Kirsten WOHAK, Martin FRANK, Karlsruhe &
Christina ROECKERATH, Aachen

Komplexe Modellierung: Wie funktionieren eigentlich Animationsfilme und was hat das mit Mathe zu tun?

Viele Aufgaben aus Mathematikbüchern sind nicht authentisch. Es wird häufig so getan, als hätte eine Aufgabenart eines Bereiches der Mathematik mit einem bestimmten Kontext zu tun, wobei sowohl den Schüler/innen als auch den Lehrkräften klar ist, dass es sich schlicht um einen Einkleidungsversuch handelt (vgl. Franke & Ruwisch, 2010, S. 8).

Das Projekt CAMMP (computational and mathematical modeling program) des KIT, Karlsruhe macht sich die Erstellung und Vermittlung authentischer Problemstellungen zur Aufgabe. CAMMP hat sich als Ziel gesetzt, die Relevanz von Mathematik für unser alltägliches Leben (Medizin, Automobilindustrie, Finanzsektor, ...) erfahrbar zu machen. Das heißt, dass Schüler/innen so die Möglichkeit haben, in verschiedenen Angeboten authentische und relevante Problemstellungen mit Hilfe von Mathematik und Computereinsatz selbstständig zu lösen. Hierfür wird der mathematische Modellierungskreislauf verwendet. Das bedeutet, dass mit einem realen Problem gestartet wird, welches durch gezielte Annahmen vereinfacht wird. Dieses vereinfachte Problem wird durch mathematische Beschreibungen in das mathematische Modell überführt, welches mit Hilfe von MATLAB gelöst wird. Die mathematische Lösung wird im letzten Schritt in Bezug auf das Ausgangsproblem interpretiert und validiert. Ist das Ergebnis noch nicht ausreichend zufriedenstellen, so muss der Kreislauf ein weiteres Mal zur Modellverbesserung durchlaufen werden (vgl. Maaß, 2017, S. 15).

Auf eins dieser authentischen und alltagsrelevanten Problemstellungen wird im Folgenden ausführlicher eingegangen: „Wie funktionieren eigentlich Animationsfilme und was hat das mit Mathe zu tun?“

Da Animationsfilme aus einer Abfolge statischer Bilder erstellt werden, musste früher jedes einzelne Bild von Zeichnern gemalt werden. Heutzutage werden Animationen am Computer erstellt. Dabei werden nur noch die für eine Bewegung ausschlaggebenden Bilder, genannt Keyframes, angefertigt. Die Zwischenbilder müssen nicht mehr hergestellt werden, da die Bewegung einzelner Gegenstände zwischen den Keyframes durch Funktionen beschrieben werden. Dies wird Interpolation genannt.

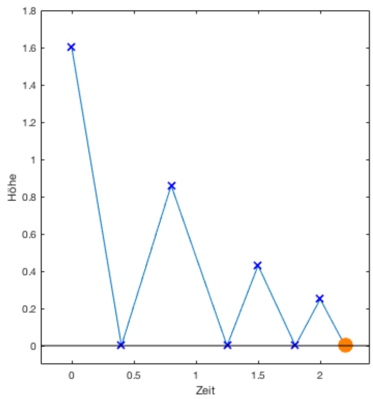
Während des kompletten Workshops wird am Beispiel eines springenden Balles gearbeitet. Das bedeutet, dass bezogen auf den Modellierungskreis-

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

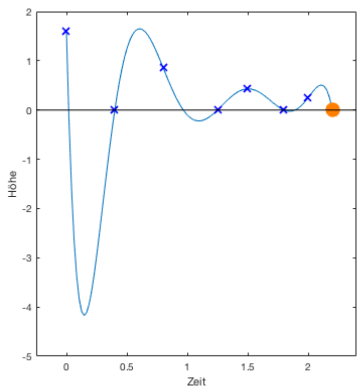
lauf das reale Problem die Animation eines springen Balles ist. Das vereinfachte Problem stellt das Verbinden gewählter Keyframes dar. Diese sind im Falle des springenden Balles die Zeitpunkte, in denen der Ball sich in Hochpunkten befindet, und die, in denen der Ball auf dem Boden ist. Das Zeit-Höhe-Diagramm in dem die Keyframes eingezeichnet werden, bildet eine wichtige Grundlage für den Workshop. Die Keyframes werden in den u.a. Abbildungen 1-5 durch ein Kreuz gekennzeichnet. Um das mathematische Modell zu bilden, werden die Keyframes auf verschiedene Weisen interpoliert. Anschließend wird für die mathematische Lösung das entsprechende Polynom berechnet bzw. eine Animation erstellt. Bei deren Betrachtung muss festgestellt werden, ob sie tatsächlich der Bewegung eines springenden Balles entspricht.

Im Workshop werden die Keyframes als erstes durch lineare Funktionen interpoliert, da diese die erste formale Funktion darstellt, die die Schüler/innen in der siebten Klasse kennenlernen. Aus diesem Grund sollte es aus Sicht der Schüler/innen am einfachsten sein, zwei benachbarte Keyframes bzw. zwei Punkte durch eine Gerade miteinander zu verbinden. Die Steigungen und y-Achsenabschnitt werden genauso berechnet, wie die Schüler/innen es aus der Schule bereits kennen.

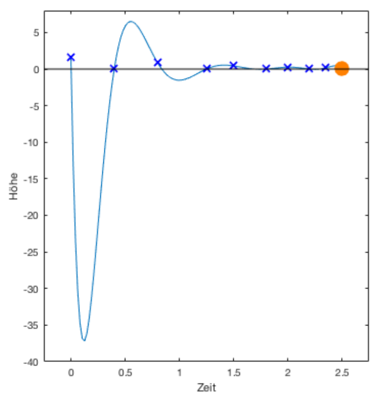
Oft liefert die lineare Interpolation eine gute Näherung. Bei der vorliegenden Wahl der Keyframes, im Fall der Animation eines springenden Balles jedoch nicht (siehe Abbildung 1). Würde die Graphik einen springenden Ball darstellen, so hieße das, dass der Ball die ganze Zeit beschleunigt wird. Dies ist jedoch in der Realität nicht der Fall. Zu beobachten ist, dass der Ball aufgrund der Erdanziehungskraft Richtung Tiefpunkt schneller und Richtung Hochpunkt langsamer wird. Dies bedeutet, dass die Steigung Richtung Boden zunehmen und Richtung Hochpunkt abnehmen müsste.



1: lineare Interpolation



2: Polynominterpolation (8 Keyframes)

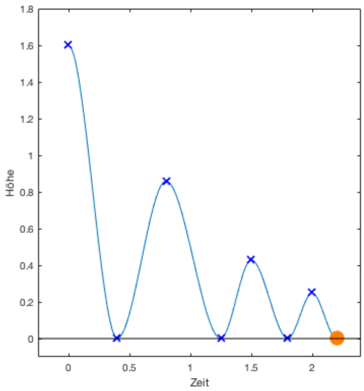


3: Polynominterpolation (10 Keyframes)

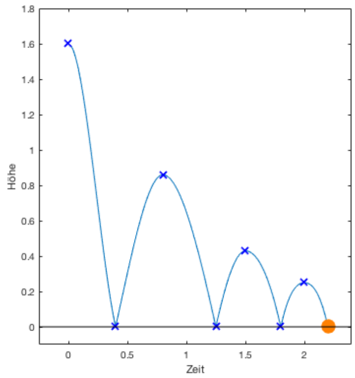
Am Beispiel eines gerade fahrenden, nicht beschleunigenden Autos lässt sich jedoch zeigen, dass dort die lineare Interpolation angemessen ist, also erstellen die Schüler/innen am Ende des ersten Arbeitsblattes eine Animation mit dem Programm Synfig. Dieses ermöglicht es verschiedene Interpolationsarten auszuwählen und Keyframes zu erzeugen, die entsprechend interpoliert werden.

Im nächsten Schritt wird die Polynominterpolation betrachtet. Es wird ein Polynom siebten Grades durch die acht Keyframes gelegt. Dadurch entsteht ein Gleichungssystem anhand dessen die Koeffizienten des Polynoms berechnet werden und anschließend eine Animation erstellt wird (siehe Abbildung 2). Die dargestellte Bewegung kann nicht der eines springenden Balles entsprechen, da der Ball in der Animation über 4 m in den Boden eindringt und er nach dem Loslassen erneut die gleiche Höhe von 1,6 m erreicht. Dies dürfte aufgrund von Verformungen und Reibung nicht geschehen. Nach dem letzten Aufprallen auf dem Boden springt der Ball sogar über die vorherige, zuletzt erreichte Höhe hinaus.

Beschäftigt man sich das erste Mal mit der Polynominterpolation, könnte es sein, dass die Vermutung aufkommt, dass die Polynominterpolation bei der Hinzunahme weiterer Keyframes weniger starke Ausschläge aufweist. Dass sich die Polynominterpolation für eine steigende Anzahl von Keyframes nicht dem gewünschten Graph annähert, sondern im Gegenteil der Graph noch größere Ausschläge aufweist, zeigt Abbildung 3.



4: hermitesche Interpolation (Ableitungen gleich Null)



5: hermitesche Interpolation (Normierung der Ableitungen)

Um genau diese Oszillationen der obigen Polynome zu vermeiden, wird im nächsten Schritt die hermitesche Interpolation betrachtet. Dabei wird jeweils ein kubisches Polynom zwischen zwei Punkte gelegt. Ein Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass den Polynomen an den Übergängen, sprich den Keyframes, die Steigung vorgegeben werden kann. So kann der Verlauf der Polynome eingeschränkt werden. Wird das entstehende Gleichungssystem aus vier Gleichungen (Funktionen und deren Ableitungen in zwei benachbarten Punkten) gelöst, während die Ableitungen zunächst gleich Null gesetzt werden, so entsteht die zu Abbildung 4 gehörende Animation. Man merkt, dass die Hochpunkte korrekt animiert werden, jedoch müssen die Punkte auf dem Boden erneut betrachtet werden. Hier wird mit Normierung gearbeitet, da die Steigung in diesen Punkten mit der Zeit abnimmt. Diese Komponente wird durch die Normierung der Höhen mit h_1 übernommen. Zusätzlich muss unterschieden werden, ob sich der Ball gerade aus der Luft Richtung Boden bewegt oder ob der Ball sich auf dem Weg vom Boden in die Luft befindet. Für den ersten Fall ist die Ableitung negativ und für den zweiten positiv. Die daraus entstehende Animation spiegelt die tatsächliche Bewegung eines springenden Balles wieder (siehe Abbildung 5).

Zur Erstellung von Animationsfilmen wird tatsächlich eine andere Art der hermiteschen Interpolation verwendet nämlich die TCB-Methode. Diese Methode ermöglicht es die Funktionen zwischen drei Punkten durch drei verschiedene Parameter t (Tension), c (Continuity) und b (Bias) zu verändern. Ausführlicher wird diese Methode in Peters, 2016, und Wohak, 2017 beschrieben. An dieser Stelle untersuchen die Schüler/innen lediglich den Einfluss der Parameter auf den Verlauf der Funktion und erstellen anschließend in Synfig verschiedene Animationen, bei der sie die TCB-Methode verwenden. So können sie die erarbeitete Mathematik benutzen und sehen, dass wirklich anhand einer Interpolationsart und bestimmter gewählter Keyframes sinnvolle Animationen erstellt werden können.

Der Workshop wurde nach Durchführungen iterativ verbessert, aber dennoch gibt es Punkte, die in der Zukunft eingearbeitet werden können. Zum einen besteht die Möglichkeit mit der App VidAnalysis free zu arbeiten, welche es ermöglichen würde, dass Schüler/innen einen springenden Ball mit der App filmen, die Daten exportieren und als Arbeitsgrundlage verwenden. Zudem kann ein Zusatzblatt zur Berücksichtigung der Physik eingebaut werden, wo bspw. Energie- und Impulserhaltungsgleichungen berücksichtigt und betrachtet werden.

Literatur

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule – Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II*. Heidelberg: Spektrum

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren – Aufgaben für Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Peters, A. (2016). *Interpolation als Kernidee inner- und außermathematischer Anwendung* (unveröffentlichte Dissertation). RWTH Aachen.

Wohak, K. (2017). *Wie funktionieren eigentlich Animationsfilme und was hat das mit Mathe zu tun? Ein Lernmodul im Rahmen eines mathematischen Modellierungstages* (Masterarbeit). RWTH Aachen.