

Beitrag zur Auslegung und Gestaltung einer innovativen Kreisbogen-Stirnverzahnung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr.-Ing.

von der Fakultät Maschinenbau
der Technischen Universität Dortmund
genehmigte Dissertation

M. Sc. Martin Möller

aus

Erfurt

Tag der mündlichen Prüfung: 22.03.2019

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Künne
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Jens Bechthold

Dortmund, 2019

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	I
Inhalt.....	III
Abstract	IV
Formelzeichen.....	V
1. Einleitung.....	1
2. Verbindungstechnik.....	3
2.1 Plankerbverzahnungen und Stirnverzahnungen.....	3
2.2 Hirth-Verzahnung.....	3
2.3 Beanspruchung von mechanischen Verbindungen	5
3. Kreisbogen-Stirnverzahnung	7
3.1 Parameter der Kreisbogen-Stirnverzahnung und deren Abhängigkeiten.....	7
3.2 Weitere Eigenschaften und Ausführungen der Kreisbogen-Stirnverzahnung	11
4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung.....	14
4.1 Bestimmung der Scherfläche der Kreisbogen-Stirnverzahnung	14
4.1.1 Berechnung des Inhaltes eines Flächensegmentes.....	17
4.1.2 Definitionsmenge des Index m	28
4.1.3 Ermittlung der gesamten Scherfläche	30
4.2 Torsionsflächenmoment der Kreisbogen-Stirnverzahnung.....	34
4.2.1 Ermittlung eines einzelnen Torsionsflächenmoments.....	35
4.2.2 Ermittlung des gesamten Torsionsflächenmoments.....	36
4.3 Ermittlung der Torsionsspannungen	37
4.4 Gegenüberstellung der Torsionsspannungen bei verschiedenen Verzahnungsbildern....	39
5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung.....	45
5.1 Ermittlung der projizierten Fläche	45
5.2 Bestimmung der Flächenpressung an einer einzelnen Zahnflanke	54
5.3 Gegenüberstellung der maximalen Flächenpressung.....	62
5.4 Grobdimensionierung von b und n	70
5.5 Grobdimensionierung des Wellendurchmessers	72
6. Einfluss des Flankenwinkels.....	75
6.1 Zahnflankenbelastung durch reine Umfangskraft.....	77
6.2 Zahnflankenbelastung durch eine zusätzliche Vorspannkraft.....	79
6.3 Spannungen an den Zahnflanken	82
6.3.1 Bedingungen für die Vorspannkraft.....	83

Inhaltsverzeichnis

6.3.2	Einflüsse auf die Druckspannungen an den Zahnflanken	87
6.3.3	Einflüsse auf die Schubspannungen an den Zahnflanken	90
6.3.4	Bestimmung des perspektivisch veränderten Flankenwinkels an der einzelnen Zahnflanke	93
6.3.5	Bestimmung der benötigten Vorspannkraft	95
6.3.6	Bestimmung der Druckspannungen an den Zahnflanken	100
6.4	Grenzen des Flankenwinkels.....	101
7.	Einfluss der Nuttiefe, des Rundungsradius und der Fasenhöhe.....	103
8.	Vergleichsspannung.....	107
9.	Zusammenfassung der geometriebedingten Einflüsse auf die Verzahnungsbeanspruchung	110
10.	Fertigungstechnische Aspekte zur Gestaltung der Verzahnung	112
10.1	Fertigungstechnische Kriterien zur Herstellung der Verzahnung	112
10.2	Verhältnisse zwischen Fertigungs- und Verzahnungsparametern	113
11.	Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung	116
12.	Experimentelle Untersuchungen	135
12.1	Versuchsaufbau	135
12.2	Versuchsplanung	140
12.3	Versuchsergebnisse	143
12.4	Versuchsauswertung.....	147
12.5	Validierung der Berechnungsvorschriften	148
12.6	Unbestimmte Einflüsse auf die Belastbarkeit der Verzahnung.....	151
13.	Fazit, kritische Würdigung, Ausblick	154
	Quellenverzeichnis	157

Inhalt

In der vorliegenden Arbeit wird eine neuartige Kreisbogen-Stirnverzahnung untersucht. Die Ziele bestehen in der Findung von grundlegenden Eigenschaften der Verzahnung, in der Detektion von Zusammenhängen zwischen Gestalt und Belastbarkeit und in der Entwicklung von Auslegungs- und Gestaltungsvorschriften. Beginnend mit der Vorstellung der allgemeinen Eigenschaften der neuartigen Kreisbogen-Stirnverzahnung sowie der Darstellung des gegenwärtigen Standes des Wissens zu mechanischen Verbindungstechniken werden zunächst Parameter definiert, um die Geometrie der Kreisbogen-Stirnverzahnung numerisch zu erfassen. Im Anschluss daran werden auf Grundlagen der Technischen Mechanik Zusammenhänge zwischen der Belastung, der Geometrie und den Beanspruchungen der Verzahnung auf deterministischem Wege hergeleitet. Anhand von Gegenüberstellungen werden die Auswirkungen der geometrischen Parameter auf die Verzahnungseigenschaften verdeutlicht und mit zusätzlicher Berücksichtigung von fertigungstechnischen Aspekten optimale Parametereinstellungen herausgearbeitet. Aus den Ergebnissen werden interimistische Gestaltungs- und Auslegungsvorschriften entwickelt. Anschließend werden die auf theoretischen Grundlagen erarbeiteten Berechnungsvorschriften mit Realversuchen evaluiert. Dazu erfolgt eine Gegenüberstellung der Berechnungsergebnisse mit den Ergebnissen aus den Experimenten. Eine abschließende kritische Auseinandersetzung mit der benutzten Vorgehensweise und den erzielten Resultaten zeigt Potenzial für eine Fortführung bzw. Erweiterung der in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen auf.

Abstract

In this thesis a novel frontally circular arc profiled coupling is examined. The aim is in the finding of basic attributes of the novel coupling, in the detection of relationships between shape and load-bearing capacity and in the developing of instructions to design the coupling. Starting with the general introduction of the novel frontally circular arc profiled coupling and the representation of the current state of knowledge to coupling technology, in the following parameter are defined, to describe the geometry of the frontally circular arc profiled coupling in a numerical way. After that, basics of mechanical engineering are used to determine relationships between the burden, the geometry and the stress of the coupling. By comparisons the effects of the geometric parameters on the capacity of the coupling are shown. In combination with the consideration of aspects of production engineering optimal settings for the parameters are worked out. As a result of the found relationships interim instructions are developed to design the coupling. In the following, the on theoretic relationships based calculation rules are evaluated with experiments. For that the calculated results are compared with the results of the trials. A concluding critical confrontation with the used method and the achieved results shows the potential for a continuation or development of the investigations in this thesis.

Formelzeichen

- a - Abstand der Kreisbogenmittelpunkte
- b - Nut- / Stegbreite
- d - Durchmesser des Kreisbogens k (Hilfsparameter)
- f_V - Vorspannkraftverhältnis
- h - Laufkoordinate entlang der Zahnhöhe zur Ortsbestimmung
- k - Konturlinie eines Kreisbogens der die Kontur der Zahn- bzw. Nutflanke beschreibt
- k_m - einzelner Kreisbogen; Identifizierung mittels Index m
- l_{proj} - in Umfangsrichtung projizierte Länge einer Kreisbogenlinie
- m - Index zur Zuordnung einzelnen Parameter zum jeweiligen Kreisbogen
- m_{max} - Obergrenze des Index m
- m_{min} - Untergrenze des Index m
- m_n - Anzahl der Kreisbögen innerhalb der Basis
- n - ganzzahliges Vielfaches der Nutbreite zur Beschreibung des Kreisbogenmittelpunktabstandes
- p_m - Flächenpressung an einer einzelnen Zahnflanke infolge der Umfangskraft
- p_V - Flächenpressung an einer einzelnen Zahnflanke infolge der bloßen Vorspannkraft
- p_{zul} - zulässige Flächenpressung
- r - Variable zur Beschreibung der radialen Koordinate in einem Polarkoordinatensystem
- r_k - Radius eines einzelnen Kreisbogens
- r_m - Hebelarm der an der einzelnen Zahnflanke angreifende Umfangskraft F_m
- r_{max} - Obergrenze der Variablen r
- r_{min} - Untergrenze der Variablen r
- r_k - Kreisbogenradius
- t - Fräserzustellung
- z - Anzahl der Nutdurchläufe
- x_R - Einfluss auf die effektive Zahnhöhe aufgrund von R

Formelzeichen

-
- A_m - Flächeninhalt eines einzelnen Flächensegmentes; Identifizierung mittels Index m
- A_{proj} - in Umfangsrichtung projizierte Flankenfläche
- A_S - (gesamte) Scherfläche der Kreisbogen-Stirnverzahnung
- A_{S_m} - Einzelfläche eines Steges oder einer Nut; Identifizierung mittels Index m
- A_V - aus Richtung der Vorspannkraft projizierte Flankenfläche
- A_α - in Umfangsrichtung projizierte Flankenfläche bei einem Flankenwinkel von α'
- A_0 - in Umfangsrichtung projizierte Flankenfläche bei einem Flankenwinkel von 0°
- D - Basisdurchmesser (Durchmesser der profilbegrenzenden Kontur)
- D_C - Werkzeugdurchmesser
- F_{ges} - Gesamtkraft auf die Zahnflanke
- $F_{\text{ges a}}$ - gesamte Axialkraft auf die Zahnflanke
- $F_{\text{ges u}}$ - gesamte Umfangskraft auf die Zahnflanke
- $F_{\text{ges n}}$ - gesamte Normalkraft auf die Zahnflanke
- $F_{\text{ges r}}$ - gesamte Reibkraft an der Zahnflanke
- F_m - an der einzelnen Zahnflanke angreifende Umfangskraft
- F_U - Umfangskraft
- F_{U_n} - durch die Umfangskraft hervorgerufene Normalkraft auf die Zahnflanke
- F_{U_a} - durch die Umfangskraft hervorgerufene Axialkraft
- F_{U_r} - durch F_{U_n} hervorgerufene Reibkraft
- $F_{U_{\text{res}}}$ - resultierende Kraft aus den Komponenten der Umfangskraft
- F_V - Vorspannkraft auf die einzelne Zahnflanke
- $F_{V_{\text{ges}}}$ - gesamte Vorspannkraft auf die gesamte Verbindung
- $F_{V_{\text{min}}}$ - mindestens einzuhaltende Vorspannkraft auf die einzelne Zahnflanke
- F_{V_n} - durch die Vorspannkraft hervorgerufene Normalkraft auf die Zahnflanke
- F_{V_u} - durch die Vorspannkraft hervorgerufene Umfangskraft
- F_{V_r} - durch F_{V_n} hervorgerufene Reibkraft

Formelzeichen

-
- $F_{V\text{ res}}$ - resultierende Kraft aus den Komponenten der Vorspannkraft
- H - Zahnhöhe / Nuttiefe
- H_{eff} - effektive Zahnhöhe / Nuttiefe
- $I_{t,m}$ - Einzeltorsionsflächenmoment (bezogen auf das zugehörige Flächensegment A_m)
- K - Konturlinie der Basis, wenn diese ein Kreis ist
- R - Rundungsradius (am Zahnfuß)
- S - Fasenhöhe (am Zahnkopf)
- α - Flankenwinkel
- α' - in Ebene der Umfangsrichtung bezogener, perspektivisch veränderter Flankenwinkel
- β - Öffnungswinkel
- γ - Verdrehwinkel der Betrachtungsebene auf die Zahnflanke in Bezug auf den Normalschnitt
- ε - Winkel des Kreisbogens k
- φ - Variable zur Beschreibung der Winkelkoordinate in einem Polarkoordinatensystem
- φ_{max} - Obergrenze der Variablen φ
- φ_{min} - Untergrenze der Variablen φ
- ρ_{ges} - gesamter Reibwinkel bezüglich $F_{\text{ges n}}$ und $F_{\text{ges r}}$
- ρ_U - Reibwinkel bezüglich $F_{U n}$ und $F_{U r}$
- ρ_V - Reibwinkel bezüglich $F_{V n}$ und $F_{V r}$
- σ_D - Druckspannung an den Zahnflanken
- $\sigma_{D\text{ zul}}$ - zulässige Druckspannung
- σ_V - Vergleichsspannung
- σ_V - Vergleichsspannung nach der der Gestaltänderungsenergie-Hypothese
- τ_S - Schubspannung an den Zahnflanken
- τ_t - Torsionsspannung an der Zahnfußfläche
- $\tau_{t\text{ zul}}$ - zulässige Torsionsspannung
- ψ - Winkel, unter dem die Kraft F_U die Zahnflanke angreift

1. Einleitung

Die in dieser Arbeit untersuchte Kreisbogen-Stirnverzahnung nach [Schü11] ist eine neuartige Profilierung einer Oberfläche zur Übertragung von Kräften und Momenten. Die Profilierung ist insbesondere durch S-kurvenförmige Nutbahnen gekennzeichnet.



Abbildung 1-1: Kreisbogen-Stirnverzahnung

Das Material zwischen den Nuten definiert die Stege, die in die Nuten einer komplementären Profilierung passen. Auf diesem Wege wird eine vornehmlich formschlüssige Verbindung erzeugt, die sowohl Quer- und Längskräfte, als auch Biege- und Torsionsmomente übertragen kann. Der einzelne Steg wird auch als Zahn verstanden.

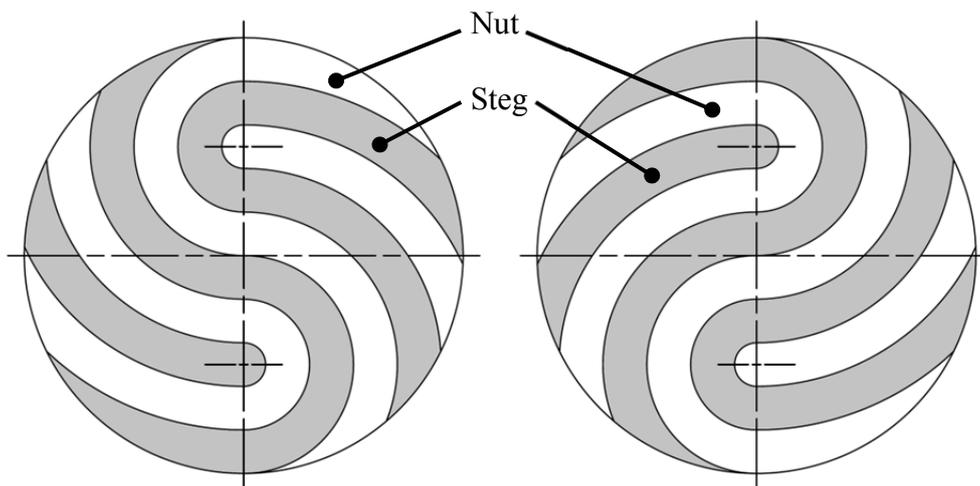


Abbildung 1-2: Zeichnerische Darstellung zweier komplementärer Kreisbogen-Stirnverzahnungen

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt existieren keinerlei Kenntnisse bezüglich der Leistungsfähigkeit bzw. mechanischen Belastbarkeit dieser gänzlich neuen Verzahnungsart. Mit dieser Arbeit wird dazu beigetragen, diesem Zustand entgegenzuwirken.

1. Einleitung

Mit der Verfolgung des allgemeinen Ziels, eine Grundlage für Auslegungs- und Gestaltungsvorschriften der betrachteten Kreisbogen-Stirnverzahnung zu entwickeln, sollen in dieser Arbeit die Belastbarkeit der Verzahnung in Abhängigkeit von deren Geometrie auf vornehmlich deterministischem Wege bestimmt sowie weitere spezifische Eigenschaften zu verschiedenen Ausführungen der Kreisbogen-Stirnverzahnung herausgestellt werden.

Im Einzelnen soll eine Analyse von Berechnungsmethoden zu mechanischen Verbindungen des gegenwärtigen Standes der Technik erfolgen, wodurch Lösungsansätze generiert und die Eignung der gewählten Lösungswege bestätigt werden sollen. Für die Erarbeitung von mechanischen Zusammenhängen zwischen der Gestalt der Verzahnung und der Belastbarkeit der Verbindung ist es zudem notwendig, eine Parametrisierung der verzahnungsbildenden Geometrie vorzunehmen. Aus den Ergebnissen sind Eigenschaften für verschiedene Variationen der Verzahnung herauszuarbeiten. Anhand einer Gegenüberstellung soll eine Geometrie ermittelt werden, die ein ausgewogenes Verhältnis zwischen Belastbarkeit, Wirtschaftlichkeit und Einsatzmöglichkeit aufweist. Mit Realversuchen sind die theoretisch hergeleiteten Ergebnisse zu überprüfen und gegebenenfalls um weitere Einflüsse zu erweitern.

Da die Kreisbogen-Stirnverzahnung hauptsächlich bei Wellen angewendet wird, wird der Fokus der Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit auf die Reaktionen bei reinen Torsionsmomentbelastungen beschränkt. Außerdem wird für die Herstellung der Verzahnung vorwiegend die fräsende Fertigung in Betracht gezogen.

Den Beginn bildet die Betrachtung des Standes der Technik zu mechanischen Verbindungen.

2. Verbindungstechnik

Eine *Verbindung* ist im allgemeinen mechanischen Verständnis ein durch ein physikalisches Wirkprinzip erzeugter Zusammenhalt von Einzelteilen, die zu einer Gruppe vereinigt werden. Die zu fügenden Einzelteile werden Füge­teile oder Fügepartner genannt. Die zur Erzeugung der Verbindung benötigten Komponenten heißen Verbindungselemente. Zwei Füge­teile gelten als miteinander verbunden, sobald Relativbewegungen zwischen beiden Partnern in mindestens einem Freiheitsgrad nicht mehr durchführbar sind. Kräfte oder Momente werden dann in mindestens eine Richtung übertragen. Verbindungen werden anhand ihrer Eigenschaften in unterschiedliche Kategorien eingeteilt. Als Beispiel ist die Gruppe der Plankerb- oder Stirnverzahnungen zu nennen.

2.1 Plankerbverzahnungen und Stirnverzahnungen

Plankerbverzahnungen entstehen durch stirnseitig (= planseitig) eingebrachte Kerben auf einer Bauteiloberfläche. Im Zusammenspiel mit Bauteilen mit einer komplementären Profilierung entsteht eine formschlüssige Verbindung. Aufgrund der stirnseitigen Anordnung der Verzahnung wird die Plankerbverzahnung auch Stirnverzahnung genannt. Ein Beispiel für eine Plankerb- oder Stirnverzahnung ist die Hirth-Verzahnung, die aufgrund ihrer stirnseitig angeordneten Elemente Ähnlichkeiten mit der Kreisbogen-Stirnverzahnung aufweist. Eine genauere Beschreibung der Hirth-Verzahnung erfolgt im anschließenden Kapitel.

2.2 Hirth-Verzahnung

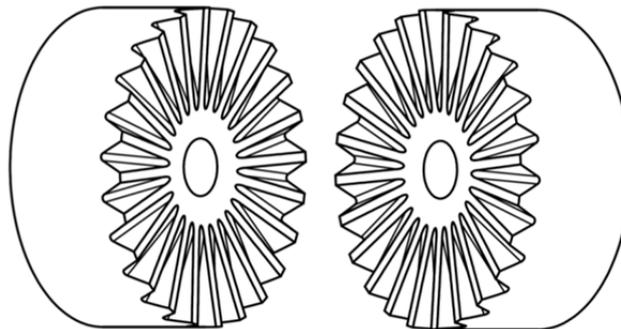
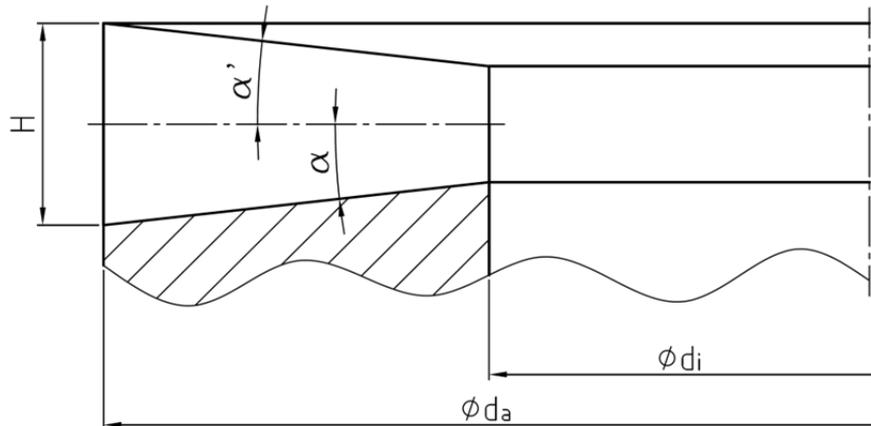


Abbildung 2-1: Hirth-Verzahnung

Die Hirth-Verzahnung (nach Erfinder Albert Hirth; geboren 07.10.1858 in Meimsheim; gestorben 12.10.1935 in Nonnenhorn [Behr72]) hat radial angeordnete Zähne, die eine Verjüngung im Querschnitt aufweisen. Dadurch wird eine Zentrierung der Füge­teile ermöglicht. Sie wird überall dort eingesetzt, wo die Fertigung von Teilen aus einem Stück nicht möglich (z. B. aus montagetechnischen Gründen) oder unwirtschaftlich ist. Die Hirth-Verzahnung erlaubt einen sehr kleinen Bauraum und verspricht eine hohe Genauigkeit, weshalb sie z. B. in Werkzeugmaschinen oder in Hochleistungsmaschinen, wie Turbinen, eingesetzt wird. Durch die verjüngte Zahnform ist die Verbindung spielfrei und somit auch für wechselnde Belastungen problemlos geeignet. Aufgrund der Kraftübertragung über die schrägen Zahnflanken und der damit verbundenen Keilwirkung ist eine axiale Verspannung der Füge­teile notwendig. Geometriebedingt ist die Zahn­höhe in radialer Richtung nicht konstant. Das bedeutet, Zahn­grund und Zahn­kopf verlaufen zum Wellenmittelpunkt hin aufeinander zu, was eines erhöhten Aufwandes für die Fertigung der Hirth-Verzahnung bedarf. Der Zahn­längsschnitt ist in nachfolgender Skizze veranschaulicht:

2. Verbindungstechnik



Parameter der Hirth-Verzahnung (Auszug):

d_a – Außen- / Wellendurchmesser
 d_i – Innen- / Bohrungsdurchmesser
 H – Zahnhöhe am Außendurchmesser

α – Neigungswinkel am Zahnfuß
 α' – Neigungswinkel am Zahnkopf

Abbildung 2-2: Zahnlängsschnitt einer Hirth-Verzahnung

Es folgen einige Anwendungsbeispiele für die Hirth-Verzahnung:

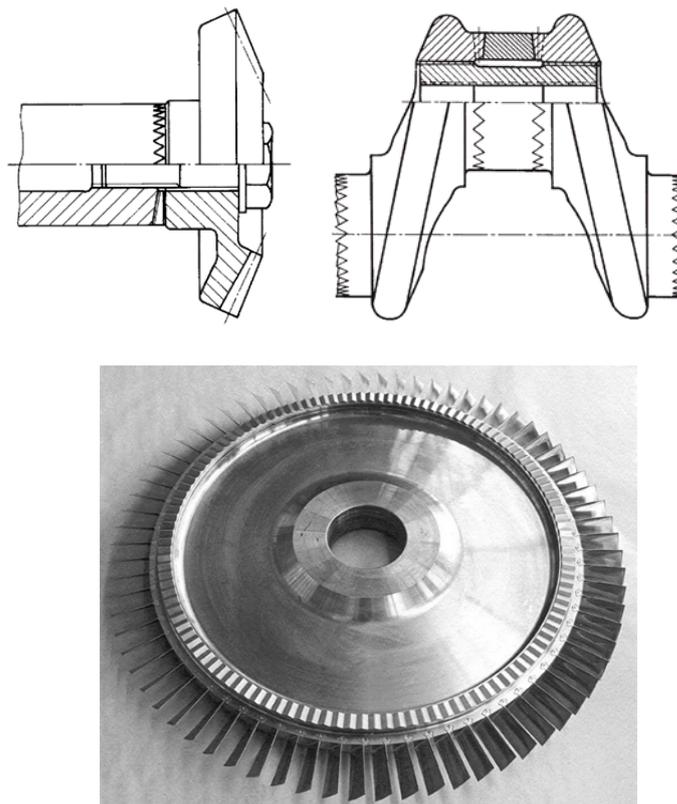


Abbildung 2-3: Verschiedene Anwendungen der Hirth-Verzahnung; oben links: fliegendes Kegelrad [Witt13]; oben rechts: Kurbelwelle [Habe14]; unten: Turbinenlaufrad mit Hirth-Verzahnung [Zieg11]

Mögliche Vorgehensweisen zur Berechnung der Hirth-Verzahnung sind neben denen von weiteren Verbindungen im anschließenden Kapitel zusammengefasst.

2. Verbindungstechnik

2.3 Beanspruchung von mechanischen Verbindungen

Für die anstehenden Untersuchungen werden die Verbindungen näher betrachtet, deren Eigenschaften mit denen der Kreisbogen-Stirnverzahnung vergleichbar sind. Dies trifft vornehmlich auf Systeme mit formschlüssiger Torsionsmomentübertragung zu. Die Methoden zur Berechnung dieser Verbindungen bieten das meiste Potenzial, um sie für die Findung eines Lösungsweges der zu behandelnden Problematik zu nutzen. Analysiert werden u. a. Bolzen- und Stiftverbindungen, Bolzenkupplungen, Querstiftverbindungen, Passfederverbindungen, Keil- und Zahnwellenverbindungen, Polygonwellenverbindungen sowie Verbindungen per Vierkant oder Sechskant. Zudem werden die Auslegungsvorschriften zur Hirth-Verzahnung betrachtet.

Die Analyse ergibt, dass bei den betrachteten Welle-Nabe-Verbindungen die Flächenpressung das maßgebende Kriterium zur Beurteilung der Beanspruchung ist. Scherspannungen sind gemäß den Auslegungsformeln bei einigen Verbindungen zu überprüfen (z. B. bei Bolzenkupplungen oder Querstiftverbindungen), sind meist jedoch nicht entscheidend für die Belastbarkeit der Verbindung. Beanspruchungen in Form von Biegung werden in der Regel vernachlässigt. Für die Berechnungen der Beanspruchung werden meistens vereinfachte Annahmen getroffen, sodass die Kraft- und Spannungsverhältnisse mit grundlegenden Formeln der Mechanik erfasst werden können. Beispielsweise wird die Flächenpressung berechnet, indem eine Umfangskraft mittig der kraftübertragenden Elemente (Passfeder, Bolzen, usw.) angenommen und auf die jeweilige projizierte Fläche bezogen wird. Mittels Korrekturfaktoren werden dann die unter vereinfachten Bedingungen gewonnenen Zusammenhänge auf reale Anwendungen übertragen. Als Basis für die Korrekturfaktoren dienen häufig praktische Untersuchungen an realen Objekten. Beispielsweise wird eine tatsächlich bestehende ungleichmäßige Verteilung der Flächenpressung mittels eines Tragfaktors in den Berechnungen berücksichtigt. Der Grenzwert für die ermittelte Flächenpressung ist meist ein allgemeingültiger Wert. Spezifische Merkmale der Verbindung oder des Verbindungselementes werden dabei nicht einbezogen. Diese Ungenauigkeit wird in der Regel mit einem höheren Sicherheitsfaktor ausgeglichen. In der Literatur sind u. a. die folgenden zulässigen Flächenpressungen in Abhängigkeit vom Werkstoff zu finden. Diese werden innerhalb dieser Arbeit als Anhaltswerte genutzt:

Werkstoff	Zulässige Flächenpressung p_{zul} in N/mm ² bei Belastung		
	ruhend	schwellend	stoßartig
Stahl ungehärtet	100 ... 200	70 ... 150	40 ... 80
Stahl gehärtet	150 ... 250	100 ... 170	50 ... 100
Stahlguss	100 ... 150	80 ... 100	40 ... 60
Gusseisen, Temperguss	80 ... 100	60 ... 80	30 ... 50

Die oberen Werte gelten bei Materialien mit höherer Streckgrenze, Bruchfestigkeit und Härte, die unteren Werte entsprechend bei niedrigeren Festigkeitswerten

Tabelle 2-1: Richtwerte für zulässige Flächenpressungen nichtgleitender Flächen [Scha02]

2. Verbindungstechnik

Für die Auslegung einer Hirth-Verzahnung existieren in der Literatur mehrere Lösungsansätze. Hierzu gehören insbesondere die Auslegungen nach *Voith* [Voit07], *Niemann* [Niem81] und *Decker* [Deck14]. Nach Voith wird die Verbindung hauptsächlich durch die axiale Vorspannkraft auf Flächenpressung beansprucht. Decker betrachtet ausschließlich die Umfangskraft als Belastung der Zahnflanken. Niemann beurteilt die Beanspruchung anhand von empirisch ermittelten Werten. Des Weiteren existieren Dissertationen von u. a. *Gerhard Schemberger* [Schen37] und *Torsten Bunge* [Bung05], in denen Möglichkeiten zur Auslegung der Hirth-Verzahnung erarbeitet worden sind. Während Schemberger die Hirth-Verzahnung experimentell auf Schäden durch statische und vornehmlich wechselnde Belastung untersucht, setzt Bunge den Fokus auf die Spannungsanalyse der Verzahnung per Finite Elemente Methode.

Die meisten der betrachteten formschlüssigen Verbindungen weisen eine vollständig andere Geometrie im Vergleich zur Kreisbogen-Stirnverzahnung auf. Konkrete Berechnungsansätze können daraus nicht hergeleitet werden. Allerdings sind die einzelnen Strategien und Methoden zur Lösungsfindung und die Kriterien zur Beurteilung der Bauteilbeanspruchung auf das behandelte Problem übertragbar. Lediglich die Bolzenkupplung ist aufgrund der stirnseitig exzentrisch angeordneten, runden Elemente mit der Kreisbogen-Stirnverzahnung vergleichbar. Die Methoden zur Berechnung einer Bolzenkupplung werden daher zu einem gewissen Teil als Orientierung für die anstehende Entwicklung der Auslegungsvorschriften genutzt.

Im nächsten Kapitel werden allgemeine Eigenschaften der Kreisbogen-Stirnverzahnung beschrieben.

3. Kreisbogen-Stirnverzahnung

Das stirnseitig eingebrachte Profil der Kreisbogen-Stirnverzahnung ist mathematisch mit zusammengesetzten Kreisbögen zu beschreiben. Ein einzelner Kreisbogen ist dabei auf einen von insgesamt zwei vorhandenen Mittelpunkten bezogen. Kreisbögen mit dem gleichen Mittelpunkt sind in dieselbe Richtung orientiert. Kreisbögen mit unterschiedlichem Mittelpunkt haben eine gegensätzliche Orientierung.

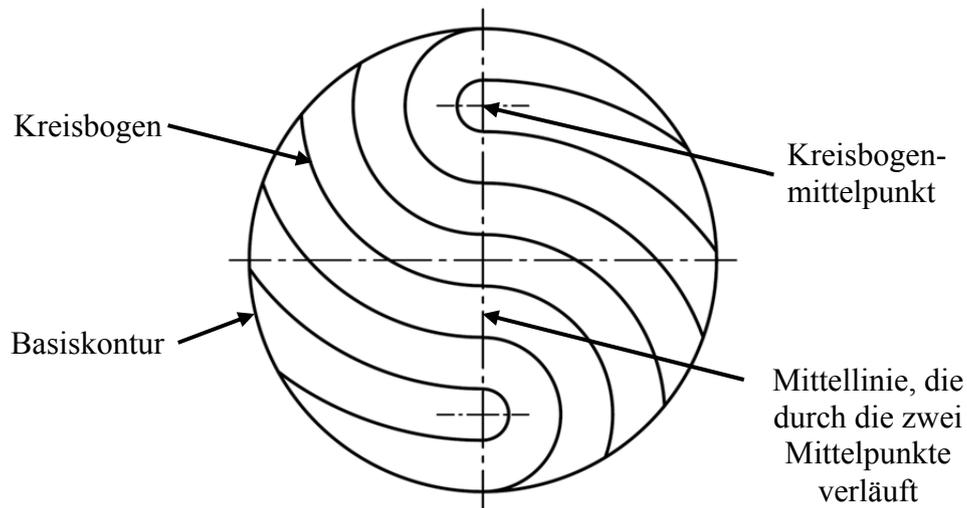


Abbildung 3-1: Konturdarstellung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Der einzelne Kreisbogen wird entweder von der Außenkontur der profilierten Fläche begrenzt oder von der durch die zwei Mittelpunkte verlaufenden Mittellinie. An der Mittellinie findet die Verknüpfung der einzelnen Kreisbögen statt, sodass sie zusammengesetzt eine S-Kurve ergeben. Die gesamte Kontur ist punktsymmetrisch.

Die durch die Konturlinien abgegrenzten Flächen gehören entweder zum Steg oder zur Nut, wobei Steg und Nut jeweils abwechselnd angeordnet sind. Die Abstände zwischen benachbarten Kreisbögen definieren die Breite der Nut bzw. des Steges. Damit die Breite über die gesamte Verzahnung konstant ist, müssen die Radien der Kreisbögen immer dem ungeraden Vielfachen der halben Nut- bzw. Stegbreite entsprechen. Für einen stetigen Übergang zwischen den zusammengesetzten Kreisbogenlinien muss der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte ein ganzzahliges Vielfaches der Nut- bzw. Stegbreite sein. Um für eine bestimmte Verzahnung ein entsprechendes Komplementär zu erhalten, ist es idealerweise notwendig, ein exaktes Negativ dieser Profilierung zu erzeugen.

Für die anstehenden Untersuchungen werden der Verzahnung geometrische Größen zugewiesen, die eine parametrische Erfassung der Kontur ermöglichen. Auf diesem Wege können geometrische Beziehungen und Abhängigkeiten zu anderen Größen mittels Gleichungen formuliert werden. Die entsprechenden Definitionen sind im nachfolgenden Kapitel beschrieben.

3.1 Parameter der Kreisbogen-Stirnverzahnung und deren Abhängigkeiten

Die Beschreibung der Kreisbogen-Stirnverzahnung mit geometrischen Parametern wird zum einen aus der stirnseitigen Betrachtung der Verzahnung vorgenommen. Die charakteristische

3. Kreisbogen-Stirnverzahnung

Kreisbogenkontur wird dabei zweidimensional abgebildet und erhält die Bezeichnung *zweidimensionales Verzahnungsbild*. Zum anderen wird der *Nutquerschnitt* bzw. der *Querschnitt eines einzelnen Zahns* herangezogen, durch dessen parametrische Beschreibung das zweidimensionale Verzahnungsbild um die dritte Dimension ergänzt wird. Zur Unterscheidung der beiden Betrachtungsebenen werden die Parameter demgemäß in *zwei- und dreidimensionale Größen* unterteilt.

Für die zweidimensionalen Parameter gelten die nachstehenden Definitionen und Abhängigkeiten:

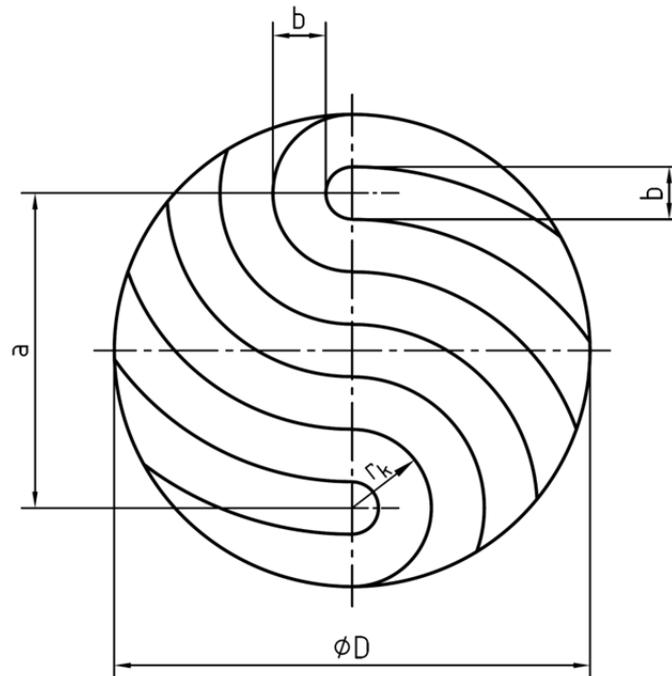


Abbildung 3-2: Zweidimensionale Parameter der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Nutbreite = Stegbreite (auch mittlere Zahnbreite):	b ; mit $b < D$ für n gerade
Abstand der Kreisbogenmittelpunkte:	a ; mit $a = b \cdot n$
Ganzzahliges Vielfaches der Nutbreite:	n ; mit $n \in \mathbb{N}$
Basisdurchmesser (Durchmesser der begrenzenden Kontur):	D
Radius eines einzelnen Kreisbogens:	r_k ; mit $r_k = \frac{b}{2} \cdot (1 + 2 \cdot m)$; $m \in \mathbb{N}$

Der Parameter b beschreibt den Abstand zwischen zwei benachbarten kreisbogenförmigen Konturlinien und gibt die Breite der Nut bzw. des Steges an. Die Breite b wird *Nut- oder Zahnbreite* genannt. Mit a wird der *Abstand der Kreisbogenmittelpunkte* bezeichnet. Die Kreisbogenmittelpunkte sind punktsymmetrisch auf der Basisfläche angeordnet. Die *Basisfläche* ist die profilierte Fläche und kann theoretisch jede beliebige Form annehmen. Die in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen sind auf kreisförmige Basisflächen beschränkt, da diese den Querschnitt bzw. die Stirnfläche einer Welle darstellen. Der *Durchmesser des*

3. Kreisbogen-Stirnverzahnung

Basiskreis wird mit D bezeichnet. Als Bedingung für eine stetige Verzahnungskontur mit gleichbleibender Nutbreite gilt, dass der Abstand a der Mittelpunkte stets ein *ganzzahliges Vielfaches* n der Nutbreite b betragen muss. Ebenso muss der einzelne *Kreisbogenradius* r_k immer dem ungeraden Vielfachen der halben Nutbreite entsprechen. Ist der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte so gewählt, dass das Vielfache n einen geraden Wert annimmt, muss die Nutbreite b kleiner sein als der Basisdurchmesser D , da sonst keine Kontur auf der Basisfläche vorhanden ist. Weist das ganzzahlige Vielfache n einen ungeraden Wert auf, ist b beliebig wählbar. Im Extremfall ($b \rightarrow \infty$) stellt die Kreisbogenkontur dann eine durch die Mitte der Basis verlaufende Gerade dar.

Im Folgenden werden die dreidimensionalen Parameter definiert. Die Betrachtungsebene des Zahn- bzw. Nutquerschnitts liegt im Normalschnitt beider gegenüberliegender Zahnflanken:

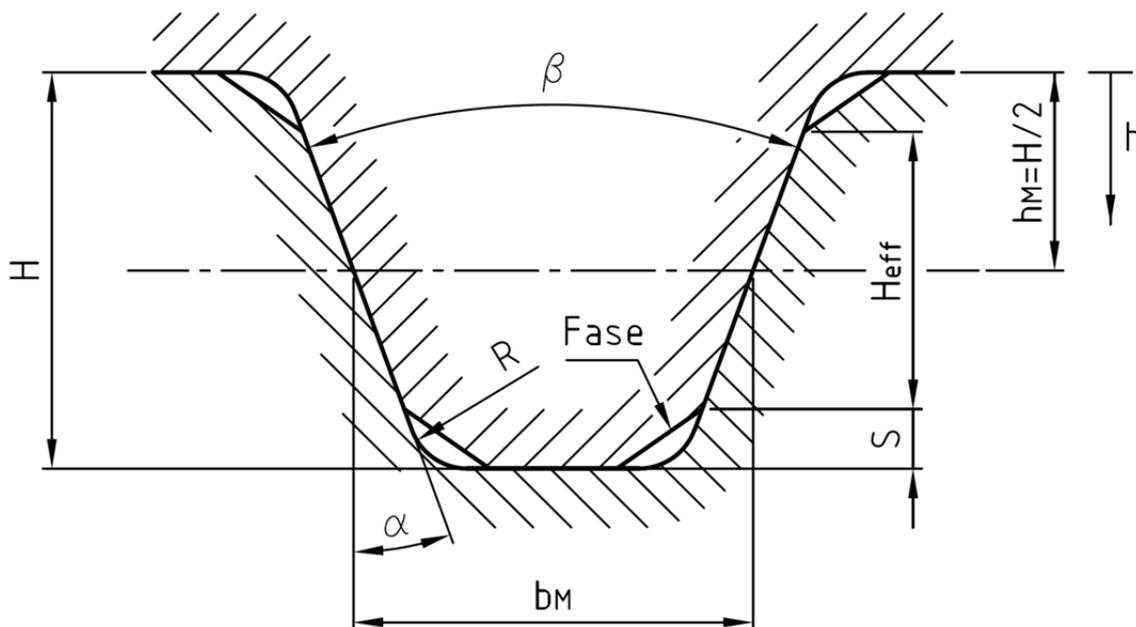


Abbildung 3-3: Parameter am Zahnquerschnitt

Zahnhöhe (=Nuttiefe):	H
Örtliche Zuordnung entlang der Zahnhöhe:	h ; mit $0 \leq h \leq H$
Flankenwinkel:	α
Öffnungswinkel:	β ; mit $\beta = 2 \cdot \alpha$
Rundungsradius (am Zahnfuß):	R
Fasenhöhe (am Zahnkopf):	S
Effektive Zahnhöhe / Nuttiefe:	H_{eff} ; mit $H_{\text{eff}} = H - 2 \cdot S$
Mittlere Zahnbreite / Nutbreite	b_M
Mittlere Zahnhöhe / Nuttiefe	h_M ; mit $h_M = H/2$

3. Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die *Zahnhöhe* H , die gleich der *Nuttiefe* H ist, gibt die Höhendifferenz zwischen Nutgrund und Zahnkopf an und ist über die gesamte Verzahnung konstant. Für die örtliche Bestimmung eines beliebigen Höhenniveaus wird die Variable h als Laufkoordinate eingeführt. Sie ermöglicht die Einordnung einer Ebene parallel zur Basisfläche zwischen $h_0 = 0$ mm und $h_{\max} = H$. Ausgangsniveau für h ist der Zahnkopf. Der *Flankenwinkel* α beschreibt die Neigung der Zahn- bzw. Nutflanken in der Normalschnittebene. Die Referenz des Flankenwinkels ist die Senkrechte zum Nutgrund. Ein Flanken- oder Schrägungswinkel von $\alpha = 0^\circ$ bedeutet demnach eine senkrechte Zahnflanke, der Zahnquerschnitt ist dann rechteckig. Ist $\alpha > 0^\circ$ besteht ein trapezförmiger Zahnquerschnitt. Der *Öffnungswinkel* β ist auf zwei sich gegenüberliegenden Zahn- bzw. Nutflanken bezogen und ist stets das Doppelte vom Flankenwinkel. Der Übergang vom Nutgrund zur Zahnflanke ist mit einem *Rundungsradius* R versehen, um der bauteilschwächenden Kerbwirkung entgegenzuwirken. Am Übergang von der Zahnflanke zum Zahnkopf ist aus dem gleichen Grund eine Fase angebracht. Diese bietet an dieser Stelle gegenüber einem Rundungsradius einen fertigungstechnischen Vorteil. Zur Vermeidung von Doppelpassungen ist die *Fasenhöhe am Zahnkopf* S so groß auszuführen, dass der Zahnkopf des einen Verzahnungspartners nicht mit dem Rundungsradius am Zahnfuß des anderen Verzahnungspartners kollidiert. Die Fasenhöhe S beeinflusst die *effektive Zahnhöhe* H_{eff} , die ein Maß für die effektive Berührfläche der einzelnen Zähne ist.

Bei einem Flankenwinkel von $\alpha > 0^\circ$ ist die Nutbreite nicht über die Nuttiefe konstant. Der zweidimensionale Parameter b ist dann auf die Breite bezogen, die in der *mittleren Nuttiefe* h_M ($h_M = H/2$) vorliegt, und wird *mittlere Nutbreite* b_M genannt. Das zweidimensionale Verzahnungsbild entspricht in diesem Fall der Kontur auf dem Höhenniveau von h_M .

Abhängig von der Wahl der einzelnen geometriebeschreibenden Parameter entstehen unterschiedliche Verzahnungsbilder sowie Zahnquerschnitte. Die Kombination aus gewähltem Verzahnungsbild und Zahnquerschnitt bildet die gesamte Gestalt der Verzahnung und wird *Verzahnungsgeometrie* genannt. Nachstehendes Schaubild fasst die Einteilung der Verzahnungsparameter zusammen:

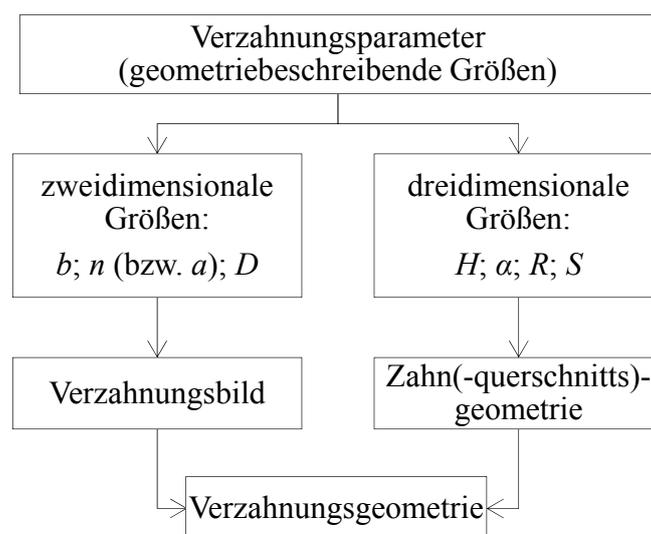


Abbildung 3-4: Übersicht und Zusammenhänge der einzelnen Merkmale zur Beschreibung der Verzahnungsgeometrie

3. Kreisbogen-Stirnverzahnung

Mit den angeführten Definitionen besteht die Möglichkeit, die Verzahnungsgeometrie numerisch zu beschreiben, was z. B. für eine parametrisierte Modellierung oder für die Verwendung in mathematischen Operationen erforderlich ist.

Allgemein besteht das Ziel der Untersuchungen an der neuen Kreisbogen-Stirnverzahnung darin, den Einfluss der Verzahnungsparameter auf die Belastbarkeit, die fertigungstechnische Umsetzbarkeit, den benötigten Bauraum und die Wirtschaftlichkeit festzustellen und auf Grundlage dessen eine Vorschrift zur Auslegung und Gestaltung der Verzahnungsgeometrie zu entwickeln. Diese Arbeit liefert einen Beitrag dazu.

3.2 Weitere Eigenschaften und Ausführungen der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die Kreisbogen-Stirnverzahnung ist aufgrund ihrer Formgebung, die eine Verzahnung zwischen den beiden Fügepartnern bildet, eine formschlüssige Verbindung. Um zusätzlich eine kraftschlüssige Kraftübertragung zu realisieren, sind die Zahnflanken schräg zu gestalten. Im Zusammenspiel mit einer axialen Vorspannkraft, die z. B. mittels eines Zugankers aufzubringen ist, entsteht durch die induzierte Reibkraft ein Kraftschluss, der ebenfalls zur Übertragung von Kräften und Momenten genutzt werden kann. Vornehmlich für dynamische Anwendungen ist der Kraftschluss von Vorteil, da hierbei, anders als beim Formschluss, stets Spielfreiheit zwischen den Zahnflanken gewährleistet ist. Schwellende oder wechselnde Belastungen führen so nicht zu einem schlagartigen Aufeinandertreffen der angrenzenden Flächen, wodurch die Beanspruchung und der Verschleiß minimiert werden. Solange die Axialkraft aufrecht gehalten wird, ist die Verbindung fixiert. Mit Wegfall der Axialkraft ist die Verbindung wieder lösbar.

Aufgrund ihrer stirnseitigen Anordnung an Bauteilen ist die Kreisbogenverzahnung zur Gruppe der Plankerbverzahnungen zu zählen. Der benötigte Bauraum für die Kreisbogen-Stirnverzahnung ist relativ gering, da dieser lediglich durch die Zahnhöhe H definiert ist. Zudem ermöglicht die stirnseitige Anordnung einen geringen Montageaufwand. Für den Ausgleich von Fluchtungsfehlern ist die Verbindung nicht geeignet, sodass sie der Funktion einer starren Kupplung entspricht.

Das Verhältnis zwischen Mittelpunktabstand a und Nutbreite b , was durch das ganzzahlige Vielfache n angegeben ist, beeinflusst die Ausrichtbarkeit der Verzahnung. Ist das ganzzahlige Vielfache n eine gerade Zahl, dann passen die Verbindungselemente alle 180° ineinander. Die Verbindung ist somit in zwei Orientierungen zusammensetzbar. Ist n ungerade, passen die Teile in nur einer Ausrichtung zusammen, wodurch deren Lage zueinander eindeutig festgelegt ist. Zur Unterscheidung beider Arten werden die Verzahnungsbilder anhand ihres zugeordneten Vielfachen n in *gerade* und *ungerade Geometrien* kategorisiert und dem Unterscheidungsmerkmal *Parität* zugeordnet. Das Vielfache n stellt somit einen wichtigen Kennwert zur Beschreibung der Verzahnung dar.

3. Kreisbogen-Stirnverzahnung

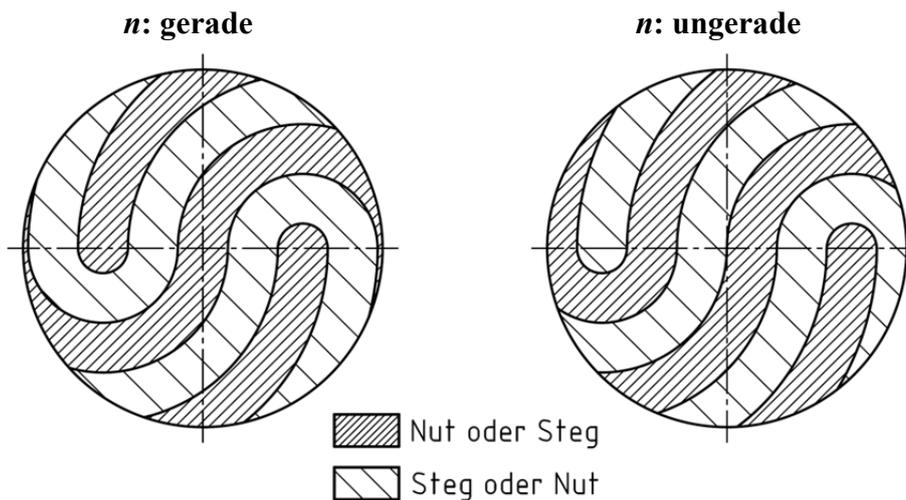


Abbildung 3-5: Beispielhafte Ausführungen der geraden und ungeraden Profilierungen

Die Verzahnungspaare der ungeraden Geometrie (einfach orientierbar) sind spiegelbildlich zueinander ausgeführt, während bei den geraden Verzahnungspartnern (zweifach orientierbar) neben der spiegelbildlichen Ausführung zusätzlich Nut und Steg vertauscht sind. Darüber hinaus weist die gerade Verzahnung eine Punktsymmetrie auf, die bei der ungeraden nicht gegeben ist. Zur Differenzierung der beiden Verzahnungspartner wird zwischen *Partner A* oder *Seite A* und *Partner B* bzw. *Seite B* unterschieden, wobei nicht definiert ist, welche der Seiten mit A und welche mit B zu bezeichnen ist.

Die Herstellung der Verzahnung erfolgt, je nach Zahnquerschnittsgeometrie, durch Schaft- oder Formfräser, die die Nuten in die zu bearbeitende Oberfläche einarbeiten. Das verbleibende Material zwischen den Nuten bildet die Stege, die in die Nuten der komplementären Verzahnung passen. Im Gegensatz zur Hirth-Verzahnung sind für die Herstellung der Kreisbogen-Stirnverzahnung keine Spezialmaschinen erforderlich. Es genügt die Bearbeitung in quasi einer Ebene (2,5-Achsen). Aufgrund der konstanten Stegbreite über die gesamte Profilierungsfläche ist die Herstellung der Verzahnung per Gießereitechnik ebenfalls möglich. Die konstanten Materialstärken führen zu einer gleichmäßigen Abkühlung des Bauteils, was dadurch weniger zum Verzug neigt. Eine gute Maß- und Formhaltigkeit sowie geringe Eigenspannungen sind die Folge.

Die Kreisbogen-Stirnverzahnung ist im Getriebebau als Welle-Nabe-Verbindung, Kupplungselement oder Achsenflansch anwendbar. Außerdem kann sie im allgemeinen Stahl- oder Gestellbau eingesetzt werden. Die Profilierung eines Flansches mit der Kreisbogenverzahnung bietet die Möglichkeit, Gestellteilverbindungen für die Übertragung von höheren Kräften und Momenten auszulegen. Dadurch können z. B. Maschinentische, -gestelle oder -einhausungen völlig neu gestaltet und ausgeführt werden.

In den nachstehenden Kapiteln werden die auftretenden Spannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung deterministisch hergeleitet und analysiert. Aufbauend auf den Ergebnissen werden Methoden entwickelt, um die Beanspruchungen der Verbindung bei Torsionsmomentbelastung zu berechnen. Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

3. Kreisbogen-Stirnverzahnung

- Die Übertragung von Torsionsmomenten mittels der Kreisbogen-Stirnverzahnung geschieht vornehmlich formschlüssig und spielfrei.
- Die sich gegenseitig berührenden Stege werden einerseits durch Flächenpressung an den Flanken und andererseits durch Scherspannung im Zahnfußbereich (Übergangsbereich zwischen Nutgrund und Steg) beansprucht.
- Da die Spannungen durch ein Torsionsmoment induziert werden, sind sie radial linear steigend. Die Scherspannungen im Zahnfußbereich sind somit mittels Torsionsspannungen zu beschreiben. Eine Verwölbung des Zahnfußquerschnitts wird ausgeschlossen.
- Eventuell vorkommende Biegebeanspruchungen werden vernachlässigt.

Es folgt die Ermittlung der entstehenden Scherspannungen im Zahnfußbereich, die mittels Torsionsspannungen beschrieben werden.

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Wird die Verzahnung mit einem Torsionsmoment beaufschlagt, werden die einzelnen Stege in ihrem Fußbereich auf Scherung bzw. Schub beansprucht. Maßgebend für die Schubspannungen aufgrund einer Torsionsmomentbelastung ist das *Torsionsflächenmoment* I_t . Das Torsionsflächenmoment ist eine rein geometrische Größe und wird auch als *Flächenmoment 2. Ordnung* bezeichnet. Es ist wie folgt definiert:

$$4-1 \quad I_t = \int_A r^2 dA$$

Zur Herleitung des Torsionsflächenmomentes der Kreisbogen-Stirnverzahnung wird zunächst das *Flächenmoment 0. Ordnung* gebildet. Das Flächenmoment 0. Ordnung ist gemäß seinem Grad durch nachstehenden mathematischen Ausdruck beschrieben und entspricht einer Querschnittsfläche:

$$4-2 \quad \int_A r^0 dA = \int_A dA = A$$

Die Gleichung wird genutzt, um im nachstehenden Kapitel die Scherfläche der Kreisbogen-Stirnverzahnung zu bestimmen. Im Anschluss wird aufbauend auf dem Ergebnis eine Berechnungsvorschrift entwickelt, um das gesuchte Torsionsflächenmoment der Verzahnung zu ermitteln.

Zur Vereinfachung der anstehenden Berechnungen werden ausschließlich Verzahnungen mit senkrechten Zahnflanken untersucht (Flankenwinkel $\alpha = 0^\circ$). Außerdem wird der Fußrundungsradius R mit null angenommen. Aufgrund dieser Vereinfachungen gleicht die Kontur am Zahnfuß dem Verzahnungsbild. Die *Scherfläche* A_S der Kreisbogen-Stirnverzahnung entspricht dann den Flächen des Verzahnungsbildes, die zu den Stegen gehören, und ist allein mit den zweidimensionalen Verzahnungsparametern bestimmbar.

4.1 Bestimmung der Scherfläche der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die relative Größe der Scherfläche des ungeraden Verzahnungsbildes zur Basisgeometrie wird erkennbar, wenn die Geometrie in ihrem Ursprung gespiegelt wird, wie in Abbildung 4-1 visualisiert:

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

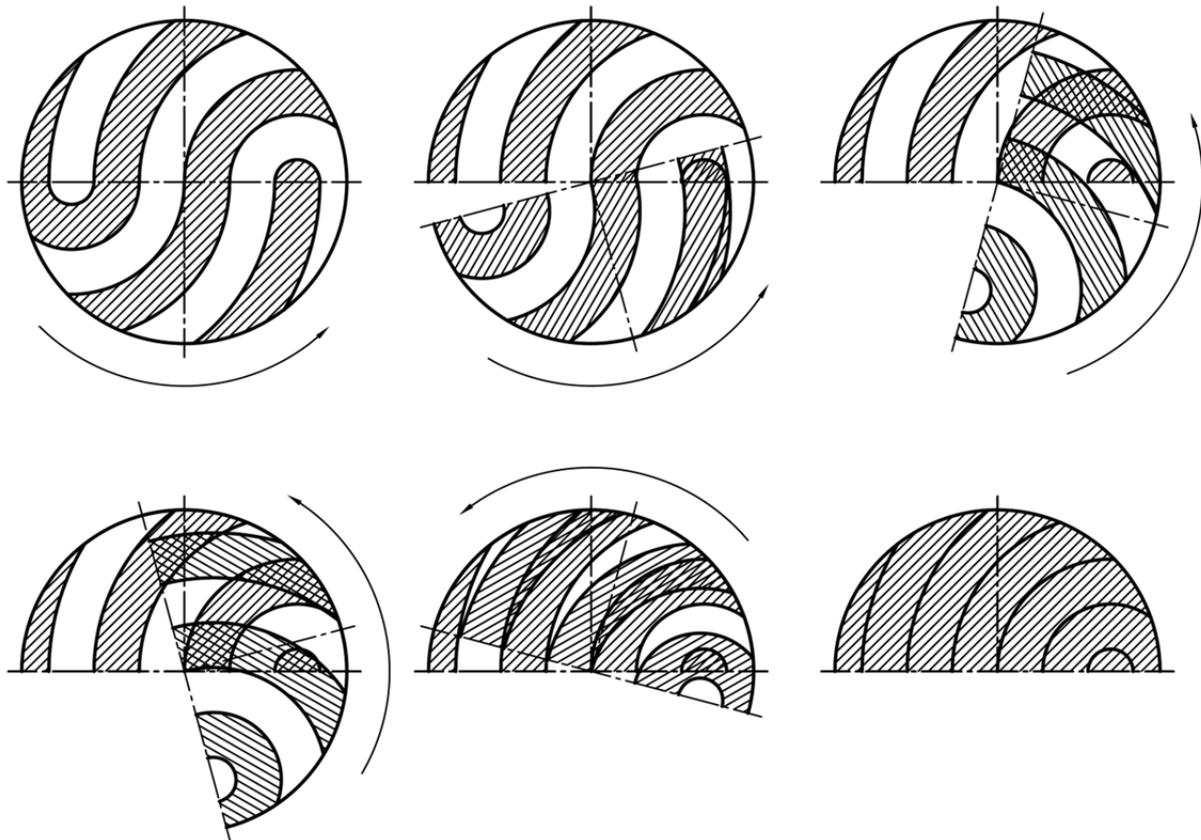


Abbildung 4-1: Veranschaulichung des Verhältnisses zwischen Steg bzw. Nut zur Gesamtfläche bei der ungeraden Geometrie durch Drehung der Profilunterhälfte in die Oberhälfte

Die abgebildete Schrittfolge veranschaulicht eine Drehung der unteren Profilhälfte in die obere. Es wird ersichtlich, dass die Stegflächen der unteren Profilhälfte den Flächen der Nuten in der oberen Profilhälfte entsprechen. Die Scherfläche der ungeraden Verzahnung beträgt demnach immer die Hälfte der Basisfläche.

Für die gerade Verzahnung kann ein näherungsweise gleiches Flächenverhältnis angenommen werden, wenn die Stege und Nuten schmal und zahlreich sind. Bei Verzahnungsbildern mit großen und wenigen Nuten und Stegen ist dies jedoch nicht vorauszusetzen. Nachstehende Abbildung verdeutlicht die Abschätzungsproblematik anhand unterschiedlicher Ausführungen der Kreisbogen-Stirnverzahnung:

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

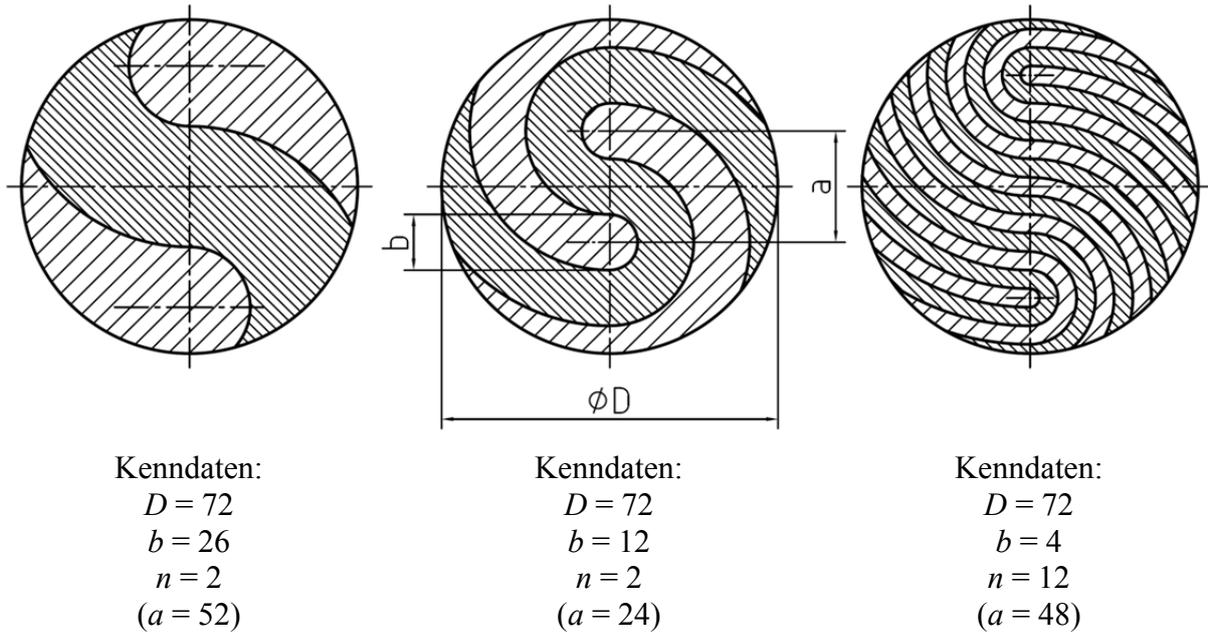


Abbildung 4-2: Beispiele von Verzahnungsbildern mit unterschiedlichen Verzahnungsparametern

Während für das rechte Beispiel ein Verhältnis zwischen Nut und Steg von etwa 1:1 besteht, kann dies für das Beispiel links nicht problemlos angenommen werden. Hierfür ist eine exakte Auswertung der Scherfläche durchzuführen.

Zur Berechnung der Scherfläche A_S wird das Verzahnungsbild mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen. Der Ursprung des Koordinatensystems wird in den Mittelpunkt der Basisfläche gelegt. Die Orientierung wird so gewählt, dass die Kreisbogenmittelpunkte auf der Abszisse liegen. Die Abszisse teilt die Geometrie in eine Ober- und eine Unterhälfte. Da bei der geraden Verzahnungsgeometrie Ober- und Unterhälfte punktsymmetrisch sind, genügt es für die weitere Analyse, nur die Scherfläche einer Hälfte zu berechnen und diese anschließend zu verdoppeln. Die betrachtete Geometriehälfte wird in *Einzelflächen* A_{S_m} ($m \in \mathbb{N}$) unterteilt, wie im nachfolgenden Bild dargestellt:

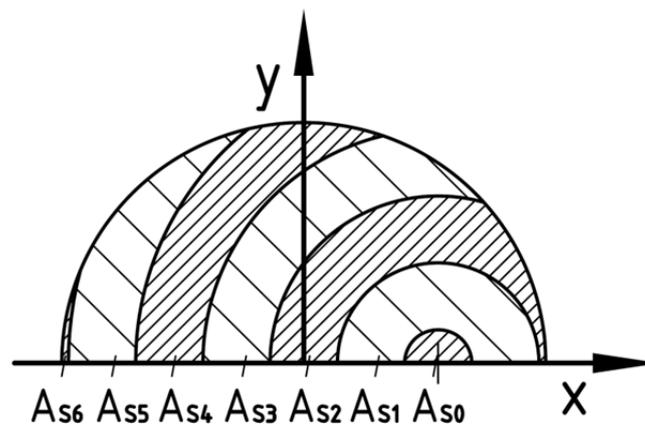


Abbildung 4-3: Obere Hälfte einer geraden Verzahnungsgeometrie mit einem auf den Mittelpunkt bezogenen Koordinatensystem

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die gesamte Scherfläche A_S entspricht der Summe aller Einzelflächen A_{S_m} , die dem Steg zuzuordnen sind. Pro Verzahnungspartner ist also jede zweite Einzelfläche A_{S_m} für die Bildung der gesamten Scherfläche zu verwenden.

Die Einzelflächen A_{S_m} werden aus der Subtraktion von überlagerten *Flächensegmenten* A_m gebildet, wie in Abbildung 4-4 veranschaulicht ist:

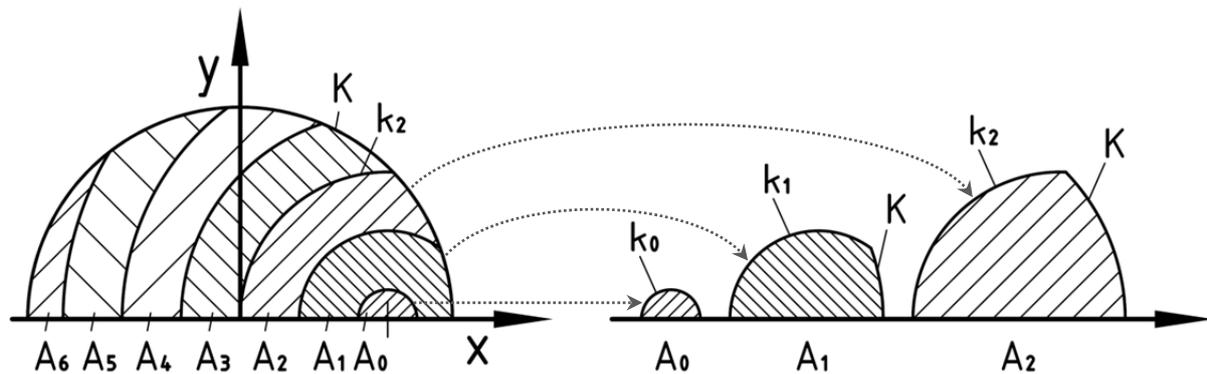


Abbildung 4-4: Aufteilung der Einzelflächen A_{S_m} in sich überlagernde Flächensegmente

Das einzelne Flächensegment A_m wird durch die *Kreisbogenlinie* k_m , die *Kreislinie des Basiskreises* K und die x -Achse definiert. Der Kreisbogen mit dem kleinsten Radius erhält stets den Index null. Dies trifft auch dann zu, wenn der Kreisbogen aufgrund eines groß gewählten Mittelpunktabstandes a vollständig außerhalb der Basiskontur liegt. Die übrigen Kreisbögen werden fortlaufend nummeriert. Das Flächensegment A_m erhält den gleichen Index wie der Kreisbogen k_m , der das entsprechende Flächensegment definiert. Im obigen Beispiel beschreibt das Flächensegment A_0 einen Halbkreis. A_1 bis A_5 sind aufgrund der Begrenzung durch die Basis *abgeschnittene Halbkreise*. Einen Ausnahmefall bildet stets das Flächensegment mit dem höchsten Index (hier A_6). Dieses ist nicht durch eine Kreisbogenlinie k , sondern nur durch die Basislinie K und die x -Achse definiert. Dessen Index ist immer um eins größer als der höchste Kreisbogen innerhalb der Basis (es existiert keine Kreisbogenlinie k_6 innerhalb der Beispielgeometrie). Der Flächeninhalt des höchsten Flächensegmentes entspricht immer der halben Basisfläche. Das Vorgehen zur Bestimmung des Flächeninhaltes der übrigen Flächensegmente ist im nachfolgenden Kapitel erörtert.

4.1.1 Berechnung des Inhaltes eines Flächensegmentes

Der Inhalt eines Flächensegmentes wird durch die Bildung eines Integrals unterhalb des zugehörigen Kreisbogens k und der Basiskontur K bestimmt. Zur Berechnung des Integrals werden die Polarkoordinaten r und φ genutzt, die auf das verwendete kartesische Koordinatensystem zu beziehen sind. Die Verwendung der Polarkoordinaten hat Vorteile für die anstehenden Berechnungen des Torsionsflächenmomentes und der Torsionsspannung. Der Ansatz zur Bestimmung des Flächeninhaltes A_m ist mit dem nachstehend aufgeführten Integral gegeben (vgl. Gleichung 4-2):

$$4-3 \quad A_m = \int_A dA = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} r \, d\varphi \, dr$$

Die Grenzen des Mehrfachintegrals sind abhängig von der Lage der Kreisbogenlinie k zur Basiskontur K und werden im Folgenden ermittelt. Zur Vermeidung von Irritationen aufgrund

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

von Doppeldeutigkeiten wird in den nachstehenden Berechnungen der Radius von k durch den halben Durchmesser d und der Radius von K durch den halben Durchmesser D angegeben. Dadurch besteht eine deutliche Abgrenzung zur Variablen r , die für die Systemkoordinate genutzt wird. Während D ein Verzahnungsparameter ist, stellt d lediglich einen Hilfsparameter dar und ist aus Gründen der besseren Übersicht und des besseren Verständnisses eingeführt. Der Hilfsparameter d ist an späterer Stelle durch einen Zusammenhang aus den Verzahnungsparametern zu substituieren. Der Mittelpunkt von K liegt stets im Systemursprung, die Lage des Mittelpunktes von k ist lediglich entlang der x -Achse variabel und durch den Verzahnungsparameter a bestimmt. Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem liegt der Mittelpunkt von k bei $x_M = a/2$. Abbildung 4-5 verdeutlicht die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Parametern und Variablen:

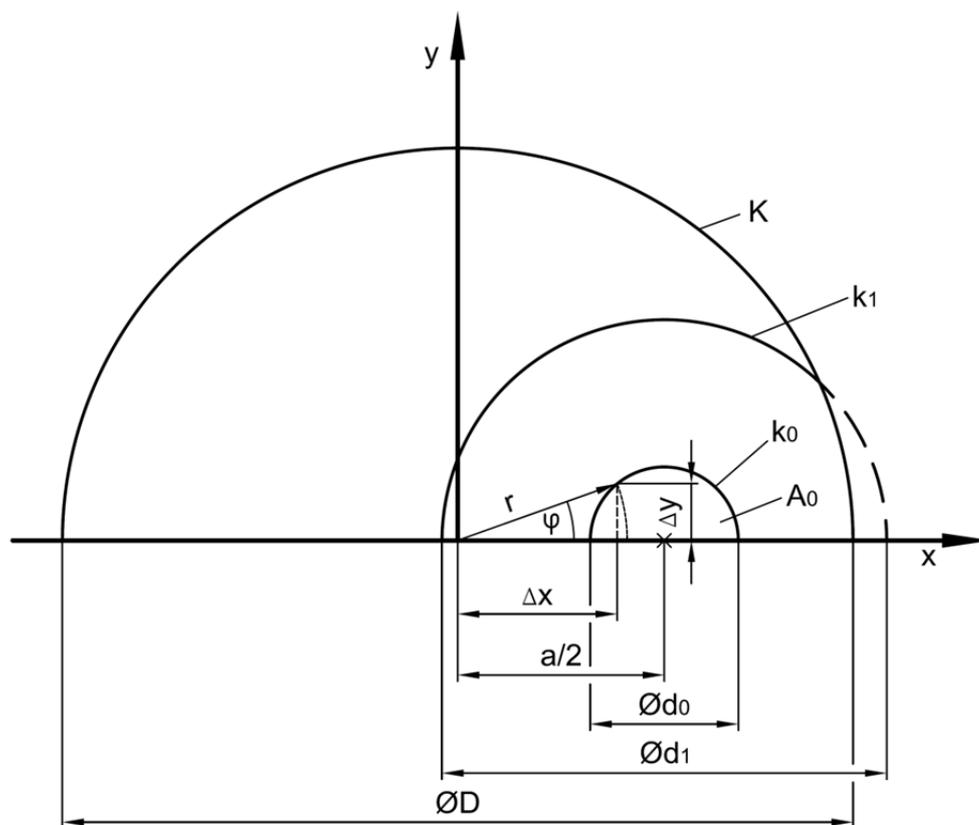


Abbildung 4-5: Verdeutlichung der Vorgehensweise zur Integralbildung von A_m

Um die Obergrenze von r zu bestimmen, ist eine Fallunterscheidung durchzuführen. Schneidet k den Basiskreis K nicht (vgl. k_0 in Abbildung 4-5), liegt die Obergrenze bei $a/2 + d/2$. Weisen Kreislinie k und Basiskreis K einen Schnittpunkt auf (vgl. k_1 in Abbildung 4-5), entspricht die Obergrenze von r dem halben Basisdurchmesser D . Zusammengefasst gilt für r_{\max} Folgendes:

$$4-4 \quad r_{\max} = \begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{d}{2}, & \text{für } \frac{a}{2} + \frac{d}{2} < \frac{D}{2} \text{ (Halbkreis innerhalb der Basis)} \\ \frac{D}{2}, & \text{für } \frac{a}{2} + \frac{d}{2} \geq \frac{D}{2} \text{ (Halbkreis schneidet Basiskreis)} \end{cases}$$

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

$$4-5 \quad \Leftrightarrow r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

Die Untergrenze von r ist ebenfalls mittels einer Fallunterscheidung zu ermitteln. Diese ist abhängig von der Position der Kurve k zur Ordinate. Für den Fall, dass die Kurve k die Ordinate nicht schneidet (vgl. k_0 in Abbildung 4-5), gilt die nachstehende Beziehung:

$$4-6 \quad \frac{a}{2} > \frac{d}{2}$$

bzw.

$$4-7 \quad \Leftrightarrow a > d \quad \text{für } k \text{ schneidet } y\text{-Achse nicht}$$

Die Variable r weist dann die folgende Untergrenze auf:

$$4-8 \quad \Leftrightarrow r_{\min} = \frac{a-d}{2} \quad \text{für } a > d$$

Tritt der gegenteilige Fall ein, Kurve k schneidet die y -Achse (vgl. k_1 in Abbildung 4-5), entsprechen die Relationen zwischen a und d den nachstehenden Gegebenheiten:

$$4-9 \quad \frac{a}{2} < \frac{d}{2}$$

bzw.

$$4-10 \quad \Leftrightarrow a < d \quad \text{für } k \text{ schneidet } y\text{-Achse}$$

Die Untergrenze von r liegt in diesem Fall bei null:

$$4-11 \quad r_{\min} = 0 \quad \text{für } a < d$$

Zusammengefasst gilt für r_{\min} :

$$4-12 \quad r_{\min} = \begin{cases} 0, & \text{für } a < d \\ \frac{a-d}{2}, & \text{für } a > d \end{cases}$$

Die Variable φ beginnt stets bei null. Für die Untergrenze gilt demnach:

$$4-13 \quad \varphi_{\min} = 0$$

Die Obergrenze von φ steht in Abhängigkeit von r und ist erreicht, sobald die Koordinaten φ und r einen Punkt beschreiben, der entweder auf der Kurve k oder wieder auf der x -Achse liegt. Letzteres bedeutet eine 180° -Drehung von φ und kann nur dann auftreten, wenn das Flächensegment die y -Achse schneidet (vgl. k_1 in Abbildung 4-5). Gibt die Kurve k die

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Begrenzung für φ an, ist zur Ermittlung von φ_{\max} zunächst eine Funktion aufzustellen, die die Bogenlinie k per Polarkoordinaten beschreibt. Dazu wird die *allgemeine Kreisgleichung* auf die Kurve k angewendet und anschließend auf die Polarkoordinaten bezogen. Die allgemeine Kreisgleichung lautet:

$$4-14 \quad (x - e)^2 + (y - f)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

mit e – Verschiebung des Mittelpunktes entlang der x -Achse
 f – Verschiebung des Mittelpunktes entlang der y -Achse

Auf die Kurve k angewendet und umgeformt nach y ergibt die Funktion für k :

$$4-15 \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$4-16 \quad \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$

Mittels des Satzes von Pythagoras wird der Bezug zur Polarkoordinate r hergestellt:

$$4-17 \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$4-18 \quad \Leftrightarrow r^2 = x^2 + \frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{d^2}{4} - x^2 + 2x\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$4-19 \quad \Leftrightarrow r^2 = \frac{d^2}{4} + ax - \frac{a^2}{4}$$

$$4-20 \quad \Leftrightarrow x = \frac{r^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{a}$$

Die Beziehung zwischen der kartesischen Variablen x und den Polarkoordinaten r und φ wird mit folgendem trigonometrischen Zusammenhang beschrieben (vgl. Abbildung 4-5):

$$4-21 \quad \varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

Das Einsetzen der Gleichung 4-20 in die Gleichung 4-21 führt zu einer Kurvenfunktion für k in Polarkoordinaten:

$$4-22 \quad \varphi = \arccos\left(\frac{r^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{ar}\right) = \varphi_{\max}$$

Die Gleichung definiert für φ in Abhängigkeit von r einen Punkt auf der Kurve k und entspricht somit der Obergrenze von φ . Die Bestimmungsgleichung hat nur dann ihre

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Gültigkeit, solange der Definitionsbereich der Arkuscosinus-Funktion beibehalten wird. Dafür müssen folgende Bedingungen eingehalten sein, die auch aus Abbildung 4-5 ersichtlich sind:

$$4-23 \quad \frac{|a-d|}{2} \leq r \leq \frac{a+d}{2}$$

Im Umkehrschluss ist die Funktion zu φ_{\max} für den nachstehenden Fall nicht definiert:

$$4-24 \quad r < \frac{|a-d|}{2}$$

Schneidet die Kurve k die y -Achse nicht, wird der Definitionsbereich immer eingehalten (vgl. die Integrationsgrenzen für r ; Gleichung 4-5 und 4-12). Wird die y -Achse von k geschnitten, weist r Werte auf, die der Beziehung 4-24 entsprechen und somit außerhalb des Definitionsbereiches der Gleichung 4-22 liegen. In diesen Fällen ist die x -Achse die Begrenzung für φ . Die Variable φ ist dann von 0 bis π gültig:

$$4-25 \quad \varphi_{\max} = \pi \quad \text{für } r < \frac{|a-d|}{2}$$

Zusammengefasst besteht für φ_{\max} die nachstehende Zuordnungsvorschrift:

$$4-26 \quad \varphi_{\max} = \begin{cases} \pi, & \text{für } r < \frac{|a-d|}{2} \\ \arccos\left(\frac{r^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{ar}\right), & \text{sonst} \end{cases}$$

Die ermittelten Integrationsgrenzen sind in Gleichung 4-3 einzusetzen. Dabei ist in zwei Fälle zu unterscheiden. Schneidet k die y -Achse nicht (es gilt $a > d$; vgl. Beziehung 4-7), ist der Flächeninhalt des Flächensegmentes wie folgt zu bestimmen:

$$A_m = \int_{\frac{a-d}{2}}^{r_{\max}} r \cdot \arccos\left(\frac{r^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{ar}\right) dr$$

$$4-27 \quad \text{mit} \quad \text{für } a > d$$

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Schneidet k die y -Achse (es besteht die Beziehung $a < d$; vgl. 4-10), ist die nachstehende Formel für die Bestimmung des Flächeninhaltes zu verwenden:

$$A_m = \int_0^{\left|\frac{a-d}{2}\right|} r \cdot \pi \, dr + \int_{\left|\frac{a-d}{2}\right|}^{r_{\max}} r \cdot \arccos\left(\frac{r^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{ar}\right) \, dr$$

4-28

mit

für $a < d$

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a + d}{2}, & \text{für } a + d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a + d \geq D \end{cases}$$

Mit Formel 4-28 werden zunächst zwei Teilflächen berechnet (siehe z. B. A_1 und A_2 in Abbildung 4-6) und anschließend zu der gesuchten Gesamtfläche addiert. Das erste Integral der Formel bildet einen Halbkreis um den Ursprung (siehe A_1 in Abbildung 4-6). Die Obergrenze für φ hierbei ist π . Sobald r einen Wert annimmt, der dem Definitionsbereich nach 4-23 entspricht, wird die übrige Fläche (siehe A_2 in Abbildung 4-6) nach Gleichung 4-27 berechnet.

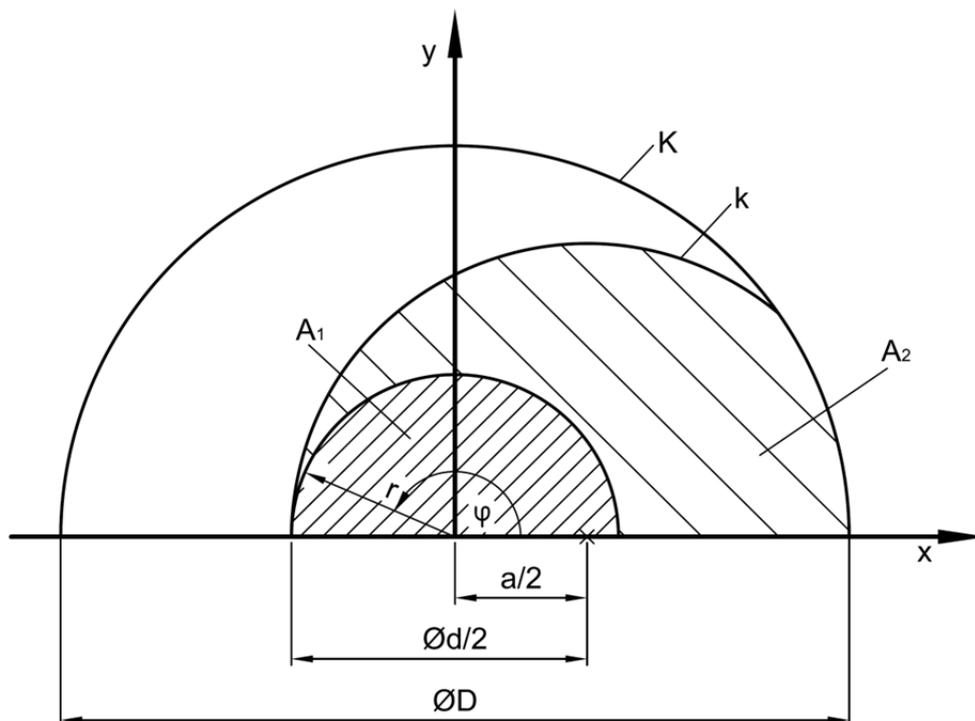


Abbildung 4-6: Berechnung des Flächensegmentes aus der Addition der Teilflächen A_1 und A_2

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Anhand des Verhältnisses zwischen a und d wird bestimmt, welche der beiden genannten Formeln (4-27 oder 4-28) zur Berechnung von A_m zu verwenden ist. Zur Vermeidung der Fallunterscheidung werden die Parameter a und d in den folgenden Zusammenhang gebracht:

$$4-29 \quad \operatorname{acos}\left(\frac{a-d}{|a-d|}\right) \neq f(r)$$

Die Funktion hat die folgenden Eigenschaften:

$$4-30 \quad \operatorname{acos}\left(\frac{a-d}{|a-d|}\right) = \operatorname{acos}(1) = 0 \quad \text{für } a > d$$

$$4-31 \quad \operatorname{acos}\left(\frac{a-d}{|a-d|}\right) = \operatorname{acos}(-1) = \pi \quad \text{für } a < d$$

Wenn a größer ist als d (y -Achse wird nicht von k geschnitten), ergibt der Term innerhalb der Arkuscosinus-Funktion den Wert eins. Die Arkuscosinus-Funktion selbst ist dann null. Ist a kleiner als d (k schneidet y -Achse) wird der Zähler im Arkuscosinusterm negativ, der Nenner jedoch aufgrund des Absolutwertes positiv, was ein funktionsinternes Ergebnis von -1 zur Folge hat. Die Arkuscosinus-Funktion ergibt hierbei π . Sind a und d gleich groß (k berührt die y -Achse), ist die Arkuscosinus-Funktion nicht definiert. Für die nachfolgenden Ausführungen hat diese Gegebenheit jedoch keine Relevanz, weshalb an dieser Stelle die Funktion für diesen Fall der Einfachheit halber null gesetzt wird, sodass gilt:

$$4-32 \quad \operatorname{acos}\left(\frac{a-d}{|a-d|}\right) = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq d \\ \pi, & \text{für } a < d \end{cases}$$

Wird π in Gleichung 4-28 durch die genannte Arkuscosinus-Funktion substituiert, entsteht daraufhin die nachstehende Formel:

$$A_m = \int_0^{\frac{|a-d|}{2}} r \cdot \operatorname{acos}\left(\frac{a-d}{|a-d|}\right) dr + \int_{\frac{|a-d|}{2}}^{r_{\max}} r \cdot \operatorname{acos}\left(\frac{r^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{ar}\right) dr$$

mit

$$4-33 \quad r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

und

$$\operatorname{acos}\left(\frac{a-d}{|a-d|}\right) = 0, \quad \text{für } a = d$$

Ist $a > d$ entspricht die neue Formel der Gleichung 4-27, ist $a < d$ entspricht sie Gleichung 4-28. Die Fallunterscheidung ist mit Formel 4-33 folglich nicht mehr durchzuführen.

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Bei der Integration der Formel unterstützt der softwarebasierte Mathematik-Assistent *Derive 5* von *Texas Instruments*. Mit dem Ergebnis kann der Flächeninhalt eines beliebigen Flächensegmentes A_m anhand der Verzahnungsparameter a und D sowie des Hilfsparameters d berechnet werden:

$$4-34 \quad A_m = \frac{d^2 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{4 \cdot r_{\max}^2 - d^2 - a^2}{2ad}\right)}{8} - \frac{r_{\max}^2 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{4 \cdot r_{\max}^2 - d^2 + a^2}{4ar_{\max}}\right)}{2} - \frac{\sqrt{-16r_{\max}^4 + 8r_{\max}^2 \cdot (d^2 + a^2) - d^4 + a^2 \cdot (2d^2 - a^2)}}{16} + \frac{\pi d^2}{16} + \frac{\pi r_{\max}^2}{4}$$

mit

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

Die Lösung ist für die nachstehend aufgeführten Fälle nicht definiert:

- | | | |
|------|-------------------------------|---|
| 4-35 | $a = 0$ | Das Verzahnungsbild besteht aus konzentrischen Kreisen. Dies entspricht nicht der Definition der Kreisbogen-Stirnverzahnung und ist daher für die angestellten Untersuchungen nicht relevant. |
| 4-36 | $d = 0$ | Für diesen Fall ist der Kreisbogen punktförmig. Es gibt keine Fläche, die berechnet werden kann. |
| 4-37 | $D = 0$ | Für diesen Fall besteht die Basis aus einem Punkt. Flächen sind dadurch ebenfalls nicht vorhanden. |
| 4-38 | $\frac{a-d}{2} > \frac{D}{2}$ | Der betrachtete Kreisbogen liegt außerhalb der Basis und gehört nicht zum Verzahnungsbild (vgl. k_0 in der nachfolgenden Abbildung 4-7). |
| 4-39 | $\frac{d-a}{2} > \frac{D}{2}$ | Der betrachtete Kreisbogen liegt außerhalb der Basis und gehört nicht zum Verzahnungsbild (vgl. k_1 in der nachfolgenden Abbildung 4-7). |

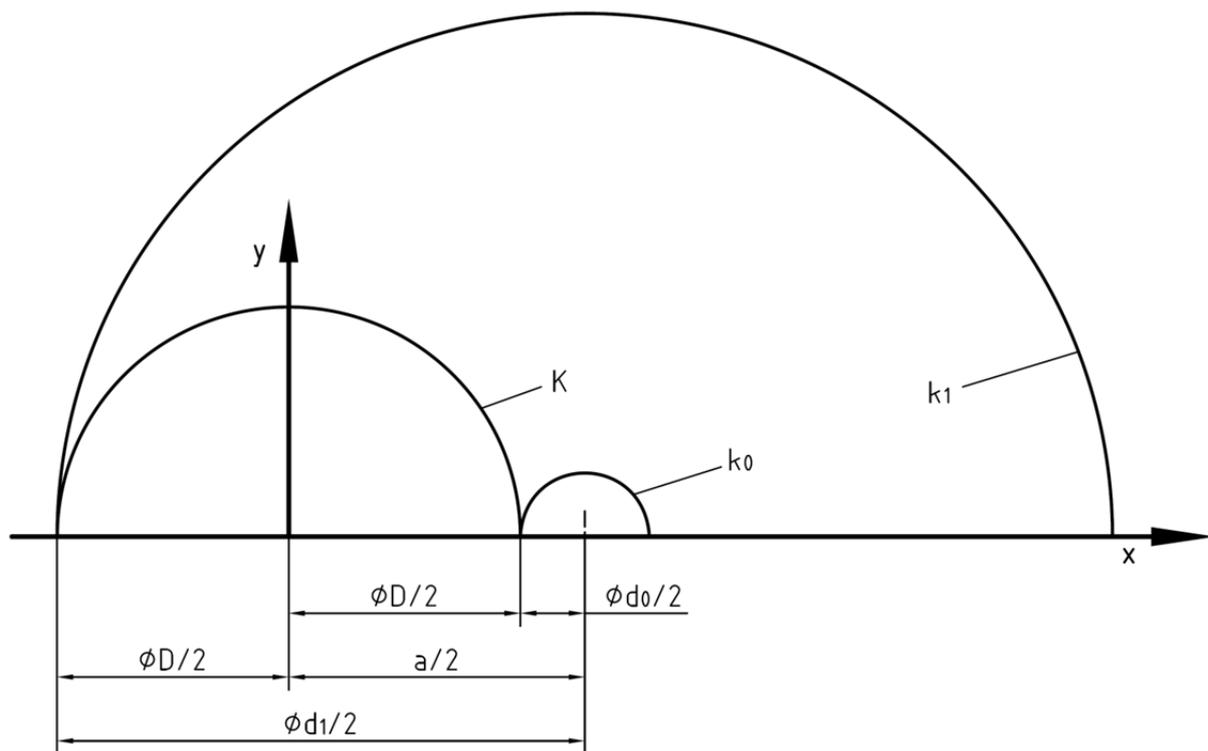


Abbildung 4-7: Visualisierung der Kreisbogenlinien, die nicht mehr innerhalb der Basisfläche sind und deshalb nicht zum Verzahnungsbild gehören

Für den Fall $a = d$ ist Gleichung 4-34 definiert, sodass die Vereinfachung nach 4-32 keine Auswirkungen auf die Lösung hat.

Zusammengefasst ist die Berechnungsvorschrift 4-34 für folgende Verhältnisse gültig:

$$|d - a| \leq D$$

4-40

und

$$a > 0; D > 0; d > 0$$

Eine Verifizierung der Formel 4-34 wird mittels überprüfbarer Bedingungen durchgeführt. Dazu werden zunächst Werte eingesetzt, die in ihrem Ergebnis dem Flächeninhalt eines Halbkreises entsprechen müssen. Dies ist der Fall, wenn die nachstehende Bedingung erfüllt ist (vgl. Abbildung 4-5):

4-41

$$a + d < D$$

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Angewendet auf Formel 4-34 ergibt:

$$A_m = \frac{d^2 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{(a+d)^2 - d^2 - a^2}{2ad}\right)}{8} - \frac{(a+d)^2 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{(a+d)^2 - d^2 + a^2}{2a(a+d)}\right)}{8}$$

$$4-42 \quad - \frac{\sqrt{-(a+d)^4 + 2(a+d)^2 \cdot (d^2 + a^2) - d^4 + a^2 \cdot (2d^2 - a^2)}}{16}$$

$$+ \frac{\pi d^2}{16} + \frac{\pi(a+d)^2}{16}$$

$$4-43 \quad \Leftrightarrow A_m = \frac{\pi d^2}{8}$$

Das Ergebnis entspricht dem Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Durchmesser d , wodurch die Gültigkeit der ermittelten Formel für den betrachteten Fall bestätigt ist. Die Überprüfung der Gültigkeit bei einem abgeschnittenen Halbkreis wird mit Hilfe des CAD Programmes *AutoCAD* der Firma *Autodesk* durchgeführt. Dieses beinhaltet unter anderem die Möglichkeit, Inhalte gezeichneter Flächen ausrechnen zu lassen. Ein Vergleich beider Ergebnisse verifiziert die entwickelte Formel:

Geometrie (entnommen aus Abbildung 4-4)	Ergebnis <i>AutoCAD</i>	Ergebnis Gleichung 4-34
$A_0(a = 50; d = 10; D = 72)$	39,27	39,27
$A_1(a = 50; d = 30; D = 72)$	318,97	318,97
$A_2(a = 50; d = 50; D = 72)$	687,1	687,1

Tabelle 4-1: Vergleich der Ausgabewerte von *AutoCAD* und Gleichung 4-34 für ausgewählte Flächensegmente (siehe Abbildung 4-4).

Um die Verzahnungsparameter auf die Berechnungsvorschrift 4-34 anwenden zu können, ist zuletzt der in diesem Kapitel benutzte Hilfsparameter d zu substituieren. Der Hilfsparameter d wird durch ein unbestimmtes ganzzahliges Vielfaches m der Nutbreite b definiert. Dieses ganzzahlige Vielfache m ist nicht gleichzusetzen mit dem ganzzahligen Vielfachen n , das zur Beschreibung des Abstandes der Kreisbogenmittelpunkte herangezogen wird, sondern steht im Zusammenhang mit dem Index des betrachteten Kreisbogens. Verdeutlicht wird die Beziehung zwischen b , d und m in nachstehender Abbildung:

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

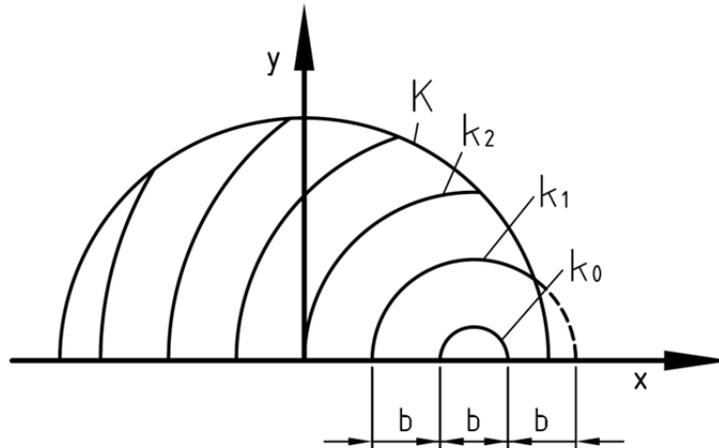


Abbildung 4-8: Visualisierung des Bezugs zwischen dem Durchmesser eines Kreisbogens und der Nutbreite b

Der Durchmesser d der Kreislinie k_1 in dem Beispiel entspricht dem Dreifachen der Nutbreite b . Allgemein ist der Hilfsparameter d mit dem nachstehenden Zusammenhang aus den Verzahnungsparametern zu substituieren:

$$4-44 \quad d = b + 2 \cdot m \cdot b = b \cdot (1 + 2m) = 2 \cdot r_k$$

Die Variable m entspricht dabei dem Index des Flächensegmentes, das berechnet wird.

Mit Bezug auf die Verzahnungsparameter ist der Inhalt eines einzelnen Flächensegmentes mit folgender Berechnungsanweisung zu bestimmen:

$$4-45 \quad A_m = \frac{d^2 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{4 \cdot r_{\max}^2 - d^2 - a^2}{2ad}\right)}{8} - \frac{r_{\max}^2 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{4 \cdot r_{\max}^2 - d^2 + a^2}{4ar_{\max}}\right)}{2} - \frac{\sqrt{-16r_{\max}^4 + 8r_{\max}^2 \cdot (d^2 + a^2) - d^4 + a^2 \cdot (2d^2 - a^2)}}{16} + \frac{\pi d^2}{16} + \frac{\pi r_{\max}^2}{4}$$

mit

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

und

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a + d}{2}, & \text{für } a + d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a + d \geq D \end{cases}$$

Die Berechnungsvorschrift 4-45 ermöglicht die Berechnung des Flächeninhaltes für jedes A_m , wenn der Index m zu einem Kreisbogen gehört, der innerhalb der Basis liegt. Für m existiert somit eine Definitionsmenge, deren Bestimmung im nachstehenden Kapitel erörtert wird.

4.1.2 Definitionsmenge des Index m

Je nach Wahl von a ist es möglich, dass Kreisbögen vollständig außerhalb der Basisgeometrie platziert sind. Diese werden als ungültig oder nicht relevant gewertet. Als gültige Kreisbögen werden diejenigen definiert, die tatsächlich innerhalb der Basisfläche liegen und dadurch ein Flächensegment kennzeichnen. Kreisbögen, die lediglich einen Berührungspunkt mit dem Basiskreis K aufweisen und sonst außerhalb der Basis liegen, zählen nicht dazu. Die Indizes der gültigen Kreisbögen bestimmen die Definitionsmenge von m . Die Grenzen dieses Definitionsbereiches sind mit den Verzahnungsparametern ermittelbar. In Abbildung 4-9 sind die Verhältnisse zwischen den relevanten Größen ersichtlich:

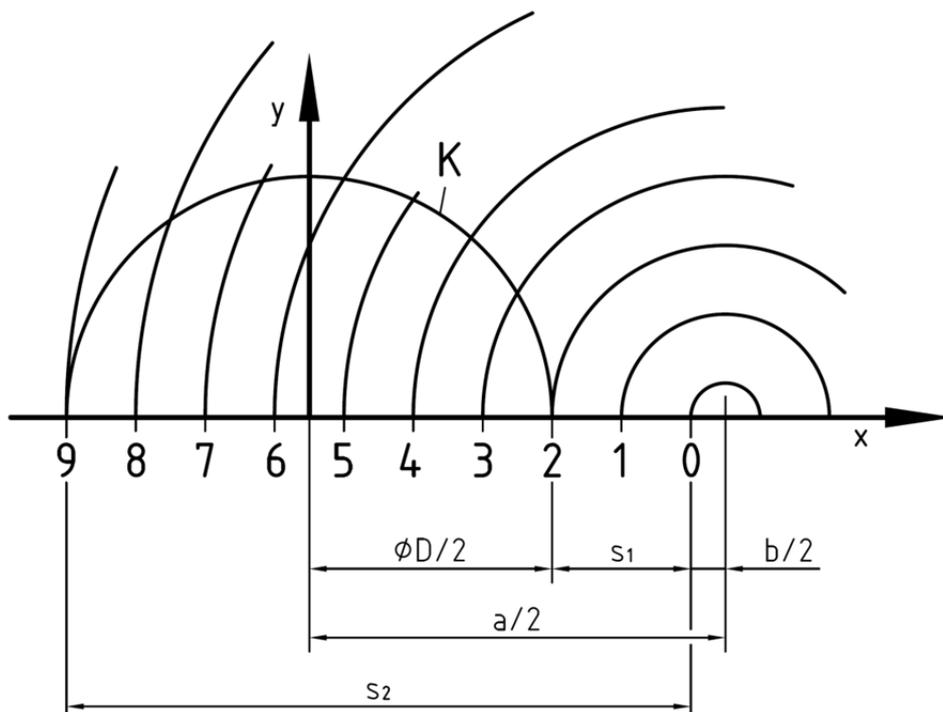


Abbildung 4-9: Ermittlung der Grenzen für m

Zur Ermittlung der Untergrenze für m ist zunächst der Abstand des Kreisbogens k_0 zur Basiskontur zu bestimmen. Dieser Abstand ist in der Abbildung mit s_1 gekennzeichnet und mit den Verzahnungsparametern wie folgt verknüpft:

$$4-46 \quad s_1 = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{D}{2}$$

Ist die Strecke s_1 nach obiger Formel negativ, befindet sich der Kreisbogen k_0 innerhalb der Basis und liegt somit innerhalb des Gültigkeitsbereiches. Der kleinste geltende Wert für m ist in diesem Fall null:

$$4-47 \quad m_{\min} = 0 \quad \text{für} \quad \frac{a - b - D}{2} < 0$$

Ist die Strecke s_1 positiv, ist sie zunächst durch die Nutbreite b zu dividieren. Ein ganzzahliges Ergebnis entspricht dem Index des Kreisbogens, der die Basisfläche lediglich von außen

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

berührt und deshalb nicht zur Kontur der Kreisbogen-Stirnverzahnung gehört. Der Index m des ersten gültigen Kreisbogens muss also größer sein als dieses Ergebnis. Es gilt:

$$4-48 \quad m > \frac{s_1}{b} = \frac{a - b - D}{2b} \quad \text{für } \frac{a - b - D}{2} \geq 0$$

Da der Quotient aus der Strecke s_1 und der Nutbreite b jedoch einen beliebigen rationalen Wert annehmen kann und m immer eine ganze Zahl ist, ist zur Bestimmung von m der Quotient aus s_1/b zunächst auf die nächstkleinere ganze Zahl abzurunden und anschließend mit eins zu addieren:

$$4-49 \quad m_{\min} = \left\lfloor \frac{a - b - D}{2 \cdot b} \right\rfloor + 1 \quad \text{für } \frac{a - b - D}{2} \geq 0$$

Dabei ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Es ist nicht möglich, den Quotienten s_1/b lediglich aufzurunden, anstatt ihn zunächst abzurunden und anschließend mit eins zu addieren. Denn für den Fall, dass der Quotient s_1/b bereits eine ganze Zahl ist, entspräche das Ergebnis ohne Addition mit eins dem Index des Kreisbogens, der lediglich einen Berührungspunkt mit der Basis aufweist, und würde somit nicht zum Gültigkeitsbereich zählen. Bedingung 4-48 wäre dann nicht erfüllt.

Zusammengefasst gilt für m_{\min} :

$$4-50 \quad m_{\min} = \begin{cases} 0, & \text{für } a - D - b < 0 \\ \left\lfloor \frac{a - D - b}{2 \cdot b} \right\rfloor + 1, & \text{für } a - D - b \geq 0 \end{cases}$$

Der Index des letzten gültigen Kreisbogens wird nach analogem Vorgehen ermittelt. Hierfür ist zuerst die Strecke s_2 (siehe Abbildung 4-9) zu bestimmen:

$$4-51 \quad s_2 = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{D}{2}$$

Die Division dieser Strecke durch die Länge b ergibt bei einem ganzzahligen Ergebnis den Index des Kreisbogens, der die Basisfläche auf der anderen Seite der x -Achse berührt und deshalb ebenfalls nicht zur Verzahnung zählt. Der Index des letzten gültigen Kreisbogens muss also unterhalb dieses Quotienten liegen:

$$4-52 \quad m < \frac{s_2}{b} = \frac{a - b + D}{2b}$$

Da auch hier das Ergebnis beliebig rational ausfallen kann, wird der obige Term analog der Begründung zur Bestimmung von m_{\min} erst auf die nächst größere, ganze Zahl aufgerundet und anschließend um eins subtrahiert:

$$4-53 \quad m_{\max} = \left\lceil \frac{a - b + D}{2 \cdot b} \right\rceil - 1$$

Dabei ist $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist.

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die Anzahl m_n aller Kreisbögen innerhalb der Basis ist mit der nachfolgenden Formel zu bestimmen:

$$4-54 \quad m_n = m_{\max} - m_{\min} + 1$$

Da die Nummerierung der Kreisbögen bei null beginnt, ist die Zählung der Kreisbögen um -1 verschoben. Eine Addition mit eins kompensiert diese Verschiebung.

Mit dem bekannten Definitionsbereich für m können alle existierenden Flächensegmente A_m berechnet werden. Dazu ist jeder Wert des Definitionsbereiches von m jeweils in die Formel für A_m (Formel 4-45) einzusetzen. Aus der richtigen Kombination der einzelnen Flächensegmente A_m entsteht die gesamte Scherfläche A_S . Die Vorgehensweise zum Erhalt von A_S wird im nachfolgenden Kapitel behandelt.

4.1.3 Ermittlung der gesamten Scherfläche

Die gesamte Scherfläche A_S besteht aus der Summe aller Einzelflächen $A_{S m}$, die zum Steg gehören (vgl. Abbildung 4-3). Die Einzelfläche $A_{S m}$ wird aus der Differenz zweier Flächensegmente A_m gebildet (vgl. Abbildung 4-4). Dabei wird von dem Flächensegment A_m das vorangestellte Flächensegment (mit dem Index $m - 1$) subtrahiert:

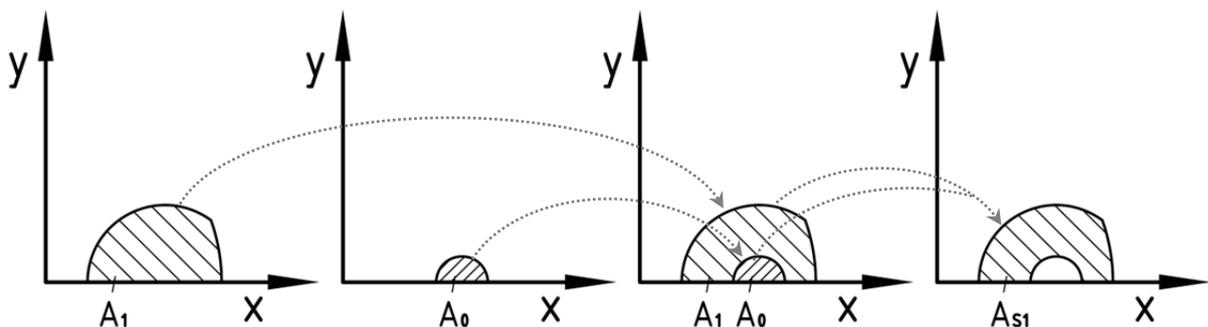


Abbildung 4-10: Bildung der Einzelfläche $A_{S m}$ aus zwei Flächensegmenten

$$4-55 \quad A_{S m} = A_m - A_{m-1} \quad \text{gilt nicht für } m = m_{\min}$$

Eine Ausnahme bildet die Einzelfläche $A_{S m \min}$. Da diese bereits den kleinsten Index innerhalb der Basis aufweist, existiert kein weiteres Flächensegment, das von $A_{m \min}$ subtrahiert werden kann. Das Flächensegment $A_{m \min}$ ist gleichzeitig auch die Einzelfläche $A_{S m \min}$:

$$4-56 \quad A_{S m \min} = A_{m \min}$$

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Das Flächensegment mit höchstem Index wird nicht durch eine Kreisbogenlinie k , sondern durch die Basiskonturlinie K beschrieben (siehe Abbildung 4-4). Dessen Index ist nicht Bestandteil des Definitionsbereiches für m , und es erhält aus diesem Grund den Index $m_{\max} + 1$. Dieses Flächensegment stellt immer die Fläche eines Halbkreises dar. Die entsprechende Einzelfläche $A_{S m_{\max} + 1}$ wird aus der Differenz des genannten Halbkreises und dem Flächensegment mit dem Index m_{\max} bestimmt:

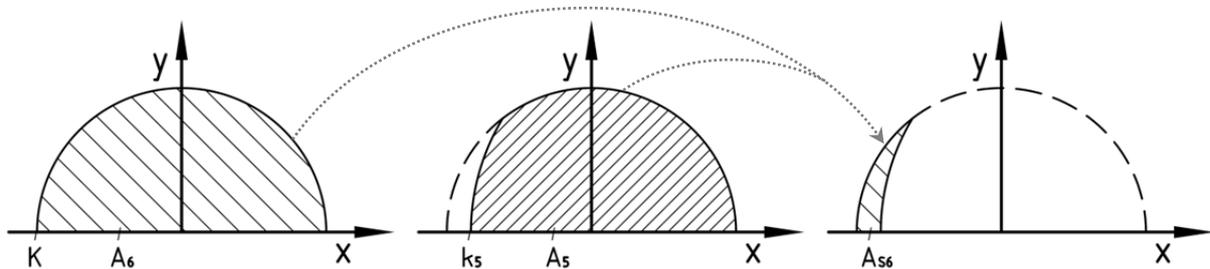


Abbildung 4-11: Bildung der Einzelfläche $A_{S m_{\max}+1}$ aus zwei Flächensegmenten

$$4-57 \quad A_{S m_{\max}+1} = A_{m_{\max}+1} - A_{m_{\max}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{4} \cdot \pi - A_{m_{\max}}$$

Für die Addition der Einzelflächen $A_{S m}$, die zum Erhalt der gesamten Scherfläche A_S führt, ist aufgrund der wechselnden Verteilung von Stegen und Nuten nur jede zweite Einzelfläche zu berücksichtigen. Daraus resultiert, dass abhängig vom betrachteten Verzahnungspartner entweder alle Einzelflächen mit geradem oder alle mit ungeradem Index m zu addieren sind. Die Summe ist anschließend mit zwei zu multiplizieren, da bei der geraden Verzahnung jede Einzelfläche zweimal vorhanden ist (je einmal in der oberen und einmal in der unteren Profilhälfte; vgl. Abbildung 4-3).

Unter der Voraussetzung, dass sowohl m_{\min} als auch m_{\max} beide entweder gerade Werte oder ungerade Werte aufweisen, ist die gesamte Scherfläche A_S nach den folgenden Formeln zu bestimmen:

$$4-58 \quad A_{S A/B} = 2 \cdot [A_{S m_{\min}} + A_{S m_{\min}+2} + \dots + A_{S m_{\max}-2} + A_{S m_{\max}}]$$

bzw.

$$4-59 \quad A_{S B/A} = 2 \cdot [A_{S m_{\min}+1} + A_{S m_{\min}+3} + \dots + A_{S m_{\max}-1} + A_{S m_{\max}+1}]$$

Dabei entspricht $A_{S A}$ der Gesamtscherfläche des Verzahnungspartners A, $A_{S B}$ der von Partner B. Es ist nicht definiert, welcher Verzahnungspartner mit A und welcher mit B bezeichnet wird. Die Gleichungen können also entweder für Partner A oder für Partner B verwendet werden, jedoch nicht die jeweils gleiche Formel für beide Partner.

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Zusammengefasst ist die gesamte Scherfläche A_S mit nachstehenden Berechnungen zu bestimmen:

Für m_{\min} und m_{\max} sind gerade oder ungerade gilt:

$$4-60 \quad A_{S A/B} = 2 \cdot \left[\frac{D^2}{8} \pi + \sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} A_{2m} - A_{2m+1} \right]$$

bzw. (für den Verzahnungspartner; $A_{S A} \neq A_{S B}$)

$$4-61 \quad A_{S B/A} = 2 \cdot \left[\sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} A_{2 \cdot m+1} - A_{2 \cdot m} \right]$$

mit

$$4-62 \quad A_{m \max+1} = \frac{D^2}{8} \cdot \pi \quad (\text{vgl. Gleichung 4-57})$$

und A_m nach 4-45

Ist m_{\min} gerade und m_{\max} ungerade oder m_{\min} ungerade und m_{\max} gerade, gilt für die gesamte Scherfläche:

$$4-63 \quad A_{S A/B} = 2 \cdot [A_{S m \min} + A_{S m \min+2} + \dots + A_{S m \max-1} + A_{S m \max+1}]$$

bzw.

$$4-64 \quad A_{S B/A} = 2 \cdot [A_{S m \min+1} + A_{S m \min+3} + \dots + A_{S m \max-2} + A_{S m \max}]$$

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Es entsteht die entsprechende mathematische Berechnungsvorschrift:

Für m_{\min} ist gerade und m_{\max} ist ungerade oder m_{\min} ist ungerade und m_{\max} ist gerade gilt:

$$4-65 \quad A_{S A/B} = 2 \cdot \left[A_{m \min} + \sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} A_{2 \cdot m+1} - A_{2 \cdot m} \right]$$

bzw. (für den Verzahnungspartner; $A_{S A} \neq A_{S B}$)

$$4-66 \quad A_{S B/A} = 2 \cdot \left[\sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} A_{2 \cdot m} - A_{2 \cdot m-1} \right]$$

mit

$$4-67 \quad A_{m \max+1} = \frac{D^2}{8} \cdot \pi \quad (\text{vgl. Gleichung 4-57})$$

und A_m nach 4-45

Als Kontrollmechanismus für die Richtigkeit der Ergebnisse dient die Addition der Gesamtscherflächen beider Verzahnungspartner, deren Summe der gesamten Basisfläche entsprechen muss:

$$4-68 \quad A_{S A} + A_{S B} \stackrel{!}{=} \frac{D^2}{4} \cdot \pi$$

Die Überprüfung des Algorithmus erfolgt anhand von beispielhaft ausgewählten Geometrien (entnommen aus Abbildung 4-2), deren Gesamtscherflächen einerseits mit dem entwickelten Algorithmus berechnet, andererseits von *AutoCAD* ausgewertet werden. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle aufgeführt:

Kenndaten der Verzahnung	Ergebnis <i>AutoCAD</i>		Ergebnis Algorithmus	
	Partner A	Partner B	Partner A	Partner B
$D = 72; b = 4; n = 12 (a = 48)$	2 036,38	2 035,13	2 036,38	2 035,13
$D = 72; b = 12; n = 2 (a = 24)$	1 972,41	2 099,10	1 972,41	2 099,10
$D = 72; b = 26; n = 2 (a = 52)$	2 060,64	2 010,86	2 060,64	2 010,86

Tabelle 4-2: Vergleich der Ausgabewerte von *AutoCAD* und dem Vorgehen zur Bestimmung der gesamten Scherfläche

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Der Vergleich der Ergebnisse zeigt keinen Unterschied, wodurch die Gültigkeit des entwickelten Algorithmus bestätigt ist.

Zur Vollständigkeit wird der Algorithmus zur Bestimmung der Scherfläche A_S bei ungerader Verzahnungsgeometrie angeführt, auch wenn bereits bekannt ist, dass diese immer der Hälfte der Basisfläche entspricht. Bei der ungeraden Verzahnungsgeometrie ist jede vorkommende Einzelfläche A_{S_m} insgesamt einmal zu berücksichtigen:

Für n ist ungerade gilt:

$$4-69 \quad A_{S_A} = A_{S_B} = A_{S_{m_{\min}}} + A_{S_{m_{\min}+1}} + \dots + A_{S_{m_{\max}}} + A_{S_{m_{\max}+1}}$$

nach Gleichung 4-57 ist:

$$4-70 \quad \Leftrightarrow A_{S_{A/B}} = A_{m_{\min}} + (A_{m_{\min+1}} - A_{m_{\min}}) + (A_{m_{\min+2}} - A_{m_{\min+1}}) + \dots \\ + (A_{m_{\max}} - A_{m_{\max-1}}) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{4} \pi - A_{m_{\max}} \right)$$

$$4-71 \quad \Leftrightarrow A_{S_{A/B}} = A_{m_{\min}} + \sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} A_{m+1} - A_m$$

bzw. ausformuliert:

$$4-72 \quad \Leftrightarrow A_{S_{A/B}} = A_{m_{\max}+1} = \frac{D^2}{8} \pi$$

Das Ergebnis entspricht gemäß den Erwartungen dem Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Durchmesser D .

Mit dem erläuterten Vorgehen ist es möglich, die Scherfläche der Kreisbogen-Stirnverzahnung anhand der Verzahnungsparameter zu berechnen. Darauf aufbauend wird im nachfolgenden Kapitel eine Berechnungsvorschrift zur Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes der Verzahnung entwickelt.

4.2 Torsionsflächenmoment der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Das Torsionsflächenmoment einer komplexen Geometrie kann mittels Addition und Subtraktion von bekannten, einzelnen Torsionsflächenmomenten bestimmt werden, wenn die Verschiebungen jeweils kreisförmig um dieselbe Torsionsachse verlaufen. Deutlich wird dies z. B. bei der Berechnung des polaren Torsionsflächenmoments eines Kreisringes. Dieses wird gebildet, indem das Torsionsflächenmoment eines kleineren Kreisquerschnitts von dem des größeren subtrahiert wird.

Das gesuchte Torsionsflächenmoment I_t der Verzahnung wird demgemäß mittels Addition und Subtraktion von *einzelnen Torsionsflächenmomenten* $I_{t,m}$ ermittelt. Das Vorgehen ist an die Berechnung zur gesamten Scherfläche der Kreisbogen-Stirnverzahnung angelehnt (vgl. Kapitel 4.1). Im folgenden Kapitel wird zunächst die Ermittlung eines einzelnen Torsionsflächenmoment $I_{t,m}$ erörtert.

4.2.1 Ermittlung eines einzelnen Torsionsflächenmoments

Das *einzelne Torsionsflächenmoment* $I_{t,m}$ entspricht dem Flächenmoment 2. Grades des betreffenden Flächensegmentes A_m . Es ist neben dem reinen Flächeninhalt auch durch dessen Lage zur Torsionsachse definiert. Für die Ermittlung des einzelnen Torsionsflächenmomentes $I_{t,m}$ wird das Integral zur Bestimmung des Flächensegmentes A_m verwendet (Kapitel 4.1.1) und mittels Multiplikation mit dem Quadrat von r erweitert:

$$I_{t,m} = \int_A r^2 dA = \int_0^{\left|\frac{a-d}{2}\right|} r^3 \cdot \operatorname{acos}\left(\frac{a-d}{|a-d|}\right) dr + \int_{\left|\frac{a-d}{2}\right|}^{r_{\max}} r^3 \cdot \operatorname{acos}\left(\frac{r^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{ar}\right) dr$$

mit

4-73

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

und

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

Die Integration der Formel mit Hilfe von *Derive 5* ergibt:

$$I_{t,m} = \frac{d^2(d^2 + 2a^2) \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{4r_{\max}^2 - d^2 - a^2}{2ad}\right)}{64} - \frac{r_{\max}^4 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{4r_{\max}^2 - d^2 + a^2}{4ar_{\max}}\right)}{4} \\ - \frac{(4r_{\max}^2 + 5d^2 + a^2) \cdot \sqrt{-16r_{\max}^4 + 8r_{\max}^2 \cdot (d^2 + a^2) - a^4 + d^2 \cdot (2a^2 - d^2)}}{256} \\ + \frac{\pi d^2(d^2 + 2a^2)}{128} + \frac{\pi r_{\max}^4}{8}$$

4-74

mit

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

und

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

Der Definitionsbereich der vorstehenden Gleichung stimmt mit dem zur Berechnungsvorschrift 4-34 überein.

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die einzelnen Torsionsflächenmomente sind anschließend mittels eines Algorithmus zu kombinieren, sodass ein auf die gesamte Geometrie bezogenes *gesamtes Torsionsflächenmoment* I_t gebildet wird. Dies wird im nachstehenden Kapitel behandelt.

4.2.2 Ermittlung des gesamten Torsionsflächenmoments

Das *gesamte Torsionsflächenmoment* I_t besteht aus der entsprechenden Zusammenstellung der einzelnen Torsionsflächenmomente $I_{t,m}$. Die Zusammenstellung erfolgt analog dem Vorgehen zur Bestimmung der gesamten Scherfläche A_S . Zunächst sind die Berechnungsvorschriften bei gerader Geometrie angeführt:

Für m_{\min} und m_{\max} sind gerade oder ungerade gilt:

$$4-75 \quad I_{tA/B} = 2 \cdot \left[\frac{D^4}{64} \pi + \sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} I_{t,2m} - I_{t,2m+1} \right]$$

bzw. (für den Verzahnungspartner; $A_{S A} \neq A_{S B}$)

$$4-76 \quad I_{tB/A} = 2 \cdot \left[\sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} I_{t,2 \cdot m+1} - I_{t,2 \cdot m} \right]$$

mit

$$4-77 \quad I_{t,m \max+1} = \frac{D^4}{64} \cdot \pi$$

und $I_{t,m}$ nach 4-74

Für m_{\min} ist gerade und m_{\max} ist ungerade oder m_{\min} ist ungerade und m_{\max} ist gerade gilt:

$$4-78 \quad I_{tA/B} = 2 \cdot \left[I_{t,m \min} + \sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} I_{t,2 \cdot m+1} - I_{t,2 \cdot m} \right]$$

bzw. (für den Verzahnungspartner; $A_{S A} \neq A_{S B}$)

$$4-79 \quad I_{tB/A} = 2 \cdot \left[\sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} I_{t,2 \cdot m} - I_{t,2 \cdot m-1} \right]$$

mit

$$4-80 \quad I_{t,m \max+1} = \frac{D^4}{64} \cdot \pi$$

und $I_{t,m}$ nach 4-74

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Als Kontrolle dient die Überprüfung der Bedingung, dass die Summe aus den Torsionsflächenmomenten beider Verzahnungspartner das Torsionsflächenmoment der Basiskontur aufweisen muss. Dieses ist bei den hier behandelten Fällen das Torsionsflächenmoment eines Vollkreises:

$$4-81 \quad I_{tA} + I_{tB} \stackrel{!}{=} \frac{D^4}{32} \cdot \pi$$

Die ungerade Geometrie weist gemäß ihrer Flächenverteilung ein Torsionsflächenmoment auf, das einem halben Flächenmoment eines Kreisquerschnittes entspricht. Der zugehörige Algorithmus wird nachfolgend angeführt. Die Ausformulierung dieses Algorithmus und Eliminierung der sich gegenseitig aufhebenden einzelnen Torsionsflächenmomente bestätigt die Aussage:

$$4-82 \quad I_{tA/B} = I_{t,m \min} + \sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} I_{t,m+1} - I_{t,m}$$

bzw. (ausformuliert)

$$4-83 \quad \Leftrightarrow I_{tA/B} = I_{t,m \max+1} = \frac{D^4}{64} \cdot \pi$$

Mit den angeführten Formeln kann das Torsionsflächenmoment für ein beliebiges Verzahnungsbild anhand der zweidimensionalen Parameter ermittelt werden. Es ist bei den Berechnungen der Torsionsspannungen anzuwenden. Die Ermittlung der Torsionsspannungen ist nachstehend erläutert.

4.3 Ermittlung der Torsionsspannungen

Die *Torsionsspannungen* τ_t innerhalb der Verzahnung sind abhängig von dem Widerstand, den die Verzahnungsgeometrie der wirkenden Belastung entgegensetzt. Sie werden wie folgt ermittelt:

$$4-84 \quad \tau_t = \frac{T}{I_t} \cdot r$$

mit I_t nach Kapitel 4.2.2

In Verbindung mit dem komplementären Partner ist der Querschnitt der Verzahnung in Wellenebene ein kreisrundes, geschlossenes Profil. Es wird vorausgesetzt, dass die inneren Reaktionen einer Torsionsmomentbelastung entlang geschlossener Kreisbahnen um den Mittelpunkt stattfinden. Die maximalen Torsionsspannungen sind demnach am äußeren Rand des Querschnitts (bei $r = D/2$) anzunehmen, da dort die Verschiebungen am größten sind.

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Eine Verdeutlichung der inneren Reaktionen bei Torsionsmomentbelastung ist der nachstehenden Abbildung zu entnehmen, in der die Weiterleitung von Umfangskräften über einzelne Flächenelemente dA im Querschnitt dargestellt ist:

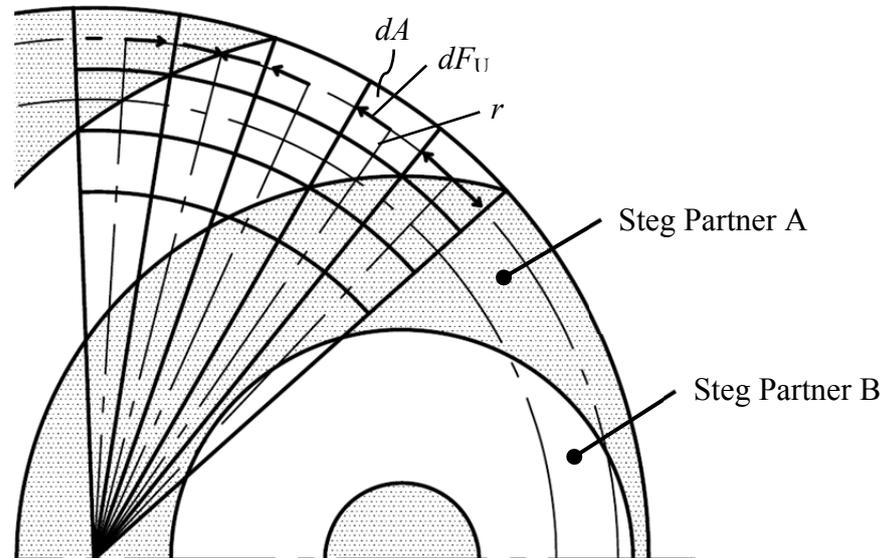


Abbildung 4-12: Visualisierung der Kraftübertragung innerhalb der Stege am äußeren Rand der Verzahnung

Schlussfolgernd gilt für die maximalen Torsionsspannungen:

$$4-85 \quad \tau_{t \max} = \frac{T}{I_t} \cdot \frac{D}{2} \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

mit I_t nach Kapitel 4.2.2

Die maximale Torsionsspannung darf die zulässige Torsionsspannung nicht überschreiten. Die zulässige Torsionsspannung $\tau_{t \text{ zul}}$ entspricht der Hälfte der Streckgrenze des verwendeten Materials sowie einer gewissen Sicherheit, mit der weitere, nicht bekannte Einflüsse auf die zulässige Torsionsspannung berücksichtigt werden:

$$4-86 \quad \tau_{t \text{ zul}} = \frac{R_e}{2 \cdot S} \quad \begin{array}{l} R_e - \text{Streckgrenze} \\ S - \text{Sicherheitsfaktor} \end{array}$$

Zur Beurteilung der maximalen Beanspruchungen ist das jeweils kleinere Torsionsflächenmoment der beiden Verzahnungspartner ausschlaggebend, da dieses zu höheren Spannungen führt. Es gilt:

$$4-87 \quad I_t = \min\{I_{tA}, I_{tB}\}$$

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Da die Summe der Torsionsflächenmomente beider Partner immer das Torsionsflächenmoment der Basisfläche ergibt und somit konstant ist, führt die Erhöhung des Torsionsflächenmomentes eines Verzahnungspartners zu einer entsprechenden Verringerung beim anderen Partner. Dies wiederum führt dazu, dass insgesamt die Belastbarkeit der Verbindung abnimmt. Folglich entspricht das ideale Torsionsflächenmoment eines Verbindungspartners dem der halben Basisfläche, weil hier ein ausgewogenes Belastbarkeitsverhältnis zwischen beiden Verbindungspartnern besteht. Diese Eigenschaft weist die ungerade Verzahnung in jeder Variation der zweidimensionalen Verzahnungsparameter auf. Demgemäß ist die ungerade Verzahnungsgeometrie stets zu bevorzugen, um ein Minimum an Torsionsspannungen zu erreichen.

Um die Belastbarkeit der geraden Verzahnungsgeometrie zu beurteilen, werden die maximalen Torsionsspannungen in Abhängigkeit von den zweidimensionalen Parametern im nachstehenden Kapitel quantitativ erfasst und gegenübergestellt.

4.4 Gegenüberstellung der Torsionsspannungen bei verschiedenen Verzahnungsbildern

Für die Gegenüberstellung werden die Torsionsspannungen auf unabhängige Parameter bezogen, um so den direkten Einfluss der einzelnen Größe deuten zu können. Die unabhängigen zweidimensionalen Parameter sind die Nutbreite b , das ganzzahlige Vielfache n und der Basisdurchmesser D . Sie bestimmen das Torsionsflächenmoment. Die Spannungen selbst werden zusätzlich vom Torsionsmoment T linear beeinflusst. Da der lineare Einfluss von T keine Auswirkungen auf die Relationen der einzelnen Spannungen untereinander hat, wird die Gegenüberstellung um diese Variable verringert. Die Spannungen werden dazu auf ein Torsionsmoment von 1 Nm normiert.

Um die Darstellung der Ergebnisse in einem Flächendiagramm zu ermöglichen, wird der Basisdurchmesser D innerhalb eines Diagrammes konstant gehalten, sodass hierbei lediglich die Parameter b und n variieren. Eine Variation des Basisdurchmessers erfolgt durch die Auftragung mehrerer Diagramme, die alle auf einen unterschiedlichen Durchmesser bezogen sind. Die Skalierung der Vertikalachsen in den Diagrammen ist nicht einheitlich, sondern zwecks besserer Detaillierung den jeweiligen Ergebnissen angepasst. Der Effekt der Änderung des Basisdurchmessers wird vornehmlich mit Abbildung 4-16 verdeutlicht, indem die drei durchmesserspezifischen Flächen in einen Diagramm eingetragen sind.

Die Nutbreite b ist innerhalb eines Spektrums von 1 bis 30 mm mit diskreten Stufen von jeweils 1 mm aufgetragen. Der Einfluss des ganzzahligen Vielfachen n wird innerhalb der Grenzen von 2 und 24 untersucht, wobei n jeweils um 2 erhöht wird (da hier die gerade Verzahnung bewertet wird, gelten für n nur gerade Werte). Die unterschiedlichen Kombinationen aus n und b werden jeweils für die Basisdurchmesser $D = 54$ mm, $D = 72$ mm und $D = 90$ mm gebildet, deren größter gemeinsamer Teiler 18 ist. Diese Werte sind aus Gründen der Vergleichbarkeit mit realen Versuchen so gewählt.

Zusätzlich sind in den Diagrammen die idealen Torsionsspannungen aufgeführt, die mit der ungeraden Verzahnungsgeometrie bei einem Torsionsmoment von 1 Nm und dem entsprechenden Durchmesser erreicht werden. Damit wird das Niveau, auf dem die Spannungen der einzelnen Parametervariationen der geraden Geometrie liegen, deutlich.

Die Flächendiagramme sind nachfolgend abgebildet:

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

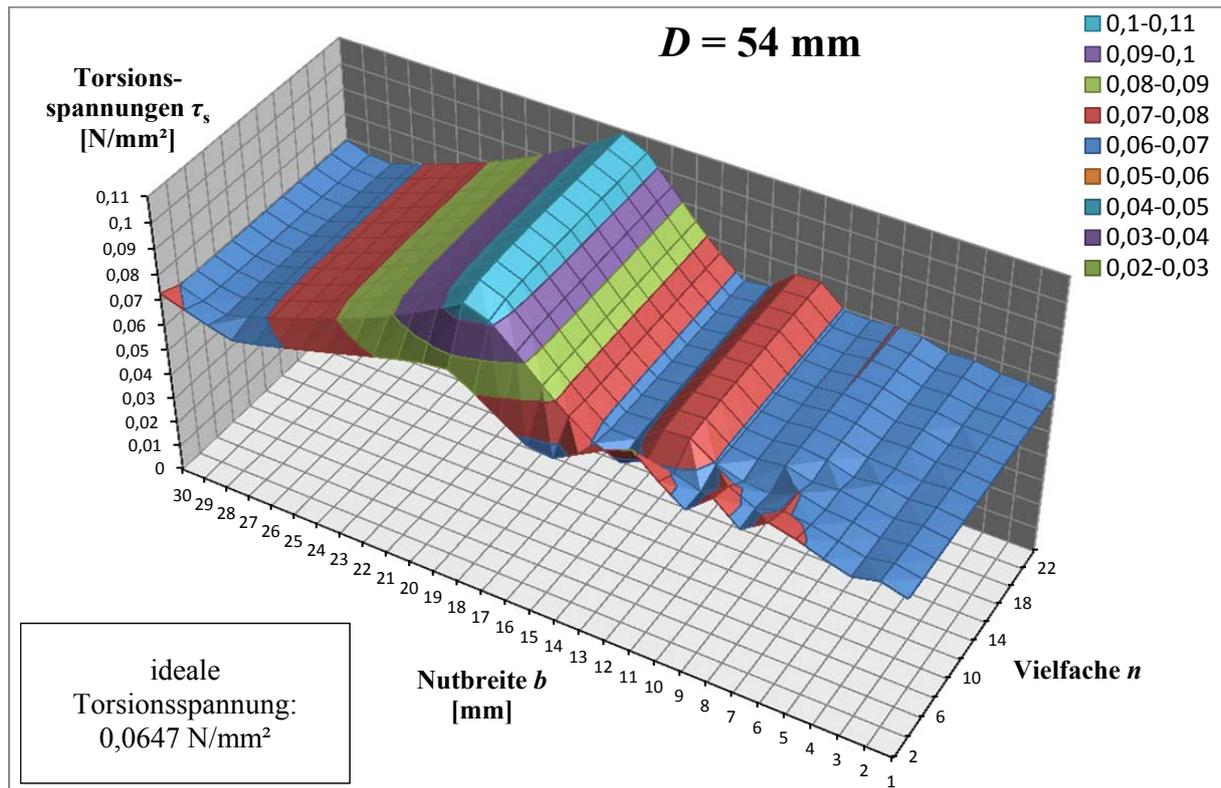


Abbildung 4-13: Torsionsspannungen verschiedener Variationen der geraden Verzahnungsgeometrie bei 1 Nm für einen Basisdurchmesser von 54 mm

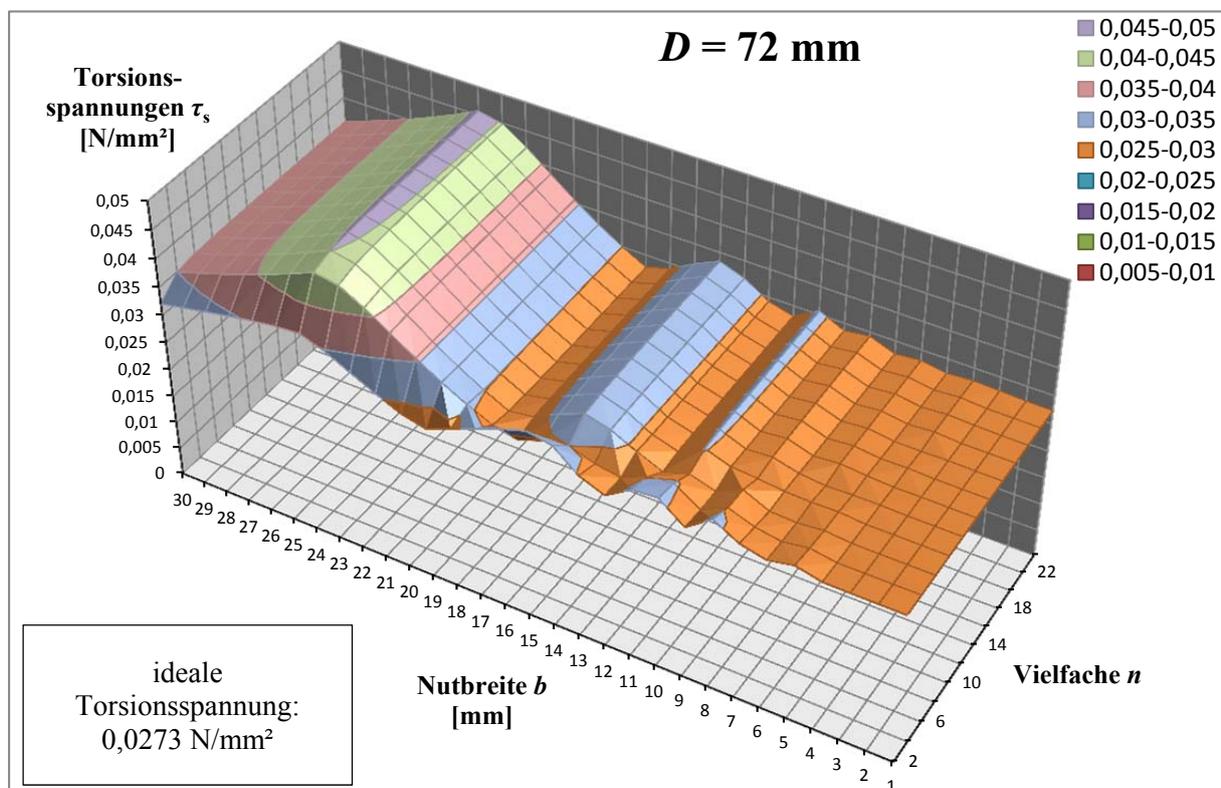


Abbildung 4-14: Torsionsspannungen verschiedener Variationen der geraden Verzahnungsgeometrie bei 1 Nm für einen Basisdurchmesser von 72 mm

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

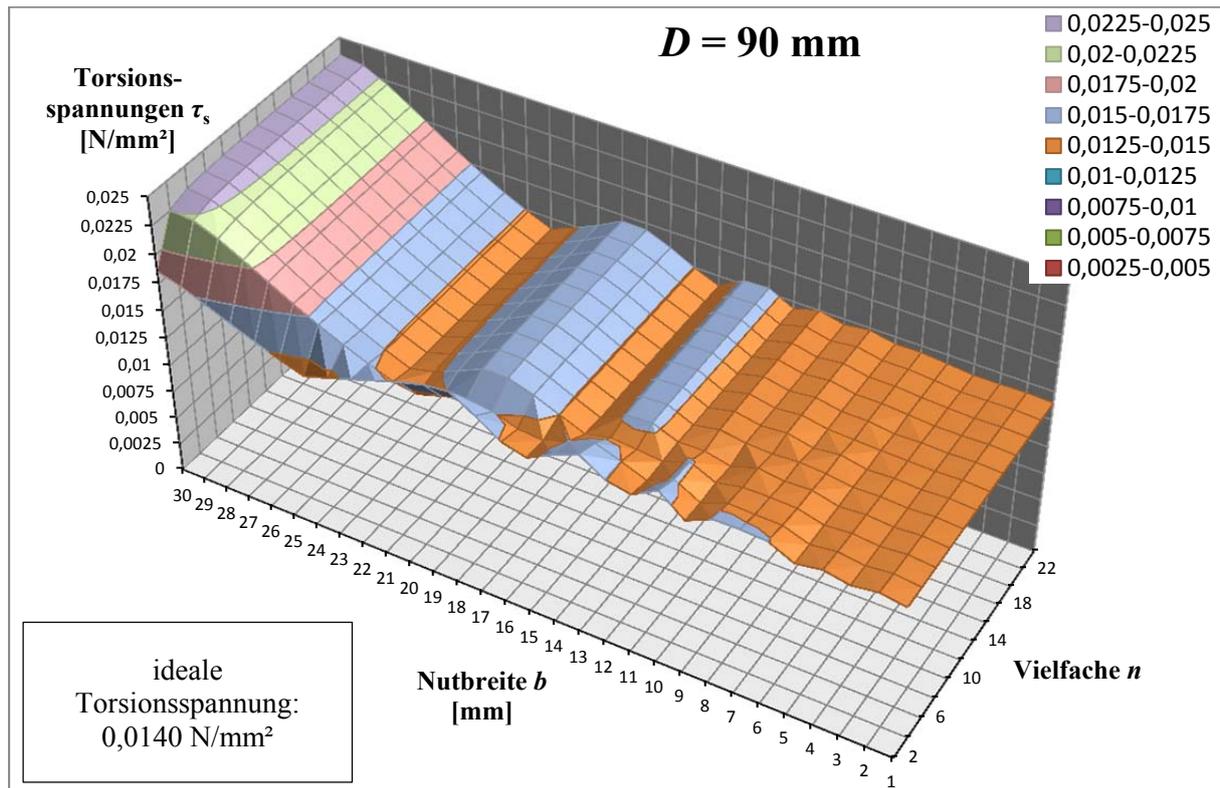


Abbildung 4-15: Torsionsspannungen verschiedener Variationen der geraden Verzahnungsgeometrie bei 1 Nm für einen Basisdurchmesser von 90 mm

Die graphische Gegenüberstellung verdeutlicht, dass die Abhängigkeit der Torsionsspannungen von den zweidimensionalen Parametern nicht durch eine einfache Systemeigenschaft zu beschreiben ist. Trotzdem können anhand des Vergleiches gewisse Merkmale hergeleitet werden.

Vornehmlich mittels Abbildung 4-16 ist zu erkennen, dass die Wahl des Durchmessers einen großen Einfluss auf die Torsionsspannungen hat. Die Spannungen sind umso kleiner, je größer der Durchmesser ist. Dies ist plausibel, da mit einem größeren Wellendurchmesser mehr Fläche für den Widerstand zur Verfügung steht. Des Weiteren ist den Diagrammen zu entnehmen, dass die niedrigeren Torsionsspannungen vornehmlich bei kleineren Nutbreiten vorliegen. Gemäß den Erwartungen aus Kapitel 4.1 sind die Scherflächen von Verzahnungspartnern mit kleineren Nutbreiten näherungsweise gleich groß und gleichmäßig verteilt und deshalb besser für Torsionsmomentbeanspruchungen geeignet als Verzahnungen mit größerer Nutbreite. Das Vielfache n hat der Gegenüberstellung zufolge weniger Einfluss auf die entstehenden Torsionsspannungen.

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

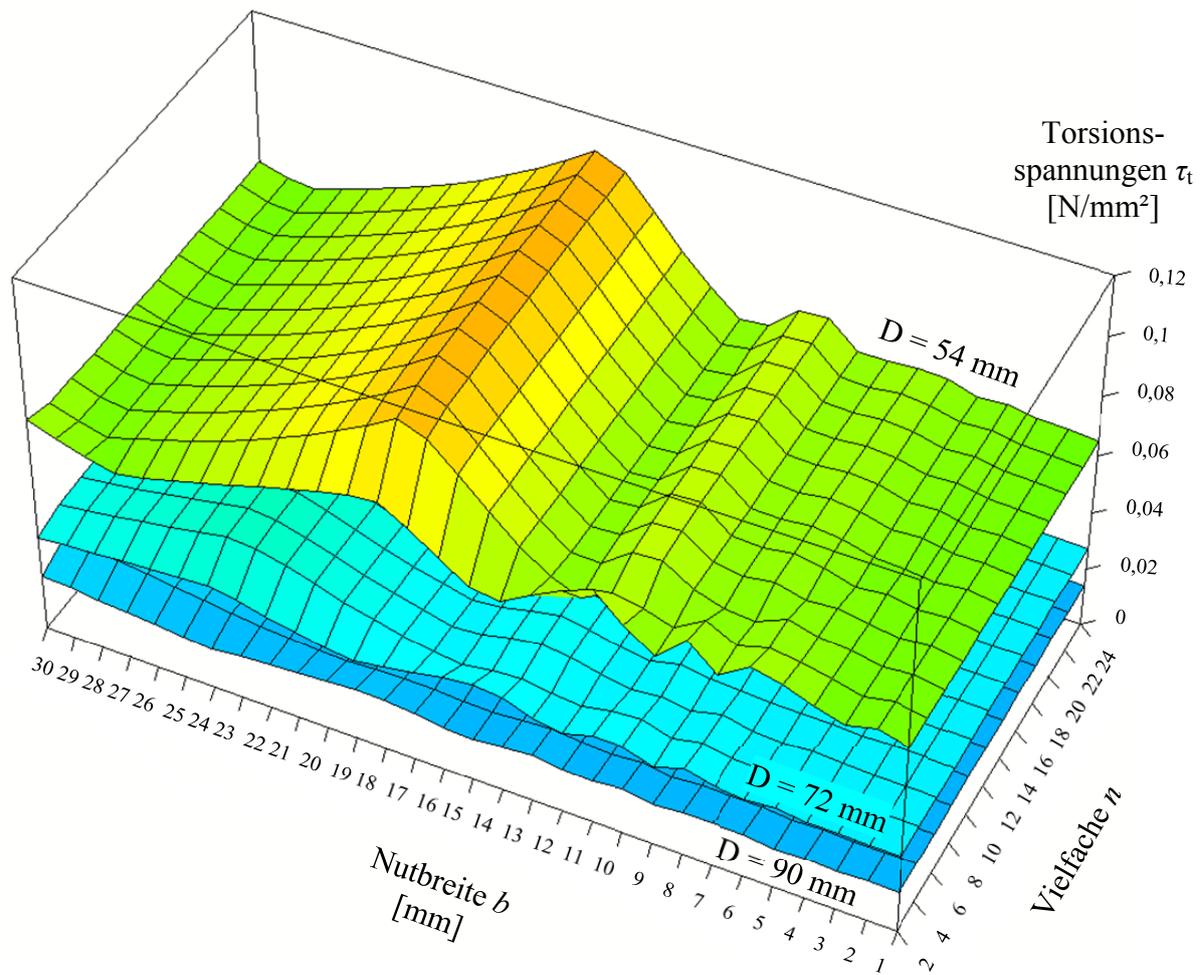


Abbildung 4-16: Gegenüberstellung des Durchmesserinflusses

Um die Wichtigkeit der Parameterwahl in Bezug auf die Beanspruchungen zu verdeutlichen, sind nachfolgend für jeden untersuchten Durchmesser die maximalen und minimalen Torsionsspannungen innerhalb des betrachteten Variablenspektrums tabellarisch gegenübergestellt. Den Extremwerten sind die zugehörigen zweidimensionalen Größen zugeordnet. Auf diesem Wege sind die bezüglich der Torsionsspannungen optimalen Parameter direkt ablesbar. Die letzte Spalte der Tabelle gibt den Faktor an, der zwischen minimaler und maximaler Spannung besteht. Zusätzlich sind die idealen Torsionsspannungen, die mit der ungeraden Verzahnungsgeometrie erreicht werden, aufgeführt:

D [mm]	τ_{ideal} [N/mm ²]	τ_{min} [N/mm ²]	b [mm]	n	τ_{max} [N/mm ²]	b [mm]	n	τ_{max}/τ_{min}
54	0,0647	0,0647	1	4	0,1085	18	24	1,6766
72	0,0273	0,0273	1	4	0,0458	24	24	1,6766
90	0,0140	0,0140	1	4	0,0234	30	24	1,6766

Tabelle 4-3: Übersicht der Extrema der Torsionsspannungen mit Zuordnung der entsprechenden Parameter

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Mittels der tabellarischen Übersicht wird deutlich, dass die aufgezeigten Torsionsspannungsminima der geraden Verzahnung mit den Idealwerten übereinstimmen (Rundungsungenauigkeiten sind unberücksichtigt). Mit der geraden Verzahnung sind demnach Torsionsspannungen erreichbar, die dem Niveau der ungeraden Verzahnung gleichkommen und somit ideal sind. Das Torsionsspannungsminimum wird bei allen untersuchten Durchmessern mit einer Nutbreite von 1 mm und einem Vielfachen n von 4 erreicht. Kombinationen von b und n nahe diesem Punkt führen zu unwesentlich höheren Torsionsspannungen, sodass leicht abgewandelte Verzahnungsbilder praktisch keinen Unterschied in den Beanspruchungen hervorrufen (vgl. Diagramme). Die maximalen Torsionsspannungen liegen für alle drei Durchmesser bei $n = 22$ vor. Die Nutbreite b beträgt dabei jeweils ein Drittel von D . Somit haben die Verzahnungsbilder mit der geringsten Belastbarkeit innerhalb des Untersuchungsraumes die gleichen geometrischen Proportionen. Im Vergleich zu den Minimalspannungen sind die maximalen Torsionsspannungen bei allen untersuchten Verzahnungsbildern ca. um den Faktor $5/3$ größer als die jeweiligen Minima (vgl. rechte Spalte in Tabelle 4-3). Die Wahl der Kombination aus b und n hat somit einen nennenswerten Einfluss auf die Torsionsspannung, wobei b den größeren Effekt ausübt.

Für den Fall, dass die Verzahnungsparameter verschiedener Verzahnungsbilder dasselbe Verhältnis zu D aufweisen, stehen die zugehörigen Torsionsspannungen in einem Verhältnis zu D^3 (siehe Tabelle 4-3). Dies hängt damit zusammen, dass in diesem Fall insgesamt eine proportionale Abhängigkeit des Torsionsflächenmomentes zu D^4 besteht (vgl. Gleichung 4-74). Laut Gleichung 4-85 sind die Torsionsspannungen dann proportional zu $1/D^3$. Demnach gilt für geometrisch proportionale Verzahnungsbilder (n ist konstant und b steht jeweils im selben Verhältnis zu D) folgender Zusammenhang:

$$4-88 \quad \tau(D_1, n, b(D_1)) \cdot D_1^3 = \tau(D_2, n, b(D_2)) \cdot D_2^3 = konst.$$

Dies erklärt, weshalb auch die herausgestellten Maximalbeanspruchungen in Tabelle 4-3 alle im gleichen Verhältnis zu D^3 stehen.

Die Minimalspannungen in Tabelle 4-3 weisen ebenfalls einen Zusammenhang mit D^3 auf. Das ist damit zu begründen, dass die Minimalspannungen den Idealspannungen entsprechen. Die Idealspannungen werden mit der ungeraden Verzahnung erreicht, dessen Torsionsflächenmoment von der vierten Potenz von D abhängig ist (vgl. Gleichung 4-83). Die Torsionsspannungen sind dann nach Gleichung 4-85 ebenfalls proportional zu $1/D^3$. Für alle ungeraden Verzahnungsbilder gilt demnach:

$$4-89 \quad \tau_{ideal}(D_1) \cdot D_1^3 = \tau_{ideal}(D_2) \cdot D_2^3 = konst.$$

Da die Minimalspannungen in Tabelle 4-3 alle den Idealspannungen entsprechen, stehen auch diese im gleichen Verhältnis zu D^3 .

Zusammengefasst hat der Durchmesser der Verzahnungsbasis den größten Einfluss auf die Torsionsspannungen. Näherungsweise besteht ein proportionaler Zusammenhang zu $1/D^3$. Um für einen entsprechenden Durchmesser die optimalen Torsionsspannungen zu erzielen, ist die Nutbreite der geraden Verzahnungsgeometrie möglichst klein zu wählen. In Einzelfällen

4. Torsionsspannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

sind auch mit größerer Nutbreite ähnlich niedrige Torsionsspannungen erreichbar (vgl. Diagramme). Das ganzzahlige Vielfache n hat keinen großen Einfluss auf die Torsionsspannungen in der Verzahnung. Im Gegensatz dazu weist die ungerade Verzahnungsgeometrie für jede Kombination aus b und n den Idealwert auf. Die Gestaltung des zweidimensionalen Verzahnungsbildes ist in diesem Fall beliebig.

Neben Scherung werden die Stege an den Flanken mit Druck belastet, was zu einer Flächenpressung führt. Diese wird im anschließenden Kapitel untersucht.

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Durch die flankenseitige Berührung der einzelnen Stege entsteht bei Belastung der Kreisbogen-Stirnverzahnung Flächenpressung. Je nach Belastungsrichtung werden die Stegflanken entweder be- oder entlastet. Ähnlich der Berechnung einer Bolzenkupplung wird zur Beurteilung der vorhandenen Flächenpressung zunächst die projizierte Fläche einer kreisbogenförmigen Flanke ermittelt. Anschließend ist die projizierte Fläche in Bezug auf die an der einzelnen Flanke wirkenden Kraft zu setzen. Die Stelle mit der maximalen Flächenpressung ist ausschlaggebend für die Beurteilung der Belastbarkeit der Verbindung.

5.1 Ermittlung der projizierten Fläche

Die projizierte Fläche ist definiert durch die effektive Zahnhöhe H_{eff} und die *projizierte Länge* l_{proj} eines Kreisbogens. Die effektive Zahnhöhe ist an der gesamten Verzahnung konstant und wird im Folgenden als gegeben angenommen. Die projizierte Länge l_{proj} entsteht, indem der einzelne Kreisbogen mittels Umfangslinien auf die x -Achse projiziert wird. Abbildung 5-1 verdeutlicht dies:

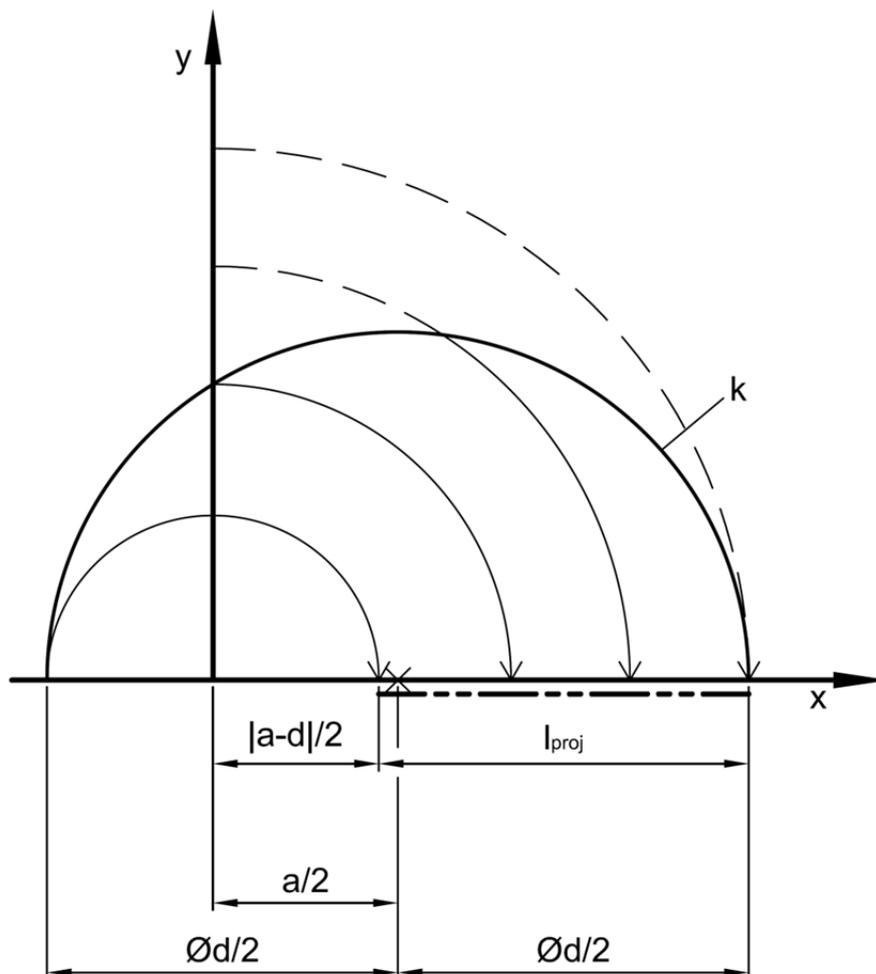


Abbildung 5-1: Visualisierung der Entstehung einer projizierten Länge aus einem Kreisbogen

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die Kreisbogenlinie stellt nicht immer wie abgebildet einen Halbkreis dar, sondern kann auch durch die Basisgeometrie abgeschnitten sein (vgl. Kapitel 4). Die radiale Begrenzung der Kreisbogenlinie ist durch die Polarkoordinate r_{\max} nach Gleichung 4-5 angegeben. Dementsprechend ergibt die projizierte Länge:

$$l_{\text{proj}} = r_{\max} - \left| \frac{a-d}{2} \right|$$

mit r_{\max} nach Gleichung 4-5:

5-1

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhanges wird ein infinitesimales Stück des belasteten Kreisbogens betrachtet und mittels Bezug zur x -Achse definiert:

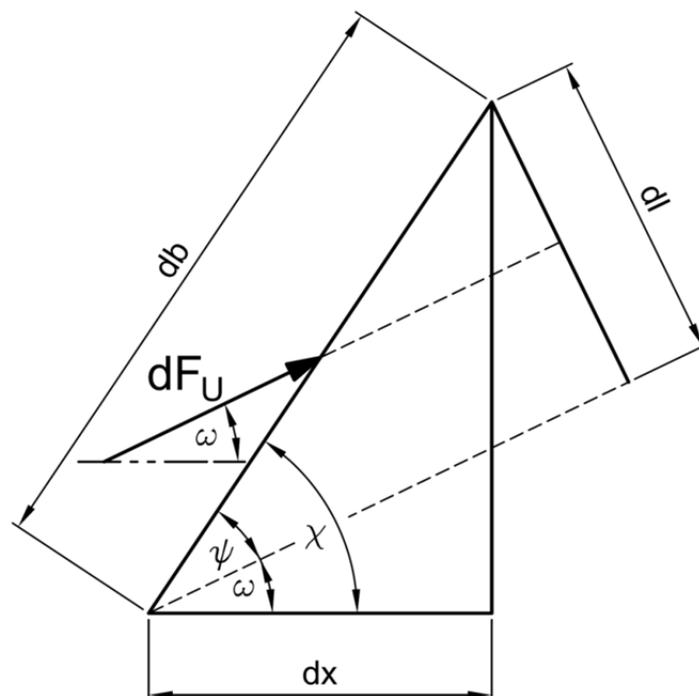


Abbildung 5-2: Darstellung eines infinitesimalen Kreisbogensegmentes und der darauf wirkenden Kraft und deren Beziehungen

Auf das betrachtete, infinitesimale Kreisbogensegment db wirkt die infinitesimale Umfangskraft dF_U in einem Winkel von ψ (siehe Abbildung). Daraus geht die *infinitesimale projizierte Länge* dl hervor. Die Winkel von der infinitesimalen Strecke db und der Wirkrichtung von dF_U zur x -Achse sind mit χ bzw. ω angegeben. Es bestehen die folgenden trigonometrischen Zusammenhänge:

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

5-2	$\cos \chi = \frac{dx}{db}$	5-3	$\sin \psi = \frac{dl}{db}$
5-4	$\psi = \chi - \omega$	5-5	$dl = \frac{\sin \psi}{\cos \chi} dx$

Die Aufsummierung aller infinitesimalen Längen dl eines einzelnen Kreisbogens ergibt die gesamte projizierte Länge l_{proj} . Gleichung 5-5 ist demnach zu integrieren:

$$5-6 \quad l = \int \frac{\sin \psi}{\cos \chi} dx = l_{\text{proj}}$$

Die Winkel χ und ω werden anhand der Steigung der betrachteten Kreisbogenlinie bzw. der Wirkrichtung der Umfangskraft an der Stelle x ermittelt. Dazu sind sowohl die Kreisbogenlinie als auch die Wirkrichtung der Umfangskraft als Funktionen von x zu beschreiben und anschließend zu differenzieren. Die Funktion der Kurve k ist bekannt aus Kapitel 4 (vgl. Gleichung 4-16):

$$5-7 \quad k: \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$5-8 \quad \Leftrightarrow k: y = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \quad (\text{vgl. Gleichung 4-16})$$

Deren Differentialquotient lautet:

$$5-9 \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-2\left(x - \frac{a}{2}\right)\right) = \frac{\frac{a}{2} - x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}$$

Die Wirkrichtung der Umfangskraft wird beschrieben, indem zunächst die einzelne Umfangskraft dF_U einer Kreisbahn U_x zugeordnet wird. Diese Kreisbahn hat den Mittelpunkt im Ursprung der Basis und einen Radius von r_x . Der Radius r_x entspricht dem Hebelarm der Umfangskraft dF_U . Die Wirkrichtung von dF_U ist durch die Steigung der Kreisbahn U_x im Schnittpunkt mit der Kreisbogenlinie k definiert. Auf jedes durch x definierte, infinitesimale Kreisbogensegment wirkt eine eigene Kraft dF_U , die jeweils auf einer eigenen Kreisbahn U_x mit eigenem Hebelarm r_x liegt. Demnach ist für jedes x eine eigene Kreisbahn aufzurufen. Nachstehende Abbildung veranschaulicht die Gegebenheiten:

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

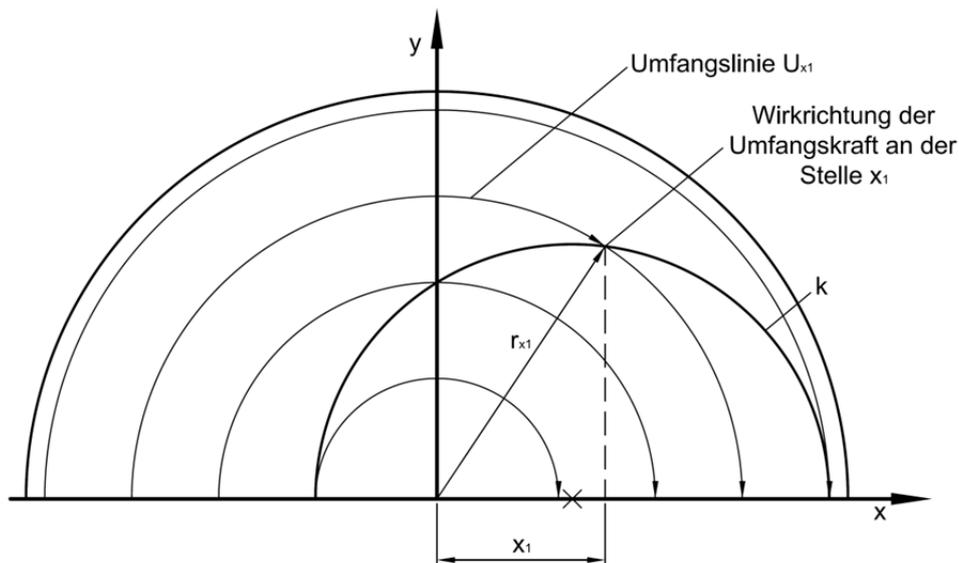


Abbildung 5-3: Visualisierung der Wirkrichtungen von dF_u

Es gilt:

$$5-10 \quad U_x: x^2 + Y^2 = r_x^2$$

$$5-11 \quad \Leftrightarrow U_x: Y = \sqrt{r_x^2 - x^2}$$

Der Hebelarm r_x in dieser Gleichung ist nicht mit x veränderlich, sondern konstant.

Die Differenzierung der Funktion ergibt:

$$5-12 \quad Y' = \frac{dY}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (r_x^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r_x^2 - x^2}}$$

Nach der Differenzierung der Kreisgleichung U_x wird der Bezug des Hebelarmes r_x zur Koordinate x hergestellt. Auf diesem Wege wird für jede infinitesimale Umfangskraft dF_u die Steigung an der entsprechenden Stelle x ermittelt:

$$5-13 \quad Y' = \frac{-x}{\sqrt{r_x^2 - x^2}} = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \quad \text{mit } r_x^2 = x^2 + y^2$$

Die Winkel χ , ω und ψ sind wie folgt bestimmbar:

$$5-14 \quad \chi = \text{atan } y' = \text{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \right)$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

$$5-15 \quad \omega = \operatorname{atan} Y' = \operatorname{atan} \left(\frac{-x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \right)$$

$$5-16 \quad \psi = \chi - \omega = \operatorname{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \right) - \operatorname{atan} \left(\frac{-x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \right)$$

Um fortsetzend die gesamte projizierte Länge mittels Integration zu ermitteln (vgl. Gleichung 5-6) sind die bestehenden Terme zu vereinfachen. So gilt [Bron16]:

$$5-17 \quad \operatorname{atan} x - \operatorname{atan} y = \operatorname{atan} \left(\frac{x - y}{1 + xy} \right)$$

Bezogen auf den Term für ψ (vgl. Gleichung 5-16) ergibt dies:

$$5-18 \quad \psi = \operatorname{atan} \left(\frac{\frac{\frac{a}{2} - x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} + \frac{x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}}{1 - \frac{\frac{a}{2} - x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}} \right)$$

$$5-19 \quad = \operatorname{atan} \left(\frac{\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}}{1 - \frac{\frac{a}{2} \cdot x - x^2}{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \right) = \operatorname{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{2} \cdot x + x^2} \right)$$

$$5-20 \quad = \operatorname{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{d^2}{4} - x^2 + ax - \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} \cdot x + x^2} \right)$$

$$5-21 \quad \Leftrightarrow \psi = \operatorname{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{d^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot x - \frac{a^2}{4}} \right)$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Weitere Vereinfachungen lauten nach [Erve11]:

$$5-22 \quad \sin(\operatorname{atan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$5-23 \quad \cos(\operatorname{atan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Für $\sin \psi$ gilt demnach Folgendes:

$$5-24 \quad \sin \psi = \sin \left(\operatorname{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{d^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot x - \frac{a^2}{4}} \right) \right) = \frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{d^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot x - \frac{a^2}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{d^2}{4} + \frac{a}{2} \cdot x - \frac{a^2}{4}} \right)^2}$$

$$5-25 \quad \Leftrightarrow \sin \psi = \frac{a}{d} \cdot \sqrt{\frac{d^2 + 4 \cdot ax - a^2 - 4x^2}{d^2 + 4 \cdot ax - a^2}}$$

Für $\cos \chi$ gilt:

$$5-26 \quad \cos \chi = \cos \left(\operatorname{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{a}{2} - x}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} \right)^2}}$$

$$5-27 \quad = \frac{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{d^2}{4} - x^2 + ax - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - ax + x^2}}$$

$$5-28 \quad = \sqrt{\frac{\frac{d^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{d^2}{4}}}$$

$$5-29 \quad \Leftrightarrow \cos \chi = \sqrt{1 - \left(\frac{2x - a}{d}\right)^2}$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Daraus folgt für dl :

$$5-30 \quad dl = \int \frac{\sin \psi}{\cos \chi} dx = \int \frac{\frac{a}{d} \cdot \sqrt{\frac{d^2 - (2x - a)^2}{d^2 + 4 \cdot ax - a^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x - a}{d}\right)^2}} dx$$

$$5-31 \quad = \int \frac{a}{d} \cdot \sqrt{\frac{d^2 - (2x - a)^2}{(d^2 + 4 \cdot ax - a^2) \cdot \left(1 - \left(\frac{2x - a}{d}\right)^2\right)}} dx$$

$$5-32 \quad = \int a \cdot \sqrt{\frac{d^2 - (2x - a)^2}{(d^2 + 4 \cdot ax - a^2) \cdot (d^2 - (2x - a)^2)}} dx$$

$$5-33 \quad dl = \int a \cdot \sqrt{\frac{1}{(d^2 + 4ax - a^2)}} dx$$

Zur Herleitung der Integrationsgrenzen wird mit Hilfe von Abbildung 5-1 der Gültigkeitsbereich der Polarkoordinate r ermittelt. Dieser lautet wie folgt:

$$\frac{|a - d|}{2} < r < r_{\max}$$

mit

5-34

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a + d}{2}, & \text{für } a + d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a + d \geq D \end{cases}$$

Aus Gleichung 4-20 ist die Beziehung zwischen der kartesischen Koordinate x und der Polarkoordinate r bekannt:

$$5-35 \quad x = \frac{a^2 + 4r^2 - d^2}{4a}$$

Daraus folgt die Angabe der Integrationsgrenzen:

Für x_{\min} gilt:

$$5-36 \quad x_{\min} = \frac{a^2 + 4 \left(\frac{|a - d|}{2}\right)^2 - d^2}{4a}$$

$$5-37 \quad = \frac{a^2 + a^2 - 2ad + d^2 - d^2}{4a} = \frac{2a^2 - 2ad}{4a} = \frac{a - d}{2}$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Für x_{\max} ist aufgrund der Abhängigkeit von r_{\max} ebenfalls eine Fallunterscheidung durchzuführen:

$$5-38 \quad x_{\max} = \frac{a^2 + 4r_{\max}^2 - d^2}{4a}$$

	für $r_{\max} = \frac{a+d}{2}$	für $r_{\max} = \frac{D}{2}$
5-39	$x_{\max} = \frac{a^2 + 4\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - d^2}{4a}$	$x_{\max} = \frac{a^2 + 4\left(\frac{D}{2}\right)^2 - d^2}{4a}$
5-40	$\Leftrightarrow x_{\max} = \frac{a+d}{2}$	$\Leftrightarrow x_{\max} = \frac{a^2 + D^2 - d^2}{4a}$

Zusammengefasst lauten die Grenzen für x wie folgt:

$$5-41 \quad x_{\min} = \frac{a-d}{2}$$

$$5-42 \quad x_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D^2 + a^2 - d^2}{4a}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

Eingesetzt in das zu bestimmende Integral nach Gleichung 5-33 ergibt die gesuchte Gleichung zur Bestimmung der projizierten Länge:

$$5-43 \quad l_{\text{proj}} = \int dl = \int_{\frac{a-d}{2}}^{x_{\max}} a \cdot \sqrt{\frac{1}{(d^2 + 4ax - a^2)}} dx$$

$$5-44 \quad = \int_{\frac{a-d}{2}}^{x_{\max}} a \cdot (d^2 + 4ax - a^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{d^2 + 4ax - a^2} \right]_{\frac{a-d}{2}}^{x_{\max}}$$

$$5-45 \quad = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{d^2 + 4ax_{\max} - a^2} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{d^2 + 4a\left(\frac{a-d}{2}\right) - a^2} \right)$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

$$5-46 \quad = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{d^2 + 4ax_{\max} - a^2} - \sqrt{d^2 - a^2 + 2a^2 - 2ad} \right)$$

$$5-47 \quad = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{d^2 + 4ax_{\max} - a^2} - \sqrt{d^2 - 2ad + a^2} \right)$$

$$5-48 \quad = \frac{\sqrt{d^2 + 4ax_{\max} - a^2}}{2} - \frac{|a - d|}{2}$$

$$5-49 \quad \Leftrightarrow l_{\text{proj}} = \frac{\sqrt{d^2 + 4ax_{\max} - a^2}}{2} - \frac{|a - d|}{2}$$

Abhängig vom bestehenden Fall kann die Gleichung weiter vereinfacht werden:

Für $a + d < D$ gilt:

$$5-50 \quad x_{\max} = \frac{a + d}{2}$$

Daraus folgt:

$$5-51 \quad l_{\text{proj}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{d^2 + 4a \left(\frac{a + d}{2} \right) - a^2} - \frac{|a - d|}{2}$$

$$5-52 \quad = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2 + 2ad - a^2}}{2} - \frac{|a - d|}{2} = \frac{\sqrt{d^2 + 2ad + a^2}}{2} - \frac{|a - d|}{2}$$

$$5-53 \quad \Leftrightarrow l_{\text{proj}} = \frac{a + d}{2} - \frac{|a - d|}{2}$$

Für $a + d < D$ gilt:

$$5-54 \quad x_{\max} = \frac{D^2 + a^2 - d^2}{4a}$$

woraus Folgendes hervorgeht:

$$5-55 \quad l_{\text{proj}} = \frac{\sqrt{d^2 + 4a \left(\frac{D^2 + a^2 - d^2}{4a} \right) - a^2}}{2} - \frac{|a - d|}{2}$$

$$5-56 \quad = \frac{\sqrt{d^2 + D^2 + a^2 - d^2 - a^2}}{2} - \frac{|a - d|}{2} = \frac{\sqrt{D^2}}{2} - \frac{|a - d|}{2}$$

$$5-57 \quad \Leftrightarrow l_{\text{proj}} = \frac{D}{2} - \frac{|a - d|}{2}$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Beide Ergebnisse zusammengefasst ergeben die nachfolgende Gleichung, die identisch mit Gleichung 5-1 ist und somit diesen anfänglichen Ansatz bestätigt:

$$l_{\text{proj}} = r_{\text{max}} - \left| \frac{a-d}{2} \right|$$

mit

5-58

$$r_{\text{max}} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

Die projizierte Fläche A_{proj} ist darauf aufbauend wie folgt zu bestimmen:

$$A_{\text{proj}} = l_{\text{proj}} \cdot H_{\text{eff}} = \left(r_{\text{max}} - \left| \frac{a-d}{2} \right| \right) \cdot H_{\text{eff}}$$

mit

5-59

$$r_{\text{max}} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

Die projizierte Fläche beeinflusst die Flächenpressung an der einzelnen Zahnflanke. Die Flächenpressung wird im anschließenden Kapitel ermittelt.

5.2 Bestimmung der Flächenpressung an einer einzelnen Zahnflanke

Die *Flächenpressung* p_m an einer einzelnen Zahnflanke entspricht dem Quotienten aus der auf die Flanke wirkenden *Einzelkraft* F_m dividiert durch die entsprechende projizierte Fläche. Zur Bestimmung der Einzelkraft F_m wird zunächst das auf die gesamte Verzahnung wirkende Torsionsmoment in mehrere Einzelkräfte mit den zugehörigen Hebelarmen r_m aufgeteilt.

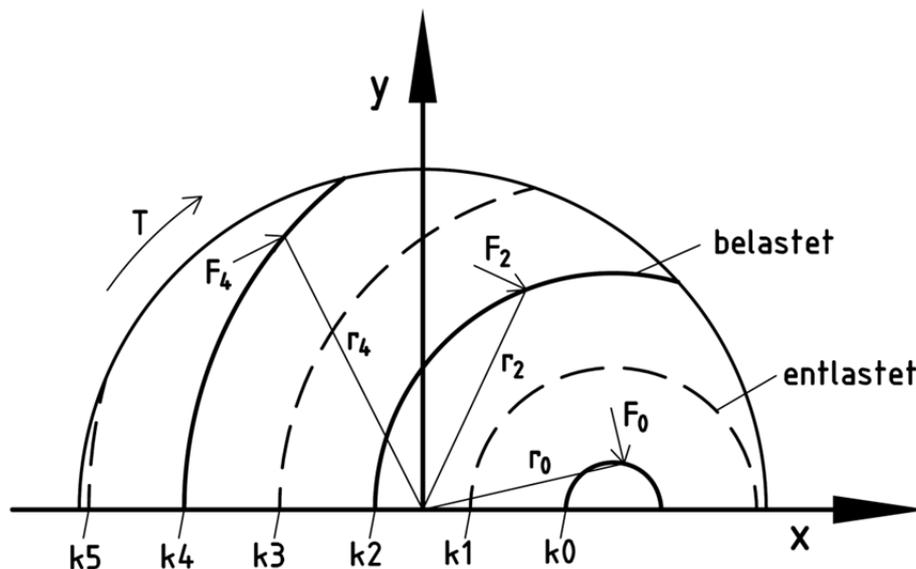


Abbildung 5-4: Verteilung der Kräfte auf die Zahnflanken

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Jeder Zahn weist in Abhängigkeit von der Wirkrichtung des Torsionsmomentes eine Vorder- und eine Rückseite auf. Als Vorderseite gilt die belastete Zahnflanke, als Rückseite die entlastete. Deshalb werden die Einzelkräfte nur auf jede zweite Zahnflanke aufgeteilt. Der Index m der Einzelkraft F_m und des Hebelarms r_m entspricht dem des zugeordneten Kreisbogens.

Die Verteilung der Flankenbelastung an der geraden Verzahnungsgeometrie ist punktsymmetrisch. Daraus resultiert, dass jeder Kreisbogen, der eine belastete Flanke beschreibt, zweimal in der Geometrie vorkommt (siehe beispielsweise Abbildung 5-5, links). Hierbei besteht eine Abhängigkeit der Belastungsrichtung.

Bei der ungeraden Geometrie ist die Last so auf die Flanken verteilt, dass die belasteten Flankenanteile an der oberen Geometriehälfte den unbelasteten Anteilen der Unterhälfte entsprechen. Die belasteten Flankenanteile der Geometrieunterhälfte sind dementsprechend deckungsgleich mit den unbelasteten Anteilen an der Oberhälfte (siehe Abbildung 5-5, rechts). Die Menge der belasteten Flanken entspricht somit allen Kreisbögen k einer Geometriehälfte. Eine Abhängigkeit der Belastungsrichtung besteht dabei nicht.

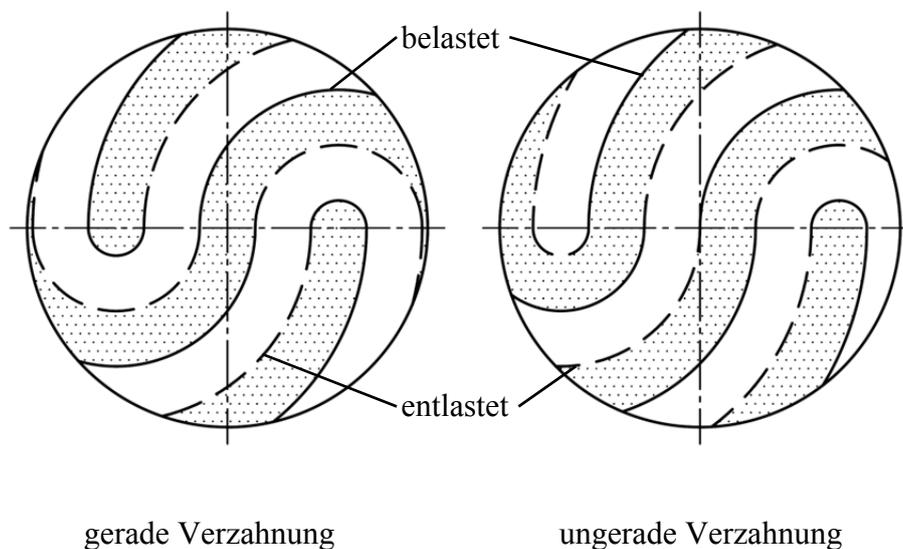


Abbildung 5-5: Verteilung der belasteten Zahnflanken bei definierter Wirkrichtung des Torsionsmomentes

Analog der Flächenpressung einer Querstiftverbindung [Witt13] steigt bei Torsionsbelastung die Flächenpressung an den Zahnflanken mit größer werdendem Abstand zum Mittelpunkt. Dies ist in der nachfolgenden Abbildung verdeutlicht, wobei eine Streckenlast auf die projizierte Länge l_{proj} wirkt:

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

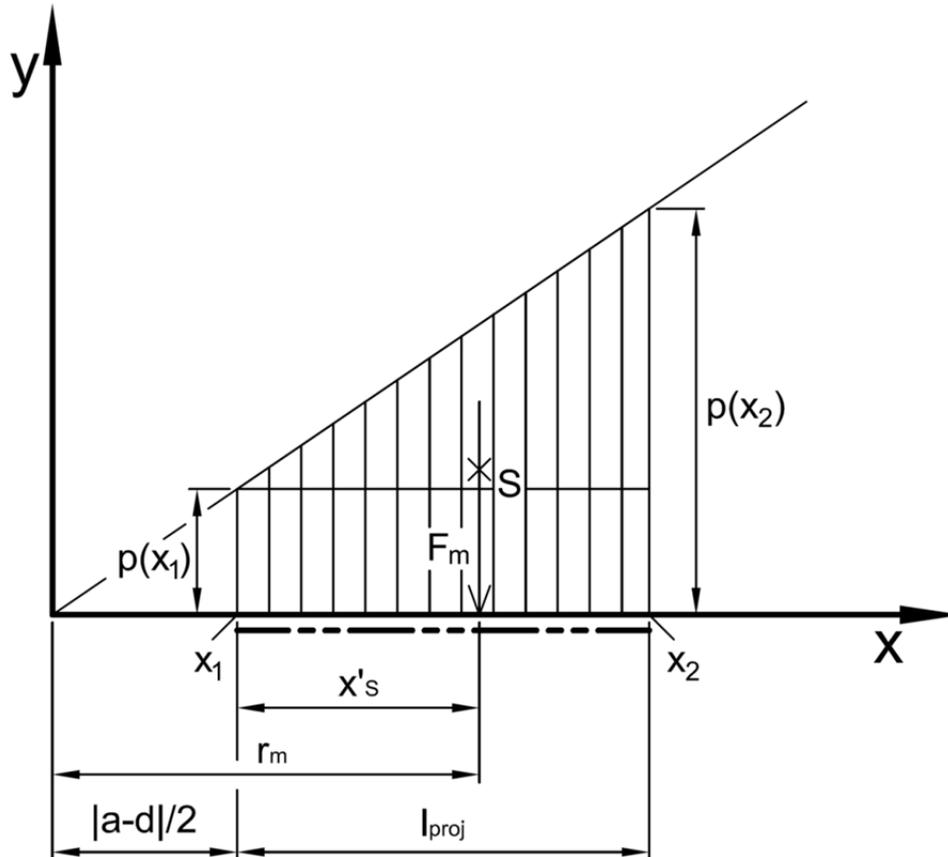


Abbildung 5-6: Streckenlast auf einer projizierten Flanke

Die Streckenlast auf der projizierten Länge hat die Form eines Trapezes. Die Längen $p(x_1)$ und $p(x_2)$ sind abhängig von der Steigung c_1 der Geraden, die die abgebildete Streckenlast definiert. Es gilt:

$$5-60 \quad p(x_1) = c_1 \cdot x_1 = c_1 \cdot \frac{|a-d|}{2}$$

$$5-61 \quad p(x_2) = c_1 \cdot x_2 = c_1 \cdot \left(\frac{|a-d|}{2} + l_{\text{proj}} \right)$$

Die Steigung c_1 ist nicht bekannt.

Der Kraftangriffspunkt der Einzelkraft F_m liegt im Schwerpunkt S des Trapezes. Die Lage des Schwerpunktes auf der x -Achse wird wie folgt berechnet [Scha02]:

$$5-62 \quad x'_s = \frac{l_{\text{proj}}}{3} \cdot \frac{p(x_1) + 2 \cdot p(x_2)}{p(x_1) + p(x_2)}$$

$$5-63 \quad \Leftrightarrow x'_s = \frac{l_{\text{proj}}}{3} \cdot \frac{c_1 \cdot \frac{|a-d|}{2} + 2 \cdot c_1 \cdot \left(\frac{|a-d|}{2} + l_{\text{proj}} \right)}{c_1 \cdot \frac{|a-d|}{2} + c_1 \cdot \left(\frac{|a-d|}{2} + l_{\text{proj}} \right)}$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

$$5-64 \quad \Leftrightarrow x'_S = l_{\text{proj}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot |a-d| + \frac{2}{3} \cdot l_{\text{proj}}}{|a-d| + l_{\text{proj}}}$$

Das Ergebnis zeigt, dass die Lage des Schwerpunktes auf der x -Achse unabhängig von der unbekanntem Steigung c_1 ist. Mit diesem Ergebnis ist der Hebelarm r_m wie folgt bestimmbar (siehe Abbildung 5-6):

$$5-65 \quad r_m = \frac{|a-d|}{2} + x'_S$$

$$5-66 \quad \Leftrightarrow r_m = \frac{|a-d|}{2} + l_{\text{proj}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot |a-d| + \frac{2}{3} \cdot l_{\text{proj}}}{|a-d| + l_{\text{proj}}}$$

Abbildung 5-6 verdeutlicht, dass zwischen Hebelarm und Umfangskraft ein proportionaler Zusammenhang besteht. Je größer der Hebelarm wird, desto größer wird die Kraft F_m . Das Verhältnis zwischen F_m und r_m ist demnach stets konstant:

$$5-67 \quad F_m \sim r_m$$

$$5-68 \quad \frac{F_m}{r_m} = \text{konst.}$$

$$5-69 \quad \Leftrightarrow F_m = c_2 \cdot r_m \quad \text{mit } c_2 = \text{konst. [N/mm]}$$

Die Konstante c_2 wird bestimmt, indem die Momentensumme aus den Einzelkräften F_m und deren Hebelarmen r_m gebildet wird.

Für die ungerade Verzahnungsgeometrie gilt die nachstehende, von der Belastungsrichtung unabhängige Summe aller Momente:

$$5-70 \quad T = F_{m \min} r_{m \min} + F_{m \min+1} r_{m \min+1} + F_{m \min+2} r_{m \min+2} + \dots + F_{m \max} r_{m \max}$$

Mit der Beziehung 5-69 entsteht folgender Ausdruck:

$$5-71 \quad T = c_2 \cdot r_{m \min}^2 + c_2 \cdot r_{m \min+1}^2 + c_2 \cdot r_{m \min+2}^2 + \dots + c_2 \cdot r_{m \max}^2$$

$$5-72 \quad \Leftrightarrow T = c_2 \cdot (r_{m \min}^2 + r_{m \min+1}^2 + r_{m \min+2}^2 + \dots + r_{m \max}^2)$$

$$5-73 \quad \Leftrightarrow T = c_2 \cdot \sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} r_m^2$$

Für die Konstante c_2 gilt in diesem Fall:

$$5-74 \quad c_2 = T \cdot \left(\sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} r_m^2 \right)^{-1}$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Daraus folgt die Bestimmungsgleichung für die Einzelkraft F_m , die auf die entsprechende Flankenfläche der ungeraden Verzahnung wirkt:

$$5-75 \quad F_m = T \cdot r_m \cdot \left(\sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} r_m^2 \right)^{-1}$$

Damit sind alle Parameter bekannt, um die Flächenpressung an der einzelnen Flanke der ungeraden Geometrie zu ermitteln. Die Drehrichtung der Belastung ist bei der ungeraden Verzahnung nicht zu berücksichtigen, weil in beiden Richtungen die gleichen Beanspruchungen hervorgerufen werden:

Für n ist ungerade gilt:

$$p_m = \frac{F_m}{A_{\text{proj}}} = \frac{T \cdot r_m}{\left(r_{\max} - \frac{|a-d|}{2} \right) \cdot H_{\text{eff}}} \cdot \left(\sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} r_m^2 \right)^{-1}$$

mit

$$r_m = \frac{|a-d|}{2} + l_{\text{proj}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot |a-d| + \frac{2}{3} \cdot l_{\text{proj}}}{|a-d| + l_{\text{proj}}}$$

und

5-76

$$l_{\text{proj}} = r_{\max} - \left| \frac{a-d}{2} \right|$$

und

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

und

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

Bei der geraden Verzahnungsgeometrie sind für verschiedene Bedingungen unterschiedliche Formeln zu benutzen. Deren Herleitungen sind nachstehend aufgeführt.

Für den Fall, dass sowohl m_{\min} als auch m_{\max} entweder gerade oder ungerade Zahlenwerte aufweisen, gilt die nachstehende Momentensumme:

$$5-77 \quad T = 2 \cdot [F_{m_{\min}} r_{m_{\min}} + F_{m_{\min}+2} r_{m_{\min}+2} + \dots + F_{m_{\max}} r_{m_{\max}}]$$

bzw. für die entgegengesetzte Drehrichtung

$$5-78 \quad T = 2 \cdot [F_{m_{\min}+1} r_{m_{\min}+1} + F_{m_{\min}+3} r_{m_{\min}+3} + \dots + F_{m_{\max}-1} r_{m_{\max}-1}]$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Mit Berücksichtigung der Bedingung 5-69 ergibt dies:

$$5-79 \quad T = 2c_2 \cdot \sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} r_{2 \cdot m}^2$$

bzw. (für die entgegengesetzte Drehrichtung)

$$5-80 \quad T = 2c_2 \cdot \sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}-1}{2}} r_{2 \cdot m}^2$$

Nach c_2 umgeformt und in die Gleichung für F_m (Gleichung 5-69) eingesetzt ergibt dies den Bezug zur Flächenpressung für den beschriebenen Fall:

$$5-81 \quad F_m = \frac{T}{2} \cdot r_m \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

bzw. (bei umgekehrter Drehrichtung)

$$5-82 \quad F_m = \frac{T}{2} \cdot r_m \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}-1}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

Damit lautet die Berechnungsvorschrift für die Flächenpressung an einer einzelnen Zahnflanke einer Verzahnung mit den entsprechenden Eigenschaften wie folgt:

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Für n ist gerade und m_{\min} und m_{\max} sind gerade oder ungerade gilt:

$$p_m = \frac{F_m}{A_{\text{proj}}} = \frac{T \cdot r_m}{2 \cdot \left(r_{\max} - \frac{|a-d|}{2} \right) \cdot H_{\text{eff}}} \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

bzw. (bei umgekehrter Drehrichtung)

$$p_m = \frac{F_m}{A_{\text{proj}}} = \frac{T \cdot r_m}{2 \cdot \left(r_{\max} - \frac{|a-d|}{2} \right) \cdot H_{\text{eff}}} \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}-1}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

mit

$$5-83 \quad r_m = \frac{|a-d|}{2} + l_{\text{proj}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot |a-d| + \frac{2}{3} \cdot l_{\text{proj}}}{|a-d| + l_{\text{proj}}}$$

und

$$l_{\text{proj}} = r_{\max} - \left| \frac{a-d}{2} \right|$$

und

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

und

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

Für Verzahnungsbilder, bei denen m_{\min} einen geraden und m_{\max} einen ungeraden oder m_{\min} einen ungeraden und m_{\max} einen geraden Wert aufweisen, gilt:

$$5-84 \quad T = 2 \cdot [F_{m_{\min}} r_{m_{\min}} + F_{m_{\min}+2} r_{m_{\min}+2} + \dots + F_{m_{\max}-1} r_{m_{\max}-1}]$$

bzw. für die entgegengesetzte Drehrichtung

$$5-85 \quad T = 2 \cdot [F_{m_{\min}+1} r_{m_{\min}+1} + F_{m_{\min}+3} r_{m_{\min}+3} + \dots + F_{m_{\max}} r_{m_{\max}}]$$

Mit Berücksichtigung der Bedingung 5-69 ergibt dies:

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

$$5-86 \quad T = 2c_2 \cdot \sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}-1}{2}} r_{2 \cdot m}^2$$

bzw.

$$5-87 \quad T = 2c_2 \cdot \sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} r_{2 \cdot m}^2$$

Die Flächenpressung einer einzelnen Flanke ist bei dem beschriebenen Fall wie folgt zu berechnen:

Für n ist gerade und m_{\min} ist gerade und m_{\max} ist ungerade oder m_{\min} ist ungerade und m_{\max} ist gerade gilt:

$$p_m = \frac{T \cdot r_m}{2 \cdot \left(r_{\max} - \frac{|a-d|}{2} \right) \cdot H_{\text{eff}}} \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}-1}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

bzw. (bei umgekehrter Drehrichtung)

$$p_m = \frac{T \cdot r_m}{2 \cdot \left(r_{\max} - \frac{|a-d|}{2} \right) \cdot H_{\text{eff}}} \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

mit

$$5-88 \quad r_m = \frac{|a-d|}{2} + l_{\text{proj}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot |a-d| + \frac{2}{3} \cdot l_{\text{proj}}}{|a-d| + l_{\text{proj}}}$$

und

$$l_{\text{proj}} = r_{\max} - \left| \frac{a-d}{2} \right|$$

und

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

und

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Ausschlaggebend für die Beurteilung der Belastbarkeit ist jeweils die höchste Flächenpressung. Diese ist beim geraden Verzahnungsbild von der Belastungsrichtung abhängig:

$$5-89 \quad \max\{p_m\} = p_{\max} \leq p_{\text{zul}}$$

Der Index m , der zu der höchsten Flächenpressung gehört, gibt den Kreisbogen bzw. die kreisbogenförmige Flanke an, die die größte Beanspruchung erfährt. Auf diesem Wege ist eine Lokalisierung der maximalen Beanspruchungen möglich.

5.3 Gegenüberstellung der maximalen Flächenpressung

Für die Gegenüberstellung der maximalen Flächenpressung bei unterschiedlichen Verzahnungsgeometrien werden wie in Kapitel 4 die Effekte in Abhängigkeit der Parameter b und n in einem Flächendiagramm aufgetragen. Pro Durchmesser werden Diagramme sowohl für das gerade als auch für das ungerade Verzahnungsbild erstellt. Zusätzlich wird beim geraden Verzahnungsbild zwischen den Drehrichtungen unterschieden. Die Drehrichtung, die all die Flanken belastet, die durch Kreisbögen mit einem geraden Index beschrieben sind, gilt als Vorwärtsrichtung (gemäß Abbildung 5-4). Die entgegengesetzte Drehrichtung ist entsprechend die rückwärtige Richtung. Die Ergebnisse sind jeweils für eine Torsionsbelastung von $T = 1 \text{ Nm}$ und die effektive Nuttiefe von $H_{\text{eff}} = 1 \text{ mm}$ angegeben. Die Spannungsminima des betrachteten Bereichs sind in den Abbildungen unten links zusätzlich numerisch herausgestellt.

Die Skalierung der Achsen ist in allen Diagrammen gleich. Abbildung 5-13 ist oberhalb einer Flächenpressung von 10 N/mm^2 abgeschnitten, um die Darstellungen nicht zu klein abzubilden. Die nicht mehr dargestellten Werte des Diagrammes liegen bei $b = 13 \text{ mm}$, $b = 25 \text{ mm}$ und $b = 26 \text{ mm}$ und reichen von ca. 13 bis 26 N/mm^2 .

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

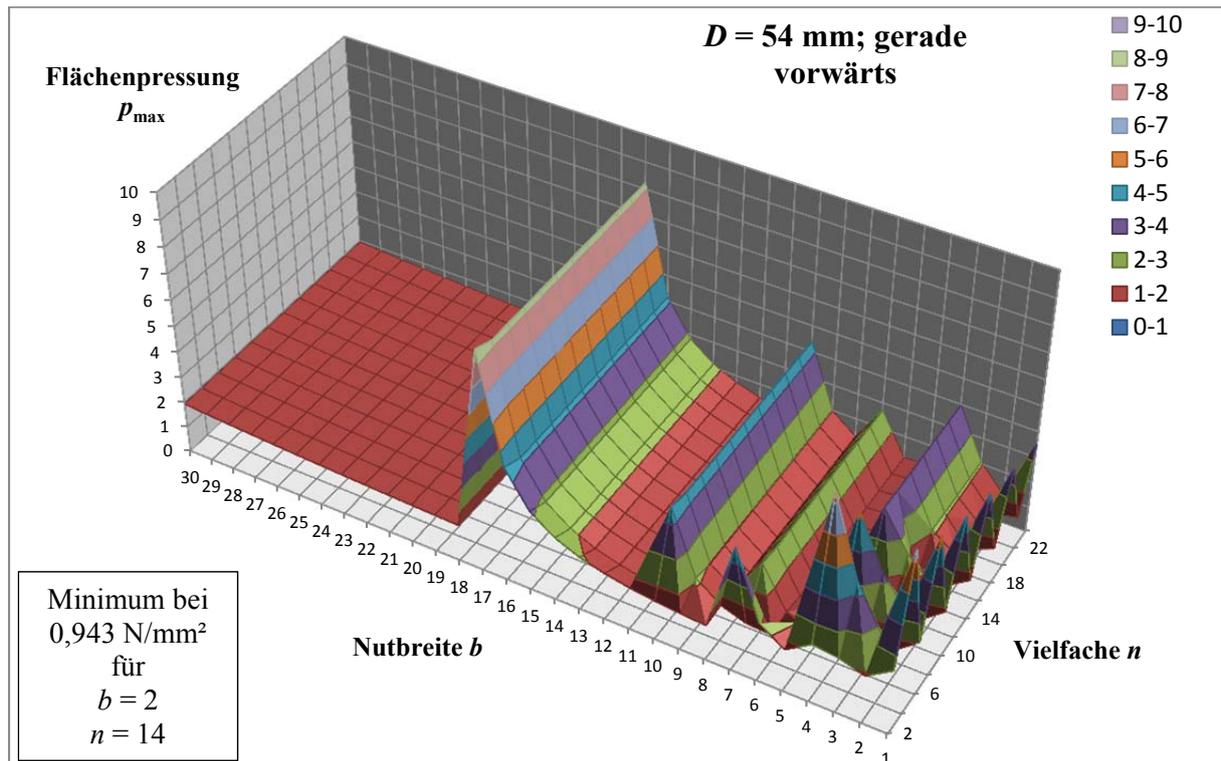


Abbildung 5-7: Gegenüberstellung der Flächenpressung der geraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 54 \text{ mm}$ und positiver Drehrichtung ($H_{\text{eff}} = 1 \text{ mm}$)

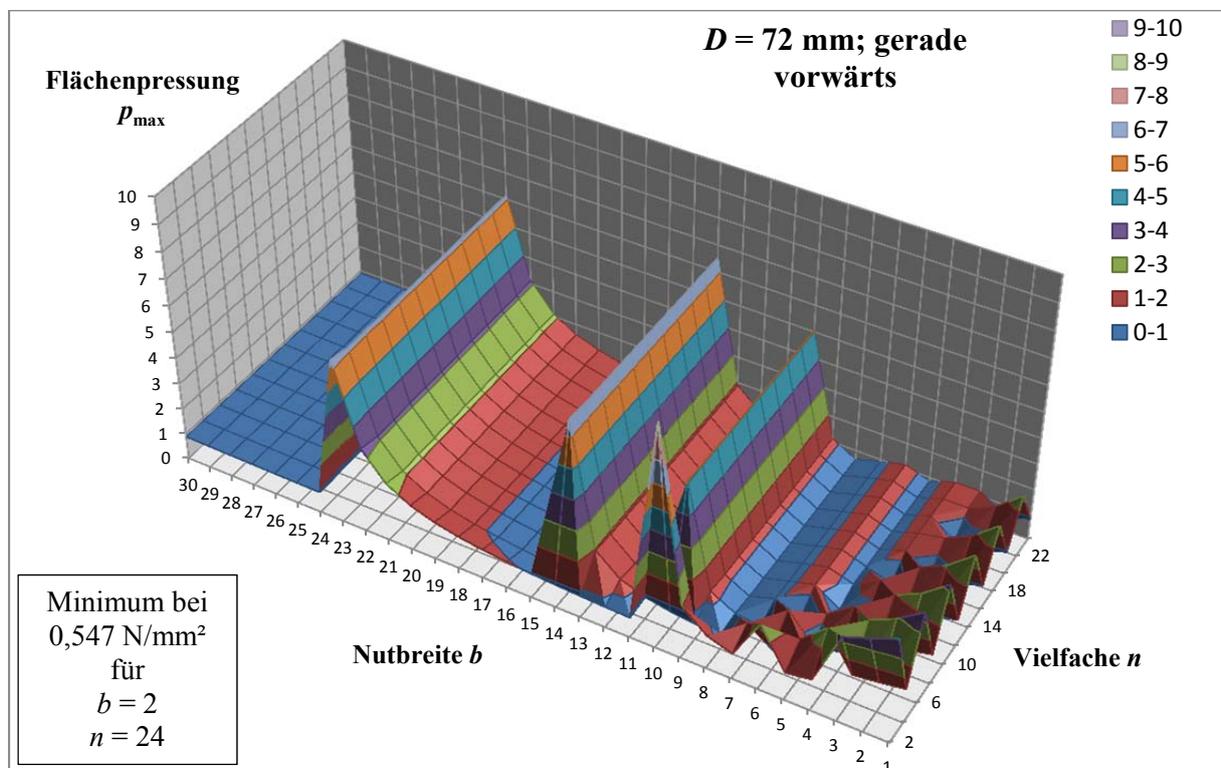


Abbildung 5-8: Gegenüberstellung der Flächenpressung der geraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 72 \text{ mm}$ und positiver Drehrichtung ($H_{\text{eff}} = 1 \text{ mm}$)

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

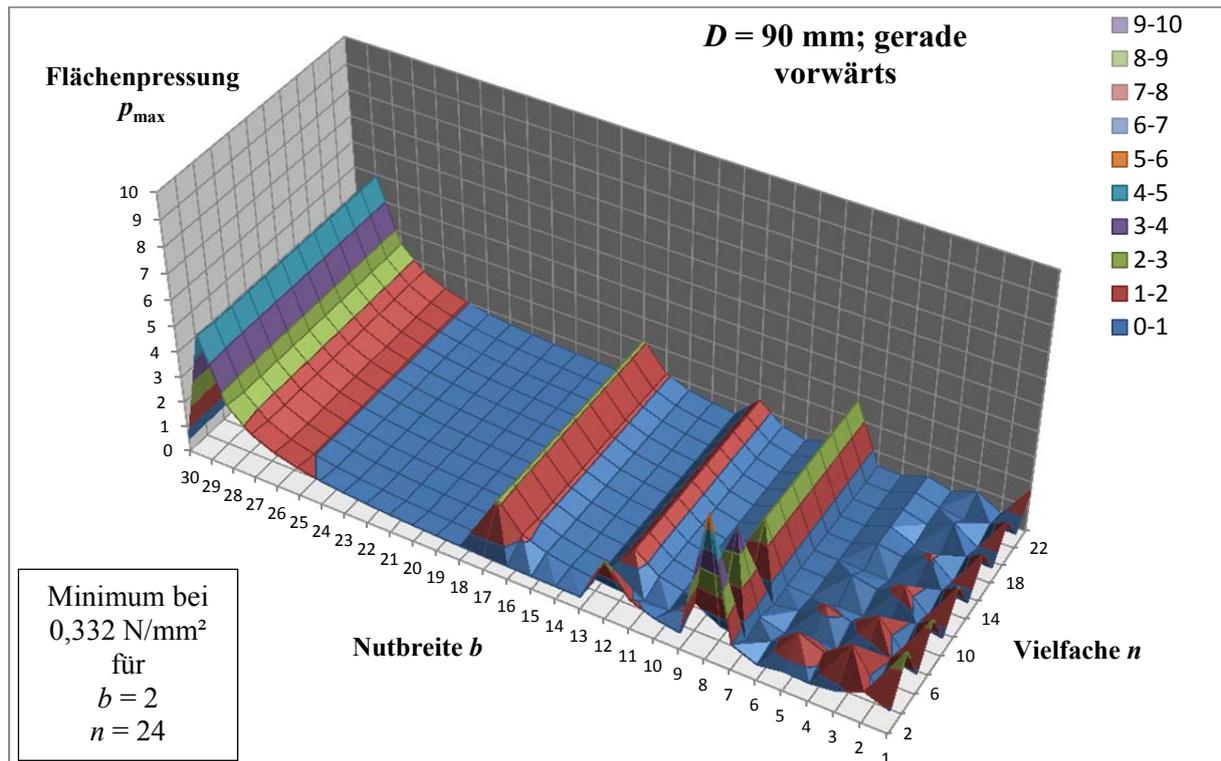


Abbildung 5-9: Gegenüberstellung der Flächenpressung der geraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 90$ mm und positiver Drehrichtung ($H_{eff} = 1$ mm)

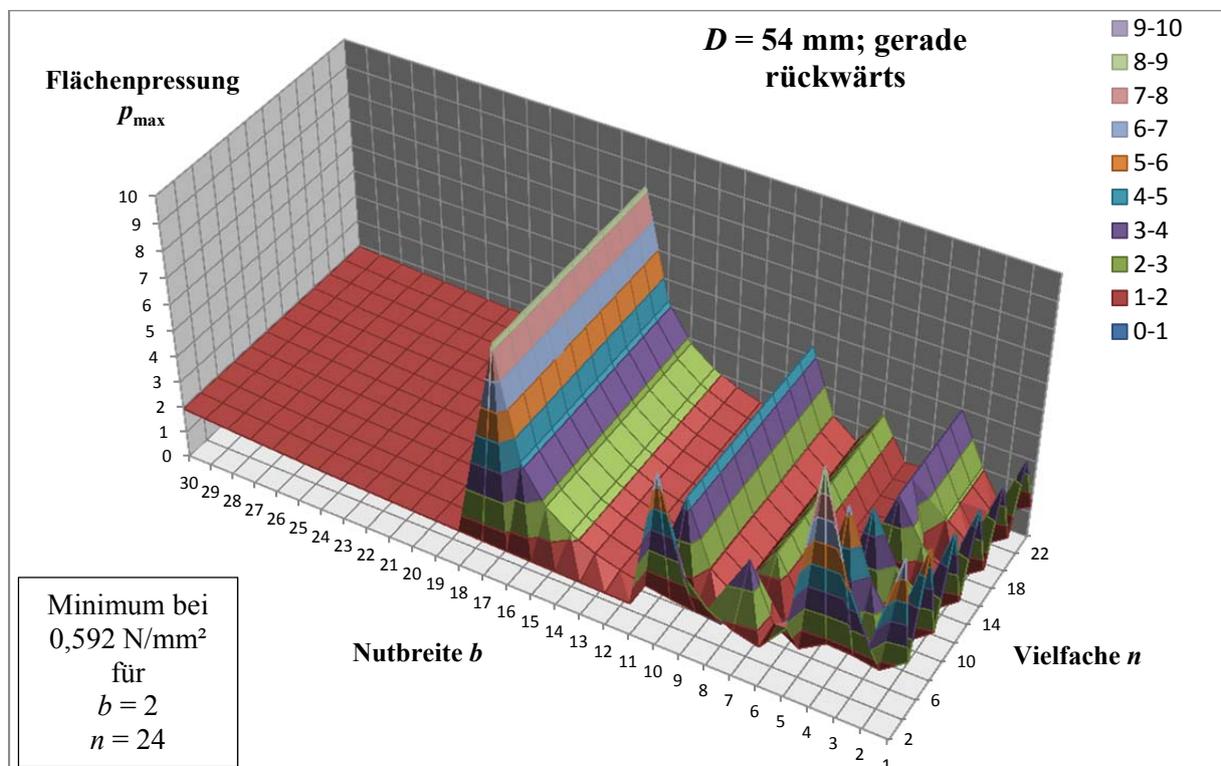


Abbildung 5-10: Gegenüberstellung der Flächenpressung der geraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 54$ mm und negativer Drehrichtung ($H_{eff} = 1$ mm)

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

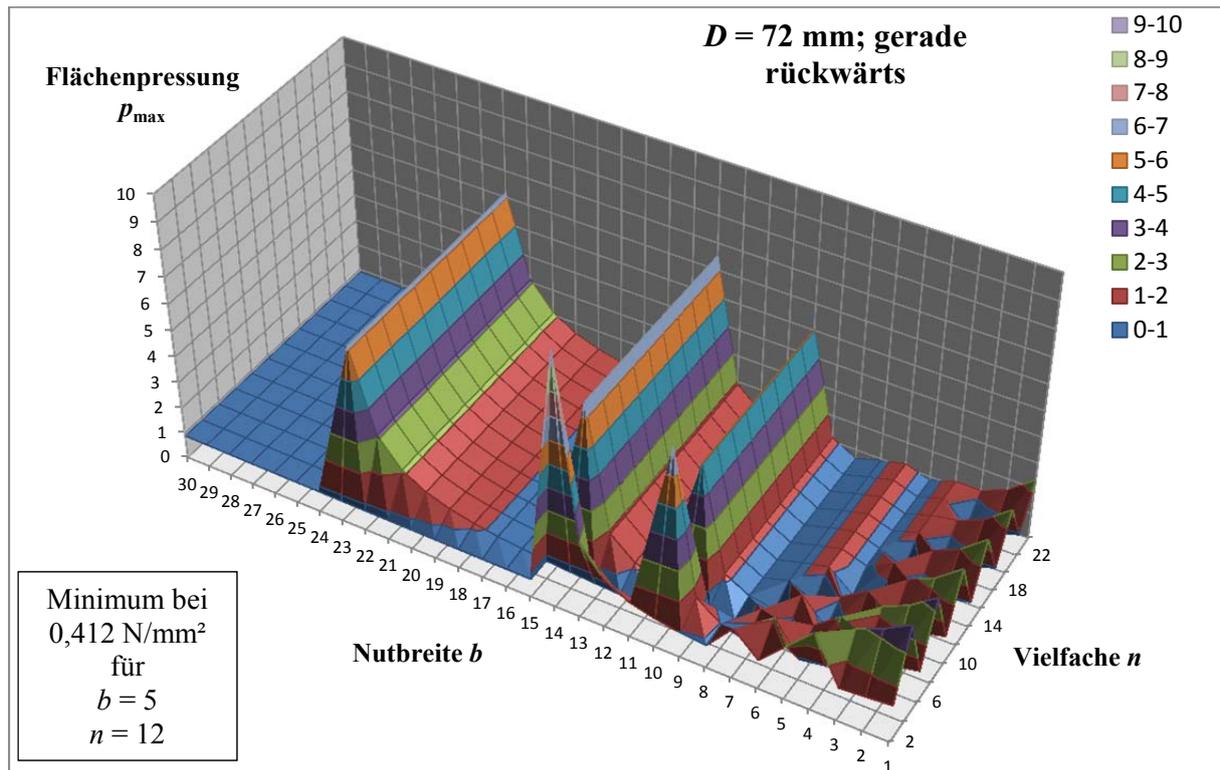


Abbildung 5-11: Gegenüberstellung der Flächenpressung der geraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 72$ mm und negativer Drehrichtung ($H_{eff} = 1$ mm)

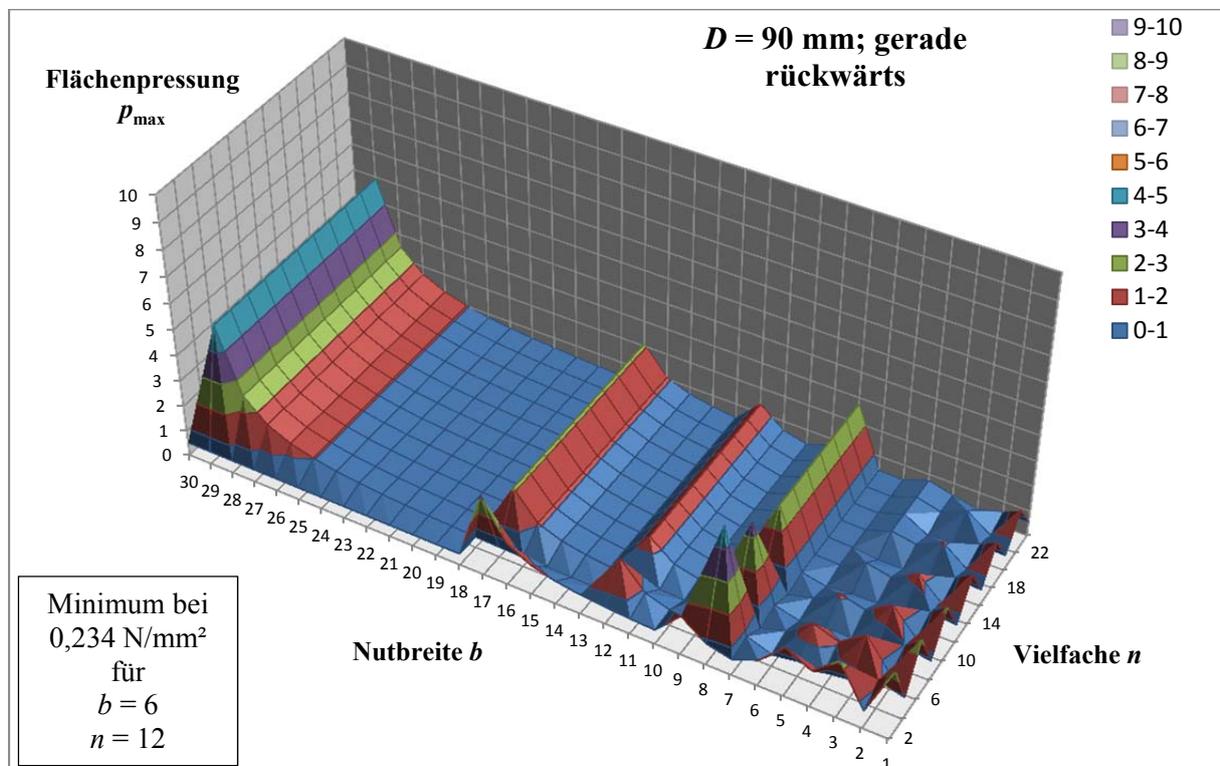


Abbildung 5-12: Gegenüberstellung der Flächenpressung der geraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 90$ mm und negativer Drehrichtung ($H_{eff} = 1$ mm)

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

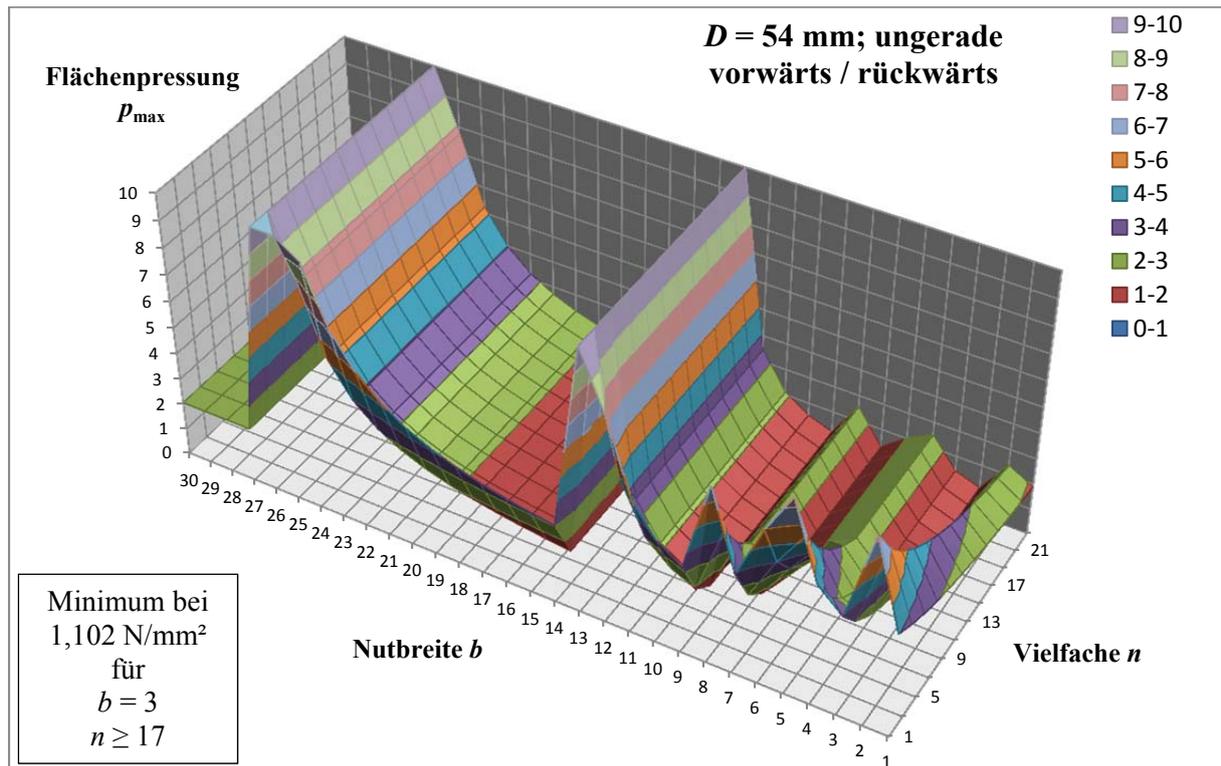


Abbildung 5-13: Gegenüberstellung der Flächenpressung der ungeraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 54 \text{ mm}$ (positive sowie negative Drehrichtung; $H_{eff} = 1 \text{ mm}$)

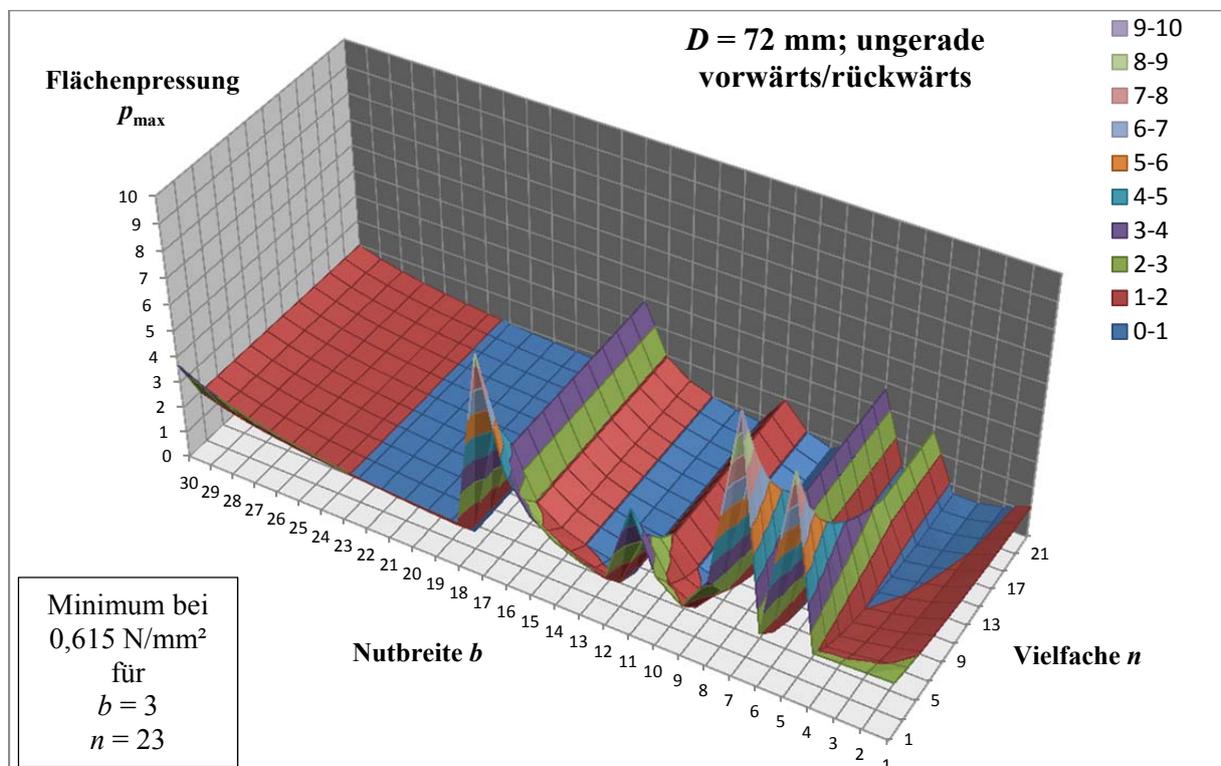


Abbildung 5-14: Gegenüberstellung der Flächenpressung der ungeraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 72 \text{ mm}$ (positive sowie negative Drehrichtung; $H_{eff} = 1 \text{ mm}$)

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

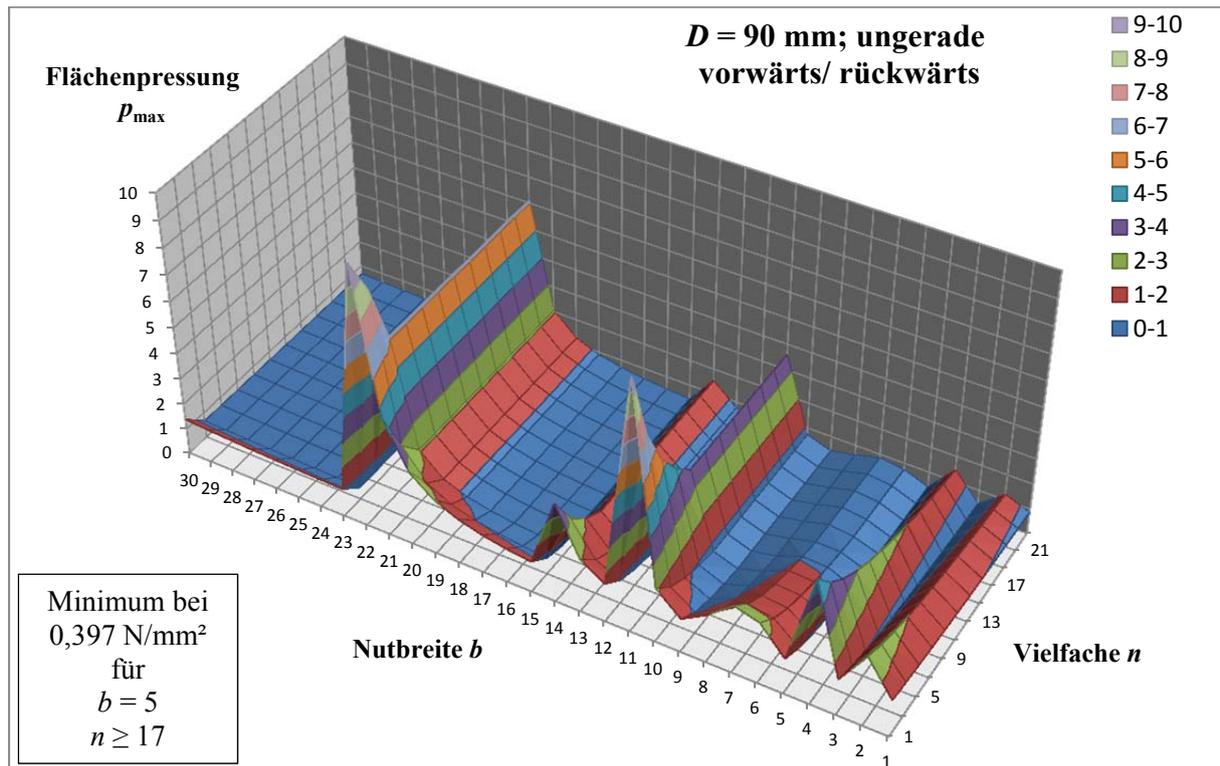


Abbildung 5-15: Gegenüberstellung der Flächenpressung der ungeraden Verzahnungsbilder in Abhängigkeit von b und n bei $D = 90$ mm (positive sowie negative Drehrichtung; $H_{\text{eff}} = 1$ mm)

Die graphische Gegenüberstellung lässt keine Regelmäßigkeit in der Abhängigkeit der Flächenpressung von den Parametern b , n und D erkennen. Nachfolgend werden Merkmale aufgeführt, die aus der graphischen Gegenüberstellung hergeleitet sind:

- Die ermittelten Flächenpressungen sind bei der eingesetzten effektiven Nuttiefe von $H_{\text{eff}} = 1$ mm in Größenordnungen vom Faktor 10 bis 100 größer als die Torsionsspannungen (vgl. Kapitel 4).
- Die Auswertung verdeutlicht eine drehrichtungsabhängige Beanspruchung der geraden Verzahnung. Eine allgemeine Bevorzugung der Drehrichtung kann jedoch nicht hergeleitet werden.
- Im Wesentlichen bewirkt eine Durchmessererhöhung eine Abnahme der Flächenpressung. Die Flächenpressung ist jedoch auch von der Kombination mit b und n abhängig, weshalb eine Reduzierung der Beanspruchungen nicht zwingend mit einer bloßen Durchmessererhöhung einhergeht.
- Die Wahl der Nutbreite beeinflusst die Beanspruchungen in erheblichem Maße. Dieser Einfluss ist nicht mit einer einfachen Funktion beschreibbar.
- Vornehmlich bei der ungeraden Verzahnung ist ein exponentieller Einfluss von n zu erkennen, wobei größere Werte für n geringere Beanspruchungen hervorrufen.

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

- Sobald die Bedingung $n \geq D/b$ erfüllt ist, führt eine Steigerung des Vielfachen n zu keiner weiteren Änderung der Flächenpressung.
- Innerhalb des Untersuchungsraumes existieren Stellen, die zu Flächenpressungen nahe denen am Optimum führen.
- Die Lokalisierung der maximalen Flächenpressung anhand des Index m ergibt, dass diese entweder am Rand der Basis oder an der Flanke des kleinsten Kreisbogens (k_0) vorkommt, wie es in den nachstehenden Beispielen verdeutlicht ist:

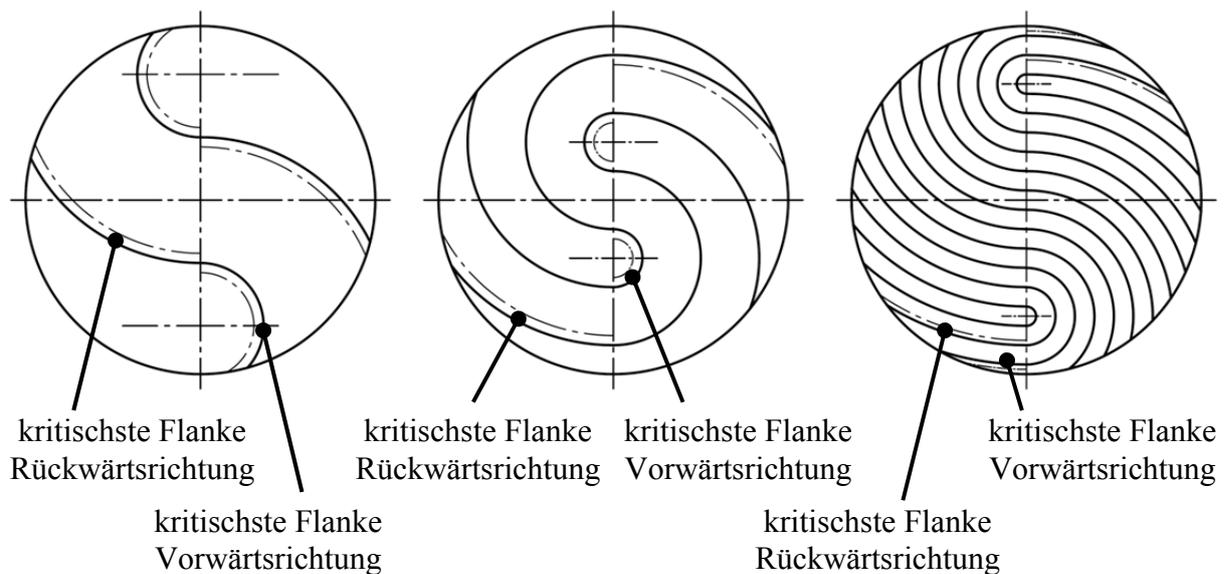


Abbildung 5-16: Visualisierung der am stärksten belasteten Flanken in Abhängigkeit der Drehrichtung

Da kleinere Flächen bei gleicher Belastung eine höhere Beanspruchung erfahren, während Flächen weit außen an der Basis höhere Kräfte aufgeprägt werden, ist die Verteilung der maximal belasteten Flanken nach den Beispielen aus Abbildung 5-16 nachvollziehbar. Die Verteilung der maximal belasteten Flanken ist vom Verzahnungsbild abhängig und fällt stellenweise sehr unterschiedlich aus, was zu den Unstetigkeiten in den Diagrammen führt, wie sie z. B. in Abbildung 5-7 oder Abbildung 5-10 im unteren Nutbreitenbereich in Form von Spitzen erkennbar sind. Ist der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte größer als die Basisgeometrie (es gilt $n \geq D/b$), liegen die kleinsten projizierten Flächen der Verzahnung stets am Basisrand und stellen demnach die am höchsten beanspruchten Stellen dar. Bei konstantem b sind die projizierten Flächen am Basisrand für jedes Vielfache $n \geq D/b$ gleich groß. Dies erklärt die identischen Flächenpressungen für jedes $n \geq D/b$ bei gleicher Nutbreite.

Die Unabhängigkeit der Beanspruchungen des ungeraden Verzahnungsbildes von der Drehrichtung resultiert daher, dass aufgrund der spiegelbildlichen Ausführung der Verzahnungspartner eine Änderung der Drehrichtung zu einer Spiegelung der Beanspruchungen führt, wodurch die Beträge der Flächenpressungen gleich bleiben.

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Bei relativ kleinen Nuttiefen ist die Flächenpressung gegenüber den Torsionsspannungen in einem so großen Verhältnis, dass die Flächenpressung die höher zu gewichtende Beanspruchung darstellt und die Torsionsspannungen vernachlässigt werden können. Eine Erhöhung der Nuttiefe führt zu einer proportionalen Abnahme der Flächenpressung, sodass bei genügend hoher Nuttiefe die Torsionsspannungen, die unabhängig von der Nuttiefe sind, eine höhere Gewichtung erhalten. In solch einem Fall sind die beiden Beanspruchungsarten zu einer Vergleichsspannung zusammenzufassen. Das Vorgehen dazu wird in Kapitel 8 erläutert.

Zur Verdeutlichung des Effektes der zweidimensionalen Verzahnungsparameter auf die Flächenpressung, werden jeweils das Beanspruchungsminimum und das Beanspruchungsmaximum für die einzelnen Durchmesser innerhalb des betrachteten Spektrums tabellarisch aufgeführt sowie deren Verhältnis angegeben:

	D [mm]	p_{\min} [N/mm ²]	b [mm]	n	p_{\max} [N/mm ²]	b [mm]	n	p_{\max}/p_{\min}
54	gerade vorwärts	0,943	2	14	8,509	17	2	9,023
	gerade rückwärts	0,592	2	24	9,130	4	2	15,422
	ungerade	1,102	3	≥ 17	26,428	26	1	23,982
72	gerade vorwärts	0,547	2	24	8,570	10	2	15,667
	gerade rückwärts	0,412	5	12	9,638	14	2	23,393
	ungerade	0,615	3	23	10,680	7	1	17,366
90	gerade vorwärts	0,332	2	24	5,797	8	2	17,461
	gerade rückwärts	0,234	6	12	4,908	29	≥ 4	20,974
	ungerade	0,397	5	≥ 17	13,219	22	1	33,297

Tabelle 5-1: Übersicht der Extrema in Bezug auf Flächenpressung (bei $T = 1 \text{ Nm}$ und $H_{\text{eff}} = 1 \text{ mm}$) mit Zuordnung der entsprechenden Parameter

Die tabellarische Übersicht verdeutlicht, dass die Beanspruchungen durch Flächenpressung mit der entsprechenden Kombination aus b und n um das bis zu 33-fache verringert werden können. Das Optimum für b ist abhängig vom Durchmesser der Basisfläche, von der Parität und ggf. von der Belastungsrichtung und muss mit dem entwickelten Algorithmus iterativ bestimmt werden, was eines hohen Aufwandes bedarf.

Um den Aufwand zur Bestimmung von passenden Werten für b und n zu reduzieren, ist eine Grobdimensionierung beider Parameter zweckmäßig. Das Vorgehen wird nachfolgend entwickelt.

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

5.4 Grobdimensionierung von b und n

Neben den Optimalstellen für b existierten Kombinationen aus b und n , die für die untersuchten Durchmesser unwesentlich höhere Flächenpressungen hervorrufen (siehe Diagramme). In der nachfolgenden Tabelle sind mit b' und n' ausgewählte Kombinationen angeführt, die zu Pressungen p' führen, die das gefundene Optimum für den jeweiligen Durchmesser, die Parität und die entsprechende Belastungsrichtung um weniger als 30 % übersteigen:

	D [mm]	p_{\min} [N/mm ²]	b [mm]	n	p' [N/mm ²]	b' [mm]	n'	p'/p_{\min}	D/b'
54	gerade vorwärts	0,943	2	14	1,078	6	4	1,143	9
	gerade rückwärts	0,592	2	24	0,764	6	6	1,291	9
	ungerade	1,102	3	≥ 17	1,193	9	5	1,082	6
72	gerade vorwärts	0,547	2	24	0,607	8	4	1,109	9
	gerade rückwärts	0,412	5	12	0,430	8	6	1,043	9
	ungerade	0,615	3	23	0,671	12	5	1,082	6
90	gerade vorwärts	0,332	2	24	0,388	10	4	1,168	9
	gerade rückwärts	0,234	6	12	0,275	10	6	1,176	9
	ungerade	0,397	5	≥ 17	0,429	15	5	1,082	6

Tabelle 5-2: Auswahl von Kombinationen geringer Flächenpressung ($T = 1 \text{ Nm}$ und $H_{\text{eff}} = 1 \text{ mm}$)

In der rechten Spalte der Tabelle ist das Verhältnis zwischen Basisdurchmesser und der ausgewählten Nutbreite b' angegeben. Die Übersicht verdeutlicht, dass die Flächenpressungen bei den betrachteten Durchmessern um weniger als 30 % vom Optimum abweichen, wenn bei der geraden Geometrie die ausgewählte Nutbreite $b' = 1/9 \cdot D$ und das Vielfache $n' = 4$ für eine Torsionsbelastung in Vorwärtsrichtung und $n' = 6$ für die Rückwärtsrichtung betragen. Bei wechselnder Belastungsrichtung ist die gerade Verzahnung entsprechend der Rückwärtsrichtung auszulegen, da hierbei insgesamt geringere Beanspruchungen entstehen. Bei der ungeraden Geometrie liegen die Parameter bei $b' = 1/6 \cdot D$ und $n' = 5$.

Mit der Akzeptanz einer gegenüber dem Optimum erhöhten Flächenpressung an den Zahnflanken ist die Findung einer geeigneten Variation aus b und n auf ein einfaches Vorgehen reduzierbar. Eine aufwändige Bestimmung des Optimums per Iteration bleibt dadurch erspart. Mit den nachstehenden Gleichungen werden auf Grundlage der Vergleiche in Tabelle 5-2 brauchbare Werte für die Gestaltung der Verzahnungsgeometrie generiert:

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Für die gerade Geometrie gilt:

5-90

Für die Belastung in Vorwärtsrichtung (gemäß Abbildung 5-4):

$$b = \frac{1}{9} \cdot D$$

$$n = 4$$

bzw.

$$a = b \cdot n = \frac{1}{9} \cdot D \cdot 4 = \frac{4}{9} \cdot D$$

Für die Belastung in Rückwärtsrichtung (gemäß Abbildung 5-4) oder bei wechselnder Belastungsrichtung:

$$b = \frac{1}{9} \cdot D$$

$$n = 6$$

bzw.

$$a = b \cdot n = \frac{1}{9} \cdot D \cdot 6 = \frac{2}{3} \cdot D$$

Für die ungerade Geometrie gilt:

5-91

$$b = \frac{1}{6} \cdot D$$

$$n = 5$$

bzw.

$$a = b \cdot n = \frac{1}{6} \cdot D \cdot 5 = \frac{5}{6} \cdot D$$

Die Nutbreite b steht in diesem Fall in einem linearen Bezug zum Basisdurchmesser, der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte a ist aufgrund von dessen Zusammenhang mit b und dem dimensionslosen Vielfachen n ebenfalls linear abhängig von D . Die geometrischen Parameter a , b und D sind somit proportional zueinander. Die Verzahnungsbilder entsprechen den folgenden Proportionen:

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

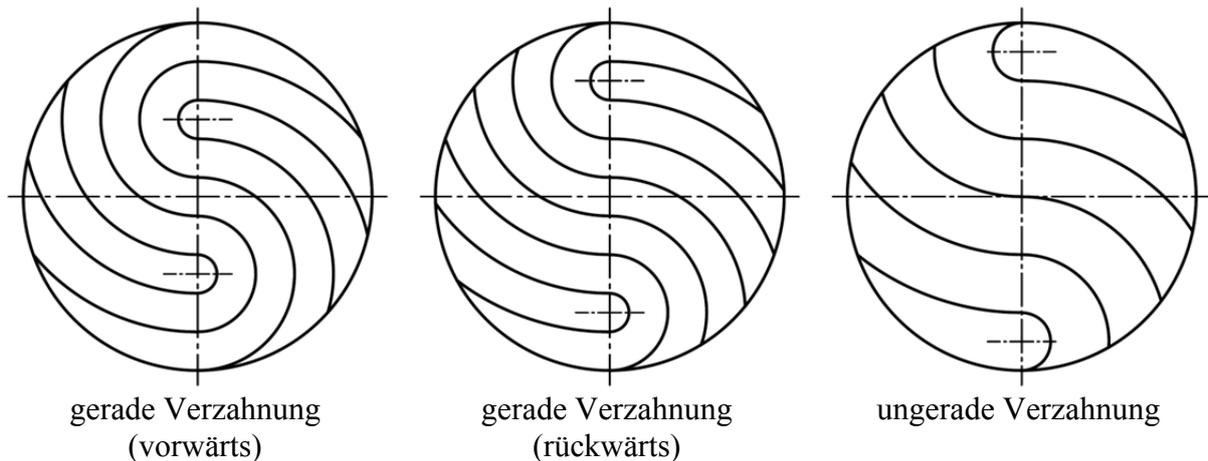


Abbildung 5-17: Veranschaulichung der Verzahnungsproportionen bei Nutzung der empfohlenen Parameter aus der Grobdimensionierung

Eine Vorschrift zur Grobdimensionierung des Wellen- bzw. Basisdurchmessers D wird ebenfalls auf Grundlage der ausgewählten Werte in Tabelle 5-2, die zu einer Flächenpressung nahe dem Optimum führen, entwickelt. Auf diesem Wege wird für eine bestimmte Torsionsmomentbelastung ein Anhaltswert für den Durchmesser D gegeben, der für die Gestaltung der Verzahnung genutzt werden kann.

5.5 Grobdimensionierung des Wellendurchmessers

Die in Tabelle 5-2 aufgeführten Werte für Flächenpressungen nahe dem Optimum lassen erkennen, dass bei bestehender Proportionalität der Parameter a und b mit D (n ist dann konstant) eine Steigerung des Durchmessers zu einer Abnahme der Beanspruchung der Verzahnung führt. Dieser Zusammenhang wird für die Grobdimensionierung vereinfacht als folgender mathematischer Ausdruck formuliert:

$$5-92 \quad p \sim \frac{1}{D^x} \Leftrightarrow p \cdot D^x = \text{konst.}$$

Die Potenzierung des Durchmessers mit der Unbekannten x dient der Bestimmung des gesuchten Zusammenhanges zwischen p und D , der nicht unbegründet z. B. als proportional angenommen werden kann. Aus Gleichung 5-92 folgt:

$$5-93 \quad p_1(D_1, b_1', n_1') \cdot D_1^x = p_2(D_2, b_2', n_2') \cdot D_2^x$$

$$5-94 \quad \Leftrightarrow \frac{p_1(D_1, b_1', n_1')}{p_2(D_2, b_2', n_2')} = \frac{D_2^x}{D_1^x} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^x$$

Die Potenz x wird wie folgt bestimmt:

$$5-95 \quad \frac{p_1(D_1, b_1', n_1')}{p_2(D_2, b_2', n_2')} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^x$$

$$5-96 \quad \Leftrightarrow \log\left(\frac{p_1(D_1, b_1', n_1')}{p_2(D_2, b_2', n_2')}\right) = x \cdot \log\left(\frac{D_2}{D_1}\right)$$

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

$$5-97 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\log\left(\frac{p_1(D_1, b_1', n_1')}{p_2(D_2, b_2', n_2')}\right)}{\log\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}$$

Ein Einsetzen von bekannten Werten (aus Tabelle 5-2) führt zur Lösung der Unbekannten x :

mit (beispielsweise)

$$D_1 = 54 \text{ mm}, D_2 = 72 \text{ mm und}$$

$$p_1(D_1, b_1' = 6, n_1' = 4) = 1,078 \text{ N/mm}^2 \text{ und}$$

$$p_2(D_2, b_2' = 8, n_2' = 4) = 0,607 \text{ N/mm}^2$$

bei Belastung der geraden Verzahnung in Vorwärtsrichtung

folgt:

$$5-98 \quad x = \frac{\log\left(\frac{1,078}{0,607}\right)}{\log\left(\frac{72}{54}\right)} = 2$$

Der vereinfachte Zusammenhang zwischen Flächenpressung und Durchmesser ist somit hyperbelförmig:

$$5-99 \quad p \sim \frac{1}{D^2}$$

Mit Berücksichtigung des linearen Bezugs der Flächenpressung zum Torsionsmoment T und dem antiproportionalen Bezug der Flächenpressung zur Nuttiefe H_{eff} besteht der folgende vereinfachte Zusammenhang:

$$5-100 \quad p \sim \frac{1}{D^2}, \frac{1}{H_{\text{eff}}}, T$$

$$5-101 \quad \Leftrightarrow p_1 \cdot D_1^2 \cdot \frac{H_{\text{eff}}}{T} = p_2 \cdot D_2^2 \cdot \frac{H_{\text{eff}}}{T} = \text{konst.} = c_3$$

bzw.

$$5-102 \quad \Leftrightarrow p_1 \cdot D_1^2 = p_2 \cdot D_2^2 = \text{konst.} = c_4 \quad \text{mit } c_4 = c_3 \cdot \frac{T}{H_{\text{eff}}}$$

Da die Flächenpressung neben dem Durchmesser auch vom Belastungsfall und der Parität des Verzahnungsbildes abhängig ist, wird für die Bildung der Konstanten c_4 vereinfacht der Mittelwert aus den drei jeweiligen Ergebnissen für einen Durchmesser aus Tabelle 5-2 genommen:

$$5-103 \quad c_4 = \bar{p}_1 \cdot D_1^2 = \frac{1,078 + 0,764 + 1,193}{3} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot (54 \text{ mm})^2 \approx 2950 \text{ N}$$

mit \bar{p}_1 – Mittelwert der drei ermittelten Flächenpressungen zu D_1

5. Bestimmung der Flächenpressung in der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die Konstante c_3 (vgl. Gleichung 5-101) wird aus der Konstanten c_4 und den in der Gegenüberstellung in Kapitel 5.3 konstant gehaltenen Werten für T und H_{eff} gebildet:

$$5-104 \quad c_3 = c_4 \cdot \frac{H_{\text{eff}}}{T} = 2950 \text{ N} \cdot \frac{1 \text{ mm}}{1000 \text{ Nmm}} \approx 3 \quad \text{mit } T = 1000 \text{ Nmm} \\ \text{und } H_{\text{eff}} = 1 \text{ mm}$$

Vereinfacht ist die Flächenpressung demnach anhand der Parameter D , T und H_{eff} mit dem folgenden Term zu bestimmen, wobei für die Grobdimensionierung $H_{\text{eff}} \approx H$ gesetzt wird:

$$5-105 \quad p = 3 \cdot \frac{T}{H_{\text{eff}} \cdot D^2} \approx 3 \cdot \frac{T}{H \cdot D^2} \leq p_{\text{zul}}$$

Das Umformen der Gleichung 5-105 ergibt die Vorschrift zur groben Dimensionierung des Durchmessers D in Abhängigkeit von der Belastung T sowie der Nuttiefe H :

$$5-106 \quad \boxed{D \geq \sqrt{3 \cdot \frac{T}{H \cdot p_{\text{zul}}}}}$$

Die zulässige Flächenpressung ist nach Tabelle 2-1 auszuwählen. Ist die Nuttiefe H ebenfalls nicht bekannt, ist ein Anhaltswert von $H = 10 \text{ mm}$ für die Grobdimensionierung geeignet, da dieser Wert ein gutes Mittel für gebräuchliche Nuttiefen darstellt.

Die bisherigen Untersuchungen fokussieren vornehmlich die Einflüsse und Auswirkungen der zweidimensionalen Parameter, die die Gestalt des Verzahnungsbildes vorgeben (Nutbreite b , Vielfaches n und Durchmesser D). Zudem ist ein linearer Einfluss der Nuttiefe H bzw. H_{eff} herausgestellt. Vollständig unberücksichtigt ist bislang der Einfluss des Flankenwinkels. Dieser wird im nachstehenden Kapitel betrachtet.

6. Einfluss des Flankenwinkels

Der Flankenwinkel α beschreibt die Schrägstellung der Zahnflanke bzw. der Nutflanke im Normalschnitt. Ein Flankenwinkel von 0° bedeutet, dass die Flanke des Zahns bzw. der Nut senkrecht zum Nutgrund bzw. Zahnkopf ist. Bei einem theoretischen Flankenwinkel von 90° ist die Flanke kollinear mit Zahnkopf und Nutgrund, sodass praktisch keine Nut vorhanden ist und eine Verbindung mittels Formschluss nicht erreicht werden kann.

Die Zahnflanke wird durch die vom Torsionsmoment induzierte Umfangskraft F_U belastet. Liegt die Betrachtungsebene des Zahnquerschnittes nicht in der Normalschnittebene, sondern in Umfangsrichtung, ist der abgebildete Flankenwinkel ein anderer. Dieser *perspektivisch veränderte Flankenwinkel* wird mit α' bezeichnet. Die Zusammenhänge sind nachstehend veranschaulicht:

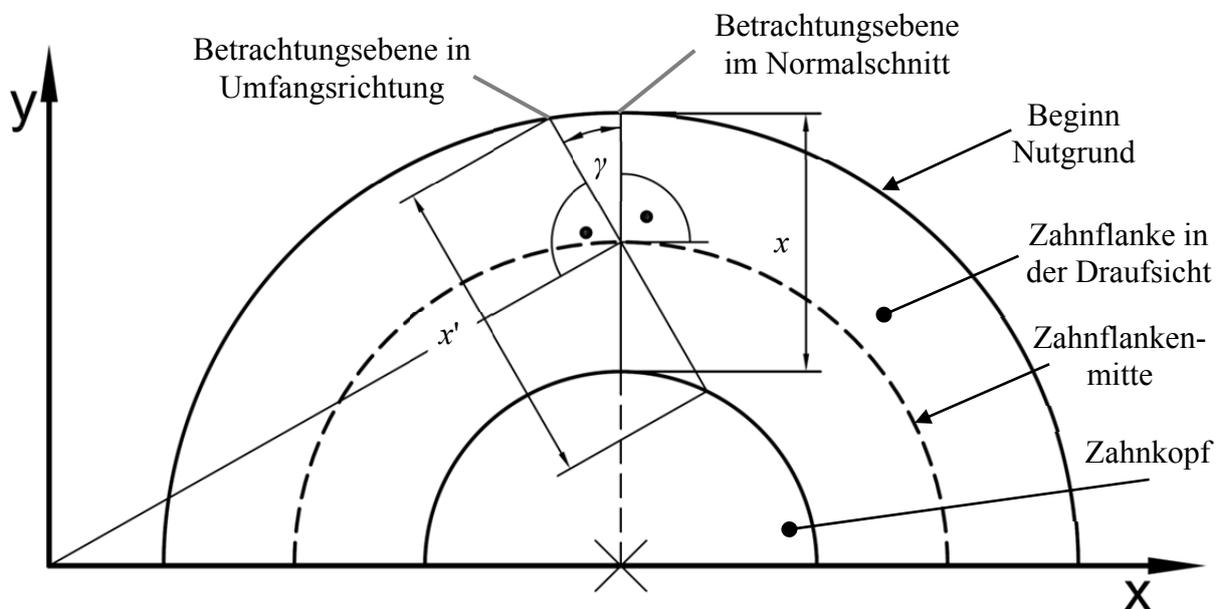


Abbildung 6-1: Verdrehung der Ansichtsebene in Umfangsrichtung

Durch eine Drehung der Betrachtungsebene um γ erfährt der Abstand x eine perspektivisch bedingte Längenänderung auf die Länge x' , die näherungsweise wie folgt beschrieben wird:

$$6-1 \quad \cos \gamma \approx \frac{x}{x'} \Leftrightarrow x' \approx \frac{x}{\cos \gamma}$$

Zwischen α und x bzw. α' und x' gilt folgendes Verhältnis (vgl. Abbildung 6-2):

6. Einfluss des Flankenwinkels

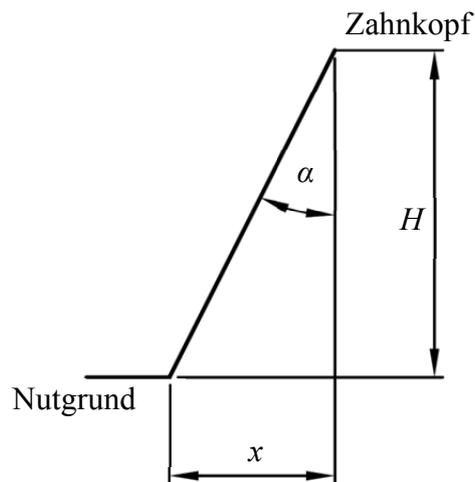


Abbildung 6-2: Verhältnis zwischen x und α (Verhältnis zwischen x' und α' ist analog)

In der Normalschnittebene (bei $\gamma = 0$):

$$6-2 \quad \tan \alpha = \frac{x}{H} \Leftrightarrow x = H \cdot \tan(\alpha)$$

In der Ebene der Umfangskraftrichtung:

$$6-3 \quad \tan \alpha' = \frac{x'}{H} \Leftrightarrow \alpha' = \text{atan}\left(\frac{x'}{H}\right)$$

Die Zahnhöhe H bleibt durch den Perspektivwechsel unverändert, da die Ansichtsebene um die Vertikalachse gedreht wird.

Der Zusammenhang zwischen α und α' besteht in einem vom Verdrehwinkel der Ansichtsebene γ abhängigen Verhältnis:

$$6-4 \quad \alpha' = \text{atan}\left(\frac{x}{H \cdot \cos \gamma}\right) = \text{atan}\left(\frac{H \cdot \tan \alpha}{H \cdot \cos \gamma}\right)$$

$$6-5 \quad \Leftrightarrow \boxed{\alpha' = \text{atan}\left(\frac{\tan \alpha}{\cos \gamma}\right)}$$

Der Nenner des Arkustangensterms kann nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Der Flankenwinkel α' hat dann einen Wert zwischen α und 90° . Der Flankenwinkel α' ist somit stets größer oder gleich α :

$$6-6 \quad \alpha \leq \alpha' \leq 90^\circ$$

Bei einem Flankenwinkel von $\alpha = 0^\circ$ ist immer auch $\alpha' = 0^\circ$.

Die Auswirkungen der Umfangskraft F_U auf die einzelne Zahnflanke bei beliebigem Winkel α' werden im nachfolgenden Kapitel untersucht.

6. Einfluss des Flankenwinkels

6.1 Zahnflankenbelastung durch reine Umfangskraft

Zur Beurteilung der Zahnflankenbeanspruchung wird der Zahn- bzw. Nutquerschnitt in Umfangsrichtung betrachtet. Die belastende Umfangskraft F_U sowie der entsprechende Flankenwinkel α' sind für jeden betrachteten Querschnitt spezifisch. Die Kraft F_U wird in Komponenten aufgeteilt, die jeweils mit einem U im Index gekennzeichnet sind. Zum einen entsteht aufgrund der schiefen Ebene eine *Axialkraftkomponente* F_{Ua} . Sie führt zu einem Gleiten der aufeinanderliegenden Flankenflächen. Um dies zu verhindern, muss eine Gegenkraft erzeugt werden, die mindestens der Axialkraft F_{Ua} entspricht. Des Weiteren wird von der Umfangskraft F_U eine *Normalkraftkomponente* F_{Un} induziert, die eine Druckbeanspruchung der Flanke bewirkt. Unter der Voraussetzung, dass zwischen den Kontaktflächen der Flanken Reibung vorhanden ist, entsteht zusätzlich eine *Reibkraftkomponente* F_{Ur} , die Schubspannungen auf die Zahnflanken ausübt. Reibung reduziert die Belastungen durch Normalkraft und Axialkraft. Die Zusammenhänge sind in Abbildung 6-3 verdeutlicht:

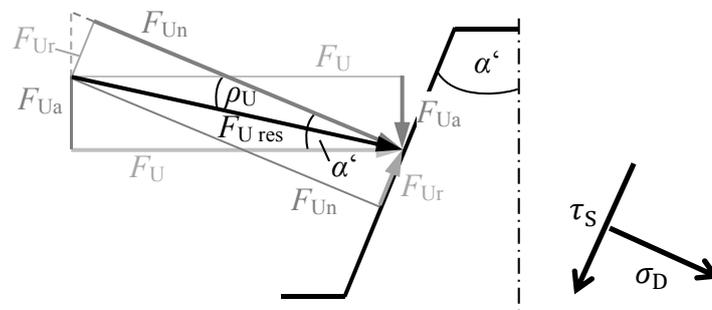


Abbildung 6-3: Angreifende Kräfte an einer Zahnflanke bei reiner Belastung durch eine Umfangskraft

Die Kraft $F_{U\text{ res}}$ ist die Resultierende aller Kräfte. Der Winkel zwischen der Resultierenden und der Normalkraftkomponente ist der Reibwinkel ρ_U . Dieser definiert das Verhältnis zwischen Normalkraft und Reibkraft und steht im Zusammenhang mit dem Reibbeiwert μ . Allerdings kann der Reibwinkel ρ_U nicht größer als der Flankenwinkel α' sein. Unter der Voraussetzung, dass die Parameter F_U , α' und μ bekannt sind, sind die Kraftkomponenten wie folgt zu bestimmen:

$$6-7 \quad \cos(\alpha' - \rho_U) = \frac{F_U}{F_{U\text{ res}}} \Leftrightarrow \boxed{F_{U\text{ res}} = \frac{F_U}{\cos(\alpha' - \rho_U)}}$$

bzw.

$$6-8 \quad \boxed{F_{U\text{ res}} = \sqrt{F_{Un}^2 + F_{Ur}^2} = \sqrt{F_U^2 + F_{Ua}^2}}$$

$$6-9 \quad \tan(\alpha' - \rho_U) = \frac{F_{Ua}}{F_U} \Leftrightarrow \boxed{F_{Ua} = F_U \cdot \tan(\alpha' - \rho_U)}$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

$$6-10 \quad \sin(\rho_U) = \frac{-F_{Ur}}{F_{U\text{res}}} \Leftrightarrow -F_{Ur} = F_{U\text{res}} \cdot \sin(\rho_U) \Leftrightarrow \boxed{F_{Ur} = -F_U \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)}}$$

$$6-11 \quad \cos(\rho_U) = \frac{F_{Un}}{F_{U\text{res}}} \Leftrightarrow F_{Un} = F_{U\text{res}} \cdot \cos(\rho_U) \Leftrightarrow \boxed{F_{Un} = F_U \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)}}$$

Die Beziehung zwischen Reibwinkel ρ_U und Reibbeiwert μ lautet wie folgt:

$$6-12 \quad \rho_U = \text{atan}(\mu)$$

Für den Fall, dass mit dieser Beziehung der Reibwinkel größer wird als α' , ist der Reibwinkel dem Flankenwinkel gleichzusetzen:

$$6-13 \quad \rho_U = \alpha' \quad \text{für } \text{atan}(\mu) > |\alpha'|$$

Sobald α' und ρ_U gleich sind, tritt Selbsthemmung ein, d. h. die Axialkraft ist gleich null:

$$6-14 \quad F_{Ua}(\alpha' = \rho_U) = F_U \cdot \tan(\rho_U - \rho_U) = 0$$

Für den Extremfall eines Flankenwinkels von 90° sind die angeführten Formeln nicht anwendbar. Der rein theoretische Fall bedingt eine Zahnhöhe von 0 mm, das stirnseitige Profil wäre dann eine glatte Fläche. Eine formschlüssige Kraftübertragung ist auf diesem Wege nicht möglich. Es gilt:

$$6-15 \quad F_{Un} = F_{Ur} = F_{Ua} = 0 \quad \text{für } \alpha' = 90^\circ$$

Unter Beachtung dessen sind die angeführten Formeln für den folgenden Definitionsbereich gültig:

$$6-16 \quad -90^\circ < \alpha' < 90^\circ$$

Bei einem negativen Flankenwinkel wird die Zahnrückseite betrachtet. Die Umfangskraft zeigt in diesem Fall von der Zahnflanke weg und stellt eine Entlastung der Zahnflanke dar (siehe Abbildung 6-4). Analoge Verhältnisse treten bei negativer Umfangskraft und positivem Flankenwinkel auf.

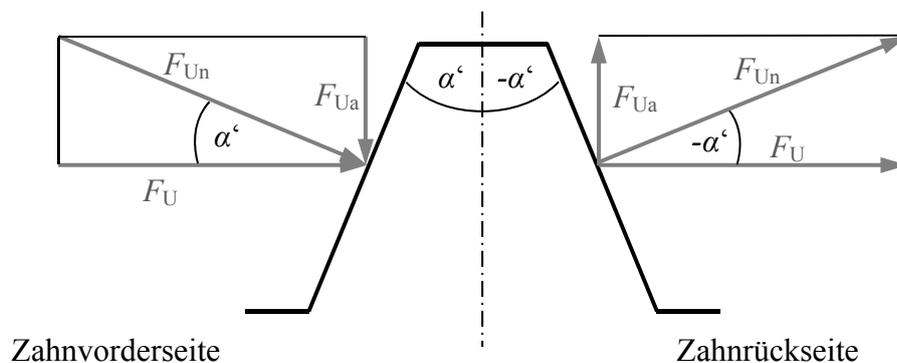


Abbildung 6-4: Darstellung der Kraftverhältnisse an Zahnflankenvorderseite und -rückseite (ohne Reibung)

6. Einfluss des Flankenwinkels

Der Reibwinkel muss bei einem negativen Flankenwinkel ebenfalls ein negatives Vorzeichen erhalten:

$$6-17 \quad \rho_U = -\text{atan}(\mu) \quad \text{für } \alpha' < 0^\circ$$

Zeigt die Umfangskraft von der Zahnflanke weg, sodass eine Entlastung stattfindet, stellt die Normalkraftkomponente eine Zugbeanspruchung dar. Diese tritt real nicht auf, weil die Zähne nicht fest miteinander verbunden sind. Eine Zugbeanspruchung ist somit als ein Abheben der Zähne voneinander zu interpretieren. Dieser Vorgang führt vor allem bei dynamischen Belastungen zu Problemen. Durch das zyklische Abheben und Aufeinandertreffen der einzelnen Zähne erfahren die Flanken Verschleiß durch Reibkorrosion. Diesem Problem kann mit einer Vorspannkraft F_V entgegengewirkt werden. Die Auswirkungen durch eine zusätzliche Vorspannkraft sind im nachfolgenden Kapitel angeführt.

6.2 Zahnflankenbelastung durch eine zusätzliche Vorspannkraft

Wird die Zahnflanke zusätzlich mit einer Vorspannkraft F_V belastet, führt dies zu einer Erhöhung der Normal- und der Reibkräfte, die auf die Zahnflanke wirken. Die Kraftkomponenten, die von der Vorspannkraft F_V erzeugt werden, sind im Index durch ein V gekennzeichnet (im Gegensatz zu den Komponenten der Umfangskraft, die mit einem U gekennzeichnet sind). In der nachstehenden Abbildung sind die gesamten Belastungen auf die Zahnflanke bei bestehender Umfangs- sowie Vorspannkraft aufgetragen. Die einzelnen Kraftkomponenten sind darauf erkennbar:

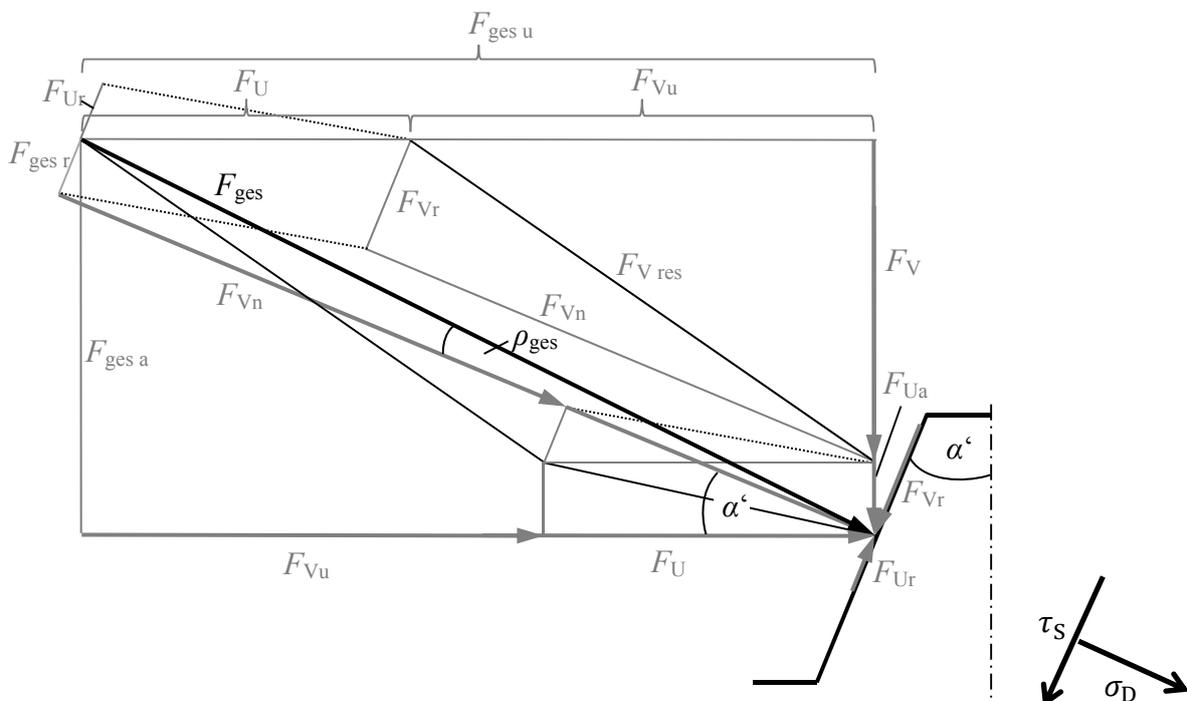


Abbildung 6-5: Gesamte Zahnflankenbelastung bei zusätzlicher Aufbringung einer Vorspannkraft

6. Einfluss des Flankenwinkels

Es gelten folgende Definitionen:

F_V – axiale Vorspannkraft auf die Flanke

F_{Vn} – auf die Zahnflanke wirkende Normalkraftkomponente der Vorspannkraft

F_{Vu} – Umfangskraftkomponente der Vorspannkraft

F_{Vr} – quer zur Zahnflanke wirkende Reibkraft; hervorgerufen durch F_{Vn} und μ (sie wirkt der Reibkraftkomponente der Umfangskraft F_{Ur} entgegen)

ρ_V – Reibwinkel; folgt aus dem Verhältnis von F_{Vn} und F_{Vr}

$F_{V\text{res}}$ – resultierende Kraft aus den Komponenten der Vorspannkraft

F_{ges} – Gesamtkraft auf die Zahnflanke, die aus den Komponenten der Umfangskraft und der Vorspannkraft resultiert

$F_{\text{ges a}}$ – gesamte Axialkraft auf die Zahnflanke (axiale Komponente der Gesamtkraft)

$F_{\text{ges u}}$ – gesamte Umfangskraft auf die Zahnflanke (Komponente der Gesamtkraft in Umfangsrichtung)

$F_{\text{ges n}}$ – gesamte Normalkraft auf die Zahnflanke ($= F_{Vn} + F_{Un}$)

$F_{\text{ges r}}$ – gesamte Reibkraft quer zur Zahnflanke ($= F_{Vr} + F_{Ur}$)

Die einzelnen Kraftkomponenten der Vorspannkraft sind wie folgt zu bestimmen:

$$6-18 \quad \sin(\alpha' + \rho_V) = \frac{F_V}{F_{V\text{res}}} \Leftrightarrow \boxed{F_{V\text{res}} = \frac{F_V}{\sin(\alpha' + \rho_V)}}$$

bzw.

$$6-19 \quad \boxed{F_{V\text{res}} = \sqrt{F_{Vn}^2 + F_{Vr}^2} = \sqrt{F_V^2 + F_{Vu}^2}}$$

$$6-20 \quad \tan(\alpha' + \rho_V) = \frac{F_V}{F_{Vu}} \Leftrightarrow \boxed{F_{Vu} = \frac{F_V}{\tan(\alpha' + \rho_V)}}$$

$$6-21 \quad \sin(\rho_V) = \frac{F_{Vr}}{F_{V\text{res}}} \Leftrightarrow F_{Vr} = F_{V\text{res}} \cdot \sin(\rho_V) \Leftrightarrow \boxed{F_{Vr} = F_V \cdot \frac{\sin(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)}}$$

$$6-22 \quad \cos(\rho_V) = \frac{F_{Vn}}{F_{V\text{res}}} \Leftrightarrow F_{Vn} = F_{V\text{res}} \cdot \cos(\rho_V) \Leftrightarrow \boxed{F_{Vn} = F_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)}}$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

Für den Reibwinkel ρ_V gelten die folgenden Bedingungen:

$$6-23 \quad \rho_V = \begin{cases} -90^\circ - \alpha', & \text{für } \operatorname{atan}(\mu) > 90^\circ - |\alpha'| \text{ und } \alpha' < 0 \\ 90^\circ - \alpha', & \text{für } \operatorname{atan}(\mu) > 90^\circ - |\alpha'| \text{ und } \alpha' \geq 0 \\ -\operatorname{atan}(\mu), & \text{für } \operatorname{atan}(\mu) \leq 90^\circ - |\alpha'| \text{ und } \alpha' < 0^\circ \\ \operatorname{atan}(\mu), & \text{sonst} \end{cases}$$

Sobald ρ_V der Differenz aus $90^\circ - |\alpha'|$ entspricht, tritt Selbsthemmung ein. Die durch die Vorspannung induzierte Kraft in Umfangsrichtung wird null:

$$6-24 \quad F_{Vu}(\alpha' = 90^\circ - \rho_V) = \frac{F_V}{\tan(90^\circ - \rho_V + \rho_V)} = \frac{F_V}{\text{"}\infty\text{"}} = 0$$

Bei einem Flankenwinkel von 0° sind die Flanken senkrecht angeordnet. Die Vorspannkraft F_V kann in diesem Fall nicht auf die Flankenfläche wirken, sodass Folgendes gilt:

$$6-25 \quad F_{Vn} = F_{Vr} = F_{Vu} = 0 \quad \text{für } \alpha' = 0^\circ$$

Die Umfangskraft F_U wirkt dann senkrecht auf die Flanke und entspricht der Normalkraftbelastung.

Die in Abbildung 6-5 eingetragenen Gesamtkräfte werden aus der Addition der durch F_U und F_V hervorgerufenen, zusammengehörenden Kraftkomponenten gebildet:

$$6-26 \quad F_{ges a} = F_V + F_{Ua}$$

$$6-27 \quad F_{ges u} = F_U + F_{Vu}$$

$$6-28 \quad F_{ges n} = F_{Un} + F_{Vn}$$

$$6-29 \quad F_{ges r} = F_{Ur} + F_{Vr}$$

$$6-30 \quad F_{ges} = \sqrt{F_{ges a}^2 + F_{ges u}^2} = \sqrt{F_{ges n}^2 + F_{ges r}^2}$$

Der gesamte Reibwinkel ρ_{ges} wird durch das Verhältnis von der gesamten Reibungs- zur gesamten Normalkraft bestimmt:

$$6-31 \quad \rho_{ges} = \arctan\left(\frac{F_{ges r}}{F_{ges n}}\right) \neq \arctan(\mu)$$

Mittels der Gesamtkräfte sind die Folgen der Belastung durch Umfangskraft und Vorspannkraft direkt bestimmbar. Die Gesamtbeanspruchung der Zahnflanke wird im nachstehenden Kapitel behandelt.

6. Einfluss des Flankenwinkels

6.3 Spannungen an den Zahnflanken

Die Spannungen an den Zahnflanken entsprechen dem Verhältnis von der jeweils angreifenden Kraft und der Zahnflankenfläche. Die Zahnflankenfläche A_α ist abhängig vom Winkel α' . Sie wird ins Verhältnis mit der Flankenfläche A_0 mit $\alpha' = 0^\circ$ gesetzt:

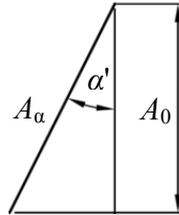


Abbildung 6-6: Verhältnis der schrägen Flanke zur senkrechten Flanke

$$6-32 \quad A_0 = A_\alpha \cdot \cos \alpha' \Leftrightarrow A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha'}$$

Die Druckspannungen an der Zahnflanke sind wie folgt zu berechnen:

$$6-33 \quad \sigma_D = \frac{F_{\text{ges n}}}{A_\alpha} = \frac{1}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot (F_{U_n} + F_{V_n})$$

$$6-34 \quad \Leftrightarrow \sigma_D = \frac{1}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(F_U \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + F_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

Die Schubspannungen entsprechen folgendem Verhältnis:

$$6-35 \quad \tau_S = \frac{F_{\text{ges r}}}{A_\alpha} = \frac{1}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot (F_{U_r} + F_{V_r})$$

$$6-36 \quad \Leftrightarrow \tau_S = \frac{1}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(-F_U \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + F_V \cdot \frac{\sin(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

Sind die Umfangskraft F_U und der Reibbeiwert μ gegeben, bleiben als frei wählbare Parameter die Vorspannkraft F_V und der Flankenwinkel α' . Für diese sind Einstellungen zu finden, sodass die Verzahnung möglichst wenig Beanspruchung erfährt. Zum einen sind Druck- und Schubspannungen möglichst klein zu halten, zum anderen ist der Entstehung von Passungsrost entgegenzuwirken. Letzteres tritt vornehmlich bei dynamischen Beanspruchungen (schwellend und wechselnd) auf und setzt die Lebensdauer der Verbindung maßgeblich herab. Die Gefahr von Passungsrost besteht zum einen bei negativen Druckspannungen an der Zahnvorderseite bzw. positiven Druckspannungen an der Zahnrückseite, was auf ein Abheben der Zähne voneinander hinweist. Zum anderen weisen Vorzeichenwechsel der Schubspannungen innerhalb eines Belastungszyklus auf ein Gleiten der Zahnflanken aufeinander hin, was ebenfalls zu Passungsrost führt. Zur Vermeidung dieser Zustände gelten für die Vorspannkraft Bedingungen, die im nachfolgenden Kapitel erörtert werden.

6.3.1 Bedingungen für die Vorspannkraft

Um ein Abheben der Zähne voneinander zu verhindern, müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

1. Für alle Flankenwinkel $0^\circ < \alpha' < 90^\circ$: $\sigma_D \geq 0$ bzw. $F_{\text{ges n}} \geq 0$
2. Für alle Flankenwinkel $-90^\circ < \alpha' < 0^\circ$: $\sigma_D \leq 0$ bzw. $F_{\text{ges n}} \leq 0$

Die nachfolgend aufgeführten Sonderfälle werden von den Betrachtungen ausgeschlossen:

- Sonderfall $\alpha' = 0^\circ$: Ohne schiefe Ebene bedarf es keiner Vorspannkraft. Ein Abheben der Zähne ist hierbei nicht zu verhindern.
- Sonderfall $\alpha' = \pm 90^\circ$: Bei einem Flankenwinkel von 90° ist kein Formschluss zur Kraftübertragung gegeben. Der Fall ist nicht praxistauglich.

Um die Bedingungen zu erfüllen, ist die Vorspannkraft F_V auf den Winkel α' anzupassen. Für die Zahnvorderseite ($0^\circ < \alpha' < 90^\circ$ und $F_U > 0$) muss Folgendes gelten:

$$6-37 \quad F_{\text{ges n}} = F_U \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + F_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \geq 0$$

$$6-38 \quad \Leftrightarrow F_V \geq -F_U \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)}$$

Da die Vorspannkraft immer größer oder gleich null ist, ist die Bedingung 6-38 immer erfüllt (unter der Voraussetzung, dass F_U stets positiv ist). Eine Gefahr des Abhebens der Zähne besteht an der Zahnvorderseite demnach nicht.

Für die Zahnrückseite ($-90^\circ < \alpha' < 0^\circ$ und $F_U > 0$) gilt:

$$6-39 \quad F_{\text{ges n}} = F_U \cdot \frac{\cos(-\rho_U)}{\cos(-\alpha' + \rho_U)} + F_V \cdot \frac{\cos(-\rho_V)}{\sin(-\alpha' - \rho_V)} \leq 0$$

$$6-40 \quad F_{\text{ges n}} = F_U \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} - F_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \leq 0$$

$$6-41 \quad \Leftrightarrow F_V \geq F_U \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)}$$

Sobald die Zahnflanken schräg ausgeführt sind, ist auf der Zahnrückseite eine Vorspannkraft gemäß der Bedingung 6-41 einzuhalten, um ein Abheben der Zähne voneinander zu verhindern. Da bei schwellenden oder wechselnden Belastungen F_U nicht konstant ist, ist die Vorspannkraft auf die betragsmäßig maximale, vorkommende Umfangskraft $|F_{U \text{ max}}|$ auszulegen. Nur so wird ein Abheben der Zähne gänzlich vermieden. In eine Berechnungsvorschrift zusammengefasst ist die mindestens benötigte Vorspannkraft wie folgt zu bestimmen:

6. Einfluss des Flankenwinkels

$$F_V \geq \left| F_{U \max} \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right|$$

mit

$$6-42 \quad \rho_U = \begin{cases} -\operatorname{atan}(\mu), & \text{für } \alpha' < -\operatorname{atan}(\mu) \\ \alpha', & \text{für } |\alpha'| \leq \operatorname{atan}(\mu) \\ \operatorname{atan}(\mu), & \text{für } \alpha' > \operatorname{atan}(\mu) \end{cases}$$

und

$$\rho_V = \begin{cases} -90^\circ - \alpha', & \text{für } \alpha' < \operatorname{atan}(\mu) - 90^\circ \\ -\operatorname{atan}(\mu), & \text{für } 0^\circ \geq \alpha' \geq \operatorname{atan}(\mu) - 90^\circ \\ \operatorname{atan}(\mu), & \text{für } 0^\circ \leq \alpha' \leq 90^\circ - \operatorname{atan}(\mu) \\ 90^\circ - \alpha', & \text{für } \alpha' > 90^\circ - \operatorname{atan}(\mu) \end{cases}$$

Für die nachfolgenden Untersuchungen ist es sinnvoll, die Vorspannkraft ins Verhältnis zur Umfangskraft zu setzen. Dieses Verhältnis wird im Folgenden *Vorspannkraftverhältnis* f_V genannt und hat den Vorteil, dass es lediglich vom Flanken- sowie vom Reibwinkel abhängig ist. Es resultiert folgende Bedingung:

$$f_{V \min} = \frac{F_{V \min}}{|F_{U \max}|} = \left| \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right|$$

mit

$$6-43 \quad \rho_U = \begin{cases} -\operatorname{atan}(\mu), & \text{für } \alpha' < -\operatorname{atan}(\mu) \\ \alpha', & \text{für } |\alpha'| \leq \operatorname{atan}(\mu) \\ \operatorname{atan}(\mu), & \text{für } \alpha' > \operatorname{atan}(\mu) \end{cases}$$

und

$$\rho_V = \begin{cases} -90^\circ - \alpha', & \text{für } \alpha' < \operatorname{atan}(\mu) - 90^\circ \\ -\operatorname{atan}(\mu), & \text{für } 0^\circ \geq \alpha' \geq \operatorname{atan}(\mu) - 90^\circ \\ \operatorname{atan}(\mu), & \text{für } 0^\circ \leq \alpha' \leq 90^\circ - \operatorname{atan}(\mu) \\ 90^\circ - \alpha', & \text{für } \alpha' > 90^\circ - \operatorname{atan}(\mu) \end{cases}$$

Um ein Gleiten der Zahnflanken aufeinander zu verhindern, dürfen die Schubspannungen innerhalb eines Belastungszyklus keinen Richtungswechsel (definiert über das Vorzeichen) erfahren. Die quer zur Zahnflankenfläche wirkende Reibkraft $F_{r \text{ ges}}$ muss also stets positiv oder stets negativ sein:

$$6-44 \quad F_{\text{ges r}} = -F_U \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + F_V \cdot \frac{\sin(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \geq 0$$

oder

$$6-45 \quad F_{\text{ges r}} = -F_U \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + F_V \cdot \frac{\sin(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \leq 0$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

Daraus folgen die Bedingungen für die Vorspannkraft:

$$6-46 \quad \Leftrightarrow F_V(\alpha') \geq F_U \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)}$$

oder

$$6-47 \quad \Leftrightarrow F_V(\alpha') \leq F_U \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)}$$

Da die Vorspannung stets positiv ist, kann Bedingung 6-47 bei einem Vorzeichenwechsel von F_U nicht erfüllt werden. Zur Vermeidung des Gleitens der Flanken ist somit Vorschrift 6-46 einzuhalten. Relevant ist dabei der für die Umfangskraft maximale, vorkommende Betrag. Die Vorspannkraft muss somit neben der Bedingung 6-42 zusätzlich der folgenden Bedingung genügen:

$$6-48 \quad F_V \geq \left| F_{U \max} \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right|$$

Formuliert als Verhältnis zu $|F_{U \max}|$ entsteht die folgende Bedingung:

$$6-49 \quad f_{V \min} = \frac{F_{V \min}}{|F_{U \max}|} = \left| \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right|$$

Zusammengefasst bestehen bei vornehmlich dynamischen Beanspruchungen die folgenden Bedingungen für die Vorspannkraft:

Bedingung I:

$$6-50 \quad f_{V I}(\alpha') \geq \left| \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right|$$

Bedingung II:

$$6-51 \quad f_{V II}(\alpha') \geq \left| \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right|$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

Das mindestens einzuhaltende Vorspannkraftverhältnis f_V entspricht dem größeren der beiden Werte:

6-52

$$f_{V \min}(\alpha') = \max\{f_{V I}(\alpha'); f_{V II}(\alpha')\}$$

Die Gegenüberstellung beider Bedingungen verdeutlicht, dass diese identisch sind, solange ρ_U und ρ_V gleich sind. Lediglich innerhalb der Selbsthemmung sowie bei großen Winkeln (ab $\alpha' = 90^\circ - \text{atan}(\mu)$) sind Unterschiede zu vermerken, wie dem nachstehenden Diagramm zu entnehmen ist:

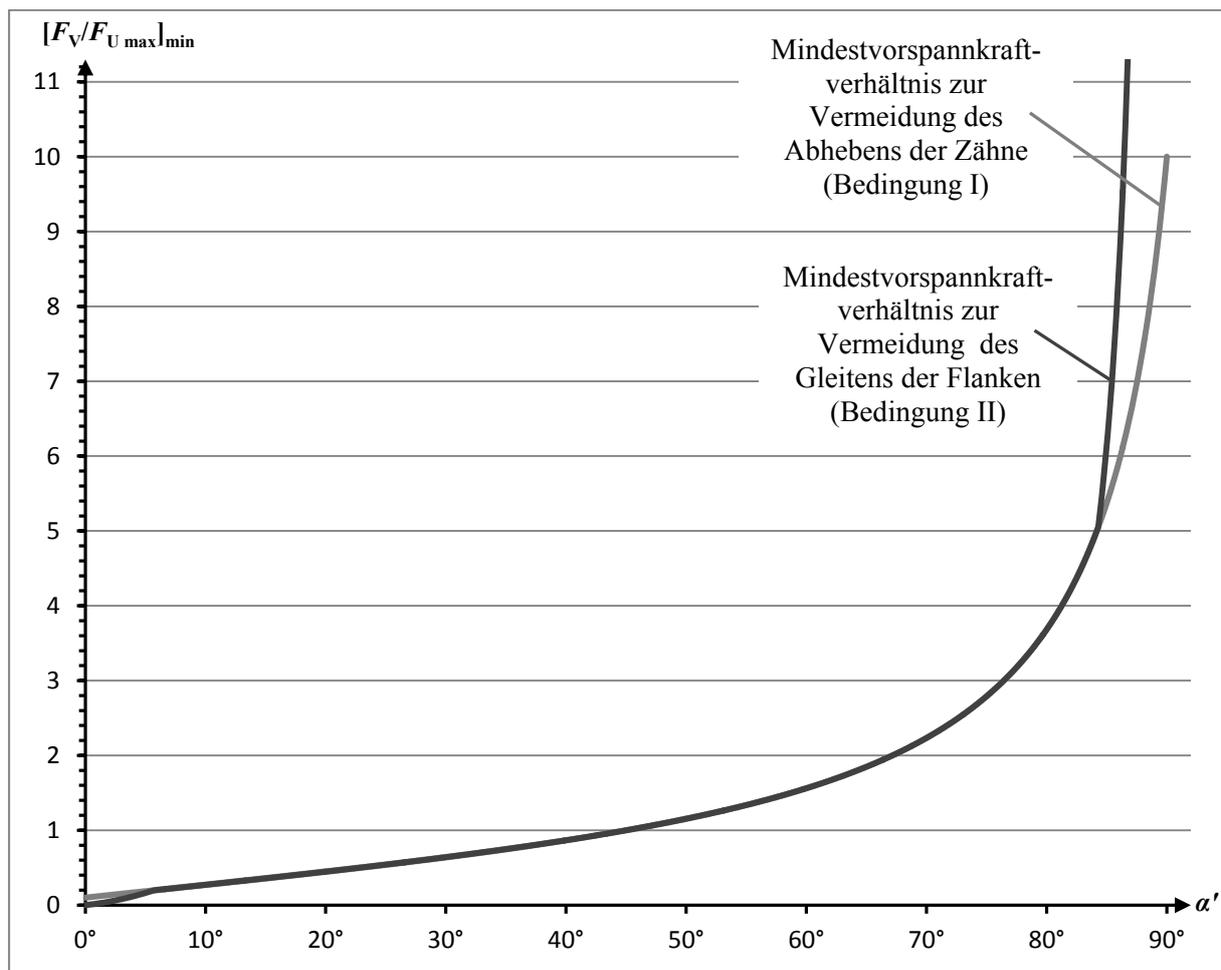


Abbildung 6-7: Einfluss des Flankenwinkels auf das mindestens zu wählende Verhältnis zwischen Vorspannkraft und $|F_{U \max}|$ (bei $\mu = 0,1$)

Im Diagramm sind die Vorschriften 6-50 und 6-51 über den Flankenwinkel α' gegeneinander aufgetragen, sodass direkt das mindestens zu wählende Verhältnis der Vorspannkraft zur Umfangskraft (vgl. Gleichung 6-52) ablesbar ist. Der Reibbeiwert zwischen den Flanken ist mit 0,1 angenommen, was dem üblichen Wert bei Kontakt von Stahl auf Stahl entspricht. Der Graphik ist zu entnehmen, dass bei einer Wahl von niedrigen Flankenwinkeln eine geringere Vorspannkraft genügt, um ein Abheben der Zähne oder Gleiten der Kontaktflächen zu vermeiden, als bei größeren Flankenwinkeln. Weiter ist zu erkennen, dass selbst bei kleinen Winkeln stets eine Vorspannung vorhanden sein muss (eine Ausnahme ist bei $\alpha' = \alpha = 0^\circ$

6. Einfluss des Flankenwinkels

gegeben; in diesem Fall kann das Abheben der Zähne nicht verhindert werden). Bei einem Reibbeiwert von 0,1 beträgt die mindestens aufzubringende Vorspannkraft 10 % der maximalen Umfangskraft. Für einen Winkel von 90° ist die aufzubringende Vorspannkraft zur Vermeidung von Gleiten der Zahnflanken aufeinander unendlich. Die Gefahr von Passungsrost ist also nicht in jedem Fall vermeidbar.

Die Auswirkungen der Umfangskraft, Vorspannkraft und des Flankenwinkel α' auf die Druck- und Schubspannungen werden in den anschließenden Kapiteln verdeutlicht.

6.3.2 Einflüsse auf die Druckspannungen an den Zahnflanken

Die hier untersuchten Druckspannungen bewirken Flächenpressung an den Zahnflanken. Im Unterschied zu der im Kapitel 5 betrachteten Flächenpressung, die durch die reine Umfangskraft aufgebracht wird (bei einem Flankenwinkel von $\alpha = 0^\circ$), sind hier zusätzlich Vorspannkraft auf die Zahnflanken berücksichtigt. Zur Unterscheidung beider Betrachtungen wird hier weiterhin der Begriff *Druckspannungen* verwendet.

Um den Einfluss von Umfangskraft, Vorspannkraft und Flankenwinkel α' auf die Druckspannung in einem Diagramm abbilden zu können, wird Gleichung 6-34 insoweit umgeformt, dass die Vorspannkraft zum einen im Verhältnis zur Umfangskraft steht (siehe Vorspannkraftverhältnis f_V) und zum anderen die Druckspannung proportional zur Umfangskraft ist. Dies wird erreicht, indem F_U aus dem eingeklammerten Term gekürzt wird:

$$6-53 \quad \sigma_D = \frac{1}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(F_U \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + F_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

$$6-54 \quad \Leftrightarrow \sigma_D = \frac{F_U}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right) \quad \text{mit } f_V = \frac{F_V}{F_U}$$

Die Gleichung wird in einem Diagramm aufgetragen, um die wechselseitigen Auswirkungen der Faktoren F_U , F_V und α' zu verdeutlichen. Dazu werden die Druckspannungen in Abhängigkeit vom Flankenwinkel α' sowie des Kräfteverhältnisses f_V abgebildet. Die Umfangskraft F_U sowie die Fläche A_0 , die proportional zur effektiven Zahnhöhe ist, werden konstant bei 1 N bzw. 1 mm² gehalten, sodass die Kurven auf diese beiden Parameter normiert sind. F_U beeinflusst die Druckspannungen proportional, während die Fläche A_0 bzw. die effektive Zahnhöhe H_{eff} einen antiproportionalen Einfluss ausüben. Das Diagramm veranschaulicht die Beziehungen der Druckspannungen für Flankenwinkel von -90° bis $+90^\circ$ und Vorspannkraftverhältnisse von 0 bis 2. Flanken, deren Winkel ein negatives Vorzeichen haben, gelten als Zahnrückseite. Flanken, deren Winkel ein positives Vorzeichen haben, gelten entsprechend als Vorderseite. Die abgebildeten Kurven sind auf den Reibbeiwert von $\mu = 0,1$ bezogen:

6. Einfluss des Flankenwinkels

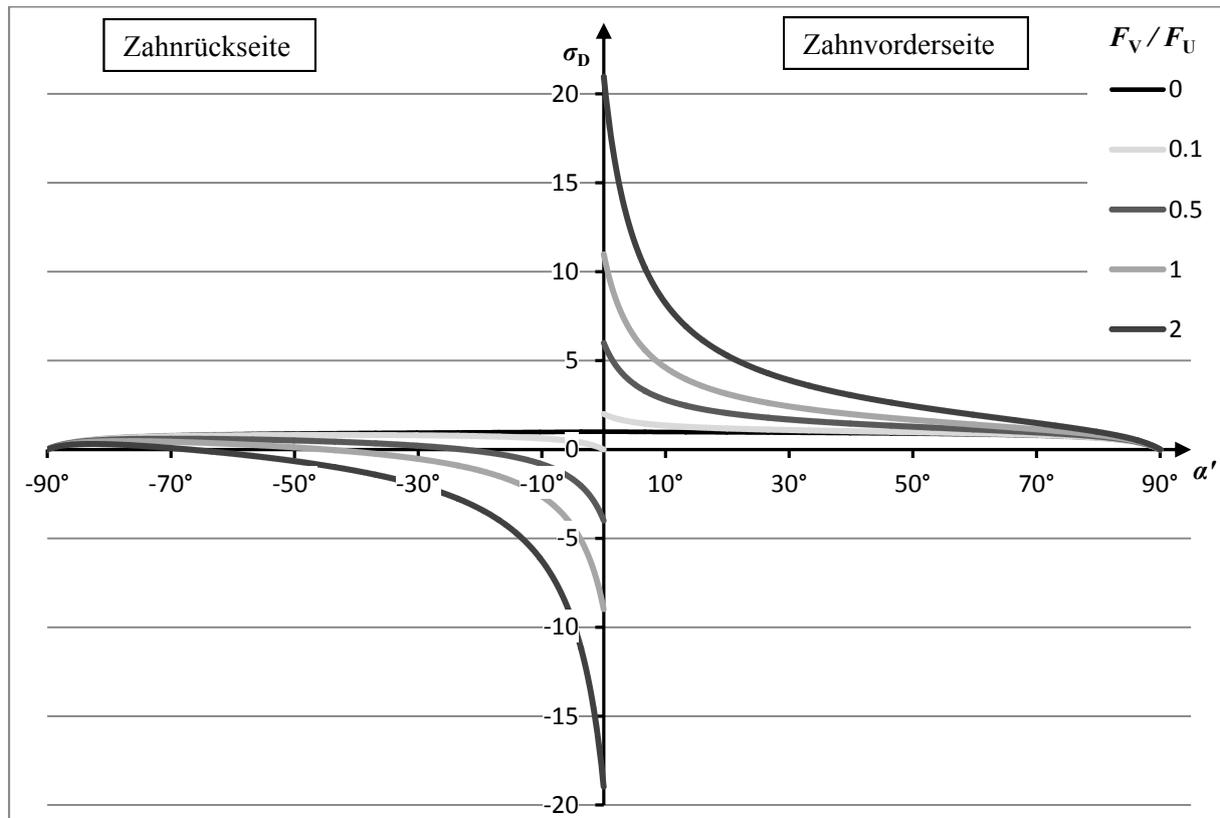


Abbildung 6-8: Druckspannungen über dem Flankenwinkel bei konstantem F_U und variierendem f_v ($\mu = 0,1$)

Der Verlauf der Kurven hat einen regressiven Charakter. Insgesamt werden die Druckspannungen also mit steigendem Flankenwinkel und sonst gleichbleibenden Parametern geringer. Diese Eigenschaft ist in der mit dem Winkel steigenden Flankenfläche zu begründen. Eine Erhöhung der Vorspannkraft führt zu einer Zunahme der Druckspannung. Die Spannungen an der Zahnrückseite werden abhängig vom gewählten Vorspannkraftverhältnis ab einem bestimmten Winkel positiv, was auf ein Abheben der Zähne voneinander hinweist. Anhand des Schnittpunktes der Kurve mit der x-Achse ist der Grenzwinkel für ein bestimmtes Vorspannkraftverhältnis bzw. das einzuhaltende Mindestvorspannkraftverhältnis für einen bestimmten Winkel festzustellen. Soll das Abheben der Zähne vermieden werden, sind bei hohen Winkeln größere Vorspannkraftverhältnisse nötig.

Zur Verdeutlichung des Endeffektes auf die Druckspannungen, den eine Erhöhung des Flankenwinkels mit entsprechender Anpassung der Vorspannkraft herbeiführt, sodass kein Abheben der Zähne eintritt, wird jedem Flankenwinkel die entsprechende, mindestens benötigte Vorspannkraft zugeordnet. Dafür wird Bedingung 6-43 in Gleichung 6-54 eingesetzt:

6. Einfluss des Flankenwinkels

$$\sigma_D = \frac{F_U}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

mit

6-55

$$f_{V \min} = \frac{F_{V \min}}{|F_{U \max}|} = \left| \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right|$$

$$6-56 \quad \Leftrightarrow \sigma_D = \frac{F_U}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + \left| \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right| \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

Das Ergebnis wird in einem Graphen dargestellt. Es sind die Auswirkungen bei positiver sowie bei negativer Umfangskraft aufgetragen:

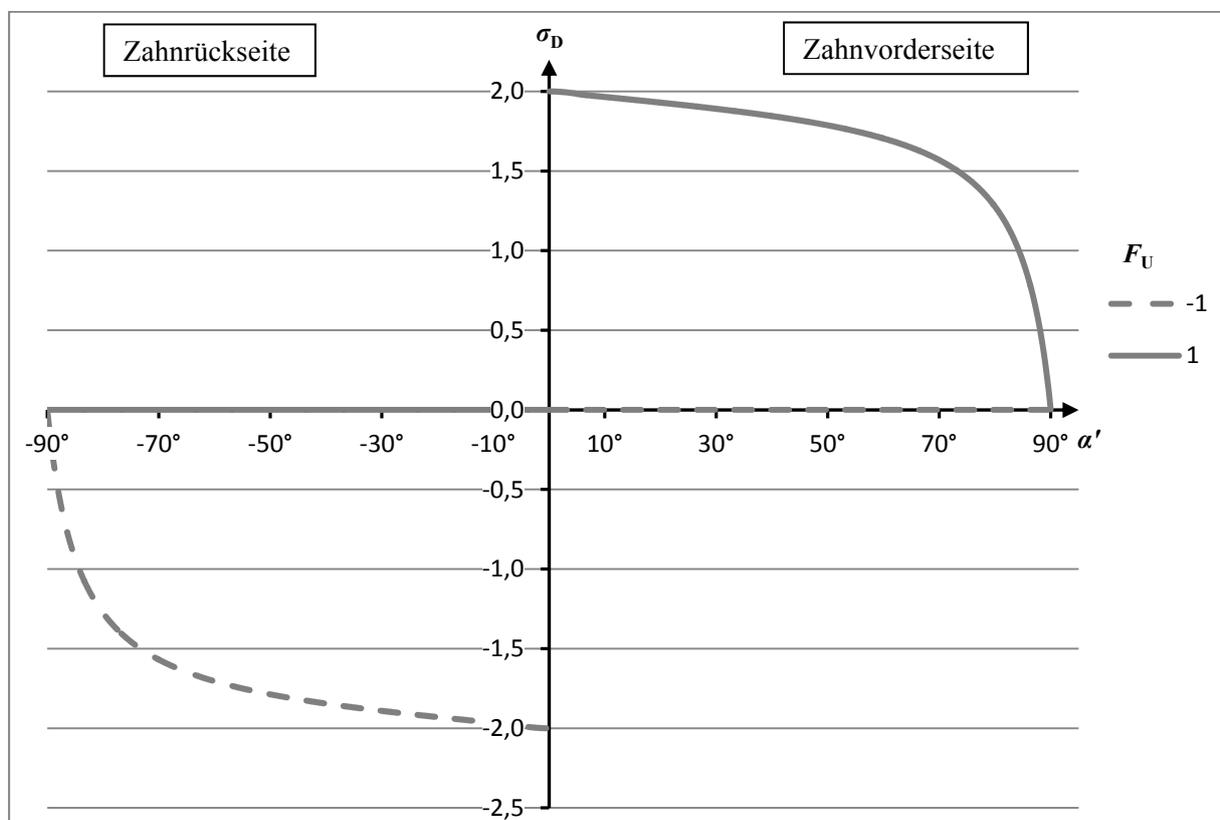


Abbildung 6-9: Druckspannungen über dem Flankenwinkel bei jeweils optimal eingestellter Vorspannkraft

Negative Umfangskräfte bei negativem Flankenwinkel entsprechen den Verhältnissen der Zahnvorderseite, weshalb das Schaubild wie dargestellt prinzipiell punktsymmetrisch sein muss. Dem Schaubild ist zu entnehmen, dass keine positiven Spannungen an der Zahnrückseite auftreten, sondern diese maximal null sind. Dies ist mit der an den jeweiligen Winkel optimal angepassten Vorspannkraft zu begründen und entspricht somit den Erwartungen (die Beanspruchungen der Zahnflanke infolge der Vorspannkraft und diejenigen infolge der Umfangskraft heben sich auf). Insgesamt nehmen die Druckspannungen mit zunehmendem Flankenwinkel ab, obwohl die Vorspannkraft mit zunehmendem Flankenwinkel größer wird. Grund dafür ist die mit dem Winkel steigende Kontaktfläche, die

6. Einfluss des Flankenwinkels

bei einem Winkel von 90° theoretisch unendlich ist. Somit ist trotz Zunahme der Vorspannkraft ein möglichst großer Flankenwinkel zu wählen, um möglichst geringe Druckspannungen zu erhalten.

Es folgt die Gegenüberstellung der Schubspannungen, die in gleicher Weise durchgeführt wird.

6.3.3 Einflüsse auf die Schubspannungen an den Zahnflanken

Zur Gegenüberstellung der Schubspannungen wird analog zu den Druckspannungen Gleichung 6-36 umgeformt, sodass F_V im Verhältnis zu F_U steht (ausgedrückt durch das Kräfteverhältnis f_V) und F_U als Proportionalitätsfaktor Einfluss auf die Schubspannungen ausübt:

$$6-57 \quad \tau_S = \frac{1}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(-F_U \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + F_V \cdot \frac{\sin(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

$$6-58 \quad \Leftrightarrow \tau_S = \frac{F_U}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(-\frac{\sin(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\sin(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right) \quad \text{mit } f_V = \frac{F_V}{F_U}$$

Anschließend wird der wechselseitige Einfluss der Parameter F_U , F_V und α' bei konstantem F_U und A_0 auf die Schubspannungen nach Gleichung 6-58 in einem Diagramm abgebildet:

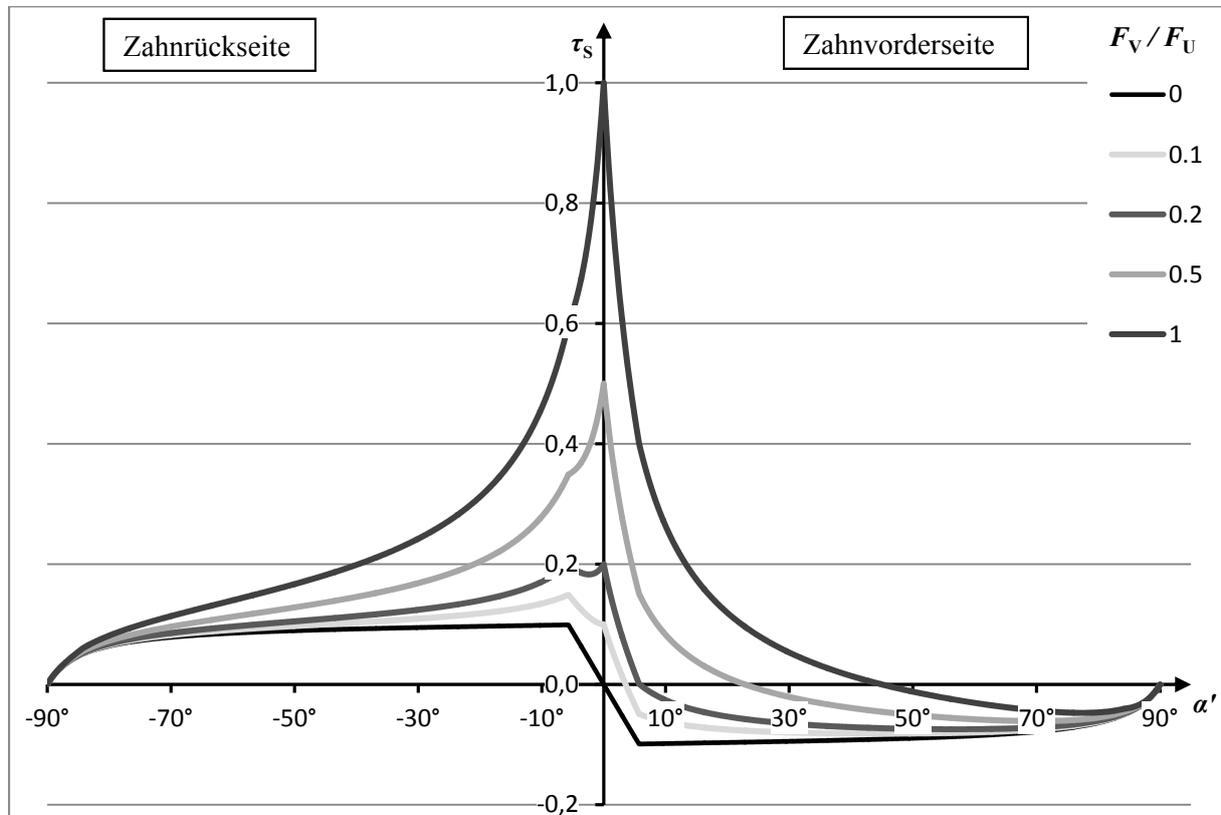


Abbildung 6-10: Schubspannungen über dem Flankenwinkel bei konstantem F_U und variierendem f_V ($\mu = 0,1$)

6. Einfluss des Flankenwinkels

In dem Schaubild sind die Werte für ein Kräfteverhältnis f_V von 0 bis 1 aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass auf der Zahnrückseite nur positive Schubspannungen auftreten, während auf der Vorderseite sowohl negative als auch positive Spannungen vorhanden sind. Ein Richtungswechsel von F_U (wodurch die Zahnvorderseite zur Zahnrückseite und die Zahnrückseite zur Zahnvorderseite wird) führt demnach ab bestimmten Winkeln α' zu einem Vorzeichenwechsel der Schubspannungen, was ein Gleiten der Zahnflankenflächen aufeinander bedeutet. Um einen Vorzeichenwechsel zu verhindern, müssen die Schubspannungen also stets positiv sein. Bedingung 6-48 wird somit bestätigt. Der Schnittpunkt der Kurve mit der x -Achse markiert den Grenzwinkel für ein bestimmtes Vorspannkraftverhältnis bzw. das nötige Vorspannkraftverhältnis für einen bestimmten Winkel. Die Kurven verdeutlichen, dass mit zunehmendem Flankenwinkel die Spannungen kleiner werden, das benötigte Kräfteverhältnis f_V wird dann jedoch größer, wodurch die Belastungen der Flanken wiederum steigen.

Analog zum Vorgehen in Kapitel 6.3.2 wird ergänzend der Endeffekt verdeutlicht, der bei einer Winkelerhöhung mit entsprechend angepasster Vorspannkraft auf die Schubspannungen entsteht. Dazu wird Bedingung 6-49 in Gleichung 6-58 eingesetzt und in einem Diagramm aufgetragen:

$$\tau_S = \frac{F_U}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(-\frac{\sin(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\sin(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

6-59

mit

$$f_{V \min} = \frac{F_{V \min}}{|F_{U \max}|} = \left| \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right|$$

$$6-60 \quad \Leftrightarrow \tau_S = \frac{F_U}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(-\frac{\sin(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + \left| \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \rho_V)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} \right| \cdot \frac{\sin(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

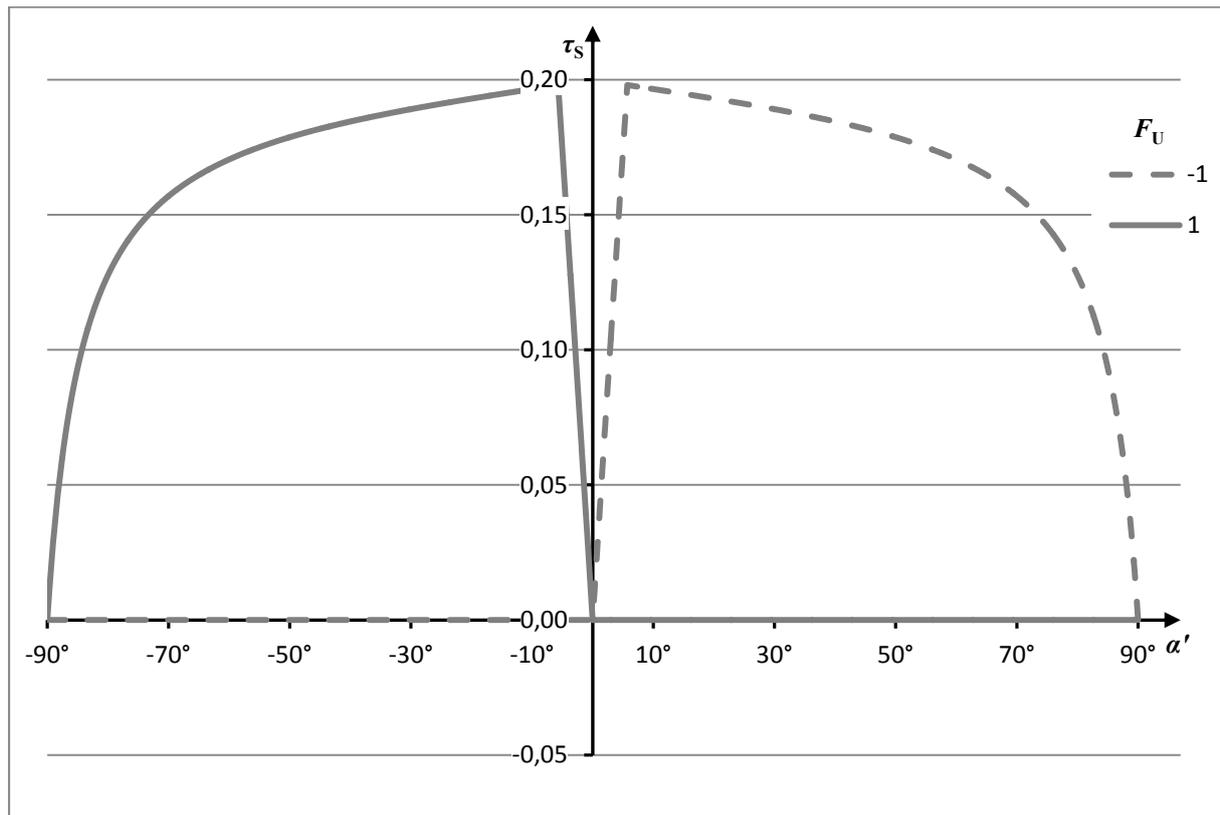


Abbildung 6-11: Schubspannungen über dem Flankenwinkel bei optimal eingestellter Vorspannkraft

Da die Vorspannkraft so einzustellen ist, dass nur positive Schubspannungen auftreten, weist das Diagramm einen prinzipiell spiegelsymmetrischen Charakter auf. Es ist zu erkennen, dass die Schubspannungen mit größer werdendem Flankenwinkel auch bei angepasster Vorspannkraft im Wesentlichen abnehmen. Der günstigste Flankenwinkel für die Schubspannungen steht also nicht im Konflikt mit dem für die Druckspannungen. Aufgrund der Selbsthemmung werden die Schubspannungen auch bei kleinen Winkeln (bei $\mu = 0,1$ ab ca. $5,7^\circ$) reduziert, weil die mindestens benötigte Vorspannkraft innerhalb dieses Bereiches geringer ausfällt. Kleine Flankenwinkel sind also ebenfalls vorteilhaft für kleine Schubspannungen. Betragsmäßig sind die Schubspannungen ca. um den Faktor 10 kleiner als die Druckspannungen. Selbst mit der Berücksichtigung, dass Schubspannungen das Material um das bis zu Zweifache stärker beanspruchen als gleichwertige Druckspannungen, sind die Druckspannungen die stärker zu gewichtenden Einflüsse der Zahnflankenbeanspruchung. Gleitungen sind ungeachtet dessen mittels entsprechender Vorspannkraft nach Möglichkeit zu verhindern. Bezogen auf die Variationsbreite von α' ist die Vorspannkraft im Extremfall unendlich hoch zu wählen (vgl. Abbildung 6-7), was praktisch nicht umsetzbar ist. Gleitungen bzw. Passungsrost sind demnach nicht gänzlich vermeidbar.

Insgesamt werden die Druckspannungen und Schubspannungen umso kleiner, je größer der Flankenwinkel wird. Die benötigte Vorspannkraft ist dann umso höher. Praktisch sind Flankenwinkel ab einer bestimmten Größe nicht mehr sinnvoll, weil die Vorspannkraft dann zu groß werden und unter Umständen nicht realisiert werden können. Da die Druckspannungen wesentlich höher als die Schubspannungen sind, werden die Druckspannungen als Kriterium zur Beurteilung der Zahnflankenbeanspruchung genutzt. Ein Gleiten der Zahnflanken aufeinander ist durch eine entsprechende Vorspannkraft dennoch so

6. Einfluss des Flankenwinkels

gut wie möglich zu vermeiden. Die Gefahr des Gleitens der Zahnflanken aufeinander tritt nur an den Zahnvorderseiten auf, während die Gefahr des Abhebens der Zähne voneinander nur auf den Zahnrückseiten besteht.

Mit den entwickelten Formeln und Zusammenhängen ist die Wirkung des Flankenwinkels auf die Druckspannungen und Schubspannungen sowie auf die Vorspannkraft bei Zähnen mit schrägen Flanken erkennbar. Zur Berechnung der auftretenden Druckspannungen an der Kreisbogen-Stirnverzahnung sind jeder einzelnen Zahnflanke die entsprechende Umfangskraft, Vorspannkraft und der zugehörige perspektivisch veränderte Flankenwinkel α' zuzuordnen. Die Bestimmung der an der einzelnen Zahnflanke, die durch einen Kreisbogen k beschrieben ist, wirkenden Umfangskraft ist in Kapitel 5 angeführt. Sie ist dort mit F_m bezeichnet. Das Vorgehen zur Ermittlung der übrigen Größen wird in den nachstehenden Kapiteln erörtert. Zuerst wird die Zuordnung des Flankenwinkels α'_m zur einzelnen Zahnflanke angeführt.

6.3.4 Bestimmung des perspektivisch veränderten Flankenwinkels an der einzelnen Zahnflanke

Der perspektivisch veränderte Flankenwinkel an der einzelnen Zahnflanke α'_m bestimmt die an der jeweiligen Flanke benötigte Vorspannkraft. Er wird anhand des Flankenwinkels α' , der an der Stelle des Kraftangriffspunktes von F_U (bzw. F_m nach Kapitel 5) besteht, festgelegt. Nachfolgende Skizze, in der eine Zahnflanke in der Draufsicht dargestellt ist, veranschaulicht die Zusammenhänge:

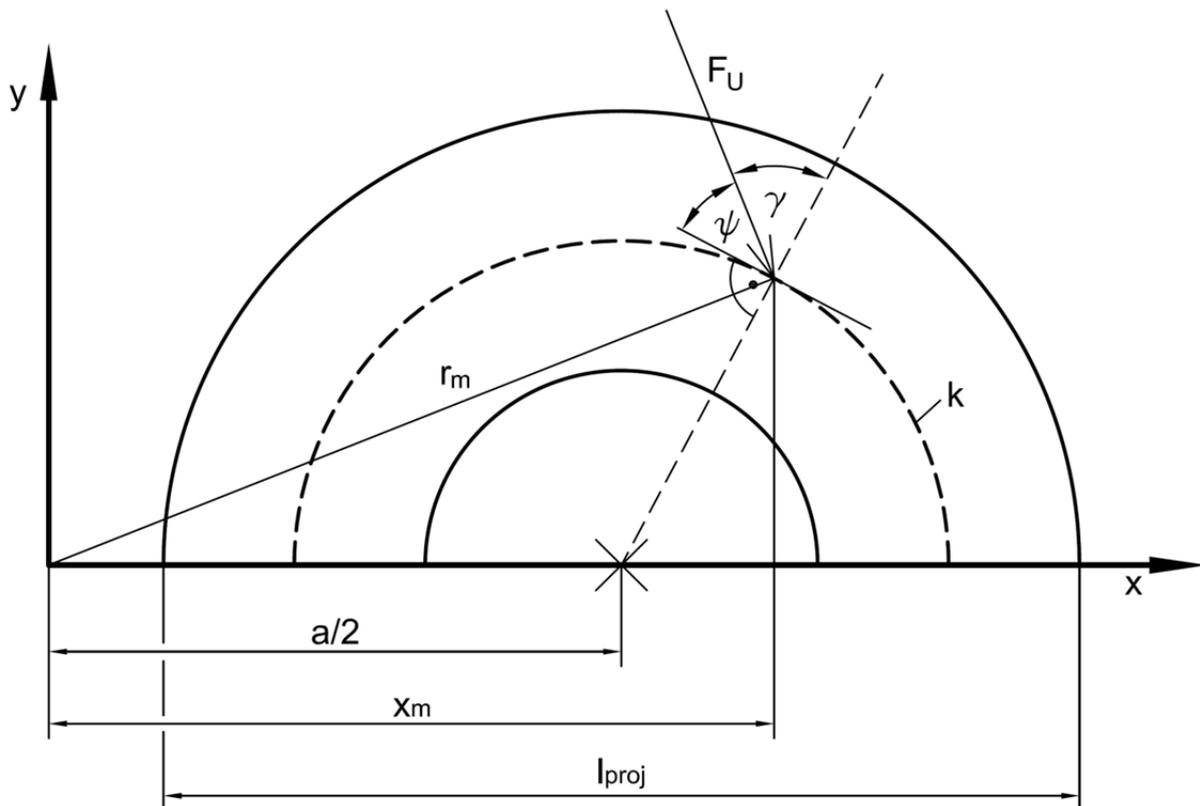


Abbildung 6-12: Zusammenhang zwischen Kraftangriffspunkt von F_U und α'

6. Einfluss des Flankenwinkels

Der zu F_U (bzw. F_m) gehörende Hebelarm lautet r_m und wird mittels Gleichung 5-66 ermittelt. Die Gleichung ist nachfolgend wiederholt angeführt:

$$r_m = \frac{|a-d|}{2} + l_{\text{proj}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot |a-d| + \frac{2}{3} \cdot l_{\text{proj}}}{|a-d| + l_{\text{proj}}}$$

mit

$$l_{\text{proj}} = r_{\text{max}} - \left| \frac{a-d}{2} \right|$$

6-61

und

$$r_{\text{max}} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

und

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

Die Lage des Kraftangriffspunktes von F_U wird mittels der Koordinate x_m bestimmt. Die Koordinate x_m steht mit r_m in einem Zusammenhang nach Pythagoras:

$$6-62 \quad x_m = \sqrt{r_m^2 - y^2} = \sqrt{r_m^2 - \frac{d^2}{4} + \left(x_m - \frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{mit } y \text{ nach Gl. 5-8}$$

$$6-63 \quad \Leftrightarrow x_m^2 = r_m^2 - \frac{d^2}{4} + x_m^2 - a \cdot x_m + \frac{a^2}{4}$$

$$6-64 \quad \Leftrightarrow x_m = \frac{1}{a} \cdot \left(r_m^2 - \frac{d^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right)$$

Der Winkel γ ist anhand des Winkels ψ zu bestimmen. Der Winkel ψ ist aus Kapitel 5 bekannt und mit Gleichung 5-14 zu ermitteln. Es gilt:

$$6-65 \quad \gamma_m = \frac{\pi}{2} - \psi = \frac{\pi}{2} - \text{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} - x_m}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x_m - \frac{a}{2}\right)^2}} \right) + \text{atan} \left(\frac{-x_m}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(x_m - \frac{a}{2}\right)^2}} \right)$$

mit

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

Mit dem Winkel γ ist der Flankenwinkel α' an entsprechender Stelle gemäß Gleichung 6-5 zu berechnen:

$$6-66 \quad \alpha'_m = \text{atan} \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \gamma_m} \right)$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

$$6-68 \quad A_{V,m} \approx \frac{\varepsilon}{2} \cdot (r_a^2 - r_i^2)$$

$$6-69 \quad \Leftrightarrow A_{V,m} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\left(r_k + \frac{x}{2} \right)^2 - \left(r_k - \frac{x}{2} \right)^2 \right)$$

mit

$$6-70 \quad r_k = \frac{b}{2} \cdot (1 + 2 \cdot m) \quad (\text{vgl. z. B. Gleichung 4-44})$$

folgt:

$$6-71 \quad A_{V,m} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\left(\frac{b}{2} \cdot (1 + 2 \cdot m) + \frac{x}{2} \right)^2 - \left(\frac{b}{2} \cdot (1 + 2 \cdot m) - \frac{x}{2} \right)^2 \right)$$

$$6-72 \quad \Leftrightarrow A_{V,m} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1 + 2 \cdot m) \cdot b \cdot x$$

mit

$$6-73 \quad x = H \cdot \tan(\alpha) \quad (\text{vgl. Gleichung 6-2})$$

folgt:

$$6-74 \quad \Leftrightarrow \boxed{A_{V,m} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot (1 + 2 \cdot m) \cdot b \cdot H \cdot \tan(\alpha)}$$

Abbildung 6-13 verdeutlicht die Flächenanteile, die aufgrund des vereinfachten Berechnungsansatzes in der Fläche $A_{V,m}$ nicht bzw. in unkorrekter Weise berücksichtigt werden (schraffierte Flächenanteile). Diese Flächenanteile sind näherungsweise gleich groß, sodass sie zu einer gegenseitigen Kompensation führen. Zudem sind in dem Berechnungsansatz Fasen und Radien am Zahnkopf bzw. -fuß, die die effektive Berührfläche verringern, nicht berücksichtigt. Die Berechnung von $A_{V,m}$ mit diesem Ansatz führt demnach zu Abweichungen gegenüber der tatsächlichen Fläche. Diese Abweichungen sind jedoch verhältnismäßig niedrig, sodass die Berechnungen ausreichend genau sind und problemlos verwendet werden können.

Zur Bestimmung des Winkels ε sind zunächst die Unbekannten aus Abbildung 6-13 zu ermitteln. Die Strecke r_{\max} ist aus Gleichung 4-5 bekannt und steht in folgendem Zusammenhang:

$$6-75 \quad r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases} \quad (\text{mit } d \text{ nach Gl. 4-44})$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

Der Winkel φ_{\max} ist nach Gleichung 4-22 wie folgt zu berechnen:

$$6-76 \quad \varphi_{\max} = \arccos\left(\frac{r_{\max}^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{ar_{\max}}\right) \quad (\text{mit } d \text{ nach Gl. 4-44})$$

Die Unbekannten δ und w werden mittels Sinus- und Kosinussatz bestimmt:

Aus dem Sinussatz geht hervor:

$$6-77 \quad \frac{r_{\max}}{\sin(\varepsilon)} = \frac{w}{\sin(\varphi_{\max})} = \frac{a}{\sin(\delta)}$$

$$6-78 \quad \Leftrightarrow \delta = \arcsin\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\sin(\varphi_{\max})}{w}\right)$$

Mit dem Kosinussatz ist ersichtlich:

$$6-79 \quad w^2 = r_{\max}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2r_{\max} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\varphi_{\max})$$

$$6-80 \quad \Leftrightarrow w = \sqrt{r_{\max}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - r_{\max} \cdot a \cdot \cos(\varphi_{\max})}$$

Gleichung 6-80 in 6-78 eingesetzt ergibt:

$$6-81 \quad \delta = \arcsin\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\sin(\varphi_{\max})}{\sqrt{r_{\max}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - r_{\max} \cdot a \cdot \cos(\varphi_{\max})}}\right)$$

Der Winkel ε ist anschließend anhand der konstanten Winkelsumme eines Dreiecks zu berechnen:

$$6-82 \quad \varepsilon + \delta + \varphi_{\max} = \pi$$

$$6-83 \quad \Leftrightarrow \varepsilon = \pi - \delta - \varphi_{\max}$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

6-84

$$\varepsilon = \pi - \arcsin \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\sin(\varphi_{\max})}{\sqrt{r_{\max}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - r_{\max} \cdot a \cdot \cos(\varphi_{\max})}} \right) - \varphi_{\max}$$

mit

$$r_{\max} = \begin{cases} \frac{a+d}{2}, & \text{für } a+d < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a+d \geq D \end{cases}$$

und

$$\varphi_{\max} = \arccos \left(\frac{r_{\max}^2 + \frac{a^2 - d^2}{4}}{ar_{\max}} \right)$$

und

$$d = b \cdot (1 + 2m)$$

Mit dem Winkel ε ist die Fläche $A_{V,m}$ nach Gleichung 6-74 zu ermitteln.

Die senkrecht auf die Fläche $A_{V,m}$ wirkende Vorspannkraft $F_{V,m}$ sollte nach Möglichkeit so hoch sein, dass vornehmlich bei dynamischen Belastungen an der entsprechenden Flanke weder ein Abheben der Zähne voneinander noch ein Gleiten der Zähne aufeinander auftritt. Ein Abheben der Zähne findet nur auf der Zahnrückseite statt, ein Gleiten der Zahnflanken nur auf der Zahnvorderseite, was in den nachstehenden Berechnungen berücksichtigt wird. Die mindestens benötigte Vorspannkraft $F_{V \min,m}$ an der einzelnen Flanke ist daher wie folgt zu bestimmen:

Bei (dynamischer) Torsionsbelastung nur in Vorwärtsrichtung (gemäß Abbildung 5-4) ist für jedes ungerade m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) die mindestens einzuhaltende Vorspannkraft wie folgt zu berechnen:

$$6-85 \quad F_{V \min,m} = F_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

Für jedes gerade m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) ist bei entsprechendem Fall folgende Formel zu verwenden:

$$6-86 \quad F_{V \min,m} = F_m \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

Besteht eine (dynamische) Torsionsbelastung nur in Rückwärtsrichtung (gemäß Abbildung 5-4) ist die mindestens benötigte Vorspannkraft demgemäß für jedes gerade m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) nach der folgenden Formel zu bestimmen:

$$6-87 \quad F_{V \min,m} = F_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

Für jedes ungerade m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) ist die mindestens benötigte Vorspannkraft entsprechend:

$$6-88 \quad F_{V \min, m} = F_m \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

Wirkt die Torsionsbelastung aus beiden Drehrichtungen ist die mindestens benötigte Vorspannkraft für jedes m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) wie folgt zu bestimmen:

$$6-89 \quad F_{V \min, m I} = F_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

und

$$6-90 \quad F_{V \min, m II} = F_m \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

Für $F_{V \min, m}$ ist dann jeweils der größere der beiden Werte zu setzen:

$$6-91 \quad F_{V \min, m} = \max\{F_{V \min, m I}; F_{V \min, m II}\}$$

Anschließend ist für jedes m die Flächenpressung zu ermitteln, die aufgrund der mindestens benötigten Vorspannkraft an der einzelnen Zahnflanke entsteht:

$$6-92 \quad p_{V \min, m} = \frac{F_{V \min, m}}{A_{V, m}} \quad (\text{vgl. Gleichung 6-67})$$

Die größte Pressung aus der Menge aller $p_{V \min, m}$ ist maßgebend für die Beanspruchung, die infolge der Vorspannkraft an allen Zahnflanken herrschen muss, um ein Abheben oder Gleiten der Zähne gänzlich zu verhindern. Es muss gelten:

$$6-93 \quad p_V = \max\{p_{V \min, m}\} = \text{konst.} \leq p_{\text{zul}}$$

Da das Ergebnis für die auf diesem Wege hergeleitete mindestens benötigte Vorspannkraft unter Umständen sehr hoch ausfallen kann, ist es auf Praxistauglichkeit zu prüfen und ggf. anzupassen. Die zulässige Flächenpressung ist dabei zu beachten (siehe Tabelle 2-1). Wird die Vorspannkraft herabgesetzt ist mit der Entstehung von Passungsrost zu rechnen. Andererseits verringert eine kleinere Vorspannkraft die Druck- und Schubspannungen an den Zahnflanken.

Nach Bestimmung der an den Zahnflanken wirkenden Pressung infolge der Vorspannkraft sind die tatsächlich an den einzelnen Zahnflanken $F_{V, m}$ wirkenden Vorspannkraften aufgrund der homogenen Verteilung von p_V wie folgt zu berechnen:

$$6-94 \quad \boxed{F_{V, m} = p_V \cdot A_{V, m}} \quad (\text{mit } p_V \leq p_{\text{zul}})$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

Die gesamte Vorspannkraft $F_{V,ges}$ ist die Summe aller Vorspannkraften auf den einzelnen Zahnflanken:

$$6-95 \quad F_{V,ges} = p_V \cdot 2 \cdot \sum_{m=m_{min}}^{m_{max}} A_{V,m} = 2 \cdot \sum_{m=m_{min}}^{m_{max}} F_{V,m}$$

Wegen der Punktsymmetrie der Verzahnungskontur ist jede Zahnflanke zweimal vorhanden, weshalb die einzelnen Flächen $A_{V,m}$ bzw. einzelnen Vorspannkraften $F_{V,m}$ jeweils mit zwei zu multiplizieren sind. Die gesamte Vorspannkraft $F_{V,ges}$ wirkt auf das komplette Verbindungselement, um ein Gleiten oder ein Abheben der Zähne so gut wie möglich zu verhindern. Die berechnete gesamte anliegenden Vorspannkraft $F_{V,ges}$ kann unter Umständen sehr groß sein, sodass auch hier mit Bezug auf die Praxistauglichkeit abzuwägen ist, inwiefern der errechnete Wert tatsächlich aufgebracht wird. Bei Anpassung der gesamten Vorspannkraft ist für die weiteren Berechnungen zu berücksichtigen, dass die an den einzelnen Flanken anliegenden Vorspannkraften ebenfalls anzupassen sind. Im nachstehenden Kapitel wird die Berechnung der an der einzelnen Zahnflanke gesamten anliegenden Druckspannung erörtert.

6.3.6 Bestimmung der Druckspannungen an den Zahnflanken

Die in Kapitel 5 ermittelte Flächenpressung an der einzelnen Zahnflanke p_m entspricht der Druckspannung bei $\alpha = 0^\circ$. Die Flächenpressung aus Kapitel 5 ist somit der Anteil der hier betrachteten Druckspannung, der durch die reine Umfangskraft aufgebracht wird. Mit dem Bezug zur Fläche A_0 (vgl. Abbildung 6-6), die der projizierten Fläche A_{proj} aus Kapitel 5.1 entspricht, wird der Zusammenhang zwischen der Umfangskraft F_U bzw. F_m und der Flächenpressung p_m hergestellt:

$$6-96 \quad p_m = \frac{F_m}{A_{proj}} = \frac{F_U}{A_0} \quad \text{mit } A_{proj} = A_0$$

$$6-97 \quad \Leftrightarrow F_m = F_U = p_m \cdot A_0$$

Die in Kapitel 6.3.5 ermittelte Flächenpressung an der einzelnen Flanke infolge der bloßen Vorspannkraft $p_{V,m}$ ist auf die Fläche $A_{V,m}$ bezogen. Sie steht in keinem Verhältnis zur Fläche A_0 und entspricht somit keinem Anteil der hier betrachteten Druckspannung. Die Druckspannung an einer einzelnen Zahnflanke $\sigma_{D,m}$ ist demzufolge wie nachstehend angegeben zu berechnen (vgl. Gleichung 6-53):

$$6-98 \quad \sigma_{D,m} = \frac{1}{A_0} \cdot \cos \alpha' \cdot \left(F_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + F_{V,m} \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right) \quad \text{mit } \frac{F_m}{A_0} = p_m$$

$$6-99 \quad \Leftrightarrow \sigma_{D,m} = \cos \alpha' \cdot \left(p_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + \frac{F_{V,m}}{A_{proj}} \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

bzw.

$$6-100 \quad \Leftrightarrow \sigma_{D,m} = \cos \alpha' \cdot \left(p_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + \frac{p_V \cdot A_{V,m}}{A_{proj}} \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

Ausschlaggebend für die Belastbarkeit der Verzahnung ist die höchste vorkommende Druckspannung:

$$6-101 \quad \max\{\sigma_{D,m}\} = \sigma_{D \max} \leq \sigma_{D \text{ zul}}$$

mit

$$6-102 \quad \sigma_{D \text{ zul}} = \frac{R_e}{S} \quad \begin{array}{l} R_e - \text{Streckgrenze} \\ S - \text{Sicherheitsfaktor} \end{array}$$

Die zulässige Druckspannung $\sigma_{D \text{ zul}}$ ist abhängig vom verwendeten Material und wird mittels der materialspezifischen Streckgrenze und der Berücksichtigung einer gewissen Sicherheit bestimmt. Weitere, nicht bekannte Faktoren können zusätzlich Einfluss auf die zulässige Druckspannung ausüben. Diese sind beispielsweise empirisch zu ermitteln.

Um die Spannungen gering zu halten ist ein möglichst großer Flankenwinkel zu wählen. Dem Flankenwinkel sind jedoch Grenzen gesetzt, die vom Verhältnis zwischen Zahnbreite und Zahnhöhe abhängen. Die Zusammenhänge werden im nachstehenden Kapitel erörtert.

6.4 Grenzen des Flankenwinkels

Die einzelnen Parameter der Kreisbogen-Stirnverzahnung sind zum Teil gegenseitigen Beeinflussungen ausgesetzt. Sie dürfen daher nicht isoliert betrachtet werden. Die Parameter werden durch Vorgaben direkt begrenzt oder aufgrund ihrer Beziehung zu anderen, festgelegten Parametern eingeschränkt. Diesbezüglich ist der Flankenwinkel nicht beliebig groß ausführbar, um z. B. den Anforderungen einer niedrigen Flankenbeanspruchung gerecht zu werden. Beschränkt wird der Flankenwinkel von dem Verhältnis der Zahnbreite zur Zahnhöhe. Sind diese Parameter vorgeschrieben, kann der Flankenwinkel α maximal so groß gewählt werden, bis sich beide Zahnflanken am Zahnkopf berühren. Nachfolgende Skizze veranschaulicht die Grenzstellung der Zahnflanke und das daraus resultierende Maximum von α :

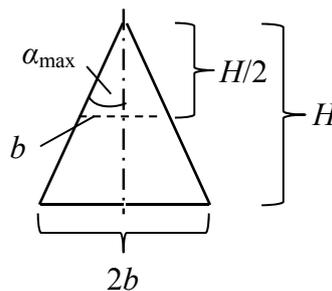


Abbildung 6-14: Skizze zur Ermittlung der Grenze für den Flankenwinkel

Die Obergrenze für den Flankenwinkel α_{\max} lautet wie folgt:

$$6-103 \quad \alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{b}{H}\right)$$

6. Einfluss des Flankenwinkels

Unberücksichtigt ist der Einfluss des Flankenwinkels auf die Scherspannungen am Zahnfuß, die durch die Torsionsspannungen beschrieben werden (siehe Kapitel 4). Mit zunehmendem Flankenwinkel wird der Zahnfuß breiter, wodurch mehr Material für den Widerstand gegen Scherung vorhanden ist. Die Folge sind verringerte Torsionsspannungen. Da die Torsionsspannungen bei zumindest nicht allzu großen Nuttiefen wenig Bedeutung für die Belastbarkeit der Verzahnung aufweisen, wird auf eine Erweiterung der Berechnungsvorschrift zur Bestimmung der Torsionsspannungen um den Einfluss des Flankenwinkels verzichtet. Die so errechneten Torsionsspannungen entsprechen also immer denen bei einem Flankenwinkel von $\alpha = 0^\circ$ und sind somit stets größer oder gleich den Torsionsspannungen bei einem Flankenwinkel von $\alpha > 0^\circ$, wodurch eine zusätzliche Sicherheit in der Auslegung der Verzahnung gegeben ist.

Nachdem der Einfluss des Flankenwinkels auf die Verzahnung erfasst ist und die benötigte Vorspannkraft bestimmt werden kann, folgt die Untersuchung der Einflüsse der weiteren dreidimensionalen Parameter Nuttiefe H und Rundungsradius R bzw. Fasenhöhe S .

7. Einfluss der Nuttiefe, des Rundungsradius und der Fasenhöhe

Die Nuttiefe H , der Rundungsradius R und die Fasenhöhe S bestimmen die effektive Zahnhöhe H_{eff} und somit die Größe der projizierten Zahnflankenfläche, wodurch die Beanspruchungen an den Zahnflanken beeinflusst werden. Zwischen der Zahnflankenbeanspruchung und der Nuttiefe besteht ein antiproportionaler Zusammenhang:

$$7-1 \quad p_{\max} \sim \frac{1}{H_{\text{eff}}} \quad (\text{vgl. Kapitel 5})$$

bzw.

$$7-2 \quad \sigma_{D \max} \sim \frac{1}{H_{\text{eff}}} \quad (\text{vgl. Gleichung 6-100})$$

Eine größere Nuttiefe verhilft somit zur Verringerung der Beanspruchung der Verzahnung.

Der Rundungsradius beeinflusst die Kerbwirkung am Übergang zwischen Zahngrund und Zahnflanke. Die Fase am Zahnkopf verhindert ebenfalls Spannungsspitzen im entsprechenden Übergangsbereich. Im Gegensatz zu einer Rundung ist eine Fase am Zahnkopf fertigungstechnisch von Vorteil. Qualitativ gilt, je größer der Rundungsradius ist, desto kleiner ist die Kerbwirkung. Eine quantitative Erfassung der Schwächung am Zahnfuß oder -kopf ist auf theoretischem Wege kaum möglich. Hierzu sind vornehmlich empirische Daten zu erheben. Neben der geometrischen Abhängigkeit der Kerbwirkung besteht eine werkstoffbezogene Abhängigkeit. So sind z. B. duktile Werkstoffe wie S235 weniger kerbempfindlich als spröde, wie z. B. Grauguss.

Von der Spannungsanalyse für Wellen ist bekannt, dass Kerbwirkungen kaum Relevanz haben, wenn Wellenabsätze mit Rundungsradien versehen sind, die 10 - 30 % des jeweiligen Wellenabsatzdurchmessers betragen. Dieser Prozentsatz wird im Folgenden als Anhaltswert für das Verhältnis zwischen Rundungsradius R und Zahnbreite b der Verzahnung genutzt.

Neben der Kerbempfindlichkeit wird durch den Rundungsradius und die Fase die effektive Flankenberührfläche bzw. Zahnhöhe verringert. Der geometrische Zusammenhang ist nachstehend verdeutlicht:

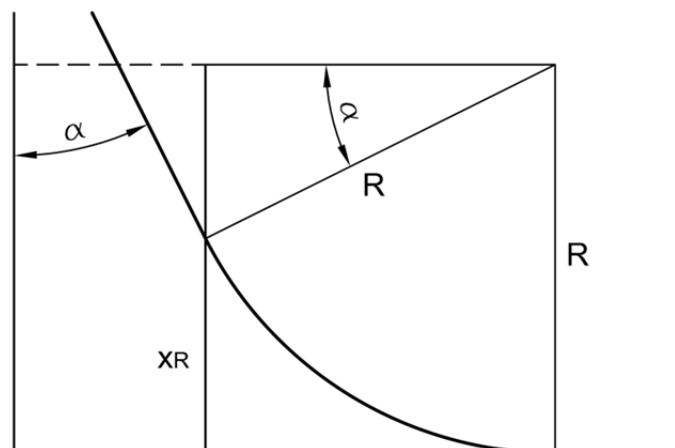


Abbildung 7-1: Kombiniertes Einfluss von Rundungsradius und Flankenwinkel auf die effektive Zahnhöhe

7. Einfluss der Nuttiefe, des Rundungsradius und der Fasenhöhe

$$7-3 \quad x_R = R - R \cdot \sin|\alpha| = R \cdot (1 - \sin|\alpha|)$$

mit x_R – Verringerung der effektiven Zahnhöhe aufgrund von R

Aus der Formel wird ersichtlich, dass neben dem Rundungsradius R die Verringerung der effektiven Zahnhöhe auch vom Flankenwinkel α abhängig ist. Es besteht also eine Wechselwirkung der beiden Parameter H_{eff} und α .

Zur Vermeidung von Doppelpassungen ist die Fasenhöhe am Zahnkopf S immer größer als x_R auszuführen. Aus diesem Grund ist die Fasenhöhe S zweimal von der Nuttiefe H zu subtrahieren (je einmal am Zahnkopf und einmal am Zahnfuß; vgl. auch Kapitel 3.1):

$$7-4 \quad H_{\text{eff}} = H - 2 \cdot S \quad \text{mit } S > x_R$$

Insgesamt darf der Rundungsradius also nicht zu klein sein, damit die Kerbspannungen nicht zu groß werden, andererseits darf der Rundungsradius nicht zu groß sein, damit die effektive Zahnhöhe nicht zu klein und dadurch die Flankenbeanspruchung zu groß wird. Das Verhältnis von $R/b \approx 0,1$ stellt einen guten Kompromiss zwischen beiden gegensätzlichen Anforderungen dar:

$$7-5 \quad \boxed{R \approx 0,1 \cdot b}$$

Die Festlegung auf ein genaues Verhältnis ist mit den Abmessungen von verfügbaren Fräsern abzustimmen, sodass die Fertigung nicht zu aufwändig wird.

Die Fase am Zahnkopf soll einerseits genügend Toleranz gegenüber der Rundung am Zahnfuß aufweisen und andererseits ebenfalls nicht zu groß ausfallen, um die effektive Zahnhöhe nicht zu sehr zu verringern. Ein Verhältnis von $S/x_R = 1,1$ erfüllt dieses Kriterium in gutem Maße, wie auch Umsetzungen in die Realität beweisen. Es gilt für S :

$$7-6 \quad \boxed{S = 1,1 \cdot x_R = 0,11 \cdot (1 - \sin|\alpha|) \cdot b}$$

Die effektive Zahnhöhe wird somit wie folgt bestimmt:

$$7-7 \quad H_{\text{eff}} = H - 0,22 \cdot (1 - \sin|\alpha|) \cdot b$$

Die Formel zeigt, dass ein großer Flankenwinkel den negativen Einfluss des Rundungsradius auf die effektive Zahnhöhe H_{eff} mindert. Im Gegensatz dazu steht die Einschränkung nach Gleichung 6-103, die neben α abhängig von b ist:

$$7-8 \quad \alpha_{\text{max}} = \arctan\left(\frac{b}{H}\right) \quad \text{(vgl. Gl. 6-103)}$$

$$7-9 \quad \Leftrightarrow \boxed{H_{\text{max}} = b \cdot \frac{1}{\tan|\alpha|}}$$

Die Beziehung 7-9 verdeutlicht, dass große Flankenwinkel die Wahl der Zahnhöhe einschränken (eine große Nutbreite erweitert die Wahl für H). Die Bedingung eines möglichst großen Flankenwinkels steht demnach der Bedingung einer möglichst großen Zahnhöhe entgegen. Um beurteilen zu können, welcher Parameter den höheren Endeffekt erzielt, werden

7. Einfluss der Nuttiefe, des Rundungsradius und der Fasenhöhe

die Druckspannungen in Abhängigkeit des Flankenwinkels α bei jeweils maximal möglicher Zahnhöhe gegenübergestellt. Mit Formel 6-54 wird der antiproportionale Zusammenhang von σ_D zu H_{eff} deutlich:

$$7-10 \quad \sigma_D = \frac{F_U}{A_0} \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha + \rho_V)} \right)$$

$$7-11 \quad \Leftrightarrow \sigma_D = p \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha + \rho_V)} \right)$$

$$7-12 \quad \Leftrightarrow \sigma_D \sim \frac{1}{|H_{\text{eff}}|} \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha + \rho_V)} \right)$$

Unter Einbezug von Gleichung 7-9 entsteht nachstehender Zusammenhang:

$$7-13 \quad \sigma_D \sim \frac{1}{|H_{\text{eff}}|} \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha + \rho_V)} \right)$$

$$7-14 \quad \Leftrightarrow \sigma_D \sim \frac{\cos \alpha}{|H - 0,22 \cdot (1 - \sin|\alpha|) \cdot b|} \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha + \rho_V)} \right)$$

$$7-15 \quad \Leftrightarrow \sigma_D \sim \frac{\cos \alpha}{b \cdot \left| \frac{1}{\tan|\alpha|} - 0,22 \cdot (1 - \sin|\alpha|) \right|} \cdot \left(\frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha - \rho_U)} + f_V \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha + \rho_V)} \right)$$

Der Einfluss von b wird in der anstehenden Gegenüberstellung nicht untersucht, weshalb dieser konstant gehalten wird. Das Ergebnis ist in einem Graphen aufgetragen:

7. Einfluss der Nuttiefe, des Rundungsradius und der Fasenhöhe

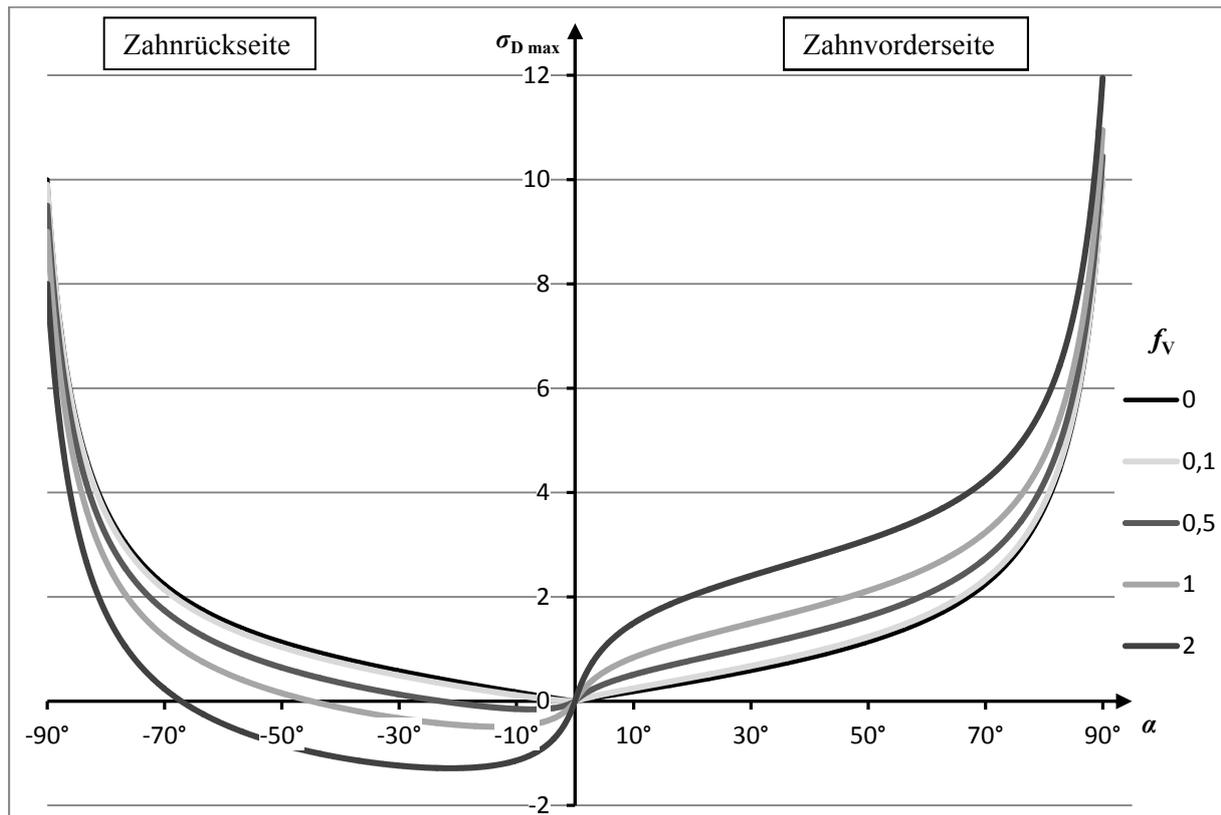


Abbildung 7-2: Endeffekt von Flankenwinkel α und korrelierender maximaler Zahnhöhe H_{\max} auf die maximalen Druckspannungen (bei $\mu = 0,1$)

Die graphische Auswertung verdeutlicht eine mit dem Flankenwinkel zunehmende und dementsprechend mit der Zahnhöhe abnehmende Druckspannung an den Zahnflanken. Die Zahnhöhe H übt demzufolge einen größeren Einfluss auf die Druckspannungen aus als der Flankenwinkel. Die Zahnhöhe sollte also möglichst groß gewählt werden, was einen kleineren Flankenwinkel bedingt. Bei einem Flankenwinkel von null ist die maximal mögliche Nuttiefe theoretisch unendlich, weshalb die Druckspannungen, wie im Diagramm zu sehen, ebenfalls null werden. Real sind der Nuttiefe Grenzen durch den verfügbaren Bauraum oder die Fertigungsmöglichkeiten vorgegeben. Bei kompletter Ausnutzung der realisierbaren Nuttiefe ist dann der Flankenwinkel α möglichst hoch zu wählen.

Bei großen Nuttiefen erlangen die Scherspannungen im Zahnfußbereich, die mittels Torsionsspannungen beschrieben werden, größere Bedeutung. Zur Beurteilung der gesamten Beanspruchung der Verzahnung ist die Vergleichsspannung zu bilden, die die an den Stegen herrschenden Druck- und Scherspannungen zu einer einachsigen Spannung zusammenfasst. Dies wird im nachstehenden Kapitel beschrieben.

8. Vergleichsspannung

Die *Vergleichsspannung* σ_V wird verwendet, um eine Vergleichbarkeit zwischen einem mehrachsigen Spannungszustand und einem einachsigen Spannungszustand herzustellen. Dies ist insbesondere für einen Vergleich mit Materialkennwerten, wie die Streckgrenze, nötig. Die Streckgrenze wird empirisch anhand eines einachsigen Zugversuches ermittelt und kann daher nicht problemlos auf Systeme, die eine mehrachsige Beanspruchung erfahren, übertragen werden. Mit der Vergleichsspannung werden mehrachsige Spannungszustände in einen mit dem einachsigen Spannungszustand vergleichbaren Zustand transformiert. Dafür existieren mehrere Hypothesen.

Für zähe Werkstoffe haben sich in der Praxis vor allem die Gestaltänderungsenergie-Hypothese nach von Mises und die Schubspannungs-Hypothese nach Tresca bewährt. Nach der Gestaltänderungsenergie-Hypothese ist die Energie, die in ein Volumenelement zur Gestaltänderung eingebracht worden ist, Kriterium für ein Versagen, während mit der Schubspannungs-Hypothese eine Verformung einsetzt, sobald die maximale Schubspannung die zulässige Spannung überschreitet [Bruh94]. Da im vorliegenden Fall sowohl Druck- als auch Scherspannungen das Material der Verzahnung beanspruchen ist es sinnvoll, die Gestaltänderungsenergie-Hypothese für die Ermittlung der Vergleichsspannung zu verwenden, weil in dieser beide Arten der Beanspruchung Berücksichtigung in der Formel finden. Die *Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergie-Hypothese* σ_{VG} wird mit folgender Gleichung ermittelt [Scha02]:

$$8-1 \quad \sigma_{VG} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

$$8-2 \quad \Leftrightarrow \sigma_{VG} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

Im vorliegenden Fall treten Druckspannungen sowohl in x - als auch in y -Richtung sowie Scherspannungen in der x - z -Ebene in x -Richtung auf (siehe Abbildung 8-1), sodass die Vergleichsspannung in der Verzahnung wie folgt zu bestimmen ist:

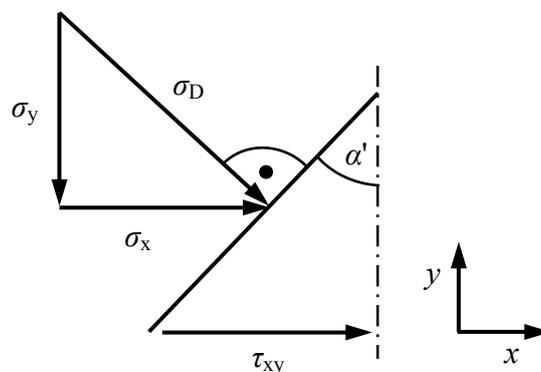


Abbildung 8-1: Spannungen an einem einzelnen Zahn

8. Vergleichsspannung

$$8-3 \quad \sigma_{VG} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

mit

$$8-4 \quad \sigma_x = \sigma_D \cdot \cos \alpha'$$

$$8-5 \quad \sigma_y = \sigma_D \cdot \sin \alpha'$$

$$8-6 \quad \tau_{xy} = \tau_t$$

ergibt:

$$8-7 \quad \sigma_{VG} = \sqrt{\sigma_D^2 \cdot \cos^2 \alpha' + \sigma_D^2 \cdot \sin^2 \alpha' - \sigma_D^2 \cdot \sin \alpha' \cdot \cos \alpha' + 3 \cdot \tau_t^2}$$

$$8-8 \quad \Leftrightarrow \sigma_{VG} = \sqrt{\sigma_D^2 \cdot (1 - \sin \alpha' \cdot \cos \alpha') + 3 \cdot \tau_t^2}$$

$$8-9 \quad \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{VG} = \sqrt{\sigma_D^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin 2\alpha'}{2}\right) + 3 \cdot \tau_t^2}} \leq \sigma_{D \text{ zul}}$$

mit

$$8-10 \quad \sigma_{D \text{ zul}} = \frac{R_e}{S} \quad \begin{array}{l} R_e - \text{Streckgrenze} \\ S - \text{Sicherheitsfaktor} \end{array}$$

Es ist zweckmäßig, für die Vergleichsspannung jeweils die ermittelte maximale Druckspannung an der Zahnflanke (siehe Gleichung 6-99) sowie die maximale Torsionsspannung (nach Kapitel 4.2) einzusetzen, auch wenn diese maximalen Beanspruchungen nicht am selben Ort auftreten. Zum einen vereinfacht dieses Vorgehen die Berechnungen, weil nicht für jeden Ort in der Verzahnung die Vergleichsspannungen ermittelt und verglichen werden müssen, um die maximale Vergleichsspannung zu finden. Zum anderen existiert auch an keinem Ort in der Verzahnung eine Beanspruchung, die höher ist als die so ermittelte Vergleichsspannung, sodass sie problemlos zur Beurteilung der Belastbarkeit der Verzahnung genutzt werden kann und bereits eine gewisse Sicherheit enthält. Für den Winkel α' ist dann derjenige einzusetzen, an dem die maximale Druckspannung (nach Gleichung 6-99) auftritt.

Mit der Vergleichsspannung ist eine Beurteilung der Belastbarkeit der Verzahnung möglich. Dazu sind Materialkennwerte, wie die Streckgrenze, heranzuziehen. Anhand der Verhältnisse zwischen Scherspannungen am Zahnfuß und Druckspannungen an den Zahnflanken ist die Art der hauptsächlichen Beanspruchung der Verzahnung bestimmbar. Unter Umständen ist eine Beanspruchungsart vernachlässigbar klein, sodass die Vergleichsspannung nicht

8. Vergleichsspannung

zwingend gebildet werden muss. Bei einem Verhältnis zwischen der Druckspannung und der Torsionsspannung von fünf beispielsweise ist die errechnete Vergleichsspannung unwesentlich höher als die Druckspannung, weshalb die Druckspannung direkt als Kriterium zur Beurteilung der Belastbarkeit herangezogen werden kann. In der nachstehenden Rechnung ist dies verdeutlicht (der Flankenwinkel beträgt dabei $\alpha = 0^\circ$):

für $\frac{\sigma_D}{\tau_t} = 5$ gilt:

$$8-11 \quad \sigma_{VG} = \sqrt{(5 \cdot \tau_t)^2 + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{25 \cdot \tau_t^2 + 3 \cdot \tau_t^2} \quad (\text{bei } \alpha = \alpha' = 0^\circ)$$

$$8-12 \quad \Leftrightarrow \sigma_{VG} = \sqrt{28 \cdot \tau_t^2} = 5,29 \cdot \tau_t \approx 5 \cdot \tau_t = \sigma_D$$

Mit den vorangegangenen Untersuchungen sind die Einflüsse der einzelnen Parameter auf die Belastbarkeit der Verzahnung herausgearbeitet. Das nachstehende Kapitel fasst die Einflüsse zusammen.

9. Zusammenfassung der geometriebedingten Einflüsse auf die Verzahnungsbeanspruchung

Die Verzahnung wird im Wesentlichen durch Scherspannung am Zahnfuß und Flächenpressung an den Zahnflanken beansprucht. Schubspannungen an den Zahnflanken sind im Verhältnis zu den übrigen Beanspruchungen so gering, dass sie vernachlässigt werden. Die Scherspannungen am Zahnfuß werden mittels Torsionsspannungen beschrieben. Abhängig von der Nuttiefe können entweder die Scherspannungen am Zahnfuß oder die Flächenpressungen an den Zahnflanken vernachlässigbar klein werden. Sind beide Beanspruchungen ausschlaggebend für die Belastbarkeit der Verzahnung, wird mit der Vergleichsspannung dieser mehrachsige Spannungszustand auf eine mit dem einachsigen Spannungszustand vergleichbare Beanspruchung transformiert.

Die Torsionsspannungen sind bei der ungeraden Verzahnungsgeometrie für jede Kombination aus b und n gleich und entsprechen dem Idealwert. Die Gestaltung des zweidimensionalen Verzahnungsbildes ist in diesem Fall beliebig. Die Spannungen sind dann proportional zu $1/D^3$. Die Torsionsspannungen in der geraden Verzahnung weisen Abhängigkeiten von den Verzahnungsparametern b und n auf. Diese Abhängigkeiten sind jedoch nicht mit einfachen Eigenschaften zu beschreiben, weshalb die Ermittlung von optimalen Parametern einer aufwendigen Gegenüberstellung bedarf. Generell sind kleinere Nutbreiten für den Erhalt von niedrigen Torsionsspannungen zu bevorzugen. Es existieren aber auch Parameterkombinationen, die mit größerer Nutbreite ähnlich niedrige Torsionsspannungen hervorrufen. Weniger bedeutend ist die Wahl des ganzzahligen Vielfachen n für die Torsionsspannungen.

Die Auswirkungen der zweidimensionalen Parameter (b , n , D) auf die Flächenpressung sind komplex und können daher nicht mittels einer einfachen Regel ausgedrückt werden. Tendenziell nimmt die Belastbarkeit der Verzahnung mit dem Basisdurchmesser D zu. Jedoch beeinflusst auch die Kombination aus Nutbreite b und Vielfachem n die maximal vorkommende Flächenpressung an den Flanken in hohem Maße. Das Optimum für b ist aufgrund der komplexen Zusammenhänge nur iterativ zu finden. Es steht in Abhängigkeit von D , der Parität der Verzahnung und ggf. der Drehrichtung der Belastung. Der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte hat einen weniger bedeutenden Einfluss. Tendenziell sollten die Mittelpunkte nahe am Rand der Basisfläche angeordnet werden.

Zur Vermeidung von Passungsrost ist vornehmlich bei dynamischen Belastungen der Flankenwinkel größer null zu gestalten sowie eine axiale Vorspannkraft aufzubringen. Um die Druckspannungen an den Flanken gering zu halten, ist der Flankenwinkel möglichst groß zu wählen. Ein größerer Flankenwinkel bedingt höhere Vorspannkräfte, die unter Umständen schwer aufzubringen sind, jedoch insgesamt nicht zu einer Erhöhung der Beanspruchungen der Zahnflanken führen. Je größer die Nutbreite b im Verhältnis zur Zahnhöhe H ist, desto größer ist der maximal wählbare Flankenwinkel.

Die Zahnhöhe bzw. Nuttiefe H beeinflusst die Beanspruchungen der Verzahnung ebenfalls in hohem Maße. Eine Vergrößerung der Zahnhöhe bedeutet eine Erhöhung der belasteten Fläche, wodurch die Spannungen an den Flanken verringert werden. In der Praxis ist die Zahnhöhe durch den Bauraum und die Fertigungsmöglichkeiten begrenzt. Große Nuttiefen schränken den maximal wählbaren Flankenwinkel ein. Der Einfluss der Zahnhöhe auf die Spannungen an den Zahnflanken ist größer als der des Flankenwinkels, weshalb eine

9. Zusammenfassung der geometriebedingten Einflüsse auf die Verzahnungsbeanspruchung

möglichst große Zahnhöhe einem möglichst großen Flankenwinkel vorzuziehen ist. Eine große Nutbreite erweitert die Wahl des Flankenwinkels, hat aber auch direkten Einfluss auf die Beanspruchungen der Verzahnung. Der Endeffekt einer Nutbreitenerhöhung auf die Belastbarkeit der Verzahnung ist daher in Abhängigkeit aller Parameter zu prüfen. Ein Optimum ist nur iterativ zu finden.

Die Höhe der Fase am Zahnkopf S und der Rundungsradius am Zahnfuß R verringern die effektive Zahnhöhe H_{eff} , wodurch die Druckspannung bzw. die Flächenpressung an den Flanken steigt. Die effektive Zahnhöhe ist die Differenz aus der Zahnhöhe H und dem Zweifachen der Höhe der Fase S . Um die effektive Berührfläche der Flanken nicht zu sehr zu verringern, sollte S daher nicht zu groß ausfallen. Andererseits muss S größer als der Rundungsradius R sein. Der Rundungsradius wiederum sollte nicht zu klein sein, um die Kerbspannungen gering zu halten. Der Rundungsradius ist somit nicht größer als nötig zu wählen. Als Anhaltswert dient ein Verhältnis zwischen Nutbreite und Rundungsradius R/b von 0,1.

Gänzlich unberücksichtigt in den Berechnungen ist ein Tragfaktor, der eine ungleichmäßige Lastverteilung an den Zahnflanken aufgrund von Fertigungsungenauigkeiten einbezieht. Diese ungleichmäßige Lastverteilung führt zu lokal erhöhten Spannungen, wodurch die Belastbarkeit der Verzahnung herabgesetzt wird (vgl. u. a. Berechnungen zur Passfederverbindung oder zur Hirth-Verzahnung). Dieser Tragfaktor ist nur auf empirischem Wege festzustellen. Weitere unberücksichtigte und nicht erkennbare Einflüsse sind ebenfalls per experimenteller Ermittlungen in die Berechnungen mit einzubeziehen. Die Verwendung eines sinnvollen Sicherheitsfaktors geht gleichermaßen aus den Ergebnissen von Praxisversuchen hervor.

Zur Auslegung der Verzahnungsparameter ist es zweckmäßig, zunächst den verfügbaren Bauraum zu bestimmen. Durch diesen werden in der Regel der Durchmesser D und die Nuttiefe H bestimmt. Ist der Bauraum unbekannt ist er z. B. mittels der Grobauslegungsformel (Gleichung 5-106) vorläufig festzulegen. Anschließend ist für die entsprechende Basis die optimale zweidimensionale Verzahnungsgeometrie zu finden. Da dies nur iterativ möglich ist, ist es sinnvoll, den Untersuchungsraum einzugrenzen. Eine Eingrenzung geben Kriterien aus der Fertigung vor, die im nachfolgenden Kapitel betrachtet werden.

10. Fertigungstechnische Aspekte zur Gestaltung der Verzahnung

Ergänzend zu der rein beanspruchungsgerechten Auslegung der Verzahnung ist die Gestaltung der Verzahnung mit Aspekten aus der Fertigung abzustimmen. Dazu werden zunächst die zu beachtenden Kriterien bei der Herstellung der Verzahnung angeführt. Daraus werden im Anschluss einzuhaltende Beziehungen zwischen den Fertigungsparametern und den Verzahnungsparametern formuliert.

10.1 Fertigungstechnische Kriterien zur Herstellung der Verzahnung

Aus fertigungstechnischer Sicht ist die Verzahnung möglichst schnell, möglichst einfach und mit möglichst wenig Aufwand herzustellen. Mit Fokus auf eine spangebende Herstellung der Verzahnung wird diese aufgrund der kreisbogenförmigen Nuten nur schwer ohne CNC-Fräsanlage zu fertigen sein. Eine schnelle Bearbeitung wird realisiert, wenn die Fräsbahn einen möglichst geringen Verfahrensweg aufweist und der Nutquerschnitt eine Bearbeitung mit schnellen Vorschubgeschwindigkeiten zulässt. Beides tritt bei großen Nutbreiten ein. Größere Nutbreiten erlauben den Einsatz von Fräsern größeren Durchmessers, die wiederum aufgrund ihrer höheren Stabilität größere Vorschubgeschwindigkeiten gestatten. Außerdem weist ein Verzahnungsbild mit großer Nutbreite weniger Verfahrensweg auf, da die Nutanzahl geringer ist als bei Verzahnungen mit kleinen Nutbreiten. Aus fertigungstechnischem Gesichtspunkt ist somit eine große Nutbreite zu bevorzugen.

Zusätzlich bestimmt das Verhältnis zwischen Nutbreite und Nuttiefe die Bearbeitungsgeschwindigkeit. Ein Anhaltswert aus der Praxis besagt, dass die Bearbeitungstiefe bei einer Fräsbearbeitung, Zustellung genannt, nicht mehr als das ca. 0,5-fache des Fräserdurchmessers betragen soll, da sonst die Belastungen für den Fräser zu hoch werden. Sind Nuten zu fertigen, deren Tiefe im Verhältnis zum Fräserdurchmesser größer ist als ca. 0,5, müssen mehrere Nutdurchläufe in unterschiedlichen Bearbeitungsebenen erfolgen, was einer längeren Bearbeitungszeit bedarf.

Um die Bearbeitungszeit möglichst kurz zu halten ist es ebenfalls ratsam, den Werkzeugdurchmesser der Nutbreite insofern anzupassen, dass beide Flanken einer Nut in einem Durchlauf bearbeitet werden. Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist die unterschiedliche Oberflächenqualität der gegenüberliegenden Flanken, da die fräsende Bearbeitung einerseits im Gleichlauf, andererseits im Gegenlauf geschieht.

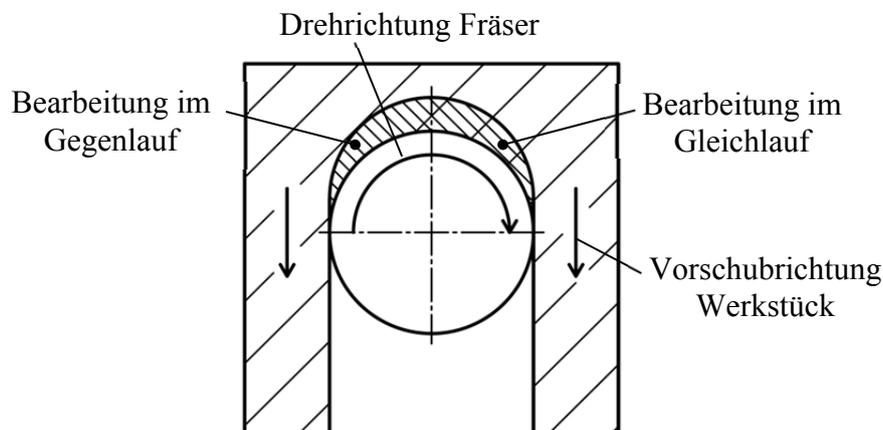


Abbildung 10-1: Fräsende Herstellung einer Nut in einem Durchgang

10. Fertigungstechnische Aspekte zur Gestaltung der Verzahnung

Wird eine bessere Oberflächenqualität gefordert, sind die Nuten mit einem Fräser kleineren Durchmessers in mehreren Durchgängen herzustellen, indem die Nutflanken jeweils im Gleichlauf bearbeitet werden.

Die Fertigung der Nutquerschnittskontur, die neben der Nuttiefe H und Nutbreite b durch Flankenwinkel α , Rundungsradius R und Fase S definiert ist, kann z. B. per Einsatz von mehreren Standardfräsern (z. B. Schaftfräser, Kugelfräser, Torusfräser oder Kegelfräser) geschehen, wobei jeder Fräser zur Herstellung einer bestimmten Teilkontur genutzt wird. Die Nutzung dieser Strategie bedarf eines Höchstmaßes an Genauigkeit, damit die Übergänge zwischen den einzelnen Teilkonturen fließend abgebildet werden. Außerdem ist die Fertigungszeit aufgrund der Fräserwechsel und mehrmaligen Nutdurchgänge erhöht. Alternativ können zur Herstellung der Nut Profilfräser verwendet werden, die aufgrund ihrer Form den zu erzeugenden Nutquerschnitt direkt abbilden, was die Fertigung vereinfacht. Profilfräser gibt es in Standardausführungen, z. B. zur Herstellung von T-Nuten oder Schwalbenschwanzführungen. Für spezielle Konturen sind kostenintensivere Sonderanfertigungen nötig. Diese erlauben eine Herstellung der Nut in einem Durchgang, wodurch die Nutkontur problemlos fließend abgebildet und Bearbeitungszeit eingespart wird.

Fertigungsbedingt muss entweder Flankenspiel (Zahnkopf liegt auf Nutgrund) oder Kopfspiel (Zahnflanken liegen aneinander) bestehen, da in der Praxis nicht alle Kontaktflächen gleichzeitig im Eingriff sein können. Aufgrund der vornehmlich dynamischen Belastung der Kreisbogen-Stirnverzahnung ist Flankenspiel zu vermeiden, weshalb Kopfspiel anzustreben ist. Dazu sind die Nuten etwas schmaler als die Stege zu fertigen. Das nötige Aufmaß für die Stegflanken ist von den genauen Fertigungsbedingungen abhängig und empirisch zu ermitteln.

Zwischen den Fertigungs- und Verzahnungsparametern gelten Abhängigkeiten, die im Folgenden aufgezeigt werden.

10.2 Verhältnisse zwischen Fertigungs- und Verzahnungsparametern

Zur Herstellung einer bestimmten Nutkontur sind an die Form der Werkzeuge und die Art der Fertigung bestimmte Anforderungen gestellt. Nachfolgend ist der Nutquerschnitt dargestellt:

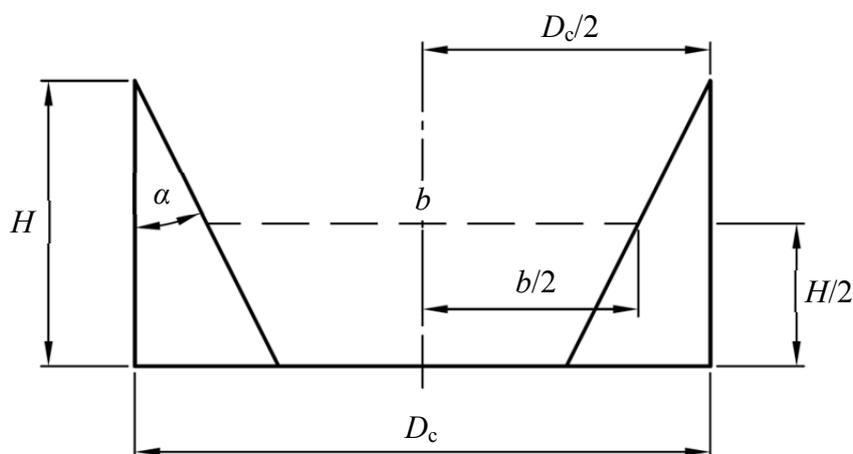


Abbildung 10-2: Querschnitt einer Nut zur Ermittlung des geometrischen Zusammenhangs zwischen Fräserdurchmesser D_c und (mittlerer) Nutbreite b

10. Fertigungstechnische Aspekte zur Gestaltung der Verzahnung

Die Zusammenhänge zwischen den Verzahnungsparametern Nutbreite b , Nuttiefe H und Flankenwinkel α und den Fertigungsparametern *Werkzeugdurchmesser* D_c , *Fräserzustellung* t und *Anzahl der Nutdurchläufe* z werden lauten wie folgt:

$$10-1 \quad \tan(\alpha) = \frac{\frac{D_c}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{H}{2}} = \frac{D_c - b}{H} = \frac{D_c}{H} - \frac{b}{H}$$

$$10-2 \quad \Leftrightarrow \frac{b}{H} = \frac{D_c}{H} - \tan(\alpha)$$

Weiter besteht folgender Zusammenhang:

$$10-3 \quad \boxed{H = z \cdot t} \quad \text{mit } z = \text{Anzahl der Nutdurchläufe} \\ t = f(D_c) = \text{Fräserzustellung}$$

Die Zustellung t ist abhängig vom verwendeten Werkzeug und steht oftmals im Verhältnis zum Werkzeugdurchmesser D_c (Anhaltswert $D_c/t = 2$).

Für das Verhältnis b/H (Gleichung 10-2) gilt entsprechend:

$$10-4 \quad \boxed{\frac{b}{H} = \frac{D_c}{z \cdot t} - \tan(\alpha)}$$

Das Verhältnis von b/H gibt den maximal möglichen Flankenwinkel vor (vgl. Gleichung 6-103):

$$10-5 \quad \alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{b}{H}\right) = \arctan\left(\frac{D_c}{z \cdot t} - \tan(\alpha_{\max})\right)$$

$$10-6 \quad \Leftrightarrow \tan(\alpha_{\max}) = \frac{D_c}{z \cdot t} - \tan(\alpha_{\max}) \Leftrightarrow 2 \cdot \tan(\alpha_{\max}) = \frac{D_c}{z \cdot t}$$

$$10-7 \quad \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{D_c}{2 \cdot z \cdot t}\right)}$$

Wird der maximal wählbare Flankenwinkel auf das Verhältnis von b/H angewendet, ergibt dies folgenden Zusammenhang:

$$10-8 \quad \frac{b}{H} = \frac{D_c}{z \cdot t} - \tan(\alpha_{\max}) = \frac{D_c}{z \cdot t} - \frac{D_c}{2 \cdot z \cdot t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D_c}{z \cdot t}$$

Für eine schnelle und einfache Fertigung mit $z = 1$ und dem Anhaltswert von $D_c/t = 2$ gilt die folgende Beziehung für das Verhältnis von b/H :

$$10-9 \quad \boxed{\frac{b}{H} = \frac{D_c}{z \cdot t} - \tan(\alpha) = 2 - \tan(\alpha)}$$

10. Fertigungstechnische Aspekte zur Gestaltung der Verzahnung

Für den maximal wählbaren Flankenwinkel gilt dann:

$$10-10 \quad \alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{D_c}{2 \cdot z \cdot t}\right) = \arctan(1) = 45^\circ$$

Bei Verwendung des maximal wählbaren Flankenwinkels besteht mit $z = 1$ und $D_c/t = 2$ das folgende Verhältnis zwischen b und H :

$$10-11 \quad \frac{b}{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D_c}{z \cdot t} = 1 \quad \text{nach Gleichung 10-8}$$

bzw.

$$10-12 \quad \frac{b}{H} = 2 - \tan(45^\circ) = 1 \quad \text{nach Gleichung 10-9}$$

Nach Gleichung 10-3 besteht dann folgender Bezug zum Werkzeugdurchmesser D_c :

$$10-13 \quad H = z \cdot t = \frac{D_c}{2} = b \quad \text{mit } z=1 \text{ und } t = D_c/2$$

Zusammengefasst sind die Verzahnungs- und Fertigungsparameter für eine möglichst einfache Fertigung wie folgt zu wählen:

$$10-14 \quad \boxed{b = H = \frac{D_c}{2}}$$

$$10-15 \quad \boxed{\alpha = 45^\circ}$$

Die aufgeführten fertigungstechnischen Beziehungen vereinfachen die Findung von passenden Einstellungen für die Verzahnungsparameter. Mit der Berücksichtigung der fertigungstechnischen Aspekte wird verdeutlicht, dass grundsätzlich eine größere Nutbreite von Vorteil ist. Dies begünstigt zum einen die Herstellung der Verzahnung, da bei großen Nutbreiten ein geringerer Zeitaufwand benötigt wird. Zum anderen sind aufgrund der Beziehung $b = H$ (vgl. Gleichung 10-14), die für eine einfache und schnelle Fertigung einzuhalten ist, größere Nuttiefen möglich, wodurch die Spannungen in der Kreisbogen-Stirnverzahnung deutlich gemindert werden. Voraussetzung dafür ist, dass die entsprechende Nuttiefe den zulässigen Bauraum nicht überschreitet.

Im Folgenden werden alle entwickelten Ergebnisse und Zusammenhänge aus den vorherigen Kapiteln in logischer Reihenfolge zusammengefasst, sodass ein Algorithmus entsteht, der der Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung dient.

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Die Zusammenfassung der hergeleiteten Ergebnisse in einen Algorithmus ermöglicht es, auf schematische Weise einerseits die Beanspruchungen in der Verzahnung bei vorgegebenem Torsionsmoment und bekannten Verzahnungsparametern zu ermitteln, andererseits die Verzahnung für eine bestimmte Torsionsmomentbelastung auszulegen. Dabei sind Empfehlungen für die Verzahnungsparameter gegeben. Diese empfohlenen Verzahnungsparameter gehen sowohl aus der Berücksichtigung von beanspruchungsgerechten als auch fertigungstechnischen Kriterien hervor.

Es wird vorausgesetzt, dass das zu übertragende Torsionsmoment sowie der zu verwendende Wellenwerkstoff gegeben sind. Die Parameter der Kreisbogen-Stirnverzahnung sind zu bestimmen und wie folgt definiert (vgl. Kapitel 3):

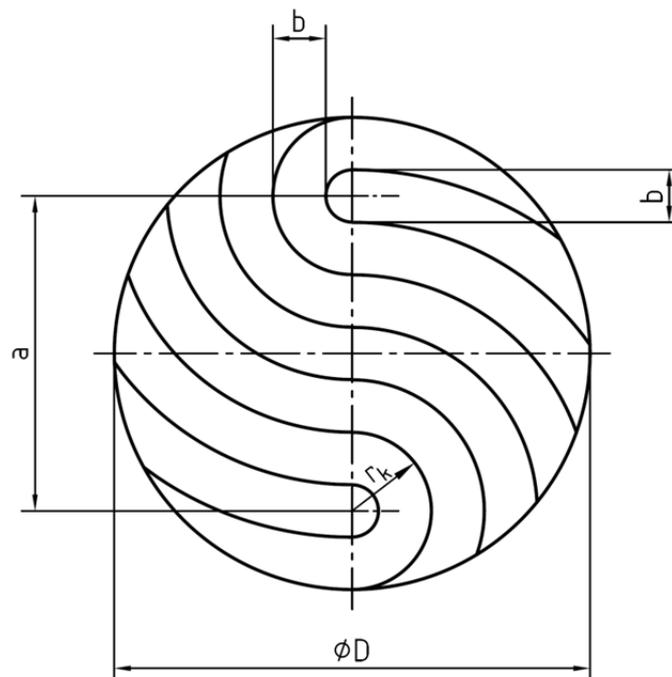


Abbildung 11-1: Zweidimensionale Parameter der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Nutbreite = Stegbreite (auch mittlere Zahnbreite):	b ; mit $b < D$ für n gerade
Abstand der Kreisbogenmittelpunkte:	a ; mit $a = b \cdot n$
Ganzzahliges Vielfaches der Nutbreite:	n ; mit $n \in \mathbb{N}$
Basisdurchmesser (Durchmesser der begrenzenden Kontur):	D
Radius eines einzelnen Kreisbogens:	r_k ; mit $r_k = \frac{b}{2} \cdot (1 + 2 \cdot m)$; $m \in \mathbb{N}$

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

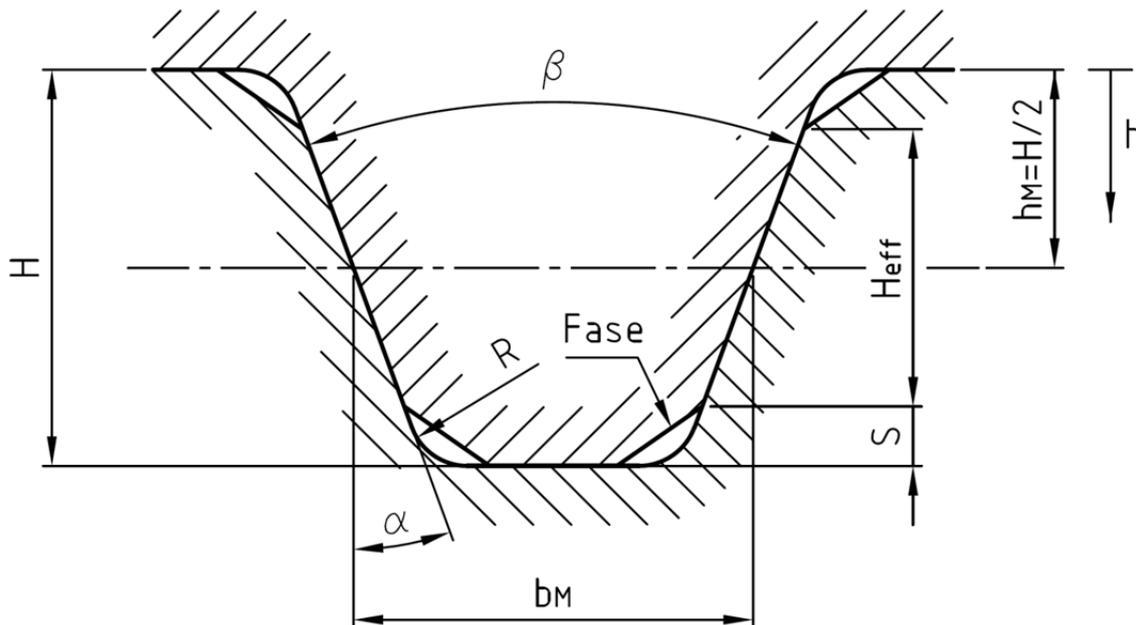


Abbildung 11-2: Parameter am Zahnquerschnitt

Zahnhöhe (=Nuttiefe):	H
Örtliche Zuordnung entlang der Zahnhöhe:	h ; mit $0 \leq h \leq H$
Flankenwinkel:	α
Öffnungswinkel:	β ; mit $\beta = 2 \cdot \alpha$
Rundungsradius (am Zahnfuß):	R
Fasenhöhe (am Zahnkopf):	S ; mit $S > R$
Effektive Zahnhöhe / Nuttiefe:	H_{eff} ; mit $H_{\text{eff}} = H - 2 \cdot S$
Mittlere Zahnbreite / Nutbreite	b_M
Mittlere Zahnhöhe / Nuttiefe	h_M ; mit $h_M = H/2$

Zur Bestimmung der Parameter der Kreisbogen-Stirnverzahnung sind die nachfolgenden Schritte und Entscheidungen durchzuführen.

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

1. Bauraum / Grobabmessungen definieren

Anhand des verfügbaren Bauraumes sind der Wellen- bzw. der Basisdurchmesser D sowie die Nuttiefe H so groß wie möglich zu definieren.

Ist der verfügbare Bauraum unbestimmt, sind beide Werte zu schätzen. Dabei nützt die folgende Grobauslegungsformel (siehe Gleichung 5-106):

$$11-1 \quad D \geq \sqrt{3 \cdot \frac{T}{H \cdot p_{zul}}}$$

Ist die Nuttiefe H noch nicht bestimmt, kann sie z. B. anhand von Fertigungskriterien festgelegt werden. Sind auch diese unbestimmt, ist H vorläufig grob mit 10 mm anzunehmen. Dieser Wert stellt ein gutes Mittel der üblicherweise genutzten Nuttiefen dar. Die zulässige Flächenpressung ist in Abhängigkeit des verwendeten Werkstoffes der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

Werkstoff	Zulässige Flächenpressung p_{zul} in N/mm ² bei Belastung		
	ruhend	schwellend	stoßartig
Stahl ungehärtet	100 ... 200	70 ... 150	40 ... 80
Stahl gehärtet	150 ... 250	100 ... 170	50 ... 100
Stahlguss	100 ... 150	80 ... 100	40 ... 60
Gusseisen, Temperguss	80 ... 100	60 ... 80	30 ... 50

Die oberen Werte gelten bei Materialien mit höherer Streckgrenze, Bruchfestigkeit und Härte, die unteren Werte entsprechend bei niedrigeren Festigkeitswerten

Tabelle 11-1: Richtwerte für zulässige Flächenpressungen nichtgleitender Flächen [Scha02]

2. Parität der Verzahnung wählen

Abhängig davon, welche Orientierbarkeit die Verbindung besitzen soll bzw. welchen Belastungen sie ausgesetzt ist, ist die Parität festzulegen:

$n = \text{gerade}$: - Verzahnung passt alle 180° (in zwei Orientierungen)
 - Belastbarkeit abhängig von Belastungsrichtung
 => vorzugsweise aus günstigerer Belastungsrichtung zu beanspruchen

$n = \text{ungerade}$: - Verzahnung passt alle 360° (in einer Orientierung)
 - Belastbarkeit unabhängig von Belastungsrichtung
 => vorzugsweise bei wechselnden Belastungen anwenden

 11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Für eine möglichst einfache Auslegung und Fertigung der Verzahnung sind die Verzahnungsparameter anhand der nachfolgenden Grobdimensionierung (Schritt 3) festzulegen. Ist für spezielle Anwendungsfälle die Verzahnung zu optimieren, ist eine aufwändige Gegenüberstellung der Beanspruchungen bei mehreren Variationen von Verzahnungsparametern notwendig. In diesem Fall ist ab hier mit Schritt 4 fortzufahren.

3. Verzahnung grob bestimmen

a. Nutbreite und Abstand der Kreisbogenmittelpunkte festlegen

i. Nuttiefe H ist bereits definiert:

Ist die Nuttiefe H anhand des verfügbaren Bauraumes bereits definiert, ist für eine möglichst einfache Fertigung ($z = 1; D_s/t = 2$) die Nutbreite b gleich der Nuttiefe H zu setzen (siehe Gleichung 10-14):

$$11-2 \quad b = H$$

Das Vielfache n ist in diesem Fall so zu wählen, dass die Kreisbogenmittelpunkte nach Möglichkeit weit außen am Basisrand liegen. Der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte a sollte dennoch kleiner sein als der Wellendurchmesser D (siehe Kapitel 5.3):

$$11-3 \quad a = n \cdot b < D$$

ii. Nuttiefe H ist noch nicht definiert:

Ist die Nuttiefe H noch nicht definiert, geben die folgenden Berechnungsvorschriften Anhaltswerte für die Nutbreite b und den Abstand der Kreisbogenmittelpunkte a bzw. dem Vielfachen n in Abhängigkeit von der Parität an (siehe Kapitel 5.4):

Für die gerade Geometrie gilt:

- Bei Belastung in Vorwärtsrichtung (gemäß Abbildung 5-4):

$$b = \frac{1}{9} \cdot D$$

$$n = 4$$

bzw.

$$a = \frac{4}{9} \cdot D$$

11-4

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

- Bei Belastung in Rückwärtsrichtung oder bei wechselnder Belastungsrichtung

$$b = \frac{1}{9} \cdot D$$

$$n = 6$$

11-5

bzw.

$$a = \frac{2}{3} \cdot D$$

Für die ungerade Geometrie gilt:

$$b = \frac{1}{6} \cdot D$$

$$n = 5$$

11-6

bzw.

$$a = \frac{5}{6} \cdot D$$

b. Nuttiefe und Flankenwinkel festlegen

Für den Fall, dass die Nuttiefe noch nicht feststeht, ist diese für eine möglichst einfache Fertigung gleich der Nutbreite zu setzen (siehe Gleichung 10-14):

$$11-7 \quad H = b$$

Der Flankenwinkel beträgt in diesem Fall $\alpha = 45^\circ$ (siehe Gleichung 10-15).

Wird die Nuttiefe ungleich der Nutbreite gewählt, gilt für den Flankenwinkel (siehe Gleichung 6-98):

$$11-8 \quad \alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{b}{H}\right) \quad \text{für } H \neq b$$

Für eine möglichst wirtschaftliche Fertigung ist der Flankenwinkel mit verfügbaren Werkzeugen abzustimmen, wobei der Flankenwinkel so groß wie möglich gewählt werden sollte.

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Soll ein anderer Flankenwinkel als 45° verwendet werden (die Forderung von $z = 1$ und $D_o/t = 2$ besteht weiterhin), gilt folgendes Verhältnis zwischen b und H :

$$11-9 \quad \frac{b}{H} = 2 - \tan(\alpha) \quad \text{für } \alpha \neq 45^\circ$$

Dabei ist entweder H durch Vorgaben z. B. bezüglich des Bauraumes gegeben oder b anhand von Schritt 3.a bestimmt.

Mit den grob dimensionierten Verzahnungsparametern ist anschließend eine detaillierte Spannungsanalyse zur Beurteilung der Beanspruchbarkeit durchzuführen. Dafür ist an dieser Stelle mit Schritt 5 fortzufahren. Ergibt die Analyse, dass eine Optimierung der Verzahnung notwendig ist, ist bei Schritt 4 erneut für eine Lösung anzusetzen.

4. Verzahnung optimieren

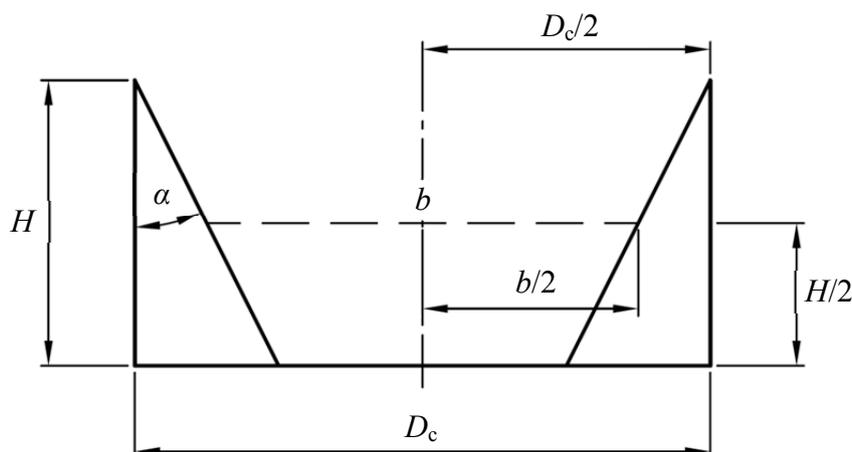
Mittels einer präziseren Bestimmung der Verzahnungsparameter wird die Verzahnung für eine höhere Belastbarkeit optimiert. Der Aufwand hierfür ist um einiges größer, da die Findung des Optimums iterativ ist. Rechnergestützte Programme reduzieren den zeitlichen Aufwand hierfür.

Zunächst ist der Untersuchungsraum für die Nutbreite b und den Abstand der Kreisbogenmittelpunkte a bzw. n festzulegen. Der Untersuchungsraum ist theoretisch frei wählbar. Die einzige Begrenzung gilt für die Nutbreite bei einer geraden Verzahnung (siehe Kapitel 3.1):

$$11-10 \quad b < D \text{ für } n \text{ gerade}$$

Um den Untersuchungsraum zu begrenzen dienen als Orientierung Vorgaben aus der Fertigung.

a. Werkzeugspektrum / Fertigungsvorgaben definieren



D_c – Werkzeug- / Fräserdurchmesser t – Zustellung z – Anzahl der Nutdurchläufe

Abbildung 11-3: Definition der Fertigungsparameter

 11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

1. Die verfügbaren Werkzeuge geben das Werkzeugdurchmesserspektrum an; die Menge der verfügbaren Werkzeugdurchmesser $\{D_c\}$ ist zu definieren.
2. Die Werkzeugdaten geben das mögliche Verhältnis zwischen Werkzeugdurchmesser D_c und Zustellung t an; daran ist das Verhältnis D_c/t zu definieren bzw. das Spektrum $\{D_c/t\}$ aufzustellen; ein Anhaltswert lautet $D_c/t = 2$.
3. Die Werkzeugdaten geben außerdem die Auswahl an möglichen Flankenwinkeln α an; das Spektrum $\{\alpha\}$ ist zu definieren.
4. Ferner ist die akzeptierte Anzahl an Nutdurchläufen z zu definieren, wodurch vor allem die Fertigungszeit beeinflusst wird.
5. Anhand der Grobauslegung ist der benötigte Wellendurchmesser grob festgelegt. Im Zuge von Optimierungsmaßnahmen ist der Untersuchungsraum für D um ein zu bestimmendes Spektrum $\{D\}$ zu erweitern.

Sonderwerkzeuge, deren Geometrie quasi frei wählbar ist, erweitern die Spektren. Hier ist eine große Variantenvielfalt, vor allem in Bezug auf α , denkbar.

Für eine möglichst schnelle und einfache Fertigung wird die Nutzung eines Formfräasers empfohlen, die folgenden Fertigungsparameter sind dabei anzuraten:

- $D_c/t = 2$
- $z = 1$

Mit $\alpha_{\max} = 45^\circ$ folgt daraus (nach Gleichung 10-14):

$$11-11 \quad H = b = \frac{D_c}{2}$$

Mit dieser Formel sind anhand des Spektrums $\{D_c\}$ die Spektren $\{H\}$ und $\{b\}$ zu definieren. Wird der Untersuchungsraum in dieser Form akzeptiert ist mit Schritt 4.d fortzusetzen. Ist eine Erweiterung des Untersuchungsspektrums für b und H nötig, ist mit den nachfolgenden Schritten fortzufahren. Eine Erhöhung des Fertigungsaufwandes geht damit einher.

b. Spektrum für Nuttiefe H bestimmen

Anhand der Fertigungsvorgaben bezüglich der akzeptablen Anzahl der Nutdurchläufe z wird die Nuttiefe bzw. Zahnhöhe H definiert (siehe Gleichung 10-3):

$$11-12 \quad H = z \cdot t \quad \text{mit } t = f(D_c)$$

Die maximal empfohlene Zustellung t ist abhängig vom verwendeten Werkzeug und steht oftmals im Verhältnis zum Werkzeugdurchmesser D_c .

Für alle Zustellungen und jede zulässige Anzahl an Nutdurchläufen z ist das Spektrum $\{H\}$ aufzustellen.

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

c. Spektrum für Nutbreite b definieren

Anhand der Spektren $\{D_c\}$, $\{H\}$ und $\{\alpha\}$ ist das Spektrum für die Nutbreite $\{b\}$ zu definieren. Die Nutbreite b steht mit den entsprechenden Parametern im folgenden Zusammenhang (vgl. Gleichung 10-2):

$$11-13 \quad b = D_c - \tan(\alpha) \cdot H$$

Bei der Aufstellung des Spektrums $\{b\}$ sind folgende Grenzen zu beachten:

$$11-14 \quad b < D \text{ für } n \text{ gerade} \quad (\text{siehe Kapitel 3.1})$$

und

$$11-15 \quad b \leq \tan(\alpha) \cdot H \quad (\text{vgl. Gleichung 6-98})$$

d. Spektrum für n ermitteln

Eine Erhöhung des Abstandes der Radienmittelpunkte ist ab einem bestimmten Verhältnis zu D wirkungslos, weshalb für a bzw. n folgende Obergrenze gilt (siehe Kapitel 5.3):

$$11-16 \quad a \leq D$$

bzw.

$$11-17 \quad n \leq \frac{D}{b}$$

Da n stets ganzzahlig ist, liegt die Untergrenze für n je nach gewählter Parität der Verzahnung bei $n = 1$ oder $n = 2$.

Das Spektrum $\{n\}$ umfasst entsprechend alle ungeraden bzw. geraden Zahlen von $n = 1$ bzw. $n = 2$ bis $n \leq D/b$.

e. Spektrum für a ermitteln

Die ermittelten Spektren für n und b geben das Spektrum $\{a\}$ vor. Es gilt (siehe Kapitel 3.1):

$$11-18 \quad a = n \cdot b$$

Jede Kombination von b , D , a und α aus den definierten Spektren $\{b\}$, $\{D\}$, $\{a\}$ und $\{\alpha\}$ ist für die nachfolgenden Schritte zu verwenden bzw. zu berechnen.

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

5. Rundungsradius am Zahnfuß festlegen

Der Rundungsradius am Zahnfuß R ist festzulegen. Zur Orientierung können z. B. Werkzeugdaten von vorhandenen Fräsern dienen. Es wird folgender Anhaltswert empfohlen (vgl. Gleichung 7-5):

$$11-19 \quad R \approx 0,1 \cdot b$$

Der Wert x_R ist zu bestimmen (vgl. Gleichung 7-3):

$$11-20 \quad x_R = R \cdot (1 - \sin \alpha)$$

6. Fasenhöhe am Zahnkopf festlegen

Die Fasenhöhe am Zahnkopf muss größer sein als x_R (siehe Kapitel 7):

$$11-21 \quad S > x_R$$

Folgendes Verhältnis ist zu empfehlen (vgl. Gleichung 7-6):

$$11-22 \quad S = 1,1 \cdot x_R$$

7. Effektive Zahnhöhe berechnen

Die effektive Zahnhöhe H_{eff} entspricht (siehe Gleichung 7-4):

$$11-23 \quad H_{\text{eff}} = H - 2 \cdot S$$

8. Menge der Kreisbögen anhand des Index m bestimmen

Anhand der Definitionsmenge für den Index m sind die Kreisbögen zu detektieren, die innerhalb der Basisgeometrie liegen. Es gelten folgende Grenzen für m (siehe Gleichungen 4-50 und 4-53):

$$11-24 \quad m_{\min} = \begin{cases} 0, & \text{für } a - D - b < 0 \\ \left\lceil \frac{a - D - b}{2 \cdot b} \right\rceil + 1, & \text{für } a - D - b \geq 0 \end{cases}$$

$$11-25 \quad m_{\max} = \left\lfloor \frac{a - b + D}{2 \cdot b} \right\rfloor - 1$$

Der Index m ist stets ganzzahlig, sodass die Menge der Kreisbögen innerhalb der Basisgeometrie alle ganzzahligen Werte von m_{\min} bis m_{\max} entspricht ($m \in \mathbb{N}$).

Die Anzahl der Kreisbögen innerhalb der Basisgeometrie ist wie folgt zu berechnen (siehe Gleichung 4-54):

$$11-26 \quad m_n = m_{\max} - m_{\min} + 1$$

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

9. Kreisbögen berechnen

Bestimme für jedes m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) den Kreisbogendurchmesser (nach Gleichung 4-44):

$$11-27 \quad d_m = b \cdot (1 + 2m)$$

Bestimme r_{\max} für jedes d_m (nach Gleichung 4-5):

$$11-28 \quad r_{\max,m} = \begin{cases} \frac{a + d_m}{2}, & \text{für } a + d_m < D \\ \frac{D}{2}, & \text{für } a + d_m \geq D \end{cases}$$

Bestimme den Winkel φ_{\max} für jeden Kreisbogen ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) (nach Gleichung 4-22):

$$11-29 \quad \varphi_{\max,m} = \arccos \left(\frac{r_{\max,m}^2 + \frac{a^2 - d_m^2}{4}}{ar_{\max,m}} \right)$$

Bestimme die projizierte Länge $l_{\text{proj } m}$ jedes Kreisbogens ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) (nach Gleichung 5-58):

$$11-30 \quad l_{\text{proj } m} = r_{\max,m} - \left| \frac{a - d_m}{2} \right|$$

Berechne die projizierte Fläche jeder Zahnflanke ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) (nach Gleichung 5-59):

$$11-31 \quad A_{\text{proj } m} = l_{\text{proj } m} \cdot H_{\text{eff}}$$

Bestimme für jede Zahnflanke ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) die Entfernung des Kraftangriffspunktes vom Ursprung (nach Gleichung 5-66):

$$11-32 \quad r_m = \frac{|a - d_m|}{2} + l_{\text{proj } m} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot |a - d_m| + \frac{2}{3} \cdot l_{\text{proj } m}}{|a - d_m| + l_{\text{proj } m}}$$

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

10. Flächenpressung an den einzelnen Kreisbögen berechnen

Ermittle die Flächenpressung an jedem Kreisbogen ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) (nach Kapitel 5.2):

Für n ist ungerade gilt:

$$11-33 \quad p_m = \frac{T \cdot r_m}{A_{\text{proj } m}} \cdot \left(\sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} r_m^2 \right)^{-1}$$

Für n ist gerade und m_{\min} und m_{\max} sind gerade oder ungerade gilt:

$$11-34 \quad p_m = \frac{T \cdot r_m}{2 \cdot A_{\text{proj } m}} \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

bzw. bei umgekehrter Drehrichtung

$$11-35 \quad p_m = \frac{T \cdot r_m}{2 \cdot A_{\text{proj } m}} \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}-1}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

Für n ist gerade und m_{\min} ist gerade und m_{\max} ist ungerade oder m_{\min} ist ungerade und m_{\max} ist gerade gilt:

$$11-36 \quad p_m = \frac{T \cdot r_m}{2 \cdot A_{\text{proj } m}} \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}-1}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

bzw. bei umgekehrter Drehrichtung

$$11-37 \quad p_m = \frac{T \cdot r_m}{2 \cdot A_{\text{proj } m}} \cdot \left(\sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} r_{2 \cdot m}^2 \right)^{-1}$$

11. Maximale Flächenpressung bestimmen

Finde aus allen ermittelten Flächenpressungen die Flächenpressung, die maximal ist (siehe Gleichung 5-89):

$$11-38 \quad \max\{p_m\} = p_{\max} \leq p_{\text{zul}}$$

Der Index der maximalen Flächenpressung entspricht dem Index des Kreisbogens, der maximal belastet wird. Die zulässige Flächenpressung ist Tabelle 11-1 zu entnehmen.

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

12. Flankelwinkel α' bestimmen

Bestimme für jedes m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) die x -Koordinate des Kraftangriffspunktes an der jeweiligen Zahnflanke (nach Gleichung 6-64):

$$11-39 \quad x_m = \frac{1}{a} \cdot \left(r_m^2 - \frac{d_m^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right)$$

Bestimme für jedes m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) den Winkel γ , der die Richtung der auf die entsprechende Zahnflanke wirkenden Umfangskraft angibt (nach Gleichung 6-65):

$$11-40 \quad \gamma_m = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan} \left(\frac{\frac{a}{2} - x_m}{\sqrt{\frac{d_m^2}{4} - \left(x_m - \frac{a}{2}\right)^2}} \right) + \operatorname{atan} \left(\frac{-x_m}{\sqrt{\frac{d_m^2}{4} - \left(x_m - \frac{a}{2}\right)^2}} \right)$$

Bestimme den perspektivisch veränderten Flankenwinkel α' für jedes m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) (nach Gleichung 6-66):

$$11-41 \quad \alpha'_m = \operatorname{atan} \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \gamma_m} \right)$$

13. Mindestens benötigten Flächenpressung infolge der Vorspannkraft bestimmen

Berechne für jedes gültige m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) den Winkel ε_m jedes Kreisbogens k_m (nach Gleichung 6-84):

$$11-42 \quad \varepsilon_m = \pi - \arcsin \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\sin(\varphi_{\max,m})}{\sqrt{r_{\max,m}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - r_{\max,m} \cdot a \cdot \cos(\varphi_{\max,m})}} \right) - \varphi_{\max,m}$$

Berechne für jedes gültige m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) die aus Richtung der Vorspannkraft projizierte Flankenfläche (nach Gleichung 6-74):

$$11-43 \quad A_{V,m} = \frac{\varepsilon_m}{2} \cdot (1 + 2 \cdot m) \cdot b \cdot H \cdot \tan(\alpha)$$

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

Berechne für jedes m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) die Reibwinkel (nach Gleichungen 6-12, 6-13, 6-17 und 6-23):

$$11-44 \quad \rho_{U,m} = \begin{cases} -\operatorname{atan}(\mu), & \text{für } \alpha'_m < -\operatorname{atan}(\mu) \\ \alpha'_m, & \text{für } |\alpha'_m| \leq \operatorname{atan}(\mu) \\ \operatorname{atan}(\mu), & \text{für } \alpha'_m > \operatorname{atan}(\mu) \end{cases}$$

$$11-45 \quad \rho_{V,m} = \begin{cases} -90^\circ - \alpha'_m, & \text{für } \alpha'_m < \operatorname{atan}(\mu) - 90^\circ \\ -\operatorname{atan}(\mu), & \text{für } 0^\circ \geq \alpha'_m \geq \operatorname{atan}(\mu) - 90^\circ \\ \operatorname{atan}(\mu), & \text{für } 0^\circ \leq \alpha'_m \leq 90^\circ - \operatorname{atan}(\mu) \\ 90^\circ - \alpha'_m, & \text{für } \alpha'_m > 90^\circ - \operatorname{atan}(\mu) \end{cases}$$

Berechne die an der einzelnen Flanke ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) mindestens benötigte Vorspannkraft in Abhängigkeit des vorliegenden Falls (siehe Kapitel 6.3.5):

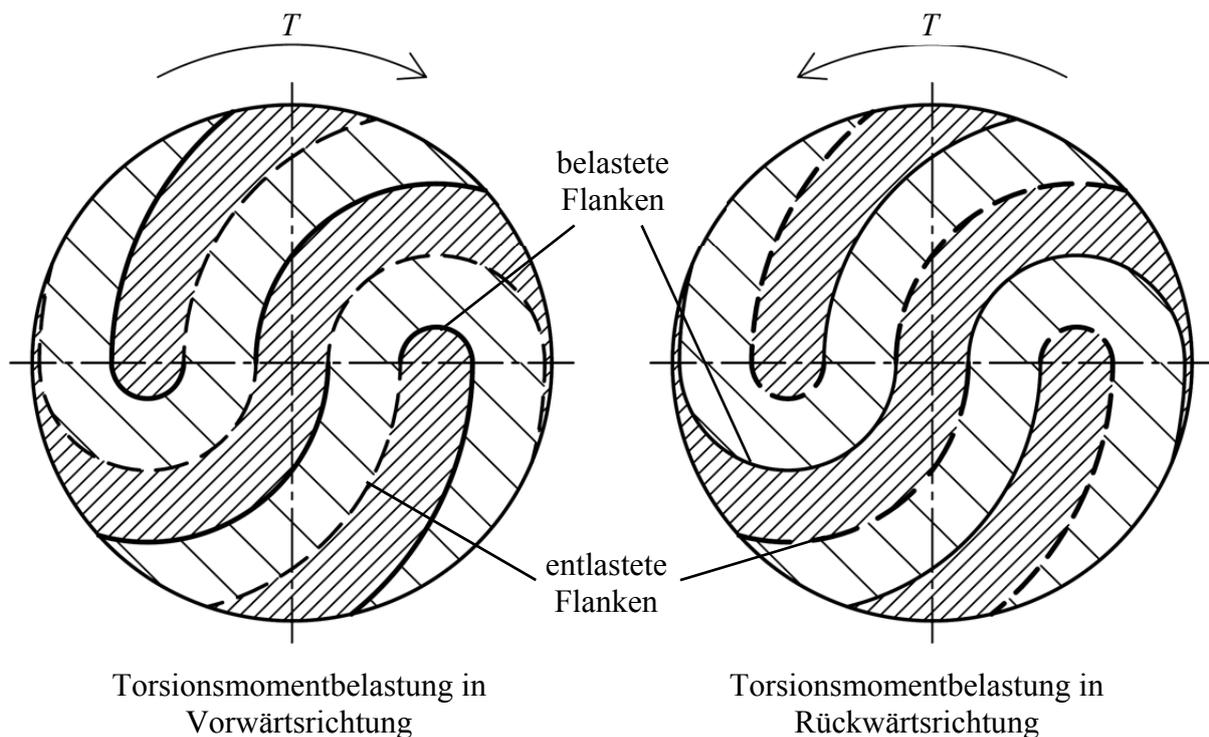


Abbildung 11-4: Definition der drehrichtungsabhängigen Belastung der Flanken

- Bei (dynamischer) Torsionsmomentbelastung nur in Vorwärtsrichtung (gemäß Abbildung 11-4) für jedes ungerade m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$):

$$11-46 \quad F_{V \min,m} = F_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

und für jedes gerade m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$):

$$11-47 \quad F_{V \min, m} = F_m \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

- Bei (dynamischer) Torsionsmomentbelastung nur in Rückwärtsrichtung (gemäß Abbildung 11-4) für jedes gerade m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$):

$$11-48 \quad F_{V \min, m} = F_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

und für jedes ungerade m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$):

$$11-49 \quad F_{V \min, m} = F_m \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

- Bei (dynamischer) Torsionsmomentbelastung aus beiden Drehrichtungen für jedes m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$):

$$11-50 \quad F_{V \min, m I} = p_m \cdot A_{\text{proj } m} \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

$$11-51 \quad F_{V \min, m II} = p_m \cdot A_{\text{proj } m} \cdot \frac{\sin(\rho_U)}{\sin(\rho_V)} \cdot \frac{\sin(\alpha'_m + \rho_V)}{\cos(\alpha'_m - \rho_U)}$$

Dabei ist für $F_{V \min, m}$ jeweils der größere beider Werte zu setzen (siehe Gleichung 6-87):

$$11-52 \quad F_{V \min, m} = \max\{F_{V \min, m I}; F_{V \min, m II}\}$$

Bestimme die Flächenpressung an jeder Zahnflanke ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) infolge der mindestens benötigten Vorspannkraft (nach Gleichung 6-88):

$$11-53 \quad p_{V \min, m} = \frac{F_{V \min, m}}{A_{V, m}}$$

Suche aus der Menge aller $p_{V \min, m}$ den größten Wert heraus. Ggf. ist der Wert für die Pressung an den Flanken infolge der Vorspannkraft entsprechend der Realisierbarkeit anzupassen (vgl. Gleichung 6-89):

$$11-54 \quad p_V = \max\{p_{V \min, m}\} = \text{konst.} \leq p_{\text{zul}}$$

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

14. Bestimmung der gesamten Vorspannkraft

Berechne die gesamte Vorspannkraft, die auf das Verbindungselement wirkt (nach Gleichung 6-91):

$$11-55 \quad F_{V,ges} = p_V \cdot 2 \cdot \sum_{m=m_{min}}^{m_{max}} A_{V,m}$$

Prüfe das Ergebnis auf Realisierbarkeit; ggf. ist eine Anpassung erforderlich. Bei Anpassung von $F_{V,ges}$ ist die Pressung p_V erneut (mit dem neuen Wert von $F_{V,ges}$) zu berechnen (vgl. Gleichung 6-91):

$$11-56 \quad p_V = \frac{F_{V,ges}}{2} \cdot \left(\sum_{m=m_{min}}^{m_{max}} A_{V,m} \right)^{-1}$$

Berechne die an der einzelnen Flanke ($m_{min} \leq m \leq m_{max}$) tatsächlich wirkende Vorspannkraft (mit dem aktuellen Wert von p_V ; siehe Gleichung 6-90):

$$11-57 \quad F_{V,m} = p_V \cdot A_{V,m}$$

15. Druckspannungen an den Zahnflanken berechnen

Bestimme für jedes m ($m_{min} \leq m \leq m_{max}$) die Druckspannung, um die Beanspruchung jeder einzelnen Zahnflanke zu ermitteln (siehe Gleichung 6-95):

$$11-58 \quad \sigma_{D,m} = \cos \alpha' \cdot \left(p_m \cdot \frac{\cos(\rho_U)}{\cos(\alpha' - \rho_U)} + \frac{F_{V,m}}{A_{proj}} \cdot \frac{\cos(\rho_V)}{\sin(\alpha' + \rho_V)} \right)$$

16. Maximale Druckspannung bestimmen und vergleichen

Bestimme aus der Menge aller Druckspannungen pro Zahnflanke die höchste vorkommende Druckspannung (siehe Gleichung 6-96):

$$11-59 \quad \max\{\sigma_{D,m}\} = \sigma_{D \max} \leq \sigma_{D \text{ zul}}$$

mit

$$11-60 \quad \sigma_{D \text{ zul}} = \frac{R_e}{S} \quad \begin{array}{l} R_e - \text{Streckgrenze} \\ S - \text{Sicherheitsfaktor} \end{array}$$

Wird die zulässige Druckspannung überschritten, ist die Verzahnung in der Form nicht geeignet. Je nach Flexibilität sind die Verzahnungsparameter anzupassen, wobei vornehmlich eine Änderung der Nuttiefe H oder eine Änderung des Wellendurchmessers D die größten Effekte erzielen. Wird mit einer Verzahnung eine maximale Druckspannung erreicht, die unterhalb der zulässigen Druckspannung liegt, ist diese in die vorläufige Menge der zulässigen Verzahnungsgeometrien aufzunehmen.

17. Torsionsspannungen bestimmen

a. Torsionsflächenmoment des Verzahnungsbildes bestimmen

Bei einem ungeraden Verzahnungsbild (n ist ungerade) ist das Torsionsflächenmoment wie folgt zu berechnen (siehe Gleichung 4-83):

$$4-83 \quad I_{tA/B} = I_{t,m \max+1} = \frac{D^4}{64} \cdot \pi$$

Bei einem geradem Verzahnungsbild (n ist gerade) ist zunächst für jedes m ($m_{\min} \leq m \leq m_{\max}$) das einzelne Torsionsflächenmoment $I_{t,m}$ zu berechnen (siehe Gleichung 4-74):

$$I_{t,m} = \frac{d_m^2 (d_m^2 + 2a^2) \cdot \operatorname{asin} \left(\frac{4r_{\max,m}^2 - d_m^2 - a^2}{2ad_m} \right)}{64}$$

$$- \frac{r_{\max,m}^4 \cdot \operatorname{asin} \left(\frac{4r_{\max,m}^2 - d_m^2 + a^2}{4ar_{\max,m}} \right)}{4}$$

10-59

$$-(4r_{\max,m}^2 + 5d_m^2 + a^2)$$

$$\cdot \frac{\sqrt{-16r_{\max,m}^4 + 8r_{\max,m}^2 \cdot (d_m^2 + a^2) - a^4 + d_m^2 \cdot (2a^2 - d_m^2)}}{256}$$

$$+ \frac{\pi d_m^2 (d_m^2 + 2a^2)}{128} + \frac{\pi r_{\max,m}^4}{8}$$

Das gesamte Torsionsflächenmoment des geraden Verzahnungsbildes ist dann wie folgt zu bestimmen (siehe Kapitel 4.2.2):

Für m_{\min} und m_{\max} sind gerade oder ungerade gilt:

$$4-75 \quad I_{tA/B} = 2 \cdot \left[\frac{D^4}{64} \pi + \sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} I_{t,2m} - I_{t,2m+1} \right]$$

11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

bzw. (für den Verzahnungspartner; $A_{S A} \neq A_{S B}$)

$$4-76 \quad I_{t B/A} = 2 \cdot \left[\sum_{m=\frac{m_{\min}}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} I_{t,2 \cdot m+1} - I_{t,2 \cdot m} \right]$$

mit

$$4-77 \quad I_{t, m_{\max}+1} = \frac{D^4}{64} \cdot \pi$$

Für m_{\min} ist gerade und m_{\max} ist ungerade oder m_{\min} ist ungerade und m_{\max} ist gerade gilt:

$$4-78 \quad I_{t A/B} = 2 \cdot \left[I_{t, m_{\min}} + \sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} I_{t,2 \cdot m+1} - I_{t,2 \cdot m} \right]$$

bzw. (für den Verzahnungspartner; $A_{S A} \neq A_{S B}$)

$$4-79 \quad I_{t B/A} = 2 \cdot \left[\sum_{m=\frac{m_{\min}+1}{2}}^{\frac{m_{\max}}{2}} I_{t,2 \cdot m} - I_{t,2 \cdot m-1} \right]$$

mit

$$4-80 \quad I_{t, m_{\max}+1} = \frac{D^4}{64} \cdot \pi$$

Zur Kontrolle der Rechenergebnisse ist die Einhaltung nachstehender Gleichung zu prüfen. Wird die Gleichung nicht eingehalten, liegt ein Rechenfehler vor:

$$4-81 \quad I_{t A} + I_{t B} \stackrel{!}{=} \frac{D^4}{32} \cdot \pi$$

Für die folgenden Berechnungen ist das kleinere der beiden Torsionsflächenmomente $I_{t A}$ oder $I_{t B}$ zu nutzen. Es gilt (siehe Gleichung 4-87):

$$4-86 \quad I_t = \min\{I_{t A}, I_{t B}\}$$

 11. Formulierung eines Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung

b. Maximale Torsionsspannung in der Verzahnung bestimmen

Die maximale Torsionsspannung in der Verzahnung ist wie folgt zu berechnen (vgl. Gleichung 4-85):

$$4-85 \quad \tau_{t \max} = \frac{T \cdot D}{I_t \cdot 2} \leq \tau_{t \text{ zul}}$$

mit

$$11-61 \quad \tau_{t \text{ zul}} = \frac{R_e}{2 \cdot S} = \frac{\sigma_{D \text{ zul}}}{2} \quad \begin{array}{l} R_e - \text{Streckgrenze} \\ S - \text{Sicherheitsfaktor} \end{array}$$

Wird die zulässige Torsionsspannung überschritten, ist die Verzahnung in der Form nicht geeignet. Je nach Flexibilität sind die Verzahnungsparameter anzupassen, wobei vornehmlich eine Änderung des Wellendurchmessers D den größten Effekt erzielt. Wird mit einer Verzahnung eine maximale Torsionsspannung erreicht, die unterhalb der zulässigen Torsionsspannung liegt, ist diese in die vorläufige Menge der zulässigen Verzahnungsgeometrien aufzunehmen.

18. Druckspannungen und Torsionsspannungen gegenüberstellen

Die ermittelte maximale Druckspannung ist mit der maximalen Torsionsspannung zu vergleichen. Bei großen Unterschieden (ab einer Größenordnung von ca. Faktor 5), ist die jeweils kleinere Beanspruchung bedenkenlos vernachlässigbar. Die größere Beanspruchung ist dann maßgebend für die Belastbarkeit der Verzahnung.

Sind die Unterschiede zwischen den Druckspannungen an den Zahnflanken und den Torsionsspannungen im Zahnfußbereich der vorläufig zulässigen Verzahnungen nicht groß genug, sodass eine der beiden Beanspruchungen vernachlässigbar ist, ist die Vergleichsspannung zu bilden.

19. Vergleichsspannung berechnen

Zur Bestimmung der Vergleichsspannung ist wie folgt vorzugehen:

1. Wähle den Winkel α'_m , der für $\sigma_{D \max}$ gilt
(Index m entspricht dem Index von $\sigma_{D m} = \sigma_{D \max}$; α'_m siehe Punkt 12)
2. Berechne die Vergleichsspannung (nach Gleichung 8-9):

$$11-62 \quad \Leftrightarrow \sigma_{VG} = \sqrt{\sigma_{D \max}^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin 2\alpha'_m}{2}\right) + 3 \cdot \tau_{t \max}^2} \leq \sigma_{D \text{ zul}}$$

mit

$$11-63 \quad \sigma_{D \text{ zul}} = \frac{R_e}{S} \quad \begin{array}{l} R_e - \text{Streckgrenze} \\ S - \text{Sicherheitsfaktor} \end{array}$$

Wird die zulässige Druckspannung überschritten, ist die Verzahnung in der Form nicht geeignet und muss aus der vorläufigen Menge der zulässigen Verzahnungen genommen werden. Die übrigen Verzahnungen ergeben die verbliebene Menge der zulässigen Verzahnungsgeometrien.

20. Auswahl der Verzahnung

Aus der verbliebenen Menge der zulässigen Verzahnungsgeometrien ist diejenige zu wählen, die die günstigste Fertigung aufweist. Dies trifft vor allem auf Verzahnungen zu, die eine vergleichsweise große Nutbreite aufweisen.

Der aufgestellte Algorithmus ermöglicht es, die Beanspruchungen der Kreisbogen-Stirnverzahnung bei vorgegebener Belastung zu beurteilen. Zusätzlich können mit dem Algorithmus Verzahnungsparameter, die noch nicht bekannt oder frei wählbar sind, dimensioniert werden.

Zur Beurteilung der Praxistauglichkeit der entwickelten Formeln, Zusammenhänge und Abhängigkeiten werden experimentelle Untersuchungen durchgeführt, wodurch eine Evaluation der mit dem aufgestellten Algorithmus berechneten Ergebnisse stattfindet. Gegebenenfalls sind die entwickelten Formeln durch empirisch gewonnene Zusammenhänge anzupassen.

12. Experimentelle Untersuchungen

In den Experimenten werden Proben mit unterschiedlichen Verzahnungsgeometrien mit quasistatischem Torsionsmoment beaufschlagt. Anhand der gemessenen Daten soll die Belastbarkeit der Verzahnung in Abhängigkeit von den Verzahnungsparametern bestimmt werden.

12.1 Versuchsaufbau

Zur experimentellen Bestimmung der Belastbarkeit der Kreisbogen-Stirnverzahnung bei Torsionsmomentübertragung werden zylindrische Proben gegeneinander verdreht und sowohl das aufgebrachte Torsionsmoment als auch der relative Verdrehwinkel der Verzahnung erfasst. Daraus wird ein Torsionsmoment-Verdrehwinkel-Diagramm erstellt, das dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus dem Zugversuch nachempfunden ist. Aus diesem Diagramm sind in analoger Weise zum Spannungs-Dehnungs-Diagramm markante Punkte zu lokalisieren, mit denen Aussagen über die Belastbarkeit getroffen werden können. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist solch ein Punkt die Fließgrenze, die den Übergang von der elastischen in die plastische Verformung kennzeichnet. Für die Auswertung der Torsionsversuche ist ein vergleichbares Kriterium zu nutzen.

Die in den Versuchen verwendeten Proben bestehen aus zwei je ca. 300 mm langen Wellen, die per Kreisbogen-Stirnverzahnung miteinander verbunden sind. Eine zentrale Durchgangsbohrung in den Proben ermöglicht die axiale Verspannung beider Fügepartner per Gewindestange und Schraubenmutter. Die Gestalt der Probe ist nachstehender Graphik zu entnehmen:

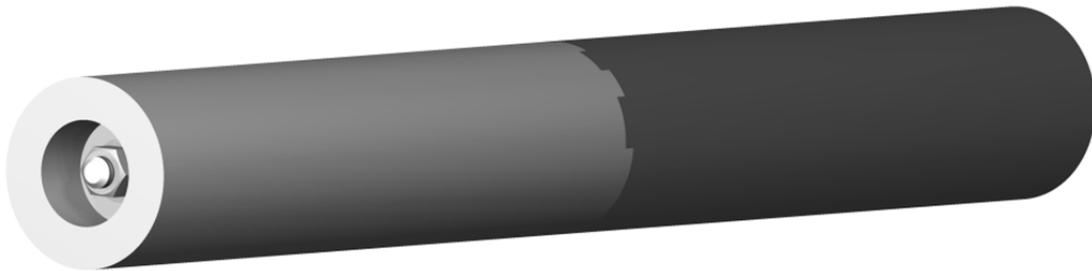


Abbildung 12-1: Torsionsprobe [Müll16]

Die zylinderförmigen Proben werden in einen Versuchsstand eingespannt. Dabei ist jede Probenhälfte mittels einer Spannsystemverbindung mit einem Hebelarm kraftschlüssig verbunden. Während einer der beiden Hebelarme von einem Hydraulikzylinder angetrieben wird, stützt der andere das Reaktionsmoment am Gestell des Versuchsstandes ab. Der Hydraulikzylinder wird von einer Handpumpe angesteuert. Die einzelnen Probenhälften sind jeweils vollständig gelagert, um die entstehenden Querkräfte ableiten zu können. So wird sichergestellt, dass die Verzahnung frei von Querkräften und Biegemomenten ist. Die beiden Lagersitze an der Verbindungsstelle der Probenhälften sind fluchtend zueinander angeordnet, um die Verzahnung möglichst frei von Spannungen, die aus einem radialen oder winkligen Versatz resultieren, zu halten. Auf diese Weise wird gewährleistet, dass die zu untersuchende Verzahnung möglichst nur Torsionsspannungen erfährt. Die nachstehenden Abbildungen verdeutlichen den mechanischen Aufbau des Versuchsstandes:

12. Experimentelle Untersuchungen

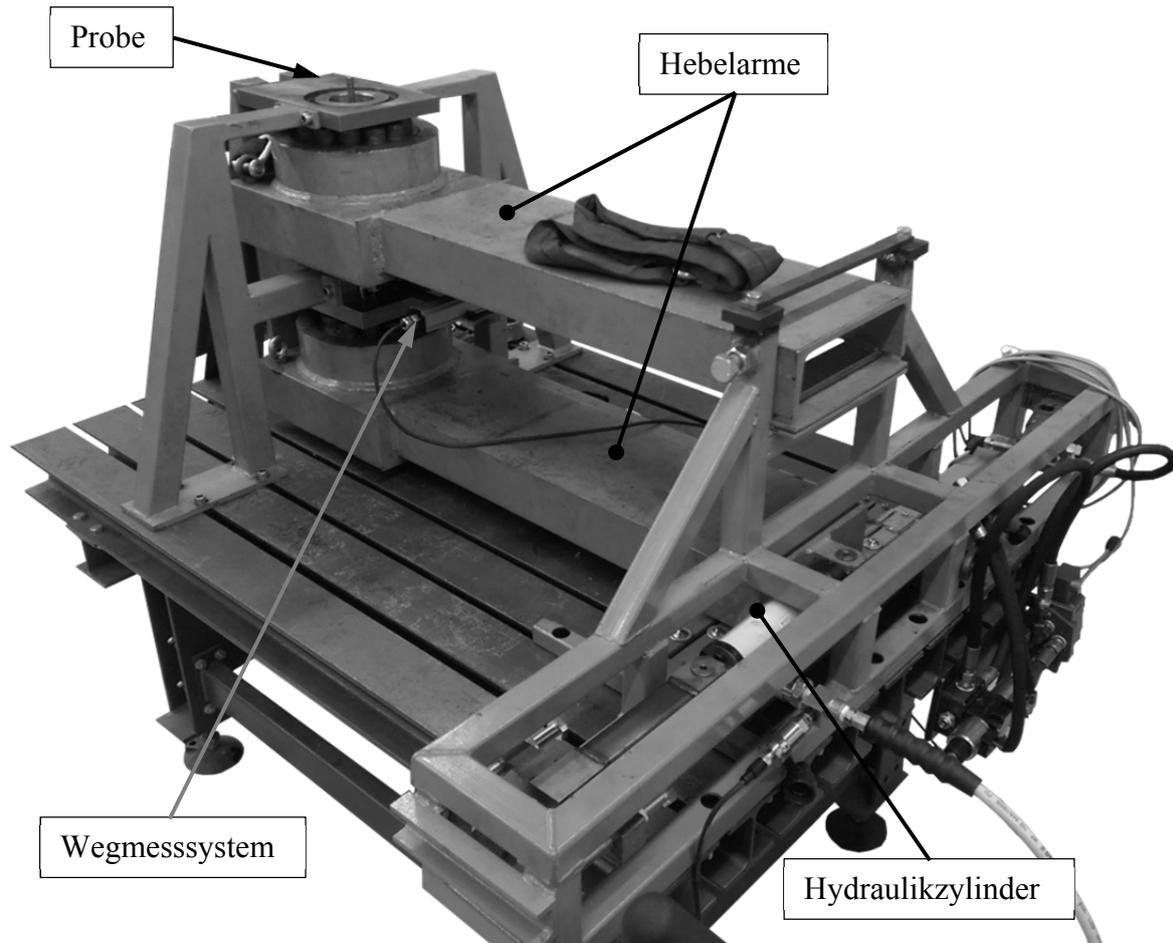


Abbildung 12-2: Fotografie des errichteten Torsionsversuchsstandes

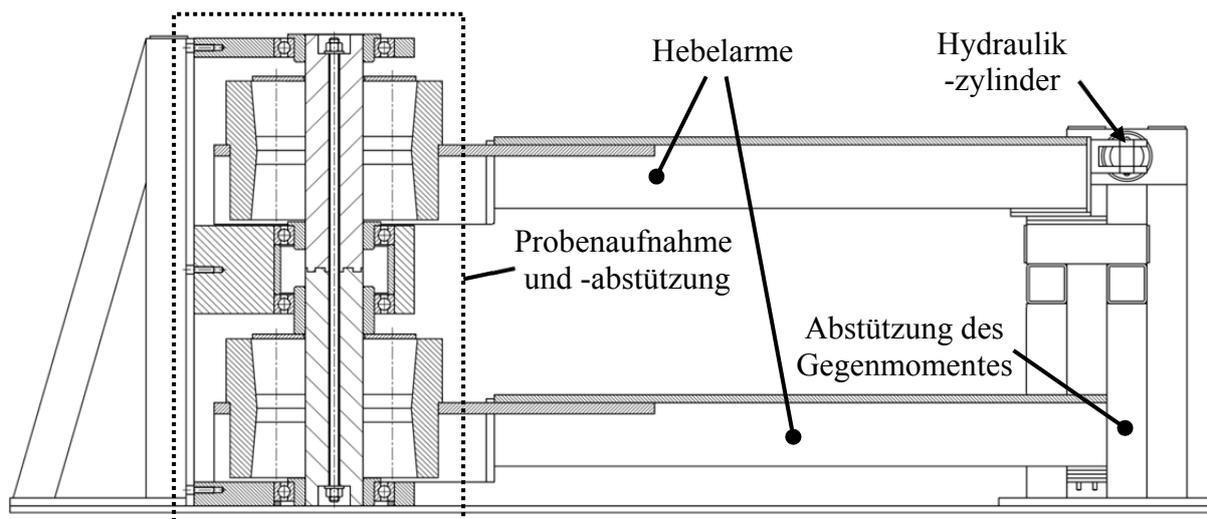


Abbildung 12-3: Skizze des gesamten Versuchsstandes in der Schnittansicht

12. Experimentelle Untersuchungen

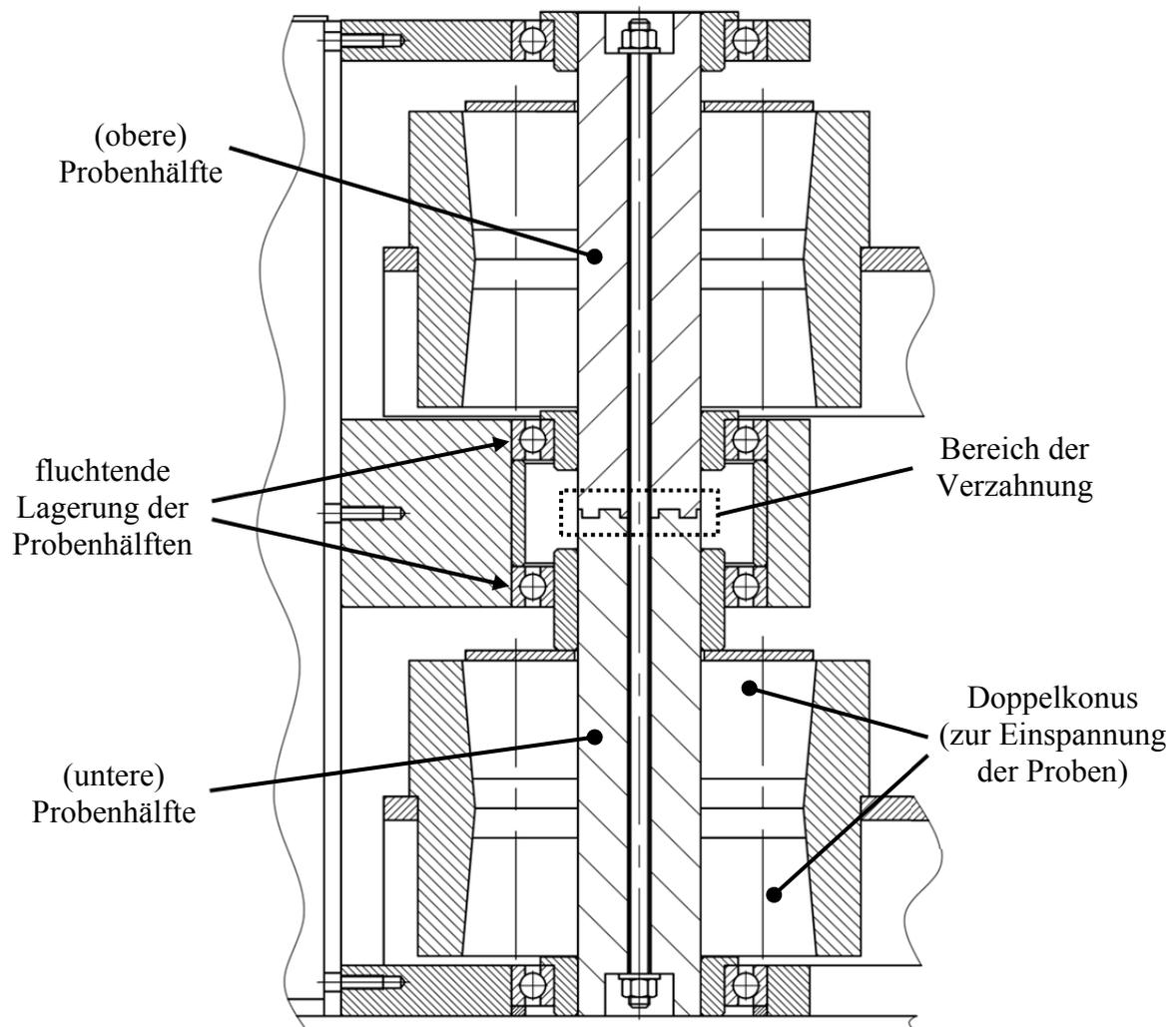


Abbildung 12-4: Ausschnitt des Versuchszustandes zur Verdeutlichung der Einspannung und der konzentrischen Lagerung beider Probenhälften

Die Erfassung des Verdrehwinkels geschieht mittels eines Wegmesssystems, das mit der Torsionsprobe per Klemmverbindung verbunden wird. Dabei ist je eine Probenhälfte mit einem Klemmring versehen, von dem jeweils ein Ausleger abgeht. An den Auslegern ist das Wegmesssystem befestigt. Theoretisch muss der Verdrehwinkel in der Mitte der Verzahnung (bei $h_M = H/2$) gemessen werden, weil sonst zusätzlich die Verdrillung des Trägermaterials aufgenommen wird. Da dies praktisch schwer umsetzbar ist, sind die Klemmringe nahe der Verzahnung platziert, sodass der Verdrehwinkel in guter Näherung gemessen wird. Der Aufbau der Vorrichtung ist in der nachstehenden Abbildung verdeutlicht:

12. Experimentelle Untersuchungen

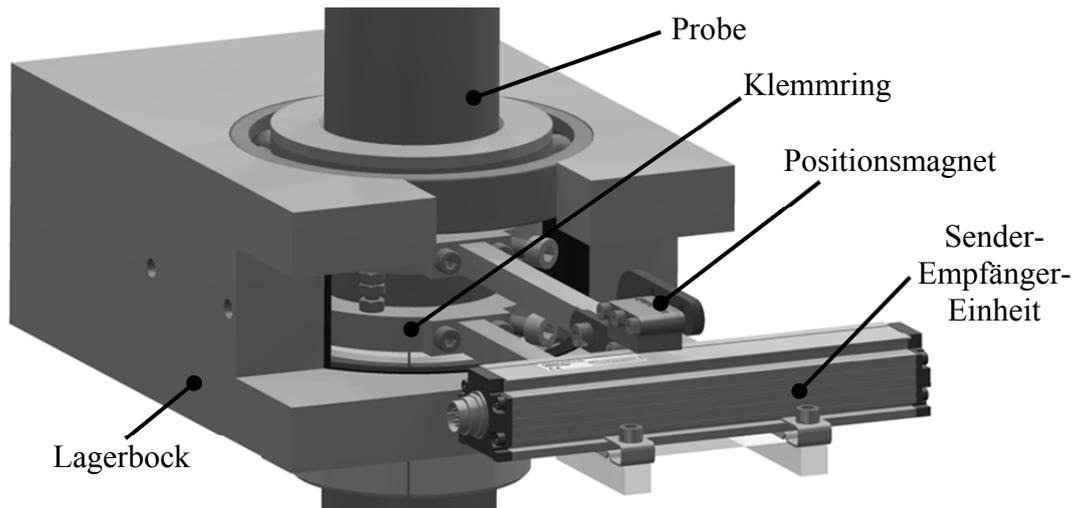


Abbildung 12-5: Aufbau zur Wegerfassung [Müll16]

Das Wegmesssystem besteht aus einem magnetostriktiven Wegaufnehmer, der die Entfernung zwischen zwei Punkten anhand der Laufzeit eines durch einen Permanentmagneten reflektierten Impulses kontaktlos erfasst. Dabei sind die Sender-Empfänger-Einheit und der Permanentmagnet je mit einem Ausleger verbunden, sodass sie bei Verdrehung der Probenhälften gegeneinander verschoben werden. Das Messsystem arbeitet verschleißfrei, ist unempfindlich gegenüber Einflüssen von außen (Temperatur, Erschütterungen, Verschmutzungen) und relativ kostengünstig. Die Sender-Empfänger-Einheit ist so ausgerichtet, dass sie senkrecht zum Ausleger steht (siehe Abbildung 12-6). Der durch die Rotation entstehende seitliche Versatz des Magneten in Bezug auf die Längsachse des Messsystems beeinträchtigt aufgrund der relativ niedrigen Auslenkung die Messung nicht. Mit trigonometrischen Zusammenhängen wird die ausgegebene Strecke des Wegmesssystems in den relativen Verdrehwinkel $\Delta\varphi$ umgerechnet. Mit Bezug auf Abbildung 12-6 gilt:

$$12-1 \quad \Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{x}{l + \frac{D}{2}}\right)$$

- mit x – ausgegebene Länge des Messsystems
 $\Delta\varphi$ – relativer Verdrehwinkel beider Hebelarme
 l – Länge des Auslegers
 D – Durchmesser der Probe
 Δy – seitlicher Versatz aufgrund der Rotationsbewegung

12. Experimentelle Untersuchungen

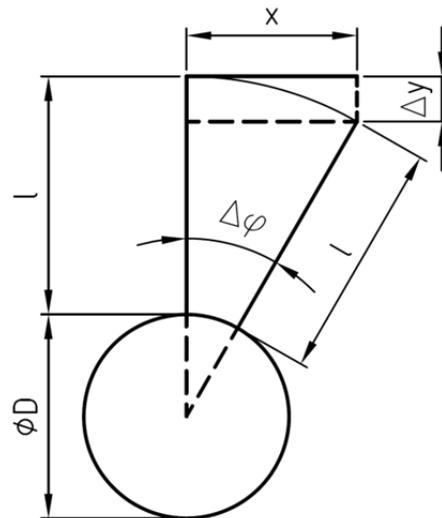


Abbildung 12-6: Trigonometrische Beziehungen zwischen dem Verfahrweg x und dem Verdrehwinkel $\Delta\varphi$

Zur Ermittlung des aufgebracht Torsionsmomentes wird mit einem Absolutdruckaufnehmer der Druck im hydraulischen System direkt am Hydraulikzylinder gemessen. Das übertragene Torsionsmoment wird mit den bestehenden Flächen- und Hebelarmverhältnissen berechnet. Es besteht folgender Zusammenhang:

$$12-2 \quad p = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot T}{l \cdot \pi \cdot d^2}$$

$$12-3 \quad \Leftrightarrow T = p \cdot \frac{l \cdot \pi \cdot d^2}{4}$$

- mit p – ausgegebener Druck des Messsystems
 d – Kolbendurchmesser des Hydraulikzylinders
 l – Länge des Hebelarmes
 T – Torsionsmoment

Unberücksichtigt in der Formel 12-3 ist die Änderung der Hebelarmverhältnisse, die aufgrund der Schwenkbewegung entsteht und abhängig vom Schwenkwinkel bzw. Zylinderhub ist. Außerdem erfahren die Hebelarme aufgrund der Belastung eine Verformung, die nicht bestimmt ist und die Hebelarmverhältnisse ebenfalls ändert. Der Fehler, der dadurch entsteht, ist aufgrund der kleinen Schwenkwinkel marginal, sodass er vernachlässigbar ist. Die betrachtete Gleichung ist demnach für die experimentellen Untersuchungen ausreichend genau. Nachstehende Skizze veranschaulicht die Problematik:

12. Experimentelle Untersuchungen

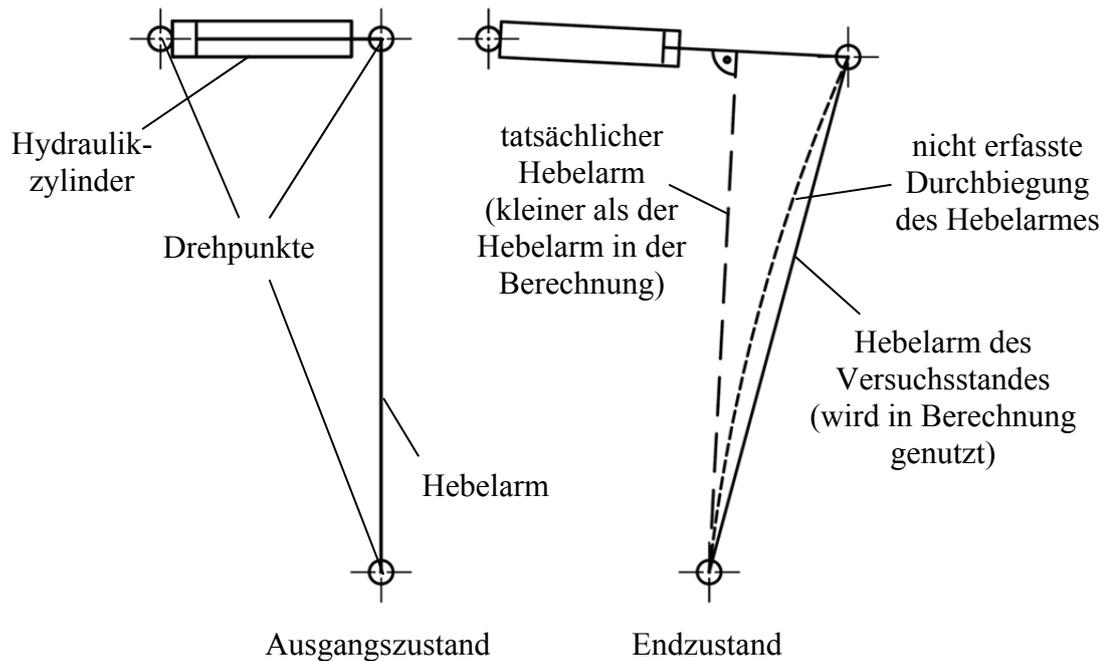


Abbildung 12-7: Änderung der Hebelarmverhältnisse aufgrund der bestehenden Kinematik am Versuchsstand

Die gemessenen Daten zum relativen Verdrehwinkel und zum Torsionsmoment werden während der Messung jeweils mit einem Zeitstempel versehen. Über diesen Zeitstempel werden die einzelnen Daten miteinander verknüpft, sodass ein Verlauf des Torsionsmomentes über den relativen Verdrehwinkel entsteht.

12.2 Versuchsplanung

In den experimentellen Untersuchungen soll die Belastbarkeit der Kreisbogen-Stirnverzahnung bei verschiedenen Verzahnungsgeometrien praktisch ermittelt werden. Aus den Ergebnissen sind Abhängigkeiten zwischen den gewählten Verzahnungsparametern und der Belastbarkeit herzuleiten. Die Auswahl der zu testenden Verzahnungsgeometrien wird mit Hilfe des *Designs of Experiments (DoE)*, einer Methode der statistischen Versuchsplanung, getätigt.

Das DoE hilft bei der Planung und Auswertung von Versuchen mit dem Ziel, die Durchführung der Versuche mit möglichst geringem Aufwand zu erledigen und ein Maximum an Erkenntnisgewinn zu erreichen. Idealerweise sind nach Abschluss der Versuchsdurchführung mit den ermittelten Daten und der entsprechenden Auswertung die Effekte der Einflussgrößen sowohl im Einzelnen als auch in Korrelation erkennbar. Die Werkzeuge des DoE ermöglichen die Generierung eines Vorhersagemodells, das innerhalb des definierten Untersuchungsraumes gültig ist. Mit dem Vorhersagemodell sind die Auswirkungen von beliebig gewählten Parametern (solange diese innerhalb des definierten Untersuchungsraumes liegen) auf die Zielgröße mathematisch bestimmbar. Auf diesem Wege sind auch optimale Parametereinstellungen ermittelbar. Bei der Durchführung des DoE unterstützt die Software *JMP* von der Firma *SAS*, die unter anderem aus den eingegebenen Faktoren und deren definierten Grenzen einen Versuchsplan erstellt und nach erfolgter Versuchsdurchführung die Signifikanz einzelner Parameter ermittelt sowie eine Vorhersageformel berechnet.

12. Experimentelle Untersuchungen

Um die Versuchsplanung für die anstehenden Torsionsversuche möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten, werden zunächst nur die Einflüsse der zweidimensionalen Parameter auf die Belastbarkeit der Verzahnung betrachtet. Erste daraus abgeleitete Erkenntnisse können daraufhin in die Planung einer weiteren Versuchsreihe, in der auch die Einflüsse der dreidimensionalen Verzahnungsparameter untersucht werden, einfließen. Bereits als insignifikant identifizierte Parameter beispielsweise sind dann nicht weiter zu betrachten. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass nicht zu viele Variablen auf einmal in die Versuchsplanung eingehen. Die Versuchsanzahl wird dadurch verringert, und die Zusammenhänge zwischen einzelnen Ursachen und deren Wirkung werden deutlicher. Innerhalb der ersten Versuche werden demzufolge die Nutbreite b , der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte a sowie der Basisdurchmesser D variiert. Die übrigen Parameter der Verzahnung (Flankenwinkel α , Nuttiefe H , Rundungsradius R und die Fase mit der Fashöhe S) bleiben konstant. Für die konstant bleibenden Verzahnungsparameter sind folgende Werte gewählt:

$$\alpha = 0^\circ$$

$$H = 7,5 \text{ mm } (H_{\text{eff}} = 5 \text{ mm})$$

$$R = 1 \text{ mm}$$

$$S = 1,5 \text{ mm (Fase } 1,5 \times 45)$$

Weitere konstant gehaltene Faktoren in den Versuchen lauten wie folgt:

- Werkstoff: S355
- Bohrungsdurchmesser in der Mitte der Proben: 13 mm
- Anziehmoment der Muttern an der Gewindestange: 80 Nm

Der Untersuchungsraum der Parameter ist möglichst groß zu wählen, um die Gültigkeit der Ergebnisse aus der Versuchsauswertung (wie z. B. das Vorhersagemodell) auf ein möglichst großes Variablenspektrum anwenden zu können. Begrenzt ist der Untersuchungsraum z. B. von der vordefinierten Anwendung oder der praktischen Umsetzbarkeit. Im vorliegenden Fall wird der Untersuchungsraum von den Möglichkeiten des Versuchsstandes, der Fertigung und der Kompatibilität der Parameter untereinander (Abstand der Kreisbogenmittelpunkte a und Nutbreite b müssen aufeinander abgestimmt sein) vorgeschrieben. Mit Berücksichtigung dieser Vorgaben liegt ein sinnvolles Anwendungsspektrum für einen Durchmesser von $54 \text{ mm} < D < 90 \text{ mm}$, eine Nutbreite von $4 \text{ mm} < b < 12 \text{ mm}$ und einen Abstand der Kreisbogenmittelpunkte von $24 \text{ mm} < a < 72 \text{ mm}$ vor. Mit diesen Vorgaben wird ein Versuchsplan nach dem *Central-Composite-Design (CCD)* entwickelt. Mit einem Versuchsplan nach dem CCD werden auch nichtlineare Effekte von Faktoren berücksichtigt. Nachstehend ist der mit Hilfe der Software JMP entstandene Versuchsplan mit den zu testenden Geometrievarianten aufgeführt:

12. Experimentelle Untersuchungen

Versuchsnr.	Durchmesser D	Nutbreite b	Abstand der Kreisbogenmittelpunkt a	Bezeichnung
1	72	8	48	D72_B8_A48
2	72	8	48	D72_B8_A48
3	72	8	8	D72_B8_A8
4	90	4	72	D90_B4_A72
5	72	8	48	D72_B8_A48
6	54	4	72	D54_B4_A72
7	72	8	48	D72_B8_A48
8	72	4	48	D72_B4_A48
9	54	12	72	D54_B12_A72
10	105	8	48	D105_B8_A48
11	36	8	48	D36_B8_A48
12	90	4	24	D90_B4_A24
13	72	16	48	D72_B16_A48
14	72	8	48	D72_B8_A48
15	72	8	96	D72_B8_A96
16	54	12	24	D54_B12_A24
17	54	4	24	D54_B4_A24
18	90	12	72	D90_B12_A72
19	90	12	24	D90_B12_A24

Tabelle 12-1: Nach dem DoE ausgegebener Versuchsplan

Der Versuchsplan enthält insgesamt 15 verschiedene zu testende Verzahnungsgeometrien. Die Bezeichnung der Probengeometrien ist aus den Verzahnungsparametern nach dem Schema *Durchmesser Breite Abstand* zusammengesetzt. Die Geometrie D72_B8_A48 stellt den Mittelpunkt des Versuchsraumes dar. Sie wird insgesamt fünfmal getestet, was der besseren Bestimmung der Streuung bzw. der Standardabweichung dient. Insgesamt sind somit 19 Versuche durchzuführen. Die Reihenfolge des Versuchsplans ist während der Versuche beizubehalten, um Zufallsparameter nach Möglichkeit über die gesamte Versuchsreihe zu verteilen. So wird verhindert, dass z. B. aus zeitpunktabhängigen Einflüssen (wie Tagesform der bzw. des Prüfenden, Wetter usw.) auf die Messwerte falsche Schlüsse gezogen werden. Die in der Auswahl enthaltenen Geometrien mit Parametern außerhalb des Untersuchungsraumes sind Bestandteil des CCD-Versuchsplans und dienen der besseren Bestimmung von Nichtlinearitäten. Die Ergebnisse der Versuchsauswertung sind dennoch nur innerhalb des Untersuchungsraumes gültig. Aufgrund einer sinnvoll zu wählenden Faktorstufung ist die Berücksichtigung einer konstanten Parität schwer umzusetzen. Demnach sind sowohl gerade, als auch ungerade Geometrien in der Versuchsreihe vorhanden. Die ausgewählten Verzahnungsbilder sind nachfolgend graphisch dargestellt:

12. Experimentelle Untersuchungen

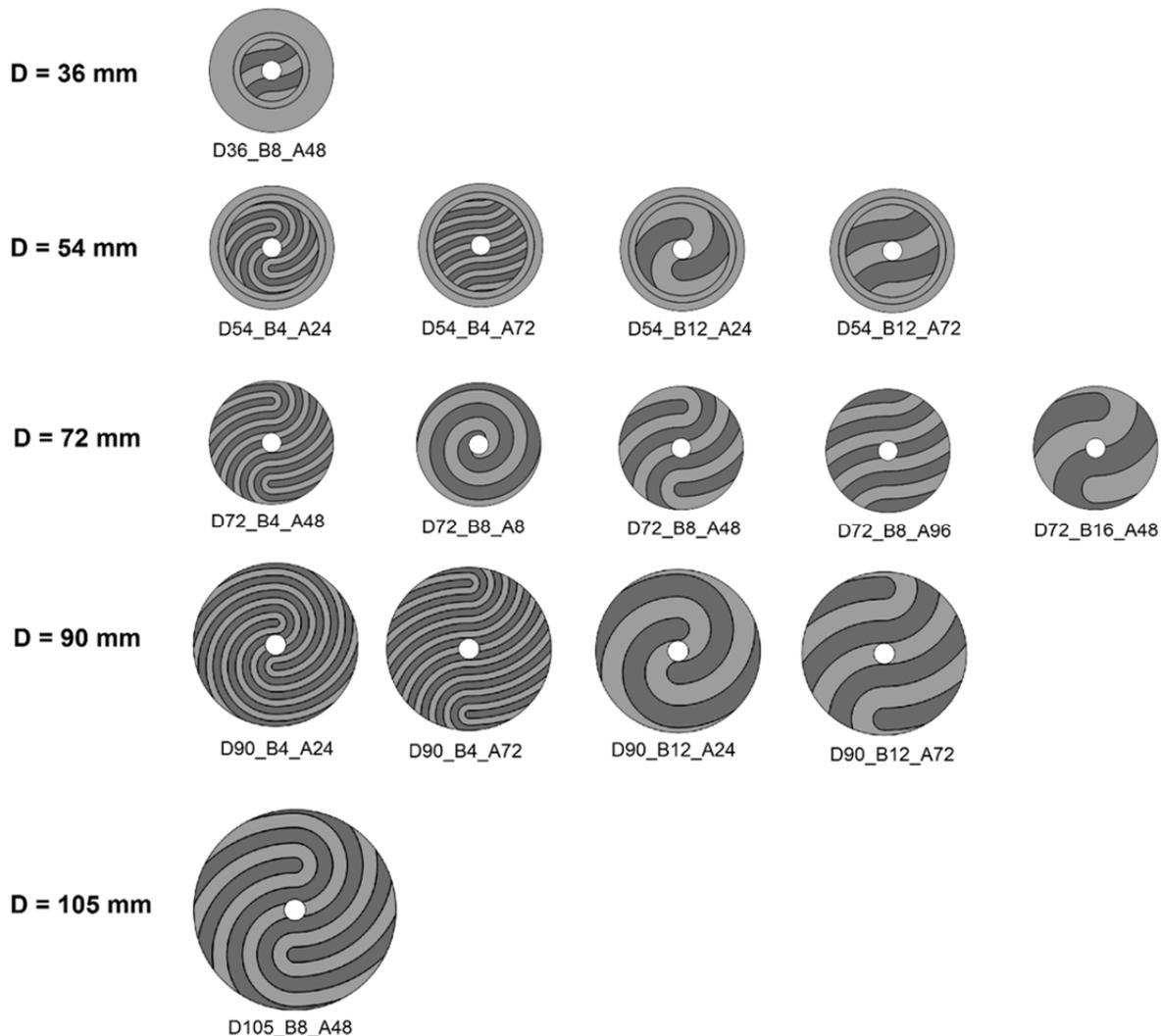


Abbildung 12-8: Zu testende Verzahnungsgeometrien (zweidimensional) [Müll16]

Die entsprechenden Geometrien sind mit Torsionsmoment zu belasten und auf das übertragbare Torsionsmoment zu prüfen. Das übertragene Torsionsmoment ist über den Verdrehwinkel aufzutragen.

12.3 Versuchsergebnisse

Bei Betrachtung der Proben nach erfolgter Torsionsmomentbelastung ist qualitativ festzustellen, dass die Verzahnung plastisch und damit irreversibel deformiert ist. Zwar besteht auch nach der plastischen Verformung weiterhin die Möglichkeit, Torsionsmomente zu übertragen, Konstruktionsbauteile gelten jedoch bei irreversibler Deformation als zerstört. Die zulässige Belastung ist somit auf jeden Fall überschritten. Lediglich Notlaufeigenschaften können noch erfüllt werden. Schäden sind vor allem in Form von überhöhter Flächenpressung und Scherung erkennbar. Durch Lokalisierung der größten Verformungen kann im Rückschluss die Stelle der größten Beanspruchung hergeleitet werden. Nachstehendes Foto zeigt exemplarisch Ort und Art der größten Beanspruchungen:

12. Experimentelle Untersuchungen



Abbildung 12-9: Visuell erkennbare Versagenserscheinungen an der Verzahnung

Die größten Deformationen sind am Rand der Basis (zu erkennen bei der rechts abgebildeten Probenhälfte) und am Steg, der durch den Kreisbogenmittelpunkt verläuft, (zu erkennen bei der links abgebildeten Probenhälfte) zu vermerken. Diese Gegebenheiten stimmen mit den Ergebnissen aus Kapitel 5.3 überein, in denen die größten Beanspruchungen am Rand der Basis bzw. am Kreisbogen mit dem kleinsten Radius (bei k_0) festzustellen sind. Der Punkt, an dem die plastische Verformung in der Verzahnung eintritt, soll anhand der Torsionsmoment-Verdrehwinkel-Kurven ermittelt werden. Nachfolgend ist ein Auszug von Kurven in einem Diagramm dargestellt:

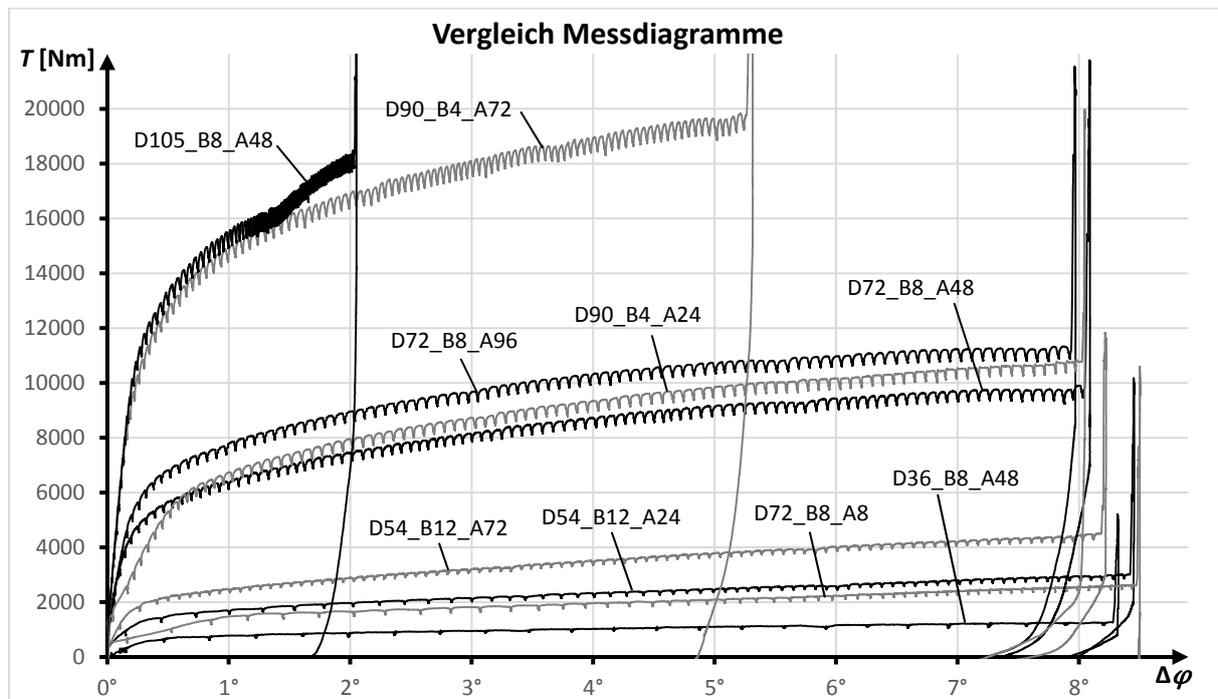


Abbildung 12-10: Beispielhafte Drehmoment-Verdrehwinkel-Kurven

12. Experimentelle Untersuchungen

Die nicht dargestellten Kurven weisen einen ähnlichen Verlauf zu den abgebildeten auf. Weil die Kurven sonst schwer voneinander zu unterscheiden wären, ist aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Darstellung aller Messkurven in einem Diagramm verzichtet. Ergänzend zur Abbildung 12-10 sind im nachstehenden Diagramm alle Kurven zu den Proben der Geometrie D72_B8_A48, die den Mittelpunkt des CCD Versuchsplans darstellen, aufgezeigt. Da der Verlauf der Kurven näherungsweise deckungsgleich ist, wird die Reproduzierbarkeit der Versuche damit deutlich:

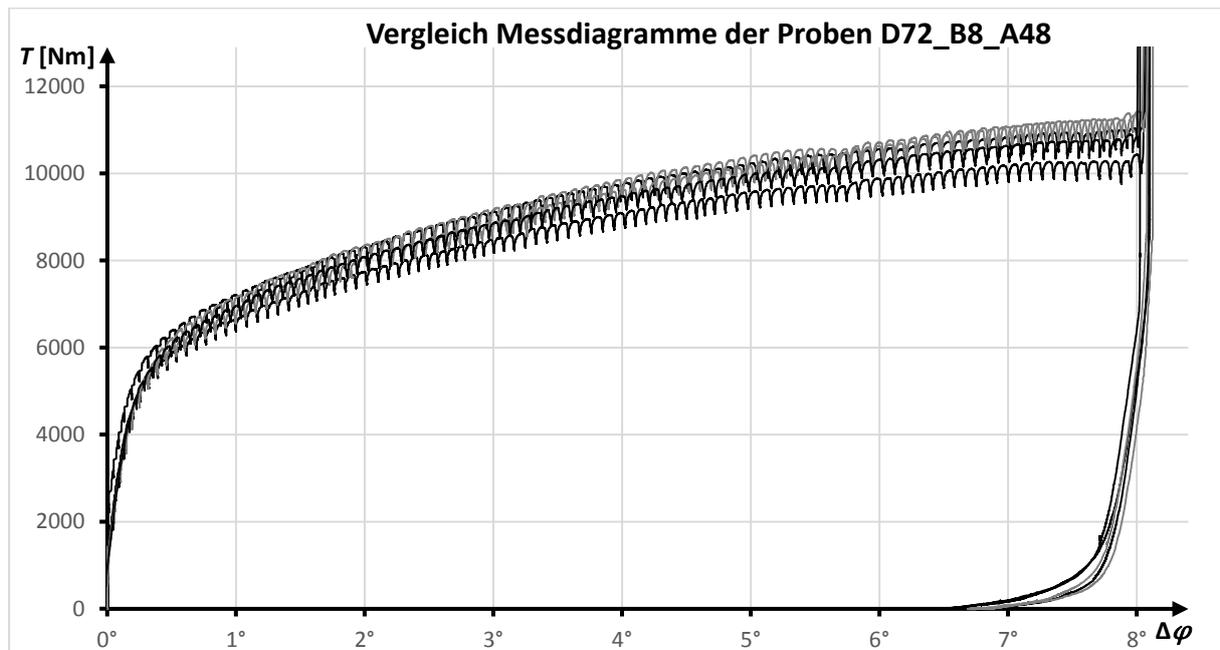


Abbildung 12-11: Versuchskurven zu den Proben der Geometrie D72_B8_A48 (Versuche 1, 2, 5, 7 und 14)

Der höckerförmige Verlauf, den die einzelnen Kurven aufzeigen, rührt aus der ungleichmäßigen Volumenzufuhr in den Zylinder, die aufgrund der per Hand betriebenen Pumpe zustande kommt. Anhand der Kurven ist festzustellen, dass das übertragene Torsionsmoment bei geringem Verdrehwinkel zunächst steil ansteigt. Ab einem bestimmten Winkel werden die Kurven deutlich flacher und steigen anschließend nur noch geringfügig an. Die bei einem Verdrehwinkel von ca. 8° zu verzeichnenden schlagartigen Erhöhungen des Torsionsmomentes kennzeichnen die Grenze des Versuchsstandes. An diesem Punkt ist der Hydraulikzylinder voll ausgefahren, sodass der Druck im hydraulischen System bei weiterer Förderung von Volumen augenblicklich ansteigt.

Die Kurven der Proben D105_B8_A48 und D90_B4_A72 in Abbildung 12-10 zeigen das Erreichen des Anschlages bereits weit vor einer Verdrehung von 8° . Dies lässt auf Fehlmessungen schließen, bei denen die Proben in der Einspannung des Versuchsstandes durchgerutscht sind, sodass das übertragene Torsionsmoment nicht dem entsprechendem Verdrehwinkel zugeordnet ist. Für die weitere Auswertung der Ergebnisse sind diese fehlerhaften Messungen jedoch nicht problematisch, weil das Kriterium zur Bewertung und zum Vergleich der Geometrien aus den fehlerlos erfassten Werten entnommen wird.

12. Experimentelle Untersuchungen

Die nach der Belastung erfolgte Entlastung der Probe ist ebenfalls aufgezeichnet und in den Kurvenverläufen zu erkennen. Keine Probe erreicht nach erfolgter Entlastung ihren Ursprungszustand zurück ($\Delta\varphi = 0^\circ$), sodass jede Probe definitiv plastisch verformt ist. Globale Maxima in den Torsionsmomentübertragungen sind nicht zu deuten. Ebenso wenig ist ein eindeutiger Punkt, ab dem die Dehngrenze erreicht ist, zu vermerken. Die Bestimmung eines linearen Anteils innerhalb des steilen Anstiegs am Beginn der Kurven ist mit probaten Mitteln nicht bei allen Kurven möglich, sodass kein eindeutiges Bewertungskriterium aus den Ergebnissen hergeleitet werden kann.

Um die Leistungsfähigkeit der getesteten Verzahnungen vergleichen und somit die Wirkung der Verzahnungsparameter beurteilen zu können, wird jeweils das übertragene Torsionsmoment bei einem Verdrehwinkel von $\Delta\varphi = 1^\circ$ gegenübergestellt. Dieser Wert beinhaltet zwar keine Aussage bezüglich der zulässigen Belastbarkeit der Verzahnung, aufgrund des annähernd gleichförmigen Verlaufes aller Kurven und der damit einhergehenden ähnlichen Relationen der Messwerte untereinander, liefert das übertragene Torsionsmoment bei $\Delta\varphi = 1^\circ$ ein gutes Äquivalent zur relativen Leistungsfähigkeit der Verzahnung und wird deshalb als Qualitätsmerkmal verwendet. Nachstehend ist das jeweils übertragene Torsionsmoment bei $\Delta\varphi = 1^\circ$ den untersuchten Verzahnungsgeometrien zugeordnet:

Benennung	Geometrie (angegeben in Durchmesser_Breite_Abstand)				Übertragenes Torsionsmoment (bei $\Delta\varphi = 1^\circ$) [Nm]
	Durchmesser	Breite	Abstand	Vielfaches	
D54_B12_A24	54	12	24	2	1 730
D54_B12_A72	54	12	72	6	2 500
D54_B4_A24	54	4	24	6	2 100
D54_B4_A72	54	4	72	18	2 600
D72_B8_A48	72	8	48	6	6 763
D72_B8_A96	72	8	96	12	7 850
D72_B4_A48	72	4	48	12	6 850
D72_B8_A8	72	8	8	1	1 480
D72_B16_A48	72	16	48	3	4 500
D90_B12_A24	90	12	24	2	6 050
D90_B12_A72	90	12	72	6	15 630
D90_B4_A24	90	4	24	6	6 650
D90_B4_A72	90	4	72	18	14 750

Tabelle 12-2: Versuchsergebnisse – Übertragenes Torsionsmoment bei einem Verdrehwinkel von $\Delta\varphi = 1^\circ$

Für die Geometrie D72_B8_A48 ist der Mittelwert aus allen fünf Versuchen in der Tabelle angegeben. Die Standardabweichung liegt dabei bei 198 Nm oder 2,9 %. Abweichungen z. B. aufgrund einer unstetigen Fertigung sind daher nicht ausschlaggebend.

12. Experimentelle Untersuchungen

12.4 Versuchsauswertung

Die softwaregestützte Auswertung der Versuchsergebnisse nach JMP verdeutlicht sowohl die Stärke des Effektes eines Parameters als auch die Signifikanz des Einflusses. Die Stärke eines Effektes wird anhand des *Schätzers* vom Programm angegeben (siehe Tabelle 12-3). Je größer der Schätzer eines Parameters ist, desto größer ist der Einfluss auf die Zielgröße. Zur Bestimmung der Signifikanz wird vom Programm zu jedem Einfluss der sogenannte *t-Wert* ausgegeben. Damit ein Einfluss als signifikant gilt, muss der t-Wert einen gewissen Schwellenwert überschreiten. In der nachstehenden Tabelle sind u. a. die jeweiligen t-Werte zu den einzelnen Einflüssen aufgeführt. Rechts neben der Spalte mit den t-Werten ist die Signifikanz per Balkendarstellung visualisiert. Die Länge der grauen Balken ist äquivalent zum t-Wert, die senkrechten Striche in den Zeilen kennzeichnen den Grenzwert, ab dem ein Einfluss als signifikant gilt:

Term	Schätzer	Std.-Fehler	t-Wert	Wahrscheinlichkeit > t
D(54,90)	4114,7766	132,6507	31,02	<,0001*
A(24,72)	2183,6993	136,9647	15,94	<,0001*
D*A	2051,25	183,0318	11,21	<,0001*
A*A	-705,4204	120,326	-5,86	0,0002*
D*D	513,55132	111,9623	4,59	0,0013*
B*B	-390,7106	145,8398	-2,68	0,0252*
B*A	218,75	183,0318	1,20	0,2626
B(4,12)	-167,4571	160,003	-1,05	0,3226
D*B	93,75	183,0318	0,51	0,6208

Tabelle 12-3: Abschätzung der Signifikanz der zweidimensionalen Parameter (D - Durchmesser; A – Abstand der Kreisbogenmittelpunkte; B – Nutbreite)

Die Spalte ganz rechts kennzeichnet den sogenannten *p-Wert*. Je kleiner der p-Wert ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erkannte Effekt auf einen Zufall beruht. Die obersten fünf Werte weisen eine gute Chance aus, dass der Effekt nicht rein zufällig auftritt. Der quadratische Effekt von der Nutbreite wird laut t-Wert zwar als signifikant eingestuft, die Wahrscheinlichkeit, dass dies auf Zufall beruht, ist jedoch relativ hoch. Die letzten drei Effekte, worunter auch der lineare Effekt der Nutbreite zählt, sind laut Auswertung nicht signifikant. Der Durchmesser *D* sowie der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte *a* üben sowohl linear als auch in ihrer gegenseitigen Wechselwirkung einen signifikanten und starken Einfluss auf die Torsionsmomentübertragung aus. Der quadratische Effekt des Durchmessers ist der Auswertung zur Folge eher unbedeutend.

Eine Verdeutlichung der Zusammenhänge entsteht, wenn die von der Software JMP ausgegebene Vorhersagefunktion in einem Diagramm dargestellt wird. Dafür ist für mehrere Durchmesser das mit der Vorhersagefunktion berechnete übertragbare Torsionsmoment in Abhängigkeit des Abstandes der Kreisbogenmittelpunkte aufgetragen:

12. Experimentelle Untersuchungen

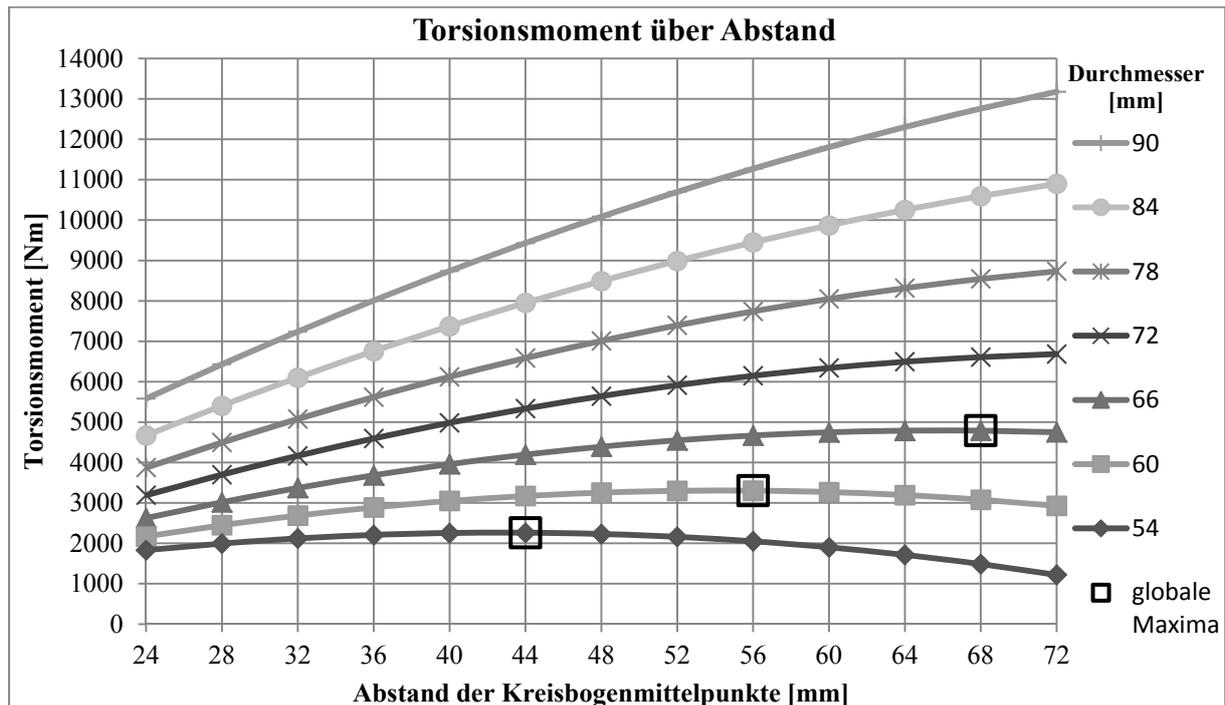


Abbildung 12-12: Übertragbares Torsionsmoment in Abhängigkeit vom Abstand a und Durchmesser D nach der Vorhersagefunktion von JMP

Da der Einfluss der Nutbreite laut der Auswertung mit JMP insignifikant ist, ist er in dem Diagramm nicht berücksichtigt.

Es ist zu erkennen, dass mit größerem Durchmesser das übertragbare Torsionsmoment steigt. Für den Abstand der Kreisbogenmittelpunkte existiert in Abhängigkeit des Durchmessers ein Optimum. Dies wird erreicht, wenn der Abstand der Kreisbogenmittelpunkte in etwa dem Durchmesser entspricht. Durch die richtige Wahl des Abstandes der Kreisbogenmittelpunkte kann das übertragbare Torsionsmoment bei vorgegebenem Durchmesser also erheblich erhöht werden.

Die Vorhersagefunktion beruht auf einem quadratischen Modell. Dem System wird somit unterstellt, dass deren Eingangsgrößen maximal in einem quadratischen Zusammenhang auf die Ausgangsgröße wirken. Die theoretischen Vorüberlegungen weisen jedoch auf einen komplizierteren Zusammenhang aller Größen untereinander hin (vgl. z. B. Abbildung 5-7 bis Abbildung 5-15). Eine Abbildung der Realität mit dem entwickelten Modell nach dem DoE ist somit nicht zwangsläufig vorausgesetzt. Weitere Untersuchungen zur Überprüfung und Konkretisierung der Zusammenhänge sind für eine endgültige Beurteilung notwendig.

12.5 Validierung der Berechnungsvorschriften

Zur Validierung der theoretisch hergeleiteten Berechnungsvorschriften werden die untersuchten Verzahnungsgeometrien aus dem Praxisversuch mit dem Algorithmus nach Kapitel 11 berechnet. Die eingesetzten zweidimensionalen Parameter entsprechen dabei den Angaben der Geometriebezeichnung (Durchmesser_Breite_Abstand), die dreidimensionalen Parameter lauten gemäß den Versuchen wie folgt:

12. Experimentelle Untersuchungen

$$\alpha = 0^\circ$$

$$H = 7,5 \text{ mm } (H_{\text{eff}} = 5 \text{ mm})$$

$$R = 1 \text{ mm}$$

$$S = 1,5 \text{ mm (Fase } 1,5 \times 45)$$

Das Torsionsmoment wird in den Berechnungen auf 1 Nm gesetzt. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle angeführt:

Geometrie (Durchmesser_ Breite_Abstand)	Versuchs- ergebnisse [Nm] (bei $\Delta\varphi = 1^\circ$)	Berechnete Druckspannungen [N/mm ²] (bei $T = 1 \text{ Nm}$)	Reziproke Druckspannung (Vergleichswert) [mm ² /N] (bei $T = 1 \text{ Nm}$)	Berechnete Torsions- spannungen [N/mm ²] (bei $T = 1 \text{ Nm}$)	Verhältnis σ_D/τ_t
D54_B12_A24	1730	0,36776804	2,71910526	0,07757966	4,74
D54_B12_A72	2500	0,29100352	3,43638452	0,06781776	4,29
D54_B4_A24	2100	0,27794068	3,59789007	0,06686088	4,16
D54_B4_A72	2600	0,79215305	1,26238231	0,06718996	11,79
D72_B8_A48	6763	0,13930842	7,17831694	0,02959153	4,71
D72_B8_A96	7850	0,12859207	7,77652905	0,02906907	4,42
D72_B4_A48	6850	0,28974365	3,45132668	0,02736074	10,59
D72_B8_A8	1480	0,66811221	1,49675456	0,0273	24,47
D72_B16_A48	4500	0,4550986	2,19732602	0,0273	16,67
D90_B12_A24	6050	0,13539192	7,38596491	0,01502446	9,01
D90_B12_A72	15630	0,07258988	13,7760242	0,01447423	5,02
D90_B4_A24	6650	0,21171815	4,72326057	0,01419621	14,91
D90_B4_A72	14750	0,11803902	8,47177505	0,01406746	8,39

Tabelle 12-4: Übersicht der Ergebnisse aus Versuch und Berechnung

Die errechneten Torsionsspannungen sind gegenüber den berechneten Druckspannungen verhältnismäßig gering (mindestens um das Verhältnis von ca. 4,16; siehe rechte Spalte in der Tabelle), sodass sie für die weiteren Untersuchungen vernachlässigt werden. Zwar sind anhand des Schadensbildes (Abbildung 12-9) Schädigungen durch Scherung real festzustellen, diese können jedoch daher rühren, dass die Zerstörung durch Scherung erst eintritt, nachdem bereits die plastische Verformung aufgrund von zu hoher Flächenpressung einsetzt. Die Verzahnung ist also möglicherweise bereits beschädigt, bevor nennenswerter Schaden durch Scherbeanspruchungen entsteht. Aufgrund der Überbelastung der Verzahnung ist der genau Eintritt der Vorgänge anhand des Schadensbildes der Probe jedoch nicht festzustellen.

12. Experimentelle Untersuchungen

Um die Vergleichbarkeit der gemessenen Torsionsmomente mit den berechneten Druckspannungen herzustellen, werden die Druckspannungen in einen Vergleichswert umgerechnet. Verzahnungen, die hohe Torsionsmomente übertragen können, weisen bei konstant gehaltenem Torsionsmoment vergleichsweise niedrige Spannungen auf. Niedrige Spannungen bei einem konstanten Torsionsmoment sind somit äquivalent zu hohen übertragbaren Torsionsmomenten. Demzufolge wird das Reziprok der berechneten Spannung als Vergleichswert genutzt.

Für die Gegenüberstellung sind die Relationen der gemessenen Torsionsmomente sowie der Vergleichswerte der berechneten Spannungen untereinander von Bedeutung. Daher werden die einzelnen Werte zum übertragenen Torsionsmoment bzw. zur berechneten reziproken Spannung auf den jeweils höchsten vorkommenden Wert bezogen. Die daraus entstehenden Relationen werden als Prozentsatz angegeben. Für eine Verifizierung des Algorithmus müssen die Prozentsätze des übertragenden Torsionsmomentes und der reziproken berechneten Spannung für eine Geometrie näherungsweise identisch sein. Nachstehende Graphik veranschaulicht die Relationen der gemessenen Torsionsmomente bei $\Delta\varphi = 1^\circ$ und der Vergleichswerte zur berechneten Spannung:

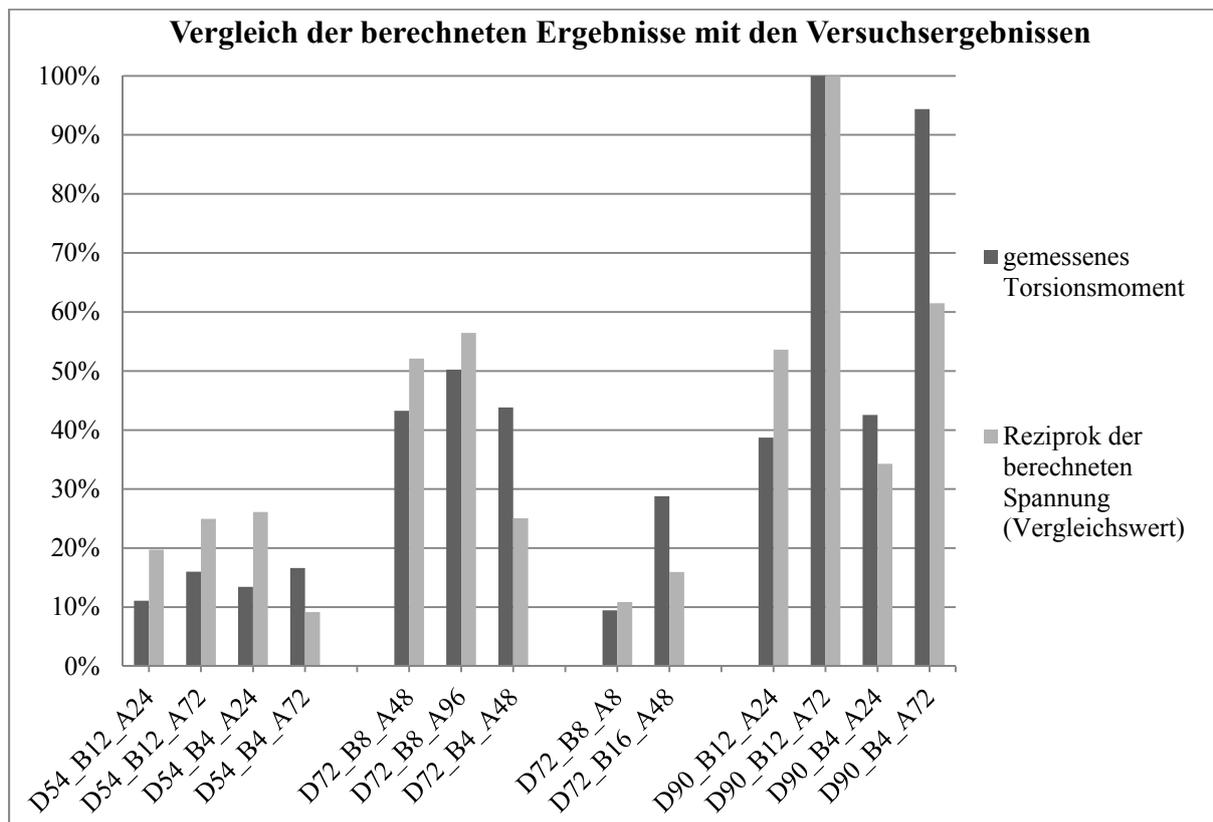


Abbildung 12-13: Vergleich der reziproken berechneten Spannungen mit dem gemessenen Torsionsmoment bei $\Delta\varphi = 1^\circ$

Die Gegenüberstellung der Werte verdeutlicht, dass teilweise relativ gute Übereinstimmungen vorliegen (siehe Geometrie D72_B8_A48, D72_B8_A96, D72_B8_A8 oder D90_B4_A24), an anderen Stellen jedoch große Abweichungen vorhanden sind (selbst mit Berücksichtigung einer gewissen Toleranz z. B. aufgrund von Messfehlern). Zum Teil entsprechen die Vergleichswerte zur berechneten Spannung ungefähr die Hälfte des gemessenen

12. Experimentelle Untersuchungen

Torsionsmomentes (siehe Geometrie D54_B4_A72 oder D72_B16_A48), an anderer Stelle entsprechen sie dem Doppelten (siehe Geometrie D54_B4_A24). Eine Regelmäßigkeit in den Abweichungen ist demnach nicht zu erkennen.

Die entwickelte Berechnungsvorschrift kann somit mit den gemessenen Ergebnissen nicht verifiziert werden. Es wird davon ausgegangen, dass in den Berechnungen weitere ausschlaggebende, aber bisher unbestimmte Einflüsse zu berücksichtigen sind. Diese unbestimmten Einflüsse sind im nachstehenden Kapitel aufgeführt.

12.6 Unbestimmte Einflüsse auf die Belastbarkeit der Verzahnung

Eine Ursache für die Unterschiede in den Ergebnissen aus den Berechnungen und Versuchen besteht darin, dass die Berechnungsvorschrift allein auf elastostatischen Vorgängen beruht, also nur innerhalb der elastischen Verformung gültig ist, während die entnommenen Werte aus den praktischen Versuchen bei bereits eingetretener plastischer Verformung vorliegen. Folglich werden Vergleiche zwischen zwei verschiedenen Zuständen angestellt, denen unterschiedliche Voraussetzungen oder Gegebenheiten zu Grunde liegen. Bei dem gewählten Vorgehen zum Erhalt einer Zielgröße aus den Versuchen sind somit Ungenauigkeiten einzukalkulieren.

Eine weitere Fehlerquelle liegt in der Vernachlässigung von Verschiebungen in den Berechnungen (alle Vorgänge werden als quasistatisch vorausgesetzt). Verschiebungen führen zu Änderungen der Bauteilgeometrie, wodurch Kraftverhältnisse ebenfalls eine Änderung erfahren und Beanspruchungen verstärkt oder abgemindert werden. Bei der Kreisbogen-Stirnverzahnung werden z. B. die Flanken oder Flankenabschnitte, die zu einem hohen Anteil in Umfangsrichtung ausgerichtet sind, aufgrund der Keilwirkung (Kräfte auf eine schiefe Ebene) sehr hohen Normalkräften ausgesetzt. Die Stege werden nach außen gedrückt, wodurch die Keilwirkung wiederum verstärkt wird und letztendlich eine Zerstörung der Stege eintritt. Die Kreisbogen-Stirnverzahnung ist dadurch weniger belastbar als mit den Berechnungen ermittelt wird. Bei Verzahnungen, deren Verzahnungsbild einer Spirale ähnelt, ist dieser Vorgang besonders ausgeprägt. Die nachstehende Abbildung verdeutlicht die Verhältnisse. Reibung zwischen den Zahnflanken ist dabei vernachlässigt:

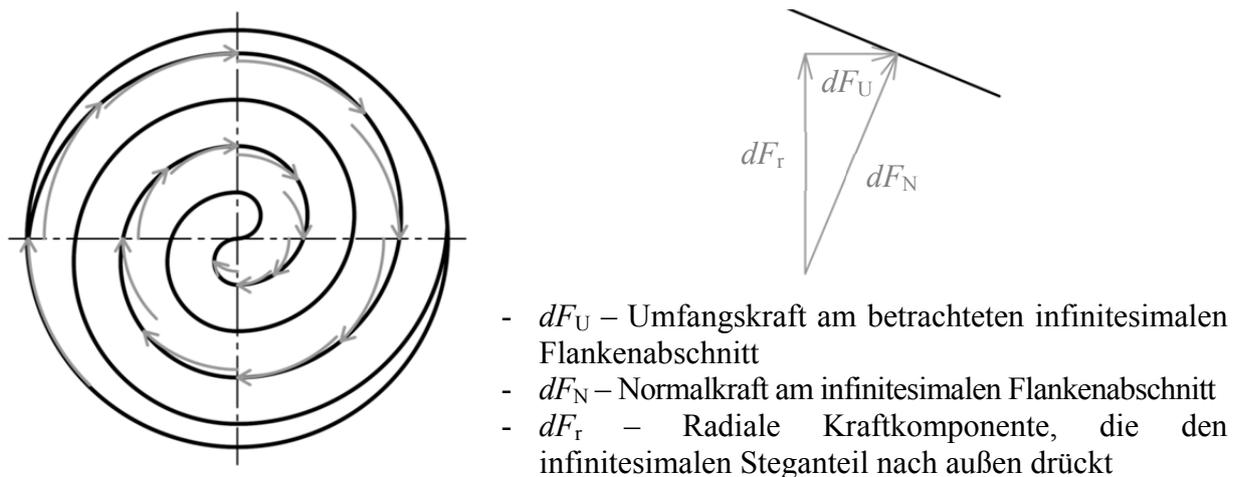


Abbildung 12-14: Kraftverhältnisse an den Zahnflanken bzw. Zahnflankenabschnitten; links: Verzahnungsbild, das einer Spirale ähnelt, die Umfangskraft greift in einem niedrigen Winkel an; rechts: Kräfte an einem infinitesimalen Zahnflankenabschnitt

12. Experimentelle Untersuchungen

Reibung zwischen den Zahnflanken führt zu einer Verminderung des Effektes, weil dadurch die Normalkraft und die radiale Kraftkomponente, die die Stege nach außen drückt, verringert werden.

Eine Berücksichtigung von Verschiebungsvorgängen ist mit der angewendeten quasistatischen Betrachtung nicht möglich. Dafür müssen alternative Methoden, wie die Finite-Elemente-Analyse, eingesetzt werden.

Die Vernachlässigung von Verschiebungen führt ferner dazu, dass der Abbau von Spannungen durch beispielsweise Setzerscheinungen unberücksichtigt bleibt. Setzerscheinungen sind geringe plastische Verformungen, die durch lokale Überbelastungen z. B. aufgrund von Oberflächenrauheiten auftreten, wodurch Spannungen abgebaut werden. Setzerscheinungen führen zu keinem nennenswerten Schaden. Größere zulässige Torsionsmomentbelastungen als mit den Berechnungen ermittelt sind die Folge.

Des Weiteren ist eine ungleichmäßige Lastverteilung an den Flanken infolge von Fertigungstoleranzen in den Berechnungen nicht berücksichtigt. In den theoretischen Untersuchungen wird der Idealzustand, in dem sich alle Flankenflächen an jeder Stelle berühren und die Kraft gleichmäßig verteilt wird, angenommen. Real ist jedoch nicht jeder Flächenanteil der Flanken im Eingriff, um Kräfte aufzunehmen. Die Last wird dadurch weniger verteilt und die Beanspruchung der Flanken an einzelnen Stellen erhöht. Dies führt zu einer insgesamt geringeren Belastbarkeit der Verbindung und somit zu Abweichungen zwischen den theoretischen Betrachtungen und den realen Versuchsergebnissen. Eine Bezifferung des Traganteils, wodurch ein Verhältnis der tatsächlich in Kontakt stehenden Berührflächen zur theoretisch berechneten angegeben wird, ist schwer abzuschätzen, da dies durch viele Zufallsfaktoren beeinflusst wird. Zielführend ist eine Ermittlung auf empirischem Wege.

Eine weitere Ungenauigkeit wird durch die Vernachlässigung der zentralen Bohrung in den Berechnungen herbeigeführt. Im Gegensatz zur Grundlage, auf der die Berechnungen beruhen, steht das aufgrund der Bohrung fehlende Material real nicht zur Kraftübertragung zur Verfügung, sodass die Belastbarkeit der Verzahnung in Wirklichkeit kleiner ist. Spannungen in der Mitte eines Torsionsstabes sind jedoch verhältnismäßig klein, sodass die Abweichungen aufgrund der Vernachlässigung der zentral angeordneten Bohrung, die einen relativ geringen Durchmesser hat, marginal sind. Eine Berücksichtigung der Bohrung ruft daher kaum Änderungen in den Berechnungsergebnissen hervor.

Einen nicht unerheblichen Einfluss üben Kerben auf die zulässige Belastbarkeit eines Bauteils aus, die bei der Kreisbogen-Stirnverzahnung vor allem im Bereich des Zahnfußes auftreten. Die Bezifferung eines Kerbfaktors ist per elementarer Betrachtung der Zusammenhänge nicht möglich und ist deshalb in der entwickelten Berechnungsvorschrift nicht berücksichtigt. Neben Einflüssen durch die Bauteilgeometrie ist der Kerbfaktor vom verwendeten Werkstoff abhängig. Der Kerbfaktor ist vornehmlich auf empirischem Wege zu ermitteln.

Es wird davon ausgegangen, dass neben den genannten Einflüssen weitere praktisch relevante, theoretisch aber nur schwer zu bemessende, schwer zu ergründende oder schwer zu erkennende Faktoren die genaue Belastbarkeit der Verzahnung bestimmen. Unbekannt ist zudem, inwieweit die einzelnen unbestimmten Einflüsse korrelieren. Eine Annäherung an die Realität ist nur empirisch möglich, was mit einer hohen Anzahl von Versuchen einhergeht.

12. Experimentelle Untersuchungen

Zwar kann der entwickelte Algorithmus zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung nicht verifiziert werden, dennoch liefern die entwickelten Formeln zur Berechnung der Kreisbogen-Stirnverzahnung eine gute Grundlage, um die Gegebenheiten und Vorgänge bei Belastung der Verzahnung mit Torsionsmoment zu erfassen. Übereinstimmungen existieren in der Lokalisierung der am meisten beanspruchten Stellen der Verzahnung. Anhand des Schadensbildes (siehe Abbildung 12-9) sind die Stellen der maximalen Beanspruchung erkennbar. Diese stimmen mit den Erwartungen, beruhend auf den theoretischen Untersuchungen, überein (siehe Abbildung 5-16). Für eine endgültige Auslegungsvorschrift bzw. für einen Bezug zur Realität sind jedoch weitere Einflüsse zu berücksichtigen, die nicht elementar, sondern zum größten Teil nur empirisch ermittelt werden können, wofür eine hohe Anzahl von Versuchen notwendig ist. Die vorhandene Berechnungsvorschrift ist um diese weiteren Einflüsse zu ergänzen, um sie der Realität anzupassen. Dies ist z. B. in Form von Korrekturfaktoren sowie weiteren Termen, die in Abhängigkeiten von den Verzahnungsparametern oder anderen Einflüssen stehen, umzusetzen. Anhand der vorhandenen Versuchsergebnisse sind jedoch keinerlei Ansätze zu erkennen, in welcher Form der entwickelte Algorithmus anzupassen, zu ergänzen oder weiterzuentwickeln ist.

Die notwendigen, fortführenden Untersuchungen, die einen hohen und zusätzlichen Aufwand, vor allem im Hinblick der Versuchsdurchführung und Versuchsauswertung bedürfen, sind nicht mehr Bestandteil dieser Arbeit. Als Ergebnis der in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen ist daher die Schaffung einer Grundlage zur Beschreibung, Spezifizierung und Erkennung der Zusammenhänge zwischen Geometrie und Beanspruchungen der neuartigen Kreisbogen-Stirnverzahnung zu nennen.

13. Fazit, kritische Würdigung, Ausblick

In dieser Arbeit ist die neue Kreisbogen-Stirnverzahnung erstmalig systematisch untersucht worden. Neben einer Deklaration von Parametern zur mathematischen Erfassung und Beschreibung der Verzahnungsgeometrie wurden spezifische Eigenschaften der Verbindung herausgestellt und die potenzielle Anwendbarkeit der Kreisbogen-Stirnverzahnung aufgezeigt.

Die Betrachtung von in der Praxis angewendeten und bewährten Formeln und Vorschriften zur Auslegung formschlüssiger Verbindungen verdeutlichte, dass oftmals Flächenpressung bei den genannten Verbindungen die ausschlaggebende Beanspruchung darstellt. Sie ist meist um ein Vielfaches höher als andere Formen der Beanspruchung (wie beispielsweise Scherbeanspruchungen). Durch diese Erkenntnis ist es naheliegend, dass die hier untersuchte Kreisbogen-Stirnverzahnung bei nicht allzu großen Nuttiefen ebenfalls am meisten durch Flächenpressung beansprucht wird, wie die Berechnungsergebnisse zeigen. Nach dem Vorbild der angewendeten und bewährten Formeln und Vorschriften zur Auslegung formschlüssiger Verbindungen wurden zur Bestimmung und Untersuchung der Belastbarkeit der neuartigen Kreisbogen-Stirnverzahnung die mechanischen Zusammenhänge vereinfacht dargestellt und per Formeln beschrieben.

Als erreichtes und verifiziertes Ergebnis ist ein Algorithmus zur Bestimmung der gesamten Scherfläche der Verzahnung (bei Flankenwinkel $\alpha = 0^\circ$) zu nennen. Darauf aufbauend wurde eine Berechnungsvorschrift zur Ermittlung des Flächenträgheitsmomentes bzw. des Widerstandsmomentes der Verzahnung entwickelt. Mit der entwickelten Berechnungsvorschrift wurden die entstehenden Torsionsspannungen für eine Reihe an Verzahnungsgeometrien berechnet und gegenübergestellt. Die Ergebnisse zeigen, dass die ermittelten Zusammenhänge nicht mit einfachen Eigenschaften beschrieben werden können, sondern sehr komplex sind. Die Auswirkungen von Flankenwinkeln größer null auf die Torsionsspannungen wurden nicht quantitativ untersucht. Qualitativ führt ein Flankenwinkel größer null zu einer Vergrößerung des Zahnfußes und somit zu mehr Widerstand gegen Scherung, wodurch die Torsionsspannungen verringert und unter Umständen unbedeutend werden.

Neben Torsionsspannungen wurde die entstehende Flächenpressung an den Zahnflanken auf Grundlage von mechanischen Zusammenhängen untersucht. Die Berechnungen beruhen vorwiegend auf dem Ansatz, die einzelnen kreisbogenförmigen Flanken der Verzahnung auf eine ebene Fläche zu projizieren. Auf die projizierte Fläche wirkt dann eine Kraft, die aus einem auf alle Flanken gleichmäßig verteilten Torsionsmoment resultiert. Anhand der Auswertung der Ergebnisse ist auf theoretischem Wege bestätigt, dass die Kreisbogen-Stirnverzahnung bei nicht allzu großen Nuttiefen die höchste Beanspruchung durch Flächenpressung erfährt. Auch die Effekte der geometrischen Verzahnungsparameter auf die Flächenpressung sind nicht durch einfache Zusammenhänge beschreibbar. Aus den Ergebnissen wurden Formeln zur Grobauslegung der Verzahnungsparameter D , b und n hergeleitet. Die Grobauslegungsformeln stellen eine Vereinfachung der ermittelten Berechnungsvorschrift dar, sodass erste Anhaltswerte oder Größenordnungen der genannten Parameter ohne großen Aufwand bestimmt werden können. Es wird davon ausgegangen, dass die Grobauslegungsformeln zusätzlich per Korrekturfaktor(en) den Gegebenheiten der Realität angepasst werden müssen. Da nicht bekannt ist, in welcher Form diese zusätzlichen Einflüsse vorliegen, ist eine Ergänzung der Formeln nur mit umfangreichen experimentellen Untersuchungen möglich, was daher in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wurde.

13. Fazit, kritische Würdigung, Ausblick

Die Auswirkungen des Flankenwinkels wurden gesondert untersucht. Werden die Zahnflanken schräg ausgeführt ($\alpha > 0^\circ$), ist eine Vorspannkraft notwendig, die Relativbewegungen zwischen den Zahnflanken, in Form von Abheben der Zahnflanken voneinander oder Gleiten der Zahnflanken aufeinander, hemmt. Passungsrost wird dadurch vermieden bzw. vermindert. Auf Grundlage von Kraftverhältnissen an einer schiefen Ebene wurde eine Formel zur Bestimmung der notwendigen Vorspannkraft hergeleitet. Die Belastung aufgrund der Vorspannkraft beeinflusst die Flächenpressung an den Zahnflanken zusätzlich. Mittels Diagrammen wurden die einzelnen Effekte im Zuge einer Flankenwinkeländerung auf die Flächenpressung verdeutlicht und gegenübergestellt. Dabei wurde die Erkenntnis erlangt, dass es für die Flächenpressung von Vorteil ist, wenn der Flankenwinkel möglichst groß ist.

Der maximal wählbare Flankenwinkel ist abhängig von der Nuttiefe. Per Vergleich wurde festgestellt, dass eine große Nuttiefe einen positiveren Effekt auf die Flächenpressung hat, als ein großer Flankenwinkel. Demnach ist eine möglichst große Nuttiefe der Bedingung eines möglichst großen Flankenwinkels vorzuziehen. Die vorhandene Berechnungsvorschrift zur Bestimmung der Flächenpressung, bei der bisher ein Flankenwinkel von $\alpha = 0^\circ$ angenommen wurde, wurde um den Einfluss des Flankenwinkels und der benötigten Vorspannkraft ergänzt.

Zuletzt wurden die Effekte des Rundungsradius am Zahnfuß und der Fase am Zahnkopf theoretisch untersucht. Zum einen vermindert ein hoher Rundungsradius die Kerbempfindlichkeit der Verzahnung, andererseits vermindert er auch die effektive Zahnhöhe, wodurch die Flächenpressung erhöht wird. Die Einflüsse des Rundungsradius auf die Kerbempfindlichkeit der Verzahnung sind schwer zu bestimmen und wurden anhand von bekannten Werten aus vergleichbaren Anwendungen beurteilt. Anhand dieser Werte wurden Empfehlungen für die Gestaltung des Rundungsradius am Zahnfuß und der Fase am Zahnkopf formuliert.

Mit der Zusammenlegung der an der Verzahnung herrschenden Beanspruchungen zu einer Vergleichsspannung wurde eine Möglichkeit zur Beurteilung der gesamten Beanspruchung hergestellt. Die Vergleichsspannung ist dazu in einen Kontext mit bekannten Materialkennwerten, wie die Streckgrenze, zu setzen.

Durch die Hinzunahme von fertigungstechnischen Kriterien wurden weitere Abhängigkeiten und Einschränkungen für die Verzahnungsparameter hervorgebracht, sodass daraus allgemeine Empfehlungen für die Gestaltung der Verzahnung in Abhängigkeit vom Torsionsmoment in Form von Grobauslegungsvorschriften formuliert werden konnten.

Da die optimalen Einstellungen für die Verzahnung sehr spezifisch sind, ist zur Findung des dem jeweiligen Fall entsprechenden Optimums von den in der Grobauslegung allgemein empfohlenen Parametern und deren Abhängigkeiten abzuweichen, und iterative Berechnungsschritte sind durchzuführen, was einen höheren Aufwand bedarf. Die dazu notwendigen Schritte wurden in einen Algorithmus zusammengefasst.

Zur Überprüfung des aufgestellten Algorithmus wurden Realversuche durchgeführt. Diese wurden mit den Methoden des Designs of Experiments geplant und ausgewertet. Eine eindeutige Zielgröße zur Bewertung der Leistungsfähigkeit der Kreisbogen-Stirnverzahnung konnte anhand der Messergebnisse nicht erkannt werden, weshalb eine ersatzweise Zielgröße gewählt wurde. Deren Verwendung hat aufgrund der Gleichförmigkeit der Messkurven zwar ihre Berechtigung, sie führt jedoch zu Ungenauigkeiten in der Bewertung der einzelnen

13. Fazit, kritische Würdigung, Ausblick

Verzahnungsgeometrien. Anhand der Auswertung der Messergebnisse mit der Ersatzzielgröße wurden empirisch ermittelte Zusammenhänge zwischen der Verzahnungsgeometrie und der Belastbarkeit erlangt. Die Gültigkeit der ermittelten Zusammenhänge ist noch mit einer größeren Anzahl von Versuchen zu überprüfen.

Die Gegenüberstellung der theoretisch bestimmten Flächenpressung mit den Ergebnissen aus den praktischen Versuchen verdeutlicht, dass bei einigen Geometrien (unter Berücksichtigung einer gewissen Toleranz) Übereinstimmungen zu vermerken sind. An anderen Stellen bestehen jedoch erhebliche Abweichungen, die keiner erkennbaren Regelmäßigkeit folgen. Es ist daher davon auszugehen, dass die Effekte von in den Berechnungen nicht berücksichtigten oder nicht erkannten Einflüssen signifikant sind. Um welche Einflüsse es sich handelt und in welchem Zusammenhang sie mit der Belastbarkeit der Verzahnung stehen, ist anhand der Versuchsergebnisse nicht zu erkennen. Es sind weitere Versuche nötig, um die unbekanntenen Einflüsse zu berücksichtigen.

Der Vergleich von qualitativen Merkmalen, wie die Lokalisierung der Stellen, an denen die maximale Beanspruchung auftritt, zeigt eine Übereinstimmung der berechneten mit den augenscheinlich wahrgenommenen Stellen der maximalen Belastung. In diesem Fall stimmen die Erwartungen auf Grundlage der Berechnungen mit der Realität überein.

Auch wenn der aufgestellte Algorithmus in der hier ausgearbeiteten Form nicht gänzlich verifiziert werden kann, stellt er eine sinnvolle Grundlage zur Deutung der Zusammenhänge zwischen der Belastung, der Verzahnungsgeometrie und den Beanspruchungen dar. Weitere, nicht eindeutig auf theoretischem Wege ermittelbare Einflüsse sind zu dem aufgestellten Algorithmus anhand von Ergebnissen aus weiteren Praxisversuchen zu ergänzen.

Ein fortführendes Ziel ist die Anpassung oder Überarbeitung der gefundenen Berechnungsvorschrift für die Kreisbogen-Stirnverzahnung zur Erreichung von Realitätsnähe. Dabei sind die ermittelten Zusammenhänge, Erkenntnisse und Ergebnisse dieser Arbeit zu nutzen und mit vornehmlich auf empirischem Wege gefundenen Einflüssen zu erweitern. Sofern ein Modell vorliegt, das mit der Realität gut vereinbar ist, sind daraus Gestaltungs- und Auslegungsvorschriften für die Kreisbogen-Stirnverzahnung zu formulieren.

Zusammenfassend bestehen die Ergebnisse dieser Arbeit neben der Schaffung einer elementaren Beschreibung der neuartigen Kreisbogen-Stirnverzahnung mittels geometrischer Parameter und deren Abhängigkeiten in der theoretischen und experimentellen Erfassung der mechanischen Wirkzusammenhänge bei einer Belastung mit Torsionsmoment, wodurch eine gute Grundlage für weiterführende Untersuchungen zum Entwickeln von Auslegungs- und Gestaltungsvorschriften geschaffen ist.

Quellenverzeichnis

Quellenverzeichnis

- [Adam14] **Adam, Mario. 2014.** *Statistische Versuchsplanung und Auswertung (DoE Design of Experiments)*. [pdf-Dokument] Düsseldorf: Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik, Fachhochschule Düsseldorf, 2014.
- [Behr72] **Behrsing, Gert. 1972.** "Hirth, Albert". *Neue Deutsche Biographie* 9. [Online] 1972. [Zitat vom: 22. 08 2016.] <https://www.deutsche-biographie.de/gnd137582374.html#ndbcontent>.
- [Bern06] **Berns, Hans und Theisen, Werner. 2006.** *Eisenwerkstoffe - Stahl und Gusseisen*. 3. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. ISBN-10 3-540-29792-8.
- [Bron16] **Bronstein, Ilja N., et al. 2016.** *Taschenbuch der Mathematik*. [CD-Rom] 10. Auflage, 42781 Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 2016. ISBN 978-3-8085-5789-1.
- [Bruh94] **Bruhns, Otto und Lehmann, Theodor. 1994.** *Elemente der Mechanik II - Elastostatik*. 1. Auflage. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1994. ISBN 3-528-03048-8.
- [Bung05] **Bunge, Torsten. 2005.** Tragfähigkeit von Plankerbverzahnungen. *Dissertation*. Dresden: Technische Universität, 2005.
- [Deck14] **Decker, Karl-Heinz und Kabus, Karlheinz. 2014.** *Maschinenelemente - Funktion, Gestaltung und Berechnung*. 19. Auflage. München: Carl Hanser Verlag, 2014. ISBN 978-3-446-43856-9.
- [DIN32711-2] **DIN 32711-2. 2009.** Welle-Nabe-Verbindung. *Polygonprofil P3G*. Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2009. DIN 32711-2: 2009-03.
- [DIN32712-2] **DIN 32712-2. 2012.** Welle-Nabe-Verbindung. *Polygonprofil P4C*. Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2012. DIN 32712-2:2012-03.
- [Erve11] **Erven, Joachim. 2011.** *Taschenbuch der Ingenieurmathematik*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2011. ISBN 978-3-486-59212-2.
- [Flei09] **Fleischer, Bernhard und Theumert, Hans. 2009.** *Entwickeln Konstruieren Berechnen*. 2. Ausgabe. Wiesbaden: Vieweg+Teubner GWV Fachverlage GmbH, 2009. ISBN 978-3-8348-0601-7.
- [Gumm94] **Gummert, Peter und Reckling, Karl-August. 1994.** *Mechanik*. 3. Auflage. Braunschweig / Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1994. ISBN 3-528-28904-X.
- [Habe14] **Habernauer, Horst und Bodenstern, Ferdinand. 2014.** *Maschinenelemente - Gestaltung, Berechnung; Anwendung*. 17. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. ISBN 978-3-642-37416-6.
- [itm07] **Lehrstuhl für Mechanik. 2007.** *Mechanik I*. [pdf-Dokument] Dortmund: Lehrstuhl für Mechanik, Universität Dortmund, 2007.
- [ITA14] **Institut für Technologie und Arbeit. 2014.** *Design of Experiment (DoE), Statistische Versuchsplanung*. [ppt-Datei] 2014.
- [Jung13] **Jung, Michael. 2013.** *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*. 2. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2013. ISBN 978-3-658-01100-0.

Quellenverzeichnis

- [Kess97] **Kessel, S. 1997.** *Skriptum zur Vorlesung Mechanik II für Studierende des Maschinenbaus.* [pdf-Dokument] Dortmund: Lehrstuhl für Mechanik - Universität Dortmund, 1997.
- [Klei12] **Klein, Bernd. 2012.** *FEM.* 9. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012. ISBN 978-3-8348-1603-0.
- [Künn10] **Künne, Bernd. 2010.** *Maschinenelemente II.* [pdf-Dokument] Dortmund: Fachgebiet Maschinenelemente, Universität Dortmund, 2010.
- [Künn12] **Künne, Bernd. 2012.** *Maschinenelemente Kompakt Band 1: Technisches Zeichnen.* 2. Auflage. Soest: Maschinenelemente-Verlag, 2012. ISBN 3-937651-07-1.
- [Künn14] **Künne, Bernd und Willms, Ulrike. 2014.** *Maschinenelemente kompakt Band 2: Gestaltung.* 1. Auflage. Soest: Maschinenelemente-Verlag, 2014. ISBN 3-937651-09-8.
- [Künn15] **Künne, Bernd und Willms, Ulrike. 2015.** *Maschinenelemente I.* [pdf-Dokument] Dortmund: Fachgebiet Maschinenelemente, Universität Dortmund, 2015.
- [Künn17] **Künne, Bernd. 2017.** *Maschinenelemente III.* [pdf-Dokument] Dortmund: Fachgebiet Maschinenelemente, Universität Dortmund, 2017.
- [Linn17] **Linneweber, Philipp. 2017.** Finite-Elemente-Analyse der Spannungsverteilung in der "Schürmann"-Stirnverzahnung. *Projektarbeit.* Dortmund: 2017.
- [Möll14] **Möller, Martin, Künne, Bernd und Wißuwa, Manuel. 2014.** *Auslegung und Optimierung einer innovativen Kreisbogen-Stirnverzahnung.* In: Dimensionierung, Fertigung, Anwendungen: 6. VDI-Fachtagung Welle-Nabe-Verbindungen; Karlsruhe: 05. und 06. November 2014, S. 155–164.
- [Möll15] **Möller, Martin, Künne, Bernd und Thomas, Johannes. 2015.** Kleiner Bauraum, große Festigkeit: eine innovative Kreisbogen-Stirnverzahnung als kompaktes Verbindungselement. *Der Konstrukteur.* 2015, 9.
- [Möll17] **Möller, Martin und Künne, Bernd. 2017.** *Knotenelement zur Verbindung von Konstruktionselementen, insbesondere von Tragwerkselementen oder Profilen.* WO 2017/148456 A1 DE, 08. September 2017. Patent.
- [Morf16] **Morfeld, Marcel. 2016.** Statistische Versuchsplanung zur Stirnverzahnung - Analyse der drei Hauptparameter der "Schürmann-Verzahnung". *Bachelorarbeit.* Dortmund: 21. April 2016.
- [Müll13] **Müller, Christine und Denecke, Liesa. 2013.** *Stochastik in den Ingenieurwissenschaften.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. ISBN 978-3-642-38959-7.
- [Müll16] **Müller, Andriko. 2016.** Statistische Versuchsplanung und Auswertung zu Torsionsversuchen. *Fachwissenschaftliche Projektarbeit.* Dortmund: 2016.
- [Niem81] **Niemann, Gustav und Hirt, Manfred. 1981.** *Maschinenelemente - Band I - Konstruktion und Berechnungen von Verbindungen, Lagern, Wellen - Zweite Auflage.* Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1981. ISBN 3-540-06809-0.

Quellenverzeichnis

- [Niem05] **Niemann, Gustav, Winter, Hans und Höhn, Bernd-Robert. 2005.** *Maschinenelemente - Band 1: Konstruktion und Berechnungen von Verbindungen, Lagern, Wellen - 4. Auflage.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. ISBN 3-540-25125-1.
- [paet03] **paetec. 2003.** *Formelsammlung - Formeln, Tabellen, Daten.* 2. Auflage. Berlin: paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH, 2003. ISBN 3-89818-700-4.
- [Popo10] **Popov, Valentin. 2009, 2010.** *Kontaktmechanik und Reibung.* 2. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, 2010. ISBN 978-3-642-13301-5.
- [SAS14] **SAS Institute Inc. 2014.** *Using JMP 11.* Second Edition. Cary: SAS Institute Inc., 2014. ISBN 978-1-61290-935-6.
- [Scha02] **Schaeffler KG. 2002.** *Technisches Taschenbuch.* Würzburg: Stürtz GmbH, 2002.
- [Schem37] **Schemberger, Gerhard. 1937.** *Untersuchung über die Spannungsverteilung, Drehsteifigkeit und Drehwechselfestigkeit der Hirth-Verzahnung.* Stuttgart: 1937.
- [Schü11] **Schürmann, Erich. 2011.** *Kupplung. DE 10 2010 047 466 A1 DE,* 06. Oktober 2011. Patent.
- [Schü19] **Schürmann, Erich.** *Schürmann-Verzahnung.* [Online] Invention GmbH. [Zitat vom: 04. Januar 2019.] <http://www.invention.org>.
- [Shaa14] **Shaabany, Ghaidaa. 2014.** Untersuchung und Vergleich formschlüssiger Wellenverbindungen als Basis zur Auslegung einer innovativen Kreisbogenstirnverzahnung. *Masterarbeit.* Dortmund: 2014.
- [Sieb10] **Siebertz, K., van Bebber, D. und Hochkirchen, T. 2010.** *Statistische Versuchsplanung - Design of Experiments (DoE).* 1. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. ISBN 978-3-642-05492-1.
- [VDI2230-1] **VDI 2230 Blatt 1. 2015.** Systematische Berechnung hochbeanspruchter Schraubenverbindungen. *Zylindrische Einschraubenverbindungen.* Düsseldorf: Verein Deutscher Ingenieure e. V., 2015. ICS 21.060.10.
- [Voit07] **Voith Turbo GmbH. 2007.** Voith - Druckschriften Voith Turbo Antriebstechnik und Fluidtechnik. *Voith.* [Online] Juni 2007. [Zitat vom: 26. Mai 2016.] http://resource.voith.com/vt/publications/downloads/648_d_g699_de_voith-hirth-stirnverzahnung.pdf.
- [Voith15] **Voith Turbo Schneider Propulsion GmbH & Co. KG. 2015.** Voith - Druckschriften Voith Turbo Antriebstechnik und Fluidtechnik. *Voith.* [Online] Juli 2015. [Zitat vom: 10. 06 2016.] http://resource.voith.com/vt/publications/downloads/2218_d_g2354_de_ordinal-voith-hirth-verzahnungen.pdf.
- [Witt13] **Wittel, Herbert, et al. 2013.** *Roloff/Matek Maschinenelemente.* 21. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2013. ISBN 978-3-658-02326-3.
- [Zieg11] **Ziegner, Manfred. 2011.** Gasturbinen. [Vorlesungsfolien zum WS 11/12]. Dortmund: 2011.