

Total-reelle Linearsysteme auf algebraischen Kurven

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Der Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Dimitri Manevich

im November 2021.

Dissertation

Total-reelle Linearsysteme auf algebraischen Kurven

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter: Prof. Dr. Daniel Plaumann (TU Dortmund)

Zweitgutachter: Prof. Kris Shaw, Ph.D. (Universität Oslo)

Tag der mündlichen Prüfung: 09.05.2022

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Leitfaden	2
1.2	Hauptergebnisse	4
1.3	Konventionen	5
1.4	Veröffentlichungen	5
1.5	Danksagung	5
2	Grundlagen zur Divisorentheorie	7
2.1	Reelle Kurven und reelle Punkte	7
2.2	Divisoren auf Kurven	14
3	Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven	23
3.1	Unverzweigte reelle Kurven	23
3.2	Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen Räumen	30
3.3	Huismans Vermutung in gerade-dimensionalen Räumen	42
4	Divisorenschranken für reelle Kurven	47
4.1	Die reelle Divisorenschranke	48
4.2	Divisorenschranken für Kurven mit vielen Komponenten	53
4.3	Divisorenschranken für $(M - 2)$ -Kurven	57
4.4	Die kanonische Divisorenklasse	61
4.5	Untere Divisorenschranken und Gonality reeller Kurven	67
4.6	Eine Übersicht zu $N(X)$	70
4.7	Singuläre Kurven	71
5	Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen	76
5.1	Die multivariate Hermite-Methode	76

Inhaltsverzeichnis

5.2	Kanonische Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$	85
5.3	Ein Gegenbeispiel im Fall $g = 2$	93
5.4	Ebene Quartiken	95
6	Ausblick und offene Fragen	101
7	Literaturverzeichnis	108

1 Einleitung

In der vorliegenden Dissertation beschäftigen wir uns mit der Frage nach der Existenz von total-reellen Divisoren in vollständigen Linearsystemen auf reellen Kurven: Es sei X eine reelle Kurve positiven Geschlechts $g \geq 1$. Für jedes $k \geq 1$ gibt es einen \mathbb{R} -Morphismus

$$\varphi^k : \text{Sym}^k X \rightarrow J_X$$

von der symmetrischen k -Potenz von X in die Jacobische Varietät J_X . Dieser ist für $k = g$ birational (vgl. [60, Kap. III, Thm. 5.1]). Schränken wir den Morphismus φ^k auf die Menge der \mathbb{R} -rationalen Punkte ein und fixieren einen reellen Punkt $P_0 \in X(\mathbb{R})$, so erhalten wir die Abbildung

$$\varphi_{\mathbb{R}}^k : \text{Div}_+^k(X) \rightarrow \text{Pic}^0(X), D \mapsto [D - kP_0],$$

welche – laut dem Satz von Riemann-Roch – für alle $k \geq g$ surjektiv ist (vgl. [55, Kap. 7, Thm. 3.26]). Gehen wir einen Schritt weiter, so stellt sich die Frage, ob die Abbildung

$$\psi^k : X(\mathbb{R})^k \rightarrow \text{Pic}^0(X), (P_1, \dots, P_k) \mapsto [P_1 + \dots + P_k - kP_0]$$

für gewisse $k \in \mathbb{N}$ surjektiv ist. Historisch gesehen war es zuerst Krasnov, welcher sich einer ähnlichen Fragestellung widmete. Bereits im Jahr 1983 untersuchte er die Abbildung

$$\psi^1 : X(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pic}^0(X), P \mapsto [P - P_0]$$

und bewies, dass das Bild von ψ^1 die Gruppe $\text{Pic}^0(X)$ erzeugt, sofern X eine M -Kurve ist (vgl. [49, Thm. 6.3.2]). In derselben Arbeit vermutete er, dass dies für beliebige Kurven gelte. Er bewies seine Vermutung ein Jahr später selbst (vgl. [50, Abs. 2]). Krasnovs Resultat liefert noch nicht die gewünschte Aussage über die Surjektivität der Abbildungen ψ^k . Erst im Jahr 2000 bewies Scheiderer mit rein topologischen Metho-

1 Einleitung

den, dass es eine (kleinste) Zahl $N(X) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass die Abbildungen ψ^k für alle $k \geq N(X)$ surjektiv sind (vgl. [82, Thm. 2.7]). Er verallgemeinerte seinen Beweis auf den Fall von Kurven über reell abgeschlossenen Körpern. Wir nennen $N(X)$ die *reelle Divisorenschranke von X* , da sie angibt, dass für $d \geq N(X)$ jedes vollständige Linear-system vom Grad d auf X einen total-reellen Divisor enthält. Das Studium der reellen Divisorenschranke, welches durch Scheiderers Resultat initiiert wurde, streift viele mathematische Bereiche – vor allem geometrische, kombinatorische und analytische. Es ist Ausgangspunkt zahlreicher, noch ungelöster Vermutungen.

1.1 Leitfaden

In Kapitel 2 knüpfen wir an die von Serre und Grothendieck entwickelte Theorie abstrakter algebraischer Varietäten an und stellen die grundlegenden Charakteristika reeller Kurven vor (vgl. [85] und [28]). Ist X eine \mathbb{R} -Varietät, womit ein schematisches Objekt gemeint ist, so bewies Huisman (vgl. [37, Prop. 8]), dass die Menge der reellen Punkte $X(\mathbb{R})$ zusammen mit der eingeschränkten Garbe $\mathcal{O}_X|_{X(\mathbb{R})}$ eine klassische reelle Varietät (vgl. [6]) bilden. Wir führen diesen Zusammenhang besonders auf der Ebene der Punkt-mengen aus und verdeutlichen, dass wir zwar reelle Polynomgleichungen

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{mit} \quad f_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m$$

betrachten, aber in den komplexen Nullstellenmengen die Punkte innerhalb derselben Bahn unter der komplexen Konjugation miteinander identifizieren. In Abschnitt 2.2 fassen wir die notwendige Divisorentheorie zusammen: Ist ein Divisor D auf einer reellen Kurve X gegeben, so erläutern wir, unter welchen Bedingungen seine assoziierte invertierbare Modulgarbe $\mathcal{O}_X(D)$ sehr ampel ist, also eine abgeschlossene Immersion in einen projektiven Raum definiert.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns zunächst mit Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven, welche einen direkten Bezug zu Fragen über die reelle Divisorenschranke besitzen. Aus einer Formel von Plücker (vgl. [1, Kap. I, Aufg. C-14]) folgt, dass eine komplexe Kurve genau dann unverzweigt ist, wenn sie eine rationale Normalenkurve ist. Die Charakterisierung unverzweigter reeller Kurven ist dagegen komplizierter: Im Jahr 2003 bewies Huisman (vgl. [40, Thm. 3.1]), dass es unverzweigte reelle Kurven beliebig hohen Grades und Geschlechts in ungerade-dimensionalen projektiven

Räumen gibt. Er stellte in seiner Arbeit die Vermutung auf, dass es sich dabei stets um M -Kurven handeln müsse (vgl. [40, Verm. 3.4]). Diese Vermutung widerlegen wir in ihrer Allgemeinheit. Die hierfür konstruierten Raumkurven dienen in der vorliegenden Dissertation als laufende Beispiele für viele geometrische Phänomene: Sie besitzen keine (reduzierten) total-reellen Hyperebenenschnitte und zeigen zudem einen Fehler in einer Behauptung über $N(X)$ für Kurven vom Geschlecht zwei auf (vgl. [3, Abs. 2.3]). Wir widmen uns schließlich der von Huisman aufgestellten Vermutung über unverzweigte reelle Kurven in gerade-dimensionalen projektiven Räumen (vgl. [40, Verm. 4.6]) und beweisen ihre Gültigkeit für kanonische Kurven und für generische Kurven ungeraden Grades.

In Kapitel 4 beschäftigen wir uns mit der reellen Divisorenschranke. Für rationale und elliptische Kurven gilt offenbar $N(X) = 1$. Ist X eine M -Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, so bewies Huisman, dass $N(X) \leq 2g - 1$ gilt (vgl. [38, Thm. 4.2]). Monnier verallgemeinerte Huismans Beweis und zeigte die gleiche Beschränkung für $(M - 1)$ -Kurven (vgl. [63, Thm. 3.6]). Mithilfe von Resultaten über die Gonality reeller Kurven konstruierte Monnier Linearsysteme mit komplex-konjugierten Basispunkten und folgerte die uniform gültige untere Schranke $N(X) \geq g + 1$ (vgl. [63, Abs. 6]). Unter der Annahme eines bisher ungelösten, aber plausiblen Spezialfalls der oben erwähnten Vermutung in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ beweisen wir die Beschränkung $N(X) \leq 2g + 3$ für $(M - 2)$ -Kurven. Im weiteren Verlauf stellen wir uns die Frage nach der möglichen Positionierung der Zusammenhangskomponenten einer ebenen Kurve. Wir zeigen die Existenz ebener Kurven mit vorgegebenen topologischen Invarianten auf, sodass das zugrunde liegende Geradenlinearsystem total-reell ist. Überdies formulieren wir einige Verbesserungen unterer Schranken für $N(X)$, indem wir Monniers Methode auf neue Resultate über die Gonality reeller Kurven anwenden. Wir schließen das Kapitel mit dem Studium der reellen Divisorenschranke für singuläre Kurven, welches durch Monnier initiiert wurde (vgl. [64]), ab und zeigen, wie sich die gefundenen Resultate zu nicht-singulären Kurven auf singuläre Kurven auswirken.

In Kapitel 5 stellen wir die parametrisierte Hermite-Methode vor (vgl. [53, Abs. 5]). Diese zielt darauf ab, parametrisierte Gleichungssysteme zu lösen und fußt auf der Partitionierung des Parameterraumes in lokal abgeschlossene Teilmengen, für welche jeweils eine gültige Gröbnerbasis angegeben wird (vgl. [66]). Mithilfe von rechnerischen Techniken zur Bestimmung von Punkten in semi-algebraischen Mengen können wir die (Nicht-)Existenz von (reduzierten) total-reellen Hyperebenenschnitten auf einer reel-

1 Einleitung

len Kurve X prüfen. In einigen Minimalbeispielen zeigen wir damit Verbesserungen von unteren Schranken für $N(X)$ auf. Als ein Hauptresultat halten wir fest, dass es unendlich viele ebene Quartiken X mit vielen Zusammenhangskomponenten gibt, für welche $N(X) = 5$ gilt. Diese Bestimmung wird – im Gegensatz zu Monniers Konstruktion mit komplex-konjugierten Basispunkten – durch basispunktfreie Linearsysteme vom Grad vier erreicht, welche nicht total-reell sind.

In Kapitel 6 fassen wir die vielversprechenden offenen Fragen und Ansätze zusammen, welche sich aus den Erkenntnissen der vorherigen Kapitel ergeben. Zusätzlich stellen wir eine analytische Methode vor, welche es uns erlaubt, das Bild der Abel-Jacobi Abbildung einer ebenen Kurve zu schätzen. Dazu verwenden wir das in `Maple` zur Verfügung stehende Paket `algcurves` (vgl. [16]). Wir erläutern den Nutzen und die sich ergebende Schwierigkeit dieses Ansatzes für die Berechnung der reellen Divisorschranke.

1.2 Hauptergebnisse

1. Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen projektiven Räumen 3.2.1 ist falsch für gewisse Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Es gelten:
 - a. Es gibt unverzweigte rationale Raumkurven von beliebig hohem geraden Grad $d' \geq 4$, welche aus genau einem Oval bestehen.
 - b. Es seien $d' \geq 2$ und $e \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gibt unverzweigte Raumkurven vom Grad $d' + 2e + 1$ und geradem Geschlecht $2e(d' - 1)$, welche aus genau einer Komponente bestehen. (vgl. Satz 3.2.10)
2. Huismans Vermutung in gerade-dimensionalen projektiven Räumen 3.3.1 ist wahr für kanonische Kurven und für generische Kurven ungeraden Grades. (vgl. Sätze 3.3.7 und 3.3.6)
3. Es sei X eine $(M - 2)$ -Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Unter Annahme von Vermutung 4.3.2 gilt $N(X) \leq 2g + 3$. (vgl. Satz 4.3.4)
4. Es sei $d \geq 3$ gegeben und $1 \leq s \leq \binom{d-1}{2} + 1$. Dann existiert eine ebene Kurve vom Grad d , Geschlecht $\binom{d-1}{2}$ und mit s Komponenten, sodass ihr Geradenlinearsystem total-reell ist. (vgl. Satz 4.4.3)
5. Es gibt unendliche viele kanonische Raumkurven $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ mit einem Oval und mit zwei Ovalen, sodass $N'(X) \geq 7$ gilt. (vgl. Korollar 5.2.4)
6. Es seien $d' \geq 2$ und $e \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Kurven W_e aus Konstruktion 3.2.9

- erfüllen $N(W_\epsilon) \geq d' + 2e + 2$. (vgl. Korollar 4.5.8)
7. Die Behauptungen in [3, Prop. 2.3.3 und Prop. 2.3.5] sind nicht korrekt: Die Kurve W_{2-s} aus Beispiel 3.2.11 liefert ein explizites Gegenbeispiel, da $N(W_{2-s}) \geq 6$ gilt. (vgl. Satz 5.3.2)
 8. Es gibt unendlich viele ebene M -Quartiken $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ mit $N(X) = N'(X) = 5$. (vgl. Korollar 5.4.3)
 9. Es gibt unendlich viele ebene $(M - 1)$ -Quartiken $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ mit $N(X) = N'(X) = 5$. (vgl. Korollar 5.4.4)
 10. Für die Quartik $Q := \mathcal{V}_+(\mathbf{x}^4 + \mathbf{y}^4 - \mathbf{z}^4) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ gilt $N(Q) \geq 5$. (vgl. Kapitel 6)

1.3 Konventionen

Für die gesamte Dissertation legen wir die üblichen Konventionen der modernen Algebra fest, wie sie beispielsweise in Hartshornes Werk [33, S. xvi] oder im Textbuch von Atiyah et al. [2] formuliert sind.

1.4 Veröffentlichungen

Der überwiegende Teil der zum Zwecke der Erstellung der vorliegenden Dissertation erarbeiteten Hauptresultate wurde bereits in den folgenden Ausarbeitungen veröffentlicht.

1. M. Kummer & D. Manevich. *On Huisman's conjectures about unramified real curves*. Adv. Geom., 21(4):545-549, 2021. (Quelle: [52])
2. H. P. Le, D. Manevich & D. Plaumann. *Computing totally real hyperplane sections and linear series on algebraic curves*. Preprint arXiv:2106.13990, 2021. (Quelle: [54])

Dabei deckt die erstgenannte Quelle die Ergebnisse aus Kapitel 3 ab. Die zweite Quelle fasst die Ergebnisse aus Kapitel 5 zusammen.

1.5 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Daniel Plaumann für die spannende Themenstellung und die Betreuung der vorliegenden Dissertation bedanken. Sowohl die vielen interessanten und motivierenden Gespräche als auch der durch ihn initiierte Austausch

1 Einleitung

mit vielen Mathematiker*innen trugen zu neuen Forschungsansätzen bei. Aber auch jenseits der Forschung schaffte er eine angenehme Arbeits- und Lehratmosphäre. Ferner möchte ich meinen Dank an Mario Kummer aussprechen. Seine Einladung zum Forschungsaufenthalt im Mai 2019 und das Projekt zu Huismans Vermutungen waren der Ausgangspunkt vieler neuer Fragen und Ideen. Außerdem danke ich Matilde Manzaroli für ihre Hinweise zum Satz 4.4.3. Ebenfalls möchte ich mich bei meinen Kolleg*innen der Arbeitsgemeinschaft Algebra und Geometrie – besonders bei Amelie, Jannik und Roland – für die mathematischen und nicht-mathematischen Diskussionen bedanken. Schließlich richtet sich mein besonderer Dank an meine Familie und an Amelie für die stetige Unterstützung und Motivation.

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

Eine elementare Aufgabe der linearen Algebra besteht darin, Lösungen linearer Gleichungssysteme der Form

$$L_i(x_1, \dots, x_n) = b_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m$$

mit linearen Polynomen $L_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ und Skalaren $b_i \in K$ zu bestimmen. Diese Lösungen – und viele weitere Fragestellungen der linearen Algebra – hängen kaum vom zugrunde liegenden Körper K ab. Die algebraische Geometrie verallgemeinert dieses Problem und fragt nach den Eigenschaften der Lösung polynomieller Gleichungssysteme der Form

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m$$

mit Polynomen $f_i \in K[x_1, \dots, x_n]$. Diese Eigenschaften hängen so sehr vom zugrunde liegenden Körper K ab, dass bedeutende Standardwerke der algebraischen Geometrie grundsätzlich voraussetzen, dass K algebraisch abgeschlossen ist (vgl. Harris [32], Hartshorne [33], Hulek [42], Schafarewitsch [87]).

In der vorliegenden Dissertation widmen wir uns der reellen Kurventheorie. Zwar gibt es durchaus Werke, welche den Fall $K = \mathbb{R}$ behandeln, jedoch fehlt es zumeist an dem für uns notwendigen Fokus auf die Divisorentheorie (vgl. Bochnak et al. [6], Mangolte [56]). Da wir zudem an einigen Stellen den Vergleich zur komplexen Kurventheorie ziehen (vgl. Abschnitt 3.1), stellen wir in diesem Kapitel die wesentlichen Unterschiede und Gemeinsamkeiten heraus, welche sich durch die Wahl des Grundkörpers ergeben.

2.1 Reelle Kurven und reelle Punkte

Im ersten Abschnitt stellen wir die grundlegende Theorie algebraischer K -Varietäten vor, wobei wir uns auf die Fälle $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ fokussieren. Darüber hinaus erläutern wir den Zusammenhang zwischen der klassischen und der schematischen Sichtweise und

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

verdeutlichen die Unterschiede auf der Ebene der Punktmenge.

Definition 2.1.1. Ein Paar (X, \mathcal{O}_X) bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen \mathcal{O}_X heißt *lokal geringter Raum*, falls die Halme $\mathcal{O}_{X,p}$ für alle $p \in X$ lokale Ringe sind.

Wir legen die moderne Definition einer Prägarbe und die einer Garbe zugrunde (vgl. [33, S. 61]). Beide können ihre Werte in einer beliebigen Kategorie annehmen, jedoch verzichten wir auf ein genaueres Studium dessen und verweisen auf [28, Kap. 0, Abs. 3.1], da wir uns nur auf die üblichen Kategorien¹ beschränken. Ein *Morphismus (lokal geringter Räume)*

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

besteht aus einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und einem Morphismus $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ von Garben von Ringen auf Y , sodass die induzierten Ringhomomorphismen $f_p^\# : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ für alle $p \in X$ lokal sind, also $(f_p^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,p}) \supset \mathfrak{m}_{Y,f(p)}$ erfüllen². Die beiden wichtigsten Beispiele lokal geringter Räume, welche wir in Beziehung setzen möchten, sind die folgenden:

1. Es sei K ein Körper und $V \subset K^n$ eine algebraische Menge. Die Garbe der regulären Funktionen R_V auf V ist eine Garbe von K -Algebren (vgl. [61, Kap. 2, Abs. c]). Im Fall $K = \mathbb{R}$ nennt man das Paar (V, R_V) eine (*klassische*) *affine reelle Varietät* (vgl. [85] und [6, Def. 3.2.9]).
2. Es sei R ein Ring. Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum, welcher isomorph zum Spektrum $(\text{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ von R ist. Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum, welcher eine offene Überdeckung affiner Schemata besitzt (vgl. [33, Kap. II, Abs. 2]).

Um den Grundkörper K einzubeziehen, nennen wir einen lokal geringten Raum (X, \mathcal{O}_X) einen *K-Raum*, wenn \mathcal{O}_X eine Garbe von K -Algebren ist. Ein Morphismus (lokal geringter Räume)

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

heißt ein *Morphismus von K-Räumen*, wenn $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ ein Morphismus von Garben von K -Algebren ist. Die schematische Sichtweise kann wie folgt ergänzt werden: Es

¹Damit sind Gruppen, Ringe, Moduln, Algebren und Körper gemeint.

²Die Bedingung $f_p^\#(\mathfrak{m}_{Y,f(p)}) \subset \mathfrak{m}_{X,p}$ ist hierzu äquivalent.

2.1 Reelle Kurven und reelle Punkte

sei S ein Schema. Ein S -Schema (oder: *Schema über S*) ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $\sigma : X \rightarrow S$. Sind zwei S -Schemata $\sigma : X \rightarrow S$ und $\tau : Y \rightarrow S$ gegeben, so heißt ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ ein S -Morphismus, wenn $\sigma = \tau \circ f$ gilt. Wir fixieren einen Grundkörper K und sagen, dass ein Schema X ein K -Schema (oder: *Schema über K*) ist, falls es ein Schema über $\text{Spec}K$ ist. Die $\text{Spec}K$ -Morphismen nennen wir abkürzend K -Morphismen.

Proposition 2.1.2. *Ein Schema (X, \mathcal{O}_X) ist genau dann ein K -Schema, wenn es ein K -Raum ist.*

Die in Proposition 2.1.2 formulierte Charakterisierung über die Garbe \mathcal{O}_X entspricht in mancher Literatur der Definition eines K -Schemas (vgl. [61, Kap. 3]). Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema. Aus der Tatsache, dass die kanonische Abbildung

$$\text{Mor}(X, \text{Spec}K) \rightarrow \text{RHom}(K, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

bijektiv ist (vgl. [33, Kap. II, Aufg. 2.4]), wird deutlich, dass ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ genau dann ein K -Morphismus ist, wenn er ein Morphismus von K -Räumen ist.

Definition 2.1.3. Es sei X ein K -Schema. Ein *Schnitt von X* ist ein K -Morphismus $f : \text{Spec}K \rightarrow X$.

Wir bezeichnen die Menge der Schnitte mit $X(K)$. Über den Restklassenkörper $\kappa(\mathfrak{p}) := \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_{X,\mathfrak{p}}$ eines Punktes $\mathfrak{p} \in X$ besitzt diese eine Beschreibung auf der Ebene der Punktmenge von X .

Proposition 2.1.4. [33, Kap. II, Aufg. 2.7] *Für ein K -Schema X gilt $X(K) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \kappa(\mathfrak{p}) = K\}$.*

Die in $X(K)$ enthaltenen Punkte heißen K -rational. Die Proposition 2.1.4 erlaubt es uns, einen Zusammenhang zwischen einem K -Schema und einer algebraischen Menge zu ziehen, indem wir uns auf die Ebene der Punktmenge begeben³: Es sei $V := \mathcal{V}(I) \subset K^n$ die durch das Ideal $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ definierte algebraische Menge und $X := \text{Spec}K[x_1, \dots, x_n]/I$ das zu I assoziierte affine K -Schema. Mithilfe des Hilbertschen Nullstellensatzes stellen wir fest, dass es eine Bijektion zwischen V und der Menge $X(K)$ der K -rationalen Punkte von X gibt. Ein Tupel $(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) \in V$ entspricht dabei dem maximalen Ideal $\langle x_i - \mathfrak{a}_i \mid i = 1, \dots, n \rangle$ des Faktorringes $K[x_1, \dots, x_n]/I$.

³Für einen Beweis dieses Zusammenhangs über algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern sei auf [23, Thm. 3.37] verwiesen.

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

Definition 2.1.5. Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ heißt eine *abgeschlossene Immersion*⁴, wenn f ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von Y ist und f_p^\sharp für alle $p \in X$ surjektiv ist.

Definition 2.1.6. Es sei X ein Schema. Ein *abgeschlossenes Unterschema* ist eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ zusammen mit einer abgeschlossenen Immersion $(i, i^\sharp) : (Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$, wobei $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusion beschreibt.

Definition 2.1.7. Ein *projektives K-Schema* (oder: *projektives Schema über K*) ist ein K-Schema X , welches K-isomorph zu einem abgeschlossenem Unterschema von \mathbb{P}_K^n ist.

Die abgeschlossenen Unterschemata eines affinen Schemas sowie die projektiven K-Schemata können genau charakterisiert werden (vgl. [33, Kap. 2, Abs. 5]): Sie sind zu (homogenen) Idealen assoziiert.

Der gewöhnliche projektive Raum über einem Vektorraum W , welcher die Geraden von W parametrisiert, wird mit $\mathbb{P}(W)$ bezeichnet. Es sei $\mathbb{P}(K^{n+1})$ der projektive n -Raum über K . Ist $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}(K^{n+1})$, so ist das Ideal $\langle a_j x_i - a_i x_j \mid 0 \leq i, j \leq n \rangle$ ein homogenes Primideal von $K[x_0, \dots, x_n]$, welches $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ nicht enthält, also ein Element von $\mathbb{P}_K^n := \text{Proj} K[x_0, \dots, x_n]$. Tatsächlich liefert diese Zuordnung eine Bijektion zwischen $\mathbb{P}(K^{n+1})$ und der Menge $\mathbb{P}_K^n(K)$ der K-rationalen Punkte von \mathbb{P}_K^n . Ist $I := \langle F_1, \dots, F_m \rangle$ ein homogenes Ideal, so stehen die Punkte der projektiven algebraischen Menge $\mathcal{V}_+(\langle F_1, \dots, F_m \rangle) \subset \mathbb{P}(K^{n+1})$ in Bijektion zu den K-rationalen Punkten von $\text{Proj} K[x_0, \dots, x_n]/I$.

Definition 2.1.8. Es sei K ein Körper.

1. Eine *affine K-Varietät* (oder: *affine Varietät über K*) ist ein affines K-Schema, welches isomorph zum Spektrum einer endlich erzeugten K-Algebra ist.
2. Eine *(algebraische) K-Varietät* (oder: *(algebraische) Varietät über K*) ist ein K-Schema X , welches eine endliche offene Überdeckung $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$ durch affine K-Varietäten X_i besitzt.
3. Eine *projektive K-Varietät* (oder: *projektive Varietät über K*) ist ein projektives K-Schema.

Ist ein zugrunde liegender Körper K gegeben, so handelt es sich ab sofort stets sowohl um K-Objekte als auch um K-Pfeile, auch wenn wir den K-Zusatz hin und wieder unterschlagen.

⁴Oftmals wird abkürzend von einer *Einbettung* gesprochen.

Definition 2.1.9. Ein K -Schema X heißt *vom endlichen Typ (über K)*, wenn X quasi-kompakt ist und für jedes offene affine Unterschema $\text{Spec} A \hookrightarrow X$ gilt, dass A eine endlich erzeugte K -Algebra ist.

Um den Zusammenhang zu anderen Definitionen einer (algebraischen) K -Varietät zu ziehen (vgl. [37, Def. 6]), halten wir fest, dass ein K -Schema genau dann vom endlichen Typ ist, wenn es eine (algebraische) K -Varietät ist.

Definition 2.1.10. Ein Schema X heißt *reduziert*, wenn alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,p}$ reduzierte Ringe sind, also keine nilpotenten Elemente außer 0 besitzen.

Ein reduziertes Schema ermöglicht es, die regulären Funktionen $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ als gewöhnliche Abbildungen zu betrachten. Dadurch ziehen wir einen Zusammenhang zu einer anderen Definition von K -Morphismen (vgl. [61, S. 62]). Es sei X eine K -Varietät und \bar{K} der algebraische Abschluss von K . Wir bezeichnen mit X_{abg} die Menge der abgeschlossenen Punkte⁵ von X . Zu einer globalen regulären Funktion $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ und einem Punkt $p \in X_{\text{abg}}$ bilden wir das Element $\bar{f}_p \in \kappa(p) \subset \bar{K}$. Dies definiert eine Abbildung

$$\rho_f : X_{\text{abg}} \rightarrow \bar{K}, p \mapsto \bar{f}_p$$

und die Zuordnung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Abb}(X_{\text{abg}}, \bar{K}), f \mapsto \rho_f$$

definiert einen Gruppenhomomorphismus. Es sei F_X die Garbe abelscher Gruppen, welche durch die Zuordnung $U \mapsto \text{Abb}(U_{\text{abg}}, \bar{K})$ definiert ist.

Proposition 2.1.11. [55, Kap. 2, Prop. 4.4] *Es sei X eine K -Varietät. Der Morphismus von Garben abelscher Gruppen $\mathcal{O}_X \rightarrow F_X$ ist genau dann injektiv, wenn X reduziert ist.*

Definition 2.1.12. Ein Schema X heißt *integer*, wenn X reduziert und (topologisch) irreduzibel ist.

Es sei X eine integrale K -Varietät mit generischem Punkt ζ . Der lokale Ring $K(X) := \mathcal{O}_{X,\zeta}$ ist ein Körper, der sogenannte (*rationale*) *Funktionenkörper* von X . Ein Vorteil ist, dass sowohl alle Ringe $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, welche für $U \neq \emptyset$ Integritätsringe sind, als auch alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,p}$ Teilringe von $K(X)$ sind. Es gilt $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_{X,p}$.

⁵Es seien im Folgenden stets abgeschlossene Punkte gemeint, wenn von Punkten gesprochen wird.

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

Um die Punktmenge einer K -Varietät X vollständig zu bestimmen, müssen wir den Basiswechsel X_L für eine algebraische Körpererweiterung L/K untersuchen.

Proposition 2.1.13. *Es sei X eine K -Varietät und L/K algebraisch.*

1. *Es gilt $\dim X_L = \dim X$.*
2. *Ist X reduziert und L/K separabel, so ist X_L reduziert.*
3. *Ist X irreduzibel und $X(K) \subset X$ dicht, so ist X_L irreduzibel.*

Beweis. Die erste Aussage kann über die lokale Dimension verifiziert werden. Die zweite Aussage kann über die Reduziertheit der lokalen Ringe geprüft werden. Folglich können wir annehmen, dass X affin ist und auf [55, Kap. 3, Abs. 3.2.2] verweisen. Für die dritte Aussage verweisen wir auf [88, Lem. 33.8.11]. \square

Es sei X eine K -Varietät und L/K eine Galoiserweiterung. Es ist $\text{Spec} L$ eine affine K -Varietät und wir können die Menge $X(L)$ der K -Morphismen $\text{Spec} L \rightarrow X$ bilden. In $X(L)$ liegen die L -wertigen Punkte von X , jedoch besitzt diese Menge – im Gegensatz zu $X(K)$ – keine Beschreibung als eine Teilmenge von X . Ist $X := \text{Spec} K[x_1, \dots, x_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, so können die L -wertigen Punkte von X durch $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_m) \subset L^n$ beschrieben werden. Ist $X := \text{Proj} K[x_0, \dots, x_n] / \langle F_1, \dots, F_m \rangle$, so stehen die L -wertigen Punkte in Korrespondenz zu $\mathcal{V}_+(F_1, \dots, F_m) \subset \mathbb{P}(L^{n+1})$.

Proposition 2.1.14. [55, Kap. 3, Prop. 2.19] *Es sei X eine K -Varietät und L/K galoissch mit Galoisgruppe G . Die Menge $G \backslash X(L)$ der Bahnen kann mit einer Teilmenge von X identifiziert werden. Die Menge $X(L)^G$ der Fixpunkte entspricht $X(K)$.*

Beispiel 2.1.15. Es sei $X := \text{Proj} \mathbb{R}[x, y, z] / \langle x^4 + y^4 - z^4 \rangle$. Die \mathbb{R} -rationalen Punkte von X können mit $\mathcal{V}_+(x^4 + y^4 - z^4) \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ identifiziert werden.

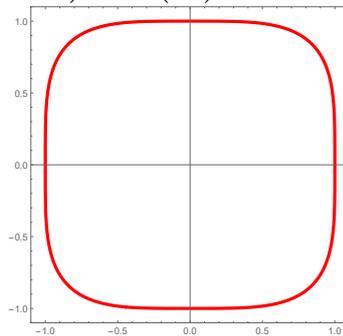


Abbildung 2.1: Die Punktmenge $X(\mathbb{R})$ in der affinen Karte $z = 1$.

Beispielsweise ist $[1, 0, 1]$ ein \mathbb{R} -rationaler Punkt von X , welcher dem homogenen Primideal $\langle y, x - z \rangle$ entspricht. Neben dem generischen Punkt $\zeta = \langle 0 \rangle$ existieren noch

die *nicht-reellen Punkte* (oder: *komplex-konjugierten Paare*) von X – beispielsweise $[0, 1, i]^\sigma := \{[0, 1, i], [0, 1, -i]\}$. Dieser entspricht dem homogenen Primideal $\langle x, y^2 + z^2 \rangle$. \triangle

Definition 2.1.16. Eine K -Varietät X heißt *nicht-singulär*, wenn alle lokalen (noetherschen) Ringe $\mathcal{O}_{X,p}$ reguläre Ringe sind. Eine integrale K -Varietät X heißt *normal*, wenn alle $\mathcal{O}_{X,p}$ ganz-abgeschlossen sind.

Für ein ausführliches Studium dieser Eigenschaften verweisen wir auf [23, Kap. 6]. Aus den algebraischen Bedingungen an $\mathcal{O}_{X,p}$ ist ersichtlich, dass eine integrale, nicht-singuläre K -Varietät normal ist. Die Umkehrung gilt, sofern $\dim X = 1$ ist.

Wir nutzen die oben beschriebenen Mindestanforderungen, um eine sinnvolle Definition einer Kurve formulieren zu können.

Definition 2.1.17. Eine (*reelle*) *Kurve* X ist eine projektive, integrale, nicht-singuläre \mathbb{R} -Varietät der Dimension $\dim X = 1$ und mit $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Eine \mathbb{C} -*Kurve*⁶ X ist eine projektive, integrale, nicht-singuläre \mathbb{C} -Varietät mit $\dim X = 1$.

Wir weisen darauf hin, dass eine Kurve stets eine reelle Kurve meint, welche wir ausdrücklich von \mathbb{C} -Kurven abgrenzen. Der folgende Satz zeigt, dass in vielen Fachpublikationen redundante Forderungen an eine Kurve X gestellt werden (vgl. [38, S. 84], [63, S. 339], [39, S. 351] und [40, S. 23]).

Satz 2.1.18. *Eine Kurve ist geometrisch integer und geometrisch nicht-singulär.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Proposition 2.1.13 und [37, Bem. 10]. Für die zweite Aussage verweisen wir auf [55, Kap. 4, Prop. 3.30]. \square

Definition 2.1.19. Es sei X eine Kurve und $p \in X_{\text{abg}}$. Ist $p \in X(\mathbb{R})$, also $\kappa(p) = \mathbb{R}$, so heißt p ein *reeller Punkt von X* . Ist $p \notin X(\mathbb{R})$, also $\kappa(p) = \mathbb{C}$, so heißt p ein *nicht-reeller Punkt von X* (oder: ein *komplex-konjugiertes Paar*).

Ein komplex-konjugiertes Paar wird oft durch Q^σ notiert (vgl. Beispiel 2.1.15). Dabei bezeichnet σ die komplexe Konjugation und Q ist ein Element von $X(\mathbb{C})$, sodass die Bahn von Q unter σ ein Punkt von X wird. Für Näheres über die *reelle Struktur* einer \mathbb{C} -Varietät verweisen wir auf [56, Kap. 2].

⁶Oftmals auch *Kurve über \mathbb{C}* oder *komplexe Kurve* genannt.

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

Die algebraischen Teilmengen des \mathbb{R}^n bilden die abgeschlossenen Teilmengen der *Zariski-Topologie*. Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ eine algebraische Menge und $U \subset V$ offen, so heißt eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ *regulär auf U* , wenn es für alle $x \in U$ Polynome $p, q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ und eine offene Umgebung $U' \subset U$ von x gibt mit $q(y) \neq 0$ für alle $y \in U'$ und $f(y) = p(y)/q(y)$ für alle $y \in U'$. Die \mathbb{R} -Algebra der regulären Funktionen auf U bezeichnen wir mit $\Gamma(U, \mathbb{R}_V)$. Es ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann regulär auf U , wenn es Polynome $p, q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ gibt mit $q(u) \neq 0$ und $f(u) = p(u)/q(u)$ für alle $u \in U$ (vgl. [21, Prop. 2.5]).

Proposition 2.1.20. *Es ist (V, \mathbb{R}_V) ein \mathbb{R} -Raum.*

Über \mathbb{R} können wir einen Zusammenhang zwischen einer \mathbb{R} -Varietät und einer *klassischen reellen Varietät*⁷ aufzeigen. Die Formalisierung dieses Zusammenhangs wird Huisman zugeschrieben (vgl. [37, Prop. 8] und [9, S. 183]): Es sei (X, \mathcal{O}_X) eine reduzierte affine \mathbb{R} -Varietät, sodass $X(\mathbb{R}) \subset X$ Zariski-dicht ist. Dann ist $X = \text{Spec} A$ mit $A := \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I$ für ein Ideal $I \triangleleft \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Wir setzen $V := \mathcal{V}(I) \subset \mathbb{R}^n$. Huisman hat bewiesen, dass

$$f : V \rightarrow X(\mathbb{R}), p \mapsto m_p \quad \text{und} \quad f_p^\# : A_{m_p} \rightarrow \mathbb{R}_{V,p}, \frac{a}{b} \mapsto \left(D(b), \frac{a}{b} \right)$$

einen Isomorphismus von \mathbb{R} -Räumen definieren. Folglich ist der \mathbb{R} -Raum $R(X) := (X(\mathbb{R}), \mathcal{O}_{X|_{X(\mathbb{R})}})$ isomorph zur klassischen affinen reellen Varietät (V, \mathbb{R}_V) . Die Aussage bleibt für reduzierte und separierte \mathbb{R} -Varietäten gültig, sofern auch die Definition der klassischen reellen Varietät angepasst wird. Der entscheidende Punkt der Definition 2.1.17 ist, dass die von uns definierten (reellen) Kurven Beispiele solcher \mathbb{R} -Varietäten darstellen (vgl. [37, Bem. 10]).

2.2 Divisoren auf Kurven

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst, inwieweit eine invertierbare Modulgarbe auf einer Kurve X einen Morphismus in einen projektiven Raum definiert. Die Frage, unter welchen Bedingungen dieser Morphismus eine abgeschlossene Immersion ist, ist für algebraisch abgeschlossene Grundkörper leicht zu beantworten (vgl. [33, Kap. II, Prop. 7.3]). Wir formalisieren in diesem Abschnitt die häufig verwendete Tatsache, dass diese Antwort für reelle Kurven bestehen bleibt.

⁷Im Sinne von [6, Abs. 3.2].

Definition 2.2.1. Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema. Eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{F} ist *erzeugt von globalen Schnitten*, wenn es eine Teilmenge $\{s_i\}_{i \in I} \subset \Gamma(X, \mathcal{F})$ gibt, sodass die Keime $\{s_{i,p}\}_{i \in I}$ den Halm \mathcal{F}_p als $\mathcal{O}_{X,p}$ -Modul für alle $p \in X$ erzeugen.

Eine Modulgarbe \mathcal{F} heißt *quasi-kohärent*, wenn es zu jedem $p \in X$ eine offene Umgebung $p \in U \subset X$ und eine exakte Sequenz der Form

$$\bigoplus_{j \in J} \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$$

gibt. Es ist \mathcal{F} genau dann quasi-kohärent, wenn es eine affine offene Überdeckung von X durch $U_i := \text{Spec} A_i$ sowie A_i -Moduln M_i gibt, sodass $\mathcal{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$ gilt (vgl. [33, Kap. 2, Aufg. 5.4]). Es heißt \mathcal{F} *kohärent*, wenn die M_i sogar endlich erzeugte A_i -Moduln sind. Da wir uns in den meisten Fällen für K -Varietäten interessieren werden und diese noethersch und folglich quasi-kompakt sind, können wir annehmen, dass die obigen Überdeckungen endlich sind.

Lemma 2.2.2. *Es sei X eine K -Varietät und \mathcal{F} eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Dann gibt es einen Morphismus von \mathcal{O}_X -Modulgarben $\varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$, welcher auf globalen Schnitten surjektiv ist.*

Beweis. Es sei $\{s_i\}_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von $\Gamma(X, \mathcal{F})$ als $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -Modul. Der Morphismus

$$\varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}, (\lambda_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i s_i$$

erfüllt die obige Forderung. □

Lemma 2.2.3. *Eine Modulgarbe \mathcal{F} ist genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn es einen surjektiven Morphismus von \mathcal{O}_X -Modulgarben $\varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ gibt.*

Beweis. In der ersten Richtung nehmen wir den Morphismus φ aus Lemma 2.2.2. Die Äquivalenz folgt daraus, dass die Surjektivität von φ auf den Halmen geprüft werden kann. □

Es sei im Folgenden die Situation aus [55, Kap. 5, Aufg. 1.30] gegeben: Dafür sei X eine \mathbb{R} -Varietät und \mathcal{L} eine invertierbare \mathcal{O}_X -Modulgarbe⁸. Der Basiswechsel $X_{\mathbb{C}} := X \times_{\text{Spec} \mathbb{R}} \text{Spec} \mathbb{C}$ entsteht durch ein Faserdiagramm und wir betrachten diesen im ersten

⁸Eine invertierbare Modulgarbe wird auch *Geradenbündel* genannt.

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

Schritt als ein Schema über \mathbb{R}^9 . Es sei $\pi : X_{\mathbb{C}} \rightarrow X$ die erste Projektionsabbildung; diese ist ein \mathbb{R} -Morphismus. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} := \pi^* \mathcal{L} := \pi^{-1} \mathcal{L} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}}$ den Rückzug von \mathcal{L} unter π (vgl. [33, S. 110]). Das Zusammenspiel zwischen der komplexen und der reellen Situation ist dadurch gegeben, dass

$$\Gamma(X, \mathcal{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \Gamma(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}})$$

gilt (vgl. [88, Lem. 30.5.2]). Die Abbildung π definiert \mathbb{R} -Algebrenhomomorphismen $\pi_{\mathfrak{p}}^{\#} : \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}}$ für alle $\mathfrak{q} \in X_{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{p} := \pi(\mathfrak{q}) \in X$. Diese sind volltreu-flach (vgl. [88, Lem. 29.25.7] und [88, Def. 10.39.1]). Mithilfe von Lemma 2.2.2 nehmen wir ein Erzeugendensystem $\{s_i\}_{i \in I}$ von $\Gamma(X, \mathcal{L})$ als $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -Modul und konstruieren den zugehörigen Morphismus

$$\varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}, (f_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i s_i,$$

welcher surjektiv auf globalen Schnitten ist. Die Familie $\{s_i \otimes 1\}_{i \in I}$ ist ein Erzeugendensystem von $\Gamma(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}})$ als $\Gamma(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}})$ -Modul und wir erhalten den zurückgezogenen Morphismus

$$\pi^* \varphi : \pi^* \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \rightarrow \pi^* \mathcal{L} \quad \text{durch} \quad \pi^* \varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}, (f_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i (s_i \otimes 1).$$

Per Definition ist dieser dadurch gegeben, dass wir $\mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}}$ via $\pi_{\mathfrak{p}}^{\#}$ als $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$ -Modul betrachten. Überdies sind auch $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$ und $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}$ jeweils $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$ -Moduln. Auf der Ebene der Halme gelten

$$\left(\pi^* \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \right)_{\mathfrak{q}} \cong \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}} \cong \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}}$$

und $(\pi^* \mathcal{L})_{\mathfrak{q}} \cong \mathcal{L}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}} \cong \mathcal{L}_{\mathbb{C}, \mathfrak{q}}$. Die über π zurückgezogenen Halme können mithilfe des folgenden Lemmas mit den ursprünglichen Halmen in Verbindung gebracht werden.

Lemma 2.2.4. *Das Geradenbündel \mathcal{L} ist genau dann von globalen Schnitten erzeugt, wenn $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ es ist.*

⁹Üblicherweise ist die Bezeichnung $X_{\mathbb{C}}$ für das entstehende Schema über \mathbb{C} vorgesehen; die zweite Projektionsabbildung $\rho : X_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Spec} \mathbb{C}$ ist dabei die Strukturabbildung (vgl. [55, Kap. 3, Abs. 3.1.2]).

Beweis. Nach Lemma 2.2.3 müssen wir zeigen, dass

$$\varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}, (f_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i s_i,$$

genau dann surjektiv ist, wenn

$$\pi^* \varphi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}, (f_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} f_i (s_i \otimes 1)$$

surjektiv ist. Die Surjektivität prüfen wir auf den Halmen. Also ist zu zeigen, dass alle

$$\varphi_{\mathfrak{p}} : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{p}} \quad \text{genau dann surjektiv sind, wenn alle} \quad (\pi^* \varphi)_{\mathfrak{q}} : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}, \mathfrak{q}}$$

es sind. Dies folgt daraus, dass die \mathbb{R} -Projektionsabbildung π volltreu-flach ist und daraus, dass für $\mathfrak{q} \in X_{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{p} := \pi(\mathfrak{q}) \in X$ die Abbildung $(\pi^* \varphi)_{\mathfrak{q}}$ aus $\varphi_{\mathfrak{p}}$ durch Tensorierung mit $\mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}}$ über $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}$ entsteht. \square

Lemma 2.2.5. *Ist $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ ampel, so auch \mathcal{L} .*

Beweis. Wir nutzen die Definition aus [33, S. 153]. Es sei \mathcal{F} eine kohärente \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Da der Rückzug mit der Tensorierung verträglich ist, gilt

$$\pi^* (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes k}) \cong \pi^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}}} (\mathcal{L}_{\mathbb{C}})^{\otimes k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (vgl. [88, Lem. 17.22.1]). Da der Rückzug $\pi^* \mathcal{F}$ kohärent (vgl. [33, Kap. II, Prop. 5.8]) und $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ ampel ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die Modulgarbe $\pi^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}}} (\mathcal{L}_{\mathbb{C}})^{\otimes n}$ von globalen Schnitten erzeugt ist. Da dies auch für $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}$ gilt, folgt, dass \mathcal{L} ampel ist. \square

In der oben beschriebenen Situation setzen wir nun voraus, dass X eine Kurve ist (vgl. Definition 2.1.17). Es sei $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ sehr ampel (vgl. [33, S. 120]). Unser Ziel besteht darin, zu folgern, dass auch \mathcal{L} sehr ampel sein muss. Nach [33, Kap. II, Thm. 5.17] folgt, dass $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ ampel ist und mithilfe von Lemma 2.2.5 folgern wir, dass \mathcal{L} ampel ist. Da $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt ist, folgt aus Lemma 2.2.4, dass auch \mathcal{L} von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt ist. Letztere nennen wir $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ der zu $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ assoziierte \mathbb{R} -Morphismus: Die Mengen

$$X_i := \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathcal{L}_{\mathfrak{p}} = \langle s_{i, \mathfrak{p}} \rangle_{\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}}}\} \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, n$$

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

sind offen und überdecken X und die Abbildungen

$$\alpha_i : \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{L}), \lambda \mapsto \lambda \cdot s_i|_{X_i} \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

sind $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ -Modulisomorphismen. Auf einer offenen Menge der Form $D_+(x_i)$ von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ bilden wir die \mathbb{R} -Algebrenhomomorphismen

$$\Gamma(D_+(x_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}) \cong \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)} \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{O}_X), \frac{x_j}{x_i} \mapsto \alpha_i^{-1}(s_j|_{X_i}) \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

und erhalten die zugehörigen \mathbb{R} -Morphismen $f_i : X_i \rightarrow D_+(x_i)$ für $i = 0, \dots, n$, welche zu einem \mathbb{R} -Morphismus $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ verkleben (vgl. [33, Kap. II, Thm. 7.1]). Der Basiswechsel von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ zu $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ wird durch ein Faserdiagramm beschrieben. Wenden wir die universelle Eigenschaft dieses Diagramms auf die Abbildung $f \circ \pi : X_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ und die zweite Projektion $\rho : X_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Spec} \mathbb{C}$ an, so bekommen wir eine \mathbb{C} -Faktorisierung $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, wobei wir nun $X_{\mathbb{C}}$ als ein \mathbb{C} -Schema via ρ betrachten. Der \mathbb{C} -Morphismus f ist eine abgeschlossene Immersion, da er zu den globalen Schnitten $s_0 \otimes 1, \dots, s_n \otimes 1 \in \Gamma(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{L}_{\mathbb{C}})$ assoziiert ist und $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ als sehr ampel vorausgesetzt ist. Es sei außerdem noch zu erwähnen, dass unsere Kurve X sowie die \mathbb{C} -Kurve $X_{\mathbb{C}}$ projektiv sind, sodass wir tatsächlich von *abgeschlossenen* Immersionen sprechen können (vgl. [33, Kap. II, Bem. 5.16.1]).

Satz 2.2.6. [55, Kap. 5, Aufg. 1.30] *Der \mathbb{R} -Morphismus $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ ist eine abgeschlossene Immersion.*

Beweis. Die topologischen Bedingungen aus der Definition 2.1.5 folgen aus den Eigenschaften von $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ mithilfe des Faserdiagramms. Die Surjektivität von $f^{\#} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n} \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ kann auf der Ebene der Halmabbildungen geprüft werden. Diese stehen durch Tensorierung im Zusammenhang zu den Halmabbildungen über \mathbb{C} . Somit folgt die Aussage daraus, dass π volltreu-flach ist. \square

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Einführung in die Divisorentheorie ab. Es sei R ein Ring (stets kommutativ mit Einselement). Ein Element $a \in R$ heißt *regulär*, wenn a kein Nullteiler ist. Die Menge der regulären Elemente von R bezeichnen wir mit $\text{Reg}(R)$. Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein Schema. Für eine offene Teilmenge $U \subset X$ setzen wir

$$S(U) := \{s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid \forall p \in U : s_p \in \text{Reg}(\mathcal{O}_{X,p})\}.$$

Lemma 2.2.7. *Die multiplikative Menge $S(\mathbf{U})$ ist enthalten in $\text{Reg}(\Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{O}_X))$.*

Beweis. Ist $\Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{O}_X) = \{0\}$, so ist auch $S(\mathbf{U}) = \text{Reg}(\Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{O}_X)) = \{0\}$. Es sei also $\Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{O}_X) \neq \{0\}$ und $s \in S(\mathbf{U})$. Angenommen $s \notin \text{Reg}(\Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{O}_X))$. Dann existiert ein $t \in \Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{O}_X) \setminus \{0\}$ mit $st = 0$. Für alle $p \in \mathbf{U}$ folgt $s_p t_p = 0 \in \mathcal{O}_{X,p}$. Da $t \neq 0$ ist, existiert ein $q \in \mathbf{U}$, sodass $t_q \neq 0$ gilt. Also ist $s_q \notin \text{Reg}(\mathcal{O}_{X,q})$ im Widerspruch zu $s \in S(\mathbf{U})$. Dass $S(\mathbf{U})$ außerdem multiplikativ ist, ist leicht zu sehen. \square

Lemma 2.2.8. *[46, S. 204] Die Zuweisung $B_X : \mathbf{U} \mapsto \Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{O}_X)_{S(\mathbf{U})}$ mit den offensichtlichen Einschränkungen ist eine separierte Prägarbe von Ringen.*

Beweis. Es sei $\mathbf{U} = \bigcup_{i \in I} \mathbf{U}_i$ eine offene Überdeckung von $\mathbf{U} \subset X$. Weiter sei $\frac{s_1}{s_2} \in \Gamma(\mathbf{U}, B_X)$ mit $\frac{s_1}{s_2} \Big|_{\mathbf{U}_i} = \frac{0}{1}$ für alle $i \in I$. Dann existiert ein $t_i \in S(\mathbf{U}_i)$ mit $t_i s_1|_{\mathbf{U}_i} = 0$. Da t_i nach Lemma 2.2.7 regulär ist, folgt $s_1|_{\mathbf{U}_i} = 0$ für alle $i \in I$. Da die Garbe \mathcal{O}_X separiert ist, folgt $s_1 = 0$. \square

Wir nennen B_X die *(separierte) Prägarbe der Brüche*. Es sei auf die Richtigstellungen von Kleiman (vgl. [46]) verwiesen, welcher darauf hinweist, dass die Definition der Garbe der meromorphen Funktionen in mancher Literatur nicht korrekt ist.

Definition 2.2.9. Die Garbifizierung $M_X := B_X^+$ von B_X nennen wir die *Garbe der meromorphen Funktionen auf X* .

Eine meromorphe Funktion über einer offenen Teilmenge $\mathbf{U} \subset X$ besteht aus einer Abbildung

$$f : \mathbf{U} \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbf{U}} B_{X,p},$$

sodass für alle $p \in \mathbf{U}$ eine offene Umgebung $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$ und ein Bruch $t \in \Gamma(\mathbf{U}, B_X)$ existieren mit $f(q) = t_q$ für alle $q \in \mathbf{V}$.

Lemma 2.2.10. *Die Morphismen von Garben von Ringen $\mathcal{O}_X \rightarrow B_X$ und $B_X \rightarrow M_X$ sind injektiv.*

Eine Übersicht für das Folgende kann in [23, Kap. 11] und in [27, Par. 21] gefunden werden.

Definition 2.2.11. Die *Garbe der Divisoren auf X* ist die Garbe multiplikativer abelscher Gruppen $\text{Div}_X := M_X^*/\mathcal{O}_X^*$.

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

Die Menge der globalen Schnitte $\text{Div}(X) := \Gamma(X, \text{Div}_X)$ heißt die *Divisorengruppe von X*. Nach der Konstruktion als die Menge der globalen Schnitte einer Faktorgarbe gibt es einen Gruppenhomomorphismus

$$\text{div} : \Gamma(X, M_X^*) \rightarrow \text{Div}(X),$$

dessen Bild aus den *Hauptdivisoren* besteht. Die Elemente von $\text{Div}(X)$ werden als *Cartier-Divisoren* bezeichnet: Aus der Definition folgt, dass ein Cartier-Divisor $D \in \text{Div}(X)$ eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ zusammen mit meromorphen Funktionen $f_i \in \Gamma(U_i, M_X^*) \pmod{\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X^*)}$ liefert, sodass $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \pmod{\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)}$ für alle $i, j \in I$ gilt. Umgekehrt definiert eine solche Sammlung $(f_i, U_i)_{i \in I}$ einen Cartier-Divisor.

Definition 2.2.12. Die Faktorgruppe $\text{Cl}(X) := \text{Div}(X)/\text{Bild}(\text{div})$ heißt die *Divisorenklassengruppe von X*.

Es sei $\theta : B_X \rightarrow M_X$ der injektive Morphismus von Garben von Ringen. Durch die Verknüpfung

$$\mathcal{O}_X \times M_X \rightarrow M_X, (\alpha, f) \mapsto \theta \left(\frac{\alpha}{1} \right) \cdot f$$

wird M_X zu einer \mathcal{O}_X -Modulgarbe. Eine *gebrochene Idealgarbe* \mathcal{J} ist ein \mathcal{O}_X -Untermodul von M_X . Ist \mathcal{J} zusätzlich eine invertierbare \mathcal{O}_X -Modulgarbe, so nennen wir \mathcal{J} *gebrochen-invertierbar*.

Proposition 2.2.13. [27, Prop. 21.2.2] *Es sei \mathcal{J} eine gebrochene \mathcal{O}_X -Idealgarbe. Es ist \mathcal{J} genau dann invertierbar, wenn zu jedem $p \in X$ eine offene Umgebung $p \in U \subset X$ und ein $f \in \Gamma(U, M_X^*)$ existieren mit $\mathcal{J}|_U = f \cdot \mathcal{O}_X|_U$.*

Die meromorphe Funktion $f \in \Gamma(U, M_X^*)$ aus Proposition 2.2.13 ist dabei eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation mit $\Gamma(U, \mathcal{O}_X^*)$. Ist $D \in \text{Div}(X)$, welcher als eine Sammlung $(f_i, U_i)_{i \in I}$ dargestellt ist, so können wir die eindeutige gebrochen-invertierbare \mathcal{O}_X -Modulgarbe $\mathcal{J}|_{U_i} := f_i \cdot \mathcal{O}_X|_{U_i}$ definieren. Das hierzu inverse Ideal (vgl. [27, Kor. 21.2.3]) ist durch $\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} := f_i^{-1} \cdot \mathcal{O}_X|_{U_i}$ gegeben und wird mit $\mathcal{O}_X(D)$ bezeichnet.

Auf einer Kurve X vereinfachen sich sämtliche Begriffe deutlich: Ein *(Weil-)Divisor auf X* ist eine endliche \mathbb{Z} -Linearkombination von (abgeschlossenen) Punkten auf X der Form

$$D := \sum_{i=1}^m n_i P_i \quad (m \in \mathbb{N}_0, n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in X_{\text{abg}}).$$

Wir nehmen durchweg an, dass die Punkte P_1, \dots, P_m paarweise verschieden sind und $n_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. Aufgrund dieser Annahmen können wir die Menge

$$\text{Supp}(D) := \{P_1, \dots, P_m\}$$

bilden, den sogenannten *Träger von D*. Die Zahlen n_1, \dots, n_m heißen die *Vielfachheiten* (oder: *Multiplizitäten*) von P_1, \dots, P_m . Der Divisor D heißt *effektiv*, wenn $n_i \geq 1$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. In der speziellen Situation reeller Kurven stellen wir fest, dass ein Divisor zwei Arten von Punkten im Träger besitzen kann (vgl. Definition 2.1.19). Wir können

$$D = \sum_{i=1}^k r_i R_i + \sum_{j=1}^l m_j Q_j^\sigma$$

mit reellen Punkten $R_i \in X(\mathbb{R})$ und komplex-konjugierten Paaren $Q_j^\sigma \notin X(\mathbb{R})$ schreiben. Der *Grad von D* ist definiert durch

$$\text{deg } D := \sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l 2m_j.$$

Es ist bekannt, dass die (Weil-)Divisoren im obigen Fall den Cartier-Divisoren entsprechen (vgl. [33, Kap. II, Prop. 6.11]). Die Hauptdivisoren entsprechen Divisoren, welche durch Nullstellen und Polstellen (mit Vielfachheiten) von rationalen Funktionen definiert werden. Diese bezeichnen wir mit $\text{div}(f)$ für ein $f \in \mathbb{R}(X)$. Ab sofort schreiben wir $\text{Div}(X)$ für die Menge der (Weil-)Divisoren. Schließlich merken wir den Zusammenhang zur zuvor definierten invertierbaren \mathcal{O}_X -Modulgarbe $\mathcal{O}_X(D)$ an. Die Menge der globalen Schnitte kann durch

$$L(D) := \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in \mathbb{R}(X)^* \mid \text{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}$$

beschrieben werden. Dies ist der sogenannte *Riemann-Roch Raum von D* – ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, dessen Dimension mit $l(D) := \dim_{\mathbb{R}} L(D)$ bezeichnet wird. Das zu D assoziierte (vollständige) *Linearsystem* wird mit

$$|D| := \{D' \in \text{Div}_+(X) \mid D \sim D'\}$$

bezeichnet, wobei $\text{Div}_+(X)$ die Menge der effektiven Divisoren ist. Dieses kann in kanonischer Weise mit dem projektiven Raum $\mathbb{P}(L(D))$ über $L(D)$ identifiziert werden

2 Grundlagen zur Divisorentheorie

(vgl. [62, Kap. 5]) und aufgrund dieser Identifikation können wir $\dim |\mathbf{D}|$ für die projektive Dimension von $\mathbb{P}(L(\mathbf{D}))$ schreiben. Ist $|\mathbf{D}| \neq \emptyset$, so gilt $\dim |\mathbf{D}| = l(\mathbf{D}) - 1$.

Die *Picard-Gruppe* $\text{Pic}(\mathbf{X})$ ist identifizierbar mit der Divisorenklassengruppe. Die reellen Punkte des *Picard-Schemas* Pic wurden in [26, Abs. 2] untersucht: Aufgrund der Voraussetzung, dass $\mathbf{X}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ gilt, können Divisorenklassen, welche unter der komplexen Konjugation invariant sind, mit Divisorenklassen, welche durch einen σ -invarianten Divisor repräsentiert werden, identifiziert werden.

Definition 2.2.14. Es sei $\mathbf{d} \in \mathbb{N}_0$. Die Menge der *Divisorenklassen vom Grad \mathbf{d}* wird mit $\text{Pic}^{\mathbf{d}}(\mathbf{X})$ bezeichnet.

Bemerkung 2.2.15. Es sei \mathbf{C} eine lokal kleine Kategorie. Jedes Objekt $\mathbf{X} \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ definiert durch

$$h_{\mathbf{X}} : \mathbf{C} \rightarrow \text{Sets}, \mathbf{T} \mapsto \text{Mor}_{\mathbf{C}}(\mathbf{T}, \mathbf{X})$$

und passende Pfeile einen kontravarianten Funktor – den sogenannten *Hom-Funktor*. Die Sammlung aller kontravarianten Funktoren $\mathbf{C} \rightarrow \text{Sets}$ zusammen mit den natürlichen Transformationen bilden eine Kategorie – diese bezeichnen wir mit $\mathcal{A} := \text{KonFun}(\mathbf{C}, \text{Sets})$. Laut dem Lemma von Yoneda ist der Funktor $\mathbf{C} \rightarrow \mathcal{A}, \mathbf{X} \mapsto h_{\mathbf{X}}$ volltreu, folglich können wir \mathbf{C} als eine volle Unterkategorie von \mathcal{A} auffassen. Ein kontravarianter Funktor $F \in \mathcal{A}$ heißt *darstellbar*, wenn es ein $\mathbf{X} \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ gibt mit $F \cong h_{\mathbf{X}}$. In [60, Kap. III] wird beschrieben, dass – unter der Bedingung $\mathbf{X}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ – ein kontravarianter Funktor $P_{\mathbf{X}}^0$ auf den nicht-singulären \mathbb{R} -Varietäten definiert werden kann, welcher durch eine abelsche \mathbb{R} -Varietät $J_{\mathbf{X}}$ dargestellt wird. Es ist $J_{\mathbf{X}}$ die *Jacobische Varietät von \mathbf{X}* . △

Als abstrakte \mathbb{R} -Varietät wird die Jacobische $J_{\mathbf{X}}$ in der vorliegenden Dissertation keine Rolle spielen. In der Regel werden Aussagen über die Menge der \mathbb{R} -rationalen oder \mathbb{C} -wertigen Punkte getroffen: Es gilt nämlich $J_{\mathbf{X}}(\mathbb{R}) = \text{Pic}^0(\mathbf{X})$ und $J_{\mathbf{X}}(\mathbb{C}) = \text{Pic}^0(\mathbf{X}_{\mathbb{C}})$.

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

In diesem Kapitel untersuchen wir die im Jahr 2003 von Huisman aufgestellten Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven. Einerseits besteht die Motivation für die Untersuchung darin, dass Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen projektiven Räumen einen Bezug zur reellen Divisorenschranke im Fall von $(M-2)$ -Kurven besitzt, welcher in Kapitel 4 erläutert wird. Andererseits gibt es ein unabhängiges Interesse, das den Unterschied zwischen reeller und komplexer Theorie beschreibt: Im Gegensatz zur Situation über \mathbb{C} gibt es unverzweigte reelle Kurven beliebig hohen Grades und Geschlechts in ungerade-dimensionalen projektiven Räumen.

3.1 Unverzweigte reelle Kurven

Wir beginnen mit dem Vergleich zwischen der reellen und der komplexen Situation. Es sei X eine Kurve über K mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Nach unseren üblichen Voraussetzungen (vgl. Definition 2.1.17) ist X ein projektives, integres, nicht-singuläres Schema über K mit $\dim X = 1$ und $X(K) \neq \emptyset$ (die Voraussetzung $X(K) \neq \emptyset$ ist nur für $K = \mathbb{R}$ relevant).

Definition 3.1.1. Eine Kurve $X \subset \mathbb{P}_K^n$ heißt *nicht-ausgeartet*, wenn sie in keiner Hyperebene $H \subset \mathbb{P}_K^n$ enthalten ist.

Wir setzen im gesamten Kapitel (und sogar in der gesamten Arbeit) voraus, dass $X \subset \mathbb{P}_K^n$ nicht-ausgeartet ist. Für die Definition des Begriffs der Verzweigung brauchen wir die am Ende des Kapitels 2 vorgestellte Divisorentheorie. Es sei $D \in \text{Div}(X)$ ein Divisor. Wir nennen

$$D_{\text{red}} := \sum_{P \in \text{Supp}(D)} P$$

den zu D assoziierten reduzierten Divisor. Sein Träger enthält sämtliche Punkte aus dem Träger von D , jedoch ausschließlich mit einfacher Multiplizität. Allgemein heißt

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

ein Divisor

$$D := \sum_{i=1}^m n_i P_i \quad (m \in \mathbb{N}_0, n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, P_i \text{ paarweise verschiedene Punkte auf } X)$$

reduziert, wenn $n_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. Ist D gegeben, so heißt die ganze Zahl

$$\text{wt}(D) := \deg(D - D_{\text{red}})$$

das *Gewicht von D* . Wir werden das Gewicht ausschließlich für Divisoren untersuchen, welche durch den Schnitt der Kurve X mit einer Hyperebene H entstehen – die sogenannten *Schnittdivisoren*. In diesen Fällen gilt $\text{wt}(X \cdot H) \geq 0$.

Definition 3.1.2. Es sei $X \subset \mathbb{P}_K^n$ eine (nicht-ausgeartete) Kurve. Diese heißt *unverzweigt*, wenn

$$\text{wt}(X \cdot H) \leq n - 1$$

für alle Hyperebenen $H \subset \mathbb{P}_K^n$ gilt.

Umgekehrt heißt eine Kurve $X \subset \mathbb{P}_K^n$ *verzweigt* und $H_0 \subset \mathbb{P}_K^n$ eine *Verzweigungshyperebene*, wenn $\text{wt}(X \cdot H_0) \geq n$ gilt. Der Begriff der Verzweigung beschreibt eine Minimalitätseigenschaft: Ist $X \subset \mathbb{P}_K^n$ gegeben und $P \in X(K)$ ein K -rationaler Punkt, so existiert eine Hyperebene $H_P \subset \mathbb{P}_K^n$ mit $\text{Mult}(X \cdot H_P)(P) \geq n$ (vgl. [33, Kap. IV, Aufg. 4.6]). Eine solche Hyperebene nennen wir eine *Schmiegehyperebene an P* . Offenbar erfüllt jede Schmiegehyperebene H_P an P die Ungleichung $\text{wt}(X \cdot H_P) \geq n - 1$. Der Begriff der Verzweigung bezeichnet folglich die größte nicht-triviale untere Schranke für das Gewicht eines solchen Schnittdivisors.

Definition 3.1.3. Es sei $P \in X(K)$ ein K -rationaler Punkt einer Kurve $X \subset \mathbb{P}_K^n$. Eine Schmiegehyperebene $H_P \subset \mathbb{P}_K^n$ an P heißt eine *Wendehyperebene an P* und P heißt ein *Wendepunkt von X* , wenn $\text{Mult}(X \cdot H_P)(P) \geq n + 1$ gilt.

Ist $X \subset \mathbb{P}_K^2$ eine ebene Quadrik, so ist X unverzweigt. Für $K = \mathbb{R}$ gibt es genau drei Möglichkeiten für einen Schnitt mit einer Geraden $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$: Sie schneidet X in zwei verschiedenen reellen Punkten, sie ist tangential an einem reellen Punkt, oder sie schneidet X in einem komplex-konjugierten Paar. Im Fall eines tangentialen Schnitts ist das Gewicht des Schnittdivisors gleich eins, sonst null. Für $K = \mathbb{C}$ gibt es zwei Möglichkeiten für einen Schnitt mit einer Geraden $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Sie schneidet X in zwei verschiedenen Punkten oder sie ist tangential an einem Punkt.

Proposition 3.1.4. *Eine unverzweigte Kurve (über \mathbb{K}) besitzt keine (\mathbb{K} -rationalen) Wendepunkte.*

Bemerkung 3.1.5. Zwar sind im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nur \mathbb{R} -rationale Wendepunkte zugelassen, jedoch sind Kurven mit besonders starker Verzweigung in einem komplex-konjugierten Paar durchaus existent. Beispielsweise ist es möglich, eine ebene Quartik $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ zu konstruieren, sodass eine Gerade L mit $X \cdot L = 2Q^\sigma$ existiert, wobei $Q^\sigma \in X \setminus X(\mathbb{R})$ ein komplex-konjugiertes Paar ist. \triangle

Die Definition der Verzweigung im Fall reeller Kurven fand erst in Huismans Arbeit aus dem Jahr 2003 ihre Bedeutung (vgl. [40, Abs. 3]). Die Verzweigung von \mathbb{C} -Kurven wurde bereits lange vorher untersucht. Dabei stellte sich die folgende Sprechweise als gebräuchlich heraus.

Definition 3.1.6. Es sei $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ eine \mathbb{C} -Kurve. Die *Verschwindungssequenz an $\mathfrak{p} \in Y$* ist durch die endliche Folge

$$\mathfrak{a}(\mathcal{H}, \mathfrak{p}) := (\mathfrak{a}_0(\mathcal{H}, \mathfrak{p}), \dots, \mathfrak{a}_n(\mathcal{H}, \mathfrak{p})) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$$

mit Einträgen $\mathfrak{a}_i(\mathcal{H}, \mathfrak{p})$ gegeben, welche – in strikt aufsteigender Ordnung – sämtliche auftretende Schnittmultiplizitäten von Hyperebenen $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ mit Y an \mathfrak{p} beschreiben.

Beispiel 3.1.7. Für eine ebene \mathbb{C} -Kubik $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ können zwei Fälle auftreten: Für jeden Punkt $\mathfrak{p} \in Y$ existiert eine Hyperebene H_0 , welche nicht durch \mathfrak{p} verläuft. Außerdem gibt es eine Hyperebene H_1 , welche \mathfrak{p} transversal schneidet. Ist \mathfrak{p} ein Wendepunkt, so gilt $\mathfrak{a}(\mathcal{H}, \mathfrak{p}) = (0, 1, 3)$. Ansonsten gilt $\mathfrak{a}(\mathcal{H}, \mathfrak{p}) = (0, 1, 2)$. \triangle

Verschwindungssequenzen können für Linearsysteme definiert werden, welche nicht bloß Hyperebenenlinearsysteme und Untersysteme dieser sind. Ist $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ eine \mathbb{C} -Kurve, welche nicht linear normal ist (vgl. Definition 3.2.2), so untersuchen wir in Definition 3.1.6 lediglich das Hyperebenenschnittsystem – ein Untersystem des Hyperebenenlinearsystems. Es sei außerdem angemerkt, dass die oben vorgestellte und in [1, Kap. I, Aufg. C] zusammengefasste Sprechweise auch auf Linearsysteme auf reellen Kurven angewendet werden kann. Ist beispielsweise $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ eine durch das vollständige \mathfrak{g}_2^1 definierte zweifache Überlagerung einer hyperelliptischen Kurve X und $[D] = [\pi^{-1}(P)] \in \text{Pic}^2(X)$ der Rückzug eines reellen Punktes $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$, so konnten Biswas et al. [5] die Anzahl der Wendepunkte in $|kD|$ für alle $k \geq 1$ im Sinne von Plücker bestimmen (vgl. Abschnitt 4.5 für die Bezeichnungen).

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

Definition 3.1.8. Es sei $\mathbf{a}(\mathcal{H}, \mathbf{p})$ die Verschwindungssequenz von $\mathbf{p} \in Y$. Setzen wir $\alpha_i(\mathcal{H}, \mathbf{p}) = \mathbf{a}_i(\mathcal{H}, \mathbf{p}) - \mathbf{i}$, so heißt

$$\alpha(\mathcal{H}, \mathbf{p}) := (\alpha_0(\mathcal{H}, \mathbf{p}), \dots, \alpha_n(\mathcal{H}, \mathbf{p})) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$$

die *Verzweigungssequenz* von $\mathbf{p} \in Y$.

Ein Punkt $\mathbf{p} \in Y$ ist genau dann ein Wendepunkt, wenn seine Verzweigungssequenz nicht $(0, \dots, 0)$ ist. Die Stärke der Verzweigung des gesamten Hyperebenenchnittsystems an $\mathbf{p} \in Y$ kann ebenfalls gemessen werden. Man definiert dazu das *Gewicht* von $\mathbf{p} \in Y$ durch $\text{wt}(\mathcal{H}, \mathbf{p}) := \sum_{i=0}^n \alpha_i(\mathcal{H}, \mathbf{p})$.

Satz 3.1.9. [1, Kap. I, Aufg. C-14] (Formel von Plücker) Es sei $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ eine \mathbb{C} -Kurve vom Grad \mathbf{d} und Geschlecht \mathbf{g} . Dann gilt $\sum_{\mathbf{p} \in Y} \text{wt}(\mathcal{H}, \mathbf{p}) = (\mathbf{n} + 1)\mathbf{d} + (\mathbf{n} + 1)\mathbf{n}(\mathbf{g} - 1)$.

Korollar 3.1.10. Es sei $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ eine unverzweigte \mathbb{C} -Kurve vom Grad \mathbf{d} und Geschlecht \mathbf{g} . Dann ist Y eine rationale Normalenkurve, d.h. es gilt $\mathbf{d} = \mathbf{n}$ und $\mathbf{g} = 0$.

Beweis. Im Folgenden sieht man das Zusammenspiel der neuen Definition 3.1.2 mit dem Kalkül von Plücker für \mathbb{C} -Kurven: Da Y unverzweigt ist, besitzt Y keinen Wendepunkt. Nach der Formel von Plücker 3.1.9 muss $(\mathbf{n} + 1)\mathbf{d} + (\mathbf{n} + 1)\mathbf{n}(\mathbf{g} - 1) = 0$ gelten. Daraus folgt $\mathbf{g} = 0$ und $\mathbf{d} = \mathbf{n}$. □

Damit ist das Studium unverzweigter \mathbb{C} -Kurven abgeschlossen. Wir wechseln zur Situation $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ und untersuchen zunächst den Fall ebener Kurven. Es sei $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ eine ebene Kurve und $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ eine Gerade. Um Tangentialbedingungen an komplexkonjugierten Paaren zuzulassen, müssen wir für die Definition einer Bitangente die Komplexifizierungen $X_{\mathbb{C}}$ und $L_{\mathbb{C}}$ berücksichtigen. Es heißt L eine *Bitangente* von X , wenn es Punkte $P_1, P_2 \in X_{\mathbb{C}}$ gibt, sodass

$$\text{Mult}(X_{\mathbb{C}} \cdot L_{\mathbb{C}})(P_i) \geq 2 \text{ für } i = 1, 2 \quad \text{oder} \quad \text{Mult}(X_{\mathbb{C}} \cdot L_{\mathbb{C}})(P_1) \geq 4 \text{ im Fall } P_1 = P_2$$

gilt. Bitangenten und Wendegeraden¹ wurden bereits Ende des 19. Jahrhunderts in den Arbeiten von Zeuthen (vgl. [100]) und Klein (vgl. [47]) untersucht. Im Fall einer ebenen Quartik X spricht Zeuthen von einer *Bitangente erster Art*, wenn die Punkte P_1, P_2 reell sind und auf demselben Oval liegen, oder wenn sie eine *isolierte Bitangente* ist, also $P_1 = \overline{P_2}$ und $P_i \notin X(\mathbb{R})$ gelten (vgl. [100, S. 412]).

¹Damit ist der Fall $\mathbf{n} = 2$ in der Definition 3.1.3 gemeint.

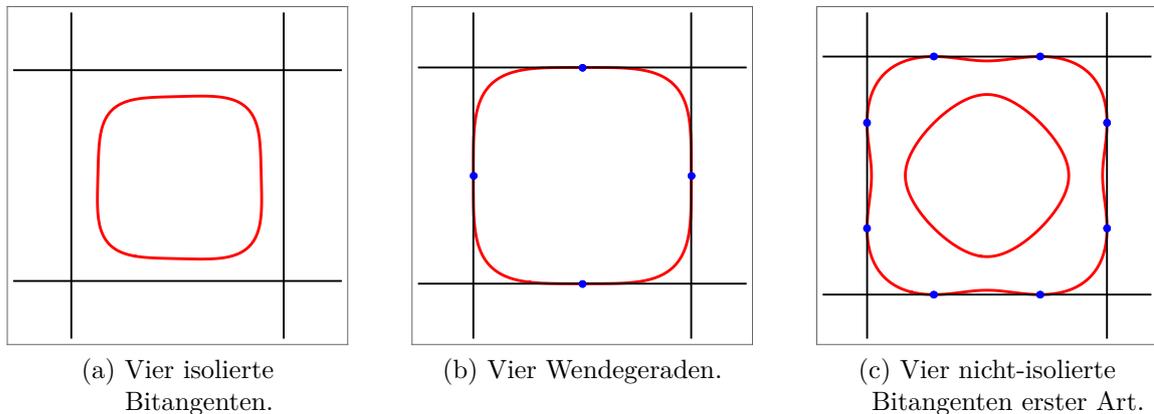


Abbildung 3.1: Quartiken mit je vier Bitangenten erster Art.

Er bewies, dass eine ebene Quartik genau vier Bitangenten erster Art besitzt. Die in Abbildung 3.1 (c) dargestellte Quartik besitzt zwar keine isolierten Bitangenten, dafür aber acht Wendegeraden. Diesen Zusammenhang formulierte Klein durch die folgende Formel.

Satz 3.1.11. [47] *Es sei $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ eine reelle Kurve vom Grad d . Ist f die Anzahl der Wendegeraden und b die Anzahl der isolierten Bitangenten, so gilt $f + 2b = d(d - 2)$. Insbesondere ist jede ebene Kurve vom Grad $d \geq 3$ verzweigt.*

Sowohl die Charakterisierung unverzweigter \mathbb{C} -Kurven als auch der Satz 3.1.11 können nicht auf reelle Kurven in ungerade-dimensionalen projektiven Räumen übertragen werden. In zwei für das Studium unverzweigter Kurven bedeutenden Arbeiten studierte Huisman die Einbettungen reeller Kurven mithilfe von vollständigen Linearsystemen (vgl. [38] und [40]). Er zeigte, dass es viele effektive, nicht-spezielle Divisoren kleinen Grades auf M -Kurven gibt (vgl. [38, Thm. 2.4]). Dabei heißt ein Divisor D (oder: sein assoziiertes Linearsystem $|D|$) *nicht-spezial*, wenn $l(D) = \deg D - g + 1$ gilt. Im Jahr 2003 bewies er die folgende Verallgemeinerung.

Satz 3.1.12. [40, Thm. 2.5] *Es sei X eine reelle Kurve vom Geschlecht g . Es sei $D \in \text{Div}^d(X)$ ein Divisor vom Grad d und $\delta(D)$ die Anzahl der Komponenten von X , auf denen D ungeraden Grad besitzt. Ist $d + \delta(D) \geq 2g - 1$, so ist D nicht-spezial.*

Dieser Satz verallgemeinert insbesondere die bekannte Tatsache, dass Divisoren vom Grad $d \geq 2g - 1$ nicht-spezial sind. Mithilfe von Satz 3.1.12 können wir den folgenden Satz formulieren, welcher zentral für die Abschätzungen der reellen Divisorenschranke im Fall von $(M-2)$ -Kurven ist (vgl. Abschnitt 4.3). Um das Studium der Einbettungen

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

reeller Kurven formal korrekt abzuschließen und nicht nur auf die analoge Situation über \mathbb{C} zu verweisen, verwenden wir die Resultate aus Abschnitt 2.2.

Satz 3.1.13. *Ist $d + \delta(D) \geq 2g + 3$, so ist $|D|$ sehr ampel.*

Beweis. Zunächst sei darauf verwiesen, dass X projektiv ist und wir somit zeigen möchten, dass $\mathcal{L} := \mathcal{O}_X(D)$ eine abgeschlossene Immersion in einen projektiven Raum definiert (vgl. [33, Bem. 5.16.1] für die Behauptung und Abschnitt 2.2 für den zu \mathcal{L} assoziierten \mathbb{R} -Morphismus). Mithilfe von [40, Kor. 2.7] erhalten wir, dass

$$\dim_{\mathbb{R}} |D - P - Q| = \dim_{\mathbb{R}} |D| - \deg P - \deg Q$$

für alle Punkte $P, Q \in X$ gilt – die reelle Version der Eigenschaft, dass $|D|$ Punkte und Tangentialvektoren trennt (vgl. [33, S. 152]). Nun befinden wir uns in der Situation, die zu Beginn des Abschnitts 2.2 beschrieben wird. Es ist \mathcal{L} eine invertierbare Modulgarbe und $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ diejenige, die zum Divisor D auf $X_{\mathbb{C}}$ assoziiert ist. Nach [33, Kap. III, Prop. 3.1] ist zu zeigen, dass

$$\dim_{\mathbb{C}} |D - P - Q| = \dim_{\mathbb{C}} |D| - 2$$

für alle $P, Q \in X_{\mathbb{C}}$ und den auf $X_{\mathbb{C}}$ betrachteten Divisor D gilt. Zunächst ist bereits bekannt, dass

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{C}}}(D)) = \dim_{\mathbb{R}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$$

gilt, da diese Räume über Tensorierung zueinander in Beziehung gesetzt werden können (vgl. auch [3, S. 12]). Es seien $P, Q \in X_{\mathbb{C}}$. Handelt es sich dabei um Punkte, die über reellen Punkten in X liegen, so haben wir bereits gesehen, dass

$$\dim_{\mathbb{C}} |D - P - Q| = \dim_{\mathbb{R}} |D - P - Q| = \dim_{\mathbb{R}} |D| - 2 = \dim_{\mathbb{C}} |D| - 2$$

gilt. Liegt ohne Einschränkung P über einem reellen Punkt und ist $Q \in X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R})$, so schreiben wir $Q' := Q + \overline{Q} \in X$. Es gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} |D - P - Q'| = \dim_{\mathbb{R}} |D| - 3.$$

Laut [33, S. 308] gibt es für einen beliebigen Punkt $R \in X_{\mathbb{C}}$ nur die beiden Möglichkeiten

$$\dim_{\mathbb{C}} |D - R| \in \{\dim_{\mathbb{C}} |D|, \dim_{\mathbb{C}} |D| - 1\}.$$

Angenommen es gelte $\dim_{\mathbb{C}} |D - P - Q| = \dim_{\mathbb{C}} |D - P|$. Dann müsste

$$\dim_{\mathbb{C}} |D - P - Q| = \dim_{\mathbb{C}} |D - P| = \dim_{\mathbb{R}} |D - P| = \dim_{\mathbb{C}} |D| - 1$$

gelten, da $|D|$ basispunktfrei ist (vgl. [40, Kor. 2.7]). Damit würde

$$\dim_{\mathbb{C}} |D - P - Q'| \geq \dim_{\mathbb{C}} |D| - 2$$

folgen im Widerspruch zu $\dim_{\mathbb{R}} |D - P - Q'| = \dim_{\mathbb{R}} |D| - 3$. Also muss

$$\dim_{\mathbb{C}} |D - P - Q| = \dim_{\mathbb{C}} |D - P| - 1 = \dim_{\mathbb{C}} |D| - 2$$

gelten. Mit analoger Argumentation weist man

$$\dim_{\mathbb{C}} |D - P - Q| = \dim_{\mathbb{C}} |D| - 2$$

für $P, Q \in X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R})$ nach, wobei der Unterfall $P = \bar{Q}$ bereits daraus folgt, dass $|D|$ basispunktfrei ist. Nach [33, Kap. III, Prop. 3.1] ist $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ sehr ampel und definiert eine abgeschlossene Immersion in einen projektiven Raum. Laut Satz 2.2.6 definiert auch \mathcal{L} eine abgeschlossene Immersion. \square

Der Satz 3.1.13 hat direkte Auswirkungen auf die Verzweigung von M -Kurven, welche Huisman in seiner Arbeit beschreibt (vgl. [40]): Es sei $n \geq 3$ ungerade und X eine M -Kurve vom Geschlecht g . Aufgrund passender arithmetischer Bedingungen können wir einen Divisor $D \in \text{Div}^{g+n}(X)$ vom Grad $g+n$ nehmen, sodass $\deg_{X_i}(D) \equiv_2 1$ für alle Komponenten X_i von X gilt. Nach Satz 3.1.13 ist der zu $|D|$ assoziierte Morphismus $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine abgeschlossene Immersion. Huisman hat bewiesen, dass die (nicht-ausgeartete) Bildkurve $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ unverzweigt ist. Dies folgt im Wesentlichen daraus, dass die M -Kurve X_0 aus $g+1$ Pseudo-Geraden besteht.

Huisman untersuchte in derselben Arbeit auch Verzweigung in gerade-dimensionalen projektiven Räumen: Es sei $n \geq 4$ gerade und X eine M -Kurve vom Geschlecht g . Analog zum vorherigen Fall ist es möglich, einen Divisor $D \in \text{Div}^{g+n}(X)$ vom Grad $g+n$ zu nehmen, sodass $\deg_{X_i}(D) \equiv_2 1$ für genau g verschiedene Komponenten X_i von X gilt. Nach Satz 3.1.13 ist der zu $|D|$ assoziierte Morphismus $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine abgeschlossene Immersion. Huisman hat bewiesen, dass die Bildkurve $X_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ genau $g(n+1)$ Wendepunkte besitzt und folglich für $g \geq 1$ verzweigt ist.

3.2 Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen Räumen

Seine Ergebnisse nahm Huisman zum Anlass, Vermutungen darüber aufzustellen, wie unverzweigte Kurven in projektiven Räumen topologisch beschrieben werden könnten. Huisman stellte fest, dass es unverzweigte M -Kurven beliebig hohen Grades und Geschlechts in ungerade-dimensionalen projektiven Räumen gibt. Umgekehrt vermutete er, dass es sich bei unverzweigten Kurven stets um M -Kurven handeln müsse. In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Studium dieser Vermutung. Sie stellt nicht nur eine interessante Frage innerhalb des Studiums reeller Kurven dar, sondern besitzt – wie wir in Kapitel 4 sehen werden – Auswirkungen auf Problemstellungen rund um das Studium total-reeller Linearsysteme.

Vermutung 3.2.1. [40, Verm. 3.4] *Es sei $n \geq 3$ ungerade und $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine unverzweigte reelle Kurve. Dann ist X eine M -Kurve und jede Komponente von X ist eine Pseudo-Gerade.*

Ein Hauptergebnis dieses Kapitels ist die Widerlegung der Vermutung 3.2.1 für Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ durch die Konstruktion einer expliziten Familie von Gegenbeispielen. Es sei darauf verwiesen, dass dieses Ergebnis in Zusammenarbeit mit Mario Kummer erzielt wurde (vgl. [52]). Die konstruierten Kurven besitzen einige Besonderheiten, welche sowohl im nächsten als auch im übernächsten Kapitel vorgestellt und analysiert werden. Da Huismans Vermutung 3.2.1 bereits im Jahr 2003 formuliert wurde, gibt es einige Forschungsarbeiten, welche sich mit dieser befassen. Diese möchten wir im Folgenden zusammenstellen und dadurch die Relevanz der Vermutung 3.2.1 verdeutlichen.

Definition 3.2.2. Eine reelle Kurve $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ heißt *linear normal*, wenn die Einschränkungabbildung

$$\Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}(1)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$$

ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 3.2.3. Die Hintergründe der Definitionen 3.1.1 und 3.2.2 werden auf der Ebene der entsprechenden Modulgarben deutlich. Es sei $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine Kurve. Laut den Definitionen 2.1.5 und 2.1.6 gibt es einen surjektiven Morphismus $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n} \rightarrow \mathcal{O}_X$ von Garben von \mathbb{R} -Algebren, dessen Kern eine Garbe von Idealen ist, welche wir mit $\mathcal{I}_X \triangleleft \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}$ bezeichnen. Wir betrachten die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$

3.2 Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen Räumen

(vgl. [33, S. 115]). Diese bleibt nach dem Tensorieren mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}(1)$ exakt, da $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}(1)$ eine flache $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}$ -Modulgarbe ist. Folglich erhalten wir die lange Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{I}_X(1)) \rightarrow \Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}(1)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{I}_X(1)) \rightarrow 0,$$

da $H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}(1)) = 0$ gilt (vgl. [33, Kap. III, Abs. 5, Thm. 5.1]). Die Bedingung $\Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{I}_X(1)) = 0$ entspricht genau der Bedingung, dass X nicht-ausgeartet ist (vgl. Definition 3.1.1): Es gibt keine Linearform, welche das definierende Ideal von X enthält. Da wir dies stets voraussetzen, ist die Abbildung

$$\Gamma(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n}(1)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$$

stets injektiv. Die lineare Normalität bedeutet nun genau, dass $H^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{I}_X(1)) = 0$ gilt. Dies ist dazu äquivalent, dass $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1)) = n + 1$ gilt. \triangle

Beispiel 3.2.4. Das wohl bekannteste Standardbeispiel einer Kurve, welche nicht linear normal ist, sieht wie folgt aus: Die orthogonale Projektion der gewöhnlichen rationalen Normalenkurve in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ ausgehend von $[0, 0, 1, 0, 0]$ wird beschrieben durch das Bild X von

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, [x, y] \mapsto [x^4, x^3y, xy^3, y^4]$$

und ist eine rationale Quartik in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Nach dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2 können wir $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1)) = 5$ errechnen. Folglich ist X nicht linear normal. Daraus folgt, dass X auch kein vollständiger Durchschnitt sein kann (vgl. [33, Kap. III, Abs. 5, Aufg. 5.5]). Und tatsächlich wird X durch eine Quadrik und drei Kubiken ausgeschnitten. \triangle

In der Sprache der Linearsysteme bedeutet diese Eigenschaft, dass das Hyperebenenchnittsystem

$$\{X \cdot H \mid H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \text{ eine Hyperebene}\}$$

vollständig ist. Es entspricht dann dem *Hyperebenenlinearsystem*, also allen effektiven Divisoren, welche zu einem Hyperebenenchnitt auf X linear äquivalent sind. Es sei $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ vom Grad d und Geschlecht g . Wir nennen X *nicht-spezial*, wenn X linear normal ist und $n = d - g$ gilt. Die Bezeichnung begründet sich wie folgt: Ist D ein nicht-spezialer Divisor auf einer Kurve $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^r$, dessen vollständiges Linearsystem $|D|$ eine abgeschlossene Immersion $Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ induziert, so ist die entstehende Bildkurve

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

nicht-spezial.

Wir übernehmen weiterhin die Bezeichnungen von Huisman (vgl. [39]): Sprechen wir von einer Kurve *mit vielen Komponenten*, so meinen wir eine Kurve, welche eine M -Kurve oder eine $(M - 1)$ -Kurve ist. Ist $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine Kurve mit vielen Komponenten und δ die Anzahl der Pseudo-Geraden, so sagen wir, dass X *wenige Ovale besitzt*, wenn $g - \delta \leq n$ gilt.

Satz 3.2.5. [39, Thm. 2] *Es sei $n \geq 3$ ungerade und $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine unverzweigte, nicht-spezial Kurve mit vielen Komponenten und wenigen Ovalen. Dann ist X eine M -Kurve und jede Komponente von X ist eine Pseudo-Gerade.*

Folglich ist Vermutung 3.2.1 wahr für nicht-spezial Kurven mit vielen Komponenten und wenigen Ovalen. Es sei aber angemerkt, dass diese Voraussetzungen an die Kurve derart restriktiv sind, dass die Implikation aus einer topologischen Überlagerungseigenschaft der Abel-Jacobi Abbildung (vgl. [41, Thm. 2.1]) und den arithmetischen Bedingungen an die gegebenen Parameter folgt. Obgleich der geringen Evidenz für die Richtigkeit der Vermutung 3.2.1, folgerte Monnier Resultate über Schranken von total-reellen Linearsystemen unter deren Annahme (vgl. [63, Thm. 3.7]). Wir werden in Kapitel 4 auf diese Schranken eingehen – und sie verschärfen.

Vermutung 3.2.1 besteht aus zwei Teilen: einerseits, aus der Behauptung über die genaue Anzahl der Komponenten. Andererseits, aus der behaupteten Aussage über ihre Homologieklassen (nämlich als Pseudo-Geraden). Im ersten Schritt präsentieren wir eine direkte Konstruktion eines Gegenbeispiels zum zweiten Teil der Vermutung 3.2.1.

Gegenbeispiel 3.2.6. Es sei $V := \mathbb{R}[x, y]_4$ der reelle fünf-dimensionale Vektorraum aller homogenen Polynome vom Grad vier. Ist $f := \mathbf{a}x + \mathbf{b}y$ eine Linearform mit $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, so ist

$$f^4 = a^4x^4 + 4a^3bx^3y + 6a^2b^2x^2y^2 + 4ab^3xy^3 + b^4y^4$$

und die Koeffizienten definieren eine Parametrisierung der Form

$$\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4, [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \mapsto [a^4, 4a^3b, 6a^2b^2, 4ab^3, b^4].$$

Eine rationale Normalenkurve kann auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}(V^*)$ über dem Dualraum V^* definiert werden. Ein affiner reeller Punkt $(z, w) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ liefert die

3.2 Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen Räumen

lineare Auswertungsabbildung

$$f_{(z,w)} : V \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto h(z, w).$$

Dadurch erhalten wir die Parametrisierung $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$. Wir können die Abbildung $f_{(z,w)}$ mit ihrer darstellenden Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{A} := (x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4)$ aus Standardmonomen und der Basis $\mathcal{E} := \{1\} \subset \mathbb{R}$ identifizieren. Es ist $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(f_{(z,w)}) = (z^4, z^3w, z^2w^2, zw^3, w^4)$. Wir erhalten die rationale Normalenkurve

$$\psi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4, [z, w] \mapsto [z^4, z^3w, z^2w^2, zw^3, w^4].$$

Wir möchten eine Hyperebene $H = [p]^{\perp} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ finden, welche die reellen Punkte der Bildkurve $\varphi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)$ nicht schneidet und möchten – ausgehend vom orthogonalen Komplement von H – die Bildkurve $\psi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)$ projizieren. Dazu beachten wir, dass $[p]$ auf keiner reellen Sekante und keiner reellen Tangente von $\psi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)$ liegen darf (vgl. [33, Kap. IV, Prop. 3.4] oder [62, Kap. III, Prop. 5.7]). Wir wählen

$$H := \mathcal{V}_+(-2x_0 + x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4).$$

Die Hyperebene H schneidet die Bildkurve $\varphi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)$ in einem komplex-konjugierten Paar mit doppelter Vielfachheit. Es ist $\varphi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) \cdot H = 2\rho$ mit

$$\rho := \varphi\left(\left[e^{i\frac{\pi}{3}}, 1\right]^{\sigma}\right) = \varphi\left(\left[e^{i\frac{\pi}{3}}, 1\right]\right)^{\sigma}.$$

Um zu begründen, dass es sich tatsächlich um eine Projektion handelt, betrachten wir die Inklusion $i : H \hookrightarrow V$ und die entstehende duale Abbildung $i^* : V^* \rightarrow H^*$. Wählen wir die Basis

$$\mathcal{B} := (x^4 + 2x^3y, x^4 - 2x^2y^2, x^4 + 2xy^3, -x^4 + y^4)$$

von H , so gilt

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(i^*(f_{(z,w)})) = (z^4 + 2z^3w, z^4 - 2z^2w^2, z^4 + 2zw^3, -z^4 + w^4).$$

Folglich kann der auf den Koordinatenräumen entstehende Morphismus

$$\omega : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, [z, w] \mapsto [z^4 + 2z^3w, z^4 - 2z^2w^2, z^4 + 2zw^3, -z^4 + w^4]$$

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

als Projektion der Bildkurve $\psi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)$ ausgehend vom orthogonalen Komplement von H gesehen werden. Die Bildkurve $X := \omega(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ ist eine Kurve vom Geschlecht null und Grad vier, somit ist die einzige reelle Komponente keine Pseudo-Gerade, sondern ein Oval. Im Widerspruch zum homologischen Teil der Vermutung 3.2.1 ist X unverzweigt: Angenommen es gäbe eine Verzweigungshyperebene

$$E := \mathcal{V}_+(\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$$

von X . Da in diesem Fall eine Verzweigung genau dann entsteht, wenn E die Kurve X in einem vierfachen reellen Punkt schneidet, müsste es $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ geben mit

$$\lambda_0(z^4 + 2z^3w) + \lambda_1(z^4 - 2z^2w^2) + \lambda_2(z^4 + 2zw^3) + \lambda_3(-z^4 + w^4) = (\alpha z + \beta w)^4.$$

Der entstehende Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \alpha^4 \\ 2\lambda_0 &= 4\alpha^3\beta \\ -2\lambda_1 &= 6\alpha^2\beta^2 \\ 2\lambda_2 &= 4\alpha\beta^3 \\ \lambda_3 &= \beta^4 \end{aligned}$$

liefert, dass der reelle Punkt $\varphi([\alpha, \beta])$ auf H liegen müsste. Dies ist nach Konstruktion ein Widerspruch. \triangle

Die in Gegenbeispiel 3.2.6 konstruierte Kurve X wird durch drei Kubiken und eine Quadrik des Segre-Typs ausgeschnitten (die Quadrik hat die Signatur $(2, 2)$). Wir möchten eine allgemeine Konstruktion von unverzweigten, rationalen Kurven vom beliebigen Grad $d \geq 3$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ präsentieren. Für jedes gerade d widersprechen diese Kurven dem homologischen Teil der Vermutung 3.2.1.

Definition 3.2.7. Es seien $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}[t]$ univariate Polynome. In der vorgegebenen Reihenfolge nennen wir \mathbf{p}, \mathbf{q} *streng verschachtelt*, wenn $\deg(\mathbf{p}) = \deg(\mathbf{q})$ gilt, alle Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ von \mathbf{p} und β_1, \dots, β_l von \mathbf{q} reell sind (dabei bezeichnen wir mit den beiden Listen sämtliche verschiedene Nullstellen) und

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_i < \beta_i < \dots$$

3.2 Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen Räumen

gilt. Dabei kann sowohl eine Nullstelle von p als auch eine von q an letzter Stelle stehen.

Zwar tragen mehrfache Nullstellen nur einfach zur Liste bei, trotzdem sind diese in obiger Definition ausdrücklich erlaubt. Zum Beispiel ist die Polynomfolge $t^2 - 1, t^2$ streng verschachtelt. Dagegen ist $t^2, t^2 - 1$ nicht streng verschachtelt.

Konstruktion 3.2.8. Es seien $p, q \in \mathbb{R}[t]$ zwei streng verschachtelte Polynome vom Grad $d' \geq 2$. Es sei $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ der Graph des rationalen Polynoms $p(t)/q(t)$. Wir bezeichnen mit P und Q die Homogenisierungen von p und q bezüglich einer neuen Variable. Es gilt $P(1, t) = p(t)$ und $Q(1, t) = q(t)$. Das Bild X des Morphismus

$$\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, [x, y] \mapsto ([x, y], [Q(x, y), P(x, y)])$$

ist der *projektive Abschluss von Y in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$* . Die ins Unendliche laufenden Linien, welche im affinen Bild der reellen Punkte von Y zu sehen sind, verbinden sich in der üblichen Weise im Projektiven.

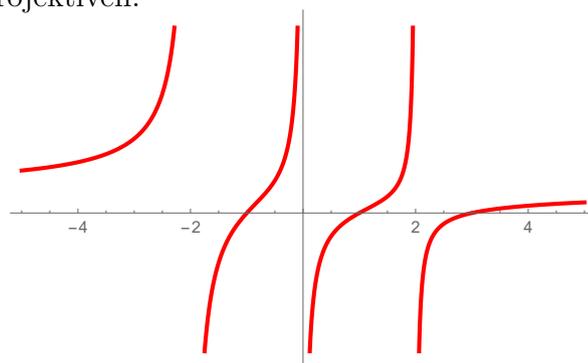


Abbildung 3.2: Die Menge $Y(\mathbb{R})$ am Beispiel von $p := (t^2 - 1)(t - 3)$ und $q := (t^2 - 4)t$. Wir setzen $\Sigma := (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)(\mathbb{R})$ und möchten die Homologiekategorie von $X(\mathbb{R})$ in $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ bestimmen. Es sei

$$i : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, (x, y) \mapsto ([1, x], [1, y])$$

gegeben. Ist $L_a := \{a\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ mit $a \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$, so ist der Rückzug von L_a unter i genau dann nicht-leer, wenn $a = [1, a_0]$ für ein $a_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist

$$i^{-1}(L_a) = \{(a_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{R})$$

eine vertikale Gerade. Analog ist $M_b := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \{b\}$ für passendes b beim Rückzug unter

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

i eine horizontale Gerade. Die Homologiegruppe $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wird erzeugt von den beiden Klassen einer Geraden aus je einer dieser Scharen, etwa $(1, 0)$ für die Klasse einer vertikalen Geraden und $(0, 1)$ für die Klasse einer horizontalen Geraden. Über die Homöomorphie von Σ zum Torus $S^1 \times S^1$ entsprechen diese Geraden den beiden Zykeln für die Berechnung des Schnittprodukts transversaler Schnitte (vgl. auch das duale Cup-Produkt aus [34, Kap. 3] oder [7, Kap. VI]). Im affinen reellen Bild sei nun die übliche Orientierung gewählt. Um die Homologieklassse von $X(\mathbb{R})$ in $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ zu bestimmen, müssen wir das Schnittverhalten von $X(\mathbb{R})$ mit vertikalen und horizontalen Geraden untersuchen. Als Abschluss eines Graphen einer rationalen Funktion schneidet jede vertikale Gerade die Kurve $X(\mathbb{R})$ in genau einem reellen Punkt. Aus dem Monotoniesatz von Hermite-Kakeya (vgl. [77, Thm. 6.3.8]) folgt, dass jede horizontale Gerade die Kurve $X(\mathbb{R})$ in genau d' verschiedenen reellen Punkten schneidet. Die Kurve $X(\mathbb{R})$ besitzt damit die Homologieklassse $(1, d')$. Eine Hyperebene in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ wird in der Segre-Quadrik Σ zu einer Geraden und hat – abhängig von ihrer Steigung – die Homologieklassse $(1, 1)$ oder $(1, -1)$. Die Schnittzahl kann damit berechnet werden: Wir bezeichnen mit

$$\sigma : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, ([u_0, u_1], [v_0, v_1]) \mapsto [u_0v_0, u_0v_1, u_1v_0, u_1v_1]$$

die Segre-Einbettung und schreiben $Z := \sigma(X)$. Jede Hyperebene in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ schneidet die Kurve Z in $d' - 1$ oder in $d' + 1$ verschiedenen reellen Punkten. Die Kurve $Z \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ ist rational und hat den Grad $d' + 1$. Ist d' gerade und hat Z damit den ungeraden Grad $d' + 1$, so besteht $Z(\mathbb{R})$ aus genau einer Pseudo-Geraden. Ist d' ungerade und hat Z damit den geraden Grad $d' + 1$, so besteht $Z(\mathbb{R})$ aus genau einem Oval. Weiterhin ist Z für alle $d' \geq 2$ unverzweigt, denn ist $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ eine Hyperebene, so gilt

$$\text{wt}(Z \cdot H) = (d' + 1) - (Z \cdot H)_{\text{red}} \leq (d' + 1) - (d' - 1) = 2.$$

Die Konstruktion widerlegt somit den homologischen Teil der Vermutung 3.2.1 im Fall von rationalen Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ von beliebig hohem geraden Grad $d \geq 4$. \triangle

Es stellt sich die Frage, ob die in Gegenbeispiel 3.2.6 entstandene rationale Kurve $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ vom Grad vier aus der Konstruktion 3.2.8 gewonnen werden kann. Die Kurve X liegt auf der Quadrik

$$q_X := x_0^2 - x_0x_1 + 3x_1^2 - 3x_0x_2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_0x_3 + 2x_1x_2,$$

3.2 Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen Räumen

wohingegen alle in Konstruktion 3.2.8 erzeugten Kurven Z auf der gewöhnlichen Segre-Quadrik $q := x_0x_3 - x_1x_2$ liegen. Untersuchen wir die Matrizen von q_X und q , so ergibt sich durch simultane Umformungen die Übergangsmatrix

$$P := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$P \cdot (x^4 + 2x^3y, x^4 - 2x^2y^2, x^4 + 2xy^3, -x^4 + y^4)^t$$

zeigt, dass die Kurve X tatsächlich einen Koordinatenwechsel erlaubt, sodass die entstehende Kurve durch die Konstruktion 3.2.8 mithilfe der univariaten Polynome $p := t^3 - 3t - 1$ und $q := -4t^2 - 4t$ gegeben ist. Fügt man dem Polynom q noch eine reelle Nullstelle ∞ (in der homogenen Situation) hinzu, so sind p, q streng verschachtelt.

Die in Konstruktion 3.2.8 präsentierten rationalen Raumkurven vom Grad $d' + 1$ wurden – unabhängig von dieser Arbeit – von Mikhalkin et al. [58] untersucht. Diese sind Beispiele sogenannter *maximal gekrümmter Knoten*² (vgl. [58, Thm. 1]). Es wurde bereits angemerkt, dass sie Gegenbeispiele zum homologischen Teil der Vermutung 3.2.1 liefern (vgl. [59, Bem. 2.7]).

Als ein Hauptresultat dieses Kapitels erweitern wir im Folgenden die Konstruktion 3.2.8, um Gegenbeispiele für Huismans Vermutung 3.2.1 zu bekommen, welche positives Geschlecht besitzen. Dadurch ist es möglich, auch den ersten Teil der Vermutung 3.2.1 zu widerlegen, denn die konstruierten Kurven werden aus lediglich einem Oval bestehen.

Konstruktion 3.2.9. Es seien wie oben p, q streng verschachtelte univariate Polynome vom Grad $d' \geq 2$ und Z die in Konstruktion 3.2.8 entstandene Kurve. Die Idee besteht darin, komplex-konjugierte Geradenpaare zu generieren und diese zur Kurve Z hinzuzufügen, um mithilfe einer passenden Störung eine unverzweigte Kurve positiven Geschlechts zu bekommen, welche lediglich eine Komponente besitzt. Wir bezeichnen

²Engl.: *maximally writhed knots* (vgl. [59, S. 2]).

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

mit G den Zariski-Abschluss von

$$\mathcal{V}\left(\prod_{j=1}^e (t^2 + t_j)\right) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$$

für paarweise verschiedene $t_j > 0$ und $e \in \mathbb{N}$. Die zugrunde liegende Einbettung ist – wie zuvor – durch

$$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, (s, t) \mapsto ([1, s], [1, t])$$

gegeben. Die Vereinigung $W := Z \cup G$ beschreibt eine reduzible Kurve³ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, welche durch ein bihomogenes Polynom F vom Bigrad $(d, 2e + 1)$ definiert ist. Da G keine reellen Punkte besitzt, folgt $W(\mathbb{R}) = Z(\mathbb{R})$. Nach der Einbettung in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ mithilfe der Segre-Abbildung σ aus Konstruktion 3.2.8 haben wir bereits festgestellt, dass jede reelle Hyperebene $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ die Bildkurve $\sigma(W)$ in mindestens $d - 1$ verschiedenen reellen Punkten schneidet. Außerdem schneidet H das Objekt G in e komplex-konjugierten Paaren. In $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ können wir das bihomogene Polynom F mithilfe einer (nicht-singulären) Kurvengleichung stören, sodass das entstehende bihomogene Polynom F_ϵ für ein $\epsilon > 0$ eine der Definition 2.1.17 entsprechende Kurve W_ϵ definiert, die das oben beschriebene Schnittverhalten mit einer beliebigen Hyperebene $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ beibehält. Es ist

$$\deg(W_\epsilon \cdot H)_{\text{red}} \geq d' + 2e - 1 \quad \text{und folglich} \quad \text{wt}(W_\epsilon \cdot H) \leq 2.$$

Zusammenfassend kann man $\epsilon > 0$ klein genug wählen, sodass W_ϵ zu einer unverzweigten Kurve vom Grad $d' + 2e + 1$, Geschlecht $2e(d' - 1)$ (vgl. [33, Kap. V, Bsp. 1.5.2]) und mit genau einer Komponente wird. Eine solche Kurve W_ϵ ist ein Gegenbeispiel für die Vermutung 3.2.1 in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. \triangle

In der Konstruktion 3.2.9 ist zu beachten, dass $\epsilon > 0$ so genommen werden muss, dass mehrere Forderungen gleichzeitig bedient werden: Erstens, die entstehende Kurve W_ϵ muss irreduzibel und nicht-singulär werden. Dies ist durch bekannte Sätze über die Perturbation reeller Kurven möglich, auf welche wir in Kapitel 4 zugreifen. Zweitens, das Schnittverhalten der Kurve W_ϵ muss dem Schnittverhalten der reduziblen Kurve W entsprechen. Aufgrund des Schnittverhaltens in reellen Punkten sowie den übrigen Schnitten in komplex-konjugierten Paaren bleibt das Schnittverhalten bei minimaler

³Es sei hier erwähnt, dass W keine Kurve laut Definition 2.1.17 ist.

3.2 Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen Räumen

Störung erhalten: Der über \mathbb{C} betrachtete Schnittdivisor $H_{\mathbb{C}} \cdot W_{\mathbb{C}}$ für eine beliebige Hyperebene $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ besitzt mindestens $d + 2e - 1$ Punkte im Träger. Dies überträgt sich auf eine passende minimale Störung.

Satz 3.2.10. *Die Vermutung 3.2.1 ist falsch für gewisse Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Es gelten:*

1. *Es gibt unverzweigte rationale Raumkurven von beliebig hohem geraden Grad $d' \geq 4$, welche aus genau einem Oval bestehen.*
2. *Es seien $d' \geq 2$ und $e \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gibt unverzweigte Raumkurven vom Grad $d' + 2e + 1$ und geradem Geschlecht $2e(d' - 1)$, welche aus genau einer Komponente bestehen.*

Da der Satz 3.2.10 auf den Konstruktionen 3.2.8 und 3.2.9 fußt und diese ein Rezept für die Erstellung solcher Kurven liefern, ist es angebracht, explizite Gleichungen für Beispiele solcher Kurven zu finden. Tatsächlich werden wir in Kapitel 5 auf diese Beispiele zurückgreifen und interessante geometrische Phänomene dieser aufzeigen.

Beispiel 3.2.11. Es seien die streng verschachtelten Polynome $p := t^2 - 2t$ und $q := t^2 - 1$ gegeben. Die Homogenisierungen sind $P := y^2 - 2yx$ und $Q := y^2 - x^2$. Mithilfe der Segre-Abbildung betten wir den Abschluss des Graphen von p/q von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ nach $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ ein. Die Parametrisierung, die sich daraus ergibt, lautet

$$\psi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, [x, y] \mapsto [xQ, xP, yQ, yP].$$

Mithilfe der Software `Macaulay2` [24] können wir berechnen, dass die Bildkurve von ψ durch die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} q &:= x_0x_3 - x_1x_2, \\ q_1 &:= x_1^2 - 2x_0x_3 + x_2x_3 - x_3^2, \\ q_2 &:= x_0x_1 - 2x_0x_2 + x_2^2 - x_2x_3, \\ c_1 &:= 2x_0x_2^2 - x_2^3 - x_0^2x_3 + x_2^2x_3 \end{aligned}$$

definiert ist. Der Rückzug nach $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ unter der Segre-Abbildung

$$\sigma : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, ([a_0, a_1], [b_0, b_1]) \mapsto [a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1]$$

ist dadurch gegeben, dass wir die Segre-Quadrik q auslassen und in den drei übrigen Polynomen die Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 durch $a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_1b_1$ ersetzen. Es

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

entsteht eine durch drei bihomogene Polynome definierte Kurve, welche jedoch – wie immer in der Segre-Quadrik – durch ein einziges bihomogenes Polynom gegeben ist. Es gilt

$$Z := \mathcal{V}_+(\mathbf{h}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{h} := 2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_1^2\mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0^2\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_1^2\mathbf{b}_1.$$

Wie erwartet ist W definiert durch ein bihomogenes Polynom vom Bigrad $(2, 1)^4$. Wir wählen weiter das komplex-konjugierte Geradenpaar

$$\mathcal{V}(t^2 + 1) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, (s, t) \mapsto ([1, s], [1, t]).$$

Der Abschluss der Einbettung nach $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ ist durch $\mathcal{V}_+(\mathbf{b}_0^2 + \mathbf{b}_1^2)$ gegeben, also durch ein bihomogenes Polynom vom Bigrad $(0, 2)$. Die Vereinigung wird demnach durch ein bihomogenes Polynom vom Bigrad $(2, 3)$ beschrieben. In $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ nimmt das komplex-konjugierte Geradenpaar die Gestalt $\mathbf{G} := \mathcal{V}_+(\mathbf{q}, \mathbf{x}_0^2 + \mathbf{x}_1^2, \mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_3^2)$ an. Wir können eine (nicht-singuläre) Störung der entstehenden reduziblen Kurve W wieder nach $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ verschieben. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} f &:= -x_0^2x_1 - x_1^3 + 2x_0^2x_2 - x_0x_2^2 + 2x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 - x_0x_3^2 + x_1x_3^2, \\ g &:= 2x_0x_2^2 - x_2^3 - x_0^2x_3 - x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + 2x_0x_3^2 - x_2x_3^2 + x_3^3, \\ h_1 &:= x_0^3 + x_1^3 + x_0x_2^2 - x_1x_3^2, \\ h_2 &:= x_0^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^3 - x_3^3 \end{aligned}$$

können wir für ein kleines $\epsilon > 0$ die Kurve $W_\epsilon := \mathcal{V}_+(\mathbf{q}, f + \epsilon h_1, g + \epsilon h_2)$ definieren, welche den Forderungen aus Konstruktion 3.2.9 genügt. Sie ist eine nicht-spezielle, hyperelliptische Kurve vom Geschlecht zwei und Grad fünf. Sie besitzt genau eine Komponente (in Form einer Pseudo-Geraden). \triangle

Bemerkung 3.2.12. Wir haben bereits in Satz 3.2.5 gesehen, dass Huisman seine Vermutung 3.2.1 für eine restriktive Klasse von Kurven bewiesen hat. Die Kurve aus Beispiel 3.2.11 ist ein minimales Beispiel dafür, dass sein Beweis nicht auf unverzweigte und nicht-spezielle Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$, welche $s \leq g - 1$ Komponenten besitzen, erweitert werden kann. \triangle

⁴Man beachte hierbei, dass wir die streng verschachtelten Polynom p, q in der vertauschten Reihenfolge gewählt haben.

3.2 Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen Räumen

Beispiel 3.2.13. Es seien die beiden streng verschachtelten Polynome $p := (t^2 - 1)(t - 3)$ und $q := (t^2 - 4)t$ gegeben. Die Homogenisierungen sind $P := (y^2 - x^2)(y - 3x)$ und $Q := (y^2 - 4x^2)y$. Die Bildkurve X von $\psi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, [x, y] \mapsto [xQ, xP, yQ, yP]$ wird definiert durch

$$\begin{aligned} q &:= x_0x_3 - x_1x_2, \\ c_1 &:= 3x_0x_1^2 - x_0x_1x_3 + 4x_1^2x_3 - 3x_0x_3^2 + x_2x_3^2 - x_3^3, \\ c_2 &:= 3x_0^2x_1 - x_0^2x_3 + 4x_0x_1x_3 - 3x_0x_2x_3 + x_2^2x_3 - x_2x_3^2, \\ c_3 &:= 3x_0^3 - x_0^2x_2 - 3x_0x_2^2 + x_2^3 + x_2^3 + 4x_0^2x_3 - x_2^2x_3. \end{aligned}$$

Dies ergibt eine rationale Kurve vom Grad vier in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Wie in Beispiel 3.2.11 betten wir das komplex-konjugierte Geradenpaar

$$\mathcal{V}(t^2 + 1) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, (s, t) \mapsto ([1, s], [1, t])$$

nach $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ und dann – mittels der Segre-Einbettung – nach $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ ein, sodass wir die definierenden Gleichungen $G := \mathcal{V}_+(q, x_0^2 + x_1^2, x_2^2 + x_3^2)$ erhalten. Da eine kanonische Kurve vom Geschlecht vier in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ durch den vollständigen Durchschnitt einer Quadrik und einer Kubik entsteht, können wir die Störung der entstehenden reduziblen Kurve $W := X \cup G = \mathcal{V}_+(q, h)$ mit

$$h := 3x_0^3 + 3x_0x_1^2 - x_0^2x_2 - 3x_0x_2^2 + x_2^3 + 4x_0^2x_3 - x_0x_1x_3 + 4x_1^2x_3 - x_2^2x_3 - 3x_0x_3^2 + x_2x_3^2 - x_3^3$$

in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ vollführen, anstatt die bihomogenen Polynome in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ zu betrachten.

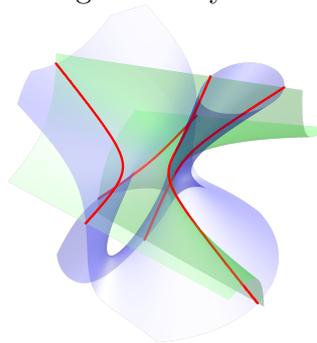


Abbildung 3.3: Die Punktmenge $W_{\frac{1}{100}}(\mathbb{R})$.

Wählen wir zum Beispiel $p := x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - x_3^3$, so existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $W_\epsilon := \mathcal{V}_+(q, h + \epsilon p)$ eine unverzweigte Kurve vom Geschlecht vier und Grad sechs definiert,

welche topologisch aus genau einem Oval besteht. \triangle

Die beiden letzten Beispiele werden in Kapitel 5 erneut aufgegriffen und näher untersucht. Beispielsweise stellt sich die Frage, ob es möglich ist, den Parameter $\epsilon > 0$ so zu bestimmen, dass die Kurve W_ϵ die erforderlichen Bedingungen tatsächlich erfüllt. In Kapitel 5 werden wir diese Frage mittels rechnerischer Methoden beantworten.

3.3 Huismans Vermutung in gerade-dimensionalen Räumen

In seiner Arbeit hat Huisman auch Einbettungen von Kurven in gerade-dimensionale projektive Räume untersucht (vgl. [40, Abs. 4]). Er stellte fest, dass eine M -Kurve positiven Geschlechts in einen gerade-dimensionalen projektiven Raum eingebettet werden kann, sodass die entstehende Bildkurve verzweigt ist. Begründet durch seine weiteren Ergebnisse stellte er die Vermutung auf, dass eine unverzweigte Kurve in einem gerade-dimensionalen projektiven Raum eine rationale Normalenkurve sein müsste.

Vermutung 3.3.1. [40, Verm. 3.6] *Es sei $n \geq 4$ gerade und $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine unverzweigte Kurve. Dann ist X eine rationale Normalenkurve.*

Im Gegensatz zu unserer Generalvoraussetzung setzt Huisman in seiner Arbeit nicht voraus, dass stets $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ gilt. Im Fall $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ vermutet Huisman, dass die Komplexifizierung $X_{\mathbb{C}}$ eine rationale Normalenkurve sein müsse. Wie schon beim Studium von Vermutung 3.2.1 beweist Huisman seine Vermutung 3.3.1 im Fall von nicht-speziellen Kurven mit vielen Komponenten und wenigen Ovalen.

Satz 3.3.2. [39, Thm. 2] *Es sei $n \geq 4$ gerade und $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine unverzweigte, nicht-spezielle Kurve mit vielen Komponenten und wenigen Ovalen. Dann ist X eine rationale Normalenkurve.*

Wir widmen uns im restlichen Abschnitt dem Beweis von Huismans Vermutung in gerade-dimensionalen projektiven Räumen für generische Kurven ungeraden Grades und für kanonische Kurven. Dazu benötigen wir einige Hilfsresultate über (verzweigte) \mathbb{C} -Kurven.

Lemma 3.3.3. *Es sei $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine Kurve und $X_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ihre Komplexifizierung. Ist die Anzahl der \mathbb{C} -Verzweigungshyperebenen $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ an $X_{\mathbb{C}}$ ungerade, so existiert eine Verzweigungshyperebene $H_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ an X .*

3.3 Huismans Vermutung in gerade-dimensionalen Räumen

Beweis. Es sei $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ eine \mathbb{C} -Verzweigungshyperebene an $X_{\mathbb{C}}$. Da $X_{\mathbb{C}}$ als Komplexfizierung von X durch reelle Gleichungen definiert ist, ist auch $\overline{H} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ eine \mathbb{C} -Verzweigungshyperebene an $X_{\mathbb{C}}$: Da diese durch die komplexe Konjugation der H definierenden Gleichung entsteht, ist das Schnittverhalten von \overline{H} mit der \mathbb{C} -Kurve $X_{\mathbb{C}}$ durch den zu $X_{\mathbb{C}} \cdot H$ komplex-konjugierten Divisor bestimmt. Da die Anzahl der \mathbb{C} -Verzweigungshyperebenen ungerade ist, existiert eine reelle Verzweigungshyperebene $H_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ an X . \square

Satz 3.3.4. [1, S. 359] (Formel von de Jonquières) *Es sei Y eine generische \mathbb{C} -Kurve vom Geschlecht g . Es seien $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ paarweise verschiedene natürliche Zahlen und $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$ seien natürliche Zahlen. Weiter seien $\mathbf{d} \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0$ gegeben, sodass $\sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i \mathbf{n}_i = \mathbf{d}$ und $\sum_{i=1}^k \mathbf{n}_i = \mathbf{d} - \mathbf{r}$ gelten. Wir setzen*

$$R_{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) := 1 + \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i^2 \mathbf{t}_i \quad \text{und} \quad P_{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) := 1 + \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i \mathbf{t}_i$$

als Polynome in den Variablen $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k$. Weiter bezeichnen wir mit

$$\mu_{\mathbf{a}, \mathbf{n}} := \left[R_{\mathbf{a}}(\mathbf{t})^g P_{\mathbf{a}}(\mathbf{t})^{\mathbf{d}-\mathbf{r}-g} \right]_{\mathbf{t}_1^{\mathbf{n}_1} \dots \mathbf{t}_k^{\mathbf{n}_k}}$$

den Koeffizienten von $\mathbf{t}_1^{\mathbf{n}_1} \dots \mathbf{t}_k^{\mathbf{n}_k}$ des in der Klammer stehenden Polynoms. Ist ein Linearsystem vom Grad \mathbf{d} und der Dimension \mathbf{r} auf Y gegeben, so gibt es dort genau $\mu_{\mathbf{a}, \mathbf{n}}$ Divisoren, welche \mathbf{n}_i Punkte der Multiplizität \mathbf{a}_i im Träger besitzen.

Für Näheres zur Formel von de Jonquières und der Untersuchung enumerativer Fragen sei auf [90] verwiesen. Mithilfe dieser können wir beispielsweise berechnen, wie viele Hyperebenen H existieren, welche eine generische \mathbb{C} -Kurve $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ vom Geschlecht zwei und Grad sieben in einem Punkt mit sechsfacher Vielfachheit schneiden. Es ist

$$\mu_{(6,1),(1,1)} = \left((1 + 36\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)^2 \right)_{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2} = 72.$$

Lemma 3.3.5. *Es sei $k \geq 2$ und $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2k}$ eine generische \mathbb{C} -Kurve von ungeradem Grad. Dann ist die Anzahl der gewöhnlichen \mathbb{C} -Wendehyperebenen⁵ ungerade.*

⁵Streng genommen bestimmen wir in Lemma 3.3.5 die Anzahl der Verzweigungshyperebenen mit einem vorgegebenem Schnittverhalten: Diese sollen Y in genau einem Punkt mit Vielfachheit $2k+1$ und sonst nur in einfachen Punkten schneiden. Eine *gewöhnliche \mathbb{C} -Wendehyperebene* H ist durch die schwächere Bedingung $\text{wt}(Y \cdot H) = \mathbf{n}$ definiert.

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

Beweis. Wir stellen die Daten aus der Formel von de Jonquières 3.3.4 zusammen: Es sei $k \geq 2$ und $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2k}$ eine generische \mathbb{C} -Kurve vom Geschlecht g und ungeradem Grad $\deg X = 2d' + 1$. Die Dimension des Hyperebenenschnittsystems ist $2k$ und sein Grad ist $2d' + 1$. Im Sinne der Notation aus der Formel von de Jonquières 3.3.4 gilt $r = 2k$, $d = 2d' + 1$ sowie die Bedingungen

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (2k + 1, 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2) = (1, 2(d' - k)).$$

Die Voraussetzungen $n_1 + n_2 = 1 + 2d' - 2k = d - r$ und $a_1 n_1 + a_2 n_2 = 2k + 1 + 2d' - 2k = d$ sind erfüllt. Schreiben wir abkürzend $v := 2k + 1$, so ergeben sich die Polynome $R_a(t) = 1 + v^2 t_1 + t_2$ und $P_a(t) = 1 + v t_1 + t_2$. Es ist also der Koeffizient

$$\mu_{\mathbf{a}, \mathbf{n}}(t) = \left(R_a(t)^g \cdot P_a(t)^{d-r-g} \right)_{t_1 t_2^{2(d'-k)}}$$

zu bestimmen. Für den ersten Faktor untersuchen wir

$$(1 + v^2 t_1 + t_2)^g = \sum_{i=0}^g \binom{g}{i} (v^2 t_1 + t_2)^i$$

und kürzen

$$N(i, j) := \binom{i}{j} (v^2 t_1)^j t_2^{i-j}$$

ab. In der entstehenden Summe

$$\binom{g}{0} N(0, 0) + \binom{g}{1} (N(1, 0) + N(1, 1)) + \dots + \binom{g}{g} (N(g, 0) + N(g, 1) + \dots + N(g, g))$$

ist für die Bestimmung des oben genannten Koeffizienten ausschließlich $N(i, j)$ mit $j \in \{0, 1\}$ relevant. Ansonsten kommt t_1 in einer zu hohen Potenz vor. Setzen wir nun $h := d - r - g$, so gilt

$$(1 + v t_1 + t_2)^h = \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} (v t_1 + t_2)^i$$

und die analoge Setzung von

$$M(i, j) := \binom{i}{j} (v t_1)^j t_2^{i-j}$$

3.3 Huismans Vermutung in gerade-dimensionalen Räumen

liefert

$$\binom{h}{0} M(0,0) + \binom{h}{1} (M(1,0) + M(1,1)) + \cdots + \binom{h}{h} (M(h,0) + \cdots + M(h,h)).$$

Vergleichen wir nun auch die Grade der Variablen t_2 , so trägt nur der Ausdruck

$$\binom{g}{g} N(g,1) \cdot \binom{h}{h} M(h,0) + \binom{g}{g} N(g,0) \cdot \binom{h}{h} M(h,1)$$

zum relevanten Teil bei der Berechnung des obigen Koeffizienten bei. Der Koeffizient von $t_1 t_2^{2(d'-k)}$ berechnet sich zu

$$(2k+1) \cdot (2d'+1) + 2k \cdot (2k+1) \cdot (g-1)$$

und dies ist eine ungerade Zahl. □

Satz 3.3.6. *Huismans Vermutung in gerade-dimensionalen projektiven Räumen 3.3.1 ist wahr für generische (reelle) Kurven von ungeradem Grad.*

Beweis. Damit ist gemeint, dass eine generische Kurve ungeraden Grades in einem gerade-dimensionalen $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ für $n \geq 4$ stets verzweigt ist. Es sei X eine solche Kurve und $X_{\mathbb{C}}$ ihre Komplexifizierung. Nach Lemma 3.3.5 gibt es eine ungerade Anzahl an gewöhnlichen \mathbb{C} -Wendehyperebenen an $X_{\mathbb{C}}$. Nach Lemma 3.3.3 muss es also auch eine reelle Verzweigungshyper ebene an X geben. □

Da kanonische Kurven (vgl. [33, Kap. IV, Abs. 5]) stets geraden Grad besitzen, ist zu untersuchen, ob diese in gerade-dimensionalen projektiven Räumen stets verzweigen. Dabei kann ein interessanter Zusammenhang zu Existenzaussagen über *ungerade reelle Theta-Charakteristiken* gezogen werden. Dies ist eine Divisorenklasse $[M] \in \text{Pic}^{g-1}(X)$ mit $[2M] = [K]$ und $\iota(M) \equiv_2 1$, wobei $[K]$ die kanonische Klasse bezeichnet.

Satz 3.3.7. *Huismans Vermutung in gerade-dimensionalen projektiven Räumen 3.3.1 ist wahr für kanonische Kurven.*

Beweis. Es sei $n \geq 4$ gerade und $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine kanonische Kurve mit s Komponenten. Diese besitzt das Geschlecht $g = n + 1$ und den Grad $d = 2g - 2$. Laut [26, Prop. 5.1] beträgt die Anzahl ungerader reeller Theta-Charakteristiken genau $2^{g-1} (2^{s-1} - 1 + \alpha)$, wobei $\alpha \in \{0, 1\}$ dadurch bestimmt ist, ob X vom teilenden oder nicht-teilenden Typ

3 Huismans Vermutungen über unverzweigte reelle Kurven

ist (vgl. [26, Abs. 3]). Diese Anzahl ist genau dann gleich null, wenn $s = 1$ und $\mathbf{a} = 0$ gilt; dies ist aber unmöglich, da g ungerade ist (vgl. [26, Prop. 3.1]). Folglich existiert eine ungerade reelle Theta-Charakteristik und diese hat einen effektiven Vertreter, da $l(M) \neq 0$ gilt. Das kanonische Linearsystem, welches dem Hyperebenenlinearsystem entspricht, enthält folglich eine *Kontakthyperebene* $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$. Diese ist dadurch definiert, dass alle Schnittpunkte von X mit H mit gerader Vielfachheit auftreten. Schauen wir uns das Gewicht des Schnittdivisors von X mit der Kontakthyperebene H an, so wird deutlich, dass dieses mindestens den halben Grad von X beträgt. Es gilt $wt(X \cdot H) \geq g - 1 = n$ und somit ist X verzweigt. \square

Trotz der positiven Ergebnisse ist tendenziell zu erwarten, dass es bereits in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ Kurven geraden Grades gibt, welche der Vermutung 3.3.1 widersprechen. Eine spannendere Frage wäre, ob es sogar möglich ist, eine Kurve ungeraden Grades zu konstruieren, welche der Vermutung 3.3.1 widerspricht. Im Gegensatz zu den Gegenbeispielen zu Huismans Vermutung in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ (vgl. Konstruktionen 3.2.8 und 3.2.9), welche auf bekannten topologischen Eigenschaften der Segre-Quadrik fußen, sind (Hyper-)Flächen in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ weniger gut untersucht.

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Es sei X eine (reelle) Kurve positiven Geschlechts $g \geq 1$. Für jedes $k \geq 1$ gibt es einen \mathbb{R} -Morphismus

$$\varphi^k : \text{Sym}^k(X) \rightarrow J_X$$

von der symmetrischen k -Potenz von X in die Jacobische Varietät J_X . Dieser ist für $k = g$ birational (vgl. [60, Kap. III, Thm. 5.1]). Fixieren wir einen reellen Punkt $P_0 \in X(\mathbb{R})$ und schränken den Morphismus φ^k auf die Menge der \mathbb{R} -rationalen Punkte ein, so erhalten wir die Abbildung

$$\varphi_{\mathbb{R}}^k : \text{Div}_+^k(X) \rightarrow \text{Pic}^0(X), D \mapsto [D - kP_0].$$

Laut dem Satz von Riemann-Roch ist diese für $k \geq g$ surjektiv (vgl. [55, Kap. 7, Thm. 3.26]). Gehen wir einen Schritt weiter und schauen uns ausschließlich die k -Tupel \mathbb{R} -rationaler Punkte von X an, so stellt sich die Frage, ob die Abbildung

$$\psi^k : X(\mathbb{R})^k \rightarrow \text{Pic}^0(X), (P_1, \dots, P_k) \mapsto [P_1 + \dots + P_k - kP_0]$$

für gewisse $k \in \mathbb{N}$ surjektiv ist.

Wir untersuchen in diesem Kapitel die Abbildung ψ^k in Abhängigkeit der topologischen Parameter der Kurve X . Nachdem wir den aktuellen Forschungsstand dargelegt haben, zeigen wir einige Erweiterungen der bisher bekannten Ergebnisse auf. Des Weiteren ziehen wir einen interessanten Zusammenhang zwischen der Surjektivität von ψ^k und Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen projektiven Räumen 3.2.1 aus Kapitel 3. Schließlich untersuchen wir, inwieweit sich die für nicht-singuläre Kurven gefundenen Ergebnisse auf singuläre Kurven auswirken.

4.1 Die reelle Divisorenschranke

Historisch gesehen war es zuerst Krasnov, welcher sich einem Spezialfall der obigen Fragestellung widmete. Bereits im Jahr 1983 untersuchte er die Abbildung

$$\psi^1 : X(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pic}^0(X), P \mapsto [P - P_0]$$

und bewies, dass das Bild von ψ^1 die Gruppe $\text{Pic}^0(X)$ erzeugt, sofern X eine M -Kurve ist (vgl. [49, Thm. 6.3.2]). In derselben Arbeit vermutete er, dass dies für beliebige Kurven gelte. Er bewies seine Vermutung ein Jahr später selbst (vgl. [50, Abs. 2]). Im Jahr 2000 bewies Scheiderer mit rein topologischen Methoden, dass eine (kleinste) Zahl $N(X) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\psi^{N(X)}$ surjektiv ist (vgl. [82, Thm. 2.7]). Daraus folgt unmittelbar Krasnovs Resultat über die Erzeugung von $\text{Pic}^0(X)$, wohingegen die umgekehrte Implikation – wie fälschlicherweise in [15, S. 601] und [14, S. 778] angenommen – nicht ohne Weiteres belegbar ist.

Wir wiederholen zunächst die notwendige Divisorentheorie aus Kapitel 2. Es sei X stets eine integrale, nicht-singuläre und projektive Kurve über \mathbb{R} mit $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ (vgl. Definition 2.1.17). Es sei

$$D := \sum_{i=1}^m n_i R_i \quad (m \in \mathbb{N}_0, n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, R_i \text{ paarweise verschiedene Punkte auf } X)$$

ein Divisor auf X . Dieser heißt *effektiv*, wenn $n_i \geq 1$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. Er heißt *reduziert*, wenn $n_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. Bekanntlich kann D in die Form

$$D = \sum_{i=1}^k n_i P_i + \sum_{j=1}^l m_j Q_j^\sigma$$

mit reellen Punkten $P_i \in X(\mathbb{R})$ und komplex-konjugierten Paaren $Q_j^\sigma \notin X(\mathbb{R})$ gebracht werden.

Definition 4.1.1. Es sei $D \in \text{Div}_+(X)$ ein effektiver Divisor.

1. Es heißt D *total-reell*, wenn $\text{Supp}(D) \subset X(\mathbb{R})$ gilt.
2. Es heißt D *total-komplex*, wenn $\text{Supp}(D) \cap X(\mathbb{R}) = \emptyset$ gilt.

Wir interessieren uns im Folgenden dafür, inwieweit ein Divisor linear äquivalent zu einem (effektiven) total-reellen oder einem (effektiven) total-komplexen Divisor ist,

wobei der erstgenannte Begriff im Vordergrund steht. Für eine komfortable Lesbarkeit führen wir die folgende Sprechweise ein: Ein (vollständiges) Linearsystem heißt *total-reell*, wenn es einen total-reellen Divisor enthält.

Bereits in Kapitel 3 hat die euklidische Topologie der Menge der reellen Punkte $X(\mathbb{R})$ eine wichtige Rolle gespielt. Diese zerfällt in s (euklidische) Zusammenhangskomponenten – kurz: *Komponenten* – und es gilt die Beschränkung $s \leq g + 1$, wobei g das Geschlecht von X ist (vgl. Harnack [31]). Die s Komponenten von $X(\mathbb{R})$ (oder kurz: von X) bezeichnen wir üblicherweise mit X_1, \dots, X_s .

Lemma 4.1.2. [26, Lem. 4.1] *Es sei $f \in \mathbb{R}(X)^*$. Der Hauptdivisor $\text{div}(f)$ hat geraden Grad auf jeder Komponente X_i von X .*

Da sich linear äquivalente Divisoren um einen Hauptdivisor unterscheiden, ist der Grad modulo zwei eines Linearsystems wohldefiniert. Das bedeutet, dass die Abbildung

$$c : \text{Pic}(X) \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^s, [D] \mapsto (\deg_{X_1}(D), \dots, \deg_{X_s}(D))$$

wohldefiniert ist, wobei $\deg_{X_i}(D)$ den Grad von D auf der Komponente X_i bezeichnet.

In Analogie zum total-reellen Fall nennen wir ein (vollständiges) Linearsystem *total-komplex*, wenn es einen total-komplexen Divisor enthält. Laut Lemma 4.1.2 besitzt ein total-komplexes Linearsystem ausschließlich Divisoren vom (gleichen) geraden Grad, welche zusätzlich geraden Grad auf jeder Komponente besitzen.

Problem 4.1.3. Es sei X eine Kurve. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl $N(X) \in \mathbb{N}$, sodass jeder Divisor vom Grad $d \geq N(X)$ ein total-reelles Linearsystem definiert.

Wir nennen $N(X)$ die *reelle Divisorenschranke von X* . Bevor wir auf die Existenz von $N(X)$ eingehen, formulieren wir den Zusammenhang zu den Abbildungen ψ^k . Es ist

$$N(X) := \min\{\mathfrak{n} \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } D \in \text{Div}^d(X) \text{ mit } d \geq \mathfrak{n} \text{ ist } |D| \text{ total-reell}\}.$$

Es ist offensichtlich, dass

$$N(X) = \min\{\mathfrak{n} \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } D \in \text{Div}^{\mathfrak{n}}(X) \text{ ist } |D| \text{ total-reell}\}$$

gilt. Definiert nämlich jeder Divisor vom Grad \mathfrak{a} ein total-reelles Linearsystem und

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

betrachten wir $D \in \text{Div}^{a+1}(X)$, so wählen wir einen beliebigen reellen Punkt $P \in X(\mathbb{R})$ und schließen, dass das Linearsystem $|D - P|$ total-reell ist. Also ist es auch $|D|$.

Lemma 4.1.4. *Die Abbildung ψ^k ist genau dann surjektiv, wenn $k \geq N(X)$ gilt.*

Es ist auch hier ersichtlich, dass aus der Surjektivität einer Abbildung ψ^N die Surjektivität aller Abbildungen ψ^k für $k \geq N$ folgt. Wir kommen auf die Existenz von $N(X)$ zurück. Das Resultat über die Endlichkeit von $N(X)$, welches das Studium der reellen Divisorenschranke erst initiierte, wurde im Jahr 2000 mit rein topologischen Methoden von Scheiderer erzielt.

Satz 4.1.5. *[82, Kor. 2.10] Für jede Kurve X gilt $N(X) \in \mathbb{N}$.*

Im Beweis nutzt Scheiderer die reelle Struktur der Jacobischen $J_X(\mathbb{R}) = \text{Pic}^0(X)$ aus (vgl. [82, Lem. 2.11]). Diese ist eine kompakte reelle Lie-Gruppe. Ist $U \subset \text{Pic}^0(X)$ eine nicht-leere offene Menge, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass jede Klasse $[D] \in \text{Pic}^0(X)_0$ eine Summe von höchstens n Elementen aus U ist. Dabei bezeichnet $\text{Pic}^0(X)_0$ die *Einskomponente* der Jacobischen, also die Sammlung aller Divisorenklassen vom Grad null, welche geraden Grad auf jeder Komponente besitzen. Es sei $P_0 \in X(\mathbb{R})$ ein fixierter reeller Punkt und $U \subset X(\mathbb{R})$ eine nicht-leere offene Menge. Es sei $\varphi^g : \text{Sym}^g(X) \rightarrow J_X$ der oben beschriebene \mathbb{R} -Morphismus. Weiter sei $V \subset \text{Div}_+^g(X)$ die Menge aller Divisoren $D \in \text{Div}_+^g(X)$, für die $\text{Supp}(D) \subset U$ gilt. Das Bild von V unter φ^g enthält eine nicht-leere offene Menge von $\text{Pic}^0(X)$ (vgl. [82, Lem. 2.12]), somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass alle Klassen $[D] \in \text{Pic}^0(X)_0$ von der Form $[D] = \sum_{i=1}^r [P_i - P_0]$ für $P_1, \dots, P_r \in U \subset X(\mathbb{R})$ und $r \leq n$ sind. Wegen

$$\text{Pic}^0(X)/\text{Pic}^0(X)_0 = \langle \overline{[P_1 - P]}, \dots, \overline{[P_{s-1} - P]} \rangle$$

für $P \in X_s$ und $P_i \in X_i$ ist eine Klasse $[D] \in \text{Pic}^0(X)$ reell nach $\text{Pic}^0(X)_0$ verschiebbar, woraus die obige Behauptung folgt.

Das Problem 4.1.3 lässt sich wie folgt verschärfen: Ein (vollständiges) Linearsystem heißt *reduziert total-reell*, wenn es einen reduzierten total-reellen Divisor enthält.

Problem 4.1.6. Es sei X eine Kurve. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl $N'(X) \in \mathbb{N}$, sodass jeder Divisor vom Grad $d \geq N'(X)$ ein reduziert total-reelles Linearsystem definiert.

Wir nennen $N'(X)$ die *reduzierte reelle Divisorenschranke von X* . Offenbar gilt $N(X) \leq N'(X)$. Ein wesentlicher Unterschied zum Studium von $N(X)$ liegt darin, dass es nicht ohne Weiteres genügt zu zeigen, dass jedes Linearsystem vom Grad d reduziert total-reell ist, um darauf zu schließen, dass dies für Linearsysteme vom Grad $d' \geq d$ gilt. Das Studium reduzierter total-reeller Linearsysteme begann – wie schon bei $N(X)$ – mit der Existenzaussage von Scheiderer (vgl. [82, Bem. 2.14].) Er merkte an, dass $N'(X)$ stets endlich sei – ohne ein genaues Argument dafür zu nennen. Monnier [64, Abs. 4] griff das Ergebnis der Endlichkeit von $N'(X)$ auf, um Ergebnisse über die reelle Divisorenschranke einer singulären Kurve zu gewinnen. Das bisher stärkste Resultat hinsichtlich eines Vergleichs zwischen $N(X)$ und $N'(X)$ stammt von Bardet und impliziert die Endlichkeit von $N'(X)$.

Satz 4.1.7. [3, Prop. 2.1.2] *Für jede Kurve X gilt $N'(X) \leq 2N(X)$.*

Die wohl spannendste Frage hinsichtlich des Vergleichs zwischen $N(X)$ und $N'(X)$ ist die, ob diese beiden Größen jemals verschieden sein können. Selbst in einfachen Beispielen scheint diese Frage nicht direkt beantwortbar zu sein (vgl. Kapitel 6).

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Studium total-komplexer Linearsysteme ab. Dazu setzen wir

$$M(X) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } D \in \text{Div}^{2d}(X) \text{ mit } 2d \geq 2m \text{ und } \deg_{X_i}(D) \equiv_2 0 \\ \text{auf allen } X_i \text{ ist } |D| \text{ total-komplex}\}.$$

In Analogie zu $N(X)$ ist auch hier ersichtlich, dass

$$M(X) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } D \in \text{Div}^{2m}(X) \text{ und } \deg_{X_i}(D) \equiv_2 0 \\ \text{auf allen } X_i \text{ ist } |D| \text{ total-komplex}\}$$

gilt. Möchten wir die Größe $M(X)$ in Zusammenhang zu einer passenden Abbildung in die Jacobische setzen, so müssen wir die Abbildung

$$\Psi^k : (X \setminus X(\mathbb{R}))^k \rightarrow \text{Pic}^0(X)_0, (Q_1^\sigma, \dots, Q_k^\sigma) \mapsto [Q_1^\sigma + \dots + Q_k^\sigma - 2kP_0]$$

für einen fixierten reellen Punkt $P_0 \in X(\mathbb{R})$ betrachten.

Lemma 4.1.8. *Die Abbildung Ψ^k ist genau dann surjektiv, wenn $k \geq M(X)$ gilt.*

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Ist Ψ^k surjektiv, so betrachte man $[D + Q^\sigma - 2P_0]$, um zu folgern, dass Ψ^{k+1} surjektiv ist. Die Frage nach $M(X)$ wurde zuerst in einer Arbeit von Monnier aufgeworfen (vgl. [63, Abs. 2]). Für Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$ bewies er, dass $g \leq M(X) \leq 2g$ gilt. Die obere Schranke kann mithilfe von Dimensionsargumenten zu $M(X) \leq g + 1$ verbessert werden (vgl. [3, Prop. 1.4.1]). Schließlich wurde die Frage nach $M(X)$ vollständig durch Coppens gelöst.

Satz 4.1.9. [10] *Es sei X eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 1$. Dann gilt $M(X) = g$.*

Grundsätzlich bleibt das Studium total-komplexer Linearsysteme unabhängig vom Ergebnis von Coppens interessant: Beschränken wir uns auf das Hyperebenenchnittsystem, so stellt sich die Frage, ob eine Kurve $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ ein kompaktes affines Bild ihrer reellen Punkte besitzt, also ob es einen total-komplexen Hyperebenenchnitt gibt. Im Fall ebener Kurven kann diese Frage teilweise beantwortet werden. Ist $d \geq 6$ gerade, so gibt es eine ebene Kurve $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vom Grad d , sodass das Hyperebenenchnittsystem¹ nicht total-komplex ist (vgl. Reichstein [78]). Beispiele solcher Kurven vom Grad $d = 6$ wurden bereits vorher in [44, Bsp. 3.1] untersucht. Allgemeiner wurde die (euklidische) Topologie des sogenannten *Vermeidungsortes*² einer ebenen Kurve studiert (vgl. [44, Abs. 5]).

Analog zu $N'(X)$ stellt sich die Frage nach der Existenz von reduzierten total-komplexen Divisoren. Ein (vollständiges) Linearsystem heißt *reduziert total-komplex*, wenn es einen reduzierten total-komplexen Divisor enthält. Nun stellt sich die Frage nach der kleinsten natürlichen Zahl $M'(X) \in \mathbb{N}$, sodass jeder Divisor vom Grad $2d \geq 2M'(X)$, welcher geraden Grad auf jeder Komponente besitzt, ein reduziert total-komplexes Linearsystem definiert. Offenbar gilt $M(X) \leq M'(X)$ und mithilfe eines Störungsarguments können wir die Frage nach $M'(X)$ vollständig beantworten.

Satz 4.1.10. *Es sei X eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 1$. Dann gilt $M'(X) = g$.*

Beweis. Es sei D ein Divisor vom Grad $2d$ mit $d \geq g$, welcher geraden Grad auf jeder Komponente von X besitzt. Das vollständige Linearsystem $|D|$ definiert einen \mathbb{R} -Morphismus $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^g$, da $|D|$ nach [33, Kap. IV, Kor. 3.2] basispunktfrei ist (vgl. auch Abschnitt 2.2). Nach dem Ergebnis von Coppens (vgl. [10]) ist $M(X) = g$, also existiert eine Hyperebene $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^g$, welche die Bildkurve X_0 ausschließlich in komplex-

¹Da ebene Kurven vollständige Durchschnitte sind, sind sie linear normal (vgl. [33, Kap. III, Abs. 5, Aufg. 5.5]). Also ist das Hyperebenenchnittsystem vollständig.

²Engl.: *Avoidance locus*.

4.2 Divisorenschranken für Kurven mit vielen Komponenten

konjugierten Paaren schneidet. Dies bleibt wahr für jede minimale Störung der definierenden Gleichung von H , denn eine reelle Nullstelle zu besitzen, ist eine euklidisch abgeschlossene Bedingung, die stetig von den Koeffizienten der linearen Gleichung von H abhängt. Die Rückzüge all dieser Störungen unter dem obigen \mathbb{R} -Morphismus liefern total-komplexe Divisoren in $|D|$. Folglich gibt es eine euklidisch offene Menge total-komplexer Divisor innerhalb von $|D|$, wobei wir $|D|$ mit dem projektiven Raum $\mathbb{P}(L(D))$ über $L(D)$ identifizieren (vgl. Abschnitt 2.2). Um zu begründen, dass es dort einen reduzierten Divisor gibt, benutzt man den Satz von Bertini (vgl. [25, S. 137]), welcher aussagt, dass das (Zariski-)generische Element eines über \mathbb{C} betrachteten basispunkt-freien Linearsystems reduziert ist. \square

Scheiderers Motivation für das Studium von $N(X)$ liegt in der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen positiv semi-definiten regulären Funktionen auf Kurven über reell abgeschlossenen Körpern und ihrer Darstellung als Summe von Quadraten (vgl. [82, Kor. 3.7]). Aus diesem Grund erweitert Scheiderer seinen Beweis der Endlichkeit von $N(X)$ auf Kurven über reell abgeschlossenen Körpern (vgl. [82, S. 1050]). Grundsätzlich können zahlreiche Abwandlungen und Verallgemeinerungen der Frage nach total-reellen Linearsystemen gestellt werden: Beispielsweise könnten \mathbb{R} -Varietäten höherer Dimension untersucht oder andere Voraussetzungen der Definition 2.1.17 gestrichen werden (vgl. [83, Abs. 3] und [79]). Zwar werden diese Fragen in der vorliegenden Dissertation nicht aufgegriffen, jedoch ist die Erweiterung der Fragestellung auf singuläre Kurven sehr wohl Bestandteil dieser Arbeit (vgl. [64] und Abschnitt 4.7).

4.2 Divisorenschranken für Kurven mit vielen Komponenten

In seiner Arbeit wirft Scheiderer die Frage nach der Beschränkung von $N(X)$ mithilfe von bekannten Invarianten der gegebenen Kurve auf (vgl. [82, S. 1049]). In den folgenden Abschnitten widmen wir uns der Beschränkung von $N(X)$. Dabei sind die einzigen bekannten Resultate für Kurven mit vielen Komponenten formuliert (vgl. [38] und [63]). Wir nutzen die dortigen Techniken aus, um eine minimale Verbesserung der Ergebnisse für Kurven mit vielen Komponenten zu erhalten; diese wird in Abschnitt 5.4 benutzt, um eine explizite Bestimmung von $N(X)$ für ebene Quartiken vorzunehmen. Um die Sprechweise zu vereinfachen, legen wir die folgenden Notationen für Divisoren-

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

klassen fest (vgl. Satz von Comessatti [9, Thm. 4.1.7]): Da linear äquivalente Divisoren den gleichen Grad haben, können wir die Divisorenklassen $\text{Pic}^d(X)$ vom Grad $d \geq 0$ betrachten. Schränken wir die Abbildung

$$c : \text{Pic}(X) \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^s, [D] \mapsto (\deg_{X_1}(D), \dots, \deg_{X_s}(D))$$

auf die Menge $\text{Pic}^d(X)$ ein, so erhalten wir

$$c_d : \text{Pic}^d(X) \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^s, [D] \mapsto (\deg_{X_1}(D), \dots, \deg_{X_s}(D)).$$

Die (reellen) Zusammenhangskomponenten von $\text{Pic}^d(X)$ sind genau die nicht-leeren Fasern von c_d . Ist $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s) \in (\mathbb{Z}/2)^s$, so bezeichnen wir mit

$\mathcal{U}(d; \mathbf{u}) := c_d^{-1}(\mathbf{u})$ genau dann die nicht-leere Faser von \mathbf{u} unter c_d , wenn $\sum_{i=1}^s \mathbf{u}_i \equiv_2 d$

gilt. Es ist $\mathcal{U}(0; 0, \dots, 0) = \text{Pic}^0(X)_0$ die Einkomponente der Jacobischen von X . Ist ein Divisor D gegeben, so bezeichnen wir mit $(d; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s)$ den *Datenvektor von D* (oder: den *Datenvektor von $|D|$*), wenn $[D] \in \mathcal{U}(d; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s)$ gilt.

Definition 4.2.1. Eine Kurve heißt $(M - k)$ -*Kurve*, wenn sie genau $g + 1 - k$ Komponenten besitzt (für $0 \leq k \leq g$).

Für das Studium total-reeller Linearsysteme ist es zunächst notwendig, eine gute Charakterisierung davon zu haben, wann Linearsysteme nicht-leer sind. Dies beantwortet der Satz von Riemann-Roch. Ist D ein Divisor, so können wir dem Linearsystem $|D|$ die Struktur eines projektiven Raums $\mathbb{P}(L(D))$ geben und bekommen dadurch eine sinnvolle Beschreibung von $\dim |D|$ (vgl. Abschnitt 2.2). Für die Definition der kanonischen Modulgarbe ω_X auf einer Kurve X sei auf [33, Kap. II, Abs. 8] verwiesen; diese definiert die kanonische Divisorenklasse $[K]$ und damit das kanonische Linearsystem $|K|$ (vgl. [33, Kap. IV, Abs. 5]).

Satz 4.2.2. [55, Kap. 7, Thm. 3.26] (*Satz von Riemann-Roch*) *Es sei $D \in \text{Div}(X)$ und $[K]$ die kanonische Klasse. Dann gilt*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g,$$

wobei g das Geschlecht von X ist.

4.2 Divisorenschranken für Kurven mit vielen Komponenten

Ist D ein Divisor vom Grad mindestens g , so sagt der Satz von Riemann-Roch 4.2.2, dass $l(D) \geq 1$ und somit $\dim |D| \geq 0$ gilt: Es gibt einen effektiven Divisor D' , welcher linear äquivalent zu D ist – das Linearsystem von D ist nicht-leer.

Proposition 4.2.3. *Es sei X eine rationale Kurve. Dann gilt $N(X) = N'(X) = 1$.*

Beweis. Da wir grundsätzlich voraussetzen, dass $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ ist, ist eine rationale Kurve isomorph zur projektiven Geraden³. Lineare Äquivalenz ist hierbei durch den Grad bestimmt: Ein Divisor vom Grad eins ist linear äquivalent zu einem reellen Punkt. \square

Proposition 4.2.4. *Es sei X eine elliptische Kurve. Dann gilt $N(X) = N'(X) = 1$.*

Beweis. Für eine elliptische Kurve nutzen wir die oben formulierte Folgerung des Satzes von Riemann-Roch 4.2.2. Ein Divisor vom Grad $g = 1$ besitzt ein nicht-leeres Linearsystem und ein effektiver Divisor vom Grad eins ist ein reeller Punkt. Da diese Argumentation für $N'(X)$ nicht genügt (vgl. Problem 4.1.6), verweisen wir auf [3, Prop. 2.2.1]. \square

Ab sofort setzen wir grundsätzlich voraus, dass unsere Kurven das Geschlecht $g \geq 2$ besitzen, sofern es um Bestimmungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke geht. Nach der Formulierung des Problems 4.1.3 durch Scheiderer war es zunächst Huisman, welcher sich der Beschränkung der reellen Divisorenschranke für M -Kurven widmete.

Satz 4.2.5. [38, Thm. 4.2] *Es sei X eine M -Kurve. Dann gilt $N(X) \leq 2g - 1$.*

Huismans Beweis nutzt die reelle Struktur der Picard-Gruppe aus. Wir können seine Techniken verwenden, um – mithilfe des Satzes von Riemann-Roch 4.2.2 und gewissen arithmetischen Bedingungen an die gegebenen Divisoren – eine Verschärfung seines Resultats zu erhalten. Diese minimale Verschärfung wird in Abschnitt 5.4 von Bedeutung sein.

Satz 4.2.6. *Es sei X eine M -Kurve und $D \in \text{Div}^{2g-2}(X)$ ein Divisor vom Grad $2g - 2$, sodass*

$$[D] \notin U(2g - 2; 0, \dots, 0)$$

gilt. Dann ist $|D|$ total-reell.

³Eine ebene Quadrik ohne reelle Punkte ist nach unserer Definition 2.1.17 keine Kurve.

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Beweis. Im ersten Fall sei D ein Divisor mit Datenvektor $(2g - 2; 1, \dots, 1)$. Wegen der Bedingung

$$2g - 2 \equiv_2 \sum_{i=1}^{g+1} 1$$

muss $g \equiv_2 1$ gelten. Wir setzen $D' := (g - 2)P$ für einen beliebigen Punkt $P \in X_1$ auf der Komponente X_1 von X . Der Datenvektor von $E := D - D'$ ist $(g; 0, 1, \dots, 1)$. Nach dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2 ist $|E|$ nicht-leer, also gibt es einen effektiven Divisor F mit $E \sim F$. Da F effektiv ist, können wir aus seinem Datenvektor ablesen, dass $|F|$ total-reell sein muss. Wegen $D = E + D' \sim F + D'$ ist auch $|D|$ total-reell. Im zweiten Fall sei $D \in \text{Div}(X)$ vom Grad $2g - 2$, sodass D auf mindestens einem Paar von Komponenten verschiedene Paritäten hinsichtlich des eingeschränkten Grades besitzt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass D den Datenvektor $(2g - 2; 0, 1, u_3, \dots, u_{g+1})$ besitzt. Wir nehmen den Divisor

$$D' := \sum_{k=3}^{g+1} \delta(u_k, 0)P_k \quad \text{mit beliebigen} \quad P_k \in X_k.$$

Dabei bezeichnet $\delta(u_k, 0)$ das Kronecker-Delta: Es gilt $\delta(u_k, 0) = 1$, wenn $u_k = 0$, sonst null. Offenbar gilt $\deg D' \leq g - 1$. Es gilt $\deg D - \deg D' \equiv_2 g$, also folgt, dass $\deg D' \equiv_2 g$ gilt. Folglich existiert ein $l \geq 1$ mit $\deg D' + 2l = g$. Wir nehmen den Divisor $F := D' + 2(l - 1)P$ für einen Punkt $P \in X_1$. Der Divisor $E := D - F$ hat den Datenvektor $(g; 0, 1, \dots, 1)$. Aus dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2 folgt, dass $|E|$ total-reell ist, also ist auch $|D|$ total-reell. \square

Huisman hat die Erwartung geäußert, dass es M -Kurven gebe, auf denen nicht jeder Divisor vom Grad $2g - 2$ ein total-reelles Linearsystem definiert (vgl. [38, S. 92]). Wir bestätigen diese Erwartung in Abschnitt 5.4. Die obigen Resultate erweitern sich auf $(M - 1)$ -Kurven. Die zweite relevante Arbeit, welche sich mit dem Problem 4.1.3 beschäftigte, ist die von Monnier (vgl. [63, Abs. 3]).

Satz 4.2.7. [63, Thm. 3.6] *Es sei X eine $(M - 1)$ -Kurve. Dann gilt $N(X) \leq 2g - 1$.*

Satz 4.2.8. *Es sei X eine $(M - 1)$ -Kurve und $D \in \text{Div}^{2g-2}(X)$ ein Divisor vom Grad $2g - 2$, sodass*

$$[D] \notin \mathcal{U}(2g - 2; 0, \dots, 0)$$

gilt. Dann ist $|D|$ total-reell.

4.3 Divisorenschranken für $(M - 2)$ -Kurven

Beweis. Ist D ein Divisor mit Datenvektor $(2g - 2; 1, \dots, 1)$, so verläuft der Beweis analog zum ersten Fall von Satz 4.2.6. Es sei $D \in \text{Div}(X)$ vom Grad $2g - 2$, sodass D auf mindestens einem Paar von Komponenten verschiedene Paritäten hinsichtlich des eingeschränkten Grades besitzt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass D den Datenvektor $(2g - 2; 0, 1, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{g+1})$ besitzt. Wir nehmen den Divisor

$$D' := \sum_{k=3}^{g+1} \delta(\mathbf{u}_k, 0) P_k \quad \text{mit beliebigen} \quad P_k \in X_k.$$

Es muss $\deg D' \leq g - 3$ gelten, da es eine weitere Komponente gibt, auf welcher D ungerade Parität hinsichtlich des eingeschränkten Grades besitzt. Betrachten wir die Differenz $\deg D - \deg D'$, so folgt, dass $\deg D' \equiv_2 g - 1$ gelten muss. Folglich existiert ein $l \geq 1$ mit $\deg D' + 2l = g - 1$. Wir nehmen den Divisor $F := D' + 2(l - 1)P$ mit einem Punkt $P \in X_1$. Der Divisor $E := D - F$ hat den Datenvektor $(g; 1, \dots, 1)$. Aus dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2 folgt, dass $|E|$ total-reell ist, also ist auch $|D|$ total-reell. \square

Auch im Fall von $(M - 1)$ -Kurven werden wir in Abschnitt 5.4 zeigen, dass es Beispiele ebener Quartiken und Divisoren auf diesen innerhalb von $\mathbf{U}(2g - 2; 0, \dots, 0) \subset \text{Pic}^{2g-2}(X)$ gibt, welche kein total-reelles Linearsystem definieren.

Schließlich sei noch Bardets Ergebnis zur reduzierten reellen Divisorenschranke erwähnt. In Analogie zu den obigen Resultaten, aber mit anderen Techniken, hat er bewiesen, dass auch $N'(X) \leq 2g - 1$ für Kurven mit vielen Komponenten gilt (vgl. [3, Thm. 2.4.0.1]). Dies wirft verstärkt die Frage danach auf, ob $N(X)$ und $N'(X)$ für Kurven mit vielen Komponenten übereinstimmen.

4.3 Divisorenschranken für $(M - 2)$ -Kurven

Ein Hauptresultat dieses Kapitels stellt den Zusammenhang zwischen Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen projektiven Räumen 3.2.1 und Beschränkungen von $N(X)$ im Fall von $(M - 2)$ -Kurven dar. Aus dem vorherigen Abschnitt sind die bisher besten uniformen oberen Schranken für $N(X)$ im Fall von Kurven mit vielen Komponenten ersichtlich. In diesem Abschnitt stellen wir eine Technik vor, welche uns erlaubt, eine obere Schranke für $N(X)$ für $(M - 2)$ -Kurven zu bestimmen; diese ist gültig unter der Annahme eines Spezialfalls von Huismans Vermutung in ungerade-dimensionalen projektiven Räumen 3.2.1 in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$.

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Wir erinnern daran, dass wir voraussetzen, dass eine Kurve X stets nicht-ausgeartet ist (vgl. Definition 3.1.1) und das Geschlecht $g \geq 2$ besitzt.

In seiner Arbeit formulierte Monnier das folgende Resultat, welches die in Kapitel 3 widerlegte Vermutung 3.2.1 voraussetzt.

Satz 4.3.1. [63, Thm. 3.7] *Es sei X eine $(M - 2)$ -Kurve vom geraden Geschlecht g . Unter der Annahme von Vermutung 3.2.1 gilt $N(X) \leq 3g - 1$.*

Wir sind in der Lage, ein konkretes Gegenbeispiel für Satz 4.3.1 anzugeben. Die in Beispiel 3.2.11 konstruierte Kurve $W_\epsilon \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ ist für ein passendes $\epsilon > 0$ vom Geschlecht $g = 2$, hat Grad fünf und besitzt genau eine Komponente in Form einer Pseudo-Geraden. Sie ist zwar kein vollständiger Durchschnitt, aber dennoch linear normal. Ihr vollständiges Linearsystem $|H|$ der Hyperebenenschnitte wurde in Konstruktion 3.2.9 beschrieben: Jede Hyperebene schneidet W_ϵ in mindestens einem komplex-konjugierten Paar. Folglich ist $|H|$ nicht total-reell und es gilt $N(X) \geq 6 = 3g$ im Widerspruch zu Monniers Schranke.

Wir können Monniers Resultat wie folgt verbessern: Wir werden unter schwächeren Voraussetzungen eine bessere Schranke für $N(X)$ formulieren, welche einen bisher ungelösten und plausiblen Spezialfall von Huismans Vermutung 3.2.1 in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ voraussetzt.

Vermutung 4.3.2. (Spezialfall von Vermutung 3.2.1) *Es sei $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ eine $(M - 2)$ -Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ und Grad $d = g + 5$ sowie mit $s = g - 1$ Pseudo-Geraden. Dann ist X verzweigt.*

Das Studium von Vermutung 4.3.2 besitzt einen hohen Stellenwert. Wir werden im Folgenden sehen, dass ein Beweis eine neue uniforme Schranke für $N(X)$ für $(M - 2)$ -Kurven impliziert. Ein Gegenbeispiel für Vermutung 4.3.2 wäre ein Anhaltspunkt für Kurven mit besonders hohem Wert für $N(X)$ sowie ein neues Gegenbeispiel für Huismans Vermutung in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ (vgl. [40, Verm. 3.4]).

Es sei X eine $(M - 2)$ -Kurve. Ist D ein Divisor mit Datenvektor $(g; 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$, so sagt der Satz von Riemann-Roch 4.2.2, dass $|D|$ nicht-leer ist. Folglich ist $|D|$ bereits total-reell oder es gilt

$$D \sim P_1 + \dots + \widehat{P}_i + \dots + P_{g-1} + Q^\sigma$$

für reelle Punkte $P_k \in X_k$ (außer auf einem X_i) und ein komplex-konjugiertes Paar Q^σ .

4.3 Divisorenschranken für $(M - 2)$ -Kurven

Lemma 4.3.3. *In der obigen Situation sei (ohne Einschränkung) $D = P_2 + \dots + P_{g-1} + Q^\sigma$ mit $P_k \in X_k$. Unter Annahme von Vermutung 4.3.2 gilt, dass für einen beliebigen Punkt $P_1 \in X_1$ der Divisor $D' := 5P_1 + D$ ein total-reelles Linearsystem definiert.*

Beweis. Der Divisor D' besitzt den Datenvektor $(g + 5; 1, \dots, 1)$. Für den Grad d' von D' gilt

$$d' + \delta(D') = (g + 5) + (g - 1) = 2g + 4 \geq 2g + 3,$$

weshalb aus den Sätzen 3.1.12 und 3.1.13 folgt, dass D' nicht-spezial und sehr ampel ist. Nach dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2 können wir $l(D') = 6$ schließen. Da D' sehr ampel ist, bekommen wir eine abgeschlossene Immersion $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ via $|D'|$. Die entstehende Bildkurve Y erfüllt die Voraussetzung der Vermutung 4.3.2 aufgrund des Datenvektors von D' . Unter Annahme dieser können wir schließen, dass Y verzweigt ist: Es gibt eine Verzweigungshyperebene H , welche die Ungleichung $\text{wt}(Y \cdot H) \geq 5$ erfüllt. Da Y genau $g - 1$ Pseudo-Geraden besitzt und jede Hyperebene per Definition jede Pseudo-Gerade schneidet, folgt $\deg(Y \cdot H)_{\text{red}} \geq g - 1$. Ist $\deg(Y \cdot H)_{\text{red}} = g - 1$, so ist der Beweis abgeschlossen, denn H ist ein total-reeller Hyperebenenschnitt von Y und der Rückzug des Schnittdivisors $Y \cdot H$ liefert, dass $|D'|$ total-reell ist. Ist $\deg(Y \cdot H)_{\text{red}} = g$, so wäre der Beweis mit analoger Argumentation abgeschlossen, da ein vorkommendes komplex-konjugiertes Paar den Grad des reduzierten Divisors um zwei erhöht hätte. Schließlich kann $\deg(Y \cdot H)_{\text{red}} \geq g + 1$ nicht vorkommen, sonst wäre

$$\text{wt}(Y \cdot H) = \deg(Y \cdot H) - \deg(Y \cdot H)_{\text{red}} \leq (g + 5) - (g + 1) = 4$$

im Widerspruch zur Verzweigung von H an Y . □

Satz 4.3.4. *Es sei X eine $(M - 2)$ -Kurve. Unter Annahme von Vermutung 4.3.2 gilt $N(X) \leq 2g + 3$.*

Beweis. Es sei zunächst D ein Divisor mit Datenvektor $(2g + 3; 1, \dots, 1)$. Da X genau $g - 1$ Komponenten hat, muss $g \equiv_2 0$ gelten. Für einen beliebigen Punkt $P_1 \in X_1$ hat $D - (g + 3)P_1$ den Datenvektor $(g; 0, 1, \dots, 1)$. Nach Lemma 4.3.3 ist das Linearsystem $|D - (g - 2)P_1|$ total-reell, also ist auch $|D|$ total-reell. Es sei nun D ein Divisor vom Grad $2g + 3$, welcher gerade Parität hinsichtlich des Grades auf mindestens einer Komponente besitzt. Da der Grad von D ungerade ist, hat D auch ungerade Parität hinsichtlich des Grades auf einer anderen Komponente. Ohne Einschränkung sei der Datenvektor durch $(2g + 3; 0, 1, u_3, \dots, u_{g-1})$ gegeben. Für einen beliebigen Punkt $P_1 \in X_1$ hat der

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Divisor $D' := D - 5P_1$ den Datenvektor $(2g - 2; 1, 1, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{g-1})$. Wir treffen eine Fallunterscheidung:

Im ersten Fall nehmen wir an, dass D' ungerade Parität hinsichtlich seines Grades auf jeder Komponente besitzt. Dann muss $g \equiv_2 1$ gelten. Der Divisor $D' - (g - 2)P_1$ hat den Datenvektor $(g; 0, 1, \dots, 1)$. Laut Lemma 4.3.3 definiert

$$D' - (g - 2)P_1 + 5P_1 = D - (g - 2)P_1$$

ein total-reelles Linearsystem, also ist auch $|D|$ total-reell.

Im zweiten Fall sei ohne Einschränkung $\mathbf{u}_3 = 0$. Wir definieren

$$E := \sum_{k=4}^{g-1} \delta(\mathbf{u}_k, 0) R_k \quad \text{mit beliebigen} \quad R_k \in X_k.$$

Es bezeichnet $\delta(\mathbf{u}_k, 0)$ das Kronecker-Delta (vgl. Beweis von Satz 4.2.6). Es ist $\deg E \leq g - 4$ und $\deg E \equiv_2 g - 2$. Also existiert ein $l \geq 1$ mit $\deg E + 2l = g - 2$. Für einen beliebigen Punkt $P'_3 \in X_3$ besitzt der Divisor $D' - E - 2lP'_3$ den Datenvektor $(g; 1, 1, 0, 1, \dots, 1)$. Nach Lemma 4.3.3 definiert

$$D' - E - 2lP'_3 + 5P_1 = D - E - 2lP'_3$$

ein total-reelles Linearsystem, also ist auch $|D|$ total-reell. □

Analog zu den Ergebnissen aus den Sätzen 4.2.6 und 4.2.8 können wir eine genauere Analyse von Divisoren vom Grad $2g + 2$ auf $(M - 2)$ -Kurven vornehmen. Wir verzichten hier auf den Beweis, welcher analog zu den Beweisen der Sätze 4.2.6 und 4.2.8 verläuft.

Satz 4.3.5. *Es sei X eine $(M - 2)$ -Kurve und $D \in \text{Div}^{2g-2}(X)$ ein Divisor vom Grad $2g + 2$, sodass*

$$[D] \notin \mathcal{U}(2g - 2; 0, \dots, 0)$$

gilt. Unter der Annahme von Vermutung 4.3.2 gilt, dass $|D|$ total-reell ist.

Die in diesem Abschnitt präsentierten arithmetischen Methoden (in Kombination mit dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2) erlauben es nicht, den Wert von $N(X)$ für Kurven mit weniger als $g - 1$ Komponenten zu beschränken. Das Problem der Fortführung der obigen Methode können wir am Beispiel von $(M - 3)$ -Kurven aufzeigen: Es sei X eine $(M - 3)$ -Kurve. Für einen Divisor D mit Datenvektor $(g; 1, \dots, 1)$ gibt es nach dem

Satz von Riemann-Roch 4.2.2 zwei Möglichkeiten. Es kann $|D|$ total-reell sein oder, falls nicht, so gilt

$$D \sim P_1 + \cdots + P_{g-2} + Q^\sigma$$

für reelle Punkte $P_i \in X_i$ und ein komplex-konjugiertes Paar Q^σ . Nun können wir $D' := D + 6P_1$ für einen Punkt $P_1 \in X_1$ bilden. Das Linearsystem $|D'|$ liefert eine abgeschlossene Immersion von X in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^6$. Die entstehende Bildkurve Y besitzt den Grad $g + 6$ und $g - 2$ Pseudo-Geraden. Selbst wenn Y verzweigt wäre und damit eine Verzweigungshyperebene besäße, müsste diese nicht zwangsläufig einen total-reellen Hyperebenenschnitt definieren.

4.4 Die kanonische Divisorenklasse

Die Erkenntnisse aus Abschnitt 4.2 machen deutlich, dass das Studium des kanonischen Linearsystems $|K|$ für die Untersuchung der (reduzierten) reellen Divisorenschranke interessant sein könnte – auch deshalb, weil dieses in der relevanten Fachliteratur bisher keine größere Bedeutung fand. Das kanonische Linearsystem besitzt den fraglichen Datenvektor $(2g - 2; 0, \dots, 0)$, welcher eine mögliche Ausnahmeklasse für total-reelle Linearsysteme vom Grad $2g - 2$ beschreibt. Neben kleineren Resultaten, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Komponenten einer Kurve X und der Frage danach, ob $|K|$ total-reell ist, beschreiben, formulieren wir in diesem Abschnitt eine neue Existenzaussage über ebene Kurven mit total-reellen Geradenlinearsystemen (in der Art von [78, Thm. 1.1]). Diese kann mit dem berühmten 16. Hilbertschen Problem verknüpft werden.

Die Dimension des Linearsystems eines nicht-speziellen Divisors kann mithilfe der Formel $\dim |D| = \deg D - g$ abgelesen werden. Im Allgemeinen gibt es durchaus Divisoren D , die den gleichen Datenvektor $(2g - 2; 0, \dots, 0)$ wie $|K|$ besitzen, aber nicht linear äquivalent zu einem kanonischen Divisor sind. Schränken wir die Dimension des Linearsystems $|D|$ ein, so gibt es nur noch die kanonische Klasse.

Lemma 4.4.1. *Es gibt keinen Divisor D vom Grad $2g - 2$ mit $D \not\sim K$ und $\dim |D| = g - 1$.*

Beweis. Nach dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2 gilt

$$l(D) - l(K - D) = \deg D - g + 1 = g - 1.$$

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Angenommen es gäbe einen solchen Divisor D . Wäre D speziell, dann würde aus $\deg D = \deg K$ folgen, dass $|K - D| = \{0\}$ und $K \sim D$ gelte. Das haben wir ausgeschlossen. Also muss D nicht-spezial sein. Das bedeutet $l(K - D) = 0$ und aus dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2 folgt, dass $\dim |D| = g$ gilt. Das widerspricht ebenfalls der Voraussetzung. \square

Wir können einfache Techniken nutzen, um zu sehen, wann das kanonische Linearsystem sicher total-reell ist. Dafür nutzen wir aus, dass eine Komponente von X genau dann ein Oval [bzw. eine Pseudo-Gerade] ist, wenn jede Hyperebene sie in gerade [bzw. ungerade] vielen Punkten schneidet (gezählt mit Vielfachheiten).

Proposition 4.4.2. *Es sei X eine kanonische Kurve vom Geschlecht $g \geq 3$ mit $s \geq g - 1$ Komponenten. Dann ist $|K|$ (reduziert) total-reell.*

Beweis. Die Kurve X besitzt den Grad $2g - 2$ und alle Komponenten X_1, \dots, X_s sind Ovale. Wir nehmen reelle Punkte $P_i \in X_i$ für $i = 1, \dots, g - 1$. Dann existiert eine Hyperebene $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{g-1}$ durch die P_i , also $\{P_1, \dots, P_{g-1}\} \subset \text{Supp}(X \cdot H)$. Da Ovale von Hyperebenen mit gerader Vielfachheit geschnitten werden, gibt es Punkte $R_i \in X_i$ für $i = 1, \dots, g - 1$ mit

$$X \cdot H = P_1 + \dots + P_{g-1} + R_1 + \dots + R_{g-1}.$$

Folglich ist das kanonische Linearsystem, welches dem Hyperebenenlinearsystem entspricht, total-reell. Zwar kann es hierbei vorkommen, dass $P_i = R_i$ für gewisse $i \in \{1, \dots, g - 1\}$ gilt, jedoch können wir durch die Wahlen der P_i bezwecken, dass es sich um transversale Schnitte handelt. Folglich ist $|K|$ reduziert total-reell. \square

In Proposition 4.4.2 wurde das Hyperebenenschnittsystem, welches im Fall einer kanonischen Kurve vollständig ist und dem kanonischen Linearsystem entspricht, in Zusammenhang mit der Homologie und der Lage der Komponenten gebracht. Doch auch für nicht-kanonische Kurven ist sowohl das Studium des Hyperebenenlinearsystems als auch das der Positionierung der Komponenten interessant und besitzt eine lange Tradition. Bereits im Jahr 1900 hat Hilbert während seines berühmten Vortrags in Paris das Studium der Positionierung reeller Komponenten ebener algebraischer Kurven zu einem Hauptproblem der neuzeitlichen Mathematik erklärt⁴: Es sei $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ eine ebene

⁴Das 16. Hilbertsche Problem (vgl. [99] für eine moderne Formulierung).

Kurve vom Grad d . Bekanntlich besitzt X dann das Geschlecht $g = \binom{d-1}{2}$. Wir haben bereits gesehen, dass $X(\mathbb{R})$ eine kompakte, ein-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, welche in $1 \leq s \leq g + 1$ Komponenten zerfällt. Ist d gerade, so sind sämtliche Komponenten Ovale. Ist d ungerade, so gibt es unter den s Komponenten genau eine Pseudo-Gerade. Die Frage nach der Aufteilung der Komponenten in Ovale und Pseudo-Geraden ist für ebene Kurven damit beantwortet. Man widmet sich deshalb einer detaillierteren Analyse: Ist C ein Oval, so können wir die Menge $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus C$ in zwei offene Teilmengen unterteilen. Das *Innere von C* ist eine offene Kreisscheibe, das *Äußere von C* ist nicht-orientierbar. Um die relative Lage zweier Ovale C_1 und C_2 zu beschreiben, sagen wir, dass C_1 und C_2 *disjunkt* sind, wenn das Innere von C_1 und das Innere von C_2 mengentheoretisch disjunkt sind. Ansonsten heißen C_1 und C_2 *verschachtelt*. Für die Beschreibung der Topologie des Paares $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, X(\mathbb{R}))$, hat sich die induktive Notation von Viro etabliert (vgl. [95, Abs. 1.2]): Ein Oval wird mit $\langle 1 \rangle$ bezeichnet, eine Pseudo-Gerade mit J . Ist $\langle 1 \rangle$ ein Oval, so bezeichnet $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ ein neues Oval, welches das ursprüngliche Oval im Inneren enthält. Disjunkte Komponenten werden mit \sqcup getrennt. Beispielweise können wir die folgende Kurve X betrachten:

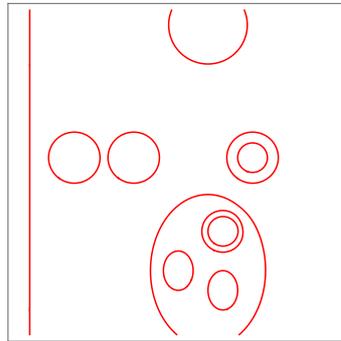


Abbildung 4.1: Die Punktmenge $X(\mathbb{R})$.

Ihre Topologie wird beschrieben durch

$$\langle J \sqcup 3 \sqcup 1 \langle 1 \rangle \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle,$$

also eine Pseudo-Gerade, drei disjunkte Ovale, ein Oval, das ein anderes Oval im Inneren enthält sowie ein Oval, welches drei Ovale im Inneren besitzt, von denen ein Oval ein weiteres Oval im Inneren besitzt. Das Studium der relativen Lage der Komponenten ebener Kurven⁵ findet sich in vielen Forschungsarbeiten wieder. Es ist methodisch durch *Restriktionen und Konstruktionen* geprägt (vgl. [94, S. 187] und [68, S. 779]): To-

⁵Im Gegensatz zu mancher Fachliteratur setzen wir stets $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ voraus.

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

topologische Restriktionen an die gegebene Kurve und Konstruktionsmethoden ebener Kurven mit vorgegebener Topologie.

1. Für ebene Kubiken gibt es zwei topologische Typen: $\langle J \rangle$ und $\langle J \sqcup 1 \rangle$.
2. Für ebene Quartiken gibt es fünf topologische Typen: $\langle x \rangle$ für $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $\langle 1 \langle 1 \rangle \rangle$ (vgl. Klein [47] und Rokhlin [80]).
3. Für ebene Quintiken gibt es sieben topologische Typen: $\langle J \sqcup x \rangle$ für $x \in \{1, \dots, 6\}$ und $\langle J \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle$.
4. Ebene Sextiken stellen den ersten nicht-trivialen Fall dar, denn die vorherigen Fälle sind allein aus Restriktionen begründbar. Ab dem Grad sechs braucht es zudem Konstruktionen. Nach Harnacks Methode aus dem Jahr 1876 zur Konstruktion von M -Kurven beliebigen Grades (vgl. [31, S. 193-196]), zeigte Hilbert im Jahr 1891 eine neue solche Methode auf und merkte ohne Beweis an, dass es keine M -Sextik der Form $\langle 11 \rangle$ geben dürfe (vgl. [36]). Dies bewies Rohn im Jahr 1911 und schloss zudem den Fall $\langle 1 \langle 10 \rangle \rangle$ aus (vgl. [81]). Im Jahr 1938 verallgemeinerte Petrowski das Resultat von Rohn, indem er zeigte, dass eine ebene Kurve geraden Grades d höchstens $\frac{1}{8}(3d^2 - 6d) + 1$ disjunkte Ovale besitzen kann. Mithilfe der Konstruktionsmethode von Harnack zeigte er die Existenz ebener Kurven, welche seine Schranke erfüllen (vgl. [73]). Die Lösung der topologischen Klassifikation ebener Sextiken wurde schließlich durch Gudkov erzielt (vgl. [29] und [30]). Er bewies, dass es 55 verschiedene topologische Typen ebener Sextiken gibt⁶. Insbesondere widerlegte Gudkov die Vermutung von Hilbert, dass es keine ebene Sextik des Typs $\langle 5 \sqcup 1 \langle 5 \rangle \rangle$ gebe. Die drei topologische Typen ebener M -Sextiken sind folglich die *Harnack-Kurve* $\langle 9 \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle$, die *Hilbert-Kurve* $\langle 1 \sqcup 1 \langle 9 \rangle \rangle$ und die *Gudkov-Kurve* $\langle 5 \sqcup 1 \langle 5 \rangle \rangle$.
5. Das Studium ebener Septiken wurde in den 1980er-Jahren durch Viro geprägt (vgl. [92], [93] und [94, S. 197-199]). Für ebene M -Septiken bewies Viro, dass es 14 topologische Typen gibt: $\langle J \sqcup 15 \rangle$ und $\langle J \sqcup x \sqcup 1 \langle 14 - x \rangle \rangle$ für $x \in \{1, \dots, 13\}$.
6. Für ebene Kurven vom Grad $d \geq 8$ sind vollständige Klassifikationen nicht bekannt. Die meisten Resultate beschränken sich dabei auf Restriktionen. Beschränken wir uns auf M -Oktiken, so schloss beispielsweise Orevkov im Jahr 2002 die Typen $\langle 1 \sqcup 1 \langle 3 \rangle \sqcup 1 \langle 16 \rangle \rangle$ und $\langle 1 \sqcup 1 \langle 6 \rangle \sqcup 1 \langle 13 \rangle \rangle$ aus (vgl. [70]) und konstruierte die M -Oktik des Typs $\langle 7 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 11 \rangle \rangle \rangle$ (vgl. [71]). Auch für ebene M -Kurven vom Grad neun schloss Orevkov einige Fälle aus (vgl. [69]).

⁶Lässt man $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ zu, so sind es 56 Typen.

Der Zusammenhang zur reellen Divisorenschranke kann dadurch gezogen werden, dass man sich die Frage stellt, ob es möglich ist, ebene Kurven beliebigen Grades und mit beliebiger Anzahl an Komponenten zu konstruieren, sodass ein total-reeller Geradenschnitt (nicht) existiert (vgl. [78, Thm. 1.1] für die analoge Frage über total-komplexe Geradenschnitte). Die Antwort darauf verfeinert die Analyse der relativen Lage der Komponenten.

Für ebene Kubiken ist bekannt, dass das Geradenlinearsystem total-reell ist. Für ebene Quartiken entspricht das Geradenlinearsystem dem kanonischen Linearsystem. Besitzt eine ebene Quartik mindestens zwei Ovale, so ist es nach Proposition 4.4.2 total-reell. Es ist möglich, sowohl Quartiken mit einem Oval zu konstruieren, welche ein total-reelles Geradenlinearsystem besitzen, als auch solche, welche keinen total-reellen Geradenschnitt erlauben. Ähnliches gilt für ebene Quintiken: Für den Fall $s \in \{1, 2\}$ gibt es verschiedenartige Beispiele, ansonsten existiert ein total-reeller Geradenschnitt (vgl. [76] für eine genauere Analyse).

Satz 4.4.3. *Es sei $d \geq 3$ gegeben und $1 \leq s \leq \binom{d-1}{2} + 1$. Dann existiert eine ebene Kurve X vom Grad d , Geschlecht $g = \binom{d-1}{2}$, und mit s Komponenten, sodass ihr Geradenlinearsystem total-reell ist.*

Beweis. Wir benutzen die von Harnack (vgl. [31, S. 193-196]) verwendete Methode, um ebene M -Kurven induktiv zu konstruieren. Diese wurde bereits von Petrowski benutzt, um die Anzahl der disjunkten Ovale einer ebenen Kurve geraden Grades zu beschränken (vgl. [73, S. 201-209]). Für $d = 3$ ist die obige Aussage gültig. Ist $d \geq 4$ gegeben, so konstruiert Harnack eine M -Kurve X vom Grad d so, dass es eine Gerade L gibt, welche eine einzige Komponente von X in d verschiedenen reellen Punkten schneidet. Die Schwierigkeit besteht nun darin, mithilfe dieser Konstruktion Kurven zu generieren, welche weniger als die maximal mögliche Anzahl an Komponenten besitzen. Während die nachfolgende Kurve X' aus der gegebenen Kurve X gewonnen wird, können wir den Störungssatz von Brusotti [8] nutzen (vgl. [43, Thm. 3.5] für eine moderne Formulierung). Die Gerade L , welche die M -Kurve X transversal schneidet, erzeugt an den Schnittpunkten gewöhnliche Schleifen. Zu jedem der beiden möglichen Wege zur Auflösung der Schleife gibt es eine Störung, welche diese vollführt. Starten wir mit einer Kurve, welche nicht unbedingt eine M -Kurve sein muss, so erlaubt uns diese Methode, jede mögliche Anzahl an Komponenten für die entstehende Kurve X' vom Grad $d + 1$ zu bekommen. Gleichzeitig behalten wir die Gerade L bei, welche nun eine einzige Komponente von X' in $d + 1$ verschiedenen reellen Punkten schneidet. \square

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Korollar 4.4.4. *Es sei $d \geq 4$ gegeben und $1 \leq s \leq \binom{d-1}{2} + 1$. Dann existiert eine ebene Kurve X vom Grad d , Geschlecht $g = \binom{d-1}{2}$, und mit s Komponenten, sodass ihr kanonisches Linearsystem total-reell ist.*

Beweis. Das kanonische Linearsystem ist in diesem Fall das vollständige Kurvenschnittsystem, welches die Schnittdivisoren mit Kurven vom Grad $d - 3$ enthält. Da bereits das Geradenschnittsystem nach Satz 4.4.3 total-reell ist, sind auch sämtliche Kurvenschnittsysteme total-reell. \square

Da der Beweis von Satz 4.4.3 sogar reduzierte total-reelle Geradenschnitte produziert, können wir die folgenden Folgerungen ziehen.

Korollar 4.4.5. *Es sei $d \geq 3$ gegeben und $1 \leq s \leq \binom{d-1}{2} + 1$. Dann existiert eine ebene Kurve X vom Grad d , Geschlecht $g = \binom{d-1}{2}$, und mit s Komponenten, sodass ihr Geradenlinearsystem reduziert total-reell ist.*

Korollar 4.4.6. *Es sei $d \geq 4$ gegeben und $1 \leq s \leq \binom{d-1}{2} + 1$. Dann existiert eine ebene Kurve X vom Grad d , Geschlecht $g = \binom{d-1}{2}$, und mit s Komponenten, sodass ihr kanonisches Linearsystem reduziert total-reell ist.*

Eine spannende Frage ist, ob der Satz 4.4.3 sowie seine anknüpfenden Korollare für alle topologischen Typen gelten. Beispielsweise können M -Sextiken in drei topologische Typen unterteilt werden: Die *Harnack-Kurve* $\langle 9 \sqcup 1 \langle 1 \rangle \rangle$, die *Hilbert-Kurve* $\langle 1 \sqcup 1 \langle 9 \rangle \rangle$ und die *Gudkov-Kurve* $\langle 5 \sqcup 1 \langle 5 \rangle \rangle$. Im Beweis von Satz 4.4.3 wird die Konstruktionsmethode von Harnack verwendet, sodass wir zeigen, dass eine Harnack-Kurve mit einem reduzierten total-reellen Geradenschnitt existiert. Tatsächlich ist im Fall von M -Sextiken ersichtlich, dass *alle* Harnack-Kurven, Hilbert-Kurven und Gudkov-Kurven (reduzierte) total-reelle Geradenschnitte besitzen: Man nehme einen Punkt P auf einem Oval, das im Inneren eines anderen liegt. Weiter nehme man einen Punkt Q auf einem Oval, das kein Oval im Inneren enthält. Die Verbindungsgerade \overline{PQ} ist – bis auf minimale Störung – ein reduziert total-reeller Geradenschnitt. Geht man noch einen Schritt weiter, so kann man die rigiden Isotopietypen untersuchen. Im Spezialfall ebener Sextiken wurden diese vollständig bestimmt und je ein Repräsentant mit ganzzahligen Koeffizienten in jeder rigiden Isotopieklasse gefunden (vgl. [44, Abs. 1-2]).

Überdies bleibt die Frage nach der zu Satz 4.4.3 komplementären Aussage offen. Ist $d \geq 6$ gegeben und $1 \leq s \leq g + 1$, wobei $g = \binom{d-1}{2}$ gilt, so stellt sich die Frage, ob man eine Kurve vom Grad d , Geschlecht g und mit s Komponenten konstruieren kann,

4.5 Untere Divisorenschranken und Gonalität reeller Kurven

sodass das Geradenlinearsystem nicht (reduziert) total-reell ist. Es ist zu erwarten, dass die Antwort für die meisten Wahlen von d und s positiv ist.

Satz 4.4.7. *Es sei $m \geq 3$ gegeben. Es seien $d = 2^m$ und $1 \leq s \leq m$. Dann existiert eine ebene Kurve X vom Grad d , Geschlecht $g = \binom{d-1}{2}$, und mit s Komponenten, sodass ihr Geradenlinearsystem nicht total-reell ist.*

Beweis. Durch die gegebenen Wahlen der Größen d und s können wir in der affinen Ebene gleichmäßig disjunkte Kreise anordnen, sodass deren Mittelpunkte ein reguläres m -Eck bilden. Eine minimale Störung dieses Objekts ergibt eine Kurve vom Grad d mit s Ovalen. Aufgrund einer solchen Anordnung kann es keine Gerade geben, welche die Kurve in d reellen Punkten schneidet. \square

4.5 Untere Divisorenschranken und Gonalität reeller Kurven

Eine einfache Methode, um die reelle Divisorenschranke nach unten zu beschränken, besteht darin, Linearsysteme mit komplex-konjugierten Basispunkten zu finden (vgl. Monnier [63, Abs. 6]). In diesem kurzen Abschnitt setzen wir neue Ergebnisse über die Gonalität reeller Kurven in Zusammenhang mit Monniers Methode.

Definition 4.5.1. Ein g_d^r bezeichnet ein Linearsystem vom Grad d und der (projektiven) Dimension r .

Die Frage nach der Existenz eines g_d^r ist ein eigenes Forschungsgebiet, welches in der vorliegenden Dissertation nicht aufgegriffen wird. Im Fall einer \mathbb{C} -Kurve ist die Frage nach der Existenz eines g_d^r durch die *Brill-Noether Zahl* beantwortet: Ist eine \mathbb{C} -Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ gegeben und $r \geq -1, g - d + r \geq 0$, so existiert auf ihr ein g_d^r , sofern

$$\rho_g(d, r) := g - (r + 1)(g - d + r) \geq 0$$

ist. Die Menge

$$W_d^r(X_{\mathbb{C}}) = \{[D] \in \text{Pic}^d(X_{\mathbb{C}}) \mid \dim |D| \geq r\}$$

ist für $r, d \geq 1$ eine \mathbb{C} -Untervarietät von $\text{Pic}^d(X_{\mathbb{C}})$ und es gilt $\dim W_d^r(X_{\mathbb{C}}) \geq \rho_g(d, r)$ (vgl. [1, Kap. IV, Par. 3, Lem. 3.3]). Ist $d \leq g + r - 2$, so wurden Resultate über die Dimension von $W_d^r(X_{\mathbb{C}})$ von Martens (vgl. [57]) und Mumford (vgl. [67]) erzielt.

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Dagegen ist die Frage nach der Existenz eines \mathfrak{g}_d^r auf einer reellen Kurve schwieriger zu beantworten. Monniers Vermutung, dass eine *reelle Brill-Noether Zahl* der Form $\rho_{\mathbb{R}}(g, r, d) := d - (g + r - 1)$ existiert (vgl. [63, Abs. 5.3]), konnte durch Coppens et al. [12, Abs. 3] widerlegt werden.

Definition 4.5.2. Die (*reelle*) *Gonalität* von X ist definiert durch

$$\text{gon}_{\mathbb{R}}(X) := \min\{d \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert ein vollständiges } \mathfrak{g}_d^r \text{ mit } r \geq 1\}.$$

Die Gonalität beschreibt den kleinsten Überlagerungsgrad eines \mathbb{R} -Morphismus $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Beispielsweise ist eine *hyperelliptische Kurve*⁷ X dadurch definiert, dass X eine zweifache Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ besitzt, also $\text{gon}_{\mathbb{R}}(X) = 2$ gilt. Es ist bekannt, dass X dann ein eindeutiges \mathfrak{g}_2^1 besitzt (vgl. [63, Lem. 4.2]).

Proposition 4.5.3. [63, Prop. 6.1] *Es sei X eine Kurve mit einem vollständigen \mathfrak{g}_d^r mit $r \geq 1$ und $r \leq d - g$. Dann gilt $N(X) \geq 2g - d + 1$.*

Im Beweis verwendet Monnier einen Residualtrick, um einen Divisor zu finden, dessen assoziiertes Linearsystem einen komplex-konjugierten Basispunkt besitzt. Dies wirft die Frage auf, ob es möglich ist, nicht-triviale basispunktfreie Linearsysteme zu finden, welche nicht total-reell sind. Solche Beispiele werden wir in Abschnitt 5.4 konstruieren. Um mithilfe von Proposition 4.5.3 auf untere Beschränkungen für die reelle Divisorenschranke zu schließen, zeigt Monnier, dass jede Kurve ein \mathfrak{g}_g^1 besitzt. Folglich gilt $\text{gon}_{\mathbb{R}}(X) \leq g$ (vgl. [63, Thm. 5.4]).

Korollar 4.5.4. [63, Kor. 6.2] *Für jede Kurve X vom Geschlecht $g \geq 2$ gilt $N(X) \geq g + 1$.*

Um schärfere Beschränkungen für die reelle Divisorenschranke zu erhalten, verwenden wir die Resultate von Coppens et al. [12].

Korollar 4.5.5. *Es sei X eine reelle Kurve vom Geschlecht g .*

1. *Ist $g = 5$, so gilt $N(X) \geq 7$.*
2. *Ist $g = 2^k - 2$ für ein $k \geq 3$, so gilt $N(X) \geq 3 \cdot (2^{k-1} - 1)$.*
3. *Ist $g = 2^k - 1$ für ein $k \geq 3$, so gilt $N(X) \geq 3 \cdot 2^{k-1} - 2$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus den Ergebnissen aus [12, Abs. 3] in Kombination mit Proposition 4.5.3. □

⁷Es sei stets $g \geq 2$ vorausgesetzt.

4.5 Untere Divisorenschranken und Gonalität reeller Kurven

Das Studium unterer Beschränkungen der reellen Divisorenschranke ist noch nicht ausgeschöpft. Monnier zeigte, dass es eine Möglichkeit gibt, Aussagen über die Existenz vollständiger Linearsysteme auf X aus Existenzaussagen über vollständige Linearsysteme auf $X_{\mathbb{C}}$ zu folgern (vgl. [63, Thm. 5.4] und [63, Prop. 5.9]). Ist beispielsweise X eine generische Kurve vom Geschlecht sechs, so existieren genau fünf vollständige g_4^1 auf $X_{\mathbb{C}}$ (vgl. [25, S. 299]). Folglich existiert ein vollständiges g_4^1 auf X und es gilt $N(X) \geq 9$.

Korollar 4.5.6. [45, Kor. 2.2] *Es sei Y eine \mathbb{C} -Kurve vom Geschlecht $g \geq 11$ und $\dim W_d^r(Y) = d - 4$ für ein $4 \leq d \leq g - 3$. Dann besitzt Y ein eindeutiges und vollständiges g_4^1 .*

Für reelle Kurven X , deren Komplexifizierung $X_{\mathbb{C}}$ die Voraussetzungen des Korollars 4.5.6 erfüllen, gilt $N(X) \geq 2g - 4 + 1$.

Monnier bewies, dass jede Kurve (vom Geschlecht $g \geq 2$) g -gonal⁸ ist und folgerte dadurch die uniform gültige untere Schranke $N(X) \geq g + 1$. Dieses Ergebnis kann für eine Auswahl von Kurven verbessert werden.

Korollar 4.5.7.

1. *Ist die Komplexifizierung $X_{\mathbb{C}}$ von X k -gonal mit $k \leq \frac{g+3}{2} - 1$, so gilt $N(X) \geq g + 2$.*
2. *Es gibt unendlich viele Kurven X vom Geschlecht vier mit $N(X) \geq 6$.*
3. *Ist X eine nicht-hyperelliptische Kurve vom Geschlecht vier mit einem Oval und teilenden Typs, so gilt $N(X) \geq 6$.*
4. *Es gibt unendlich viele Kurven X vom topologischen Typ $(8, s, \alpha) \neq (8, 1, 0)$ mit $N(X) \geq 12$.*
5. *Es gibt unendlich viele $(M-2)$ -Kurven X teilenden Typs vom Geschlecht g , welche $N(X) \geq g + 2$ erfüllen.*

Beweis. Dies ist eine Anwendung der Proposition 4.5.3 auf die Ergebnisse aus [12, Abs. 4] und [11, Abs. 4]. □

Auch ohne den Zugriff auf die neuen Ergebnisse zur Gonalität reeller Kurven können wir neue untere Beschränkungen für $N(X)$ formulieren, indem wir auf die Ergebnisse aus der Konstruktion 3.2.9 Bezug nehmen.

Korollar 4.5.8. *Es seien $d' \geq 2$ und $e \in \mathbb{N}$ gegeben. Für die Kurven aus der Konstruktion 3.2.9 vom Geschlecht $2e(d' - 1)$ gilt $N(X) \geq d' + 2e + 2$.*

⁸Eine Kurve heißt k -gonal, wenn sie ein vollständiges g_k^1 besitzt.

4.6 Eine Übersicht zu $N(X)$

Wir schließen die obigen Abschnitte mit einer Übersicht aller Ergebnisse bezüglich der reellen Divisorenschranke ab und erläutern die offenen Fragen.

	M-Kurve	$(M-1)$ -Kurve	$(M-2)$ -Kurve	$(M-k)$ -Kurve
$g=0$	1			
$g=1$	1	1		
$g=2$	3	3	$3 \leq N(X)$ Verm.: $N(X) \leq 7$ (a)	
$g=3$	$4 \leq N(X) \leq 5$ Hyper.: $N(X) = 5$ Offen: $(4; 0, 0, 0, 0)$ (b)	$4 \leq N(X) \leq 5$ Hyper.: $N(X) = 5$ Offen: $(4; 0, 0, 0)$ (b)	$4 \leq N(X)$ Hyper.: $5 \leq N(X)$ Verm.: $N(X) \leq 9$	$4 \leq N(X)$ Hyper.: $5 \leq N(X)$ (c)
$g=4$	$5 \leq N(X) \leq 7$ Hyper.: $N(X) = 7$ Offen: $(6; 0, 0, 0, 0, 0)$	$5 \leq N(X) \leq 7$ Hyper.: $N(X) = 7$ Offen: $(6; 0, 0, 0, 0)$	$5 \leq N(X)$ Hyper.: $7 \leq N(X)$ Verm.: $N(X) \leq 11$	$5 \leq N(X)$ Hyper.: $7 \leq N(X)$ (d)

Tabelle 4.1: Eine Übersicht der Minimalfälle.

- (a) Die in Beispiel 3.2.11 konstruierte Kurve W_ϵ für ein kleines $\epsilon > 0$ erfüllt $N(W_\epsilon) \geq 6$.
- (b) Wir werden zeigen, dass es unendlich viele ebene Quartiken X mit $s \in \{3, 4\}$ gibt, welche $N(X) = 5$ erfüllen (vgl. Abschnitt 5.4).
- (c) Wir werden zeigen, dass es ebene $(M-3)$ -Quartiken X (mit $s = 1$) und $N(X) \geq 5$ gibt (vgl. Kapitel 6).
- (d) Wir werden zeigen, dass es kanonische Kurven $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ mit $s \in \{1, 2\}$ gibt, also $(M-3)$ -Kurven und $(M-4)$ -Kurven, welche $N(X) \geq 7$ erfüllen (vgl. Abschnitt 5.2).

4.7 Singuläre Kurven

Das Studium singulärer Kurven bedient sich deutlich anderer Techniken als das Studium nicht-singulärer Kurven. Diese Theorie möchten wir in diesem Abschnitt skizzieren und verdeutlichen, dass die Frage nach der reellen Divisorenschranke auch für singuläre Kurven behandelt werden kann. Zusätzlich zeigen wir, welche Rolle die reduzierte reelle Divisorenschranke in diesem Zusammenhang spielt. Die einzigen bisher bekannten Resultate hinsichtlich der reellen Divisorenschranke für singuläre Kurven stammen aus den Arbeiten von Monnier (vgl. [64]) und Bardet (vgl. [3]).

Definition 4.7.1. Eine *singuläre Kurve* X ist eine projektive und integrale \mathbb{R} -Varietät mit $\dim(X) = 1$, sodass die Menge der singulären Punkte nicht-leer ist.

Wir schreiben $S := \text{Sing}(X)$ für den singulären Ort von X . Um eine singuläre Kurve in Beziehung zu einer nicht-singulären Kurve zu setzen, braucht es eine Methode der Auflösung ihrer Singularitäten. Hierfür verwendet Monnier die Normalisierung (vgl. [64, S. 253]). Es sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die *Normalisierungsabbildung von X* . Diese entsteht durch die Überdeckung von X durch integrale affine \mathbb{R} -Varietäten $\text{Spec} R_i$, welche einen \mathbb{R} -Morphismus $\text{Spec} \bar{R}_i \rightarrow \text{Spec} R_i$ erlauben, wobei \bar{R}_i den ganzen Abschluss von R_i bezeichnet. Ab sofort nehmen wir zusätzlich an, dass $\tilde{X}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ ist, sodass auch $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ folgt (vgl. [33, Kap. II, Aufg. 2.15]). Außerhalb des singulären Ortes und seines Urbilds ist die eingeschränkte Abbildung

$$\pi : \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(S) \rightarrow X \setminus S$$

ein Isomorphismus offener Unterschemata (vgl. [86, S. 59]). Bezüglich der Topologie können wir eine zum nicht-singulären Fall ähnliche Aussage formulieren. Die Menge $X(\mathbb{R})$ zerfällt in euklidische Zusammenhangskomponenten. Eine Komponente $C \subset X(\mathbb{R})$ ist dabei entweder ein reeller Punkt $C = \text{pt}$ oder eine Rose $C = R_{S^1}^n$ aus $n \geq 1$ Kreisen (auch *Loops* genannt). Die Gesamtzahl der Loops ist $l := \dim_{\mathbb{Z}/2} (H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2))$.

Es sei $U := X \setminus S$ der reguläre Ort von X . Auf singulären Kurven betrachten wir ausschließlich Divisoren, die über U definiert sind. Folglich müssen wir uns in der Betrachtung von Hauptdivisoren auf rationale Funktionen beschränken, welche weder Polstellen noch Nullstellen in S besitzen. Es gilt

$$\text{Pic}(X) = \text{Div}(X) / \{\text{div}(f) \mid f \in \mathbb{R}(X) \text{ und } f \in \mathcal{O}_{X,p}^* \text{ für alle } p \in S\}.$$

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Entscheidend für die Untersuchung von Divisoren auf einer singulären Kurve X ist die Information über die Anzahl und die Ausprägung ihrer Singularitäten. Es sei

$$\pi : (\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

die Normalisierungsabbildung und $\mathcal{L} := \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ das direkte Bild von $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ unter π . Die Normalisierungsabbildung ist per Definition so gestaltet, dass für einen singulären Punkt $\mathfrak{p} \in S$ die \mathbb{R} -Algebra $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}$ der ganze Abschluss von $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ (im Quotientenkörper $\mathbb{R}(X)$) ist. Für einen Punkt $\mathfrak{p} \in X$ setzen wir $\delta_{\mathfrak{p}} := \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}})$ und stellen fest, dass $\delta_{\mathfrak{p}}$ genau dann positiv ist, wenn $\mathfrak{p} \in S$ gilt. Wir schreiben

$$\mathfrak{c} := \text{Ann}(\mathcal{L}/\mathcal{O}_X) \triangleleft \mathcal{O}_X$$

für die *Annulatoren-Garbe*; dies ist eine kohärente Garbe von Idealen von \mathcal{O}_X mit Träger S . Der Schnitt aller maximalen Ideale von $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}$ ist das sogenannte *Jacobson-Radikal* und wird mit $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Für einen singulären Punkt $\mathfrak{p} \in S$ existiert eine kleinste Potenz $n_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{N}$, sodass $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}} \subset \mathfrak{c}_{\mathfrak{p}}$ gilt (vgl. [64, S. 255]). Wir definieren die Größe $\delta := \sum_{\mathfrak{p} \in S} \delta_{\mathfrak{p}}$ und nennen sie die *Gesamtstärke aller Singularitäten von X* . Der Divisor

$$M_{\mathfrak{p}} := \sum_{Q \in \pi^{-1}(\mathfrak{p})} n_{\mathfrak{p}} Q = n_{\mathfrak{p}} (Q_1 + \cdots + Q_{s_{\mathfrak{p}}})$$

für $\mathfrak{p} \in S$ und $\pi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{Q_1, \dots, Q_{s_{\mathfrak{p}}}\}$ mit $s_{\mathfrak{p}} \geq 1$ heißt der *Rückzugsdivisor der Singularität $\mathfrak{p} \in S$ auf \tilde{X}* . Der Divisor $M := M_{\mathfrak{p}_1} + \cdots + M_{\mathfrak{p}_s}$ für sämtliche singuläre Punkte $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s \in S$ heißt der *Singularitätendivisor von X auf \tilde{X}* . Da wir vorausgesetzt haben, dass X singulär ist, muss $\text{deg } M \geq 2$ gelten. Schließlich vergleichen wir die topologischen Werte von X und \tilde{X} . Es sei $\mathfrak{p}_a := \dim_{\mathbb{R}}(H^1(X, \mathcal{O}_X))$ das arithmetische Geschlecht⁹ von X und g das Geschlecht von \tilde{X} . Es gilt $\mathfrak{p}_a = g + \delta$ (vgl. [86, S. 65]) und insbesondere $\mathfrak{p}_a \geq 1$, da wir vorausgesetzt haben, dass $S \neq \emptyset$ ist. Ist beispielsweise $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ ein vollständiger Durchschnitt von $n-1$ Hyperflächen der Grade $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{n-1}$, so gilt $\mathfrak{p}_a = \frac{1}{2} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_{n-1} \mathfrak{a} + 1$ mit $\mathfrak{a} := \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i - n - 1$ (vgl. [86, Kap. IV]).

Proposition 4.7.2. [64, Prop. 5.2] (*Singulärer Satz von Harnack*) *Es sei X eine singuläre Kurve. Dann gilt $\mathfrak{l} \leq \mathfrak{p}_a + 1$.*

⁹Eine Bestimmung über das Hilbertsche Polynom wäre möglich, aber wir verzichten hier auf ein genaueres Studium (vgl. [33, Kap. I, Aufg. 7.2]).

Satz 4.7.3. [64, Thm. 2.1] (Singulärer Satz von Riemann-Roch) Es sei $P_0 \in \mathbf{U}(\mathbb{R})$ gegeben. Die Abbildung

$$\varphi^k : \text{Div}_+^k(X) \rightarrow \text{Pic}^0(X), D \mapsto [D - kP_0]$$

ist surjektiv für alle $k \geq 2p_a$. Besitzt X nur einen singulären Punkt, so ist sie surjektiv für alle $k \geq 2g - 1 + \deg M$.

Monnier beweist in seiner Arbeit sowohl das singuläre Analogon des Satzes von Harnack als auch das des Satzes von Riemann-Roch. Die singuläre Version der Tatsache, dass eine rationale Funktion geraden Grad auf jeder Komponente besitzt, folgt jedoch bereits aus dem nicht-singulären Fall und der Tatsache, dass wir nur rationale Funktionen zulassen, die weder Polstellen noch Nullstellen in S besitzen.

Lemma 4.7.4. [26, Lem. 4.1] Es sei $f \in \mathbb{R}(X)$ eine rationale Funktion mit $f \in \mathcal{O}_{X,p}^*$ für alle $p \in S$. Dann besitzt $\text{div}(f)$ geraden Grad auf jeder Loop von $X(\mathbb{R})$.

Mit dieser Vorarbeit können wir die bereits aus dem nicht-singulären Fall bekannten Divisorenschranken definieren. Es sei $N(X)$ die kleinste natürliche Zahl, sodass jeder Divisor vom Grad $d \geq N(X)$ linear äquivalent ist zu einem total-reellen (effektiven) Divisor. Dies entspricht

$$N(X) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } P_0 \in \mathbf{U}(\mathbb{R}) \text{ und alle } \alpha \in \text{Pic}^0(X) \text{ existieren } P_1, \dots, P_n \in \mathbf{U}(\mathbb{R}), \text{ sodass } \alpha = [P_1 + \dots + P_n - nP_0] \text{ gilt}\}.$$

Dies ist die *reelle Divisorenschranke der singulären Kurve X* und es ist zu beachten, dass $N(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt. Außerdem ist $M(X)$ die kleinste natürliche Zahl, sodass jeder Divisor vom Grad $2d$ mit $d \geq M(X)$, welcher geraden Grad auf jeder Loop besitzt, linear äquivalent ist zu einem total-komplexen (effektiven) Divisor. Dies entspricht

$$M(X) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \text{für alle } P_0 \in \mathbf{U}(\mathbb{R}) \text{ und alle } \alpha \in \text{Pic}^0(X)_0 \text{ existieren } Q_1^\sigma, \dots, Q_m^\sigma \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{U}(\mathbb{R}), \text{ sodass } \alpha = [Q_1^\sigma + \dots + Q_m^\sigma - 2mP_0] \text{ gilt}\}.$$

Dies ist die *komplexe Divisorenschranke der singulären Kurve X* .

Satz 4.7.5. [64, Thm. 2.3 und Prop. 6.6] Es sei X eine singuläre Kurve. Dann gilt $g \leq M(X) \leq 2p_a$.

4 Divisorenschranken für reelle Kurven

Beispiel 4.7.6. Es ist angebracht, in einigen Minimalbeispielen die Güte der in Satz 4.7.5 von Monnier formulierten Beschränkung zu prüfen. Dabei beschränken wir uns auf ebene Kubiken mit *gewöhnlichen Singularitäten*.

1. Es sei $X_1 := \mathcal{V}_+(zy^2 - x^2(x+z)) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ eine *Schleifenkubik* mit singulärem Punkt $\mathfrak{p} \in X_1$. Es gilt $\pi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$ mit zwei reellen Punkten in der Normalisierung $\tilde{X} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ – eine sogenannte *reelle Schleife*. Es sind $g = 0, \delta = \delta_{\mathfrak{p}} = 1, \deg M = \deg M_{\mathfrak{p}} = 2$ und $p_{\alpha} = 1$. Ist D ein Divisor vom Grad zwei, so besitzt dieser nach dem Singulären Satz von Riemann-Roch 4.7.3 ein nicht-leeres Linearsystem. Besteht also D ohne Einschränkung aus zwei reellen Punkten, so können wir diesen mithilfe von Geradenschnitten so verschieben, dass dieser linear äquivalent zu einem komplex-konjugierten Paar wird. Also ist $M(X_1) = 1$.
2. Es sei $X_2 := \mathcal{V}_+(zx^2 - y^3 + zy^2) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Diese Kubik besitzt eine *reelle isolierte Schleife*, welche wir mit $\mathfrak{p} \in X_2$ bezeichnen. Es gilt $\pi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{Q^{\sigma}\}$ für ein komplex-konjugiertes Paar Q^{σ} . Wieder sind $g = 0, \delta = \delta_{\mathfrak{p}} = 1, \deg M = \deg M_{\mathfrak{p}} = 2$ und $p_{\alpha} = 1$. Mit analoger Argumentation schlussfolgern wir, dass $M(X_2) = 1$ gilt.
3. Für eine *Kuspenkubik* X_3 , welche eine *reelle Kuspel* $\mathfrak{p} \in X_3$ als singulären Punkt besitzt, gelten $\pi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{R}\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$ sowie $g = 0, \delta = \delta_{\mathfrak{p}} = 1, \deg M = \deg M_{\mathfrak{p}} = 2$ wegen $n_{\mathfrak{p}} = 2$ und $p_{\alpha} = 1$. Auch hier gilt $M(X_3) = 1$. △

Monniers Arbeit [64] zeigt eine ganze Fülle von neuen Resultaten hinsichtlich der reellen Divisorenschranke $N(X)$ für singuläre Kurven X auf. Im Folgenden sei eine Auswahl dieser präsentiert.

Satz 4.7.7. *Es sei X eine singuläre Kurve und \tilde{X} ihre Normalisierung.*

1. *Ist $S \not\subset X(\mathbb{R})$, so gilt $N(X) = \infty$ (vgl. [64, Thm. 3.8]).*
2. *Besitzt X eine reelle isolierte Singularität, die keine Schleife ist, so gilt $N(X) = \infty$ (vgl. [64, Thm. 3.12]).*
3. *Besteht S aus reellen Schleifen, reellen isolierten Schleifen und höchstens einer reellen Kuspel, so gilt $N(X) < \infty$ (vgl. [64, Thm. 4.5]).*
4. *Es sei \tilde{X} rational und S bestehe aus reellen (nicht-isolierten) Schleifen und höchstens einer reellen Kuspel. Dann gilt $N(X) \leq 2p_{\alpha}$ (vgl. [64, Thm. 4.9]).*
5. *Es sei \tilde{X} eine Kurve positiven Geschlechts mit vielen Komponenten und S bestehe aus reellen (nicht-isolierten) Schleifen und höchstens einer reellen Kuspel. Dann gilt $N(X) \leq 2p_{\alpha}$ (vgl. [64, Thm. 4.15]).*
6. *Besitzt X viele Loops (also $l \geq p_{\alpha}$), so gilt $N(X) \leq 2p_{\alpha}$ (vgl. [64, Thm. 5.8]).*
7. *Es sei $p_{\alpha} \geq 2$. Dann gilt $N(X) \geq p_{\alpha} + 1$ (vgl. [64, Prop. 6.1]).*

Bereits bei der Untersuchung nicht-singulärer Kurven in Abschnitt 4.2 haben wir festgestellt, dass der Satz von Riemann-Roch 4.2.2 impliziert, dass im Fall von Kurven mit vielen Komponenten gewisse Linearsysteme total-reell sind. Durch Verschiebungen konnte man erreichen, dass *alle* Linearsysteme ab einem gewissen Grad total-reell sind. Die singuläre Version des Satzes von Riemann-Roch 4.7.3 wird in Monniers Arbeit in Zusammenhang mit der reduzierten reellen Divisorenschranke der Normalisierung \tilde{X} gesetzt, um explizite Beschränkungen für $N(X)$ zu erhalten (vgl. [64, Thm. 4.3]). Diese Technik können wir verwenden, um unter Annahme von Vermutung 4.3.2 auch hier neue Beschränkungen zu gewinnen.

Satz 4.7.8. *Unter Annahme von Vermutung 4.3.2 gilt: Es sei X eine singuläre Kurve und \tilde{X} eine $(M-2)$ -Kurve, sodass der Singularitätendivisor M total-reell ist und n_p für alle $p \in S$ ungerade ist, bis auf höchstens ein $p_0 \in S$. Dann gilt $N(X) \leq 2p_a + 2g + 6$.*

Beweis. In der Notation von [64, Thm. 4.3] gilt $Y = \tilde{X}$ und $n_1 = 2p_a$ aus dem Singulären Satz von Riemann-Roch 4.7.3. Außerdem ist $N(\tilde{X}) \leq 2g + 3$ nach Satz 4.3.4. Da wir die reduzierte reelle Divisorenschranke benötigen, benutzen wir [3, Prop. 2.1.2], um $n_2 = 2 \cdot (2g + 3) = 4g + 6$ zu folgern. Damit ist $n = \max\{2p_a, 4g + 6 + \deg M\}$ und es ist $\deg M \leq 2\delta$ nach [64, Lem. 1.3]. Außerdem können wir $p_a = g + \delta$ ersetzen und es folgt die Behauptung. \square

Die obigen Bedingungen an den Singularitätendivisor M bedeuten im Fall von gewöhnlichen Singularitäten, dass es keine reellen isolierten Schleifen und höchstens eine reelle Kuspel geben darf.

Korollar 4.7.9. *Unter Annahme von Vermutung 4.3.2 gilt: Es sei X eine singuläre Kurve und \tilde{X} eine $(M-2)$ -Kurve. Angenommen X besitze nur reelle nicht-isolierte Schleifen und höchstens eine reelle Kuspel. Dann gilt $N(X) \leq 2p_a + 2g + 6$.*

Mithilfe von [64, Thm. 4.3] und den Ergebnissen aus den Abschnitten 4.2 und 4.3 sind viele weitere kleine Ergebnisse der obigen Art möglich. Beispielweise können wir die im Singulären Satz von Riemann-Roch 4.7.3 gefundene Schranke für den Fall, dass X nur eine Singularität besitzt, verwenden. Da eine Kombination mit der reduzierten reellen Divisorenschranke benötigt wird (vgl. [64, Thm. 4.3]), kann man die Ergebnisse von Bardet (vgl. [3, Abs. 2.4]) benutzen, um neue Beschränkungen für $N(X)$ zu erzielen.

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

In diesem Kapitel stellen wir eine Methode zur Berechnung von Lösungen von parametrisierten Gleichungssystemen vor. Das Lösen parametrisierter polynomieller Gleichungssysteme geht auf die bereits im Jahr 1856 vorgestellten Techniken von Hermite zurück (vgl. [35]). Wir widmen uns einer vereinfachten Fragestellung: Ist eine dehomogenisierte Kurve $X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$ gegeben, so fügen wir dem definierenden Ideal eine parametrisierte Linearform $L \in \mathbb{R}[u_1, \dots, u_t][x_1, \dots, x_n]$ hinzu und fragen uns, wie viele reelle Lösungen das entstehende Gleichungssystem (in Abhängigkeit der Parameter) besitzt. Der Algorithmus zur Bestimmung der multivariaten Hermite-Matrix wurde zeitgleich zur Arbeit von Le et al. [53, Abs. 5] implementiert, jedoch unter Verwendung der sogenannten *Gröbner-Überdeckung* (vgl. [66] und [65, Kap. 5]). Das Lösen parametrisierter Gleichungssysteme wirkt sich auf die (reduzierte) reelle Divisorenschranke aus. Für gewisse projektive Raumkurven können wir neue untere Schranken gewinnen. In der projektiven Ebene können wir nachweisen, dass es unendlich viele Quartiken X gibt, welche $N(X) = 5$ erfüllen¹. Die Ergebnisse dieses Kapitel wurden in Zusammenarbeit mit Huu Phuoc Le und Daniel Plaumann erzielt (vgl. [54]).

5.1 Die multivariate Hermite-Methode

Es sei $f \in \mathbb{R}[x]$ ein univariates Polynom. Die Frage, ob man allein aus der Kenntnis der Koeffizienten von f gewisse kombinatorische oder geometrische Aussagen über

¹Dieses Resultat bestätigt eine Erwartung von Huisman (vgl. [38, S. 92]).

die Nullstellen treffen kann, besitzt eine große historische Tradition (vgl. [48, Kap. 1, Par. 7] für eine Zusammenfassung). In Analogie zum univariaten Fall stellen wir in diesem Abschnitt einen Algorithmus einer modernen Version der multivariaten Hermite-Methode vor. Dieser erlaubt es uns zu prüfen, für welche Parameter ein parametrisiertes Gleichungssystem ausschließlich reelle Lösungen besitzt. Wir skizzieren zunächst den univariaten Fall. Es sei das normierte Polynom

$$f := x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_{d-1} x + a_d = \prod_{j=1}^s (x - \alpha_j)^{e_j} \in \mathbb{R}[x]$$

gegeben. Dabei sei $d \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C}$ die $s \geq 1$ verschiedenen komplexen Nullstellen mit (algebraischen) Vielfachheiten e_1, \dots, e_s . Die *Newton-Summen von f* sind definiert durch

$$v_r(f) := \alpha_1^r + \dots + \alpha_s^r$$

für nicht-negative Zahlen $r \in \mathbb{N}_0$. Es gibt mehrere Möglichkeiten, um zu zeigen, dass die Newton-Summen stets in \mathbb{R} liegen. Beispielsweise kann man dies mithilfe der Formel

$$v_k(f) + v_{k-1}(f)a_1 + \dots + v_1(f)a_{k-1} + ka_k = 0$$

für alle $k \geq 1$ erkennen, welche zeigt, dass $v_i(f) \in \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_d]_i$ gilt, also dass $v_i(f)$ ein homogenes ganzzahliges Polynom vom Grad i in den Koeffizienten von f ist. Andererseits kann man die *Begleitmatrix von f* bilden, welche durch

$$\mathcal{C}(f) := \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_d \\ 1 & 0 & & & -a_{d-1} \\ & 1 & \ddots & & -a_{d-2} \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_d(\mathbb{R})$$

definiert ist. Ihr charakteristisches Polynom entspricht dem Polynom f . Folglich sind die Eigenwerte der Begleitmatrix von f die Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ mit algebraischen Vielfachheiten e_1, \dots, e_s . Für alle $r \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass die Eigenwerte von $\mathcal{C}(f)^r$ genau $\alpha_1^r, \dots, \alpha_s^r$ sind. Da die Spur die Summe der Eigenwerte ist, folgt $\text{Tr}(\mathcal{C}(f)^r) = v_r(f) \in \mathbb{R}$.

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

Die zur symmetrischen Matrix

$$\mathcal{S}(f) := (\nu_{i+j-2}(f))_{1 \leq i, j \leq d} \in \text{Mat}_d(\mathbb{R})$$

assoziierte quadratische Form heißt die *Sylvesterform von f*.

Lemma 5.1.1. *Es sei $I_{\mathbb{C}} := \langle f \rangle_{\mathbb{C}} \triangleleft \mathbb{C}[x]$ das von f erzeugte Hauptideal in $\mathbb{C}[x]$. Dann gilt*

$$\mathbb{C}[x]/I_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{C}[x]/\langle x - \alpha_i \rangle^{e_i}.$$

Beweis. Da die maximalen Ideale $\langle x - \alpha_i \rangle$ und $\langle x - \alpha_j \rangle$ für $i \neq j$ teilerfremd sind, gilt dies auch für $\langle x - \alpha_i \rangle^{e_i}$ und $\langle x - \alpha_j \rangle^{e_j}$. Aus dem Chinesischen Restsatz folgt die Behauptung. \square

Es sei $h \in \mathbb{C}[x]/I_{\mathbb{C}}$. Die \mathbb{C} -lineare Abbildung $\varphi_h : \mathbb{C}[x]/I_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}[x]/I_{\mathbb{C}}, g \mapsto hg$ heißt der *Multiplikationsoperator zu h*. Die Begleitmatrix von f ist die darstellende Matrix von φ_x bezüglich der Monombasis $(1, x, \dots, x^{d-1})$ von $\mathbb{C}[x]/I_{\mathbb{C}}$.

Proposition 5.1.2. [72, S. 205] *Es gilt $\text{Tr}(\varphi_h) = \sum_{i=1}^s e_i h(\alpha_i)$.*

Mithilfe der Isomorphie aus Lemma 5.1.1 kann man in den einzelnen \mathbb{C} -Vektorräumen $\mathbb{C}[x]/\langle x - \alpha_i \rangle^{e_i}$ eine Basis so wählen, dass die darstellende Matrix von $\varphi_h|_{\langle x - \alpha_i \rangle^{e_i}}$ eine untere Dreiecksgestalt annimmt. Die darstellende Matrix von φ_h bezüglich der Vereinigung der auf $\mathbb{C}[x]/I_{\mathbb{C}}$ zurückgezogenen Basen besitzt eine Blockdiagonalgestalt. Dadurch wird die Spur von φ_h ablesbar. Mithilfe dieser Formel wird der Zusammenhang zwischen den Nullstellen von f und der Sylvesterform deutlich (vgl. [72, S. 206]).

Satz 5.1.3. [48, Kap. 1, Par. 7, Thm. 5]

1. *Der Rang der Begleitmatrix $\mathcal{S}(f)$ entspricht der Anzahl der verschiedenen komplexen Nullstellen von f.*
2. *Die Signatur der Begleitmatrix $\mathcal{S}(f)$ entspricht der Anzahl der verschiedenen reellen Nullstellen von f.*

Die Übertragung dieses Kalküls auf den multivariaten Fall kann wie folgt zusammengefasst werden (vgl. [72] und [4, Kap. 4]): Es sei K ein Körper und \bar{K} sein algebraischer Abschluss. Weiter sei $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal und wir schreiben abkürzend $I_{\bar{K}} := I \otimes_K \bar{K}$ für das von I erzeugte Ideal in $\bar{K}[x_1, \dots, x_n]$. Wir nennen I (oder: $I_{\bar{K}}$) *null-dimensional*, wenn die affine algebraische Menge $\mathcal{V}(I_{\bar{K}}) \subset \bar{K}^n$ aus endlich vielen Punkten besteht (und

nicht-leer ist). Es sei $S := \overline{K}[x_1, \dots, x_n]/I_{\overline{K}}$. Weiter sei $V := \mathcal{V}(I_{\overline{K}}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \subset \overline{K}^n$. Da die Ideale $M_i := \{f \in \overline{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(\alpha_i) = 0\}$ maximal sind, sind es auch die Ideale $\mathfrak{m}_i := \{f \in S \mid f(\alpha_i) = 0\} \triangleleft S$. Die Dimension $e_i := \dim_{\overline{K}}(S_{\mathfrak{m}_i})$ der Lokalisierung von S an \mathfrak{m}_i als \overline{K} -Vektorraum nennen wir die (*algebraische*) *Multiplizität von α_i* . Der folgende Satz ist zwar bekannt, jedoch findet sich in der Literatur kein elementarer algebraischer Beweis (vgl. [4, Abs. 4.5] oder [13, Kap. 5, Par. 3]), welchen wir hier geben.

Satz 5.1.4. *Es gilt $\dim_{\overline{K}}(S) = \sum_{i=1}^s e_i$.*

Beweis. Es sei $i \in \{1, \dots, s\}$ und $f_1, f_2 \in \overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ mit $f_1(\alpha_i) \neq 0$ und $f_1(\alpha_j) = 0$ für alle $j \neq i$ sowie $f_2(\alpha_i) = 0$ und $f_2(\alpha_j) \neq 0$ für alle $j \neq i$. Das Produkt $f_1 f_2$ liegt im Verschwindungsideal von V , welches nach dem Hilbertschen Nullstellensatz $\sqrt{I_{\overline{K}}}$ entspricht. Es existiert ein $k \geq 1$ mit $(f_1 f_2)^k \in I$. Es ist $f_1^k \notin I$ für $l = 1, 2$. Für das Folgende ersetzen wir f_l durch f_l^k für $l = 1, 2$. Es ist $\overline{f}_l \neq \overline{0}$ in S . Wir bezeichnen mit

$$N_j := \{\overline{g} \in S \mid \exists \overline{h} \in S \setminus \mathfrak{m}_j : \overline{h}\overline{g} = \overline{0}\}$$

den Kern der Lokalisierungsabbildung $S \rightarrow S_{\mathfrak{m}_j}$. Für das fixierte i gilt $\overline{f}_1 \notin \mathfrak{m}_i$ und $\overline{f}_2 \notin \mathfrak{m}_j$ für alle $j \neq i$. Es gilt $\overline{f}_1 \in \bigcap_{j \neq i} N_j$, da wir in der Bedingung für N_j einfach $\overline{h} = \overline{f}_2$ nehmen können. Weiter gilt $\frac{\overline{f}_1}{1} \in S_{\mathfrak{m}_i}^*$. Für jedes $i \in \{1, \dots, s\}$ gilt folglich $\bigcap_{j \neq i} N_j \cdot S_{\mathfrak{m}_i} = S_{\mathfrak{m}_i}$. Der endlich-dimensionale \overline{K} -Vektorraum $S_{\mathfrak{m}_i}$ (der Dimension e_i) besitzt also eine Basis der Form

$$\frac{r_{i,1}}{s_{i,1}}, \dots, \frac{r_{i,e_i}}{s_{i,e_i}} \quad \text{mit} \quad r_{i,k} \in \bigcap_{j \neq i} N_j \quad \text{für alle} \quad k = 1, \dots, e_i.$$

Multipliziert man diese Basis mit dem Hauptnenner, so ist auch $\frac{r'_{i,1}}{1}, \dots, \frac{r'_{i,e_i}}{1}$ eine \overline{K} -Basis von $S_{\mathfrak{m}_i}$. Wir behaupten, dass die Menge $\mathfrak{B} := \{r'_{i,k} \mid i = 1, \dots, s \text{ und } \dots, e_i\}$ eine Basis von S ist. Sie ist linear unabhängig, denn eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{e_i} \lambda_{i,k} \frac{r'_{i,k}}{1} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda_{i,k} \in \overline{K}$$

führt – wegen $r'_{i,k} \in \bigcap_{j \neq i} N_j \subset N_i$ für $l \neq i$ – zur Gleichung

$$\sum_{k=1}^{e_i} \lambda_{i,k} \frac{r'_{i,k}}{1} = 0$$

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

in $S_{\mathfrak{m}_l}$. Also gilt $\lambda_{l,k} = 0$ für alle $k = 1, \dots, e_l$ und alle $l = 1, \dots, s$. Um zu zeigen, dass die Menge \mathfrak{B} erzeugend ist, nehmen wir ein $g \in S$. Für alle $i = 1, \dots, s$ existieren $\lambda_{i,k} \in \bar{K}$ mit

$$\frac{g}{1} = \sum_{k=1}^{e_i} \lambda_{i,k} \frac{r'_{i,k}}{1}$$

in $S_{\mathfrak{m}_i}$. Wir behaupten, dass

$$g = \delta := \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{e_i} \lambda_{i,k} r'_{i,k}$$

in S gilt. Für jedes $j \in \{1, \dots, s\}$ gilt

$$\frac{\delta}{1} = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{e_i} \lambda_{i,k} r'_{i,k} = \sum_{k=1}^{e_j} \lambda_{j,k} \frac{r'_{j,k}}{1} = \frac{g}{1}$$

in $S_{\mathfrak{m}_j}$, weil $r'_{i,k} \in \mathfrak{N}_j$ für $j \neq i$ gilt. Also ist $\frac{g-\delta}{1} = 0$ in $S_{\mathfrak{m}_j}$ für alle j . Wäre nun $g - \delta \neq 0$ in S , so gäbe es ein maximales Ideal $M \subset S$ mit $\text{Ann}(g - \delta) \subset M$. Da S ein semi-lokaler Ring mit maximalen Idealen $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$ ist, gäbe es ein j mit $M = \mathfrak{m}_j$. Dann wäre aber $\frac{g-\delta}{1} \neq 0$ in $S_{\mathfrak{m}_j}$ im Widerspruch zur obigen Folgerung. \square

Für die Korrektheit des im Folgenden vorgestellten Algorithmus 1 benötigen wir sogar die Endlichkeit der Dimension des \mathbb{Q} -Vektorraumes $\mathbb{Q}[\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n]/I$ für ein null-dimensionales Ideal $I \triangleleft \mathbb{Q}[\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n]$. Diese kann durch eine Ergänzung des Beweises von Satz 5.1.4 begründet werden. Da $\mathbb{Q}[\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n]/I$ ein semi-lokaler Ring ist, folgt sie zudem aus dem Struktursatz artinscher Ringe (vgl. [2, Thm. 8.7]).

Wir kürzen $\mathfrak{x} := (\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_n)$ ab und schreiben $\mathfrak{m} := \dim_{\bar{K}}(S)$. Weiter sei $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{x}^{\lambda_1}, \dots, \mathfrak{x}^{\lambda_m}\}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{N}_0^n$ eine Basis von S bestehend aus Restklassen, welche durch Monome repräsentiert werden. Wir definieren die \bar{K} -lineare *Begleitabbildung* $\varphi_{\mathfrak{x}_i} : S \rightarrow S, f \mapsto \mathfrak{x}_i f$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die darstellenden Matrizen von $\varphi_{\mathfrak{x}_1}, \dots, \varphi_{\mathfrak{x}_n}$ bezüglich der Basis \mathfrak{B} bezeichnen wir mit $M_{\mathfrak{x}_1}, \dots, M_{\mathfrak{x}_n}$ und nennen sie die *Begleitmatrizen von I* (oder: *von $I_{\bar{K}}$*). Für ein $h \in S$ nennen wir $\varphi_h : S \rightarrow S, f \mapsto hf$ den *Multiplikationsoperator zu h*.

Satz 5.1.5. [72, S. 210] Für $h \in S$ gilt die Spurformel $\text{Tr}(\varphi_h) = \sum_{i=1}^s e_i h(\alpha_i)$.

In der reellen Situation $K = \mathbb{R}$ betrachten wir die *Hermite-Bilinearform* $\beta_I : \mathbb{R}[\mathfrak{x}]/I \times \mathbb{R}[\mathfrak{x}]/I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $(f, g) \mapsto \text{Tr}(\varphi_{fg})$. Die Einträge der passenden Gram-Matrix

bezüglich der obigen Basis \mathfrak{B} sind gegeben durch

$$\beta_{i,j} = \text{Tr} \left(\mathbf{m}_{\mathbf{x}^{\lambda_i + \lambda_j}} \right) = \text{Tr} \left(\mathbf{M}_{x_1}^{(\lambda_i + \lambda_j)_1} \cdots \mathbf{M}_{x_n}^{(\lambda_i + \lambda_j)_n} \right).$$

Eine Gram-Matrix von β_I heißt die (*multivariate*) *Hermite-Matrix* von I .

Satz 5.1.6. [72, Thm. 2.1]

1. Der Rang der Hermite-Matrix $\mathcal{H}(I)$ entspricht der Anzahl der komplexen Nullstellen von I .
2. Die Signatur der Hermite-Matrix $\mathcal{H}(I)$ entspricht der Anzahl der reellen Nullstellen von I , also der Mächtigkeit der Menge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \cap \mathbb{R}^n$.

Da wir die Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ a priori nicht kennen, liegt die Schwierigkeit in der Berechnung der Hermite-Matrix in der passenden Basiswahl. Da das Ziel dieses Abschnitts eine algorithmische Berechnung der Hermite-Matrix ist, skizzieren wir im Folgenden die dafür notwendigen Schritte.

- **GröbnerBasis.** Eine Gröbnerbasis ist das klassische Werkzeug der algorithmischen Algebra. Für ihre Berechnung stehen zahlreiche Möglichkeiten zur Verfügung (vgl. [19], [18] und [4] für eine detaillierte Zusammenfassung). Wie üblich sind die Inputs ein Ideal I des Polynomrings $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ und eine Monomordnung². Der Output ist eine reduzierte Gröbnerbasis von I bezüglich der gegebenen Monomordnung.
- **FaktorBasis.** Ist I null-dimensional, so haben wir in Satz 5.1.4 und seiner nachfolgenden Bemerkung gesehen, dass die Dimension von $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/I$ endlich ist. Für die Endlichkeit der Dimension von $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/I$ gibt es auch eine algorithmische Begründung: Eine Basis kann dadurch berechnet werden, dass alle Monome bestimmt werden, welche durch kein Leitmonom der gegebenen reduzierten Gröbnerbasis teilbar sind. Der Input ist somit eine reduzierte Gröbnerbasis (eines Ideals I bezüglich einer Monomordnung). Der Output ist eine \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/I$.
- **BegleitM.** Für die Begleitmatrizen müssen zunächst die Bilder der \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/I$ unter der Multiplikation mit x_i für $i = 1, \dots, n$ modulo der Gröbnerbasis reduziert werden. Nach der Entnahme der Koeffizienten können die Begleitmatrizen erzeugt werden. Der Input ist also die \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/I$ (dabei sind

²In unseren Fällen wird stets die *Grad-revers-lex-Ordnung* verwendet.

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

das Ideal I und eine Monomordnung bereits vorgegeben). Der Output sind die Begleitmatrizen $(M_{x_1}, \dots, M_{x_n})$.

- **Hermite.** Schließlich kann die Hermite-Matrix dadurch bestimmt werden, dass Spuren der passenden Matrixprodukte berechnet werden. Die Inputs sind die Begleitmatrizen $(M_{x_1}, \dots, M_{x_n})$. Der Output ist die Hermite-Matrix.

Algorithmus 1 Hermite-Matrix

Input: Ein null-dimensionales Ideal I von $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ (und die Grad-revers-lex-Ordnung).

Output: Die Hermite-Matrix $\mathcal{H}(I)$ von I .

- 1: $\mathcal{G} \leftarrow \text{GröbnerBasis}(I, \text{grevlex})$
- 2: $\mathfrak{B} \leftarrow \text{FaktorBasis}(\mathcal{G})$
- 3: $(M_{x_1}, \dots, M_{x_n}) \leftarrow \text{BegleitM}(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$
- 4: $\mathcal{H}(I) \leftarrow \text{Hermite}(M_{x_1}, \dots, M_{x_n})$
- 5: **return** $\mathcal{H}(I)$

Üblicherweise ist es angebracht, nach der Vorstellung eines Algorithmus über seine Korrektheit zu sprechen. In unserem Fall folgt diese aus der Definition der Hermite-Matrix. Beispielsweise haben wir argumentiert, dass $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/I$ endlich-dimensional ist, sofern der Input ein null-dimensionales Ideal I ist. Eine \mathbb{Q} -Basis des Faktorraums kann mithilfe von Newton-Polytopen der Leitmonome von \mathcal{G} bestimmt werden. Die restlichen Rechnungen folgen der Konstruktion von $\mathcal{H}(I)$.

Beispiel 5.1.7. Es seien $I := \langle x, y \rangle$, $J := \langle x, y - 1 \rangle$, $L := \langle x - 1, y - 2 \rangle$ und wir setzen $P := I \cdot I \cdot J \cdot J \cdot L$. Wir wollen nachweisen, dass $\mathcal{V}(P) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit $\alpha_1 = (0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1)$, $\alpha_3 = (1, 2)$ gilt sowie $e_1 = 1, e_2 = 3, e_3 = 3$. Eine Basis von $\mathbb{Q}[x, y]/P$ besteht aus $\mathfrak{B} = \{y^3, y^2, xy, y, x^2, x, 1\}$. Die darstellenden Matrizen M_x und M_y können durch einen Basiswechsel in die Form

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Die Hermite-Matrix $\mathcal{H}(P)$ besitzt den Rang drei und das Signaturtripler ist $(3, 0, 4)$. Also besitzt die Nullstellenmenge von P drei reelle Punkte und die Summe ihrer drei (algebraischen) Multiplizitäten beträgt 7, welches auch der (algebraische) Grad von P ist. \triangle

Es ist intuitiv klar, wie die Berechnung der Hermite-Matrix in einer parametrisierten Situation durchgeführt werden kann, sofern ein Mittel zur Verfügung steht, welches von Parametern abhängige Gröbnerbasen bestimmt. Es sei dazu $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{Q}[\mathbf{u}][\mathbf{x}]$ eine Sammlung von m Polynomen in den *Parametern* $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_t)$ und den Variablen $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$. Überdies sei $V := \mathcal{V}(\mathbf{f}) \subset \mathbb{C}^{t+n}$ und $V_{\mathbb{R}} := \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^{t+n}$. Die Projektion auf den Parameterraum wird mit $\pi : \mathbb{C}^{t+n} \rightarrow \mathbb{C}^t$ bezeichnet. Da es im Folgenden stets um die Untersuchung null-dimensionaler Systeme gehen soll, nehmen wir an, dass es eine nicht-leere (Zariski-)offene Menge $\mathbf{U} \subset \mathbb{C}^t$ gibt, sodass $\pi^{-1}(\mathbf{u}) \cap V$ nicht-leer und endlich für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ ist. Kurz gesagt, die durch generische Spezialisierung entstehende algebraische Menge soll endlich sein.

Problem 5.1.8. (Klassifikation reeller Nullstellen³) Ist ein generisch endliches System $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{Q}[\mathbf{u}][\mathbf{x}]$ gegeben, so besteht die Aufgabe darin, semi-algebraische Mengen $S_1, \dots, S_l \subset \mathbb{R}^t$ zu finden, sodass

- a. die Mächtigkeit $|V_{\mathbb{R}} \cap \pi^{-1}(\mathbf{u})|$ für $\mathbf{u} \in S_i$ invariant ist,
- b. die Vereinigung $S := \bigcup_{i=1}^l S_i \subset \mathbb{R}^t$ euklidisch dicht ist.

Zusätzlich möchte man einen Punkt $\mathbf{u}_i \in S_i$ angeben sowie die Mächtigkeit von $|V_{\mathbb{R}}(\mathbf{f}) \cap \pi^{-1}(\mathbf{u}_i)|$ bestimmen.

Beispiel 5.1.9. [65, Kap. 1, Bsp. 1.12] Es sei eine affine ebene Kubik der Form $y^2 = x^3 + u_0x + u_1$ gegeben. Die Frage nach den singulären Punkten in Abhängigkeit der Parameter u_0 und u_1 kann im Sinne von Problem 5.1.8 interpretiert werden. Es gilt somit, das Ideal $I := \langle y^2 - x^3 - u_0x - u_1, -3x^2 - u_0, 2y \rangle$ zu untersuchen. Mithilfe des in *Singular* zur Verfügung stehenden Pakets *grobcov* kann ermittelt werden, dass für

$$S_1 = \{(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \mid 27u_1^2 + 4u_0^3 \neq 0\}$$

gilt, dass $|V_{\mathbb{R}}(I) \cap \pi^{-1}(\mathbf{u})| = 0$ für alle $\mathbf{u} \in S_1$ ist. Für in S_1 enthaltene Parameter entsteht folglich eine nicht-singuläre Kubik. \triangle

³Engl.: Real root classification problem (vgl. [53, Prob. 1]).

Die Untersuchung von Problem 5.1.8 besitzt bereits eine lange Tradition (vgl. [53, Abs. 1.2 und Abs. 4 für eine Zusammenfassung]) und Teillösungen konnten bereits mithilfe unterschiedlicher Ansätze gefunden werden. Im Folgenden wollen wir den Ansatz zur Bestimmung von Hermite-Matrizen auf die parametrisierte Situation übertragen. Dies kann auf zwei Arten geschehen: Erstens, die in `Singular` implementierte und in [65] ausführlich dokumentierte Methode der *Gröbner-Überdeckung* zerlegt den Parameterraum in lokal abgeschlossene Teilmengen und gibt jeweils eine dort gültige Gröbnerbasis an (vgl. auch [66]). Diese Methode basiert auf den Ergebnissen von Wibmer (vgl. [98]) und Weispfenning (vgl. [96] und [97]). Sie kann rechnerisch kostspielig werden, da der gesamte Parameterraum zerlegt wird und somit eine *vollständige* Klassifikation reeller Nullstellen erreicht wird. Zweitens, die in [53] beschriebene generische Methode vollführt zwar keine vollständige Zerlegung des Parameterraumes, ist dafür aber rechnerisch vorteilhafter gegenüber der obigen Methode.

Le et al. [53, Abs. 5] zeigen mithilfe elementarer algebraischer Methoden, dass ein generisch endliches System \mathbf{f} ein null-dimensionales Ideal $\langle \mathbf{f} \rangle \triangleleft \mathbb{Q}(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$ im Polynomring über dem Quotientenkörper $\mathbb{Q}(\mathbf{u})$ erzeugt (vgl. [53, Lem. 9]). Folglich kann die Hermite-Methode über dem Funktionenkörper $\mathbb{Q}(\mathbf{u})$ durchgeführt werden. Die Schwierigkeit, dass die Einträge der Hermite-Matrix in $\mathbb{Q}(\mathbf{u})$ liegen, wird durch eine zusätzliche Voraussetzung umgangen, welche von generischen Systemen stets erfüllt wird (vgl. [53, Abs. 5.2]). Schließlich wird bewiesen, dass außerhalb einer echten algebraischen Teilmenge $W_\infty := \mathcal{V}(\omega_\infty) \subsetneq \mathbb{C}^t$ des Parameterraumes, die spezialisierte Hermite-Matrix genau der Hermite-Matrix des spezialisierten Systems entspricht (vgl. [53, Prop. 16]).

Beispiel 5.1.10. Mithilfe der Gröbner-Überdeckung können wir auch eine generische Lösung eines parametrisierten Problems finden: Wir betrachten $\mathbb{Q}[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1][\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ und die affine Kurve $\mathcal{V}(I)$ mit $I := \langle \mathbf{y}^2 - \mathbf{y}\mathbf{x} + \mathbf{x} \rangle$. Wir stellen die Frage nach dem Schnittverhalten von $\mathcal{V}(I)$ mit einer parametrisierten Geraden der Form $\mathbf{x} + \mathbf{u}_0\mathbf{y} + \mathbf{u}_1$. Es sei

$$J := \langle \mathbf{y}^2 - \mathbf{y}\mathbf{x} + \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{u}_0\mathbf{y} + \mathbf{u}_1 \rangle.$$

Mithilfe des in `Singular` implementierten Pakets `grobcov` bestimmen wir parametrisierte Gröbnerbasen, welche uns mithilfe von Algorithmus 1 die Begleitmatrizen

$$M_x = \begin{pmatrix} \frac{-\mathbf{u}_0^2 - \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0 + 1} & -\mathbf{u}_0 \\ \frac{-\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0 + 1} & -\mathbf{u}_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_y = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0 + 1} & 1 \\ \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_0 + 1} & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{V}(u_0 + 1)$ liefern. Die Generizität wird dadurch deutlich, dass der Gültigkeitsbereich außerhalb der echten algebraischen Teilmenge $\mathcal{V}(u_0 + 1)$ liegt. Die Hermite-Matrix berechnet sich zu

$$\mathcal{H}(J) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{u_0 - u_1}{u_0 + 1} \\ \frac{u_0 - u_1}{u_0 + 1} & \frac{u_0^2 + u_1^2 + 2u_1}{u_0^2 + 2u_0 + 1} \end{pmatrix}.$$

Mithilfe der Untersuchung der führenden Hauptminoren kann man eine Lösung des Problems 5.1.8 angeben. Insbesondere interessieren wir uns dafür, ob es ein Paar (u_0, u_1) gibt, für welches die Hermite-Matrix $\mathcal{H}(J)$ positiv definit ist. Beispielsweise stellen wir für $(u_0, u_1) = (1, 1)$ fest, dass die Gerade $x + y + 1$ die Kurve $\mathcal{V}(I)$ in zwei verschiedenen reellen Punkten schneidet. \triangle

Beispiel 5.1.11. Wir betrachten $\mathbb{Q}[u_0, u_1, u_2][x, y, z]$ und die singuläre Kurve $\mathcal{V}(I)$ mit $I := \langle x + y^2 + z, xy \rangle$ und stellen uns die Frage, ob diese einen total-reellen Hyperebenenchnitt besitzt. Es ist $\{1, y, z\}$ eine für alle $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{V}((u_1 - 1)u_1)$ gültige \mathbb{R} -Basis von $\mathbb{R}[x, y, z]/\langle x + y^2 + z, xy, x + u_0y + u_1z + u_2 \rangle$. Die Hermite-Matrix besitzt – bis auf mögliche Nenner – die führenden Hauptminoren

$$3, 2u_0^2 + 6u_1u_2, u_2^2 + 4u_1u_2^3.$$

Für eine Teillösung des Problems 5.1.8 hinsichtlich der Frage nach einem total-reellen Hyperebenenchnitt gilt es, die durch $2u_0^2 + 6u_1u_2 > 0$ und $u_2^2 + 4u_1u_2^3 > 0$ definierte semi-algebraische Menge zu untersuchen. Es ist außerdem der Gültigkeitsbereich $u_1 \neq 0$ und $u_1 \neq 1$ zu berücksichtigen. Beispielsweise können wir mithilfe von *Mathematica* herausfinden, dass die Gerade $x - y - z - 1$ die Kurve $\mathcal{V}(I)$ in drei verschiedenen reellen Punkten schneidet. \triangle

5.2 Kanonische Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$

In der Tabelle aus dem Abschnitt 4.6 erkennen wir, dass der Fall von Kurven vom Geschlecht vier ein Minimalfall ist, für welchen offene Fragen über die (reduzierte) reelle Divisorenschranke existieren. Im Fall von Kurven mit vielen Komponenten haben wir in Abschnitt 4.2 bereits vollständige Linearsysteme vom Grad sechs untersucht und festgestellt, dass es eine mögliche Ausnahmeklasse für total-reelle Linearsysteme gibt (vgl. Sätze 4.2.6 und 4.2.8). In Abschnitt 4.3 haben wir – unter Annahme von

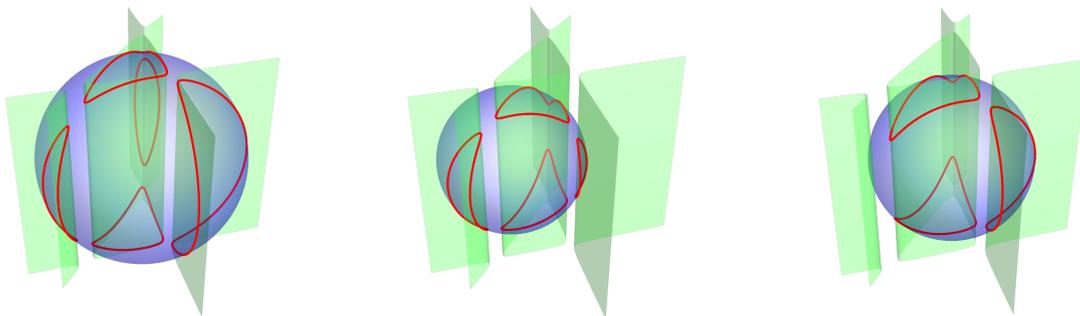
5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

Vermutung 4.3.2 – gezeigt, dass $N(X) \leq 11$ für $(M - 2)$ -Kurven gilt (vgl. Satz 4.3.4). In diesem Abschnitt wenden wir die parametrisierte Hermite-Methode auf kanonische Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ an. Diese entstehen als vollständige Durchschnitte einer quadratischen und einer kubischen Fläche und besitzen das Geschlecht vier und den Grad sechs (vgl. [33, Kap. IV, Abs. 5] für Eigenschaften kanonischer Kurven). Als kanonische Kurven sind sie linear normal: Das Hyperebenenchnittsystem ist vollständig und es entspricht dem kanonischen Linearsystem. Insbesondere werden wir bisher nicht untersuchte $(M - k)$ -Kurven für $k \in \{3, 4\}$ konstruieren, für welche das Hyperebenenlinearsystem nicht (reduziert) total-reell ist.

Beispiel 5.2.1. Ein positives Ergebnis des Hermite-Ansatzes ist in den folgenden Beispielen zu sehen. Im projektiven Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ mit den homogenen Koordinaten $[x, y, z, w]$ wählen wir die affine Karte, die durch $w = 1$ gegeben ist. Es sei die kubische Fläche $f := (x + 3)(x - y - 3)(x + y - 3) - 2$ gegeben. Weiter seien die quadratischen Flächen

$$\begin{aligned} g_5 &:= x^2 + y^2 + z^2 - 100, \\ g_4 &:= (x + 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 - 60, \\ g_3 &:= x^2 + y^2 + z^2 - 50, \end{aligned}$$

gegeben. Die Ideale $I_k := \langle f, g_k \rangle$ für $k \in \{3, 4, 5\}$ definieren affine Modelle projektiver kanonischer Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Die projektive Kurve X_k hat genau k Ovale.



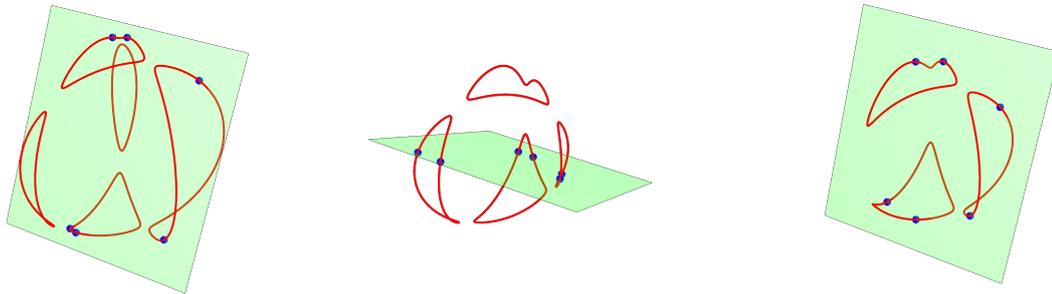
(a) Die Menge $\mathcal{V}(I_5)(\mathbb{R})$.

(b) Die Menge $\mathcal{V}(I_4)(\mathbb{R})$.

(c) Die Menge $\mathcal{V}(I_3)(\mathbb{R})$.

Abbildung 5.1: Kanonische Kurven mit mindestens drei Ovalen.

Das reelle affine Bild der Kurven X_k ist sogar kompakt, sodass die Ovale in Abbildung 5.1 vollständig sichtbar sind. Bereits in der Proposition 4.4.2 haben wir gesehen, dass diese Kurven reduzierte, total-reelle Hyperebenenchnitte besitzen, da sie über genug Ovale für die Konstruktion eines total-reellen Hyperebenenchnitts verfügen.

(a) Schnitt von $\mathcal{V}(I_5)$ und H_5 .(b) Schnitt von $\mathcal{V}(I_4)$ und H_4 .(c) Schnitt von $\mathcal{V}(I_3)$ und H_3 .Abbildung 5.2: Die Schnitte von X_k und H_k .

Mithilfe des Hermite-Algorithmus können wir jeweils parametrisierte Hermite-Matrizen bestimmen. In jedem der Fälle handelt es sich um Hermite-Matrizen der Größe 6×6 . Der höchste vorkommende Grad der dortigen Polynome in den drei Parametern u_0, u_1, u_2 ist jeweils 36. Der Hermite-Algorithmus wird dabei in `Maple` unter Verwendung des Pakets `FGb` zur schnellen Berechnung von Gröbnerbasen (vgl. [20]) durchgeführt und dauert wenige Sekunden. Möchten wir die Bedingung der positiven Definitheit an die Hermite-Matrizen setzen, so können wir uns die führenden Hauptminoren anschauen. Diese definieren semi-algebraische Bedingungen, innerhalb welcher wir Punkte bestimmen möchten. Dies kann entweder mithilfe von `Mathematica`⁴ oder des in `Maple` zur Verfügung stehenden Pakets `RAGLib` geschehen. Wir erhalten die Hyperebenen

$$H_5 := x + 15307y - 8072z + 6472,$$

$$H_4 := x - 14842y - 25786z - 61192,$$

$$H_3 := x + 55704y - 26379z - 19751.$$

Diese Hyperebenen definieren jeweils reduzierte, total-reelle Hyperebenenschnitte der affinen Kurven $\mathcal{V}(I_k) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$. △

Für die genauere Analyse der Probleme 4.1.3 und 4.1.6 genügt es natürlich nicht, sich auf Hyperebenenlinearsysteme zu beschränken. Im Gegenteil liegt die große Schwierigkeit in der Untersuchung von Linearsystemen, welche nicht nur von Hyperebenenschnitten definiert werden. Mithilfe des in `Macaulay2` implementierten Pakets `Divisor`

⁴Der implementierte Befehl lautet `SemialgebraicComponentInstances`.

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

(vgl. [84]) können wir den Hermite-Algorithmus 1 erweitern. Es sei hier beispielhaft die Kurve X_5 untersucht. Da X_5 eine M -Kurve vom Geschlecht vier ist, gilt $5 \leq N(X) \leq 7$. Wir haben bereits bewiesen, dass Divisoren vom Grad sechs, deren eingeschränkter Grad auf mindestens einem Oval ungerade ist, ein total-reelles Linearsystem definieren (vgl. Satz 4.2.6). Es bleibt, Divisoren mit dem Datenvektor $(6; 0, 0, 0, 0, 0)$ zu studieren. Auf der durch

$$J_5 := \langle (x + 3w)(x - y - 3w)(x + y - 3x) - 2w^3, x^2 + y^2 + z^2 - 100w^2 \rangle$$

definierten projektiven Kurve X_5 betrachten wir den Divisor

$$D := [0, 1, i, 0]^\sigma + 2 [1, 1, \sqrt{2}i, 0]^\sigma.$$

Dieser ist nicht-spezial, also definiert er nicht das kanonische Linearsystem. Mithilfe des in `Macaulay2` implementierten Pakets `Divisor` (vgl. [84]) stellen wir fest, dass D den \mathbb{R} -Morphismus

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, [x, y, z, w] \mapsto [a, b, c]$$

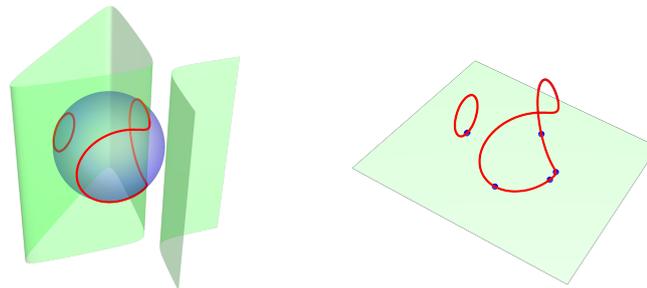
mit

$$\begin{aligned} a &:= 6620932500z^2 - 51802300625xw - 27486085825yw - 497730447098w^2, \\ b &:= 13241865000y^2 + 109603041350xw + 45561231550yw - 268860507577w^2, \\ c &:= 13241865000xy + 12823440100xw + 30314654900yw - 48537686773w^2, \end{aligned}$$

definiert. Nun kann der Hermite-Algorithmus 1 auf die Polynome angewendet werden, welche durch die Dehomogenisierung von a, b, c entstehen. Dadurch ist festzustellen, dass f eine total-reelle Faser besitzt. Über den Rückzug folgern wir, dass $|D|$ total-reell ist. Folglich können wir mithilfe des Algorithmus 1 prüfen, ob ein vollständiges Linearsystem einen (reduzierten) total-reellen Divisor enthält, sofern dieses basispunktfrei ist und somit einen Morphismus in einen projektiven Raum definiert. Im Fall von X_5 können wir die Untersuchung sogar vereinfachen (vgl. [25, S. 250]): Es ist $\dim |D| \geq t$ genau dann, wenn für beliebige komplex-konjugierte Paare $Q_1^\sigma, \dots, Q_s^\sigma$ und reelle Punkte p_1, \dots, p_t mit $2s + t = t$ gilt, dass ein Divisor $D' \in |D|$ existiert mit $Q_1^\sigma, \dots, Q_s^\sigma, p_1, \dots, p_t \in \text{Supp}(D')$. Im eben behandelten Fall von X_5 und des Datenvektors $(6; 0, 0, 0, 0, 0)$ brauchen wir nur Divisoren der Form $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + Q^\sigma$ zu

untersuchen, wobei je zwei der vier reellen Punkte auf einem Oval liegen.

Beispiel 5.2.2. In diesem Beispiel widmen wir uns kanonischen Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ mit $s \in \{1, 2\}$ Komponenten. Ist eine solche Kurve gegeben, so ist a priori nicht klar, ob sie einen reduzierten total-reellen Hyperebenenchnitt besitzt. Wir setzen $f := (x + 3)(x - y - 3)(x + y - 3) - 2$ und verkleinern den Radius der in Beispiel 5.2.1 betrachteten Quadriken, indem wir $g := x^2 + y^2 + z^2 - 10$ setzen.



(a) Die Menge $\mathcal{V}(I_2)(\mathbb{R})$.

(b) Schnitt von $\mathcal{V}(I_2)$ und H_2 .

Abbildung 5.3: Der Schnitt von $\mathcal{V}(I_2)$ und H_2 .

Das Ideal $I_2 := \langle f, g_2 \rangle$ definiert das affine Modell einer projektiven kanonischen Raumkurve X_2 innerhalb der Karte $w = 1$. Wieder ist das reelle affine Bild kompakt, sodass man erkennt, dass die Kurve X_2 aus zwei Ovalen besteht. Der höchste in der Hermite-Matrix der Größe 6×6 auftretende Grad der Polynome in den Parametern u_0, u_1, u_2 ist 36 und die Berechnung der Hermite-Matrix dauert wieder wenige Sekunden. Mithilfe von `RAGLIB` können wir die durch die führenden Hauptminoren definierte semi-algebraische Menge untersuchen und erhalten die Hyperebene

$$H_2 := x + \frac{43}{2000}y + \frac{131}{25}z + 9,$$

welche einen reduzierten total-reellen Hyperebenenchnitt auf $\mathcal{V}(I_2)$ definiert. Im zweiten Beispiel betrachten wir die *Clebsch-Kubik*

$$h := x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3$$

und die Quadrik $g_1 := (x + 1)^2 + y^2 + z^2 - 2$. Das Ideal $I_1 := \langle h, g_1 \rangle$ definiert das affine Modell einer projektiven kanonischen Raumkurve mit einem Oval.

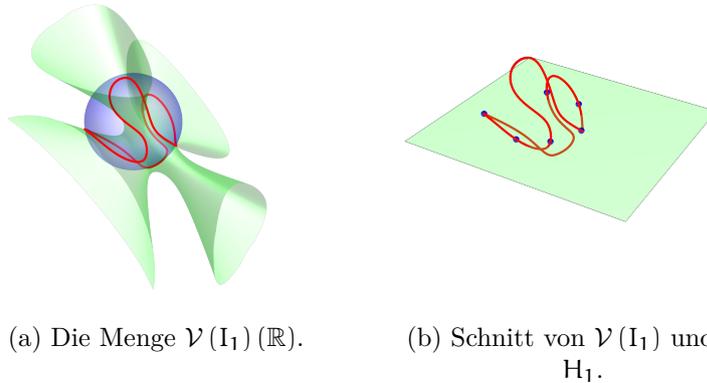


Abbildung 5.4: Der Schnitt von $\mathcal{V}(I_1)$ und H_1 .

Auch hier stellen wir mithilfe der Hermite-Methode fest, dass die Hyperebene

$$H_1 := x - 4468y - 32932z - 10164$$

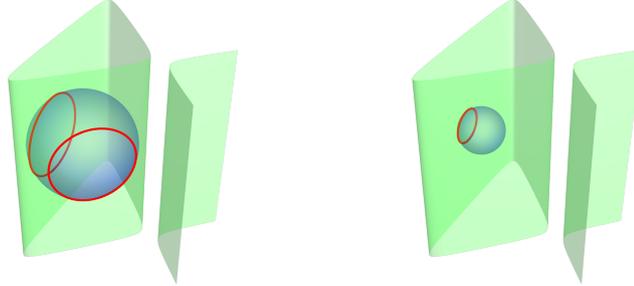
die Kurve $\mathcal{V}(I_1)$ in sechs verschiedenen reellen Punkten schneidet. △

In Beispiel 5.2.2 haben wir kanonische Kurven vom Grad sechs, Geschlecht vier und mit $s \in \{1, 2\}$ Ovalen untersucht. Grundsätzlich spielt die Frage nach der Existenz von total-reellen Hyperebenenschnitten mit gewissen Multiplizitäten nicht nur bei diesen Typen von Kurven eine wichtige Rolle. Im Fall $s = 2$ ist nämlich bekannt, dass es eine ungerade reelle Theta-Charakteristik gibt (vgl. [26, Prop. 5.1]). Folglich existiert stets eine Kontakthyperebene (in Form einer Tritangentialebene), für welche jedoch per Definition zugelassen wird, dass sie die Kurve in komplex-konjugierten Paaren mit doppelter Multiplizität schneidet. Total-reelle (ungerade) Theta-Charakteristiken wurden in der Arbeit von Kummer untersucht und in Beziehung zu den diskreten Invarianten (g, s, \mathbf{a}) der gegebenen Kurve gesetzt. Dabei steht $\mathbf{a} = 0$ für eine Kurve teilenden Typs und $\mathbf{a} = 1$ für eine Kurve nicht-teilenden Typs (vgl. [26, Abs. 3]). Ist X eine M -Kurve⁵ oder eine Kurve nicht-teilenden Typs, so gibt es mindestens $\binom{s}{g-1} 2^{g-1}$ total-reelle ungerade Theta-Charakteristiken (vgl. [51, Kor. 4.7]). Dieses Ergebnis liefert für die in Beispiel 5.2.2 betrachteten Kurven zwar keine positiven Mindestanzahlen, jedoch kann man erkennen, dass es dort total-reelle Tritangentialebenen gibt.

Beispiel 5.2.3. Besonders interessant und unserer ursprünglichen Motivation folgend sind Kurven, welche keine (reduzierten) total-reellen Hyperebenenschnitte besitzen. In

⁵Diese sind stets teilenden Typs (vgl. [26, Prop. 3.1]).

den letzten beiden Beispielen setzen wir dafür $g'_2 := (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 - 10$ und $g'_1 := (x + 2)^2 + y^2 + z^2 - 2$ und untersuchen die Ideale $I'_2 := \langle f, g'_2 \rangle$ und $I'_1 := \langle f, g'_1 \rangle$. Diese definieren affine Modelle kanonischer Raumkurven, wobei X'_2 zwei Ovale und X'_1 ein Oval besitzt.



(a) Die Menge $\mathcal{V}(I'_2)(\mathbb{R})$. (b) Die Menge $\mathcal{V}(I'_1)(\mathbb{R})$.

Abbildung 5.5: Kurven ohne total-reelle Hyperebenenschnitte.

In Abschnitt 4.5 haben wir gesehen, dass für Kurven vom Geschlecht vier die untere Schranke $N(X) \geq 5$ gültig ist (vgl. Korollar 4.5.4). Außerdem gibt es unendlich viele Kurven X vom Geschlecht vier, für welche diese auf $N(X) \geq 6$ angehoben werden kann (vgl. Korollar 4.5.7). In den beiden obigen Fällen zeigt die Hermite-Methode, dass keine reduzierten total-reellen Hyperebenenschnitte existieren. Wir können also $N'(X'_2) \geq 7$ und $N'(X'_1) \geq 7$ folgern. Der rechenintensive Teil ist dadurch zu begründen, dass die durch die führenden Hauptminoren definierte semi-algebraische Menge leer ist. Da die Komplexitätsanalyse dieses Teils kein Bestandteil der vorliegenden Dissertation ist, verweisen wir auf [53]. Überdies ist das Studium der reellen Polynome $\omega_{\infty}^{(1)}$ und $\omega_{\infty}^{(2)}$ möglich, welches plausibilisiert, dass es überhaupt keine total-reellen Hyperebenenschnitte gibt: Es gilt $N(X'_2) \geq 7$ und $N(X'_1) \geq 7$. \triangle

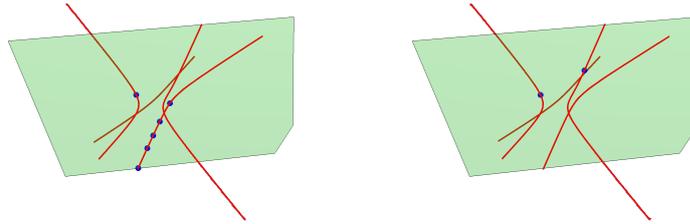
Korollar 5.2.4. *Es gibt unendlich viele kanonische Raumkurven $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ mit $s \in \{1, 2\}$ Ovalen, sodass $N'(X) \geq 7$ gilt.*

Abschließend kommen wir auf das Beispiel 3.2.13 zurück. Dort haben wir eine vom Parameter $\epsilon > 0$ abhängige Familie kanonischer Raumkurven konstruiert, für welche wir bewiesen haben, dass es ein $\epsilon_0 > 0$ gibt, sodass wir das Schnittverhalten von W_{ϵ_0} mit beliebigen Hyperebenen bestimmen können. Insbesondere existiert kein (reduzierter) total-reeller Hyperebenenschnitt für W_{ϵ_0} . Die Segre-Quadrik $q := x_0x_3 - x_1x_2$ sowie die Polynome

$$h := 3x_0^3 + 3x_0x_1^2 - x_0^2x_2 - 3x_0x_2^2 + x_2^3 + 4x_3^2320^2x_3 - x_0x_1x_3 + 4x_1^2x_3 - x_2^2x_3 - 3x_0x_3^2 + x_2x_3^2 - x_3^3$$

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

und $\mathbf{p} := x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ definieren die Kurve $W_\epsilon := \mathcal{V}_+(\mathbf{q}, \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{p})$. Bereits in Abschnitt 3.2 haben wir uns gefragt, ob es möglich ist zu prüfen, für welche $\epsilon > 0$ solche Hyperebenen Schnitte (nicht) existieren.



(a) Schnitt von W_{2-4} mit H .

(b) Schnitt von W_{2-5} mit H .

Abbildung 5.6: Hyperebenenschnitt für verschiedene $\epsilon > 0$.

Beispielsweise ergibt sich mithilfe der Hermite-Methode, dass W_{2-4} einen reduzierten total-reellen Hyperebenenschnitt besitzt, wohingegen wir nachweisen können, dass dies für W_{2-5} nicht mehr der Fall ist. In der obigen Abbildung erkennen wir einerseits den Schnitt von

$$H := -902330031190717857x_0 + 1152921504606846976x_1 \\ + 323139221492926521x_2 - 590264337985175552x_3$$

mit W_{2-4} . Die minimale Veränderung zu W_{2-5} bewirkt andererseits, dass H keinen total-reellen Hyperebenenschnitt mehr definiert. Der höchste vorkommende Grad der Polynome innerhalb der Hermite-Matrix beträgt in beiden Fällen **18**.

Die obige Methode zeigt erstmals rechnerische Möglichkeiten zur Bestimmung unterer Beschränkungen für die (reduzierte) reelle Divisorenschranke auf. Die aus der Fachliteratur bekannten Ergebnisse können somit in gewissen Minimalbeispielen erweitert und verschärft werden. Mithilfe des in `Macaulay2` zur Verfügung stehenden Pakets `Divisor` (vgl. [84]) können auch vollständige Linearsysteme geprüft werden, welche nicht bloß Hyperebenenschnittsysteme sind. Möchte man im Fall kanonischer Kurven in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ auch Multiplizitäten zulassen, so kommt der Ansatz an seine rechnerischen Grenzen.

5.3 Ein Gegenbeispiel im Fall $g = 2$

In Abschnitt 5.2 haben wir die Minimalfälle vom Geschlecht vier besprochen. In diesem Abschnitt widmen wir uns einem weiteren Minimalfall aus dem Abschnitt 4.6: (Hyperelliptische) Kurven vom Geschlecht zwei. In der Tabelle aus Abschnitt 4.6 erkennen wir, dass in diesem Fall die Frage nach der reellen Divisorenschranke für Kurven mit vielen Komponenten bereits beantwortet ist. Lediglich der Fall $s = 1$, für welchen wir – unter Annahme von Vermutung 4.3.2 – bereits $N(X) \leq 7$ geschlussfolgert haben, bleibt offen.

Beispiel 5.3.1. Eine direkte Konstruktion hyperelliptischer Kurven vom Geschlecht zwei in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ kann in [22, Kap. 10] gefunden werden. Diese Kurven entstehen durch Normalisierungen affiner singulärer Kurven und fungieren als Minimalbeispiele für die Vermutung 3.3.1. Es sei $C := y^2 - F$ mit

$$F := (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 - 4) = x^6 - x^4 - 10x^2 - 8.$$

Die Normalisierung der durch C definierten affinen singulären Kurve in den projektiven Koordinaten $[y, x_0, x_1, x_2, x_3]$ ist gegeben durch

$$X := \mathcal{V}_+(x_1^2 - x_0x_2, x_2^2 - x_1x_3, x_3x_0 - x_1x_2, y^2 - x_3^2 + x_2^2 + 10x_1^2 + 8x_0^2) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4.$$

Die Punktmenge besitzt dabei eine zweifache Überlagerung der Form

$$X = \left\{ \left[\pm \sqrt{F(x)}, 1, x, x^2, x^3 \right]^{\sigma} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4 \mid x \in \mathbb{C} \right\} \cup \{[1, 0, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 0, -1]\}.$$

Dies ist eine projektive Kurve vom Geschlecht zwei, Grad sechs und mit genau einem Oval in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$. Sie ist verzweigt, denn $\mathcal{V}_+(x_0)$ ist eine Verzweigungshyperebene. \triangle

Beispiel 5.3.1 kann fortgeführt werden, sodass eine Kurve $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ entsteht, für welche die Untersuchung hinsichtlich der Gültigkeit der noch offenen Vermutung 4.3.2 lohnenswert ist. Auf X definieren wir mithilfe des in `Macaulay2` zur Verfügung stehenden Pakets `Divisor` den Divisor

$$D := [0, 1, i, -1, -i]^{\sigma} + [0, 1, i\sqrt{2}, -2, -2i\sqrt{2}]^{\sigma} + [i\sqrt{18}, 1, -1, 1, -1]^{\sigma} + [1, 0, 0, 0, -1]$$

vom Grad sieben, welcher eine abgeschlossene Immersion nach $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ definiert (vgl. Satz

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

3.1.13). Diese ist gegeben durch $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5, [y, x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [a, b, c, d, e, f]$ mit

$$\begin{aligned} a &:= 2x_0x_3 + 7x_2x_3, \\ b &:= yx_3 - 4x_1x_3 + x_3^2, \\ c &:= 2x_0x_2 + 7x_1x_3, \\ d &:= yx_2 + 15x_2x_3, \\ e &:= 4x_0x_1 - 49x_2x_3, \\ f &:= yx_1 + 15x_1x_3. \end{aligned}$$

Die Bildkurve $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ ist eine hyperelliptische Kurve vom Geschlecht zwei, Grad sieben und mit einer Pseudo-Geraden. Wir wenden die Hermite-Methode auf die Gleichungen von Y und eine parametrisierte Hyperebene an und erhalten, dass es eine Hyperebene $H \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^5$ gibt, welche Y in sieben verschiedenen reellen Punkten schneidet. Folglich definiert der Rückzug dieser Hyperebene einen reduzierten total-reellen Divisor in $|D|$.

Als ein Hauptresultat dieses Abschnitt präsentieren wir eine genauere Untersuchung des Beispiels 3.2.11 im Hinblick auf die (reduzierte) reelle Divisorenschranke. Wir erinnern daran, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} f &:= -x_0^2x_1 - x_1^3 + 2x_0^2x_2 - x_0x_2^2 + 2x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 - x_0x_3^2 + x_1x_3^2, \\ g &:= 2x_0x_2^2 - x_2^3 - x_0^2x_3 - x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + 2x_0x_3^2 - x_2x_3^2 + x_3^3, \\ h_1 &:= x_0^3 + x_1^3 + x_0x_2^2 - x_1x_3^2, \\ h_2 &:= x_0^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^3 - x_3^3, \end{aligned}$$

für ein $\epsilon > 0$ die Kurve $W_\epsilon := \mathcal{V}_+(\mathbf{q}, f + \epsilon h_1, g + \epsilon h_2) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ beschreiben. Diese ist eine (hyperelliptische) Kurve vom Geschlecht zwei, Grad fünf und mit genau einer Pseudo-Geraden. Mithilfe der Hermite-Methode können wir die in Beispiel 3.2.11 gewonnene Erkenntnis stützen: Für $\epsilon \in \{2^{-1}, 2^{-4}\}$ gibt es einen reduzierten total-reellen Hyperebenenchnitt, wohingegen es für $\epsilon_0 := 2^{-8}$ keinen (reduzierten) total-reellen Hyperebenenchnitt gibt. Folglich gilt $N'(W_{2^{-s}}) \geq 6$ und es ist anzunehmen, dass auch $N(W_{2^{-s}}) \geq 6$ gilt. Es stellt sich die Frage, wie dieses Ergebnis mit den Resultaten aus [3, Prop. 2.3.3 und Prop. 2.3.5] zusammenpasst.

Satz 5.3.2. *In [3, Prop. 2.3.3 und Prop. 2.3.5] wird behauptet, dass $N(X) \leq 5$ und $N'(X) \leq 5$ für jede (hyperelliptische) Kurve X vom Geschlecht zwei mit einer Kompo-*

nente gelte. Diese Behauptungen sind inkorrekt. Die Kurve W_{2-s} liefert ein explizites Gegenbeispiel.

Wir können die fehlerhafte Stelle in [3, Prop. 2.3.3 und Prop. 2.3.5] explizit benennen. Da die Beweise für beide Propositionen nahezu analog verlaufen, beschränken wir uns auf [3, Prop. 2.3.3]. Da der Beweis konstruktiv ist, können wir diesen exemplarisch an der Kurve W_{2-s} durchgehen. Wir nehmen einen reellen Punkt auf W_{2-s} – zum Beispiel $\mathbf{p} := [0, 0, 1, 1] \in W_{2-s}(\mathbb{R})$. Wir projizieren auf das orthogonale Komplement von \mathbf{p} und erhalten die rationale Abbildung

$$\pi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \dashrightarrow \mathcal{V}_+(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3), [x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [2x_0, 2x_1, x_2 - x_3, x_2 - x_3].$$

Betrachten wir die Identifikation der Hyperebene mit $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, so erhalten wir – wie in [3, S. 44] beschrieben – eine singuläre Kurve $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vom Grad vier und arithmetischem Geschlecht drei. Der singuläre Ort ist $\text{Sing}(Y) = \{[0, 0, 1]\}$. Die Beschreibung der Singularität geschieht durch das Studium ihres Urbilds unter π . Da diese Singularität gewöhnlich ist, gibt es nur drei Möglichkeiten (vgl. [64, Def. 3.10] und Beispiel 4.7.6): Eine *reelle Schleife* mit zwei verschiedenen reellen Punkten im Urbild, eine *isolierte reelle Schleife* mit einem komplex-konjugierten Paar im Urbild, oder eine *reelle Kuspel* mit einem doppelten reellen Punkt im Urbild. Im weiteren Verlauf wird lediglich der Fall der reellen Schleife und der Fall der reellen Kuspel studiert (vgl. [3, S. 44]). In diesen beiden Fällen kann tatsächlich ein total-reeller Hyperebenenchnitt konstruiert werden. Jedoch können wir am Beispiel von W_{2-s} nachweisen, dass das Urbild von $\text{Sing}(Y)$ unter π aus einem komplex-konjugierten Paar besteht. Die Singularität von Y ist also eine isolierte reelle Schleife. Aufgrund dieser Tatsache kann kein total-reeller Hyperebenenchnitt angegeben werden und tatsächlich haben wir bereits begründet, dass ein solcher überhaupt nicht existiert.

5.4 Ebene Quartiken

Letztlich möchten wir den in der Tabelle aus Abschnitt 4.6 verbliebenen Minimalfall einer Kurve vom Geschlecht drei untersuchen. Die wohl bekanntesten und ausgiebig untersuchten Kurven vom Geschlecht drei sind die ebenen Quartiken. In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass die Anzahlen der Bitangenten ebener Quartiken bereits im Jahr 1874 untersucht wurden (vgl. Zeuthen [100]).

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

Ist $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ eine ebene Quartik mit vielen Komponenten, so wissen wir bereits, dass $4 \leq N(X) \leq 5$ gilt (vgl. Abschnitt 4.2). Huisman hat in seiner Arbeit [38, S. 92] die Erwartung geäußert, dass es Beispiele mit $N(X) = 5$ geben müsse. In den Sätzen 4.2.6 und 4.2.8 haben wir bewiesen, dass die Divisoren mit Datenvektor $(4; 0, \dots, 0)$ eine mögliche Ausnahmeklasse bilden, welche es zu untersuchen gilt.

Im weiteren Verlauf möchten wir ebene Quartiken konstruieren, sodass die Anzahl und Lage der Komponenten kontrollierbar ist. Bereits im Jahr 1834 hat Plücker gezeigt, dass eine ebene \mathbb{C} -Quartik genau 28 Bitangenten besitzt (vgl. [75]). Zeuthen widmete sich daraufhin reellen ebenen Quartiken. Er bewies, dass es eine Korrespondenz zwischen der Anzahl ihrer Ovale, dem Cayley-Oktat und der Anzahl ihrer reellen Bitangenten gibt (vgl. [100]). Diese Beziehung kann ausgenutzt werden, um Quartiken, die durch eine symmetrische lineare Determinantendarstellung gegeben sind, nach der Anzahl ihrer Ovale zu klassifizieren (vgl. [74]): Ist

$$f := \det(x_0 M_0 + x_1 M_1 + x_2 M_2)$$

gegeben, wobei M_i reelle symmetrische Matrizen der Größe 4×4 sind, so ist das *Cayley-Oktat* die Menge

$$\text{Cay}(M_0, M_1, M_2) := \{[u_0, u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3(\mathbb{C}) \mid u^t M_i u = 0 \text{ für alle } i = 0, 1, 2\}$$

und besteht aus – mit Vielfachheiten gezählt – genau acht Punkten. Setzen wir

$$M := x_0 M_0 + x_1 M_1 + x_2 M_2$$

und sind O_1, \dots, O_8 diese Punkte, so sind die 28 Linearformen $O_i M O_j^t$ genau alle komplexen Bitangenten von $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ (vgl. [74, Prop. 3.3]). Um Kurven mit vier [bzw. drei] Ovalen zu bekommen, müssen wir erreichen, dass acht [bzw. sechs] Punkte im Cayley-Oktat reell sind (vgl. [74, Tab. 1]).

Beispiel 5.4.1. Das Divisorenkalkül machen wir am Beispiel der ebenen Quartik

$$X := \mathcal{V}_+(x^4 + y^4 - z^4) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

klar. Es sei $D := 6 \cdot [1, 0, 1]$. Es ist $\dim |D| = 3$ nach dem Satz von Riemann-Roch 4.2.2 und eine \mathbb{R} -Basis von $L(D) = \{f \in \mathbb{R}(X) \mid \text{div}(f) \geq -D\}$ ist durch $\frac{x}{x-z}, \frac{y}{x-z}, \frac{z}{x-z}, \frac{y^2}{(x-z)^2}$

gegeben. Diese definiert den zu $|D|$ assoziierten \mathbb{R} -Morphismus

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, [x, y, z] \mapsto [x(x-z), y(x-z), z(x-z), y^2].$$

Es gilt

$$\varphi(X) \cdot \mathcal{V}_+(\mathfrak{x}_3) = 2 \cdot [1, 0, -1, 0] + 2 \cdot [1, 0, i, 0]^\sigma$$

und der Rückzug der Hyperebene $\mathcal{V}_+(\mathfrak{x}_3) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ ist in der Notation eines Divisors durch

$$D' := \varphi^{-1}(\mathcal{V}_+(\mathfrak{x}_3)) = 2 \cdot [1, 0, -1] + 2 \cdot [1, 0, i]^\sigma$$

gegeben. Die Lineare Äquivalenz von D und D' wird durch die Relation der Hyperebene beschrieben. Es gilt

$$\operatorname{div} \left(\frac{y^2}{(x-z)^2} \right) = (2 \cdot [1, 0, i]^\sigma + 2 \cdot [1, 0, -1] + 2 \cdot [1, 0, 1]) - (8 \cdot [1, 0, 1]).$$

Da eine ebene Kurve projektiv normal ist (vgl. [33, Kap. II, Aufg. 8.4]), ist das Quadrikenchnittsystem vollständig. Der Divisor D besitzt den Grad sechs, somit entsteht nach der Einbettung via $|D|$ eine Kurve vom Grad sechs. Die Einbettung ist dabei durch Quadriken gegeben, welche die Kurve X in acht Punkten (gezählt mit Vielfachheiten) schneiden. Ein Divisor E liegt somit genau dann in $|D|$, wenn es zwei Quadriken $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$ gibt, sodass $\operatorname{div} \left(\frac{q_1}{q_2} \right) = E - D$ gilt und die Schnittdivisoren $X \cdot \mathfrak{q}_1$ und $X \cdot \mathfrak{q}_2$ einen gemeinsamen Teildivisor vom Grad zwei besitzen. \triangle

Konstruktion 5.4.2. Wir beginnen mit Matrizen einer beliebigen Determinantendarstellung einer ebenen Quartik mit vier Ovalen. Eine minimale Änderung der Einträge lässt das Cayley-Oktat hinsichtlich der Anzahl der reellen Punkte (mit Vielfachheiten gezählt) unverändert. Die Intention der Positionierung der Ovale machen wir am folgenden Beispiel deutlich: Das Cayley-Oktat der Matrizen

$$M_0 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, M_1 := \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, M_2 := \begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

besteht aus acht reellen Punkten, von denen sechs verschieden sind. Die hierdurch

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

gegebene lineare Determinantendarstellung lautet

$$\begin{aligned}
 f &:= \det(xM_0 + yM_1 + zM_2) \\
 &= (81x^4)/4 - (135x^3y)/4 + (1953x^2y^2)/16 + (297xy^3)/2 + 69y^4 \\
 &+ (9x^3z)/2 + (57x^2yz)/2 + (431xy^2z)/8 - (85y^3z)/6 - (179x^2z^2)/4 \\
 &+ (67xyz^2)/2 - (4685y^2z^2)/48 - (16xz^3)/3 - (1433yz^3)/36 + (917z^4)/36
 \end{aligned}$$

und definiert eine ebene Quartik X mit vier Ovalen.

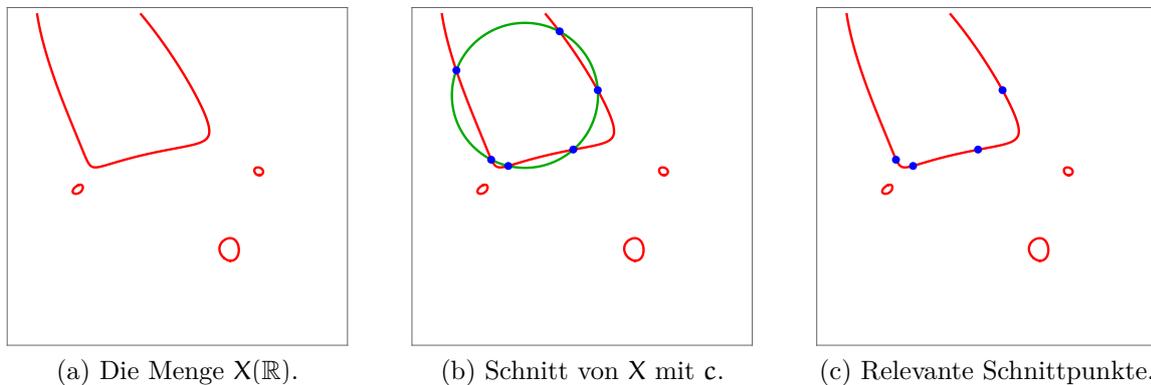


Abbildung 5.7: Die ebene Quartik X .

Tatsächlich erkennen wir in Abbildung 5.7 das kompakte affine Bild der reellen Punkte von X , welche sich in vier Ovale zerlegen. Weiter betrachten wir den Kreis $c := \left(x + \frac{7}{10}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{8}{10}$ und die in Abbildung 5.7 (c) dargestellten vier reellen Schnittpunkte. Der \mathbb{R} -Vektorraum V aller durch diese vier vorgegebenen Punkte laufenden Koniken kann numerisch mithilfe von *Mathematica* berechnet werden. Er wird durch

$$\begin{aligned}
 Q_1 &:= 0.47127272928773783x^2 + 0.6598453341260914xy \\
 &- 0.13447226903447518y^2 + 0.4868883263821278x \\
 &- 0.24467908024400253y + 0.16581695886185108, \\
 Q_2 &:= -0.09774545786950306x^2 + 0.4442913360602867xy \\
 &- 0.5056096052652832y^2 - 0.2532574091360106x \\
 &+ 0.6653828276536204y - 0.17474649814093252,
 \end{aligned}$$

erzeugt. Für alle $Q \in V$ hat der Schnittdivisor $X \cdot Q$ den Grad acht und besitzt stets die vier oben vorgegebenen Punkte im Träger. Das Residualsystem der übrigen vier Punkte (gezählt mit Vielfachheiten) ist ein vollständiges Linearsystem vom Grad vier mit Datenvektor $(4; 0, 0, 0, 0)$. Wie im Beispiel 5.4.1 wird das System von Brüchen von Koniken bestimmt, deren Schnittdivisoren die vorgegebenen vier Punkte beinhalten.

Es sei hierbei angemerkt, dass X als kanonische Kurve projektiv normal ist und somit alle Kurvenschnittsysteme vollständig sind (vgl. [33, Kap. III, Abs. 5, Aufg. 5.5]). Mithilfe der Hermite-Methode können wir nachweisen, dass jede Konik $Q \in V$ die ebene Quartik X in mindestens einem komplex-konjugierten Paar schneidet. Es ist folglich ein basispunktfreies vollständiges Linearsystem vom Grad vier gefunden, welches nicht total-reell ist. Es folgt $N(X) = 5$.

Auch die Konstruktion einer ebenen Quartik mit drei Ovalen ist möglich. Mithilfe passender Matrizen können wir das Polynom

$$g := 9x^4 - 30x^3y + 161x^2y^2 - 116xy^3 - 8y^4 + 46x^3z - 80x^2yz + 202xy^2z - 116y^3z + 59x^2z^2 - 80xyz^2 + 185y^2z^2 - 6xz^3 - 50yz^3 - 11z^4$$

konstruieren, welches eine ebene Quartik Y mit drei Ovalen definiert.

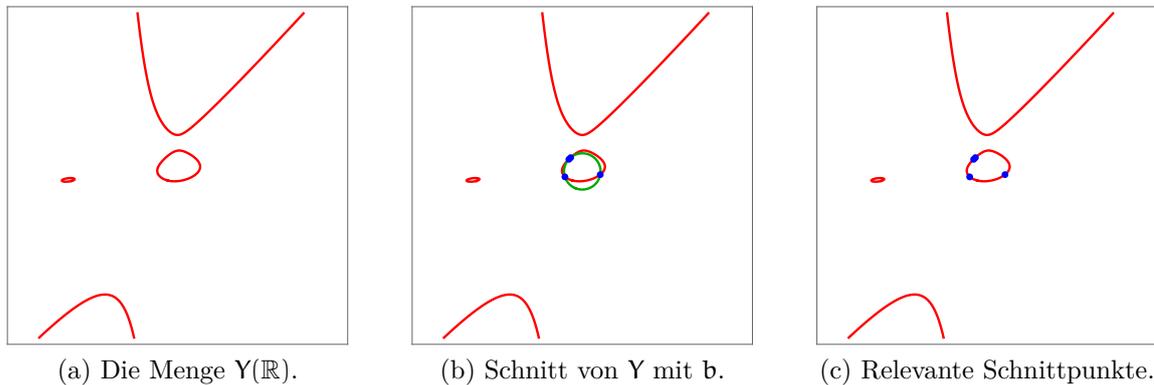


Abbildung 5.8: Die ebene Quartik Y .

Dabei ist das affine Bild der reellen Punkte nicht kompakt. Es teilt das im Bild größte Oval in zwei Teile auf. Weiter betrachten wir die vier reellen Schnittpunkte von Y und dem Kreis $b := x^2 + \left(y - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{5}$. Durch die vier in Abbildung 5.8 (c) eingezeichneten reellen Punkte bestimmen wir den \mathbb{R} -Vektorraum W aller Koniken, welche durch diese verlaufen. Dieser wird durch die Koniken

$$q_1 := 0.31100521007570264x^2 - 0.4569339120067826xy + 0.7395296982938114y^2 + 0.01692042897825057x - 0.3797243325905672y - 0.05573253113981307,$$

$$q_2 := 0.7303803360779876x^2 + 0.5870985535950933xy + 0.17978406689755905y^2 - 0.021740473005624657x + 0.2618986086207364y - 0.14308743118437495,$$

5 Neue Berechnungen der (reduzierten) reellen Divisorenschranke anhand von Minimalbeispielen

erzeugt. Für alle $q \in W$ ist der Schnittdivisor $Y \cdot q$ vom Grad acht und besitzt stets die vier oben vorgegebenen reellen Punkte im Träger. Das Residualsystem der übrigen vier Punkte ist ein vollständiges Linearsystem vom Grad vier mit Datenvektor $(4; 0, 0, 0)$. Mithilfe der Hermite-Methode können wir nachweisen, dass jede Konik $q \in W$ die ebene Quartik Y in mindestens einem komplex-konjugierten Paar schneidet. Es ist folglich ein basispunktfreies vollständiges Linearsystem vom Grad vier gefunden, welches nicht total-reell ist. Es folgt $N(Y) = 5$. \triangle

Durch eine minimale Störung der Matrizen, welche die Quartiken X bzw. Y definieren, können wir unendlich viele solcher Beispiele produzieren. Da die Kreise c und b die Kurven X und Y jeweils transversal schneiden, brauchen wir diese nicht zu verändern.

Um die reduzierte reelle Divisorenschranke einzubeziehen, können wir verwenden, dass $N'(X) \leq 2g - 1$ für Kurven vom Geschlecht g mit vielen Komponenten gilt (vgl. [3, Thm. 2.4.0.1]).

Korollar 5.4.3. *Es gibt unendlich viele M -Quartiken $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ mit $N(X) = N'(X) = 5$.*

Korollar 5.4.4. *Es gibt unendlich viele $(M - 1)$ -Quartiken $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ mit $N(X) = N'(X) = 5$.*

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass die Bestimmung der reellen Divisorenschranke für die obigen Quartiken mit vielen Komponenten durch basispunktfreie Linearsysteme vom Grad vier erreicht wird, welche nicht total-reell sind. Es sei angemerkt, dass dies die erste explizite Bestimmung dieser Art ist. Bisherige untere Beschränkungen konnten nur durch Linearsysteme mit komplex-konjugierten Basispunkten gewonnen werden (vgl. [63, Abs. 6]).

Überdies zeigen die obigen Beispiele, dass es Kurven nicht-trivialen Geschlechts gibt, für welche $N(X) = N'(X)$ gilt.

6 Ausblick und offene Fragen

An einigen Stellen der vorliegenden Dissertation sind wir bereits auf offene Fragen und neue Ansätze eingegangen (vgl. Ende des Abschnitts 3.3, die Vermutung 4.3.2, Ende des Abschnitts 4.4). An dieser Stelle möchten wir weitere interessante Fragen und Ansätze bündeln, welche sich aus den Erkenntnissen der letzten Kapitel ergeben.

1. Ein Vergleich zwischen $N(X)$ und $N'(X)$. In Abschnitt 4.2 haben wir Beschränkungen für $N(X)$ für Kurven X mit vielen Komponenten formuliert. Beispielsweise ist bekannt, dass $N(X) \leq 2g - 1$ gilt (vgl. Huisman [38] und Monnier [63]). Auch gilt in diesen Fällen die Beschränkung $N'(X) \leq 2g - 1$ (vgl. Bardet [3]). Des Weiteren haben wir ebene Quartiken mit vielen Komponenten konstruiert, für welche die reelle Divisorenschranke mit der reduzierten reellen Divisorenschranke übereinstimmt. Es könnte vermutet werden, dass für jede Kurve X die Gleichheit $N(X) = N'(X)$ gilt – sogar unabhängig von der Anzahl ihrer Komponenten. Jedoch ist ein Vergleich zwischen $N(X)$ und $N'(X)$ schwierig: Das Beispiel der ebenen Quartik $Q := \mathcal{V}_+(x^4 + y^4 - z^4) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ mit einem Oval zeigt, dass das Geradenlinearsystem total-reell ist. Die Gerade $\mathcal{V}_+(x-z)$ definiert einen total-reellen Geradenschnitt der Form $Q \cdot \mathcal{V}_+(x-z) = 4 \cdot [1, 0, 1]$. Es gibt jedoch keinen reduzierten total-reellen Geradenschnitt auf Q , weshalb $N'(Q) \geq 5$ gilt. Auf Q sei der Divisor

$$D := [1, 0, 1] + [0, 1, i]^{\sigma} + [0, 1, 1]$$

gegeben, welcher den \mathbb{R} -Morphismus

$$Q \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, [x, y, z] \mapsto [xy + xz - yz - z^2, x^2 - xz]$$

definiert. Mithilfe der Hermite-Methode können wir nachweisen, dass es keine total-reelle Faser gibt. Folglich ist $|D|$ nicht total-reell. Also gilt auch $N(Q) \geq 5$. Es wird deutlich, dass der Vergleich zwischen $N(X)$ und $N'(X)$ einer Kurve X nicht Linearsys-

6 Ausblick und offene Fragen

tem für Linearsystem erfolgen kann, sondern man die Gesamtheit aller Linearsysteme eines festen Grades untersuchen muss, um Aussagen über diesen Vergleich zu treffen. Folglich scheint dieses Problem gleichwertig zur Bestimmung der (reduzierten) reellen Divisorenschranke an sich zu sein.

2. Hermite-Methode für singuläre Kurven. Ein Vorteil der Hermite-Methode ist, dass diese ohne Weiteres auf singuläre Kurven angewendet werden kann. Bereits in Abschnitt 4.7 haben wir gesehen, dass bisher nur eine einzige Forschungsarbeit existiert, welche sich der Beschränkung von $N(X)$ einer singulären Kurve X verschrieben hat (vgl. Monnier [64]). Es seien $f := z^4xy - x^6 - y^6$ und $g := x^3z - y^2z^2 - x^4 - y^4$ gegeben.

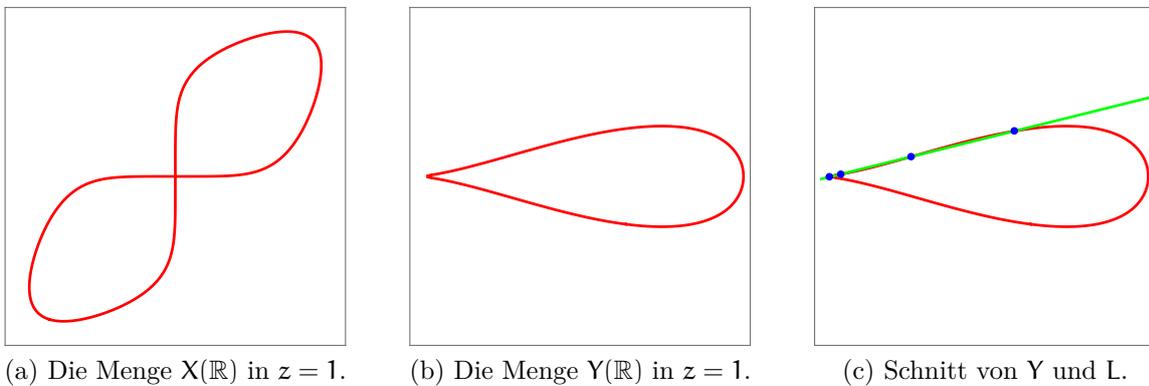


Abbildung 6.1: Geradenschnitte singulärer Kurven.

Die singuläre ebene Kurve $X := \mathcal{V}_+(f)$ besitzt eine (nicht-einfache) höherwertige Schleife als Singularität. Die singuläre ebene Kurve $Y := \mathcal{V}_+(g)$ besitzt eine (nicht-einfache) höherwertige Kuspe als Singularität. Wir berechnen die Hermite-Matrix von f . Dies ist eine Matrix der Größe 6×6 in den Parametern \mathbf{a}, \mathbf{b} . Das Polynom höchsten Grades ist

$$\begin{aligned} h := & 6a^{50}b^{10} + 2100a^{49}b^6 - 29970a^{44}b^{10} + 275a^{48}b^2 - 59080a^{43}b^6 + 1463550a^{38}b^{10} \\ & + 1390a^{42}b^2 + 39830a^{37}b^6 - 11835780a^{32}b^{10} + 2570a^{36}b^2 + 342300a^{31}b^6 \\ & + 25951860a^{26}b^{10} + 1630a^{30}b^2 + 182290a^{25}b^6 - 17582730a^{20}b^{10} - 1000a^{24}b^2 \\ & - 178400a^{19}b^6 + 3459390a^{14}b^{10} - 2150a^{18}b^2 - 102870a^{13}b^6 - 142560a^8b^{10} \\ & - 1210a^{12}b^2 + 16460a^7b^6 + 330a^2b^{10} - 230a^6b^2 - 70ab^6 + 5b^2 \end{aligned}$$

mit $\deg h = 60$. Mithilfe der Hermite-Methode weisen wir nach, dass X keinen total-reellen Geradenschnitt besitzt¹. Es folgt $N(X) \geq 7$ und liefert bereits in diesem ein-

¹Es sei daran erinnert, dass Geraden durch den singulären Punkt nicht berücksichtigt werden.

fachen Beispiel eine neue untere Schranke. Dagegen können wir im zweiten Fall die Gerade

$$L := x - 2y - \frac{68681052611}{219902325552}$$

identifizieren, welche Y in vier reellen Punkten schneidet. Auf Y ist somit das Geradenlinearsystem total-reell. Inwieweit Hyperebenenlinearsysteme auf singulären Kurven total-reell sind, scheint eine offene und interessante Forschungsfrage zu sein, welche mit der Hermite-Methode angegangen werden kann.

3. Die Abel-Jacobi Abbildung. Es sei $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ eine Kurve. Neben der Hermite-Methode aus Kapitel 5 kann ein weiterer rechnerischer Ansatz genutzt werden, um das Bild der Abel-Jacobi Abbildung innerhalb der Einskomponente der Jacobischen von X zu schätzen². Dabei nutzen wir die analytische Sichtweise der \mathbb{C} -rationalen Punkte der Komplexifizierung $X_{\mathbb{C}}$ aus. Es ist $V := X(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ eine (klassische) algebraische Kurve. Dies ist eine zusammenhängende und kompakte Riemannsche Fläche. Die Abel-Jacobi Abbildung

$$A : V \rightarrow \text{Pic}^0(X_{\mathbb{C}})$$

kann wie folgt konstruiert werden: Für einen fixierten Punkt $p \in V$ bezeichnen wir mit $\pi_1(V, p)$ die Fundamentalgruppe von V . Diese besteht aus den Homotopieklassen $[\gamma]$ geschlossener Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ mit $\gamma(a) = \gamma(b) = p$. Über eine Zerlegung von γ in stückweise glatte Wege in passenden Karten kann das Integral $\int_{\gamma} \omega$ für ein glattes Differential $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(V)$ definiert werden (vgl. [62, Kap. IV, Abs. 3]). Aus dem Satz von Stokes folgt, dass das Integral eines geschlossenen glatten Differentials nur von der Homotopieklasse des gegebenen Weges abhängt (vgl. [62, Kap. IV, Prop. 3.20]). Um die Bezeichnungen der für das Folgende relevanten Arbeiten zu decken, führen wir die homologische Sichtweise ein (vgl. [17, Abs. 2], [16, Abs. 2.4] und [91, Abs. 2]). Eine *Kette auf V* ist eine endliche \mathbb{Z} -Linearkombination $\sum_{i=1}^m n_i \gamma_i$ von Wegen γ_i auf V . Die Gruppe der Ketten auf V bezeichnen wir mit $\text{CH}(V)$. Die Abbildung, welche einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ auf die formale Differenz $\gamma(b) - \gamma(a)$ wirft, setzt sich kanonisch zu einem Gruppenhomomorphismus $\text{CH}(V) \rightarrow \text{Div}(X_{\mathbb{C}})$ fort. Es sei $\text{CLCH}(V)$ der Kern dieser Abbildung – die Gruppe der *geschlossenen Ketten auf V* . Diese besitzt als Untergruppe die Menge $\text{BCH}(V)$ der formalen \mathbb{Z} -Linearkombinationen aller Ketten, welche als Randketten abgeschlossener triangulierbarer Teilmengen von V vorkommen.

²Nach der Beweisidee von Scheiderer zur Existenz von $N(X)$ genügt dies, um $N(X)$ zu beschränken (vgl. [82, Lem. 2.12]).

6 Ausblick und offene Fragen

Die Faktorgruppe

$$H_1(V, \mathbb{Z}) := \text{CLCH}(V)/\text{BCH}(V)$$

ist die *erste Homologiegruppe von V* (vgl. [62, Kap. IV, Def. 3.21] für die obigen Bezeichnungen). Das Konzept der Fundamentalgruppe ist gleichwertig zur Erstellung der ersten Homologiegruppe, denn der Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(V, \mathfrak{p}) / [\pi_1(V, \mathfrak{p}), \pi_1(V, \mathfrak{p})] \rightarrow \text{CLCH}(V)/\text{BCH}(V)$$

ist bijektiv, wobei $[\pi_1(V, \mathfrak{p}), \pi_1(V, \mathfrak{p})]$ die Kommutatorgruppe bezeichnet. Es sei $\omega \in \Omega^1(V)$ ein holomorphes Differential auf V . Da dieses geschlossen ist, ist sein Integral über der Homotopieklasse eines Weges wohldefiniert. Ein Element λ des Dualraumes $\Omega^1(V)^*$ wird eine *Periode* genannt, wenn es einen geschlossenen Weg γ gibt, sodass λ die Form

$$\int_{[\gamma]} : \Omega^1(V) \rightarrow \mathbb{C}, \omega \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

besitzt. Die Gruppe Λ der Perioden ist eine Untergruppe von $\Omega^1(V)^*$ und die Faktorgruppe $J_V := \Omega^1(V)^*/\Lambda$ ist die *Jacobische Gruppe von V^3* . Das Geschlecht von X entspricht der Dimension des \mathbb{C} -Vektorraums der holomorphen Differentiale⁴. Wählen wir eine Basis $(\omega_1, \dots, \omega_g) \subset \Omega^1(V)$, so zeigt sich die Torusstruktur der Jacobischen Gruppe. Wir identifizieren

$$\Omega^1(V)^* \cong \mathbb{C}^g \quad \text{via} \quad f \mapsto (f(\omega_1), \dots, f(\omega_g)).$$

Die Gruppe der Perioden wird durch diese Identifikation zu

$$\bar{\Lambda} := \left\{ \left(\int_{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{\gamma} \omega_g \right) \mid [\gamma] \in H_1(V, \mathbb{Z}) \right\}.$$

Sie ist ein volles Gitter auf \mathbb{C}^g . Somit bekommen wir die Beschreibung $J_V \cong \mathbb{C}^g/\bar{\Lambda}$. Es sei $P_0 \in V$ ein fixierter Punkt. Die Abbildung

$$A : V \rightarrow J_V, P \mapsto \left(\omega \mapsto \int_{\gamma_P} \omega + \Lambda \right)$$

³Sie entspricht den \mathbb{C} -wertigen Punkten der Jacobischen Varietät J_X , also der Menge $\text{Pic}^0(X_{\mathbb{C}})$. Wir verzichten hier auf die Sichtweise der algebraischen Geometrie und richten uns nach [62, Kap. VIII].

⁴Dies kann als die Definition des Geschlechts angesehen werden.

ist wohldefiniert, wobei γ_P ein beliebiger Weg von P_0 nach P ist. Eine Basiswahl $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ von $\Omega^1(V)$ bewirkt, dass A die Gestalt

$$V \rightarrow \mathbb{C}^g/\overline{\Lambda}, P \mapsto \left(\int_{P_0}^P \omega_1, \dots, \int_{P_0}^P \omega_g \right) + \overline{\Lambda}$$

annimmt, wobei wir über einen beliebigen Weg von P_0 nach P integrieren. Für die rechnerische Bestimmung des Bildes der Abel-Jacobi Abbildung einer ebenen Kurve kann das in `Maple` eingebundene Paket `algcurves` genutzt werden. Es sei $V := \mathcal{V}(f) \subset \mathbb{C}^2$ eine irreduzible ebene algebraische Kurve. Die durch Homogenisierung entstehende ebene projektive Kurve ist eine zusammenhängende und kompakte Riemannsche Fläche. Diese bezeichnen wir ebenfalls mit V , wobei wir uns meist in der affinen Situation bewegen. Ausgehend von Punkten auf V , welche weder Verzweigungspunkte⁵ noch singuläre Punkte sind, konstruieren Deconinck et al. [17] geschlossene Wege, welche gewisse Problempunkte⁶ vermeiden. Dadurch entsteht eine Möglichkeit zur Bestimmung der Monodromiegruppe von V , welche als Input des von Tretkoff et al. [89] vorgestellten Algorithmus dient. Dieser bestimmt eine Homologiebasis $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$ der ersten Homologiegruppe $H_1(V, \mathbb{Z})$. Diese ist *kanonisch*: Nach der Wahl einer Orientierung gelten

$$a_i \circ a_j = 0, \quad b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij},$$

für die Schnittindizes (dabei ist δ_{ij} das Kronecker-Delta). Auch widmen sich Deconinck et al. [17, Abs. 5] der Bestimmung einer Basis holomorpher Differentiale. Deren Elemente haben die Form

$$\omega_k := \frac{P_k(x, y)}{f_y(x, y)} dx$$

und es gilt $\deg P_k \leq d - 3$, wobei d der Grad von f ist. Im Fall einer nicht-singulären Kurve können dafür alle linear unabhängigen Polynome vom Grad $l \leq d - 3$ genommen werden. Im singulären Fall sei auf [17, Abs. 4] verwiesen. Die durch Integration der Basis der holomorphen Differentiale über die kanonische Homologiebasis entstehende Matrix $\Omega := (A \ B)$ der Größe $g \times 2g$ heißt eine *Periodenmatrix von V* . Durch einen Wechsel der Basis holomorpher Differentiale kann erreicht werden, dass $A = I_g$ gilt. Ist $A = I_g$, so heißt die Matrix B eine *Riemann Matrix von V* . Sie ist symmetrisch und ihr

⁵Im Sinne von [17, S. 33].

⁶Für die Definition eines Problempunkts und die numerischen Gründe für die Vermeidung von Wegen durch diese Punkte sei auf [17, Abs. 3] verwiesen.

6 Ausblick und offene Fragen

Imaginärteil ist positiv definit. Die Fortführung dieser Arbeit zur Berechnung des Bildes der Abel-Jacobi Abbildung wurde im Jahr 2008 von Deconinck et al. [16] vorgestellt. Die Schwierigkeit der Berechnung des Bildes der Abel-Jacobi Abbildung liegt in der Lage der unter komplexer Konjugation invarianten Punkte innerhalb von J_V . Da in unserem Fall V eine reelle Kurve ist, können wir die Abbildung A in Verbindung zur reellen Struktur von V setzen, indem wir $P_0 \in V(\mathbb{R})$ reell wählen und die Bilder über \mathbb{R} definierter Divisoren unter A betrachten, welche geraden Grad auf jeder Komponente besitzen. Die Einskomponente der Jacobischen ist dabei ein disjunktes Produkt von 2^{s-1} Kreisen, wobei s die Anzahl der Komponenten von V ist (vgl. Satz von Comessatti [9, Thm. 4.1.7]).

Es sei beispielhaft $f := y^2 - x^3 + 2x - 2$ und $C := \mathcal{V}(f) \subset \mathbb{C}^2$ die durch f definierte affine ebene Kubik. Ihre Homogenisierung besitzt das Geschlecht $g = 1$. Die Menge der \mathbb{R} -wertigen Punkte $C(\mathbb{R})$ besteht aus genau einer Komponente. Folglich gilt $\text{Pic}^0(C)_0 = \text{Pic}^0(C)$. Mithilfe des oben beschriebenen Pakets kann die normalisierte Periodenmatrix

$$\Omega \approx \left(1 \quad \frac{168}{100} + \frac{733}{1000}i \right)$$

der Größe 1×2 numerisch bestimmt werden. Durch die Wahl eines reellen Basispunkts $P \in C(\mathbb{R})$ kann das Bild der Abel-Jacobi Abbildung durch Sampling geschätzt werden.

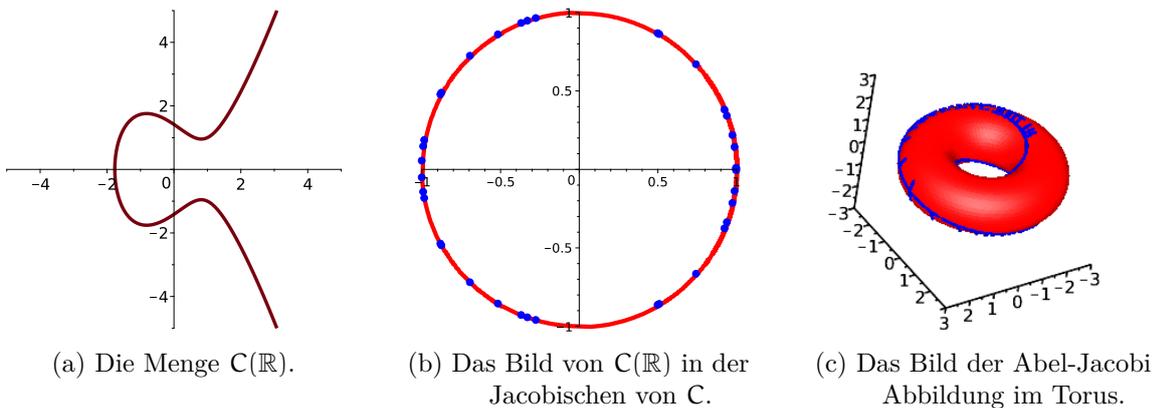


Abbildung 6.2: Das Bild der Abel-Jacobi Abbildung.

In der Abbildung 6.2 (a) sieht man das affine nicht-kompakte Bild der reellen Punkte von C . Daneben ist die Menge $\text{Pic}^0(C)_0 = \text{Pic}^0(C)$ als Kreis dargestellt. Auf diesem Kreis sind die Bilder der reellen Punkte unter der Abel-Jacobi Abbildung eingezeichnet

und man erkennt, dass diese (beinahe) den gesamten Kreis bedecken. Folglich kann rechnerisch plausibilisiert werden, dass $N(C) = 1$ gilt.

Die Schwierigkeit dieses Ansatzes liegt in der passenden Basiswahl der Homologie. In Abbildung 6.2 (c) ist der Sampling-Ansatz einer Kurve höheren Geschlechts abgebildet. Durch die Berechnung der Periodenmatrix entsteht ein Gitter, welches jedoch nicht offenbart, wo sich die Punkte befinden, welche unter der komplexen Konjugation invariant sind (also die Punkte aus $\text{Pic}^0(C)_0$). Folglich bedecken die Sampling-Punkte nur einen kleinen Teil des entstehenden Torus und wir erkennen die dort liegende Kurve C selbst. Es stellt sich die Frage, ob dieses Problem dadurch umgangen werden kann, dass eine symmetrische kanonische Homologiebasis im Sinne von [91, Prop. 2.2] erzeugt wird.

7 Literaturverzeichnis

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, economy edition, 2016. For the 1969 original see [MR0242802].
- [3] A. Bardet. *Diviseurs sur les courbes réelles*. PhD thesis, Université d’Angers, 2013.
- [4] S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy. *Algorithms in real algebraic geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
- [5] I. Biswas, E. Cotterill, and C. Garay López. Real inflection points of real hyperelliptic curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(7):4805–4827, 2019.
- [6] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Real algebraic geometry*, volume 36 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.
- [7] G. E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [8] L. Brusotti. *Sulla piccola variazione di una curva piana algebrica reale*. 1921.
- [9] C. Ciliberto and C. Pedrini. Real abelian varieties and real algebraic curves. In *Lectures in real geometry (Madrid, 1994)*, volume 23 of *De Gruyter Exp. Math.*, pages 167–256. de Gruyter, Berlin, 1996.
- [10] M. Coppins. Totally non-real divisors in linear systems on smooth real curves. *Adv. Geom.*, 8(4):551–555, 2008.
- [11] M. Coppins and J. Huisman. Pencils on real curves. *Math. Nachr.*, 286(8-9):799–816, 2013.
- [12] M. Coppins and G. Martens. Linear pencils on real algebraic curves. *J. Pure Appl. Algebra*, 214(6):841–849, 2010.

- [13] D. A. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, fourth edition, 2015. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.
- [14] O. V. Danilova. The Abel-Jacobi mapping for real hyperelliptic Riemann surfaces. *Mat. Zametki*, 76(6):833–839, 2004.
- [15] O. V. Danilova and V. A. Krasnov. The Abel-Jacobi mapping for a real hyperelliptic Riemann surface of genus 3. *Mat. Zametki*, 75(5):643–651, 2004.
- [16] B. Deconinck and M. S. Patterson. Computing the Abel map. *Phys. D*, 237(24):3214–3232, 2008.
- [17] B. Deconinck and M. van Hoeij. Computing Riemann matrices of algebraic curves. volume 152/153, pages 28–46. 2001. *Advances in nonlinear mathematics and science*.
- [18] J.-C. Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F_5). In *Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 75–83. ACM, New York, 2002.
- [19] J. C. Faugère, P. Gianni, D. Lazard, and T. Mora. Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering. *J. Symbolic Comput.*, 16(4):329–344, 1993.
- [20] J.-C. Faugère. FGb: A Library for Computing Gröbner Bases. In K. Fukuda, J. Hoeven, M. Joswig, and N. Takayama, editors, *Mathematical Software - ICMS 2010*, volume 6327 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 84–87, Berlin, Heidelberg, September 2010. Springer Berlin / Heidelberg.
- [21] G. Fichou, J. Huisman, F. Mangolte, and J.-P. Monnier. Fonctions régulières. *J. Reine Angew. Math.*, 718:103–151, 2016.
- [22] S. D. Galbraith. *Mathematics of public key cryptography*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [23] U. Görtz and T. Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes—With examples and exercises*. Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, [2020] ©2020. Second edition [of 2675155].
- [24] D. R. Grayson and M. E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [25] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [26] B. H. Gross and J. Harris. Real algebraic curves. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2):157–182, 1981.

7 Literaturverzeichnis

- [27] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967.
- [28] A. Grothendieck and J. A. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique. I*, volume 166 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [29] D. A. Gudkov. Ovals of sixth order curves. *Gort kov. Gos. Univ. Učen. Zap. Vyp.*, 87:14–20, 1969.
- [30] D. A. Gudkov. Construction of a new series of M-curves. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 200:1269–1272, 1971.
- [31] A. Harnack. Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. *Math. Ann.*, 10(2):189–198, 1876.
- [32] J. Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. A first course.
- [33] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [34] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [35] C. Hermite. Sur le nombre des racines d’une équation algébrique comprises entre des limites données. *Extrait d’une lettre de Mr. Ch. Hermite de Paris à Mr. Borchardt de Berlin*, 1856.
- [36] D. Hilbert. Ueber die reellen Züge algebraischer Curven. *Math. Ann.*, 38(1):115–138, 1891.
- [37] J. Huisman. *Real abelian varieties with complex multiplication*. PhD thesis, Vrije Universiteit Amsterdam, 1992.
- [38] J. Huisman. On the geometry of algebraic curves having many real components. *Rev. Mat. Complut.*, 14(1):83–92, 2001.
- [39] J. Huisman. Unramified nonspecial real space curves having many real branches and few ovals. *Rev. Mat. Complut.*, 15(2):351–355, 2002.
- [40] J. Huisman. Non-special divisors on real algebraic curves and embeddings into real projective spaces. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 182(1):21–35, 2003.
- [41] J. Huisman. On the enumerative geometry of real algebraic curves having many real branches. *Adv. Geom.*, 3(1):61–71, 2003.

- [42] K. Hulek. *Elementare algebraische Geometrie*. Aufbaukurs Mathematik. [Mathematics Course]. Springer Spektrum, Wiesbaden, second edition, 2012. Grundlegende Begriffe und Techniken mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen. [Basic concepts and techniques with various examples and applications].
- [43] I. Itenberg, G. Mikhalkin, and J. Rau. Rational quintics in the real plane. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(1):131–196, 2018.
- [44] N. Kaihnsa, M. Kummer, D. Plaumann, M. Sayyary Namin, and B. Sturmfels. Sixty-four curves of degree six. *Exp. Math.*, 28(2):132–150, 2019.
- [45] C. Keem. On the variety of special linear systems on an algebraic curve. *Math. Ann.*, 288(2):309–322, 1990.
- [46] S. L. Kleiman. Misconceptions about K_x . *Enseign. Math. (2)*, 25(3-4):203–206 (1980), 1979.
- [47] F. Klein. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. *Math. Ann.*, 10(2):199–209, 1876.
- [48] M. Knebusch and C. Scheiderer. *Einführung in die reelle Algebra*, volume 63 of *Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik [Vieweg Studies: Mathematics Course]*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.
- [49] V. A. Krasnov. Harnack-Thom inequalities for mappings of real algebraic varieties. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 47(2):268–297, 1983.
- [50] V. A. Krasnov. Albanese mapping for GMZ-varieties. *Mat. Zametki*, 35(5):739–747, 1984.
- [51] M. Kummer. Totally real theta characteristics. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 198(6):2141–2150, 2019.
- [52] M. Kummer and D. Manevich. On Huisman’s conjectures about unramified real curves. *Adv. Geom.*, 21(4):545–549, 2021.
- [53] H. P. Le and M. S. E. Din. Solving parametric systems of polynomial equations over the reals through hermite matrices, 2020.
- [54] H. P. Le, D. Manevich, and D. Plaumann. Computing totally real hyperplane sections and linear series on algebraic curves. *Preprint arXiv:2106.13990*, 2021.
- [55] Q. Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [56] F. Mangolte. *Real algebraic varieties*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, [2020]  2020. Translated from the 2017 French original [3727103] by Catriona Maclean.

7 Literaturverzeichnis

- [57] H. H. Martens. On the varieties of special divisors on a curve. *J. Reine Angew. Math.*, 227:111–120, 1967.
- [58] G. Mikhalkin and S. Orevkov. Maximally writhed real algebraic links. *Invent. Math.*, 216(1):125–152, 2019.
- [59] G. Mikhalkin and S. Orevkov. Rigid isotopy of maximally writhed links. *Preprint arXiv:1909.09601*, 2019.
- [60] J. S. Milne. Abelian varieties (v2.0), 2008. Available at www.jmilne.org/math/.
- [61] J. S. Milne. Algebraic geometry (v6.02), 2017. Available at www.jmilne.org/math/.
- [62] R. Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [63] J.-P. Monnier. Divisors on real curves. *Adv. Geom.*, 3(3):339–360, 2003.
- [64] J.-P. Monnier. On real generalized Jacobian varieties. *J. Pure Appl. Algebra*, 203(1-3):252–274, 2005.
- [65] A. Montes. *The Gröbner Cover*. Springer, 2018.
- [66] A. Montes and M. Wibmer. Gröbner bases for polynomial systems with parameters. *J. Symbolic Comput.*, 45(12):1391–1425, 2010.
- [67] D. Mumford. Prym varieties. I. In *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, pages 325–350. 1974.
- [68] S. Y. Orevkov. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves. *Topology*, 38(4):779–810, 1999.
- [69] S. Y. Orevkov. Link theory and new restrictions for M-curves of degree 9. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 34(3):84–87, 2000.
- [70] S. Y. Orevkov. Classification of flexible M-curves of degree 8 up to isotopy. *Geom. Funct. Anal.*, 12(4):723–755, 2002.
- [71] S. Y. Orevkov. A new M-curve of degree 8. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 36(3):90–93, 2002.
- [72] P. Pedersen, M.-F. Roy, and A. Szpirglas. Counting real zeros in the multivariate case. In *Computational algebraic geometry (Nice, 1992)*, volume 109 of *Progr. Math.*, pages 203–224. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [73] I. Petrowsky. On the topology of real plane algebraic curves. *Ann. of Math. (2)*, 39(1):189–209, 1938.

- [74] D. Plaumann, B. Sturmfels, and C. Vinzant. Quartic curves and their bitangents. *J. Symbolic Comput.*, 46(6):712–733, 2011.
- [75] J. Plücker. Solution d’une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes. *J. Reine Angew. Math.*, 12:105–108, 1834.
- [76] A. Popolitov and S. Shakirov. On undulation invariants of plane curves. *Michigan Math. J.*, 64(1):143–153, 2015.
- [77] Q. I. Rahman and G. Schmeisser. *Analytic theory of polynomials*, volume 26 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [78] Z. B. Reichstein. On a property of real plane curves of even degree. *Canad. Math. Bull.*, 62(1):179–182, 2019.
- [79] M. Roggero. Sui sistemi lineari e il gruppo delle classi di divisori di una varietà reale. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 135:349–362 (1984), 1983.
- [80] V. A. Rohlin. Complex topological characteristics of real algebraic curves. *Uspekhi Mat. Nauk*, 33(5(203)):77–89, 237, 1978.
- [81] K. Rohn. Die ebene kurve 6 ordnung mit elf ovalen. *Berichte über die Verhandl.*, 63:540–555, 1911.
- [82] C. Scheiderer. Sums of squares of regular functions on real algebraic varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(3):1039–1069, 2000.
- [83] C. Scheiderer. A Positivstellensatz for projective real varieties. *Manuscripta Math.*, 138(1-2):73–88, 2012.
- [84] K. Schwede and Z. Yang. Divisor package for Macaulay2. *J. Softw. Algebra Geom.*, 8:87–94, 2018.
- [85] J.-P. Serre. Faisceaux Algébriques Cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61:197–278, 1955.
- [86] J.-P. Serre. *Algebraic groups and class fields*, volume 117 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French.
- [87] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.
- [88] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [89] C. L. Tretkoff and M. D. Tretkoff. Combinatorial group theory, Riemann surfaces and differential equations. In *Contributions to group theory*, volume 33 of *Contemp. Math.*, pages 467–519. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

7 Literaturverzeichnis

- [90] M. Ungureanu. Dimension Theory and Degenerations of de Jonquières Divisors. *International Mathematics Research Notices*, 11 2019. rnz267.
- [91] V. Vinnikov. Selfadjoint determinantal representations of real plane curves. *Math. Ann.*, 296(3):453–479, 1993.
- [92] O. J. Viro. Curves of degree 7, curves of degree 8 and the Ragsdale conjecture. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 254(6):1306–1310, 1980.
- [93] O. Y. Viro. Planar real curves of degree 7 and 8: new prohibitions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 47(5):1135–1150, 1983.
- [94] O. Y. Viro. Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7. In *Topology (Leningrad, 1982)*, volume 1060 of *Lecture Notes in Math.*, pages 187–200. Springer, Berlin, 1984.
- [95] O. Y. Viro. Real plane algebraic curves: constructions with controlled topology. *Algebra i Analiz*, 1(5):1–73, 1989.
- [96] V. Weispfenning. Comprehensive Gröbner bases. *J. Symbolic Comput.*, 14(1):1–29, 1992.
- [97] V. Weispfenning. Canonical comprehensive Gröbner bases. volume 36, pages 669–683. 2003. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC'2002) (Lille).
- [98] M. Wibmer. Gröbner bases for families of affine or projective schemes. *J. Symbolic Comput.*, 42(8):803–834, 2007.
- [99] G. Wilson. Hilbert's sixteenth problem. *Topology*, 17(1):53–73, 1978.
- [100] Zeuthen. Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. (avec deux planches lithographiées). *Mathematische Annalen*, 7:410–432, 1874.