Frederike WELSING, Bergische Universität Wuppertal, DE

Argumentationsprozesse beim Verallgemeinern anschaulich dargestellter arithmetischer Gesetzmäßigkeiten

„Also eigentlich sind alle Zahlen ungerade. Aber wenn man die zusammenrechnet sind die gerade.“ (Lukas, 3. Schuljahr)

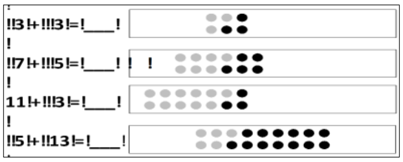

Abbildung 1: Addition ungerader Zahlen

Aus wissenschaftlicher Perspektive würde zur Erklärung und Verifikation dieser Aussage ein Beweis herangezogen werden. Doch an Grundschüler stellt dies eine besondere Herausforderung. Die zugrundeliegenden mathematischen Muster und Strukturen müssen entdeckt, beschrieben und verallgemeinert werden. Vor dem Hintergrund, dass das Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen integraler Bestandteil aller mathematischer Bereiche ist und es eine wesentliche Rolle im Mathematikunterricht einnimmt, sind die Anforderungen der Bildungsstandards (2004) sehr komplex. Neben dem Erkennen und Nutzen von Mustern soll auch die prozessbezogene Kompetenz des Argumentierens entwickelt werden, um Muster und Strukturen zu beschreiben sowie verallgemeinerbare Begründungen für Zusammenhänge zu entwickeln (vgl. KMK (2004), S.7 f.). Während Mathematiker unter Rückgriff auf eine Folge logischer Schlüsse eine Aussage beweisen, stehen Grundschulkindern diese Mittel noch nicht zur Verfügung. Welche Mittel stehen ihnen in der Grundschule im Kontext des Verallgemeinerns zur Verfügung? Wie deuten sie allgemeine arithmetische Strukturen und Gesetzmäßigkeiten? Welche Argumente nutzen sie beim Verallgemeinern dieser Gesetzmäßigkeiten? Und: Welche Rolle nehmen hierbei Anschauungsmittel als Argumentationsmittel ein? Diese Fragestellungen werden innerhalb des Forschungsprojektes detailliert untersucht. Der Beitrag bietet hierfür eine erste theoretische Orientierung.

Schulisches Beweisen

Der Begriff des Beweisens ist in der Literatur nicht eindeutig definiert. Meyer (2007) versteht unter Beweisen, dass „eine Behauptung in gültiger Weise Schritt für Schritt formal deduktiv aus als bekannt vorausgesetzten Sätzen und Definitionen gefolgert [wird]“ (Meyer 2007, S. 21). Aufgrund der Fokussierung einer formal deduktiven Vorgehensweise ist ein solches Beweisverständnis für das schulische Beweisen nicht ausreichend. Müller und Wittmann (1988) fordern eine Loslösung von formal-deduktiven Beweisen zu Gunsten inhaltlich-anschaulicher Darstellungen und unterscheiden drei Typen von Beweisen. Die *‚experimentellen Beweise'*, die *‚inhaltlich-anschaulichen Beweise'* und die *‚formal-deduktiven Beweise*' (Müller &

Wittmann 1988, S. 254). Aufgrund der Lernausgangslage von Grundschulkindern wird im Folgenden auf Ausführungen zu ‚formal-deduktiven Beweisen' verzichtet.

Experimentelle Beweise sind „Veranschaulichungen, Plausibilitätsbetrachtungen, empirische Verifikationen und an Beispielen erläuterte Regeln, die bestimmte Aufgabenfelder erschließen" (Müller & Wittmann 1988, S. 248). Hinsichtlich der Allgemeingültigkeit gibt dies jedoch noch keine absolute Sicherheit. *Inhaltlich-anschauliche Beweise* sind „Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen" (Wittmann & Müller 1988, S. 249). Auch wenn die Prämissen dieses Beweises nicht formal vorliegen, müssen sie dennoch den korrekten, formal gefassten Argumenten entsprechen (vgl. Brunner 2014, S. 18). Es zeigt sich somit ein Umbruch im Beweisverständnis, insbesondere mit der Fokussierung auf das schulische Beweisen. Gleichwohl ist weiterhin eine *allgemeingültige, vollständige Begründung innerhalb eines Beweises* notwendig.

Argumentieren, Begründen und Beweisen

Obwohl das Argumentieren, Begründen und Beweisen unbestritten zum Mathematikunterricht aller Schulstufen gehört und explizit von den Bildungsstandards und Lehrplänen gefordert wird, gibt es in der mathematikdidaktischen Literatur keine einheitliche Begriffsdefinition und auch das Verhältnis zwischen diesen Begriffen ist nicht eindeutig geklärt (vgl. Brunner 2014). Im Wesentlichen gibt es zwei unterschiedliche Ansätze des Begriffsverständnisses. Zum einen wird Argumentieren und Beweisen trennscharf behandelt und zum anderen stehen Argumentieren und Beweisen in einem engen – häufig graduellen - Zusammenhang (vgl. Brunner 2014, S. 29).

Meyer und Prediger (2009) merken an, dass der Begriff des Beweisens eng mit einem axiomatisch-deduktiven und somit formalen Charakter verbunden ist und schlagen vor, den Begriff des Begründens zu verwenden, wenn auch andere Begründungsformen wie der inhaltlich-anschauliche Beweis mitgedacht sind. Die Abgrenzung ist dabei als graduell zu sehen. Unter Argumentieren verstehen sie dabei die soziale und kommunikative Dimension des Begründens (vgl. Meyer & Prediger 2009, S. 3). Der Argumentationsprozess ist dann „ein spezieller interaktiver Prozess [...], der durch zwei Aspekte charakterisiert wird" (Schwarzkopf 2003, S. 212). Der expliziten Einforderung einer Begründung für die mathematische Aussage und der Entwicklung von Begründungen (vgl. Schwarzkopf 2003, S. 212).

Auch Bezold sieht einen engen Zusammenhang und definiert Argumentieren als das Äußern von Vermutungen über mathematische Eigenschaften und

Zusammenhängen, das Hinterfragen dieser sowie das Liefern von Begründungen bzw. Begründungsideen. Das Begründen stellt somit eine argumentative Tätigkeit neben dem *Entdecken*, *Beschreiben* und *Hinterfragen* dar (vgl. Bezold 2009, S. 37 ff.). Eine Kette von Begründungen bzw. logischen Schlüssen bezeichnet sie als Beweis. (vgl. Bezold 2009, S. 71).

Brunner (2014) differenziert den Begriff des Argumentierens aus und schlägt eine Unterscheidung in *'alltagsbezogenes Argumentieren'*, *'Argumentieren mit mathematischen Mitteln'*, *'logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln'* sowie *'formal-deduktives Beweisen'* vor. 'Alltagsbezogenes Argumentieren' folgt den Regeln des jeweiligen Kontextes und nicht unbedingt mathematischen Konventionen, z.B. der Berufung auf Autoritäten. 'Argumentieren mit mathematischen Mitteln' bezieht mathematische Mittel unterschiedlichster Art ein, z.B. ikonische Darstellungen oder Anschauungsmittel, folgt aber nicht notwendigerweise dem logischen Schließen. Ein solch streng logisches Vorgehen kommt erst beim 'logischen Argumentieren mit mathematischen Mitteln' zum Tragen, somit muss trotz logischer Strenge die formale Sprache nicht notwendigerweise genutzt werden. Beim 'formal-deduktiven' Beweisen hingegen wird die Argumentation in deduktiver Weise und einer formalen Sprache dargestellt (Brunner 2014, S.30 ff.). Letzteres ist für die Grundschule aufgrund der Lernausgangslage vernachlässigbar.

Es zeigt sich somit in der aktuellen mathematikdidaktischen Forschung ein Begriffsverständnis, das in unterschiedlicher Weise von einem – meist graduellen – Zusammenhang zwischen Argumentieren und Beweisen ausgeht.

Anschauungsmittel als mathematische Mittel im Argumentationsprozess

Grundschulkinder verfügen nicht über die formale Sprache der Algebra, so können Anschauungsmittel als Erkenntniswerkzeuge sowie als Kommunikations- und Beweismittel innerhalb des Argumentationsprozesses dienen.

Insbesondere vor dem Hintergrund, dass arithmetische Strukturen und Gesetzmäßigkeiten keine konkreten, dinglichen Objekte, sondern *abstrakte, theoretische Objekte* sind, benötigen Kinder diese Medien, um über sie nachdenken und sprechen zu können (vgl. Söbbeke & Steinbring 2007). So sind im obigen Beispiel nicht nur die konkreten Summanden, Ergebnisse und Punktanzahlen von Bedeutung, sondern auch die Beziehung zwischen ihnen, die strukturellen Eigenschaften der Zahlen (in diesem Fall die Paritäten) sowie die Struktur des Punktmusters.

Das Anschauungsmittel (Punktmuster) soll vor diesem Hintergrund dazu dienen, diese abstrakten Beziehungen erkennbar zu machen, Begründungsideen zu entwickeln, aber auch, Verständnisprozesse zu unterstützen. Es repräsentiert in einer empirisch, situierten Kennzeichnung zentrale Aspekte einer strukturell, relationalen Allgemeinheit (vgl. Abb. 2). Lukas steht damit vor der Herausforderung, im Besonderen dieser Anordnung das Allgemeine zu sehen, das heißt zu verstehen, warum die empirisch, situierte Kennzeichnung repräsentativ für die strukturelle, relationale Allgemeinheit ist.

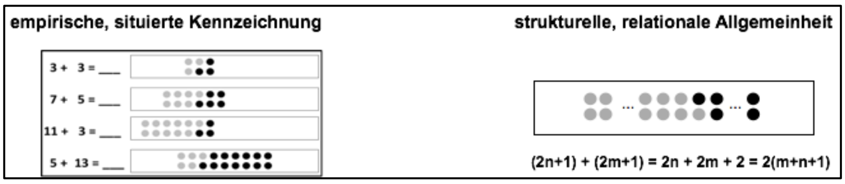

Abbildung 2: Spannungsfeld

Im Fall von Lukas richtet sich das Forschungsinteresse darauf, wie und *ob* er seine eher empirische Beobachtung und Beschreibung zu einer allgemeingültigen Aussage und Begründung weiterentwickelt. Wie nutzt er die Darstellung der Punktmuster? Inwiefern kann die anschauliche Darstellung ihn im Prozess des Verallgemeinerns unterstützen? Welche Aspekte sind beim Argumentieren besonders herausfordernd? Diese theoretische Grundlage bildet den Ausgangspunkt zur detaillierten Betrachtung von Argumentationsprozessen beim Verallgemeinern elementarer mathematischer Gesetzmäßigkeiten bei Grundschulkindern.

Literatur

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote – Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hamburg: Dr. Kovac.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen – Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Heidelberg: Springer.

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4).* München, Neuwied: Wolters Kluwer.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: von der Abduktion zum Argument.* Hildesheim: Franzbecker.

Meyer, M & Prediger, S. (2009): Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. In *PM 51* (30), S. 1-7.

Müller, Gerhard & Wittmann, Erich (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In Bender, P. (Hrsg.): *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter.* Cornelsen, Berlin, S. 237–258.

Schwarzkopf R. (2003): Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. In *JMD,* (2003) 24, S. 211-235.

Söbbeke, E. & Steinbring, H. (2007). Anschauung und Sehverstehen – Grundschulkinder lernen im Konkreten das Abstrakte zu sehen und zu verstehen. In Lorenz, J. H. & Schipper, W. (Hrsg). Hendrik Radatz: *Impulse für den Mathematikunterricht.* Braunschweig. S. 62-68.