Sebastian KOLLHOFF, Bielefeld

Transferprozesse am Beispiel der Bruchrechnung

„There is no such thing as guaranteed transfer of knowledge, insight and ability from one context or domain to another. Transfer certainly occurs and can be brought about, but if it is to take place in a controlled way it has to be cultivated“ (Niss 1999, 22).

Wie Niss (1999) im Eingangszitat resümiert, geschieht ein Transfer nicht von selbst, sondern bedarf einer gezielten Lernentwicklung und -Unterstützung. Die Fähigkeit, bestehendes Wissen in neuen und unbekannten Situationen zu aktivieren und anzuwenden, hängt im Wesentlichen von der Qualität der vorhandenen Wissensstrukturen ab (vgl. Steiner 2006). Sie müssen tragfähig, hinreichend vernetzt und flexibel sein, um bereichsunabhängig aktiviert werden zu können. Insbesondere im Hinblick auf ein fortgesetztes Mathematiklernen bedarf es einer stetigen Weiterentwicklung, Reorganisation und Anpassung vorhandener Grundvorstellungen (vgl. vom Hofe & Blum 2016). In diesem Zusammenhang ist es hilfreich, Transfer nicht als ein Produkt im Sinne einer abgeschlossenen Transferleistung zu betrachten, sondern als einen Prozess der Übertragung auf ein neues Anwendungsgebiet zu beschreiben, wobei die Art der Übertragung sowie der Ursprung und das Ziel der Übertragung eindeutig zu identifizieren sind (vgl. Kollhoff 2017).

Im Zentrum der Beschreibung von Transferprozessen steht der *konzeptuelle Kern* als elementarer Gegenstand des Transfers. Dieser kann durch spezifische Begriffs- bzw. Grundvorstellungsaspekten beschrieben werden und bildet den semantischen Rahmen für *operative Handlungen* im Sinne von grundlegenden Verfahren. Hinzu kommen *Repräsentationen*, die den Aufbau tragfähiger mentaler Modelle der repräsentierten mathematischen Objekte unterstützen und auf diese Weise u.a. ein operatives Handeln auf mentaler Ebene und eine Interpretation in realen Anwendungssituationen ermöglichen (vgl. vom Hofe & Blum 2016). Transferprozesse können somit zur Entwicklung und Erweiterung des konzeptuellen Kerns beitragen.

Im Folgenden wird anhand einer Aufgabenserie und Schülerprodukten aus einer Studie zur Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung elementarer Bruchzahlvorstellungen (vgl. Kollhoff 2017) dargestellt, wie Transferprozesse normativ beschrieben werden können. Hiermit wird eine Grundlage für die unterrichtliche Anbahnung sowie die deskriptive Analyse und Rekonstruktion von Transferprozessen gelegt. Ziel dieser Darstellung ist es exemplarisch aufzuzeigen, inwieweit sich die normativ in Aufgaben abgebildeten Transferprozesse in den individuellen Bearbeitungen der Lernenden widerspiegeln.

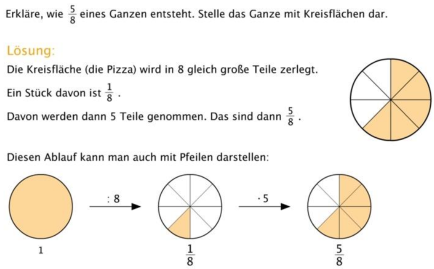

Abb. 1: Bruchherstellungsverfahren

Im Kern der dargestellten Aufgabenserie steht das Bruchherstellungsverfahren als zentraler Aspekt der Grundvorstellung von Brüchen als Anteile eines Ganzen: Das Ganze wird in n gleich große Teile geteilt, jeder Teil entspricht $\frac{1}{n}$ und m von diesen Teilen sind $\frac{m}{n}$ des Ganzen. Die *operative Handlung* zur Bruchherstellung besteht in der Anwendung der Operatoren $:n$ zum Teilen des Ganzen in n gleich große Teile und $\cdot\, m$ zum Vervielfachen eines Teils. Diese operative Handlung wird zudem in einem Pfeilschema als ikonische *Repräsentation* anhand einer Kreisdarstellung veranschaulicht, wobei der Operator $:n$ als Einteilen des Ganzen in n gleich große Teile und der Operator $\cdot\, m$ als Färben m dieser Teile übersetzt wird.

Im Hinblick auf eine fortschreitende Begriffsentwicklung mit dem Ziel eines Operierens auf Zahlenebene ist es notwendig, die Herstellungshandlung von der enaktiven und ikonischen Ebene auf die symbolische Ebene der Zahlen zu übersetzen und von konkreten Repräsentationsobjekten, wie einem Kuchen oder einer Pizza, loszulösen.

In der hier berichteten Studie haben die Lernenden neben dem oben dargestellten ein weiteres digitales animiertes Lösungsbeispiel zur Herstellung des Bruchs $\frac{3}{8}$ anhand einer Rechteckdarstellung bearbeitet. In direkter Folge auf die Bearbeitung der Lösungsbeispiele folgten zwei analoge unvollständige Lösungsbeispiele, von denen das erste mit Bearbeitungshinweisen (A1) versehen ist, sodass ein *angeleitetes reproduktives Anwenden* des Bruchherstellungsverfahrens erforderlich war, und das zweite ohne Bearbeitungshinweise (A2) ein *selbstständiges reproduktives Anwenden* erforderte. Auf die reproduktiven Aufgaben folgen Aufgaben zur Darstellung von Brüchen an einer Strecke (A3) und zum Ergänzen eines Anteils zu einem Ganzen (A4), die ein *adaptives Anwenden* des Bruchherstellungsverfahrens erfordern.

Die Bearbeitungen von Michael

Im Folgenden werden die Bearbeitungsergebnisse der Aufgabenserie von Michael hinsichtlich der erforderlichen Transferprozesse analysiert.

In den Michael Bearbeitung von A1 ist zu erkennen, dass er die korrekten Operatoren zu Herstellung des Bruchs $\frac{4}{5}$ an den entsprechenden Stellen im vorgegebenen Pfeilschema eingetragen hat und ihm somit die *angeleitete Reproduktion* des Herstellungsverfahrens auf symbolischer Ebene gelingt. Insbesondere ist zu erkennen, dass auch die entsprechenden Zwischenergebnisse korrekt einträgt.

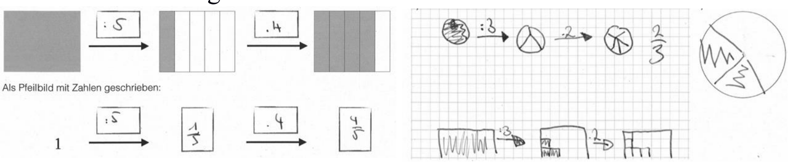

Abb. 2: Michaels Lösungen von der Aufgaben A1b (links) und A2a (rechts)

Bei der erstmaligen *selbstständigen Reproduktion* des Verfahrens in A2, in der für die Herstellung des Bruchs $\frac{2}{3}$ kein Pfeilschema und insbesondere keine ikonische Repräsentation als Bearbeitungshilfe vorgegeben ist, zeigt sich jedoch, dass Michael die Operatoren zur Bruchherstellung nicht mit den entsprechenden Herstellungshandlungen verknüpft: Michael überträgt die Darstellungsform in einem Pfeilschema und er bestimmt erneut die korrekten Operatoren zur Herstellung des Bruchs. Analog zu den Darstellungen im vorhergehenden Unterrichtsmaterial zeichnet er auch die zu den Operatoren zugehörigen ikonischen Darstellungen der Start- und Endzustände der jeweiligen Herstellungshandlungen, einmal anhand einer Kreisdarstellung und darunter zusätzlich anhand eines Rechtecks. Während er in seiner Kreisdarstellung den ersten Operator $:3$ korrekt mit dem Einteilen des Ganzen in drei (annähernd) gleich große Teile übersetzt, interpretiert er diesen Operator in seiner Rechteckdarstellung als Einzeichnen von drei zwar gleich großen Teilen, die jedoch nicht das Ganze in drei gleich große Teile einteilen. Den zweiten Operator $\cdot 2$ interpretiert er unabhängig von der Darstellungsform nicht als Vervielfachen eines Teils, sondern als Hinzufügen zweier weiterer Teile. In seiner Bruchdarstellung rechts neben der Herstellungsbeschreibung ist zudem zu erkennen, die Darstellungen in seinem Pfeilschema nicht mit seiner separaten Bruchdarstellung übereinstimmen.

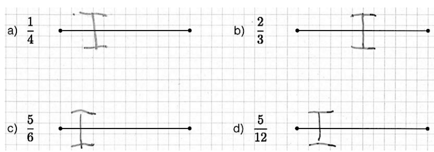

Abb. 3: Michaels Lösungen von A3

Insgesamt kann anhand von Michaels Bearbeitungen der Aufgaben A1 und A2 festgestellt werden, dass es ihm gelingt die *operative Handlung* in Form der zwei Teiloperatoren zur Bruchherstellung selbstständig anzuwenden, obwohl er diese mit fehlerhaften Herstellungshandlungen in die Darstellungsebene übersetzt.

In Michaels Bruchdarstellungen an einer Strecke in Aufgabe 3 sind seine Schwierigkeiten bei der Darstellung von Brüchen deutlich zu erkennen.

Anstelle entsprechend der Herstellungsoperatoren das Ganze zunächst in gleich große Teile zu teilen und von diesen dann die gesuchte Anzahl zu färben, zeichnet Michael die Brüche nach Augenmaß auf Grundlage seiner noch sehr unpräzisen Größenvorstellungen ein (vgl. Abb. 3). Insgesamt ist in seinen Darstellungen nicht zu erkennen, dass er das Bruchherstellungsverfahren für die Darstellung von Brüchen in einer Strecke anwenden kann.

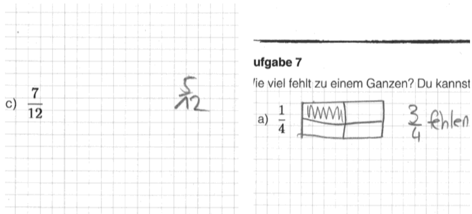

Abb. 4: Michaels Lösung von Aufgabe 4

In Aufgabe 4 sollen die Lernenden zu vorgegebenen Brüchen den fehlenden Anteil zu einem Ganzen bestimmen, wodurch ein *adaptives Anwenden* des Bruchherstellungsverfahrens gefordert ist. Dies gelingt Michael in Aufgabenteil a): Er stellt den bereits sehr vertrauten Bruch $\frac{1}{4}$ korrekt in einem Rechteck dar und zeichnet den angegebenen Anteil ein. Anhand dieser Darstellung leitet er durch Abzählen den zu einem Ganzen fehlenden Anteil ab. Er versucht dasselbe Vorgehen auch in Aufgabenteil b) anzuwenden, hat jedoch Schwierigkeiten bei der ikonischen Darstellung des Bruchs $\frac{5}{8}$. Anstelle einer Einteilung in acht gleich große Teile, zeichnet er eine Einteilung mit lediglich sechs gleich großen Teilen, von denen er zudem nur eines färbt. Für die Bestimmung des fehlenden Anteils zu einem Ganzen nutzt er diese Darstellung jedoch nicht, sondern er ergänzt diesen und die weiteren Brüche auf Zahlenebene.

Insgesamt ist in den Bearbeitungen von Michael zu erkennen, dass das Bruchherstellungsverfahren nur zum Teil auf neue Anwendungssituationen übertragen kann. Ihm gelingt es stets die entsprechenden Herstellungsoperatoren für einen Bruch zu bestimmen, hat jedoch deutliche Schwierigkeiten bei der Verknüpfung der *operativen Handlung* mit den anschaulichen *ikonischen Repräsentationen*. Es kann somit geschlossen werden, dass ihm die Erweiterung des konzeptuellen Kerns nur teilweise gelingt.

Literatur

vom Hofe, R., & Blum (2016). „Grundvorstellungen“ as a Category of Subject-Matter Didactics. In: *Journal für Mathematik-Didaktik 37(Supplement 1),* 225–254.

Kollhoff, S. (2017). Analyse und Rekonstruktion von Transferprozessen in Schülerinteraktionen. In: U. Kortenkamp, & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 549-552). Münster: WTM-Verlag.

Niss, M. (1999). Aspect of the nature and state of research in Mathematics Education. In: *Educational Studies in Mathematics, 40*, S. 1-24.

Steiner, G. (2006). Lernen und Wissenserwerb. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Anwendung Psychologie. Pädagogische Psychologie* (S. 137-201). Weinheim: Beltz PVU.