

„Wie kommt man drauf?“ – Ergebnisse aus einem Tutorium über Methoden des mathematischen Arbeitens

In einer Umfrage im Sommersemester 2017 (Krapf, 2017) am Campus Koblenz der Universität Koblenz-Landau zeigte sich das Bedürfnis vieler Lehramtsstudierender nach einer Unterstützungsmaßnahme im Bereich der Methoden des mathematischen Arbeitens in der Studieneingangsphase. Ein Forschungsprojekt soll daher klären, welche Form von Hilfestellung sich dafür eignet. Dazu wird seit dem Wintersemester 2017/18 ein von studentischen Hilfskräften angeleitetes interaktives Tutorium angeboten, in welchem die Teilnehmenden einen methodischen Input sowie Unterstützung bei der Bearbeitung des wöchentlichen Übungsblattes erhalten. Im Folgenden wird die Konzeption des Tutoriums anhand von Best-Practice-Beispielen erläutert und es werden erste Evaluationsergebnisse präsentiert.

1. Theoretischer Hintergrund

In der Studieneingangsphase im Mathematikstudium sind die Studierenden vielfältigen Herausforderungen ausgesetzt. Auf der inhaltlichen Ebene erwartet sie ein regelrechter Abstraktionsschock (Reichersdorfer et al., 2013) und sie müssen innerhalb kürzester Zeit eine neue Fachsprache erlernen (Hefendehl-Hebeker, 2016), die sich durch eine hohe Informationsdichte auszeichnet. Zudem erfordert der Übergang von der Schule zur Hochschule eine Anpassung der Lernstrategien (Rach & Heinze, 2013) und der Arbeitsweisen im Fach Mathematik.

Eine Umfrage im Sommersemester 2017 unter 139 Studierenden (Krapf, 2018) zeigt, dass zwar 94,9% der Studierenden die Übungen regelmäßig besucht, sich aber deutlich weniger Studierende regelmäßig aktiv in der Übungsstunde beteiligen (48,6%) oder die wöchentlichen Übungsblätter zur Korrektur abgeben (37,4%). Die Studie belegt, dass die aktive Beteiligung und die Abgabe der Übungsblätter, jedoch nicht der Besuch der Übung, signifikant mit dem Klausurerfolg korreliert. Die Ergebnisse zeigen andererseits auch, dass sich die Mehrheit der Studierenden mehr Unterstützung bei der Bearbeitung der Übungsblätter wünscht. Dabei fällt es vielen nicht nur schwer geeignete Beweisideen oder Problemlösestrategien zu finden, sondern auch mathematische Sachverhalte formal korrekt aufzuschreiben.

2. Konzeption

Basierend auf den Ergebnissen der Umfrage (Krapf, 2018) wird seit dem Wintersemester 2017/18 im Rahmen der Vorlesung *Elementarmathematik*

vom *höheren Standpunkt*, welche von erstsemestrigen Lehramtsstudierenden belegt wird, ein zusätzliches Tutorium mit methodischem Fokus angeboten, das den Teilnehmenden den Studienanfang erleichtern soll. Das Tutorium verfolgt zwei Ziele: Erstens, die Förderung von methodischen Kompetenzen, insbesondere mathematische Arbeitsmethoden, Beweis- und Problemlösestrategien, schriftliche und mündliche mathematische Kommunikation. Dies geschieht in der Form eines Methodenblattes, welches einerseits methodische Inputs und Tipps zur Klärung häufiger Fehlerquellen und andererseits einfache Übungsaufgaben bietet, welche interaktiv in Kleingruppen während des Tutoriums bearbeitet werden. Zweitens soll das Tutorium den Studierenden ermöglichen, die Aufgaben des aktuellen Übungsblatts in Gruppenarbeit zu lösen und dabei Fragen zu den Aufgaben sowie zur Vorlesung zu klären. Die Verlagerung des Lernortes von zu Hause an die Universität gewährt den Studierenden zudem eine regelmäßige Bearbeitungszeit.

3. Best-Practice-Beispiele

Das Konzept des Tutoriums soll anhand von zwei Methodenblättern illustriert werden. Das erste Beispiel befasst sich mit dem Aufschreiben von Beweisen. Zuerst werden den Studierenden einige Tipps an die Hand gegeben. So soll beispielsweise darauf geachtet werden, dass jede Variable eingeführt wird, üblicherweise in der Form „Sei $n \in \mathbb{N}^*$ “, und dass keine Variable innerhalb eines Beweises doppelt belegt wird. Weitere Tipps umfassen den Einsatz logischer Symbole wie Äquivalenzpfeile oder Quantoren sowie Stilregeln. Um diese Merkregeln zu üben, sollen die Studierenden im Anschluss einige schlecht formulierte Beweise verbessern, welche basierend auf typischen Fehlern Studierender im ersten Semester erstellt wurden.

Beh. $a \sim b \Leftrightarrow \exists ! a-b$ ist Äquivalenzrelation.

Bew.

- reflexiv: $a \sim a \Rightarrow \exists ! (a-a=0) \Rightarrow \exists ! 0 \checkmark$
- symmetrisch: zu zeigen: $b \sim a \Rightarrow \exists ! b-a$

$$\begin{aligned} a-b &= 2k \\ b-a &= -a-b = -2k = \underbrace{\exists !}_{\in \mathbb{Z}} 2(-k) \quad \checkmark \end{aligned}$$
- transitiv: $\exists ! (a-b) \wedge \exists ! (b-c) = \exists ! (a-c)$

$$\begin{aligned} a-b &= 2k \\ b-c &= 2l \Rightarrow a-c = (a-b) + (b-c) = 2k + 2l \\ &= \text{gerade} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Abb. 1: Aufgabe aus dem Methodenblatt über das Aufschreiben von Beweisen

Das oben dargestellte Beispiel enthält mehrere typische Fehler, obwohl die wesentlichen Argumente korrekt sind. Beim Beweis der Reflexivität zeigen die Pfeile in die falsche Richtung; statt aus der Teilbarkeit von 0 durch 2 die Reflexivität zu folgern, wird die ohnehin triviale Umkehrung gezeigt. Bei

der Symmetrie wird einerseits das Gleichheitszeichen mit einem Äquivalenzpfeil verwechselt, und andererseits die Annahme, dass a und b ganze Zahlen mit $a \sim b$ sind, weggelassen. Auch im Beweis der Transitivität findet sich eine häufige Fehlerquelle: Der Umgang mit Variablen. Statt zwei verschiedene Variablen k und l wird hier zweimal dieselbe Variable k gewählt.

Ein zweites Methodenblatt soll den Studierenden dabei helfen, eine geeignete Beweismethode auszuwählen. Dabei wird eine Kategorisierung der verschiedenen Methoden nach der syntaktischen Form der zu beweisenden Aussage angegeben. Dadurch soll beispielsweise erkannt werden, dass die Nichtexistenz eines mathematischen Objektes üblicherweise mit einem indirekten Beweis gezeigt wird, oder dass eine Äquivalenz durch Aufspaltung in zwei Implikationen bewiesen wird. Um dies zu üben, sollen die Studierenden anschließend in Gruppenarbeit für eine Liste von Aussagen entscheiden, welche Methode sich für deren Beweis am besten eignet.

Aufgabe 1. Welche Beweismethode würden Sie für folgende Behauptungen verwenden?

- (a) Für alle $x, y > 0$ gilt $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- (b) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist irrational.
- (c) Wenn a^2 ungerade ist, so ist a ungerade.
- (d) Aus $n \mid ab$ für $n, a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ folgt nicht $n \mid a$ oder $n \mid b$.
- (e) Die Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x = 0$ ist lösbar.
- (f) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$.
- (g) In einer $(n + 1)$ -elementigen Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 2n\}$ gibt es immer zwei Zahlen, die teilerfremd sind.
- (h) Jede Quadratzahl hat entweder Rest 0 oder Rest 1 bei der Division durch 4.
- (i) Eine natürliche Zahl n ist genau dann gerade, wenn $n + 1$ ungerade ist.
- (j) Für Mengen A und B ist $A \cup B = B$ ist nicht äquivalent zu $A = \emptyset$.
- (k) Die Gleichung $x^2 - 4y - 3 = 0$ hat keine ganzzahligen Lösungen.
- (l) Für Mengen A, B gilt $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ genau dann, wenn $A = B$.
- (m) Es gibt ein Dreieck mit Flächeninhalt 1 cm².
- (n) Die Aussage "für alle $j, k, n \in \mathbb{N}$ mit $j, k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{j} = \binom{n}{k+j}$ " ist falsch.
- (o) Die Anzahl der Diagonalen in einem n -Eck beträgt $\frac{n(n-3)}{2}$.

Abb. 2: Aufgabe aus dem Methodenblatt über die Auswahl von Beweismethoden

Weitere Methodenblätter befassen sich mit mathematischen Definitionen, dem Umgang mit Indizes, beispielsweise in Summen- und Produktzeichen, oder dem Unterschied zwischen Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten.

4. Evaluationsergebnisse

Um das neue Übungskonzept zu evaluieren, wurde zu Beginn der zweiten Hälfte des Wintersemesters 2017/18 eine Umfrage unter 64 Teilnehmenden der Vorlesung *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* durchgeführt (Fröhlich, 2018). Die Mehrheit der Studierenden, insgesamt 59, waren dabei Studierende des Lehramts Mathematik. Erstaunlicherweise haben etwas mehr Studierende (73,4%) angegeben, das Tutorium „immer“ zu besuchen

als die Übung (71,9%), obwohl es sich beim Tutorium im Gegensatz zur Übung um ein freiwilliges Zusatzangebot handelt. Lediglich 12,6% der Studierenden gaben an, das Tutorium „selten“ oder „nie“ zu besuchen. Während 63,5% der Studierenden die Anforderungen der Übung größtenteils als „zu hoch“ oder „eher zu hoch“ bewerteten, so hielten 76,2% der Studierenden die Anforderungen ans Tutorium für „angemessen“. In Interviews (Thomas, 2018) wurde besonders die Gruppenarbeit positiv hervorgehoben. Eine Beurteilung der einzelnen Methodenblätter mit 42 Teilnehmenden am Semesterende (Thomas, 2018) ergab, dass alle Methodenblätter in einer vierstufigen Likert-Skala im Schnitt als „hilfreich“ bis „eher hilfreich“ für den Lernprozess eingestuft wurden.

5. Diskussion und Ausblick

Sowohl die hohe Teilnahmequote als auch die überwiegend positive Bewertung des Tutoriums zeigen, dass sich das neue Konzept bewährt hat. Die Beurteilung deutet darauf hin, dass das Tutorium den Studierenden den Übergang zwischen Schule und Hochschule erleichtert. Insbesondere die kooperative Lernatmosphäre ist dabei von großer Bedeutung. Eine umfassendere Evaluation im Wintersemester 2018/19 sowie eine Langzeitstudie über den Effekt der methodischen Unterstützung auf den Erfolg in weiteren mathematischen Fachveranstaltungen sind geplant.

Literatur

- Fröhlich, S. (2018). Implementierung und Evaluation eines Übungskonzepts zur Unterstützung der Studierenden in der Studieneingangsphase. Bachelorarbeit an der Universität Koblenz-Landau.
- Krapf, R. (2018). Auswirkungen einer aktiven Beteiligung am Übungsbetrieb auf den Studienerfolg und mögliche Unterstützungsmaßnahmen in der Studieneingangsphase. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1067 – 1070). Münster: WTM-Verlag.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen in der Studieneingangsphase* (S. 16-30). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Rach, S. & Heinze, A. (2013). Welche Studierenden sind im ersten Semester erfolgreich? Zur Rolle von Selbsterklärungen beim Mathematiklernen in der Studieneingangsphase. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 34(1), 121–147.
- Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2014). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In I. Bausch et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 37–53). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Thomas, J.B. (2018). Gestaltung und Evaluation eines Übungskonzeptes zur Aktivierung der Studierenden in der Studieneingangsphase im Fach Mathematik. Bachelorarbeit an der Universität Koblenz-Landau.