Moritz ZESSIN, Gießen

Konzeption berufsfeldbezogener Aufgaben für das gymnasiale Lehramt in der Linearen Algebra

In den fachmathematischen Vorlesungen ihres Studiums beklagen Lehramtsstudierende häufig einen fehlenden Bezug zwischen Schul- und Hochschulmathematik (Hefendehl-Hebeker, 2013). Zudem weisen Studierende in der Linearen Algebra häufig Schwierigkeiten beim Begriffslernen auf (Britton & Henderson, 2009). Um diesen auch an der JLU Gießen beobachteten Befunden im Rahmen des Projektes „Berufsfeldbezug" zu begegnen, wurden für eine Anfängervorlesung der Linearen Algebra u. a. Übungsaufgaben mit Berufsfeldbezug entwickelt. Die Konzeption dieser Aufgaben wird im Folgenden beschrieben und anhand eines Beispiels illustriert.

Rahmenbedingungen an der Universität Gießen

Die Studierenden des Gymnasiallehramts mit Unterrichtsfach Mathematik belegen in ihren ersten beiden Semestern die Module „Lineare Algebra 1 und 2". Diese Module haben jeweils einen Umfang von vier Semesterwochenstunden Vorlesung sowie zwei Semesterwochenstunden Übung. Auf einem wöchentlichen, zur Prüfungszulassung verpflichtenden Übungsblatt werden den Studierenden vier Aufgaben gestellt, von denen im Rahmen des Projektes jeweils eine Aufgabe einen Berufsfeldbezug aufweist. Die Inhalte aller Aufgaben sind prüfungsrelevant.

Aus diesen Rahmenbedingungen ergeben sich bereits erste Konsequenzen für die Konzeption der Übungsaufgaben mit Berufsfeldbezug: Die Aufgaben werden im Rahmen einer „normalen" Linearen Algebra-Veranstaltung eingesetzt, in der berufsfeldbezogene Inhalte kein unmittelbarer Teil der Vorlesung sind. Sie müssen daher mit schulischem Vorwissen und den „üblichen" Inhalten der Vorlesung zu lösen sein. Zudem setzen die Aufgaben aufgrund des frühen Zeitpunkts im Studium an der Bearbeitung der ersten Diskontinuität am Übergang von der Schule zur Hochschule an (Bauer, 2012). Sie sollen den Studierenden helfen, Verbindungen zwischen bekannten Inhalten der Schulmathematik und den Vorlesungsinhalten zu entdecken und ihr Vorwissen aus der Schule zu nutzen. Hierbei wird immer wieder auch auf Notationen der Schule und auf Ausschnitte aus Schulbüchern zurückgegriffen, um die Verbindungen sichtbar zu machen.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Theoretische Grundlagen der Aufgabenkonzeption

Durch den Einsatz der Aufgaben mit Berufsfeldbezug werden zwei zentrale Ziele verfolgt: Einerseits sollen Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik aufgezeigt werden, andererseits soll ein vertieftes Begriffsverständnis der Studierenden gefördert werden.

Schwarz & Herrmann (2015) haben in einer Analyse von Schul- und Hochschullehrbüchern herausgearbeitet, dass es zwischen Schul- und Hochschulmathematik in der Linearen Algebra vielfältige Beziehungen gebe, diese jedoch häufig nicht unmittelbar ersichtlich seien. Begriffe der Schulmathematik seien oft Spezialfälle der allgemeineren Begriffe der Hochschulmathematik und müssen als solche von den Lernenden wiedererkannt und miteinander verknüpft werden. Beispiele hierfür sind Geraden und Ebenen als Spezialfälle affiner Unterräume oder Spiegelungen und Drehungen als Spezialfälle linearer Abbildungen. Offensichtlicher sind diese Zusammenhänge etwa bei Linearen Gleichungssystemen und der Matrizenrechnung. Insbesondere ist zu beobachten, dass die Spezialfälle der Schule hierbei meist Inhalte der analytischen Geometrie sind. Ausgehend von diesem Befund werden in den entwickelten Aufgaben mit Berufsfeldbezug Begriffe aus der Vorlesung mit den häufig geometrisch geprägten Begriffen der Schulmathematik in Verbindung gebracht.

Entsprechend dieser Verbindung symbolisch-abstrakter und geometrisch-anschaulicher Begriffe bietet sich zur Förderung des Begriffsverständnisses die Registertheorie von Raymond Duval (2006) an. Demnach seien mathematische Objekte für die Lernenden nur durch ihre Darstellungen zugänglich. Um ein umfassendes Verständnis eines Begriffs entwickeln zu können, ist es nach Duval entscheidend, sich mit einem Begriff in verschiedenen Darstellungsformen (Registern) auseinanderzusetzen und diese ineinander überführen zu können. So lerne man zu unterscheiden, welche Eigenschaften einer Darstellung das mathematische Objekt ausmachen und welche lediglich vom Register abhängen. Daher sollten Lerngelegenheiten dazu anregen, „Darstellungen zu wechseln [...], um ein tieferes Verständnis der abstrakten mathematischen Objekte aufzubauen“ (Laakmann, 2012, S. 37). Die entwickelten Aufgaben mit Berufsfeldbezug beinhalten somit häufig Darstellungswechsel zwischen verschiedenen Registern. Als Register in der Linearen Algebra wurden symbolische, algebraische und geometrische Darstellungen (Hillel, 2000) sowie verbale und grafisch-schematische Darstellungen (z.B. Venn-Diagramme) identifiziert. Außerdem beziehen die Aufgaben aus der Schule bekannte Begriffe der analytischen Geometrie mit ein. Zudem sollen die Aufgaben mit Berufsfeldbezug den Studierenden einen Zugang zu einem neu eingeführten Begriff ermöglichen, der nicht unmittelbar ein formales Begriffsverständnis von ihnen abverlangt, indem sie sich zuerst mit Eigenschaften und Beispielen des Begriffs auseinandersetzen (Bikner-Ahsbahs & Schäfer, 2013).

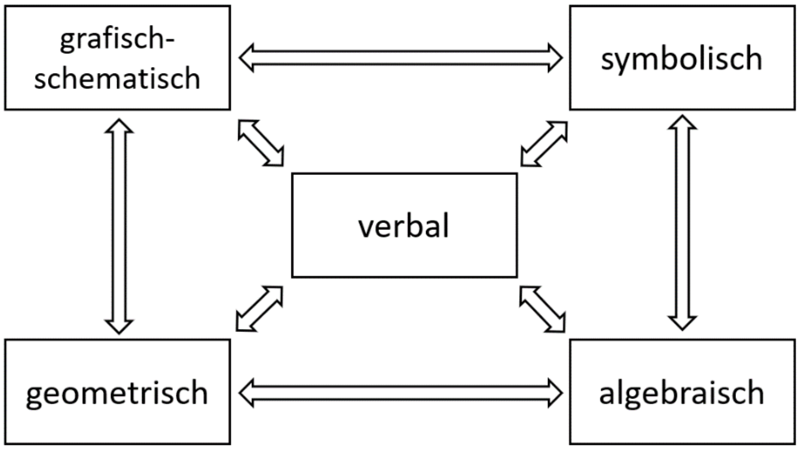

Abb. 1: Visualisierung möglicher Darstellungswechsel in der Linearen Algebra

Ein Aufgabenbeispiel mit Berufsfeldbezug

1. Unterräume des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

(a) Wir definieren folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ beziehungsweise des $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

(i) Stellen Sie die Mengen $U_i, i \in \{1,2,3,4\}$ grafisch dar.

(ii) Erklären Sie jeweils für $U_i, i \in \{1,2,3,4\}$ anhand der Zeichnung, ob U_i ein Unterraum ist. Gehen Sie hierbei explizit auf die Unterraumkriterien ein.

(iii) Zeigen oder widerlegen Sie formal, dass $U_i, i \in \{1,2,3,4\}$ ein Unterraum ist.

(b) Seien $g_1 : \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Unterräume des $\mathbb{R}^2$.

(i) Geben Sie g_1 und g_2 in Mengenschreibweise an.

(ii) Skizzieren Sie jeweils $g_1 \cap g_2, g_1 \cup g_2$ und $g_1 + g_2$ in einem Koordinatensystem und erklären anhand der Zeichnungen, ob jeweils ein Unterraum vorliegt.

(iii) Seien V und W Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- $V \cap W$ ist ein Unterraum.
- $V \cup W$ ist ein Unterraum.
- $V + W$ ist ein Unterraum.

Abb. 2: Aufgabenbeispiel zu Unterräumen des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Im Fokus des Aufgabenbeispiels steht das Durchführen von Darstellungswechseln durch die Studierenden: In den Aufgabenteilen (a) und (b) sollen die angegebenen Mengen grafisch dargestellt werden, was einem Darstellungswechsel vom algebraischen in das geometrische Register entspricht. Anschließend sollen die Unterraumkriterien an den Zeichnungen erklärt werden, womit die Studierenden die symbolisch formulierten Unterraumkriterien in einer geometrischen Darstellung wiedererkennen müssen. In beiden Aufgabenteilen ist dies einer Beweisaufgabe vorgelagert, sodass die Studierenden bereits Vorstellungen und Ideen entwickeln können, bevor sie einen formalen Beweis führen. Diese Reihenfolge der Teilaufgaben soll die Studierenden anleiten, mathematische Sätze vor einer Beweisführung zuerst an einem Beispiel zu erkunden und Darstellungswechsel durchzuführen, um Beweisideen zu entwickeln. Ein Aspekt, der in dieser Aufgabe jedoch nur angedeutet ist, besteht darin, dass die Studierenden in Aufgabenteil (b) eine schulische Notation in eine Mengenschreibweise überführen, die ihnen aus der Vorlesung bekannt ist.

Literatur

Bauer, T. (2012). *Analysis-Arbeitsbuch: Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bikner-Ahsbahs, A. & Schäfer, I. (2013). Eine Aufgabenkonzeption für die Anfängervorlesung im Lehramt Mathematik. In Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung,* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Britton, S. & Henderson, J. (2009). Linear Algebra revisited: an attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technologies,* 40(7), 963-974.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 103-131.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In Ableitinger, C., Kramer, J. & Prediger, S. (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung,* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In Dorier, J.-L. (Hrsg.), *On the Teaching of Linear Algebra,* Dordrecht: Kluwer.

Laakmann, H. (2012). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schwarz, B. & Herrmann, P. (2015). Bezüge zwischen Schulmathematik und Linearer Algebra in der hochschulischen Ausbildung angehender Mathematiklehrkräfte – Ergebnisse einer Dokumentenanalyse. *Mathematische Semesterberichte,* 62, 195-217.