiede in der Traglast, insbesondere zum Rotated Crack Modell, sind vermutlich mit den Modellannahmen erklärbar: Im Gegensatz zum in ATENA implementierten Modell SBETA kann die größere Druckfestigkeit bei zweiaxialen Druckspannungszuständen nicht abgebildet werden. Außerdem erfolgt aufgrund der Umsetzung des Ansatzes von VECCHIO/COLLINS eine deutlich stärkere Abminderung der Druckfestigkeit infolge Querkzug, so dass in diesem Modell bis auf einen Fall Druck- und Zugstrebe gleichzeitig versagen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass orthotrope Modelle, bzw. Modelle, die das orthotrope Verhalten nach Rissbildung zutreffend berücksichtigen, für die Abbildung des Schubtragverhaltens besser geeignet zu sein scheinen. Die Abbildung des Nachbruchverhaltens scheint in diesem Zusammenhang wichtiger zu sein als die Wahl eines möglichst genauen Versagenskriteriums. Mit sehr einfachen Bruchkriterien konnten gute Ergebnisse erzielt werden, solange die Anisotropie des Betons nach Rissbildung zutreffend erfasst wurde. Damit sinkt auch die Kalibrierungsaufwand, da

einfachere Modelle über weniger zu definierende Materialparameter verfügen und robuster sind. Die drei Modelle MCTC, SBETA von ATENA sowie das Modell auf Basis der elasto-plastischen Spannungsfeldmethode (EPSF) verhalten sich sehr ähnlich, während das Modell CDP bei Bauteilnachrechnungen auf einen signifikant anderen Trag- und Versagensmechanismus führt.

Die drei Modelle MCTC, SBETA sowie EPSF weisen in der numerischen Simulation ein ähnliches Tragverhalten wie im realen Versuch auf, was sich aus den ähnlich hohen Traglasten sowie der Beanspruchung der Bügel und der richtigen Erfassung des Versagensmechanismus schließen lässt. Daher wurde im Anschluss das Modelltragverhalten genauer analysiert, um hieraus Rückschlüsse auf das reale Tragverhalten zu ziehen. Bei allen Modellen konnte grundsätzlich ein fachwerkähnliches Tragverhalten mit einer Rotation der Druckstreben beobachtet werden, welche abhängig vom Schubbewehrungsgrad ist. Die Analyse der Nachrechnungen weist neben der Fachwerkwirkung auf einen weiteren Betontraganteil in Form einer Sprengwerk- oder Druckbogenwirkung hin, wobei ein geringerer Schubbewehrungsgrad bewirkt, dass die Sprengwerk- oder Druckbogenwirkung gegenüber der Fachwerkwirkung zunimmt. Es erfolgt ferner eine stärkere Rotation der Druckstreben bzw. die Risse werden flacher. Dies haben auch schon LEONHARD [64] sowie GÖRTZ [31], bzw. HEGGER & GÖRTZ, [34] aus Schubversuchen geschlussfolgert. Gleichzeitig lassen sich in Bezug auf die Verteilung und Neigung der Hauptspannungen auch Ähnlichkeiten mit den Spannungsfeldmodellen erkennen. Die Fachwerkanalogie stellt mit der Festlegung eines einheitlichen Druckstrebenwinkels eine Vereinfachung des realen Tragverhaltens dar, das ggf. mit Spannungsfeldmodellen realitätsnäher erfasst werden kann, da hierbei die Hauptdruckspannungen über die Höhe unterschiedlich stark geneigt sind. Die Nachrechnungen von Großversuchen deuten darauf hin, dass Stahlbetonbalken unter Querkraftbeanspruchung ein signifikantes Umlagerungsvermögen besitzen und der Tragmechanismus vom Schubbewehrungsgrad sowie der Höhe der Belastung abhängt.

Anschließend erfolgte in Kapitel 8 ein Vergleich der numerischen Modellierung mit analytischen Modellen. Hierbei zeigt sich, dass das Modell auf Basis der Modified Compression Field Theory die Traglasten am besten annähert. Die auf der klassischen Fachwerkanalogie basierenden Modelle unterschätzen, bzw. die auf der reinen Plastizitätstheorie basierenden überschätzen die Traglast deutlich. Die bisherigen Erkenntnisse machen deutlich, dass dem Zusammenspiel von Schubbewehrungsgrad und Druckfestigkeit in Form einer Berücksichtigung des mechanischen Querkraftbewehrungsgrades bei der Ermittlung des Druckstrebenwinkels Rechnung getragen werden sollte. Gleichzeitig weisen die Ergebnisse der numerischen Berechnungen darauf hin, dass ein Traganteil über Rissreibung, wie REINECK ihn postuliert, im Versagenszustand keine entscheidende Rolle spielen dürfte, wie auch HEGGER & GÖRTZ [31], [34], [35] festgestellt haben. Grund hierfür ist die große Breite der Versagensrisse, die einen nennenswerten Traganteil über Rissreibung fast unmöglich macht. Die numerischen Simulationen bestätigen eher die Annahme eines zusätzlichen Systemtraganteils in Form eines Druckbogens oder Sprengwerks, wie HEGGER & GÖRTZ in [31], [34], [35] bereits als zusätzlichen Schubtraganteil in der ungerissenen Druckzone postulieren. Allerdings ist die Rissreibung in den unteren Belastungsbereichen erforderlich, um die Rotation der Druckstrebe zu ermöglichen. Basierend auf den Beobachtungen wurde ein eigenes Rechenmodell entwickelt und analysiert, das zusätzlich zu einer Fachwerkwirkung einen weiteren Betontraganteil in Form eines Sprengwerks bzw. einer Bogenwirkung enthält, das *Druckbogenmodell (DBM)*. Hierbei wird das vereinfachte Druckbogenmodell

um den Einfluss der horizontalen Druckkraftkomponente aus den schrägen Betondruckstreben im Steg ergänzt. Lage und Größe des Druckbogens werden aus der horizontalen Komponente der Gesamtdruckresultierenden bestimmt. Mithilfe dieses Modells ist eine Abschätzung des zusätzlichen Traganteils möglich. Das Modell wurde bereits in [30] vorgestellt.

9.2 Ausblick und Forschungsbedarf

Die vorliegende Arbeit hat gezeigt, dass die Güte von physikalisch nichtlinearen numerischen Simulationen von Stahlbetonbalken mit Schubversagen neben einer geeigneten Strukturmodellierung primär und in hohem Maß vom verwendeten Materialmodell abhängt. Daher ist für Nachrechnungen von realen Bauteilen, insbesondere wenn es sich um Bauteile mit rechnerischem Schubversagen handelt, eine Überprüfung des verwendeten Programms unerlässlich, insbesondere eine Validierung des zugrundeliegenden Materialmodells. Für die Überprüfung und Bewertung empfiehlt sich die Nachrechnung von Kleinversuchen, wie den Scheibenversuchen von KUPFER, ebenso wie die Nachrechnung von Versuchen an Stahl- bzw. Spannbetonbalken.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Nachrechnungen wie üblich auf Mittelwertniveau durchgeführt. Bei Nachrechnungen von realen Bauwerken ist die Einhaltung des normgemäßen Sicherheitsniveaus zu gewährleisten. Somit ist also die Wahl eines angepassten Sicherheitskonzeptes für nichtlineare Verfahren unabdingbar. Hierzu besteht im Rahmen von nichtlinearen FEM-Simulationen noch Forschungsbedarf, erste Empfehlungen werden in [69] gegeben.

Neben den hier auf ihre Eignung zur Abbildung des Querkrafttragverhaltens von Stahlbetonbalken untersuchten Materialmodellen existiert eine Vielzahl weiterer Modelle, die ebenfalls einer Überprüfung unterzogen werden sollten. Ein vielversprechendes Modell, das grundsätzlich in der Lage ist, anisotropes Materialverhalten abzubilden, ist beispielsweise das Microplane Modell.

Weiterhin besteht Forschungsbedarf zum Einfluss verschiedener Parameter auf das Querkrafttragverhalten. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die grundsätzliche Abhängigkeit des Druckstrebenwinkels vom Schubbewehrungsgrad sowie die Existenz eines davon abhängigen zusätzlichen Systemtraganteils aufgezeigt. Weitere Einflussgrößen, wie z.B. die Schubschlankheit, der Längsbewehrungsgrad, die Art der Lasteinleitung etc. bedürfen noch weiterer Forschung.

Für das hier postulierte Druckbogenmodell besteht ebenfalls die Notwendigkeit weiterer Untersuchungen und Weiterentwicklungen, insbesondere im Hinblick auf seine Eignung für die Bemessung. Bisher wurde das Druckbogenmodell ausschließlich für die Bestimmung der Systemtraglast bestehender Bauteile mit gegebener Bewehrung bei Querkraft eingesetzt.

Literaturverzeichnis

- [1] *CEB-FIP Model Code 1990*, Comité euro-international du béton, 1993.
- [2] *DIN EN 1992-2:2010: Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton und Spannbetontragwerken -Teil 2: Betonbrücken- Bemessungs- und Konstruktionsregeln - Deutsche Fassung EN 1992-2:2005+ AC:2008*, 2010.
- [3] *DIN EN 1992-1-1:2011: Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton und Spannbetontragwerken -Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau - Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004+ AC:2008*, 2011.
- [4] *Richtlinie zur Nachrechnung von Straßenbrücken im Bestand (Nachrechnungsrichtlinie)* Bundesministerium für Verkehr, Bau und Stadtentwicklung, Abteilung Straßenbau, 2011.
- [5] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik*. Springer Nature, 2012.
- [6] BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [7] BAŽANT, Z.: *Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials*. Journal for Engineering Mechanics, 1983.
- [8] BAŽANT, Z., CANER, F., CAROL, I., ADLEY, M. und AKERS, S.: *Microplane Model M4 for Concrete. I: Formulation with Work-Conjugate Deviatoric Stress*. Journal of Engineering Mechanics, 126(9):944–953, September 2000.
- [9] BAŽANT, Z. P.: *Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation*. In: *Fracture mechanics of concrete*. Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- [10] BAŽANT, Z. P. und OH, B.: *Crack band theory for fracture of concrete*. *Materiaux et Constructions*, 16:155–177, 1983.
- [11] BECKMANN, B., SCHICKTANZ, K. und CURBACH, M.: *DEM Simulation of Concrete Fracture Phenomena*. Technische Mechanik, 2014.
- [12] BENTZ, E.: *Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members*. Doktorarbeit, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 2000.
- [13] BORST, R. DE und NAUTA, P.: *Non-orthogonal cracks in a Smeared Finite Element Model*. 1985.
- [14] BROCKS, W.: *Plastizität und Bruchmechanik*. Lecture Notes, 2012.
- [15] CERVENKA, V., JENDELE, L. und CERVENKA, J.: *ATENA Program Documentation - Part 1 - Theory*. Cervenka Consulting, 2015.
- [16] CERVENKA, V., PUKL, R., OZBOLT, J. und ELIGEHAUSEN, R.: *Mesh Sensitivity Effects in Smeared Finite Element Analysis of Concrete Structures*. In: *FRAMCOS 2*, S. 1387–1396., 1995.

- [17] CHEN, W.-F.: *Plasticity in Reinforced Concrete*. J.Ross Publishing Classics, 1982.
- [18] COMI, C. und PEREGO, U.: *Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete*. Internal Journal of Solids and Structures, 38:6427–6454, 2001.
- [19] DARWIN, D. und PECKNOLD, D. A. W.: *Inelastic Model for Cyclic Biaxial Loading of Reinforced Concrete*. Doktorarbeit, 1974.
- [20] DASSAULT SYSTÈMES: *Abaqus 6.13 Documentation*, 2013.
- [21] DUDA, H.: *Heft 419 - Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugeanspruchung*. Techn. Ber., Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1991.
- [22] DVORKIN, E. N., CUITI NO, A. M. und GIOIA, G.: *Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 90:829-844, 1990.
- [23] FEENSTRA, P.: *Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete*. Doktorarbeit, Delft University, 1993.
- [24] FEENSTRA, P. und DE BORST, R.: *A constitutive model for reinforced concrete*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 121(5):587–595, 1995.
- [25] FEENSTRA, P. H. und DE BORST, R.: *A Composite Plasticity Model For Concrete*. Int. J. Solids Structures, 33:707–730, 1996.
- [26] FERNÁNDEZ RUIZ, M. und MUTTONI, A.: *On Development of Suitable Stress Fields for Structural Concrete*. ACI, Structural Journal, vol. 104(n°4):p. 495–502, , 2007.
- [27] *fib Model Code for Concrete Structures 2010*, federation internationale du béton, 2013.
- [28] FITIK, B., KUCHMA, D. A. und REINECK, K.-H.: *DAfStb Heft 597 - Erweiterte Datenbanken zur Überprüfung der Querkraftbemessung für Konstruktionsbetonbauteile mit und ohne Bügel*. Techn. Ber., Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 2012.
- [29] GÖDDE, L.: *Numerische Simulation und Bemessung von Flächentragwerken aus Stahlfaserbeton sowie stahlfaserverstärktem Stahl- und Spannbeton*. Doktorarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 2012.
- [30] GLEICH, P., KATTENSTEDT, S. und MAURER, R.: *Erweitertes Druckbogenmodell für die Bestimmung der Querkrafttragfähigkeit von Stahl- und Spannbetonbalken*. Beton und Stahlbetonbau, 111(5):268–277, 2016.
- [31] GÖRTZ, S.: *Zum Schubrissverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbalken aus Normal- und aus Hochleistungsbeton*. Dissertation, RWTH Aachen, 2004.
- [32] HACKBARTH, B.: *Zur Querkrafttragfähigkeit von Stahl- und Spannbetonträgern mit Bügelbewehrung*. Doktorarbeit, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2015.
- [33] HAN, D. und CHEN, W.: *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag, 1988.
- [34] HEGGER, J. und GÖRTZ, S.: *DAfStb Heft 557 - Querkrafttragfähigkeit von Stahlbeton- und Spannbetonbalken aus Normal- und Hochleistungsbeton*. Techn. Ber., Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 2007.

- [35] HEGGER, J., HERBRAND, M.: *Querkrafttragfähigkeit bestehender Spannbetonbrücken - Einfluss einer nachträglichen externen Vorspannung in Längsrichtung*. BASt Heft B 109, Bergisch Gladbach, 2014.
- [36] HERBRAND, M., KUERES, D., CLASSEN, M. und HEGGER, J.: *Einheitliches Querkraftmodell zur Bemessung von Stahl- und Spannbetonbrücken im Bestand*. Beton und Stahlbetonbau, 111(2):58–67, 2016.
- [37] HILLERBORG, A.: *Analysis of a single crack*. In: *Fracture mechanics of concrete*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1983.
- [38] HILLERBORG, A., MODEER, M. und PETERSSON, P.: *Analysis Of Crack Formation And Crack Growth In Concrete By Means Of Fracture Mechanics And Finite Elements*. Cement And Concrete Research, 6:773–782, 1976.
- [39] HOFSTETTER, G.: *Konstitutive Modellierung von Beton*. In: *Betonkalender 2006*. Ernst und Sohn, 2006.
- [40] HOFSTETTER, G., FEIST, C., LEHAR, H., THEINER, Y., VALENTINI, B. und WINKLER, B.: *Plasticity based crack model and applications*. In: HOFSTETTER, GÜNTER ; MESCHKE, G. (Hrsg.): *Numerical Modeling of Concrete Cracking - CISM Courses an Lectures, vol. 532*. SpringerWienNewYork, 2011.
- [41] HOFSTETTER, G. und MANG, H. A.: *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*. Vieweg, 1995.
- [42] HOFSTETTER, G. und MESCHKE, G.: *Numerical Modeling of Concrete Cracking - CISM Courses an Lectures, vol. 532*. Springer, 2011.
- [43] HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach For Engineering*. Wiley, 2001.
- [44] HORDIJK, D.: *Tensile and Tensile Fatigue Behaviour of Concrete; Experiments, Modelling and Analysis*. Techn. Ber., TNO Building and Construction Research Department of Structural Engineering, 1992.
- [45] HUBER, P.: *Beurteilung der Querkrafttragfähigkeit bestehender Stahlbeton- und Spannbetonbrücken*. Doktorarbeit, Technische Universität Wien, 2016.
- [46] HÄUSSLER-COMBE, U.: *Computational Methods for Reinforced Concrete Structures*. Ernst und Sohn, 2015.
- [47] JIRASEK, M.: *Damage and Smeared Crack Models*. In: HOFSTETTER, GÜNTER ; MESCHKE, G. (Hrsg.): *Numerical Modeling of Concrete Cracking - CISM Courses an Lectures, vol. 532*. SpringerWienNewYork, 2011.
- [48] JIRASEK, M.: *Modeling of Localized Inelastic Deformation - Lecture Notes*. 2013.
- [49] JIRASEK, M. und ZIMMERMANN, T.: *Analysis of Rotating Crack Model*. Journal of Engineering Mechanics, 1998.
- [50] KAUFMANN, W.: *Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces*. Doktorarbeit, Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 1998.

- [51] KIZILTAN, H.: *Zum Einfluss des Druckbogens auf den Schubwiderstand von Spannbetonbalken*. Dissertation, TU Dortmund, 2012.
- [52] KMIĘCIK, P. und KAMINSKI, M.: *Modelling of reinforced concrete structures and composite structures with concrete strength degradation taken into consideration*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 2011.
- [53] KOLLEGER, J. und MEHLHORN, G.: *Experimentelle und Analytische Untersuchungen zur Aufstellung eines Materialmodells für gerissene Stahlbetonscheiben*. Forschungsbericht Nr.6, Gesamthochschule Kassel, 1988.
- [54] KOLMAR, W.: *Beschreibung der Kraftübertragung über Risse in nichtlinearen Finite- Element-Berechnungen von Stahlbetontragwerken*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1985.
- [55] KUHL, E.: *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 2000.
- [56] KUPFER, H.: *Erweiterung der Mörsch'schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit*. In: *Schub-Kolloquium Okt 1962*, 1962.
- [57] KUPFER, H.: *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. In: *DAfStb - Heft 229*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1973.
- [58] LATTE, S.: *Zur Tragfähigkeit von Stahlbeton-Fahrbahnplatten ohne Querkraftbewehrung*. Doktorarbeit, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2010.
- [59] LEE, J. und FENVES, G.: *Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures*. Journal of Engineering Mechanics, 124(8), 1998.
- [60] LEMAITRE, J. und DESMORAT, R.: *Engineering Damage Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [61] LEONHARDT, F.: *Schub bei Stahlbeton und Spannbeton - Grundlagen der neueren Schubmessung*. Beton- und Stahlbetonbau, 72(Heft 11):270–277, 295–302, 1977.
- [62] LEONHARDT, F. und MÖNNIG, E.: *Vorlesungen über Massivbau - Teil 1: Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau*. Springer-Verlag, 1973.
- [63] LEONHARDT, F. und WALTHER, R.: *DAfStb- Heft 151: Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1962.
- [64] LEONHARDT, F. und WALTHER, R.: *DAfStb- Heft 156: Schubversuche an Plattenbalken mit unterschiedlicher Schubbewehrung*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1963.
- [65] LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S. und ONATE, E.: *A Plastic-Damage Model for Concrete*. International Journal of Solids and Structures, 25(3):299–326, 1989.
- [66] MARK, P.: *Zweiachsig durch Biegung und Querkräfte beanspruchte Stahlbetonträger*. Shaker Verlag, 2006.
- [67] MARTI, P., ALVAREZ, M., KAUFMANN, W. und SIGRIST, V.: *Tragverhalten von Stahlbeton - Fortbildungskurs für Bauingenieure*, 1999.

- [68] MAURER, R. und KIZILTAN, H.: *Zum Einfluss des Druckbogens auf den Querkraftwiderstand von Spannbetonbalken*. Bauingenieur, 88:165–176, 4 2013.
- [69] MAURER, R., ZILCH, K., KATTENSTEDT, S., DUNKELBERG, D. und ET AL.: *Heft 1120 - Nachrechnung von Betonbrücken - Verfahren für die Stufe 4 der Nachrechnungsrichtlinie - Tragsicherheitsbeurteilung von Bestandsbrücken*. Forschungsbericht aus dem Forschungsprogramm des Bundesministeriums für Verkehr und digitale Infrastruktur, 2016.
- [70] MAZARS, J.: *A model of a unilateral elastic damageable material and its application to concrete*. Fracture toughness and fracture energy of concrete, 1985.
- [71] MAZARS, J.: *A description of micro and macroscale damage of concrete structures*. International Journal of Fracture, 25:729–737, 1986.
- [72] MEHLHORN, G. und KOLLEGER, J.: *Anwendung der Finite Element Methode im Stahlbetonbau*. In: *Der Ingenieurbau, Rechnerorientierte Baumechanik*,. Ernst und Sohn,, 1995.
- [73] MÜLLER, M.: *Zum schubfesten Anschluss von Druckgurten in Hohlkastenbrücken*. Doktorarbeit, Technische Universität Dortmund, 2016.
- [74] MOËS, N., DOLBOW, J. und BELYTSCHKO, T.: *A finite element method for crack growth without remeshing*. Int. J. Numer. Meth. Engng., 46(1):131–150, Sep. 1999.
- [75] MUTTONI, A.: *Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton*. Doktorarbeit, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1990.
- [76] MUTTONI, A., SCHWARTZ, J. und THÜRLIMANN, B.: *Design of Concrete Structures with Stress Fields*. Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1997.
- [77] NASDALA, L.: *FEM - Formelsammlung Statik und Dynamik*. Springer Vieweg, 2012.
- [78] NGO, D. und SCORDELIS, A.: *Finite element analysis of reinforced concrete beams*. ACI Journal, 64(3):152–163, 1967.
- [79] NIELSEN, M. und HOANG, L.: *Limit Analysis and Concrete Plasticity*. CRC Press Taylor und Francis Group, 2011.
- [80] OLIVER, J.: *A Consistent Characteristic Length For Smearred Crack Models*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:461–474, 1989.
- [81] OLIVER, J.: *Modelling Strong Discontinuities In Solid Mechanics Via Strain Softening Constitutive Equations. Part 1: Fundamentals*. Int. Jouronal of Numerical Methods in Engineering, 39(21):3575–3600, 1996.
- [82] OLIVER, J.: *Modelling Strong Discontinuities In Solid Mechanics Via Strain Softening Constitutive Equations. Part 2: Numerical Simulation*. Int. Jouronal of Numerical Methods in Engineering, 39(21):3601–3623, Nov. 1996.
- [83] OTTOSEN, N.: *A Failure Criterion for Concrete*. Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, (4), , August 1977.
- [84] PÖLLING, R.: *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. Doktorarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 2000.
- [85] PLOS, M.: *Finite Element analysis of reinforced concrete*. Techn. Ber., Chalmers University of Technology, 2000.

- [86] PODGORNIAK-STANIK, B. A.: *The Influence of Concrete Strength, Distribution of Longitudinal Reinforcement, Amount of Transverse Reinforcement and Member Size on Shear Strength of Reinforced Concrete Members*. Diplomarbeit, University of Toronto, 1998.
- [87] REINECK, K.-H.: *Ein mechanisches Modell für den Querkraftbereich von Stahlbetonbauteilen*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 1990.
- [88] REINECK, K.-H., KUCHMA, D. A. und FITIK, B.: *Erweiterte Datenbanken zur Überprüfung der Querkraftbemessung für Konstruktionsbetonbauteile mit und ohne Bügel, DAfStb Heft 597*. Beuth Verlag, Berlin, 2012.
- [89] REINHARDT, H., CORNELISSEN, H. und HORDIJK, D.: *Tensile Tests and Failure Analysis of Concrete*. Journal of Structural Engineering, ACSCE, S. 2462–2477, 1986.
- [90] ROTS, J.: *computational modeling of concrete fracture*. Doktorarbeit, Delft University of Technology, 1988.
- [91] RUPF, M.: *Querkraftwiderstand von Stahlbeton- und Spannbetonträgern mittels Spannungsfeldern*. Doktorarbeit, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2014.
- [92] SAGASETA ALBAJAR, J.: *The influence of aggregate fracture on the shear strength of reinforced concrete beams*. Doktorarbeit, Imperial College London, 2008.
- [93] SIMO, J. und HUGHES, T.: *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, 1998.
- [94] SOUZA NETO, E. DE, PERIC, D. und OWEN, D.: *Computational Methods for Plasticity*. John Wiley und Sons, 2008.
- [95] STEIN, E. und BARTHOLD, F.-J.: *Elastizitätstheorie*. Universität Hannover; Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, 1997.
- [96] SYSTÈMES, D.: *Abaqus 6.13 Documentation*, 2013.
- [97] THÜRLIMANN, B., MARTI, P., PRALONG, J., RITZ, P. und ZIMMERLI, B.: *Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton, Institut für Baustatik und Konstruktion*,. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.
- [98] TRUNK, B.: *Einfluß der Bauteilgröße auf die Bruchenergie von Beton*. Doktorarbeit, ETH Zürich, 1999.
- [99] ČERVENKA, J.: *Discrete crack modeling in concrete structures*. Doktorarbeit, University of Colorado, Boulder,, 1994.
- [100] VECCHIO, F. J. und COLLINS, M. P.: *The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*. ACI Journal, 1986.
- [101] VERMEER, P. und DE BORST, R.: *Non-associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock*. Techn. Ber. 29-3, HERON, 1984.
- [102] WALRAVEN, J.: *Aggregate interlock: A theoretical and experimental analysis*. Doktorarbeit, TU Delft, 1981.
- [103] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

- [104] ZIENKIEWICZ, O. und TAYLOR, R.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics - Sixth edition*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [105] ZINK, M.: *Zum Biegeschubversagen schlanker Bauteile aus Hochleistungsbeton mit und ohne Vorspannung*. Dissertation, Universität Leipzig, 1999.

Tabellenverzeichnis

5.1	Grundwert der Bruchenergie nach MODEL CODE 1990 in Abhängigkeit vom Größtkorndurchmesser	94
5.2	Vergleich verschiedener Ansätze für die Bruchenergie in N/m	95
7.1	Betonkennwerte Balken ET2 & ET3	153
7.2	Materialparameter des Bewehrungsstahls ET2 & ET3	153
7.3	Versuchs- und Querschnittswerte ET2 & ET3	155
7.4	Betonkennwerte der Balken TA-Serie	156
7.5	Materialparameter des Bewehrungsstahls TA-Serie	156
7.6	Versuchs- und Querschnittswerte TA-Serie	158
7.7	Kennwerte des Materialmodells CDP	159
7.8	Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3 mit CDP	161
7.9	Vergleich der Bruchlasten der Balken TA11, TA12 und TA15 mit CDP	169
7.10	Maximale plastische Verzerrungen der Elemente 366, 828 & 831 mit CDP	171
7.11	Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3 mit MCTC	177
7.12	Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3	184
7.13	Vergleich der Bruchlasten der Balken TA11, TA12 & TA15 mit MCTC	184
7.14	Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3 mit SBETA	196
7.15	Vergleich der Bruchlasten der Balken TA11,TA12 und TA15 mit SBETA	202
7.16	Vergleich der Bruchlasten der Balken ET2 und ET3	211
7.17	Vergleich der Bruchlasten der Balken TA11,TA12 und TA15	214
7.18	Vergleich der Bruchlasten mit verschiedenen Materialmodellen	218
7.19	Vergleich $V_{u,test}/V_{u,FEM}$ mit verschiedenen Materialmodellen	219
7.20	Vergleich der Risswinkel in Grad mit verschiedenen Materialmodellen	222
7.21	Bezogene Bruchlasten und Druckstrebenwinkel der verschiedenen Versuche	231
8.1	Vergleich $V_{u,calc}$ zu $V_{u,test}$ für Balken ET2	236
8.2	ET2 v_u , $\cot \theta$ und θ	236
8.3	Vergleich der realen Querkrafttragfähigkeit $V_{u,test}$ mit $V_{u,calc}$ nach der Fachwerktheorie mit Rissreibung gem. DIN EN 1992-1/NA für Balken ET2	237
8.4	ET2: Vergleich von v_u , $\cot \theta$ und θ aus dem Versuch mit FEM-Berechnungen	239

Abbildungsverzeichnis

2.1	Deformation eines Körpers	8
2.2	Spannungen in der Referenz- und der Momentankonfiguration	13
2.3	Haigh-Westergaard -Koordinaten und deviatorische Ebene	17
3.1	Linearisierung einer Funktion	32
3.2	Elementdimensionen	35
3.3	Volumenelement mit verschiedenen Ansatzfunktionen (aus [77])	36
3.4	Schublocking und fehlendes Schublockings bei reduzierter Integration (aus [77])	37
3.5	Maßnahmen zur Behebung des Schublockings (aus [77])	38
4.1	Verknüpfung von Spannungen und Verzerrungen	39
4.2	Konzept der äquivalenten einaxialen Verzerrungen	50
4.3	Vergleich zwischen elastischem und plastischem Verhalten	50
4.4	Additive Zerlegung der Verzerrungen	51
4.5	Energiedissipation, entnommen aus [94]	53
4.6	Fließbedingungen	55
4.7	Plastische Potentialfunktion	57
4.8	Dilatanz (entnommen aus [17])	58
4.9	Isotrope und kinematische Verfestigung	59
4.10	Return-Mapping-Algorithmus: elastischer und plastischer Zustand	62
4.11	Konzept der effektiven Spannungen	62
5.1	Verhalten von Beton unter einaxialem Druck	66
5.2	Verhalten von Beton unter einaxialem Zug, nach [41]	67
5.3	Einfluss der Probenlänge	67
5.4	Versagenskurve nach KUPFER[57]	68
5.5	Spannungs-Dehnungs-Linien nach [57]	69
5.6	Versagensfläche für dreidimensionale Spannungszustände [72]	70
5.7	Entwicklung der Bruch- und Fließflächen von Beton, nach [17]	71
5.8	Meridiane und Deviatorebene der Betonbruchfläche nach [17]	72
5.9	MOHR-COULOMB-Bruchkriterium	73
5.10	MOHR-COULOMB-Bruchkriterium im dreidimensionalen Hauptspannungsraum	74
5.11	MOHR-COULOMB-Bruchkriterium in Meridian- und Deviatorebene	75
5.12	Anpassung DRUCKER-PRAGER an MOHR-COULOMB, in Anlehnung an [94]	76
5.13	Reibungswinkel für Beton [aus [79]]	77
5.14	modifiziertes MOHR-COULOMB-Kriterium	78

5.15	Vergleich des modifizierten MC-Kriteriums mit Versuchswerten [aus [79]]	79
5.16	OTTOSEN-Versagenskriterium bei niedrigen und hohen Spannungszuständen	81
5.17	Einfluss des Formfaktors K auf die Form der Versagensfläche	81
5.18	Einfluss des Formfaktors K auf die Form des deviatorischen Schnittes	82
5.19	Deviatorflächen bei niedrigen und hohen Spannungszuständen	82
5.20	Vergleich des OTTOSEN-Versagenskriteriums mit der Versagenskurve nach KUPFER	83
5.21	HSIEH-TING-CHEN-Versagenskriterium	84
5.22	Vergleich des HSIEH-TING-CHEN-Versagenskriteriums mit der Versagenskurve nach KUPFER	84
5.23	MENÉTRY-WILLAM-Versagenskriterium, angepasst an RANKINE und MOHR-COULOMB	85
5.24	MOHRscher Spannungskreis	87
5.25	Darstellung verschiedener Versagenskriterien im $\tau - \sigma$ -Raum	88
5.26	Brucharten	88
5.27	Rissmodelle für inelastische Materialien	90
5.28	Zugtragverhalten von Beton mit Ausbildung einer Bruchprozesszone, in Anlehnung an [29]	91
5.29	$\sigma - \varepsilon$ -Beziehung	97
5.30	Rissmodellierung mit der FEM	99
5.31	Wahl der charakteristischen Länge, entnommen aus [48]	111
5.32	Zugstab; alle Elemente mit plastischem Materialgesetz	112
5.33	Spannungs-Verformungs- sowie Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Zugstabes - alle Elemente gerissen	113
5.34	Energiedissipation ohne Lokalisierung	113
5.35	Zugstab; eine Elementreihe mit plastischem Materialgesetz	114
5.36	Spannungs-Verformungs- sowie Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Zugstabes mit Rissband 50 mm	114
5.37	Energiedissipation mit Rissband 50mm	115
5.38	Zugstab mit 3 Elementen modelliert	115
5.39	Spannungs-Verformungs- sowie Spannungs-Dehnungs-Verhalten mit Rissband 50 mm bei 3 Elementen	116
5.40	Energiedissipation mit Rissband 50 mm	116
5.41	Spannungs-Verzerrungs-Gesetze für Beton	117
5.42	Tension Stiffening & Tension Softening (aus [84])	121
5.43	Unterschiedliche Varianten der Bewehrungsmodellierung (aus [29])	122
5.44	Layerement mit Bewehrung	123
6.1	Versagenskriterium CDP	127
6.2	Fließregel mit DRUCKER-PRAGER-Funktionen	128
6.3	Numerische Simulation der KUPFER-Versuche	131
6.4	Bruchkurven auf der Grundlage der KUPFER-Versuche	132
6.5	Spannungs-Dehnungs-Kurven für zweiachiale Druckbeanspruchung, $\sigma_1/\sigma_2 = 1/0,52$	133
6.6	Spannungs-Dehnungs-Linie Zug mit anschließender Druckbeanspruchung	134

6.7	Zug- und Druckbeanspruchung bei behinderter Verformung in Zugrichtung	134
6.8	Spannungs-Dehnungs-Linie Zug mit anschließender Zugbeanspruchung senkrecht dazu	135
6.9	Auswirkungen der isotropen Entfestigung auf Aufnahme von Druckspannungen	136
6.10	Fließ- und Bruchkurve CDP	136
6.11	Spannungs-Dehnungs-Linie für Druck- und Querkzugbeanspruchung mit dem Verhältnis $-1/0,202$	137
6.12	Umsetzung des RANKINE-Kriteriums mit MENÉTRY-WILLAM-Fließregel	139
6.13	MCTC-Modell	140
6.14	Vergleich der KUPFER-Kurve mit dem MCTC-Modell	141
6.15	Fixed und Rotated Crack Modell	143
6.16	Definition der Rissbandbreite [15]	143
6.17	Definition des Shear Retention Faktors [15]	144
6.18	Abminderung der Druckfestigkeit infolge Querkzugdehnungen [15]	144
6.19	Bruchkurve ATENA im Vergleich mit KUPFER	145
6.20	Spannungs-Dehnungslinien ATENA unter verschiedenen Druckspannungsverhältnissen	145
6.21	Starr-plastisches Spannungsfeld (aus [91])	147
6.22	Annahmen der MCFT (aus [58])	148
6.23	Elasto-Plastisches Spannungsfeldmodell (aus [26])	149
6.24	Dreieckselement für Beton	150
7.1	Versuchsträger ET-Serie	153
7.2	Last-Verformungskurven ET2 & ET3	154
7.3	Rissbilder der Versuchsträger der ET-Serie	154
7.4	Versuchsträger TA-Serie	155
7.5	Last-Verformungskurven TA-Serie	157
7.6	Rissbilder der Versuchsträger der TA-Serie	157
7.7	ABAQUS-Strukturmodell des Balkens ET3	160
7.8	Last-Verformungskurven des Balkens ET3 mit dem CDP-Modell	161
7.9	Flächenplot der Hauptdruckspannungen des Balkens ET3 mit CDP	162
7.10	Flächenplot der maximalen plastischen Dehnungen des Balkens ET3 mit CDP	162
7.11	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET3 mit CDP	163
7.12	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen sowie plastische Betondehnungen in z -Richtung	163
7.13	Trajektorien der maximalen plastischen Dehnungen des Balkens ET3 mit CDP	164
7.14	Hauptdruckspannungstrajektorien des Balkens ET3 mit CDP	164
7.15	Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens ET3 mit CDP	164
7.16	Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens ET3 mit CDP und $2,0f_{ct}$	165
7.17	Einfluss des Viskositätsparameters auf die Last-Durchbiegungskurve des Balkens ET3	166
7.18	Einfluss des Viskositätsparameters auf die $\sigma - \varepsilon$ -Beziehung	166
7.19	Last-Verformungskurven des Balkens ET2 mit dem CDP-Modell	167

7.20	Plastische Hauptzugdehnungen und Hauptdruckspannungen im Beton des Balkens ET2 mit CDP	168
7.21	Maximale plastischen Dehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens ET2 mit CDP	168
7.22	Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens ET2 mit CDP	169
7.23	Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen von ET2 mit CDP	169
7.24	Elemente 828 und 831	171
7.25	Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen der Elemente 831, 828 & 366	172
7.26	Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen der betrachteten Elemente	173
7.27	Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen mit $1,0f_{ct}$ sowie $2,0f_{ct}$	174
7.28	Hauptspannungen und -verzerrungen aller Elemente mit $1,0f_{ct}$ sowie $2,0f_{ct}$	175
7.29	Last-Verformungskurven des Balkens ET3 mit dem MCTC-Modell	178
7.30	Maximale plastischen Betondehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens ET3 mit MCTC	178
7.31	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET3 mit MCTC	179
7.32	Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens ET3 mit MCTC	180
7.33	Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens ET3 mit MCTC	180
7.34	Hauptdruckspannungen des Balkens ET3 mit $\sigma_{II} \leq 0,75f_{cm}$	181
7.35	Last-Verformungskurven des Balkens ET2 mit dem MCTC-Modell	181
7.36	Maximale plastischen Betondehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens ET2 mit MCTC	182
7.37	Hauptdruckspannungen des Balkens ET2 mit $\sigma_c \leq 1,0f_{cm}$ bzw. $\sigma_c \leq 0,75f_{cm}$	182
7.38	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET2 mit MCTC	182
7.39	Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens ET2 mit MCTC	183
7.40	Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens ET2 mit MCTC	183
7.41	Last-Verformungskurven des Balkens TA11 mit dem MCTC-Modell	185
7.42	Maximale plastischen Betondehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens TA11 mit MCTC	185
7.43	Hauptdruckspannungen mit $\sigma_c \leq 1,0f_{cm}$ bzw. $\sigma_c \leq 0,75f_{cm}$	186
7.44	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA11 mit MCTC	186
7.45	Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens TA11 mit MCTC	186
7.46	Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen des Balkens TA11 mit MCTC	187
7.47	Last-Verformungskurven des Balkens TA12 mit dem MCTC-Modell	187

7.48	Maximale plastischen Betondehnungen und Hauptdruckspannungen des Balkens TA12 mit MCTC	188
7.49	Hauptdruckspannungen von TA12 mit $\sigma_c \leq 1,0f_{cm}$ bzw. $\sigma_c \leq 0,75f_{cm}$	188
7.50	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA12 mit MCTC	188
7.51	Trajektorien der maximalen plastischen Betondehnungen und -spannungen des Balkens TA12 mit MCTC	189
7.52	Trajektorien der Hauptdruckspannungen TA12 im Vergleich zu TA11	189
7.53	Analyse der Spannungen in Betonelement 827 mit MCTC	190
7.54	Entwicklung der Hauptspannungen und -verzerrungen ET3 in Betonelement 827	191
7.55	Entwicklung der Betonhauptspannungen und Bügelspannungen ET3	191
7.56	Entwicklung der Haupt- und Koordinatenspannungen ET3	192
7.57	Entwicklung der Haupt- und Koordinatenspannungen ET3 über ε	192
7.58	Abfall der Schubsteifigkeit infolge plastischen Fließens	193
7.59	ATENA-Strukturmodell der Balken ET2 und ET3	195
7.60	Last-Verformungskurven des Balkens ET3 mit dem SBETA Fixed Crack & Rotated Crack Modell	196
7.61	Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens ET3 mit SBETA Rotated Crack Modell	197
7.62	Rissbild des Balkens ET3 mit SBETA Rotated Crack Modell	197
7.63	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET3 mit SBETA	198
7.64	Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens ET3 mit SBETA Fixed Crack Modell und variablen Shear Retention Faktor	198
7.65	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET3 mit SBETA Fixed Crack Modell, variablen Shear Retention Faktor	199
7.66	Last-Verformungskurven des Balkens ET2 mit dem SBETA Fixed Crack & Rotated Crack Modell	200
7.67	Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens ET2 mit SBETA Rotated Crack Modell	200
7.68	Rissbild des Balkens ET2 mit SBETA Rotated Crack Modell	201
7.69	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens ET2 mit SBETA Fixed Crack Modell	201
7.70	ATENA-Strukturmodell der Balken TA11, TA12 und TA15	201
7.71	Last-Verformungskurven des Balkens TA11 mit dem SBETA Rotated Crack Modell	202
7.72	Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens TA11 mit SBETA Rotated Crack Modell	203
7.73	Rissbild des Balkens TA11 mit SBETA Rotated Crack Modell	203
7.74	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA11 mit SBETA Rotating Crack Modell	204
7.75	Last-Verformungskurven des Balkens TA12 mit dem SBETA Rotated Crack Modell	204
7.76	Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens TA12 mit SBETA Rotated Crack Modell	205
7.77	Rissbild des Balkens TA12 mit SBETA, Rotated Crack Modell	205

7.78	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA12 mit SBETA Rotating Crack Modell	206
7.79	Last-Verformungskurven von TA15 mit dem SBETA Rotated Crack Modell	207
7.80	Flächenplot der Hauptdruckspannungen sowie Hauptzugdehnungen des Balkens TA15 mit SBETA Rotated Crack Modell	207
7.81	Rissbild des Balkens TA15 mit SBETA Rotated Crack Modell	207
7.82	Plastische Bügeldehnungen und Bügelspannungen des Balkens TA15 mit SBETA Rotating Crack Modell	208
7.83	Ergebnisse der Nachrechnungen mit dem Materialmodell SBETA am Plastizitätskreis	209
7.84	Strukturmodell des Balkens ET3 mit dem EPSF-Modell	210
7.85	Last-Verformungskurven des Balkens ET3 mit dem EPSF-Modell	211
7.86	Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckfestigkeit des Balkens ET3 mit EPSF	212
7.87	Last-Verformungskurven des Balkens ET2 mit dem EPSF-Modell	213
7.88	Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckfestigkeit des Balkens ET2 mit EPSF	213
7.89	Last-Verformungskurven des Balkens TA11 mit dem EPSF-Modell	214
7.90	Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckfestigkeit des Balkens TA11 mit EPSF	215
7.91	Last-Verformungskurven des Balkens TA12 mit dem EPSF-Modell	215
7.92	Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckfestigkeit des Balkens TA12 mit EPSF	216
7.93	Last-Verformungskurven des Balkens TA15 mit dem EPSF-Modell	216
7.94	Hauptdruckspannungen sowie Bügelspannungen und Ausnutzung der Betondruckstrebe des Balkens TA15 mit EPSF	217
7.95	Vergleich $F_{u,test}/F_{u,FEM}$ in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgrads	219
7.96	Last-Verformungskurven der Balken ET2 & ET3 mit verschiedenen Materialmodellen	220
7.97	Last-Verformungskurven der Balken TA11 & TA12 mit verschiedenen Materialmodellen	220
7.98	Last-Verformungskurven des Balkens TA15 mit verschiedenen Materialmodellen	221
7.99	Trajektorien der Hauptspannungen und Rotation des Druckstrebenwinkels θ	223
7.100	Rotation des Druckstrebenwinkels θ	224
7.101	Entwicklung der Haupt- und Koordinatenspannungen sowie θ von ET3	224
7.102	Rotation der Hauptspannungen infolge zusätzlicher Drucknormalspannung σ_x	225
7.103	Entwicklung der Haupt- und Koordinatenspannung sowie des Hauptspannungswinkels θ bei Balken ET3	225
7.104	Lokales Gleichgewicht am Betonelement	226
7.105	Gleichgewicht der Bügelkräfte mit den Betonspannungen σ_y	226
7.106	Druckstrebenwinkel FEM in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgrades ω_w	227
7.107	Betonspannungen am Sägeschnitt und vertikalem Schnitt	227
7.108	Schub- und Normalspannungen entlang senkrechter Schnitte bei Balken ET3	228
7.109	Gleichgewicht am gerissenen Scheibenelement	229
7.110	Auswertung der Versuche	231

7.111	Lastabtrag über eine umgelenkte Druckstebe nach [75]	232
8.1	Betontraganeil nach LEONHARDT	234
8.2	Traganteile an der Querkrafttragfähigkeit für den Balken ET2 mit $\cot \beta_r = 1,7$	237
8.3	Druckspannungstrajektorien nach EPSF	239
8.4	Über die Höhe veränderlicher Verlauf der Druckspannungstrajektorien	240
8.5	Verlauf der horizontalen Druck- und Schubkraftresultierenden sowie deren Verteilungen nach EPSF in vertikalen Schnitten	241
8.6	Geneigter Druckgurt nach LEONHARDT, aus [61]	242
8.7	Analytisches Fachwerkmodell mit geneigtem Druckgurt	243
8.8	Druckbogenmodell	244
8.9	Horizontale Gesamtdruckkraft sowie Biegedruckkraft und abgeminderte Biegedruckkraft (am halben symmetrischen Balken dargestellt)	245
8.10	Vergleich der Hebelarme z_{M+V} nach FEM und analytischem Modell	245
8.11	Querkrafttragfähigkeit mit dem Druckbogenmodell, Vergleich aus FEM und analytischer Ermittlung	246
8.12	Idealisiertes Fachwerk für Balken ET2	248
8.13	Horizontale Gesamtdruckkraft sowie Querkraftanteil des geneigten Obergurts aus FEM und analytisch nach DBM	248
8.14	$\cot \psi$ bzw. ψ aus Fachwerkberechnung	249
C.1	Vergleich der Bruchlasten für TA11 mit CDP	281
C.2	Höhenplot der maximalen plastischen Dehnungen TA11	282
C.3	Hauptdruckspannungen TA11	282
C.4	Plastischen Bügeldehnungen sowie Bügelspannungen TA11	282
C.5	Überlagerung plastischen Dehnungen des Betons und z-Richtung mit den Bügeldehnungen TA11	283
C.6	Trajektorien der maximalen plastischen Dehnungen TA11	283
C.7	Hauptdruckspannungstrajektorien TA11	283
C.8	Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen TA11	283
C.9	Vergleich der Bruchlasten für TA12	284
C.10	Höhenplot der plastischen Dehnungen und der Hauptdruckspannungen von TA12	284
C.11	Plastischen Bügeldehnungen sowie Bügelspannungen TA12	285
C.12	Trajektorien der plastischen Dehnungen und der Hauptspannungen von TA12	285
C.13	Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen TA12	285
C.14	Vergleich der Bruchlasten für TA15	286
C.15	Höhenplot der plastischen Dehnungen und der Hauptdruckspannungen von TA15	286
C.16	Plastischen Bügeldehnungen sowie Bügelspannungen TA15	287
C.17	Trajektorien der plastischen Dehnungen und der Hauptspannungen von TA15	287

C.18 Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen TA15 287

Anhang A

Kontinuumsmechanische Grundlagen

A.1 Eigenwertproblem

Zur Bestimmung der Eigenwerte eines Tensors wird Gl. (2.47) umgestellt, wodurch man ein homogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Eigenwerte λ_i erhält.

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \hat{\mathbf{n}}_i = \mathbf{0} \quad i=1,2,3; \text{ keine Summation} \quad (\text{A.1})$$

Für $\hat{\mathbf{n}}_i \neq \mathbf{0}$ ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn die Determinante dieses Ausdrucks verschwindet. Es gilt also:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Die Entwicklung der Determinante führt auf das zugehörige *charakteristische Polynom*

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (\text{A.3})$$

deren Lösungen $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ die drei Eigenwerte darstellen. Bei $I_i(\mathbf{A})$ handelt es sich um die sogenannten *Invarianten* des Tensors \mathbf{A} , da diese Werte invariant gegenüber einer Drehung der Bezugsachsen sind. Diese lauten:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{A}) &= A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \text{tr } \mathbf{A} \\ I_2(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2} (A_{ii} A_{jj} - A_{ji} A_{ij}) = \frac{1}{2} [(\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)] \\ &= -(A_{11} A_{22} + A_{22} A_{33} + A_{33} A_{11} + A_{12}^2) + A_{23}^2 + A_{31}^2 \\ I_3(\mathbf{A}) &= \det \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Es gilt aber auch:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \\ I_3(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 müssen die charakteristische Gleichung (A.3) erfüllen; bei den Lösungen des Gleichungssystems aus (2.47) handelt es sich um die orthonormalen Eigenvektoren, die das alternative Basissystem bilden. Erwartungsgemäß sind die Invarianten gleich, unabhängig davon, ob sie mit den Koeffizienten des ursprünglichen Tensors gebildet werden oder mit denen des auf Hauptachsen transformierten Tensors.

Spektralzerlegung Wie erwähnt, lässt sich jeder symmetrische Tensor \mathbf{A} durch seine Eigenwerte λ_i , $i=1,2,3$ sowie die Basis $\hat{\mathbf{n}}_i$, die durch zugehörigen Eigenvektoren $\hat{\mathbf{n}}_i$ definiert ist, darstellen. Die Darstellung des Identitätstensor mittels der orthormierten Basis

$$\mathbf{I} = \hat{\mathbf{n}}_i \otimes \hat{\mathbf{n}}_i$$

eingesetzt in (2.47) führt auf folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I} = (\mathbf{A}\hat{\mathbf{n}}_i) \otimes \hat{\mathbf{n}}_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \hat{\mathbf{n}}_i \otimes \hat{\mathbf{n}}_i \quad (\text{A.6})$$

Die Koeffizientenmatrix ist nur mit den Eigenwerten λ_i besetzt. Wie eingangs erwähnt, führt die Spektralzerlegung oder Hauptachsentransformation auf eine Darstellung des Tensors in einem auf die Hauptachsen gedrehten Basissystem, mit einer nur in der Diagonalen besetzten Koeffizientenmatrix.

A.2 Plastizitätstheorie

A.2.1 Bestimmung des plastischen Multiplikators

Im Falle plastischen Fließens kann der plastische Multiplikator aus der Bedingung $\dot{\Phi} = 0$ ermittelt werden, die aussagt, dass sich der Spannungspunkt während des plastischen Fließens auf der Fließfläche befinden muss. Hierzu wird die Kettenregel angewendet:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.7})$$

Unter Berücksichtigung der additiven Zerlegung der Verzerrungen (4.39), dem elastischen Materialgesetz (4.51) und der Fließregel (4.43) ergibt sich die Rate der Spannungen zu:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{g}) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Mit (4.66) erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{g}) + \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \cdot \mathbf{H} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Für den plastischen Multiplikator ergibt sich somit:

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C} : \mathbf{g} - \partial \Phi / \partial \mathbf{q} \cdot \partial \mathbf{q} / \partial \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{H}} \quad (\text{A.10})$$

A.2.2 Bestimmung der elasto-plastischen Tangente

Im Falle einer Ver- bzw. Entfestigung ändern sich die Steifigkeiten in den einzelnen Belastungsschritten und die Spannungen können inkrementell ermittelt werden. Die hierzu benötigte tangentielle Steifigkeit ergibt sich aus Einsetzen des Ausdruckes für den plastischen Multiplikator in (A.8):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{A.11})$$

mit der tangentialen Steifigkeit:

$$\mathbb{C}^{ep} = \mathbb{C} - \frac{(\mathbb{C} : \mathbf{g}) \otimes \mathbb{C} : (\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma})}{\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C} : \mathbf{g} - \partial\Phi/\partial\mathbf{q} \cdot \partial\mathbf{q}/\partial\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{H}} \quad (\text{A.12})$$

Voraussetzungsgemäß erhält man ohne Ansatz einer Verfestigung kein Spannungszuwachs; idealplastisches Fließen findet ohne Spannungsänderung statt und die elasto-plastische Tangente besitzt die Steigung 0. Die zugehörige Materialsteifigkeitsmatrix ist symmetrisch, sofern es sich um eine assoziierte Fließregel handelt

Anhang B

Umrechnung von Materialkenngrößen

- Rückrechnung der einachsigen Druckfestigkeit aus der Zylinderdruckfestigkeit von Zylindern mit einem Durchmesser $\varnothing 150\text{mm}$ und einer Höhe von 300mm :

$$f_{1c} = 0,95 \cdot f_{cm,cyl} \quad (\text{B.1})$$

mit $f_{cm,cyl} = f_{cm,cyl,150}/300$

- Rückrechnung der einachsigen Druckfestigkeit aus der Würfeldruckfestigkeit von Würfeln mit einer Kantenlänge von 150mm :

$$f_{1c} = 0,75 \cdot f_{cm,cu} \quad (\text{B.2})$$

- Rückrechnung der Zylinderdruckfestigkeit aus der Würfeldruckfestigkeit eines Würfels mit einer Kantenlänge von 150mm :

$$f_{1c} = \frac{0,75}{0,95} \cdot f_{cm,cu,150} = 0,789 f_{cm,cu,150} \quad (\text{B.3})$$

- Rückrechnung der zentrischen Zugfestigkeit aus der Biegezugfestigkeit nach MODEL CODE 2010:

$$f_{ctm} = \frac{0,06 \cdot h_b^{0,7}}{1,0 + 0,06 \cdot h_b^{0,7}} \cdot f_{ctm,fl} \quad \text{mit } h_b \text{ als Höhe in mm} \quad (\text{B.4})$$

- Rückrechnung der zentrischen Zugfestigkeit aus der Spaltzugfestigkeit:

$$f_{ctm} = 0,9 \cdot f_{sp} \quad (\text{B.5})$$

- Rückrechnung der zentrischen Zugfestigkeit aus der Druckfestigkeit:

$$f_{ctm} = 0.302 \cdot (f_{cm,cyl} - 4)^{2/3} \quad (\text{B.6})$$

- Rückrechnung des Elastizitätsmoduls aus der Zylinderdruckfestigkeit:

$$E_{cm} = 22000 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} \quad (\text{B.7})$$

Anhang C

Versuchsnachrechnungen

C.1 Einzelergebnisse der Nachrechnung Versuchsserie 2 mit dem Materialmodell CDP

C.1.1 Ergebnisse TA11

Vergleich der Last-Verformungs-Kurven In Bild C.1 werden die Last-Verformungs-Kurven der numerischen Simulationen mit den Messwerten verglichen. Die in der Grafik C.1 aufgetragenen experimentellen Bruchlasten liegen unter denen in Tabelle ??, da die Messtechnik kurz vor Versagen des Balkens entfernt wurde. Es ist ersichtlich, dass unter Ansatz der realen Zugfestigkeit die Traglast deutlich unterschätzt wird, und sich der Balken in der Simulation deutlich zu weich verhält. Es werden mit 434 bzw. 438,8kN lediglich 64% der Traglast erreicht. Unter Ansatz der doppelten Zugfestigkeit lässt sich zunächst erwartungsgemäß ein zu steifes Verhalten beobachten. Mit zunehmender Rissbildung lässt sich auch hier ein Steifigkeitsabfall beobachten, der Balken versagt bei 80% der Bruchlast im Versuch.

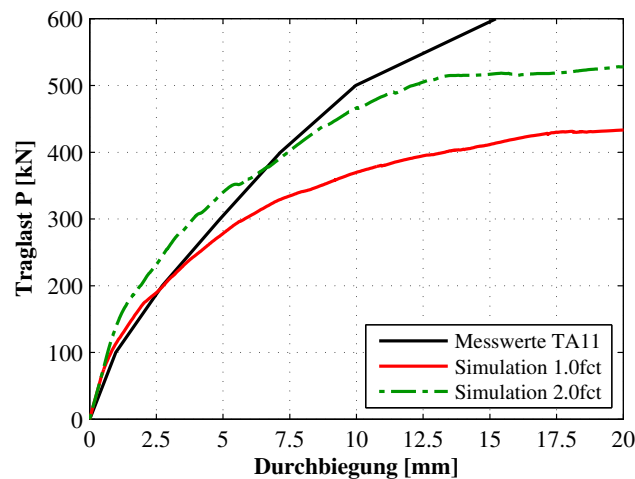


Abbildung C.1: Vergleich der Bruchlasten für TA11 mit CDP

Vergleich der Rissbilder und Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Die Abbildungen C.2 sowie C.3 zeigen die plastischen Hauptzugdehnungen so-

wie die Hauptdruckspannungen vor dem Bruch sowie bei der Maximallast. Wiederum ist die Ausbildung einer direkten Druckstrebe bzw. eines Druckbogens zum Auflager hin erkennbar. Die verschmierte Rissbildung, die fast die gesamte Längsseite des Steges umfasst, ist gut zu erkennen. Das Versagen wird eingeleitet, sobald unterhalb der Gurtplatte plastische Verzerrungen zu einer Einschnürung der Druckstrebe führen.

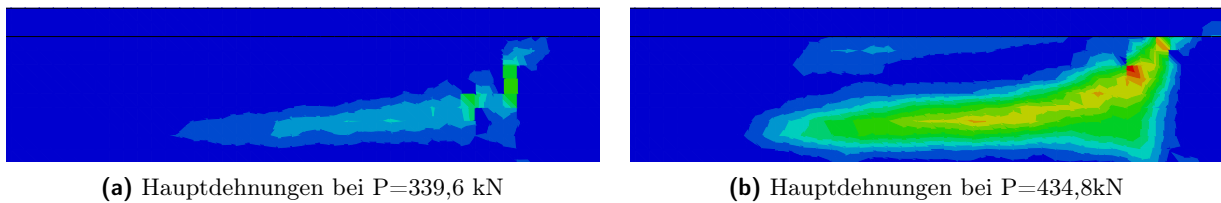


Abbildung C.2: Höhenplot der maximalen plastischen Dehnungen TA11

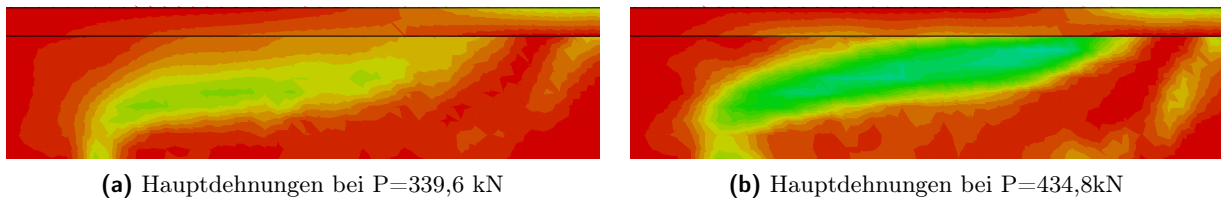


Abbildung C.3: Hauptdruckspannungen TA11

Analyse der BÜGELSPANNUNGEN Auch in diesem Fall wird die Fließdehnung in den BÜgeln nur vereinzelt überschritten. Der Balken versagt somit im Gegensatz zum Versuch wiederum nicht aufgrund des Fließens der BÜgel. Aus C.5 ist erkennbar, dass die plastischen BÜgeldehnungen und damit auch

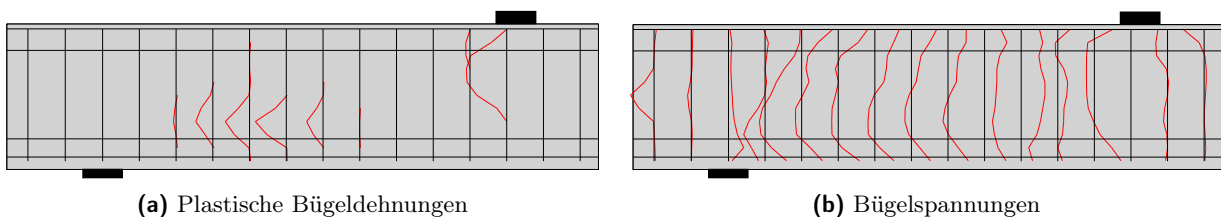


Abbildung C.4: Plastischen BÜgeldehnungen sowie BÜgelspannungen TA11

die größten Spannungen in der Bereichen der größten plastischen Betondehnungen in z-Richtung erreicht werden. Dies spricht wiederum für die These, dass die Beanspruchung der BÜgel sozusagen aus Verträglichkeitsgründen erfolgt.

Analyse des Tragverhaltens / Vergleich des Versagensmechanismus Aus den Druckspannungstrajektorien sowie den Trajektorien der plastischen Hauptdehnungen lässt sich grundsätzlich der schon zuvor beschriebene Versagensmechanismus erkennen, der auf die isotrope Entfestigung zu-

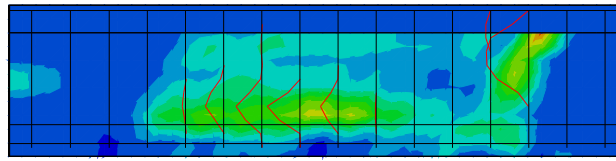


Abbildung C.5: Überlagerung plastischer Dehnungen des Betons und z-Richtung mit den Bügeldehnungen TA11

rückzuführen ist. Das Versagen wird durch die Bildung plastischer Verzerrungen unterhalb der Gurtplatte eingeleitet, die die Druckstrebe einschnüren.

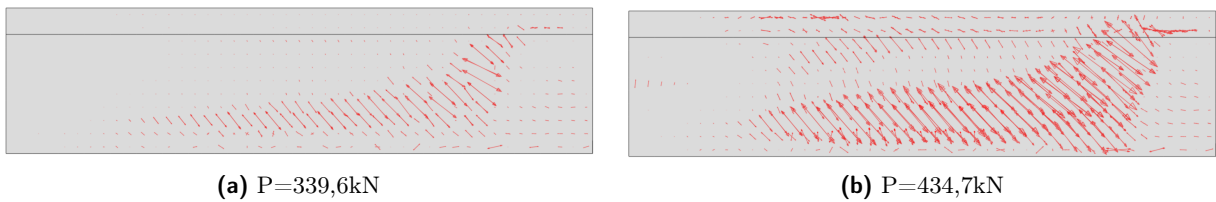


Abbildung C.6: Trajektorien der maximalen plastischen Dehnungen TA11

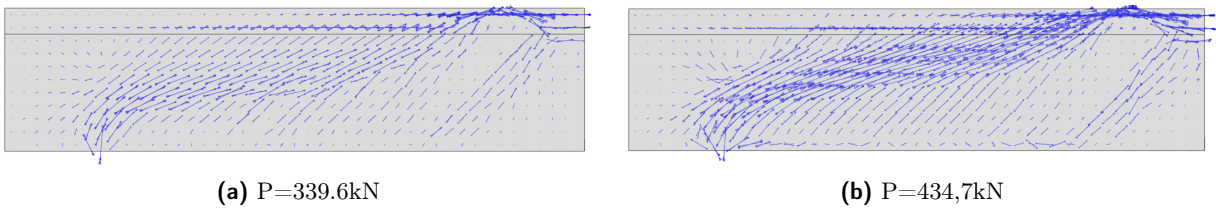


Abbildung C.7: Hauptdruckspannungstrajektorien TA11

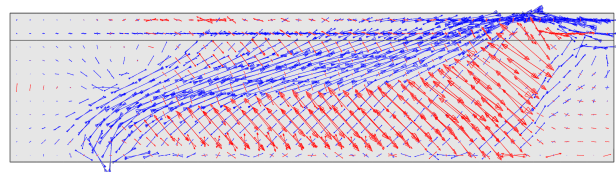


Abbildung C.8: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen TA11

C.1.2 Ergebnisse TA12

Vergleich der Last-Verformungs-Kurven Der Vergleich der Last-Verformungskurven aus dem Versuche mit denen der numerischen Simulation zeigt keine zufriedenstellende Übereinstimmung. Es ist ersichtlich, dass unter Ansatz der realen Zugfestigkeit die Traglast deutlich unterschätzt wird, und sich der Balken in der Simulation deutlich zu weich verhält. Es werden mit 325kN lediglich 60% der

Traglast erreicht. Mit der Verdoppelung der Zugfestigkeit können dagegen 87% der Traglast erreicht werden.

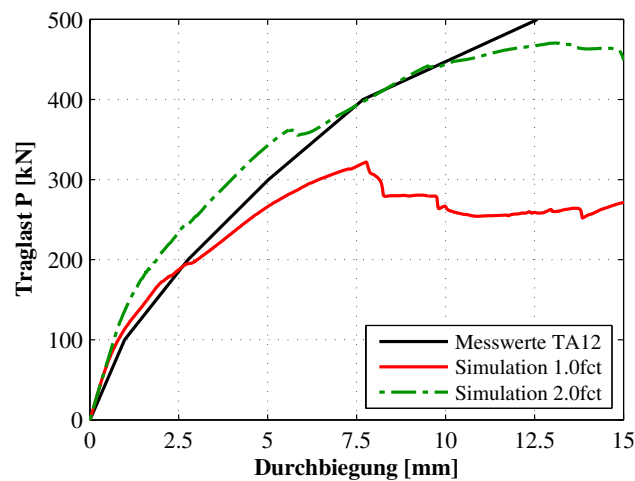


Abbildung C.9: Vergleich der Bruchlasten für TA12

Vergleich der Rissbilder und Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Es handelt sich um das gleiche Tragverhalten wie bei TA11. Die verschmierte Rissbildung sowie die Ausbildung einer direkten Druckstrebe sind in Abbildung C.10 gut zu erkennen.

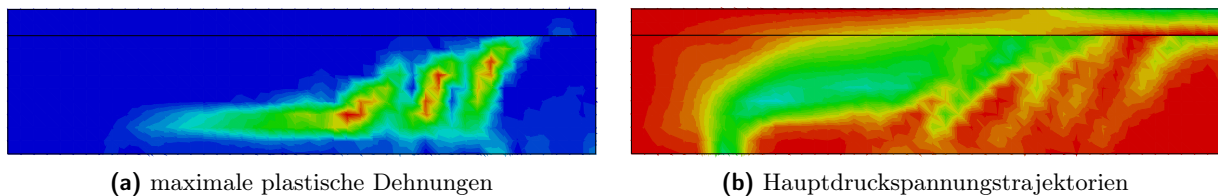


Abbildung C.10: Höhenplot der plastischen Dehnungen und der Hauptdruckspannungen von TA12

Analyse der Bügelspannungen Wie bei TA11 erreichen die Bügel nur bereichsweise die Fließspannung. Die Tragfähigkeit der Bügel ist auch hier nicht die primäre Versagensursache. Der Einfluss des Schubbewehrungsgrades auf die Traglast lässt sich somit nicht über die Bügeltragfähigkeit erklären. Jedoch scheint die geringere Steifigkeit der Bügelbewehrung die Ursache für das schneller eintretende Versagen zu sein. Aufgrund der geringeren Steifigkeit wachsen die Betondehnungen schneller an und es treten deutlicher früher plastische Verzerrungen unterhalb der Gurtplatte auf. Da diese das Versagen bestimmen, führt der geringere Schubbewehrungsgrad im FE-Modell rechnerisch zu einem früheren Versagen.

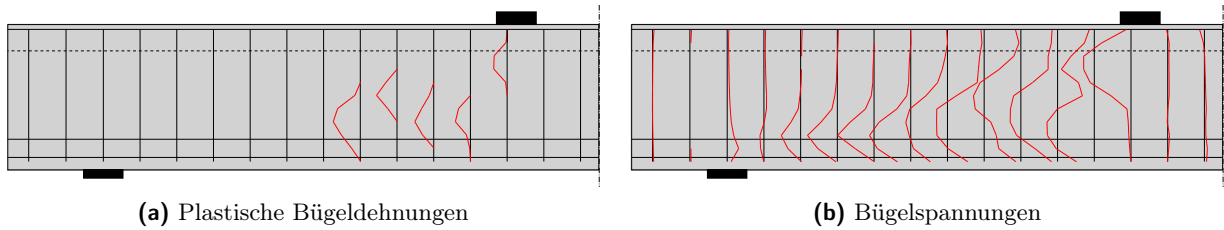


Abbildung C.11: Plastischen Biegeldehnungen sowie Biegelspannungen TA12

Analyse des Tragverhaltens / Vergleich des Versagensmechanismus Es stellt sich derselbe Versagensmechanismus wie bei TA11 ein. Auch hier leitet die Einschnürung der Druckstrebe durch die Entstehung plastischer Verzerrungen unterhalb der Druckplatte das Versagen ein.

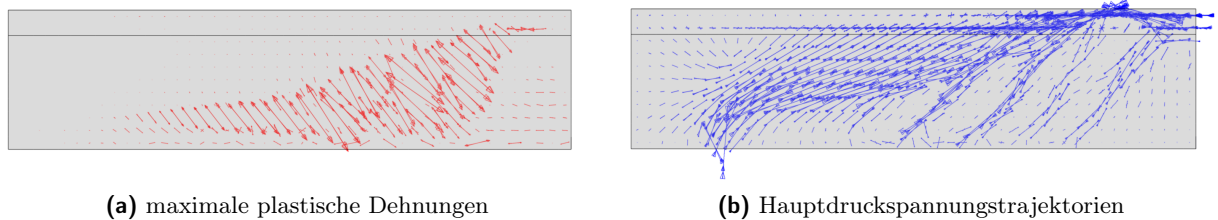


Abbildung C.12: Trajektorien der plastischen Dehnungen und der Hauptspannungen von TA12

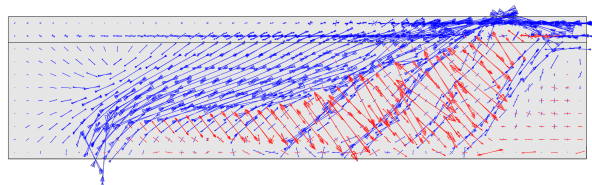


Abbildung C.13: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen TA12

C.1.3 Ergebnisse TA15

Vergleich der Last-Verformungs-Kurven Der Vergleich der Last-Verformungskurven aus dem Versuche mit denen der numerischen Simulation zeigt auch bei TA15 keine zufriedenstellende Übereinstimmung. Die Traglast liegt mit 410kN bei knapp 69% der realen Traglast. Die Verdoppelung der Zugfestigkeit führt zu einer Traglast von 470kN, was knapp 79% der Traglast entspricht.

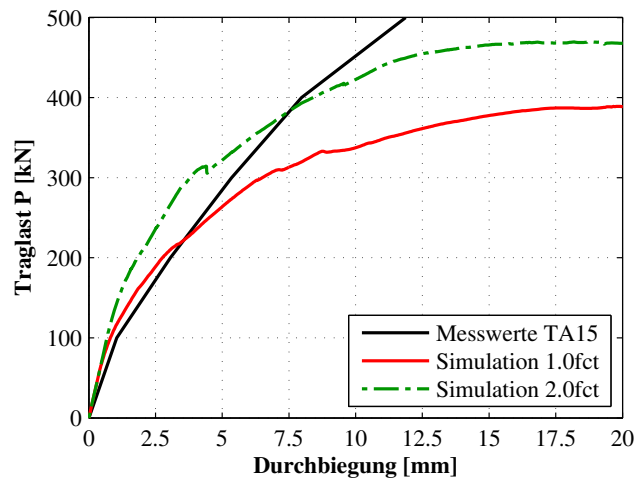


Abbildung C.14: Vergleich der Bruchlasten für TA15

Vergleich der Rissbilder und Analyse der plastischen Dehnungen sowie der maximalen Hauptdruckspannungen Es stellt sich auch bei TA15 ein ähnliches Tragverhalten wie bei TA 11 ein. Die verschmierte Rissbildung sowie die Ausbildung einer direkten Druckstrebe sind in Abbildung C.15 gut zu erkennen. Die größten Dehnungen in den Betonelementen betragen hierbei bis zu 35,0‰. Es findet eine Spannungsumlagerung von den mehr und mehr "gerissenen" Betonelementen in die direkte Druckstrebe statt.

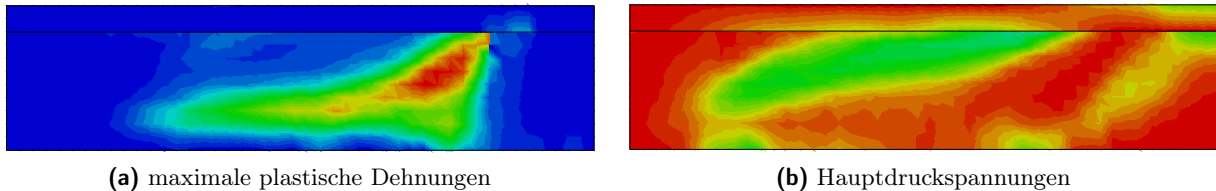


Abbildung C.15: Höhenplot der plastischen Dehnungen und der Hauptdruckspannungen von TA15

Analyse der Bügelspannungen Die Analyse der Bügelspannungen stimmt mit vorherigen Beobachtungen überein. Die Fließspannung wird nur bereichsweise überschritten; das Fließen der Bügel ist somit nicht die primäre Versagensursache. Die gleichmäßigere Spannungsverteilung über die Höhe deutet jedoch darauf hin, dass die Bügel aufgrund der höheren Traglast im Vergleich zu TA12 insgesamt höher beansprucht werden.

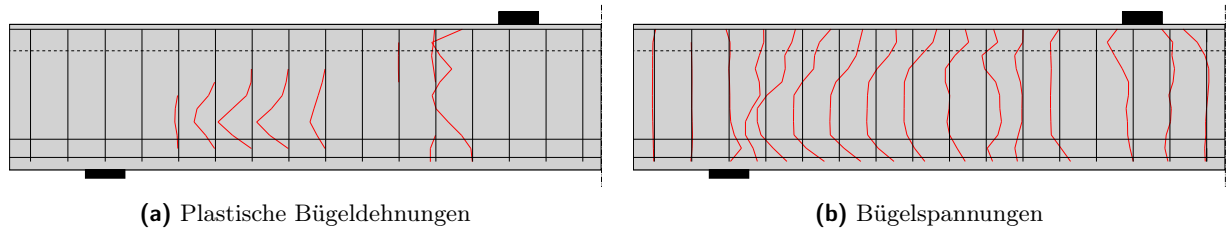


Abbildung C.16: Plastischen Biegeldehnungen sowie Biegelspannungen TA15

Analyse des Tragverhaltens / Vergleich des Versagensmechanismus In Bild C.17 werden die Hauptdruckspannungen sowie die Trajektorien der plastischen Hauptzugdehnungen dargestellt. Es lässt sich das bekannte Tragverhalten aufgrund der isotropen Entfestigung beobachten.

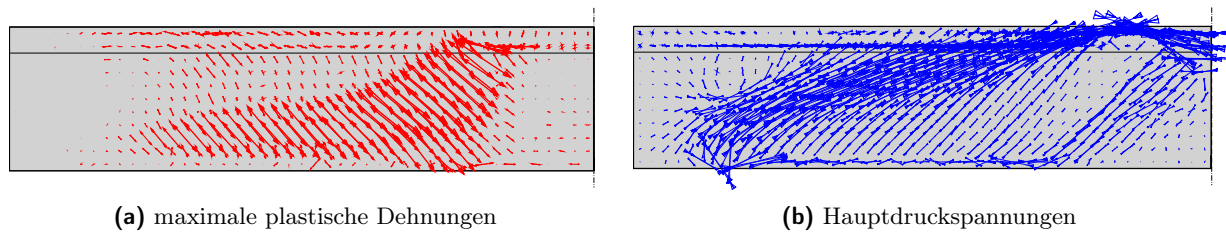


Abbildung C.17: Trajektorien der plastischen Dehnungen und der Hauptspannungen von TA15

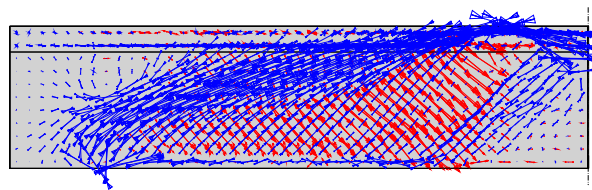


Abbildung C.18: Überlagerung der Trajektorien der Hauptdruckspannungen und plastischen Hauptdehnungen TA15

Einfluss der Zugfestigkeit Der positive Einfluss einer höheren Zugfestigkeit lässt sich an der Größe der plastischen Verzerrungen ablesen, die einen direkten Einfluss auf die Entfestigung besitzen. Bei einer Laststufe von 410kN, die der Maximallast der Simulation mit $1,0f_{ct}$ entspricht, beträgt die maximale plastische Hauptverzerrung bei Verdoppelung der Zugfestigkeit nur knapp 12‰ im Gegensatz zu gut 34‰ aus der Rechnung mit $1,0f_{ct}$. Auch bei Erreichen der Maximallast von 470kN bei Verwendung von $2,0f_{ct}$ sind die plastischen Verzerrungen im Beton mit knapp 27‰ deutlich geringer.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Simone Kattenstedt, geb. Frass
Geburtsdatum	22.08.1979
Geburtsort	Dortmund
Staatsangehörigkeit	deutsch

Schulbildung & Studium

08 1986 – 06 1990	Hellweg-Grundschule Dortmund
08 1990 – 06 1999	Immanuel-Kant-Gymnasium Abschluss: Abitur (Note 1,1)
10 1999 – 02 2006	Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Universität Dortmund Vertiefung: Konstruktiver Ingenieurbau Abschluss: Diplom (Note 1,9)

Beruflicher Werdegang

01 2002 – 07 2005	Lederhose, Wittler & Partner GbR Studentische Hilfskraft
04 2006 – 06 2007	HOCHTIEF Consult Building, Frankfurt Projektingenieurin in der Tragwerksplanung
07 2006 – 07 2010	HOCHTIEF Consult Infrastructure, Essen Projektingenieurin im Bereich Ingenieur- und Brückenbau
08 2010 – 02 2016	TU Dortmund, Lehrstuhl Betonbau Wissenschaftlicher Mitarbeiterin
seit 03 2016	HOCHTIEF Consult Infrastructure, Essen Projektingenieurin im Bereich Ingenieur- und Brückenbau

Stipendien & Auszeichnungen

05|2000 – 09|2005
Februar 2007

Stipendium des Evangelischen Studienwerks e.V. Villigst
Ernst & Sohn-Nachwuchs-Förderpreis für ausgezeichnete
Studienleistungen im Rahmen der Diplomarbeit

Auslandserfahrungen

01|2004 – 02|2004

University of Dar es Salaam
„Workshop on Diagnosis and Rehabilitation of Buildings
of the University of Dar es Salaam“
Universitäre Exkursion

10|2004 – 01|2005

Connell Wagner in Sydney /Australien
Beratendes Ingenieurbüro
Abteilung Tunnelbau und Infrastruktur
Praktikum