

Entwicklung eines Verfahrens zur Erstellung eines lastoptimierten 3D-gedruckten Logistikladungsträgers

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr.-Ing.

von der Fakultät Maschinenbau

der Technischen Universität Dortmund

genehmigte Dissertation

Jan Knipschild

aus

Dortmund

Tag der mündlichen Prüfung: 31.03.2023

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Bernd Künne
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Jens Bechthold

Dortmund, 2023

Vorwort

Die vorliegende Dissertation ist im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Maschinenelemente der Technischen Universität Dortmund entstanden. Einige Inhalte dieser Arbeit sind im Forschungsprojekt „LaOnDe - Ladungsträger on Demand“ (Förderkennzeichen EFRE-0800854) erstellt worden und wurden finanziell von der Europäischen Union gefördert.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich in dieser Zeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd Künne, dem Leiter des Fachgebiets Maschinenelemente für die hervorragende fachliche und persönliche Beratung. Er unterstützte und förderte mich seit meiner Studienzeit und über die darauffolgenden Jahre als wissenschaftlicher Mitarbeiter und hat so zu meiner fachlichen und persönlichen Entwicklung entscheidend beigetragen. Des Weiteren danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Jens Bechthold für die Übernahme des Zweitgutachtens. Zudem spreche ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Inform. Andreas Zabel und Herrn Prof. Dr. Tobias Haertel meinen persönlichen Dank für die faire Behandlung im Rahmen des gesamten Prüfungsverfahrens aus.

Zudem möchte ich allen am Fachgebiet Maschinenelemente tätigen Personen für die angenehme und produktive Zusammenarbeit danken. Mein Dank gilt insbesondere Dr. Jens Bucher und Dr. Dennis Stracke für die Unterstützung und die hilfreichen fachlichen Diskussionen.

Schließlich danke ich meinen Eltern Petra und Matthias, die mir meine Ausbildung ermöglicht und mich in den vergangenen Jahren immer unterstützt und motiviert haben. Zusammen mit meinem Bruder Lars und meinen weiteren Freunden haben sie mir den Rückhalt gegeben, der nicht im geringen Maß Anteil am Erfolg dieser Arbeit hatte.

Dortmund, Mai 2023

Jan Knipschild

Kurzfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, das Ladungsträger für die Logistik automatisiert erzeugt und herstellt. Es wird auf Basis der Ladungsgutgeometrie ein kastenförmiger Ladungsträger generiert, der nachfolgend bezüglich der Topologie optimiert wird, um den Materialeinsatz und die Fertigungszeit zu reduzieren. Für die Fertigung der Ladungsträger wird ein neuartiges additives Fertigungssystem verwendet, das direkt Kunststoffgranulat verarbeitet und aufgrund seines Aufbaus kostengünstig in der Anschaffung ist. Trotzdem kann die Kunststoffschmelze für die Fertigung eines Ladungsträgers ausreichend genau dosiert werden. Die Topologieoptimierung erfordert die Kenntnis über die Belastung des Ladungsträgers während des Transports, welche mit einer Kontaktsimulation ermittelt wird. Jedoch sind für die Simulation lange Rechenzeiten erforderlich, sodass eine alternative Heuristik entwickelt und der Kontaktsimulation gegenübergestellt wird. Während der Topologieoptimierung wird eine Überhangnebenbedingung verwendet, die eine Fertigung des Ladungsträgers durch einen 3D-Drucker ohne zusätzliche Stützstrukturen erlaubt. Überhangnebenbedingungen sind in der Literatur bereits bekannt, jedoch ist es gelungen, den erforderlichen Rechenaufwand für die Zusatzbedingung deutlich zu reduzieren. Zum Abschluss werden zwei Demonstratoren generiert und hergestellt.

Abstract

In this thesis, a process is developed that automatically generates and manufactures cargo carriers for logistics. A box-shaped cargo carrier is generated on the basis of the cargo geometry, which is subsequently optimized in terms of topology in order to reduce material usage and production time. A new type of additive manufacturing system is used for the production of the cargo carriers, which directly processes plastic granules and is inexpensive to purchase due to its design. Nevertheless, the plastic melt can be dosed sufficiently precisely for the production of a cargo carrier. Topology optimization requires knowledge of the load on the cargo carrier during transport, which is determined with a contact simulation. However, long computing times are required for the simulation, so that an alternative heuristic is developed and compared to the contact simulation. During the topology optimization, an overhang constraint is used that allows the cargo carrier to be manufactured by a 3D printer without additional support structures. Overhang constraints are already known in the literature, but it was possible to significantly reduce the required computational effort for the additional constraint. Finally, two demonstrators are generated and manufactured.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Stand der Technik	3
2.1. Ladungsträger	3
2.2. Additive Fertigung mit Kunststoffgranulat	6
2.3. Geometriemodellierung	9
2.3.1. Geometrische Modelle	9
2.3.2. Vergrößerung/Verkleinerung von Oberflächenmodellen	12
2.3.3. Boolesche Operationen mit Oberflächenmodellen	15
2.4. Topologieoptimierung in der additiven Fertigung	15
3. Zielsetzung und Vorgehen	27
4. Schmelzedosierung im großvolumigen 3D-Druck	31
4.1. Schmelzedosierung ohne Zahnradpumpe	32
4.2. Schmelzedosierung mit Zahnradpumpe	35
5. Algorithmus zur Generierung eines Ladungsträgers	41
5.1. Laden der Geometrie	42
5.2. Versetzen der Oberflächen	43
5.3. Bestimmung der Schnittpunkte	45
5.4. Triangulierung der Kontaktfläche	48
5.5. Resultate und Diskussion des Algorithmus	50
6. Fertigung eines unoptimierten Ladungsträgers	56
7. Topologieoptimierung für den 3D-Druck	59
7.1. Implementierung der Topologieoptimierung in MATLAB	59
7.2. Vergleich der implementierten Topologieoptimierung und Ansys	64
7.3. Untersuchung zu Überhangnebenbedingungen in der Topologieoptimierung für die additive Fertigung	68
7.3.1. Definition des Stützbereichs durch Nachbarschaftsbeziehungen	71

7.3.2. Parameterstudie zur Anzahl an Nachbarschaftsebenen	72
7.3.3. Vergleich mit Stützbereich nach <i>Thore et al.</i>	79
7.3.4. Zufallsvernetzung	84
7.3.5. Untersuchung eines optimierten MBB-Balkens im \mathbb{R}^3	88
8. Ermittlung der Ladungsträgerbelastung	94
8.1. Implementierung der Kontaktsimulation	96
8.2. Heuristik zur Ermittlung der Belastung	104
9. Lastoptimierung der Ladungsträger	108
10. Wirtschaftliche Bedeutung	117
11. Zusammenfassung und Ausblick	119
Abbildungsverzeichnis	123
Tabellenverzeichnis	126
Abkürzungsverzeichnis	127
Formelzeichenverzeichnis	129
Literaturverzeichnis	135
A. Massenstrommessungen zur Kennlinienbestimmung des Schneckenextruders	151
B. Massenstrommessungen zur Kennlinienbestimmung der Zahnradpumpe . .	154
C. MATLAB-Skripte	155

1. Einleitung

Die Additive Fertigung (*engl.*: Additive Manufacturing) (AM) macht kontinuierlich Fortschritte und eröffnet so neue Anwendungsgebiete. Noch vor einigen Jahren war der primäre Einsatzzweck das Rapid Prototyping (RP), also die Herstellung von Anschauungsobjekten, zur Evaluierung von Konstruktionen und Designs. Im Jahr 2012 schrieben *Campbell et al.* in ihrem Artikel *Rapid Prototyping comes of age* [CBG12], dass ein Übergang vom Prototyping zum Manufacturing stattgefunden hat. Durch AM werden mittlerweile fertige Bauteile hergestellt, zurückzuführen auf Entwicklungen in der Druckgeschwindigkeit, Fertigungsgenauigkeit, den Eigenschaften des verwendeten Materials und den sinkenden Maschinenkosten [CBG12]. Dies zeigt sich auch in der Bezeichnung des RP, welcher weitestgehend ersetzt wurde durch die Begriffe AM und 3D-Druck. Bislang sind Kernanwendungsgebiete der Automobilbau, die Luftfahrt und die Medizin.

Ein mögliches neues Anwendungsgebiet für AM ist die Logistik in der Fertigung von Ladungsträgern. Bislang werden Ladungsträger für hochwertige, große und schwere Ladungsgüter individuell aus Holz durch Schreiner hergestellt. Dies ist ein Prozess, der in einer Industrie, die fortlaufend automatisiert wird, hohe Personalkosten verursacht. Für eine Automatisierung der Ladungsträgerherstellung ist AM bestens geeignet. Im Gegensatz zu subtraktiven Fertigung wird fast kein Material verschwendet. Es gibt nur sehr wenig Fertigungsrestriktionen, sodass fast beliebige Formen hergestellt werden können, da kein Bohrfutter o.ä. existiert, welches kollidieren könnte. Es muss nur berücksichtigt werden, dass unterhalb von Material Strukturen vorhanden sein müssen, die dieses abstützen, bis dieses sich verfestigt hat [JXS18; GG16]. Diese können Bestandteil des Ladungsträgers sein oder aber auch Zusatzstrukturen, die nachträglich entfernt werden [GRS15]. Beim AM handelt es sich um einen Prozess, der ohne verschiedene Zwischenschritte wie etwa die Erstellung von Fertigungszeichnungen auskommt. Eine am Computer modellierte Geometrie kann direkt gefertigt werden. Nach dem eigentlichen Fertigungsprozess kann noch ein Nachbearbeitungsprozess angeschlossen werden [GRS15]. Ein Ladungsträger ist jedoch größer als die allgemein übliche Bauteilgröße im AM. Für einen praktikablen Einsatz eines großvolumigen AM-Fertigungssystems muss dieses auch schneller Material verarbeiten. Bei Verwendung von einem Kunststofffilament als Ausgangswerkstoff ist die Druckgeschwin-

digkeit verfahrensbedingt begrenzt [Go+17]. Die Verarbeitung von Kunststoffgranulat hat diese Restriktionen nicht und verursacht um ein Vielfaches geringere Materialkosten. Jedoch haben Anlagen, die Granulat verarbeiten, im Vergleich zu konventionellen Anlagen größere Dosierungsprobleme [Che+19].

Als Fertigungsmaterial bieten sich Polylactide (PLA) an, ein nicht petrochemischer Kunststoff, der biologisch abbaubar ist [GRH07]. PLA lässt sich recyceln, wobei sich nach einem Zyklus die mechanische Festigkeit im Vergleich zu nicht recycelten Material nur gering verringert [Woe+18a; Cru+17]. Bei mehr als einem Zyklus sinkt die Festigkeit jedoch kontinuierlich mit jedem weiteren Zyklus [Cru+17].

Für eine Vollautomatisierung bei immer größerer Produktindividualisierung muss auch der Konstruktionsprozess des Ladungsträgers durch einen Algorithmus ersetzt werden. Hierfür ist eine Beschreibung des Ladungsguts erforderlich, die durch ein Computerprogramm verarbeitet werden kann. Ein einfacher Ladungsträger kann ein Quader mit einer Vertiefung in der Mitte sein, in die das Ladungsgut eingelegt werden kann. Das Resultat ist ein Ladungsträger, der viel Material verschwendet, schwer ist und lange Fertigungszeiten benötigt. In vielen Bereichen ist ein solcher Ladungsträger überdimensioniert. Zur Effizienzsteigerung muss Material bedarfsgerecht eingesetzt werden. Ein geeignetes Verfahren ist die Topologieoptimierung (TO), ein numerisches Verfahren, das einen verringerten Materialanteil so anordnet, dass ein Optimierungsziel minimiert wird. Ein weit verbreitetes Optimierungsziel in der Mechanik ist die Nachgiebigkeit, sodass die Steifigkeit maximiert wird. Die Eigenschaften der resultierenden Geometrie sind nur für den betrachteten Belastungszustand optimal. Aus den wirkenden Kräften während des Ladungstransports müssen die Kräfte bestimmt werden, die das Ladungsgut auf den Ladungsträger ausübt und als Optimierungsziel verwendet werden.

Die TO im Kontext des AM hat ein großes Potenzial, da auch komplizierte optimierte Geometrien aufgrund der wenigen Fertigungsrestriktion herstellbar sind. In der Forschung wird daher diese Thematik intensiv behandelt. Aktuelle Schwerpunkte sind die Berücksichtigung der Fertigungsrestriktionen, der Materialanisotropie und des Bauteilaufbaus aus einer massiven Bauteiloberfläche und einer porösen Füllstruktur.

2. Stand der Technik

Im folgenden Kapitel wird der Stand der Technik bezüglich der für diese Arbeit relevanten Inhalte behandelt. Diese umfassen die Verwendung von Ladungsträgern in der Logistik und die an diese Ladungsträger gestellten Anforderungen. Weiterhin werden die Grundlagen der Beschreibung und Bearbeitung von Geometriedaten mit Fokus auf Oberflächenmodelle dargestellt. Abschließend werden Verfahren zur Topologieoptimierung mit Zusatzbedingungen für die additive Fertigung beschrieben.

2.1. Ladungsträger

Für den Versand von Waren und Gütern müssen diese verpackt werden. Eine Verpackung besteht nach DIN 55405 aus dem Packstoff, dem Packmittel und dem Packhilfsmittel. In Abhängigkeit der Eigenschaften des zu verpackenden Packguts muss eine Verpackung unterschiedliche Funktionen und Anforderungen erfüllen. Das Packmittel ist der Hauptbestandteil der Verpackung und dient dem Umschließen oder Zusammenfassen des Packguts und dessen Schutz. Darüber hinaus erfüllt das Packmittel eine Kommunikationsfunktion. Dabei werden unterschiedliche Packstoffe wie u.a. Kunststoffe, Glas, Metall, Holz und andere Holzwerkstoffe, wie beispielsweise Pappe, verwendet. Zusätzlich können Packhilfsmittel erforderlich sein, die ergänzende Funktionen erfüllen, wie z. B. Verschließen, Sichern, Schützen, Handhaben oder Entnehmen. Ein Beispiel ist ein Umreifungsband aus Stahl, Kunststoff oder verstärktem Papier als Verschleißhilfsmittel. [Zsi18; DIN14]

Für eine effiziente Logistik ist die Verwendung standardisierter Ladeeinheiten zwingend erforderlich [VDI13]. Nach Angaben der European Pallet Association (EPAL) ist die Palette EPAL1 (*ugs.* Europalette) die weltweit meist verwendete Tauschpalette mit geschätzten 450-500 Mio. Stück im Umlauf [Eur21]. Anhand der jährlichen Produktions- und Reparaturzahlen der EPAL (vgl. **Abbildung 2.1**) zeigt sich ein kontinuierliches Wachstum seit dem Jahr 2013, sodass von einer steigenden Bedeutung der EPAL1 für die Logistik ausgegangen werden kann.

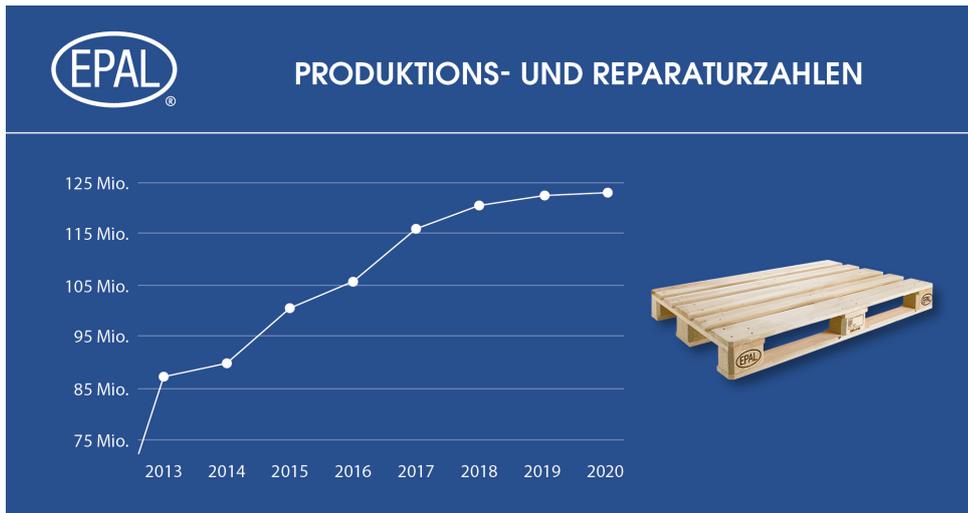


Abbildung 2.1.: Diagramm der Produktions- und Reparaturzahlen von EPAL-Paletten [Eng21]

Während des Versands werden Ladungsgüter durch Verpackungen geschützt. Dabei müssen Schutzverpackungen fünf Funktionen erfüllen: Umschließen, Beschützen, Zuteilen, Komfort und Kommunikation [LS99]. Um das verpackte Ladungsgut und andere Ladungsgüter zu schützen, muss die Verpackung die Güter trennen. Ebenfalls müssen unerwünschte Bewegungen des Ladungsguts während des Transports verhindert werden. Durch die Verpackung soll das Ladungsgut in einer Position gehalten werden, die einen maximalen Schutz verspricht und die das Ladungsgutgewicht möglichst gleichmäßig verteilt. Die Schutzfunktion kombiniert den Schutz vor äußeren Vibrationen und Stößen. Im Falle von stapelbaren Verpackungen muss die Verpackung so ausgelegt sein, dass auch diese Gewichtskräfte aufgenommen werden können. Weiterhin darf von der Verpackung selbst keine Gefahr ausgehen. Damit eine Ladung zweifelsfrei identifiziert werden kann, muss eine Verpackung genügend Oberfläche bieten, um Etiketten anbringen zu können. Eine weitere Anforderung ist, dass eine Sabotage verhindert wird oder zumindest offensichtlich ist. [FRK11]

Ladungsträger sind vielseitigen Belastungen ausgesetzt. Durch die Gewichtskraft des Ladungsguts und die Zurrkräfte wird der Ladungsträger statisch belastet. Zusätzlich wirken dynamische Kräfte durch die Beschleunigung des Ladungsträgers, die beim Transport auf der Straße oder mit Flurförderfahrzeugen auftreten. [VDI13] Die Standards der Ladungssicherung für den Straßentransport werden in den Richtlinien der Reihe VDI 2700 [VDI04] definiert. Die Sonderfälle Schienen-, See und Lufttransport werden im Blatt 7 behandelt. Für die Berechnung der dynamisch wirkenden Trägheitskräfte werden zu berücksichtigende Beschleunigungen definiert. Diese sind für den Straßentransport in **Abbildung 2.2** dargestellt.

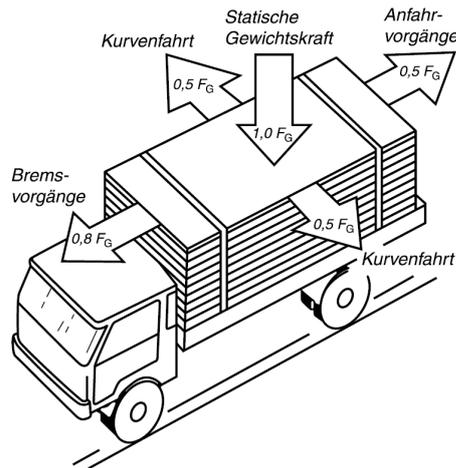


Abbildung 2.2.: Zu berücksichtigende Massenkräfte beim Straßentransport [VDI04]

Neben mechanischen Belastungen müssen klimatische Belastungen durch Temperatur und Feuchtigkeit sowie chemische und biotische Belastungen berücksichtigt werden. Durch Sonneneinstrahlung können Oberflächentemperaturen von $70\text{ }^\circ\text{C}$, unter Umständen von bis zu $80\text{ }^\circ\text{C}$, auftreten. In einem Container, der in einem Hafen gelagert wird, werden Temperaturverläufe mit einem absoluten Maximum von $58\text{ }^\circ\text{C}$ gemessen. Bei einer Lagerung in Deutschland muss mit Temperaturschwankungen zwischen $9\text{ }^\circ\text{C}$ und $50\text{ }^\circ\text{C}$ gerechnet werden. [Esc07] Chemische Belastungen können z. B. durch Abgase oder Verschmutzungen auftreten und die Oberflächen angreifen. Zusätzliche Belastungen können aus dem Befall von Insekten, Nagetieren oder Schimmelpilzen resultieren. [VDI13].

Bei der Verpackung von Maschinenteilen werden häufig ladungsgutspezifische Holzkonstruktionen verwendet, wobei die Konstruktion zum größten Teil auf Erfahrungswerten basiert [Esc07]. Eine große Problematik von Holz als Verpackungsmaterial ist die Feuchtigkeit. Holz ist hygroskopisch und mit steigender Feuchtigkeit sinkt die Biege- und Druckfestigkeit des Materials sowie der Widerstand gegen das Ausziehen von Klammern, Nägeln und Schrauben [Kaß20; Esc07]. Feuchte Holzverpackungen können zusätzlich Schäden am Ladungsgut durch Korrosion oder Nässe verursachen [Esc07]. Unbehandelte Holzverpackungen sind problematisch, da sie Schädlinge beinhalten können. Durch den Welthandel können daher invasive Insekten oder Pilze eingeschleppt werden. [SM+08] Durch die *Guidelines for Regulating Wood Packaging Material in International Trade* der *International Plant Protection Convention* wird daher in den *International Standards for Phytosanitary Measures* (ISPM 15) für Vollholzverpackungen mit Materialstärken $>6\text{ mm}$ festgelegt, dass diese entweder wärmebehandelt, chemisch druckimprägniert oder mit Methylbromid begast werden müssen [Esc07].

2.2. Additive Fertigung mit Kunststoffgranulat

Die Additive Fertigung (*engl.*: Additive Manufacturing) (AM) bezeichnet die Herstellung von Bauteilen durch einen schichtweisen Aufbau von Material [GRS15]. Bei der Verwendung von Polymeren als Werkstoff wird eine Vielzahl unterschiedlicher Bezeichnungen verwendet, u.a. 3D-Druck, Fused Deposition Modelling (FDM), Fused Filament Fabrication (FFF) und Rapid Prototyping (RP) [GRS15; NSA14; Go+17].

Üblicherweise wird der Kunststoff dem Prozess in Form von vorverarbeitetem Filament zugeführt, welches in einer Heizzone aufgeschmolzen und durch den noch nicht geschmolzenen Teil des Filaments durch eine Düse gepresst wird [NSA14]. Die Düse wird durch ein Positioniersystem in der xy -Ebene verfahren und erzeugt so schichtweise die Bauteilkonturen. Meist wird eine Kombination aus drei Linearachsen verwendet, die durch Schrittmotoren über Riemen oder Spindeln angetrieben werden [Go+17].

Aus verschiedenen Gründen werden AM-Fertigungsanlagen entwickelt, die anstelle von einem Filament Kunststoffgranulate verwenden, wie sie auch bei anderen Kunststoffverarbeitungsprozessen anzutreffen sind [Vol+15]. Aufgrund des eingesparten Zwischenprozesses sind Granulate als Werkstoff kostengünstiger als Filamente [LD15; Vol+15; MPT09; LD15] und das Material wird einem thermischen Zyklus weniger ausgesetzt, wodurch Energie gespart und das Material weniger belastet wird [Woe+18b]. Weiterhin ermöglicht die Verwendung von Granulat eine größere Materialvielfalt [BSG05]. So wird es möglich, Verbundmaterialien mit hohen Anteilen an Zusatzmaterialien, z. B. Karbonfasern, in einem additiven Fertigungsprozess zu verarbeiten. Ein Filament mit großen Faseranteilen ist nicht möglich, da sich dieses nicht aufspulen lässt [Hol+13]. Ein Versagensfall für den konventionellen AM-Prozess ist das Ausknicken des Filaments zwischen dem Vorschubsantrieb und der Eintrittsöffnung des Schafts, an dessen Ende sich die Heizzone und die Düse befinden [Ven+00; NSA14; Go+17]. Dies beschränkt die Verarbeitung von Elastomeren in Filamentform auf Härten jenseits von 70 Shore A [Elk+97]. Im Granulat-AM-Prozess können auch weichere Elastomere mit Härten bis hin zu 5 Shore A [Saa+15] verarbeitet werden [KS19a].

Die Verarbeitung von Granulat bringt auch Nachteile mit sich. Es werden zwei Arten von Granulatextrudern im AM eingesetzt: Kolben- und Schneckenextruder. Beim Kolbenextruder (siehe **Abbildung 2.3**) wird Granulat in einen Zylinder gefüllt, der an seinem Ende beheizt wird und sich zu einer Düse verjüngt. Durch den Vorschub des Kolbens wird Material extrudiert. Bei dieser Bauart besteht die Problematik darin, dass zwischen den ungeschmolzenen Granulatpartikeln Hohlräume existieren, sodass das extrudierte Volu-

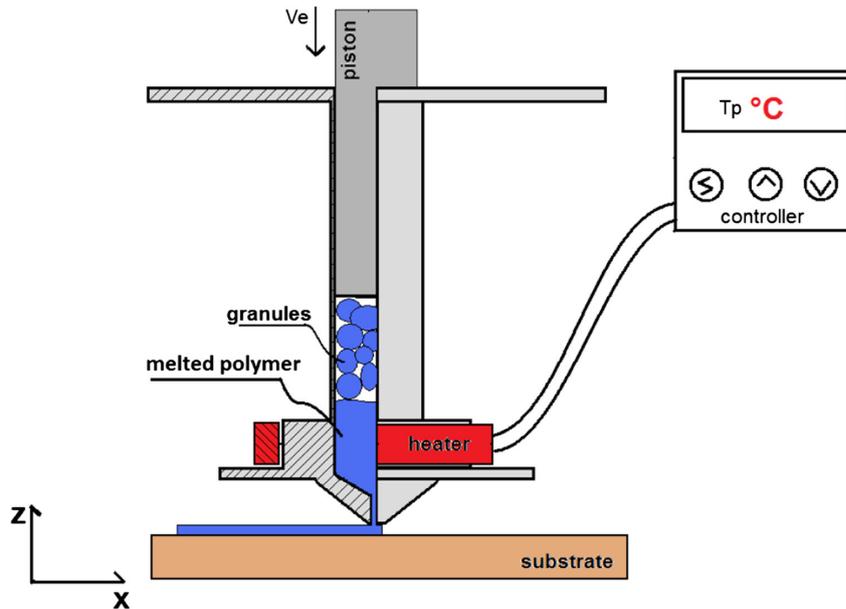


Abbildung 2.3.: Prinzipieller Aufbau eines Kolbenextruders [Vol+15]

men nicht dem vom Kolben verdrängten Volumen entspricht [Vol+15]. Durch die lange Verweilzeit des Kunststoffes im Extruder bei hoher Temperatur besteht die Gefahr der Materialschädigung. Bei Polypropylen (PP), welches nach einer Verweilzeit von mehr als 30 min bei 180 °C bzw. mehr als 10 min bei 200 °C extrudiert wird und mit einem Fourier-Transformations-Infrarotspektrometer untersucht wird, lassen sich Zersetzungsprodukte nachweisen, die jedoch keinen signifikanten Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften haben [Vol+15].

Die verbreitetere Extruderbauform ist der Schneckenextruder, der auch in verschiedenen anderen Fertigungsprozessen eingesetzt wird, wie u.a. beim Spritzgießen, Drahtbeschichten, Schlauchfolienblasen und Blasformen [SC95]. Ein Schneckenextruder besteht aus einem beheizten Rohr, in dem sich eine Schnecke mit unterschiedlichen Zonen befindet. Das lose Granulat wird durch den vorderen Teil der Schnecke in die Schmelzzone befördert, wo das Material verdichtet und geschmolzen wird. Im hinteren Teil der Schnecke, dem Dosierabschnitt, wird der flüssige Kunststoff aus dem Extruder herausgepumpt. [CS13]

Im AM werden Einschneckenextruder in unterschiedlichen Größen eingesetzt. Extruder für Maschinen in Desktopgröße haben Schneckendimensionen von ca. 18 × 125 mm [BSG05] und 15,5 × 180 mm [KS19a]. Die größten Schneckenextruder werden in der großvolumigen Additiven Fertigung (*engl.*: Big Area Additive Manufacturing) (BAAM) eingesetzt, wobei eine Schnecke etwa 610 mm lang ist [Sud+16].

Auch Schneckenextruder haben das Problem, dass mit steigender Verweilzeit des Materials im Extruder sich dieses zersetzt [LD15]. Im Gegensatz zum üblichen Einsatzfeld des

Schneckenextruders wird dieser im AM nicht in einem stationären Zustand betrieben, sondern muss häufig starten, stoppen und z. B. bei Kurvenfahrten den Volumenstrom reduzieren [Che+19]. Bei einem Schneckenextruder findet die Materialförderung nicht durch Verdrängung eines Volumens statt, sodass der Volumenstrom durch eine Wechselwirkung zwischen dem Kunststoff und der Schnecke zustande kommt [Che+19]. Die Schnecke wird von dem Kunststoff umschlossen und durch diese gelagert [CS13], wodurch, getrieben durch den Druckgradienten, ein Rückfluss entsteht [KS19a].

Die Vorteile der Granulatdrucker kommen insbesondere im BAAM zum Tragen. Zum einen fallen die geringeren Materialkosten größer ins Gewicht und zum anderen werden höhere Bauraten ermöglicht. Der begrenzende Faktor bei Filamentdruckern ist die Erwärmung des Materials bis in die Nähe der Schmelztemperatur oberhalb der Glasübergangstemperatur. Wird die Temperatur nicht über den gesamten Filamentdurchmesser erreicht, erhöht sich die Extrusionskraft, eventuell bis hin zum Versagen des Filamentvorschubs. Bei einem Filamentextruder muss das Aufschmelzen in einer kleinen Zone erfolgen, da das noch feste Filament als Kolben zur Extrusion erforderlich ist. Die Wärmeübertragung erfolgt durch Wärmeleitung über die Wandung des Schaftes. Kunststoffe sind allgemein schlechte Wärmeleiter, sodass die Zeit bis zur vollständigen Durchwärmung die Extrusionsgeschwindigkeit eingeschränkt. [Go+17] Granulatextruder sind nicht auf festes Material für einen Vorschub angewiesen, sodass für das Schmelzen mehr Zeit zur Verfügung steht.

Ein Sonderfall des AM ist BAAM, da dort die Dosierfehler verstärkt zutage treten [Che+19]. So lässt sich der Materialfluss nicht schlagartig stoppen, sondern läuft nach. *Love et al.* [LD15] führen daher vor Sprüngen ohne Materialfluss eine spiralförmige Bewegung des Druckkopfs durch, um überflüssiges Material einzuebnen. Nicht nur der vollständige Stillstand ist ein Problem, sondern auch die dynamische Anpassung beim Ablegen einer Bahn. Vor Kurven muss der Massenstrom verringert und nach der Kurve wieder erhöht werden. Wird ein großer Schneckenextruder gesteuert wie ein konventioneller Filamentvorschub, kommt es zu Fehldosierungen. *Chesser et al.* [Che+19] haben zur Verbesserung ein empirisches Modell des Extruders erstellt und ein Bypassventil eingebaut, das überflüssiges Material ableitet.

Ein größerer Düsendurchmesser ermöglicht einen schnelleren Materialfluss, jedoch Vergrößern sich die dem AM immanenten Abweichungen [GRS15; Che+19]. Es ist daher sinnvoll, große Düsendurchmesser nur dort anzuwenden, wo geringe Geometriegenauigkeiten akzeptabel sind. Eine Möglichkeit, die Einsatzgebiete großer Düsendurchmesser zu erhöhen, ist die Verwendung unterschiedlicher Düsendurchmesser während der Fertigung eines einzelnen Bauteils. Dies macht einen schnellen Wechsel der Düse erforderlich. *Chesser et al.* haben dazu eine Düse entwickelt, die durch das Verschieben eines Kegels im Inneren zwei

unterschiedlich wirkende Durchmesser einstellen kann [Che+19]. In ihrem speziellen Anwendungsfall konnten so Formen für die Herstellung von Automobilkarosserieteilen hergestellt werden, wobei die eigentliche Form aufgrund der höheren Genauigkeitsanforderungen mit einer kleineren Düse hergestellt wird als die anderen äußeren Konturen.

Die Schneckenextruder im AM werden zumeist direkt am Druckkopf befestigt [RRG07; Woe+18b; Saa+15; Lov+15; Pos+19; Che+19; MCM18]. Eine andere Anordnung wurde durch *Khondoker* und *Sameoto* [KS19a] entwickelt. Sie haben ihren Schneckenextruder von dem Positioniersystem der Düse durch die Verwendung eines Heizschlauchs entkoppelt. Als Extruder wird ein Kit der Fa. *Filastruder* mit einer Schnecke mit einem Durchmesser von 15,5 mm und einer Länge von 180 mm verwendet. Der in **Abbildung 2.4** gezeigte Aufbau besteht aus einem Desktop-AM-System, dem Granulatorextruder und einem eigens angefertigten 0,61 m langen Heizschlauch. Der Heizschlauch besteht aus einer Seele aus Polytetrafluorethylen (PTFE) mit einem Innendurchmesser von 3,2 mm. Um die Seele befindet sich ein Drahtschlauch sowie eine Umwicklung mit einem Heizdraht mit einer Leistung von 78 W. Zur Isolation des Schlauchs ist dieser mit einer 3 mm dicken Faserisolation umwickelt. Mit diesem AM-System können Kunststoffgranulate mit einer Partikelgröße von weniger als 5 mm verarbeitet werden. In ihrer Veröffentlichung werden erfolgreich Bauteile aus flexiblen Styrol-Ethylen-Butylen-Styrol (SEBS) mit einer Härte von 47 Shore A und einem unflexiblen Formgedächtnispolymer mit einer Härte von 77 Shore D hergestellt. Durch die Verwendung optimierter Prozessparameter bzw. einer nachträglichen Wärmebehandlung können aus SEBS luftdichte Bauteile hergestellt werden. Die Autoren haben einen pneumatischen Soft-Aktuator als Demonstrator entwickelt und diesen mit dem vorgestellten AM-System gefertigt und anschließend getestet.

2.3. Geometriemodellierung

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit relevanten Grundlagen und Methoden der computergestützten Geometriegenerierung vorgestellt.

2.3.1. Geometrische Modelle

Für die Verarbeitung von Geometrien werden dreidimensionale Modelle der Bauteile benötigt. Es existieren unterschiedliche Formate, um Geometrien digital zu beschreiben. Volumenkörper können durch ein dreidimensionales Gitter beschrieben werden, in dem

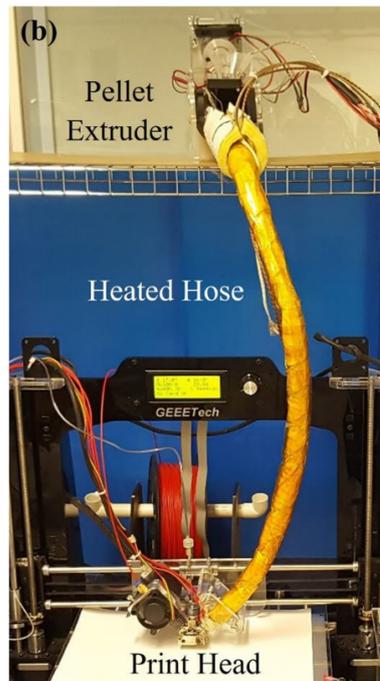


Abbildung 2.4.: Desktop-AM-System mit einem durch einen Heizschlauch entkoppelten Schneckenextruder [KS19a]

abgespeichert wird, welche Zellen bzw. Würfel mit Material gefüllt sind. Diese Würfel werden *Voxel* genannt. Allgemeiner können Körper durch sich nicht überschneidende Zellen beschrieben werden, wobei an diese Zellen keine Anforderungen der gleichmäßigen Anordnung oder Gleichförmigkeit gestellt werden. Eine weitere Geometriedarstellung ist die Constructive Solid Geometry (CSG), die aus einfachen Bausteinen durch Boolesche Operatoren der Mengenlehre komplexe Bauteile modelliert. Für Geometrien mit einer translatorischen, rotatorischen oder anderen Symmetrie ist ein Sweep-Modell nützlich, das durch die Verschiebung einer zweidimensionalen Geometrie entlang einer Kurve im dreidimensionalen Raum den Körper durch das überstrichene Volumen definiert. Volumenkörper können auch implizit durch die Beschreibung ihrer Außenflächen beschrieben werden. Oberflächen können durch die Verkettung von zweidimensionalen Polygonen repräsentiert werden. Die Datenstruktur zur Beschreibung einer Oberfläche besteht aus einer Tabelle mit den Koordinaten der Polygoneckpunkte, einer Tabelle, die Kanten durch die Referenzierung zweier Eckpunkte definiert, sowie einer Tabelle, die Polygone durch die Kombination von Kanten beschreibt. [Req80; HB97] Diese Art der Geometriebeschreibung mit Oberflächen als dreidimensionale Dreiecksvernetzungen ist das in der Computergrafik am weitesten verbreitete Modell [Hug14].

In dieser Arbeit werden an verschiedenen Stellen Oberflächenrepräsentationen von Geometrien benutzt. Im AM hat sich die Verwendung des STL-Dateiformats [Le +88] als Standard etabliert. So können alle gängigen Slicer, die zur Generierung der Steuerbefehle

für AM-Maschinen benutzt werden, STL-Dateien verarbeiten. Oberflächen werden in diesem Dateiformat durch planare Dreiecke approximiert. Ein Dreieck wird bestimmt durch seine drei Eckpunkte und einen nach außen weisenden Normalenvektor, wobei die Eckpunkte eines Dreiecks in der Liste entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Eine STL-Datei enthält keine topologischen Informationen wie Verbindungen oder Abstandsinformationen und die Facetten befinden sich in keiner geordneten Reihenfolge [Guo+07]. Das Dateiformat enthält redundante Informationen, da die Koordinaten der Eckpunkte in jeder Facettendatenstruktur enthalten sind. [KJM97]

Um Geometriedaten im STL-Format zu erhalten, gibt es im Allgemeinen zwei Möglichkeiten. Zum einen verfügen die meisten kommerziellen Computer Aided Design (CAD)-Systeme, welche mit dreidimensionalen Modellen arbeiten, üblicherweise über die Funktion, ein Bauteil oder gesamte Baugruppen als STL-Datei zu exportieren [SNM03; JKP02]. Normalerweise arbeiten die CAD-Systeme nicht mit Oberflächenrepräsentationen, können diese aber zusätzlich ableiten. Dabei ist es möglich, durch Einstellungen, z. B. für einen Wert für die maximale Flächenabweichung, die Genauigkeit der Approximation anzupassen. Die zweite Möglichkeit besteht darin, durch Verfahren des *Reverse Engineering*, z. B. durch den Einsatz eines 3D-Scanners, ein Oberflächenmodell zu erhalten, wenn keine CAD-Modelle verfügbar sind.

STL-Dateien können diverse Fehlstellen aufweisen, wobei es sich um Lücken in der Vernetzung, degenerierte Facetten und überlappende Facetten handeln kann. Degenerierte Facetten haben keine dreieckige Struktur mehr, da die Kanten kollinear ausgerichtet sind und somit keine Ebene aufspannen. Es entsteht ein weiterer Fehler, wenn die Geometrieoberfläche keine Mannigfaltigkeit ist. Eine dreidimensionale Oberfläche ist eine Mannigfaltigkeit, wenn diese lokal dem Euklidischen Raum \mathbb{R}^2 ähnelt. Das bedeutet, dass eine bijektive Funktion existiert, die einen Punkt auf der Oberfläche im \mathbb{R}^3 eindeutig auf einen anderen Euklidischen Raum \mathbb{R}^2 abbildet. [Lee11]

Ein trianguliertes Oberflächenmodell ist keine Mannigfaltigkeit, wenn es Verknüpfungen zweier Facetten über nur einen Punkt gibt, ohne dass die Facetten eine Kante gemeinsam haben. Eine weitere Möglichkeit ist, dass es Kanten gibt, die an mehr als zwei Facetten grenzen. [LCN96; Hug14]

Eine zusätzliche Anforderung an Oberflächenvernetzungen kann darin liegen, dass diese ein abgeschlossenes Volumen bilden, z. B. ist dies eine Anforderung vieler Algorithmen zur Berechnung Boolescher Operatoren mit Oberflächenmodellen [BGF15]. Durch diese Anforderung wird gewährleistet, dass ein dreidimensionaler Raum eindeutig aufgeteilt werden kann in Bereiche, die innerhalb bzw. außerhalb der Geometrie liegen.

Um eine Position innerhalb eines ebenen Dreiecks zu beschreiben werden die baryzentrischen Koordinaten verwendet. Ein Punkt $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ in einem Dreieck mit den Eckpunkten $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2$ wird durch die Koordinaten (a_1, a_2, a_3) definiert und es gilt [KK09]

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 1 \wedge 0 \leq a_i \leq 1 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{P} = a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{B} + a_3 \mathbf{C} \quad (2.2)$$

$$a_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P_x & B_x & C_x \\ P_y & B_y & C_y \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{pmatrix}}; \quad a_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_x & P_x & C_x \\ A_y & P_y & C_y \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{pmatrix}}; \quad a_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_x & B_x & P_x \\ A_y & B_y & P_y \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \end{pmatrix}}, \quad (2.3)$$

wobei der Index x bzw. y die Koordinate des Punktes in kartesischen Koordinaten bezeichnet.

2.3.2. Vergrößerung/Verkleinerung von Oberflächenmodellen

In vielen Anwendungsfällen müssen Oberflächenmodelle um einen definierten Betrag vergrößert werden. Einige Beispiele sind die Bahngenerierung für eine Numerische Steuerung (*engl.*: Numerical Control) (NC) sowie die Erzeugung von Hohl- und Schalenkörpern. Im AM kann das Vergrößern von Modellen genutzt werden, um eine Bearbeitungszugabe zu realisieren. Die Bearbeitungszugabe kann in einem Postprozess durch spangebende Fertigungsverfahren entfernt werden, sodass eine hohe Qualität der Bauteiloberflächen erreicht wird. Eine solche Nachbearbeitung kann notwendig sein, wenn die AM-Fertigungsgenauigkeiten und die dem Prozess inhärenten Abweichungen („Stufeneffekt“) nicht die erforderliche Bauteilgenauigkeit oder Oberflächenqualität erreichen. [QS03]

Um ein Modell zu vergrößern, indem triangulierte Oberflächen verschoben werden, gibt es unterschiedliche Algorithmen. Grundsätzlich ist es möglich, die Facetten der Triangulierung entlang ihres Normalenvektors zu verschieben und anschließend zu erweitern oder zu beschneiden, sodass ein geschlossenes Modell erhalten bleibt. [MPT09] Die Reparatur im Anschluss an die Modifikation kann recht aufwendig sein, insbesondere bei komplexen Modellen mit vielen Facetten [QS03].

Ein anderer Ansatz ist die Verschiebung der Eckpunkte. Ein Eckpunkt ist Bestandteil mehrerer Facetten, sodass diesem mehrere Normalenvektoren zugeordnet werden können. Um einen Verschiebungsvektor für einen Eckpunkt zu berechnen, kann eine normierte Summe der Normalenvektoren der angrenzenden Facetten verwendet werden. Analog zu der Verschiebung der Facetten wird der Vektor der Verschiebungsrichtung auch Normalenvektor genannt. Die Formel zur Berechnung stammt aus der Berechnung der Normalenvektoren für Eckpunkte der *Gouraud-Schattierung* [Gou71]. Der Betrag des Versatzes ist für jeden Eckpunkt konstant. [TW98] Der Normalenvektor ${}^v\mathbf{n}$ eines Eckpunkts wird aus der normierten Summe der Normalenvektoren ${}^v\mathbf{n}_i$ gebildet, die zu den ${}^v n$ Facetten gehören, in deren Definition der Eckpunkt enthalten ist [Gou71]

$${}^v\mathbf{n} = \frac{\sum_{i=1}^{v n} {}^v\mathbf{n}_i}{\left\| \sum_{i=1}^{v n} {}^v\mathbf{n}_i \right\|}. \quad (2.4)$$

Durch die gleichmäßigen Anteile der Facettennormalenvektoren an dem Verschiebungsvektor treten Probleme an scharfen Kanten auf [QS03; KL02] und der resultierende Vektor ist abhängig von der Oberflächenvernetzung [TW98].

In Abhängigkeit der Modellgeometrie und der Vernetzung können mehrere Facetten an einem Eckpunkt parallele Normalenvektoren haben. Damit diese keinen überproportionalen Einfluss haben, berücksichtigen *Koc* und *Lee* [KL02] mehrfache Normalenvektoren nur einfach. Zur Bestimmung der Parallelität wird ein minimaler Winkelunterschied definiert. Zur Verbesserung der Qualität der versetzten Oberflächen können Faktoren verwendet werden, die den Anteil der Facettennormalenvektoren an dem Mittelwert gewichten. *Thürmer* und *Wüthrich* [TW98] verwenden als Gewichtungsfaktoren den Winkel der Facettenkanten im Eckpunkt ${}^v\alpha_i$, sodass der berechnete Normalenvektor vernetzungsunabhängig wird

$${}^v\mathbf{n} = \frac{\sum_{i=1}^{v n} {}^v\alpha_i {}^v\mathbf{n}_i}{\left\| \sum_{i=1}^{v n} {}^v\alpha_i {}^v\mathbf{n}_i \right\|}. \quad (2.5)$$

Wird für alle Eckpunkte ein konstanter Versatzbetrag verwendet führt dies an scharfen Kanten zu Fehlabbildungen, da an diesen Stellen der Betrag zu gering ist. Dieses Phänomen wird in **Abbildung 2.5** verdeutlicht. Bei einer konvexen Geometrie führt ein konstanter Betrag zu einer Glättung der Kante, ändert bei einer konkaven Geometrie jedoch die grundlegende Struktur. *Malosio et al.* [MPT09] führen daher einen Korrekturfaktor für den Versatzbetrag ein, welcher von dem Geometriewinkel und einem definierten Rundungsradius abhängt.

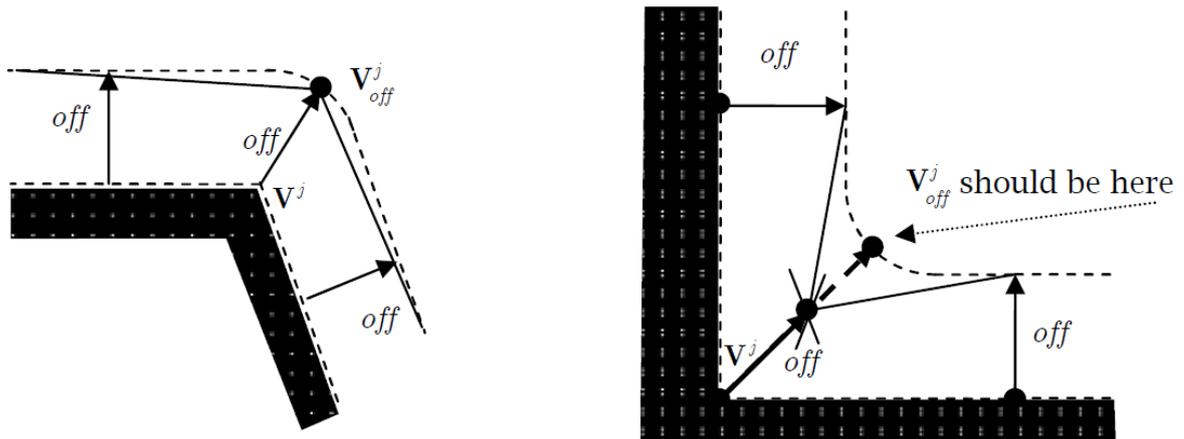


Abbildung 2.5.: Der Einfluss eines konstanten Versatzbetrags für alle Eckpunkte bei konvexen bzw. konkaven Geometrien [MPT09]

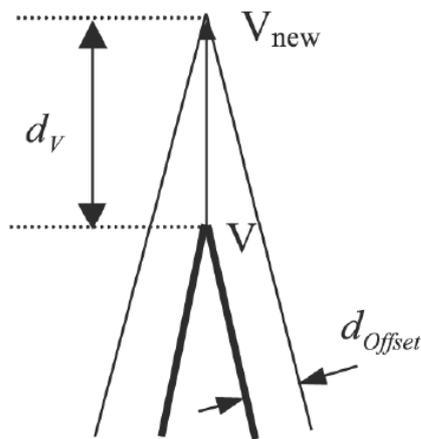


Abbildung 2.6.: Versatz eines Eckpunkts nach dem Verfahren von *Qu* und *Stucker* [QS03]

Qu und *Stucker* [QS03] lösen ein Gleichungssystem, um den Verschiebungsvektor eines Eckpunkts zu bestimmen. Der Eckpunkt wird in den theoretischen Schnittpunkt der versetzten Flächen verschoben. Das Vorgehen ist in **Abbildung 2.6** zu sehen.

Gehört ein Eckpunkt zu Facetten mit mehr als drei unterschiedlichen Normalenvektoren, kann es sein, dass keine Lösung des Gleichungssystems existiert. In diesem Fall werden alle unterschiedlichen Dreierkombinationen der Normalenvektoren betrachtet und der entsprechende Verschiebungsvektor berechnet. Als Approximation wird anschließend der Mittelwert aller berechneter Verschiebungsvektoren verwendet.

Ein weiterer Ansatz der Verschiebung der Eckpunkte basiert auf der Aufteilung in mehrere Punkte. Anstelle der Berechnung eines einzelnen Verschiebungsvektors aus den angrenzenden Normalenvektoren wird der Punkt dupliziert und je ein Punkt entlang eines

Normalenvektors verschoben. Die neuen Eckpunkte werden anschließend mithilfe neuer Dreieckselemente wieder zu einem geschlossenen Modell zusammengefügt. [KLY04]

2.3.3. Boolesche Operationen mit Oberflächenmodellen

Zur Erzeugung von dreidimensionalen Modellen können Boolesche Operatoren aus der Mengenlehre verwendet werden. Ein Beispiel für die Herstellung komplexer Geometrien durch Boolesche Operatoren sind CSG-Modelle. Im Kontext der additiven Fertigung wird bei der Erzeugung der Schichtgeometrien in jeder Ebene der Schnitt zwischen der Fertigungsebene und der Bauteilgeometrie berechnet und zur Generierung der Werkzeugbahnen verwendet [Guo+07; GCP91]. Zur Erzeugung von Geometrien mittels Booleschen Operatoren werden zunächst die Orte der Überschneidungen zwischen den Ausgangsgeometrien bestimmt. In der Regel ist dies die Berechnung der Schnittkante zwischen zwei dreieckigen Facetten. Bilden die Überschneidungen eine Schlaufe auf den Oberflächen, werden die Geometrieoberflächen entlang des Pfades geteilt. Anschließend werden die neuen Oberflächen entsprechend des gewählten Operators kombiniert und die resultierende Geometrie erstellt. Für die Unterscheidung, welche Oberflächen für die neue Geometrie verwendet werden, ist es erforderlich, dass identifiziert werden kann, ob sich eine Facette innerhalb oder außerhalb einer Ausgangsgeometrien befindet. [Sâ15; Guo+07; GCP91]

Für die Unterscheidung zwischen Innen- und Außenraum ist eine Oberfläche erforderlich, die geschlossen und eine Mannigfaltigkeit ist. Um Boolesche Operatoren auch an Modellen mit Fehlstellen anwenden zu können, müssen diese zunächst repariert werden.

2.4. Topologieoptimierung in der additiven Fertigung

Das Verfahren der Topologieoptimierung hat das Ziel, Material in einem begrenzten Raum Ω optimal anzuordnen, wobei das Optimalitätskriterium vom Anwendungsfall abhängig ist. Mit Hilfe einer Objekt- oder Kostfunktion wird ein Design (Materialverteilung) bewertet. [CK09]

In der Mechanik wird meist die Nachgiebigkeit einer Struktur minimiert, wobei die verwendbare Materialmenge nach oben begrenzt ist. Ein anderer Anwendungsfall ist die Maximierung eines Wärmestroms. Es gibt zahlreiche Erweiterungen, z. B. die Optimierung von Schwingungseigenschaften in dynamischen Systemen, die Berücksichtigung von Kni-

ckung und Spannungsrandbedingungen oder die Betrachtung von Mehrphasensystemen. [BS04]

Darüber hinaus können mit der TO Mechanismen erzeugt werden, die elastische Verformungen in Kräfte, Verformungen oder Energie umformen [BT01]. Ein Beispiel sind Micro Electro Mechanical Systems (MEMS) [Sig98], Kleinstaktuatoren, die durch Anlegen einer Spannung oder eine Temperaturänderung eine Bewegung ausführen. Eine mögliche Anwendung ist ein Scannerkopf, der einen Arbeitspunkt innerhalb einer Ebene bewegt und durch die Änderung zweier Spannungen gesteuert werden kann [JSB99].

In der TO können sowohl finite-dimensionale Systeme als auch Kontinua optimiert werden. Ein Beispiel für die Optimierung eines finite-dimensionalen Systems ist die Maximierung der Steifigkeit eines Fachwerks, in dem die verfügbare Masse optimal auf die Stäbe verteilt wird. In einem Kontinuum wird die Materialdichte als Feldvariable optimiert. [CK09; TSB18]

Die TO basiert auf der Finite-Elemente-Methode (FEM), ein numerisches Lösungsverfahren für vielfältige physikalische Probleme. Ursprünglich entwickelt für Mechanikprobleme, wird die FEM z. B. auch zur Lösung von Temperaturverteilungen in thermodynamischen Modellen verwendet. [Bat14] Unabhängig vom Einsatzgebiet ist das Grundprinzip der FEM, dass Kontinua in kleinere Teilbereiche zerlegt werden, sogenannte finite Elemente, für die Näherungsansätze getroffen werden. Im zweidimensionalen Problem werden üblicherweise grad- oder krummlinige Drei- und Vierecke oder höhere geometrische Figuren verwendet. Bei Mechanikproblemen ist die gesuchte Unbekannte die Verschiebung der Elementeckpunkte, wobei die Verschiebung im Inneren der Elemente mithilfe der gewählten Ansatzfunktionen approximiert wird. [RHAL12; GHW18]

Im Folgenden wird lediglich die FEM zur Lösung von Mechanikproblemen und die TO für ein Design mit minimaler Nachgiebigkeit behandelt. Das Gleichungssystem eines linearen statischen Mechanikproblems hat die Form

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R}, \tag{2.6}$$

wobei \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix, \mathbf{U} Verschiebungsvektor und \mathbf{R} der Vektor der äußeren Kräfte ist. Ein solches Mechaniksystem ist zeitunabhängig und kann statisch bestimmt oder überbestimmt sein. Das lineare Gleichungssystem entspricht einem erweiterten Hookeschen Gesetz, sodass nur elastische Verformungen betrachtet werden können. [RHAL12] Darüber hinaus können nur infinitesimale Verformungen und ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung abgebildet werden [Bat14].

Für eine allgemeine TO werden lediglich der Designraum Ω , das maximal auszufüllende Volumen und die Last- und mögliche Lagerungszustände benötigt. Darüber hinaus ist es möglich, zusätzliche Geometrieinschränkungen, wie die Vorgabe von Leerstellen oder massiven Bereichen, zu berücksichtigen. Das Problem zur Minimierung der Nachgiebigkeit c lässt sich schreiben als [BS04]

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}, E_e} c &= \mathbf{R}^T \mathbf{U} \\ \text{u.d.N.: } \mathbf{K}(E_e) \cdot \mathbf{U} &= \mathbf{R}, \quad E_e \in \mathcal{E}_{\text{ad}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} von den Elastizitätstensoren der Elemente E_e aus der Menge \mathcal{E}_{ad} aller zulässigen Elastizitätstensoren abhängig ist. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} wird durch die Elementsteifigkeitsmatrizen ${}^e\mathbf{K}$ zusammengesetzt [BS04].

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_f} {}^e\mathbf{K}(E_e) \quad (2.8)$$

Die Summation findet über alle Elemente statt, wobei die Anzahl der Elemente n_f ist. Der Elementelastizitätstensor E_e ist davon abhängig, ob ein Bereich Material enthält oder nicht, wobei der Bereich, der Material enthält, mit $\Omega_{\text{mat}} \subset \Omega$ bezeichnet wird. Der Elastizitätstensor E_e nimmt für Bereiche mit Material den Wert eines isotropen Elastizitätstensors E_0 an. [BK88]

$$E_e = \mathcal{X}(\mathbf{x})E_0, \quad \mathcal{X}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_e \in \Omega_{\text{mat}} \\ 0 & \text{wenn } x_e \in \Omega \setminus \Omega_{\text{mat}} \end{cases} \quad (2.9)$$

Für das Materialvolumen folgt daher

$$V = \text{Vol}(\Omega_{\text{mat}}) = \int_{\Omega} \mathcal{X}(\mathbf{x}) \, d\Omega \leq V_{\text{max}}, \quad (2.10)$$

wobei V das ausgefüllte Volumen und V_{max} eine durch den Benutzer gewählte Volumenobergrenze ist.

Das diskrete Materialverteilungsproblem liefert stark netzabhängige Lösungen [SK86] und darüber hinaus muss im Allgemeinen keine Lösung existieren [Ben89]. Das diskrete 0-1 Problem kann in ein stetiges Dimensionierungsproblem $0 \leq x_e \leq 1$ transformiert werden. *Cheng* und *Olhoff* haben die Designvariable physikalisch als Dicke einer Platte interpretiert [CO81]. *Bendsøe* und *Kikuchi* [BK88] haben eine numerische Implementierung einer Materialdichte in Abhängigkeit der Designvariable \mathbf{x} vorgestellt, wobei die Dichte als Mikrostruktur des Materials interpretiert wird.

Damit trotz einer stetigen Designvariablen \boldsymbol{x} das Ergebnis der TO eine klare Unterscheidung zwischen Bereichen mit und ohne Material hat, haben *Bendsøe* [Ben89] sowie *Rozvany et al.* [RZB92] eine theoretische Materialdichte $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$ eingeführt, die mit einem Exponenten $p > 1$ versehen ist. Dadurch ist die Steifigkeit von Elementen mit Zwischenwerten von x_e unterproportional und Zwischenwerte von x_e werden daher bestraft. Als Folge nähert sich \boldsymbol{x} einer diskreten 0-1 Verteilung an.

$$E_e(x_e) = (\mu_e(x_e))^p E_0 \quad (2.11)$$

Das Materialvolumen wird folglich durch

$$V = \int_{\Omega} \mu_e(x_e) \, d\Omega \leq V_{\max}, \quad (2.12)$$

berechnet.

Dieses Vorgehen ist als Solid Isotropic Microstructure with Penalization (SIMP) Methode bekannt und ist die in kommerzieller Software meist implementierte Methode [Que+17]. Der „Bestrafungsfaktor“ (*engl.*: penalty factor) p liegt üblicherweise bei $p \geq 3$. Zur Vermeidung von numerischen Singularitäten wird eine minimale Dichte $\mu_e(0) > 0$ eingeführt, wobei ein gebräuchlicher Wert $\mu_e(0) = \mu_{\min} = 10^{-3}$ ist [BS04]. Für die Dichte gilt daher folgende Bedingung

$$0 < \mu_{\min} \leq \mu_e \leq 1. \quad (2.13)$$

Eine anderes verbreitetes Verfahren zur Materialinterpolation wird Rationale Approximierung von Materialeigenschaften (*engl.*: Rational Approximation of Material Properties) (RAMP) genannt [BS04] und verwendet folgende Interpolationsfunktion [SS01]

$$E_e(x_e) = \frac{\mu_e(x_e)}{1 + p(1 - \mu_e(x_e))} E_0. \quad (2.14)$$

Die TO ist ein iteratives Verfahren, sodass die Materialdichte auf Basis der Materialdichte des vorangegangenen Schritts berechnet wird. Ein Verfahren ist die Optimalitätskriteriumsmethode (*engl.*: Optimality Criteria (OC)) nach [BK88]. Namensgeber dieser Methode ist das *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT)-Kriterium, welches ein notwendiges Optimalitätskriterium für eine nicht lineare Optimierung unter Nebenbedingungen ist. Ein nicht lineares Optimierungsproblem mit Ungleichheitsbedingungen und Gleichheitsbedingungen hat die

Form [UU12]

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\
 \text{u.d.N.:} & \\
 & g(\mathbf{x}) \leq 0, \\
 & h(\mathbf{x}) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Damit ein Punkt im beschriebenen Optimierungsproblem ein Optimum ist, müssen die folgenden notwendigen Bedingungen erfüllt sein. [UU12]

$$\begin{aligned}
 \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} + \nabla h(\mathbf{x})\boldsymbol{\Lambda} &= 0 \\
 h(\mathbf{x}) &= 0 \\
 \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \quad g(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}^T g(\mathbf{x}) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Für eine kompakte Schreibweise können die KKT-Bedingungen mittels einer Lagrangehilfsfunktion definiert werden. [UU12]

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T g(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Lambda}^T h(\mathbf{x}) \tag{2.17}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Lambda}) = 0 \tag{2.18}$$

Im Fall der TO für eine minimale Nachgiebigkeit kann eine Lagrangefunktion aufgestellt werden. Es wird die Nachgiebigkeit c minimiert, des Weiteren müssen innere und äußere Kräfte im Gleichgewicht sein $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}$. Der zugehörige Lagrangemultiplikator ist λ_u . $\Lambda, \lambda^+, \lambda^-$ sind die Lagrangemultiplikatoren für die Bedingungen bezüglich der Volumengrenzen 2.12 und den Dichtegrenzen 2.13. [BS04; ZS17]

$$\begin{aligned}
 L = c + \lambda_u (\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{R}) + \Lambda (V - V_{\max}) + \int_{\Omega} \lambda^+(\mathbf{x})(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) - 1) \, d\Omega \\
 + \int_{\Omega} \lambda^-(\mathbf{x})(\mu_{\min} - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})) \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Als Bedingung folgt

$$\frac{\partial c_e}{\partial \mu_e^{(k)}} + \Lambda \frac{\partial V_e}{\partial \mu_e^{(k)}} + \lambda^- + \lambda^+ = 0. \tag{2.20}$$

Bei Dichten im Zwischenbereich $\mu_{\min} < \boldsymbol{\mu}^{(k)} < 1$ gilt $\lambda^- = \lambda^+ = 0$.

$$\frac{\partial c_e}{\partial \mu_e^{(k)}} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\mu}^{(k)}} = 0 \tag{2.21}$$

Eine Umformung von 2.21 ergibt

$$B_e^{(k)} = -\frac{\partial c_e}{\partial \mu_e^{(k)}} \left(\Lambda \frac{\partial V}{\partial \mu_e^{(k)}} \right)^{-1}, \quad (2.22)$$

wobei $B_e^{(k)}$ im Idealfall den Wert 1 annimmt. Die Aktualisierungsregel lautet [Sig01]

$$x_e^{(k+1)} = \begin{cases} \max\{\mu_{\min}, \mu_e^{(k)} - q\}, & \text{wenn } \mu_e^{(k)} (B_e^{(k)})^\varphi \leq \max\{\mu_{\min}, \mu_e^{(k)} - q\} \\ \mu_e^{(k)} (B_e^{(k)})^\varphi, & \text{wenn } \max\{\mu_{\min}, \mu_e^{(k)} - q\} < \mu_e^{(k)} (B_e^{(k)})^\varphi \\ & < \min\{1, \mu_e^{(k)} + q\} \\ \min\{1, \mu_e^{(k)} + q\}, & \text{wenn } \min\{1, \mu_e^{(k)} + q\} \leq \mu_e^{(k)} (B_e^{(k)})^\varphi \end{cases} \quad (2.23)$$

Der Lagrangemultiplikator Λ kann über eine Bisektion bestimmt werden. Die maximale Änderung der Dichte in einer Iteration wird durch den Wert q begrenzt und mit dem Exponent $\varphi < 1$ eine numerische Dämpfung realisiert. [Sig01]

Eine Alternative zur OC-Methode ist die Methode der beweglichen Asymptoten (*engl.*: Method of Moving Asymptotes) (MMA) [Sva87]. Dabei handelt es sich um eine Abfolge von linearen Programmen (*engl.*: sequence of linear programmes) (SLP). Die Zusatzbedingungen der Optimierung $f_i(\mathbf{x}) \leq \hat{f}_i$ mit $i = 1, \dots, n_c$, wobei n_c die Anzahl der Zusatzbedingungen ist, werden in Form eines konvexen Subproblems berücksichtigt. Als Asymptoten werden die Parameter $L_j^{(k)}$ und $U_j^{(k)}$ bezeichnet, die die Designvariable $\mathbf{x}^{(k)}$ bei der Iteration k begrenzen. Es gilt $L_j^{(k)} < x_j^{(k)} < U_j^{(k)}$ für $j = 1, \dots, n_f$, wobei n_f die Anzahl der Elemente in der Designvariable \mathbf{x} ist. Für die Iteration k wird $f_i(\mathbf{x})$ approximiert durch

$$f_i(\mathbf{x}) \approx f_i^{(k)}(\mathbf{x}) = r_i + \sum_{j=1}^{n_f} \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j - L_j^{(k)}} \right), \quad (2.24)$$

wobei $p_{ij}^{(k)}$, $q_{ij}^{(k)}$ und $r_i^{(k)}$ definiert sind durch

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_j^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, & \text{wenn } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0 \\ 0, & \text{wenn } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \leq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0 \\ -(x_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, & \text{wenn } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$r_i^{(k)} = f_i(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{j=1}^{n_f} \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right). \quad (2.27)$$

Die Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ werden anhand der aktuellen Werte der Designvariable $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$ bei der Iteration k ausgewertet. *Svanberg* [Sva87] macht mehrere Vorschläge für die Berechnung

von $L_j^{(k)}, U_j^{(k)}$. Das Subproblem für eine Iteration hat die Form

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^{n_f} \left(\frac{p_{0j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{0j}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) + r_0 \\ & \text{u.d.N.:} \\ & \sum_{j=1}^{n_f} \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - x_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{x_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \leq \hat{f}_i, \quad \text{für } i = 1, \dots, n_c \\ & \max\{0, \alpha_j^{(k)}\} \leq x_j \leq \min\{\beta_j^{(k)}, 1\}, \quad \text{für } j = 1, \dots, n_f \end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Parameter $\alpha_j^{(k)}$ und $\beta_j^{(k)}$ dienen der Begrenzung der Schrittweite, sodass $L_j^{(k)} < \alpha_j^{(k)} < x_j^{(k)} < \beta_j^{(k)} < U_j^{(k)}$ gilt. Ein Vorschlag die Schrittweiten für ein Inkrement zu berechnen ist $\alpha_j^{(k)} = 0,9 \cdot L_j^{(k)} + 0,1 \cdot x_j^{(k)}$ und $\beta_j^{(k)} = 0,9 \cdot U_j^{(k)} + 0,1 \cdot x_j^{(k)}$. Eine MATLAB-Implementierung des MMA-Algorithmus ist unter der GNU General Public License (GPLv3) frei verfügbar [Sva07].

Bei den meisten TO-Verfahren entwickeln sich Schachbrettstrukturen (*engl.*: checkerboard patterns), die nicht die optimale Materialverteilung darstellen, sondern durch numerische Instabilitäten verursacht werden. Eine Schachbrettstruktur besteht aus einem Bereich, in dem die Dichtefunktion in aneinander grenzenden Elementen alternierend maximale bzw. minimale Extremwerte annimmt. Diese Strukturen haben aufgrund von Approximationen in der FEM lokal eine höhere Steifigkeit als andere Materialanordnungen. Damit die Ausbildung von Schachbrettstrukturen verhindert werden, werden in der Literatur unterschiedliche Filter für das Dichtefeld und das Verschiebungsfeld verwendet. [DS95]

Hier entspricht ein Filter einem Filter in der Bildverarbeitung und projiziert eine Feldvariable auf eine andere Feldvariable. Bei einem Filter wird die Nachbarschaft eines Elements berücksichtigt. Üblich ist ein kreisförmiger Filter, der die Dichte eines Elements durch einen gewichteten Mittelwert in einem definierten Umkreis ersetzt, sodass „Kanten“ in der Feldvariable geglättet werden.

Eine Alternative zur Verwendung von Filtern ist die Verwendung von FEM-Elementen höherer Ordnung [BS04]. Die Problematik der Schachbrettstrukturen wird bei der Optimierung der Dicke einer Platte unter biaxialem Zug deutlich (vgl. **Abbildung 2.7a**). Bei einer TO mit einem zurückbleibenden Volumenanteil von $V_{\max} = 0,5$ mit linearen Viereckselementen ohne Gegenmaßnahmen bildet sich eine vollständige Schachbrettstruktur aus, die nahezu dieselbe Steifigkeit wie das Vollmaterial hat (b). Durch die Verwendung eines Filters kann die Schachbrettstruktur verhindert werden, sodass das Resultat, wie zu erwarten, eine geringere Steifigkeit als das Vollmaterial hat (c). [BS04] Die Filter führen zusätzlich dazu, dass eine Mindestgröße der Strukturen im Bauteil eingehalten wird. [PS98;

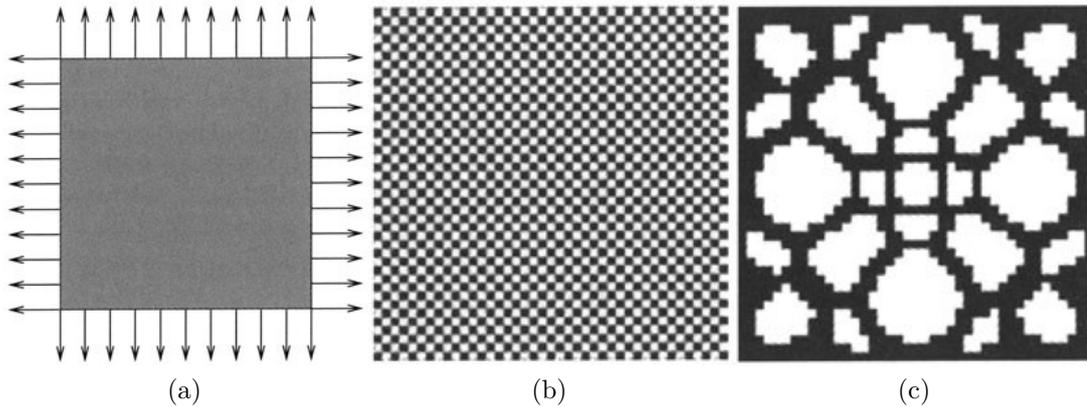


Abbildung 2.7.: Problematik von Schachbrettstrukturen am Beispiel einer biaxial belasteten Platte [BS04]

Pou03; GPB04] Ein Überblick und Vergleich unterschiedlicher Filterverfahren ist in [Sig07] enthalten.

Die TO ist auch als Skript für MATLAB umgesetzt worden. *Sigmund* [Sig01] ist es gelungen, eine 2D-Optimierung mit einer Modellvernetzung aus gleichmäßig angeordneten linearen quadratischen Element mit einer Kantenlänge 1 in nur 99 Zeilen zu realisieren. Ausgehend von dieser Entwicklung haben *Andreassen et al.* [And+11] zusätzlich einen Dichtefilter implementiert und die Effizienz gesteigert. Der resultierende Programmcode besteht aus 88 Zeilen. *Liu* und *Tovar* [LT14] haben eine dreidimensionale Erweiterung veröffentlicht.

Topologieoptimierte Bauteile erfordern meist eine Anpassung der Geometrie, um für die Fertigung geeignet zu sein. Optimierte Bauteile können sehr komplexe und filigrane Formen annehmen, sodass eine Fertigung mit subtraktiven Fertigungsverfahren nicht möglich ist, da eine Werkzeugzugänglichkeit nicht gegeben ist, sodass für eine konventionelle Fertigung eine Bauteilvereinfachung durch einen Konstrukteur erforderlich wird. Aufgrund der geringeren Fertigungsrestriktionen bieten sich additive Fertigungsverfahren als Alternative an. Die Problematik der Werkzeugzugänglichkeit ist durch den schichtweisen Bauteilaufbau nicht vorhanden [GRS15], jedoch muss berücksichtigt werden, dass Überhänge in der Schichtungsrichtung einen prozessabhängigen Grenzwert Φ_{\max} nicht überschreiten. In **Abbildung 2.8** ist die Definition des Überhangwinkels Φ dargestellt, wobei die Schichtungsrichtung mit \mathbf{n} angegeben ist. Andernfalls müssen zusätzliche Stützstrukturen gefertigt werden, die nach der Fertigung entfernt werden müssen.

Für den FDM-Prozess wird allgemein ein Grenzwinkel von $\Phi_{\max} = 45^\circ$ verwendet, wobei jedoch bei angepassten Prozessparametern auf Kosten der Oberflächenrauheit größere Überhangwinkel möglich sind [JXS19; Zha+18]. Bei der additiven Fertigung mit Metall-



Abbildung 2.8.: Definition des Überhangwinkels

werkstoffen im Selektiven Laserschmelzverfahren (*engl.*: selective laser melting (SLM)) liegen die Grenzwinkel zwischen 40° bis 50° [Wan+13; Mer+14; KHE15]. Ebenfalls für das Bioprinting mit einem Inkjet-Druckkopf werden Untersuchungen angestellt, um einen Überhangwinkelgrenzwert zu bestimmen [Xu+12].

Eine Möglichkeit, Stützstrukturen zu vermeiden, ist es, eine Orientierung des Bauteils zu finden, die keine Stützstruktur erfordert, jedoch ist eine vollständige Vermeidung bei komplexen Bauteilen häufig nicht möglich [Das+17]. Daher werden Verfahren entwickelt, die topologisch optimierte Bauteile nachträglich verändern, um Stützstrukturen zu verringern bzw. überflüssig zu machen. *Leary et al.* [Lea+14] fügen dem Bauteil zusätzliche Strukturen hinzu, die effektiv Stützstrukturen überflüssig machen. Jedoch werden Volumen und Masse des Bauteils erhöht und das Verhalten des Bauteils verändert. Einen anderen Weg gehen *Hu et al.* [HJW15], indem keine neuen Strukturen hinzugefügt werden, sondern das Bauteil verformt wird, sodass die Menge an erforderlichen Stützstrukturen minimiert wird. Die Ergebnisse sind nicht vollständig selbsttragend und die Autoren erkennen an, dass das Verfahren nur dann einsetzbar ist, wenn der Anwendungsfall eine Bauteilverformung zulässt.

Es gibt Arbeiten, die sich damit beschäftigen, Fertigungsrestriktionen in der TO zu berücksichtigen [Zuo+06]. So wurde ein Filter entwickelt, der dafür sorgt, dass das Geometrieergebnis durch Fräsen bzw. Gießen gefertigt werden kann [GZ12]. Für das Fräsen darf kein Material oberhalb einer Kontur in Bearbeitungsrichtung vorhanden sein, da dieses mit dem Werkzeug kollidieren würde. Für eine Gussfertigung dürfen in der Geometrie keine Hinterschneidungen enthalten sein. Bei der TO für Frästeile in 2D wird ein Bohrwerkzeug durch ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis modelliert. Um Material zu entfernen, muss auch das Material entfernt werden, das in der Bearbeitungsrichtung oberhalb des Elements liegt. Der eingesetzte Filter verwendet für jedes Element eine Nachbarschaft, die aus allen Elementen besteht, deren Entfernung auch die Entfernung des Elements notwendig macht. Ist in der Nachbarschaft die Dichte null, dann muss auch die Dichte ρ_e des betrachteten Elements e null sein.

Die numerische Implementierung erfolgt über eine differenzierbare Heaviside-Projektion $H_R : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$ eines normierten Dichtemittelwerts $\bar{\mu}_e$ in der Elementnachbarschaft.

Der Parameter β_R bestimmt die Krümmung der Funktion, wobei die Funktion sich für $\beta_R \rightarrow \infty$ der Sprungfunktion (Heavisidefunktion) annähert. [GPB04]

$$\rho_e = H_R(\bar{\mu}_e) = 1 - e^{-\beta_R \bar{\mu}_e} + \bar{\mu}_e e^{-\beta_R} \quad (2.29)$$

Zum ersten Mal haben *Brackett et al.* [BAH11] vorgeschlagen, eine Überhangnebenbedingung direkt in der TO mit einzubeziehen, um selbsttragende Bauteile zu erhalten, die additiv hergestellt werden können. Es wurde ein Verfahren demonstriert, das kritische Überhänge in einer zweidimensionalen Geometrie identifiziert. Darüber hinaus soll die Zielfunktion um eine Bestrafungsfunktion ergänzt werden, die die Verletzung der Überhangsbedingung quantifiziert. In der Sensitivitätsanalyse wird die Bestrafungsfunktion aber nicht betrachtet, sodass diese keinen direkten Einfluss auf die Optimierungssiterationen hat. Eine Implementierung und Ergebnisse, die über die Überhangsidentifikation hinaus gehen, sind nicht vorhanden und wurden auch nicht in einer weiteren Veröffentlichung behandelt.

Es folgt eine Vielzahl verschiedener Arbeiten, die sich mit Überhangnebenbedingungen beschäftigen. *Gaynor* und *Guest* [Gay+14; GG16] verwenden in ihrem Verfahren einen kegelförmigen Filter und es wird eine geordnete Quadratvernetzung verwendet. Eigentlich hat der Filter die Form eines Kreissegments, jedoch wird die Form in der Literatur in diesem Zusammenhang als kegelförmig bezeichnet. Im ersten Projektionsschritt auf eine abhängige Variable wird die lokale Designvariable mit der über eine differenzierbare Schwellwert-Heavisidefunktion [Jan+13] transformierte mittleren Dichte im Stützkegel unterhalb des Elements multipliziert. Die Schwellwert-Heavisidefunktion $H_T : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ steigt am Ort x_T an, wobei die Steigung durch den Parameter β_T bestimmt wird.

$$H_T(x) = \frac{\tanh(\beta_T x_T) + \tanh(\beta_T(x - x_T))}{\tanh(\beta_T x_T) + \tanh(\beta_T(1 - x_T))} \quad (2.30)$$

Durch diese Projektion wird ein Element als abgestützt angesehen, wenn die mittlere Dichte im Stützkegel einen Grenzwert überschreitet. Der Winkel des Kegels gibt dabei den Grenzwinkel vor. Mit einem weiteren kreisförmigen Filter wird die minimale Strukturgröße sichergestellt. Ein Element kann nur dann Material enthalten, wenn auch im Umkreis Material enthalten ist. Diese Abhängigkeit wird durch die Anwendung der differenzierbaren Heaviside-Sprungfunktion auf einen gewichteten Mittelwert der Elementdichten innerhalb des Filterradius abgebildet [GPB04]. Analog zu additiven Fertigungsverfahren muss der Kegelfilter und die Sensitivitätsanalyse schichtweise von unten nach oben ausgewertet werden, sodass eine parallele Berechnung verhindert wird. Darüber hinaus kann es zu Konvergenzproblemen durch die starke Nichtlinearität der Projektionsfunktionen bei

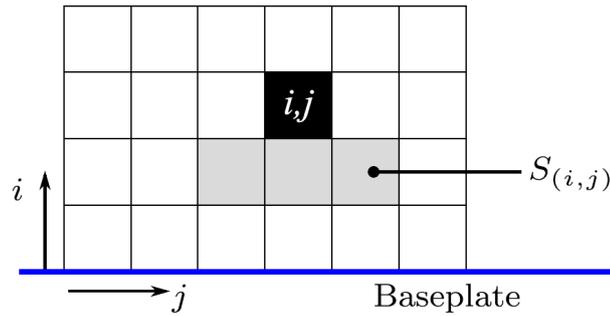


Abbildung 2.9.: Definition des Stützbereichs S durch *Langelaar* [Lan17]

komplexeren Bauteilen kommen. [GG16] Ein Nachteil des Verfahrens ist, dass nicht massive Elemente zum Abstützen massiver Elemente benutzt werden können [Lan17].

Langelaar [Lan16; Lan17] hat einen weiteren Filter entwickelt, der auf differenzierbaren Minimums- und Maximumsfunktionen basiert. Die Form des Filters bzw. des Stützbereichs eines Elements wird mithilfe der verwendeten regelmäßigen Quadratvernetzung definiert. Ein Element, sofern dieses sich nicht in der untersten Ebene befindet, hat einen Stützbereich, der aus den Elementen in der Ebene unter dem betrachteten Element besteht, die mindestens einen Knoten mit dem Element teilen. Abgesehen von den Rändern des Designbereichs hat ein Element im zweidimensionalen Fall einen Stützbereich, der aus drei Elementen besteht (vgl. **Abbildung 2.9**). Ein Element kann maximal die Materialdichte haben, die dem Minimum der Materialdichten im Stützbereich entspricht. Für die Optimierung muss eine Sensitivitätsanalyse stattfinden, sodass Ableitungen berechnet werden müssen. Daher werden differenzierbare Approximationen der Minimums- und Maximumsfunktionen verwendet. Durch dieses Vorgehen werden Überhänge auf einen maximalen Winkel von $\Phi_{\max} = 45^\circ$ begrenzt.

Da die zwingende Verwendung einer geordneten Vernetzung die Benutzung dieses Verfahrens für Industrieapplikationen einschränkt, haben *Hoffart et al.* [HGP17] eine vernetzungsunabhängige Verallgemeinerung entwickelt, die einen kegelförmigen Filter in Kombination mit differenzierbaren Minimums- und Maximumsfunktionen verwendet. Durch diese Verallgemeinerung wird es möglich, unregelmäßige Vernetzungen, z. B. auch aus Dreiecken bzw. Tetraedern, zu verwenden. Die Implementierung wird nicht im Detail vorgestellt, sondern es wird sich primär auf die Vorstellung von numerischen Ergebnissen konzentriert.

Eine detailliertere Implementierung liefern *Thore et al.* [Tho+19]. Die Stützelemente eines Elements werden ausgewählt, indem geprüft wird, ob der Elementschwerpunkt innerhalb eines Kegels liegt, der vom Schwerpunkt des betrachteten Elements ausgeht. Der Kegel wird entgegen der Baurichtung \mathbf{n} aufgespannt und der zulässige Überhangwinkel wird analog zu *Gaynor* und *Guest* [Gay+14; GG16] durch den Winkel im Scheitelpunkt Φ_{\max}

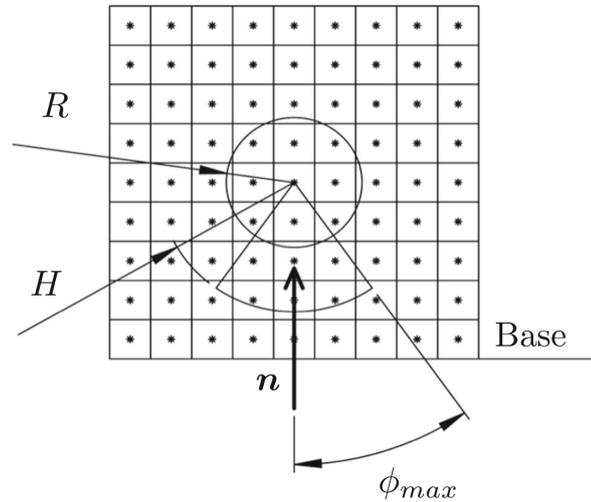


Abbildung 2.10.: Definition des Stützbereichs durch *Thore et al.* [Tho+19]

des Kegels festgelegt. Die Definition des Stützbereiches ist in **Abbildung 2.10** grafisch dargestellt. Die Höhe des Kegels H wird in Abhängigkeit des Radius des Dichtefilters R gewählt zu $H = 1,2 \cdot R$. Im Fall einer groben ungeordneten Vernetzung ist der sich ergebene Überhangswinkel von der lokalen Vernetzung abhängig. Durch Verringerung der Elementgröße nähert sich der Winkel Φ_{max} den 45° an. Weiterhin wird die differenzierbare Maximums-Funktion um einen Gewichtung- und einen Bestrafungsfaktor ergänzt, sodass eine Abschwächung der Überhangszusatzbedingung möglich ist. Dies hat den Vorteil, dass spitze Innenwinkel, die zu Spannungsspitzen führen, verringert werden.

Eine andere Methode der Implementierung einer Überhangnebenbedingung stellt *Qian* [Qia17] vor. Es wird die Länge der Projektion von Überhängen mit kritischen Winkeln auf die Grundplatte betrachtet. Über die Integration einer Schwellwert-Heavisidefunktion über den Designraum wird eine einzelne Ungleichungsbedingung formuliert. Der obere Grenzwert für die projizierte Überhangslänge ist ein vom Benutzer vorgegebener Parameter, der eine definierte Menge an notwendigen Stützstrukturen zulassen kann. *Ryan* und *Kim* [RK19] betrachten in gleicher Art das erforderliche Stützstrukturvolumen und minimieren die Oberfläche des Bauteils. Für die Identifikation von Überhängen verwenden *Garaigordobil et al.* [Gar+18] ein Verfahren aus der Bildverarbeitung. Mithilfe eines Kantenerkennungsalgorithmus (Smallest Univalued Segment Assimilating Nucleus (SUSAN) [SB97]) werden die Bauteilgrenzen identifiziert und ein Verhältnis von selbsttragenden Konturen zu sämtlichen vorhandenen Konturen berechnet. Ein minimales Verhältnis wird über eine Nebenbedingung in der Optimierung sichergestellt.

3. Zielsetzung und Vorgehen

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Erstellung von Logistikladungsträgern mittels eines 3D-Druckers. Insbesondere liegt der Fokus auf großen Ladungsgütern, die üblicherweise auf EPAL1-Paletten transportiert werden. Die Paletten sollen auch weiterhin zum Einsatz kommen, aber mit einem individuell gefertigten Aufsatz kombiniert werden.

Die Voraussetzung für die Fertigung eines solchen Ladungsträgers ist das entsprechende Fertigungssystem. Bei der Entwicklung muss berücksichtigt werden, den Anforderungen der Logistik Rechnung zu tragen. So sollte die Fertigungszeit einige wenige Stunden nicht überschreiten. Darüber hinaus sind die Margen in der Logistik gering und der Kostendruck hoch, sodass die finanziellen Mittel für Investitionen begrenzt sind. Das zu entwickelnde Fertigungssystem ist daher möglichst kostengünstig zu gestalten und sollte nur die Minimalanforderungen an die Fertigungstoleranzen erfüllen.

Damit auch die Betriebskosten möglichst gering gehalten werden, soll als Ausgangsmaterial Kunststoffgranulat, im Gegensatz zu dem bei kleinen Fertigungsanlagen üblicherweise vorzufindenden Kunststofffilamenten, verwendet werden. Durch die Verwendung eines Granulats sind die Kosten pro Kilogramm deutlich geringer und es wird ein höherer Masendurchsatz ermöglicht. Als Werkstoff wird PLA verwendet, da dieses auf nachwachsenden Rohstoffen basiert und recyclingfähig ist.

Ein großvolumiger Granulatdrucker, der geringe Fertigungszeiten realisieren kann, erfordert große Achsenbeschleunigungen. Damit die Antriebe und der Maschinenrahmen kleiner dimensioniert werden können, muss die bewegte Masse gering gehalten werden. Daher wird kein Schneckenextruder direkt am Druckkopf befestigt, sondern die Schmelze über einen beheizten Schlauch zur Düse transportiert. Es muss untersucht werden, inwieweit ein solches System Fertigungstoleranzen einhalten kann. Die Umsetzung in einer großvolumigen Fertigungsanlage und eine Erprobung dieses Systems ist im Stand der Technik noch nicht enthalten. Bislang ist ein System mit Kopplung über einen beheizten Schlauch nur in Desktopgröße erprobt worden [KS19a]. Durch die geringe Größe des Fertigungssystems

kann der Massenstrom der Polymerschmelze ohne zusätzliche Dosiereinheit erfolgen. Für die Ladungsträgerfertigung sollen deutlich größere Massenströme und Düsendurchmesser verwendet werden, sodass eine Schmelzedosierung komplexer wird. Damit eine Dosierung der Schmelze schnell und exakt durchgeführt werden kann, wird eine Zahnradschmelzepumpe am Druckkopf verwendet.

Für einen hohen Automatisierungsgrad muss die Geometrie des Ladungsträgers durch einen Algorithmus erzeugt werden. Dieser soll fähig sein, ein Oberflächenmodell des Ladungsguts zu verarbeiten. Um den Aufwand der Modellgenerierung, z. B. mit einem 3D-Scanner, zu verringern, ist es notwendig, dass keine hohen Anforderungen an das Oberflächenmodell gestellt werden und die Oberfläche Fehlstellen enthalten darf. Der Algorithmus muss Ladungsgüter mit Hinterschneidungen und Fertigungstoleranzen berücksichtigen. Eine Verwendung Boolescher Operationen (vgl. Kapitel 2.3.3) ist bei Bauteilen mit Hinterschneidungen nicht möglich. Um den Fertigungstoleranzen gerecht zu werden, muss die Oberfläche des Ladungsguts versetzt werden (vgl. Kapitel 2.3.2). Analog zur Fertigung ist ein geringer Zeitbedarf erforderlich, sodass eine möglichst effiziente Implementierung umzusetzen ist.

Der Materialeinsatz und die Fertigungszeit soll schon bei der Ladungsträgergenerierung berücksichtigt werden. Daher findet nach der Generierung des Ladungsträgers eine Topologieoptimierung statt, um das Volumen des zu druckenden Bauteils zu verringern. Damit keine Nachbearbeitung des Ladungsträgers erforderlich ist, soll bei der Optimierung berücksichtigt werden, dass keine zu entfernenden Stützstrukturen für die Fertigung benötigt werden (vgl. Kapitel 2.4). Es gibt zwar Bestrebungen im Stand der Technik, Überhänge während einer Topologieoptimierung zu verhindern, jedoch werden zumeist regelmäßige Vernetzungen oder Vernetzungen mit geringer Varianz der Elementgröße verwendet und untersucht. Ebenfalls in diesem Schritt sollen Versuche unternommen werden, den Rechenaufwand zu minimieren.

Für die Optimierung des Ladungsträgers ist die Kenntnis der Belastung notwendig. Diese soll simulativ ermittelt werden. Die Generierung der Ladungsträgergeometrie soll in einem kontinuierlichen Prozess erfolgen. Daher werden alle Schritte in MATLAB implementiert. Eine Implementierung einer Kontaktsimulation, wie sie für die Belastungsermittlung benötigt wird, ist nicht frei verfügbar und muss im Rahmen dieser Arbeit erstellt werden. Es gibt MATLAB-Implementierungen einer TO [Sig01; And+11; LT14] und auch ein Filter für eine Überhangnebenbedingung ist verfügbar [Lan17]. Jedoch werden regelmäßige Quadrat- bzw. Würfelvernetzungen zur Diskretisierung verwendet. Für allgemeine Ladungsgüter ist eine flexiblere Tetraedervernetzung besser geeignet, sodass die Implementierungen angepasst werden müssen. Es sind bereits Arbeiten für die Überhangnebenbedingung für

unregelmäßige Vernetzungen durchgeführt worden [HGP17; Tho+19], aber es gibt noch Optimierungspotential zur Verringerung des Rechenaufwands und bei der Verwendung von Vernetzungen mit lokal unterschiedlichen Elementgrößen. Neben der Verwendung einer rechenintensiven Kontaktsimulation soll zusätzlich versucht werden, einen schnelleren heuristischen Ansatz zu finden, der dazu geeignet ist, als Belastung in der TO eingesetzt zu werden.

Der Aufbau der Arbeit ist in **Abbildung 3.1** grafisch dargestellt. Es gibt drei Teilprobleme, die zunächst unabhängig voneinander betrachtet werden. Es wird ein Fertigungssystem entwickelt, das die oben beschriebenen Anforderungen erfüllen soll. Im Unterschied zum Stand der Technik wird ein System entwickelt, das neben eines beheizten Schlauches eine nachgeschaltete Dosiereinheit enthält. Die Fertigungsanlage wird anschließend auf ihre Funktion hin überprüft und eine Überprüfung der Fertigungsgenauigkeit durchgeführt. Die Beschreibung der Anlage und die Versuche sind in Kapitel 4 zu finden.

Das zweite Teilproblem, die automatische Generierung der Ladungsträgergeometrie anhand der Geometrie eines Ladungsguts, wird in Kapitel 5 behandelt. Die Erprobung umfasst die Generierung von Ladungsträgern für mehrere Beispielgeometrien und eine Abschätzung der Abhängigkeiten, die sich auf die Rechenzeiten auswirken. Es wird ein neues Verfahren vorgestellt, das einen Ladungsträger erzeugt, der die an ihn gestellten Anforderungen erfüllt. In einem der Algorithmusschritte wird eine Versatz der Ladungsgutgeometrieoberfläche angewendet, wie er im Stand der Technik bekannt ist.

Die Ergebnisse der ersten beiden Teilprobleme werden in Kapitel 6 kombiniert, indem ein erster Demonstrator gefertigt wird und eine Genauigkeitsuntersuchung am gefertigten Ladungsträger durchgeführt wird.

Das dritte und letzte Teilproblem, das es für einen lastoptimierten Ladungsträger zu lösen gilt, ist die Lastoptimierung. Im Kapitel 8 werden die für die Optimierung erforderlichen Belastungen ermittelt, wobei zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt werden. Zum einen wird eine Kontaktsimulation in MATLAB und C++ implementiert und zum anderen eine Heuristik entwickelt. In Kapitel 7 wird eine Effizienzsteigerung einer filterbasierten Nebenbedingung für die Berücksichtigung maximaler Überhangwinkel in der TO realisiert. Der neue Filter basiert in seiner Form auf den Nachbarschaftsverhältnissen in der FEM-Vernetzung. In einer Parameteranalyse wird die optimale Anzahl an berücksichtigten Nachbarschaftsebenen ermittelt. Der Einfluss der Überhangbedingung auf die Bauteilsteifigkeit wird theoretisch und in einem Versuch ermittelt.

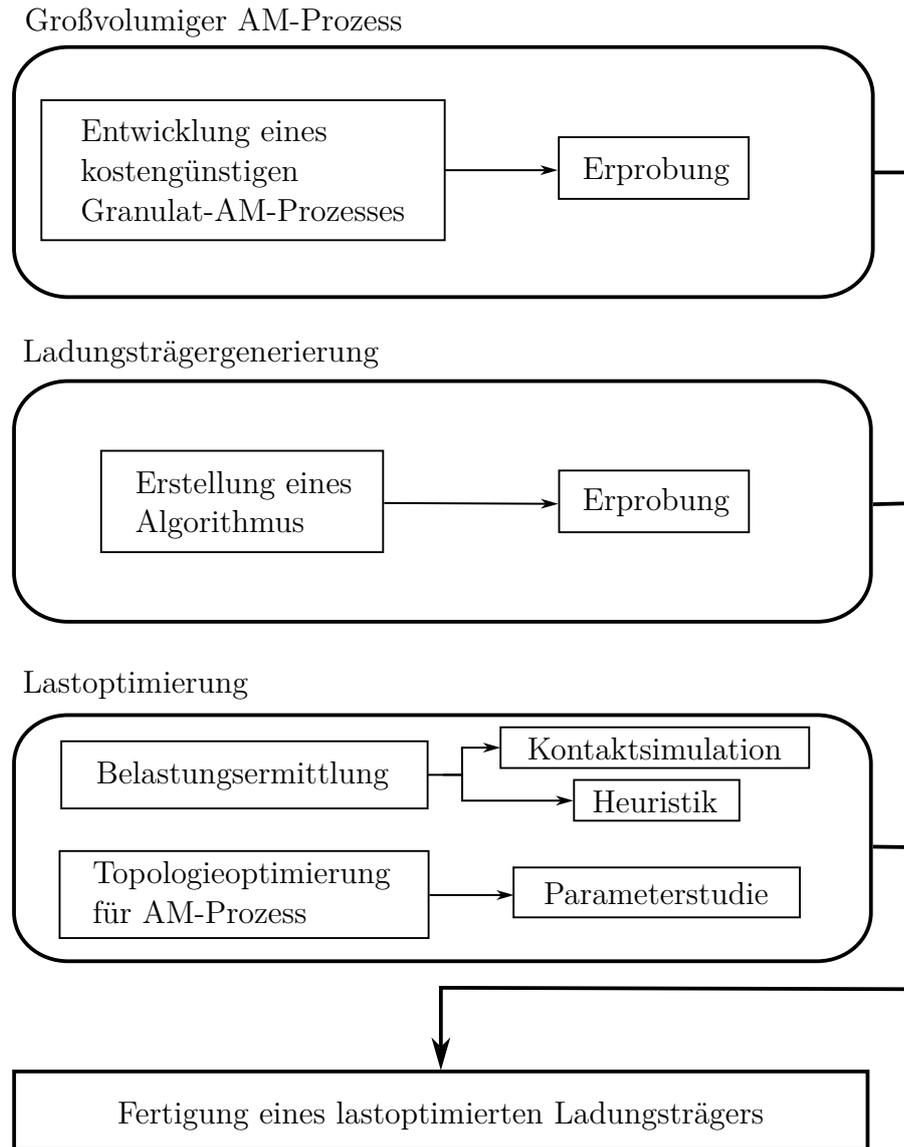


Abbildung 3.1.: Aufbau der Arbeit

Im Anschluss an die Entwicklungen werden aller Teilergebnisse in einem Prozess kombiniert und ein Demonstrator gefertigt. Aus wirtschaftlichen Gründen wird an dieser Stelle auf die Fertigung eines großvolumigen Bauteils verzichtet und als Fertigungssystem ein Desktop-3D-Drucker verwendet, da das Fertigungssystem zuvor schon isoliert untersucht worden ist. Es folgt abschließend eine Betrachtung der wirtschaftlichen Bedeutung der Entwicklung sowie eine Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick.

4. Schmelzedosierung im großvolumigen 3D-Druck

Basierend auf dem Stand der Technik wird zur Verbesserung der Schmelzedosierung im 3D-Druck ein neuartiges Konzept untersucht. Nach *Chesser et al.* [Che+19] ist eine Schmelzepumpe, die sich durch einen direkten Zusammenhang zwischen der Pumpendrehzahl und dem geförderten Volumen auszeichnet, geeignet, die Schmelze aus einem Schneckenextruder genauer zu dosieren. Als Hindernis wird die hohe zusätzlich zu beschleunigende Masse am Druckkopf aufgeführt, wenn sowohl der Extruder und als auch die Pumpe daran befestigt werden. Durch den Ansatz von *Khondoker et al.* [KS19a], den Schneckenextruder neben dem 3D-Drucker anzuordnen und über einen beheizten Schlauch mit dem Druckkopf zu koppeln, kann diese Problematik gelöst werden. Im BAAM kann eine zusätzliche Schmelzepumpe die Materialdosierung verbessern. Der deutlich schwerere Schneckenextruder wird nicht mitbewegt und zur Dosierung wird eine Zahnradpumpe am Druckkopf befestigt und beide Komponenten über einen beheizten Schlauch verbunden. In der Literatur ist ein solches Fertigungssystem unbekannt. Wegen des Logistikanwendungsfalls wird das Druckbrett entsprechend einer Europoolpalette mit 1200×800 mm [DIN03] dimensioniert.

Das mechanische Positioniersystem (siehe **Abbildung 4.1**) wird in Portalbauweise konstruiert, wobei der Rahmen aus Aluminiumsystemprofilen besteht. Die Brücke wird durch zwei Zahnriemen angetrieben, die über die Antriebswelle synchronisiert sind und die y -Achse bilden. Auf der Brücke wird der Druckkopf über einen Riemen entlang der x -Achse bewegt. Die Zustellung in der z -Achse wird durch eine Höhenverstellung des Druckbetts über drei synchronisierte Kugelumlaufspindeln realisiert. Die Steuerung der Anlage wird mit der Software LinuxCNC [Epl21] durchgeführt, wobei die Motortreiber im Takt/Richtungs-Modus angesteuert werden.

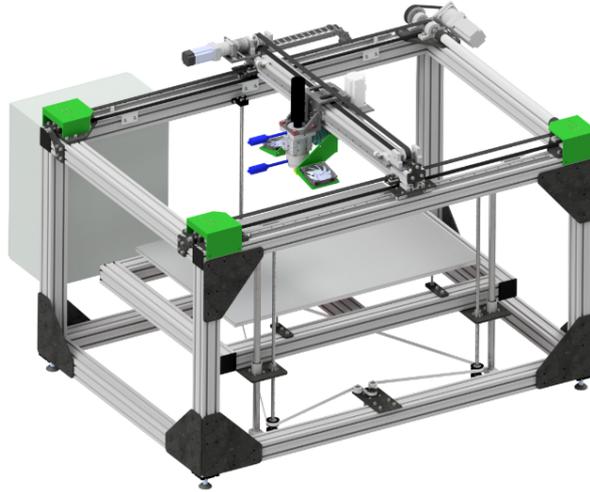


Abbildung 4.1.: Gesamtansicht des Positioniersystems

4.1. Schmelzedosierung ohne Zahnradpumpe

Um den Einfluss der Schmelzpumpe einschätzen zu können wird das System zunächst getestet, wobei die Pumpe lediglich durch eine beheizte Düse ersetzt wird. In der Düsenaufnahme sind zwei Heizpatronen mit je 200 W Heizleistung verbaut. Für die Temperaturmessung wird ein PT100-Sensor verwendet. Die Heizleistung wird durch Pulsweitenmodulation (PWM) mithilfe von einem Solid State Relais (SSR) reguliert, wobei die PID-Regelung von einem *Controllino Mega* übernommen wird. Zunächst wird die Materialdosierung alleinig von dem Schneckenextruder der Fa. *EXTRUDEX Kunststoffmaschinen* vom Modell *EDN30-25D* durchgeführt. Für die Verbindung des Schneckenextruders mit dem Druckkopf wird ein 3 m langer beheizter Schlauch der Fa. *Kletti* verwendet. Der Schlauch hat einen Innendurchmesser von 16 mm und besitzt eine PTFE-Innenseele mit einem Edelstahl-Schutzgeflecht. Die maximale Temperatur wird mit 250 °C angegeben sowie ein maximaler Betriebsdruck von 240 bar bei Maximaltemperatur. Weiterhin beträgt die Heizleistung 960 W und für die Temperaturregelung ist ein PT100-Sensor verbaut.

Für die Versuche wird PLA 4043D [Natnd] Granulat von *NatureWorks* verwendet, das eine Schmelzflussrate (*engl.*: Melt Flow Rate) (MFR) von 6 g/10 min bei 210 °C mit einer Belastung von 2,16 kg aufweist (ASTM D1238). Die Dichte des Materials beträgt 1,24 g cm⁻³. Im Datenblatt wird die Schmelztemperatur mit dem Bereich von 145 – 160 °C und die empfohlene Verarbeitungstemperatur im 3D-Druckverfahren mit dem Bereich 190 – 230 °C angegeben. Das verwendete PLA wird vor dem Druckprozess mindestens vier Stunden bei 80 °C getrocknet.

Bevor das System für den 3D-Druck eingesetzt werden kann, ist es erforderlich, den Zusammenhang zwischen dem gemessenen Druck an der Düse und der Düsentemperatur zu dem Massendurchsatz zu ermitteln. Prinzipiell ist der Volumenstrom der Messgröße von Interesse, da diese Größe während des Druckprozesses gesteuert wird. Jedoch ist die Messung des Volumenstroms mit einem viel größeren Aufwand verbunden, sodass stattdessen der Massenstrom erfasst wird. Eine Umrechnung in den Volumenstrom ist nachträglich bei Kenntnis der Materialdichte möglich. Der Versuchsaufbau zur Massenstrommessung besteht aus einer Präzisionswaage der Fa. *Kern* vom Modell KB2000-2N, welche es ermöglicht, den aktuell gemessenen Wert über eine serielle Schnittstelle auszulesen. Die Waage und ein darauf stehender Behälter werden unter der stillstehenden Düse platziert.

Es wird ein quadratisches Modell in Abhängigkeit des Düsendrucks und der Düsentemperatur berechnet. Es ist daher möglich, einen Versuchsplan im zentral zusammengesetzter Aufbau (*engl.*: Central Composite Design) (CCD) zu verwenden. Ein solcher Versuchsplan hat den Vorteil, dass dieser so erstellt werden kann, dass die Spalten des Versuchsplans orthogonal zueinander sind. Dies bedeutet, dass die Schätzwerte des quadratischen Modells unabhängig voneinander sind und einen möglichst schmalen Vertrauensbereich aufweisen [Kle13]. Ein CCD-Versuchsplan ist um einen zentralen Punkt herum aufgebaut, der für diesen Anwendungsfall bei 200 °C und einem Düsendruck von 15 bar gewählt wird. Als Basis für die Wahl des mittleren Düsendrucks dienen Vorversuche, bei denen der maximale Düsendruck ermittelt wird. Der begrenzende Faktor im System ist der zulässige Maximaldruck des Heizschlauchs. Unter Einhaltung einer Sicherheitsreserve kann an der Düse ein maximaler Druck von 30 bar eingestellt werden. Die angefahrenen Messpunkte sind in **Abbildung 4.2** dargestellt. Es werden stationäre Massenströme ermittelt, sodass vor dem Beginn einer Messung solange extrudiert wird, bis keine Änderungen der Temperatur, des Drucks und des Massenstroms mehr erfasst werden. Eine Messung dauert 30 s und der Massenstrom wird über den Zeitbereich gemittelt. Bei der Versuchsdurchführung wird, aufgrund der langen Zeit bis sich ein stationärer Zustand einstellt, auf eine Randomisierung der Versuchsreihenfolge verzichtet. Der Versuch im Mittelpunkt wird achtmal durchgeführt und an jedem weiteren Punkt fünfmal. Die Versuchsergebnisse sind in Anhang A aufgeführt.

Anhand der Messergebnisse wird ein quadratisches Modell mit Wechselwirkungen 1. Ordnung berechnet. Es wird eine angepasste Anpassungsgüte von $R^2 = 0,89$ erreicht, wobei der Achsenabschnitt, die Düsentemperatur, der Düsendruck sowie der quadratische Einfluss einen signifikanten Anteil am Modell haben. Die Modellgleichung wird in Anhang A aufgeführt.

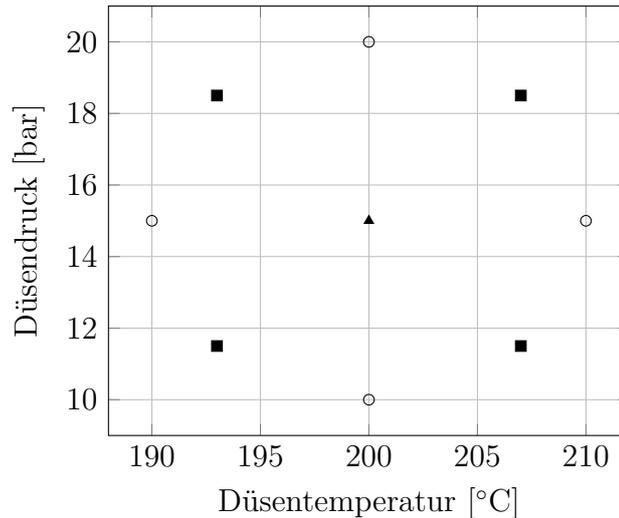


Abbildung 4.2.: CCD-Versuchsplan zur Ermittlung der Massenstromkennlinie

Im nächsten Schritt wird das ermittelte Modell in die Druckersteuerung integriert. Mithilfe der Dichte des verwendeten Materials $\rho_{\text{mat}} = 1,24 \text{ g cm}^{-3}$ wird der Massenstrom in einen Volumenstrom umgerechnet. Es wird angenommen, dass die Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur und dem Druck vernachlässigbar ist. Der GCode, der zur Steuerung der Anlage verwendet wird, enthält Steuerungsinformationen eine Filamentvorschubsachse. Bei der Generierung der Steuerungsprogramme wird von einem Filamentdurchmesser von 3 mm entsprechend dem Düsendurchmesser ausgegangen. Aus diesen Informationen wird der für die Steuerung erforderliche Volumenstrom berechnet. Über das Modell wird der Düsendruck für die Regelung ermittelt. Es zeigt sich jedoch, dass eine Druckregelung an der Düse mit trivialen Mitteln nicht möglich ist. Der Druckprozess erfordert eine dynamische Anpassung des Massenstroms und des korrelierenden Druckabfalls über die Düse. Bei den Versuchen zur Modellerstellung entspricht der Druck am Düsenaustritt dem Atmosphärendruck. Im Druckprozess ist dies nicht mehr der Fall. Der Kunststoff wird durch einen Spalt mit Layerhöhe gepresst, sodass sich ein erhöhter Gegendruck einstellt, welcher sich abhängig von der Bauteilgeometrie unter der Düse ändert. Anstelle der Druckregelung wird eine Steuerung der Extruderdrehzahl verwendet. Hierfür wird, unter gleichen Bedingungen wie bei den Versuchen zur Massenstrommodellerstellung, der Zusammenhang zwischen dem stationären Düsendruck und der Extruderdrehzahl ermittelt.

Es zeigt sich, dass mit dem beschriebenen System Bauteile gefertigt werden können, die keine schnelle Anpassung des Materialdurchsatzes erfordern, wie z. B. spiralförmig gedruckte Vasen. In **Abbildung 4.3** ist der verwendete Druckkopf zu sehen und eine im Druck befindliche Vase. Diese Art von Bauteil ohne Boden und mit nur einer Außenwand kann in Form einer Spirale ohne diskrete Schichten gefertigt werden. Die Schichtdicke beträgt bei dem gezeigten Bauteil 3 mm.

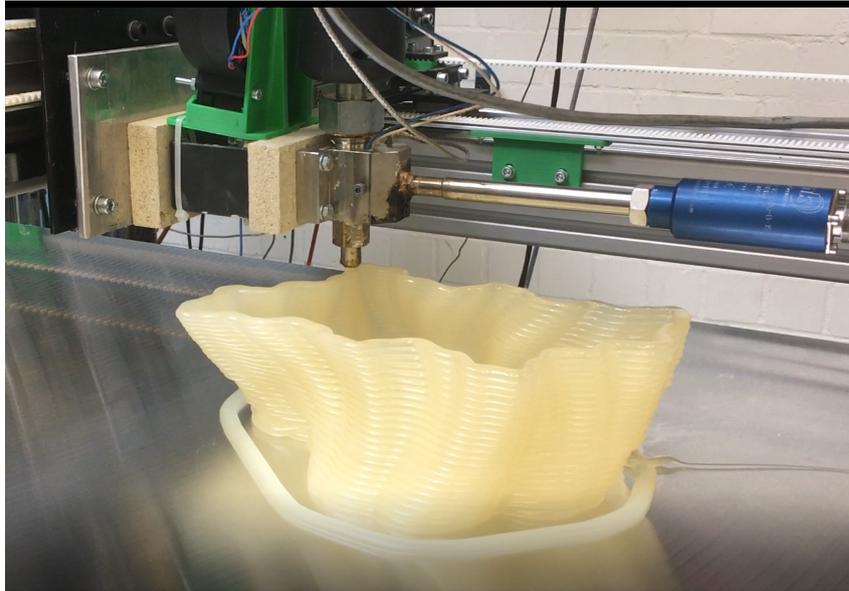


Abbildung 4.3.: Druckkopf ohne Schmelzepumpe

Eine Änderung des Massenstroms durch Anpassung der Extruderdrehzahl ist nahezu unmöglich. Durch den Heizschlauch ergibt es eine lange Regelstrecke mit einer langen Totzeit, sodass eine Änderung der Extruderdrehzahl erst nach ca. 20 s zu einer Änderung des Düsendrucks führt. Zusätzlich fungiert der Heizschlauch als elastischer Schmelzepuffer, sodass der Einfluss der Änderung der Extruderdrehzahl zusätzlich verringert wird. Bei komplexeren Bauteilen mit scharfen Kurven in den Bahnen wird in den Kurven zu viel Material extrudiert, welches zu Abweichungen in der Bauteilgeometrie führt. Wird ein rechteckiger Boden gedruckt, führt das nachlaufende Material dazu, dass sich Materialanhäufungen bilden. Bei Sprüngen ohne Materialförderung läuft weiter Material nach, sodass Fäden gezogen werden. Ein Beispiel ist in **Abbildung 4.4** zu sehen. Das gezeigte Bauteil ist ein Quader mit zylindrischer Vertiefung. Im mittleren Bereich der Seiten befinden sich zusätzlich Aussparungen, sodass Lücken in den Wänden entstehen. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Massenstrom nicht vollständig gestoppt werden kann, da im Inneren des Bauteils eine Vielzahl an Fäden zu erkennen sind. Besonders deutlich tritt das Problem an den seitlichen Aussparungen auf. An diesen Stellen wird eine unerwünschte dünnere Wand aufgebaut, die jedoch nicht stabil genug ist, dass diese sich selbst aufrecht halten kann.

4.2. Schmelzedosierung mit Zahnradpumpe

Zur Verkürzung der Regelstrecke wird der Experimentaldruker angepasst. Eine Möglichkeit ist der Verzicht auf den Heizschlauch und die Befestigung des Schneckenextruders direkt



Abbildung 4.4.: Ein Bauteil mit Lücken gedruckt ohne Schmelzepumpe

an der Brücke des Druckers. Dies hätte mehrere Nachteile. Zum einen hat der verwendete Schneckenextruder eine Masse von ca. 140 kg. Diese Masse zu bewegen erfordert große Antriebe und einen Rahmen, der ausgelegt ist, die Reaktionskräfte aufzunehmen. Zum anderen ist ein solcher Schneckenextruder nicht dazu geeignet, das Polymer genau und dynamisch zu dosieren.

Eine andere Möglichkeit ist es, eine aktive Dosiereinheit dem Heizschlauch nachzuschalten. Am Drucker wird eine Zahnradpumpe der Fa. *WITTE PUMPS & TECHNOLOGY* vom Typ *EXTRU-IIB 4,7-22-22* am Druckkopf befestigt. Die Pumpe wird mit vier Heizpatronen mit je 125 W Leistung beheizt. In den Flanschen befinden sich vor der Pumpe drei und hinter der Pumpe zwei 200 W Heizpatronen. In der Pumpe und jedem Flansch befindet sich ein PT100-Tempersensoren, sodass die Pumpen- und Flanschttemperaturen individuell eingestellt werden können. Vor und hinter der Pumpe wird in den Flanschen zusätzlich der Schmelzedruck gemessen. Nach Herstellerangaben kann die Pumpe einen Kunststoffmassenstrom von 5 kg h^{-1} bis 20 kg h^{-1} fördern. Im Betrieb kann am Pumpeneingang ein Druck von 5 bar bis 100 bar anliegen und die Pumpe ist geeignet, Materialien mit einer Viskosität von 1000 Pa s bis 8000 Pa s zu verarbeiten. Da die Pumpe beheizt ist, soll diese möglichst thermisch vom Druckerrahmen entkoppelt werden. Die Pumpe wird über einen Flansch an der Brücke verschraubt, wobei zur Isolation Scheiben aus *S4000 HT* der Fa. *Brandenburger Isoliertechnik* zwischen Pumpe und Brücke sowie unter den Schraubköpfen verwendet werden. Das Material ist dauerhaft temperaturbeständig bei 230°C und hat bei 200°C eine Druckfestigkeit von 200 N mm^{-2} . Als Antrieb wird ein 750 W Servomotor mit einem Nenndrehmoment von 2,39 N m verwendet, der über ein Winkelgetriebe mit einer Untersetzung von 20 und eine Stahllamellenkupplung mit der Pumpe verbunden ist. Am Antrieb ist keine zusätzliche Isolation erforderlich, da

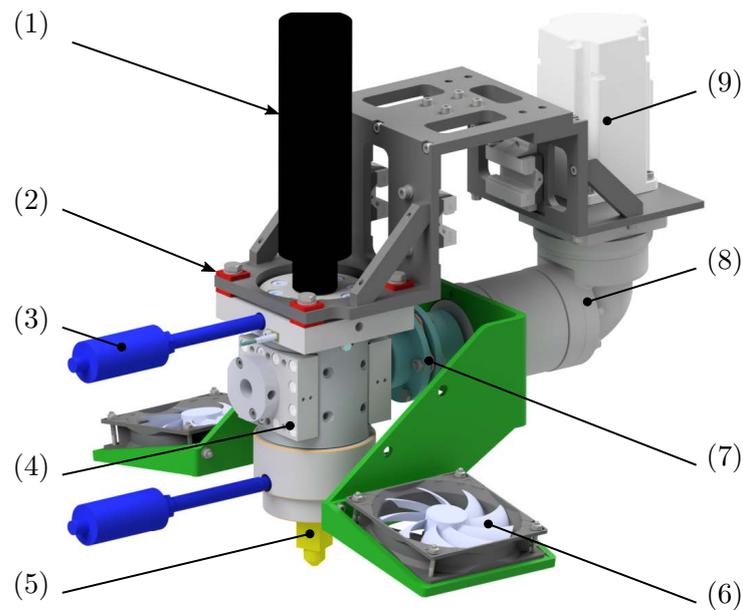


Abbildung 4.5.: Druckkopf mit Schmelzepumpe

(1) beheizter Schlauch, (2) thermische Isolation, (3) Drucksensor, (4) Zahnradpumpe, (5) Düse, (6) Lüfter, (7) Kupplung, (8) Winkelgetriebe, (9) Servomotor

die Kupplung für Einsatztemperaturen bis 230 °C geeignet ist und diese das Getriebe ausreichend isoliert.

Am Pumpenauslass befindet sich ein weiterer Flansch, in dem die Düse eingeschraubt ist. Die Düsenbohrung verläuft vom Pumpenaustritts mit 9,7 mm konisch zum Austrittsdurchmesser mit 3 mm. Der Druckkopf mit der Zahnradpumpe wird in **Abbildung 4.5** gezeigt. Die Verbindungen der Wasserkühlung für die Gewindewellendichtungen der Pumpenwelle sind nicht dargestellt. Das Gewicht des Druckkopfs beläuft sich auf ca. 21 kg (Gewicht der Pumpe ca. 13 kg, Getriebe 5,4 kg, Motor 2,66 kg). Zur Kühlung des abgelegten Materials befinden sich zwei 120 mm-Axiallüfter am Druckkopf, deren Geschwindigkeiten einstellbar sind.

Da der Wirkungsgrad der Pumpe von der Materialviskosität und dem Betriebspunkt abhängt, wird der Zusammenhang zwischen Pumpendrehzahl und dem geförderten Massenstrom in einem Experiment ermittelt. Die Versuche ohne Schmelzepumpe haben 200 °C als geeignete Drucktemperatur ergeben. Für die weiteren Versuche bleibt die Drucktemperatur daher konstant. Der Schneckenextruder wird im Folgenden in einer Druckregelung betrieben, sodass vor der Zahnradpumpe ein Schmelzedruck von 20 bar herrscht. Die Temperaturen der Pumpe und der Flansche, und somit auch der Düse, betragen 200 °C. In der Fertigungsanlage begrenzt der Schlauch den Massenstrom bei dem verwendeten Material auf 5 kg h⁻¹. Der Druckabfall über den Schlauch ist so groß, dass bei Massenströmen von

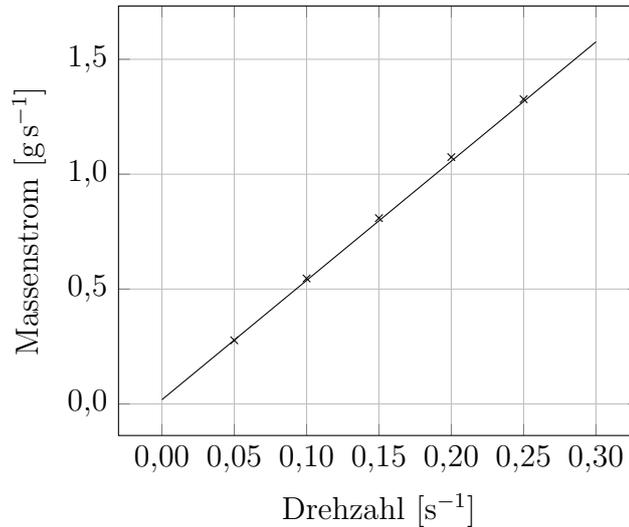
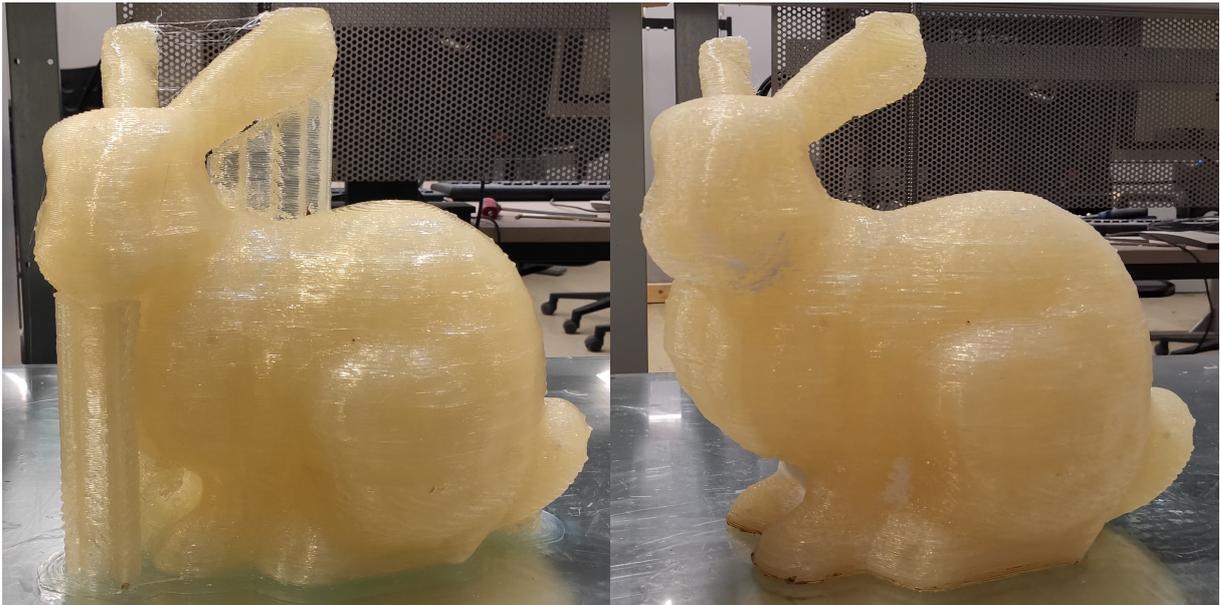


Abbildung 4.6.: Messung des von der Schmelzepumpe geförderten Massenstroms bei einer Temperatur von 200 °C

mehr als 5 kg h^{-1} sich am Schlaucheintritt ein Druck größer als 250 bar einstellt, sodass der Schlauch für den Dauerbetrieb unzulässig belastet wird. Der Versuchsablauf entspricht dem zur Ermittlung der Schneckenextruderkennlinie. Die Messdaten sind im Anhang B beigefügt und im Diagramm in **Abbildung 4.6** grafisch dargestellt. Der von der Pumpe geförderte Massenstrom hängt linear von der Pumpendrehzahl ab. Eine lineare Regression führt zu einem Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,9994$.

In der Druckersteuerung wird die Extrudersteuerung durch die Pumpensteuerung ersetzt. Die Zahnradpumpe kann deutlich dynamischer gesteuert werden, sodass das Rückwärtsdrehen der Pumpe, analog zum Zurückziehen eines Kunststofffilaments, zum Stoppen des Schmelzeflusses möglich ist. Durch die Eliminierung des Schlauchs als Puffer kann die Schmelze genauer dosiert werden. Durch diese Änderungen am System wird es möglich, komplexe Bauteile inklusive von Stützstrukturen zu fertigen. Als Demonstrator wird das *Stanford Bunny* [Sta94], um den Faktor 4 vergrößert, gefertigt. Als Bauteilabmessungen ergeben sich somit $1340 \times 1072 \times 1380 \text{ mm}$. Im Vergleich zu vorherigen Versuchen werden die Druckparameter angepasst. Die Schichtdicke wird auf 1 mm reduziert, um den Stufeneffekt und die Wärmekapazität einer Schicht zu verringern. Zu große Schichtwärmekapazitäten führen dazu, dass der Kunststoff nicht ausreichend schnell abkühlt, sodass die unteren Schichten bei dem Ablegen einer neuen Schicht verformt werden. Als Druckgeschwindigkeit wird 180 mm s^{-1} gewählt.

Das Bauteil wird mit zwei massiven Außengrenzen (Perimetern) mit einer Breite von je 3 mm und 15 % Gyroid-Infill im Inneren aufgebaut. Als Grenzwinkel für das Abstützen von Überhängen wird $\Phi_{\max} = 60^\circ$ gewählt. Der z -Abstand zwischen den Stützstrukturen



(a) Fertiges Bauteil mit Stützstruktur

(b) Nachbearbeitetes Bauteil

Abbildung 4.7.: Druck des *Stanford Bunny*

und dem Bauteil beträgt 2 mm und der Abstand in der xy -Ebene 6 mm. Zum Stoppen der Materialextusion wird die Zahnradpumpe rückwärts gedreht. In den Slicereinstellungen wird ein Rückzug des Filaments von 40 mm festgelegt. Über den als Rechengröße verwendeten Filamentdurchmesser von 3 mm ergibt sich ein zurückgezogenes Volumen von $282,74 \text{ mm}^3$. Die Rückzugsgeschwindigkeit beträgt $28\,270 \text{ mm}^3 \text{ s}^{-1}$. Die Pumpe dreht nur vor einer Positionsänderung rückwärts, wenn die Positionsänderung mit gestoppten Massenstrom länger als 25 mm ist.

Das fertige Bauteil ist in **Abbildung 4.7** zu sehen. Der Fertigungsprozess hat 4 h 21 min gedauert und es sind 3,46 kg an Kunststoff verarbeitet worden. Nach der Entfernung der Stützstrukturen beträgt das Gewicht des Bauteils noch 3,15 kg

Zur Ermittlung der Fertigungstoleranzen wird das gedruckte Bauteil mit einem 3D-Scanner der Fa. *Artec* vom Typ *Eva lite* abgescannt. Die Auflösung des Scanners beträgt 0,5 mm mit einer Punktgenauigkeit von 0,1 mm [Art21]. Der Scan wird anschließend mit der STL-Datei verglichen, die für die Generierung der Werkzeugbahnen verwendet wurde. Dabei kommt die Software *GOM Inspect 2019* zum Einsatz, die die Abweichungen farbcodiert auf der Scanoberfläche dargestellt. Das Resultat ist in **Abbildung 4.8** zu sehen. Neben der Farblegende ist die Verteilung der Abweichungen dargestellt.

Die Abweichungen befinden sich primär im Bereich zwischen $-1,5 \text{ mm}$ und $+1,5 \text{ mm}$ und sind annähernd normalverteilt. Vereinzelt treten jedoch Abweichungen mit deutlich

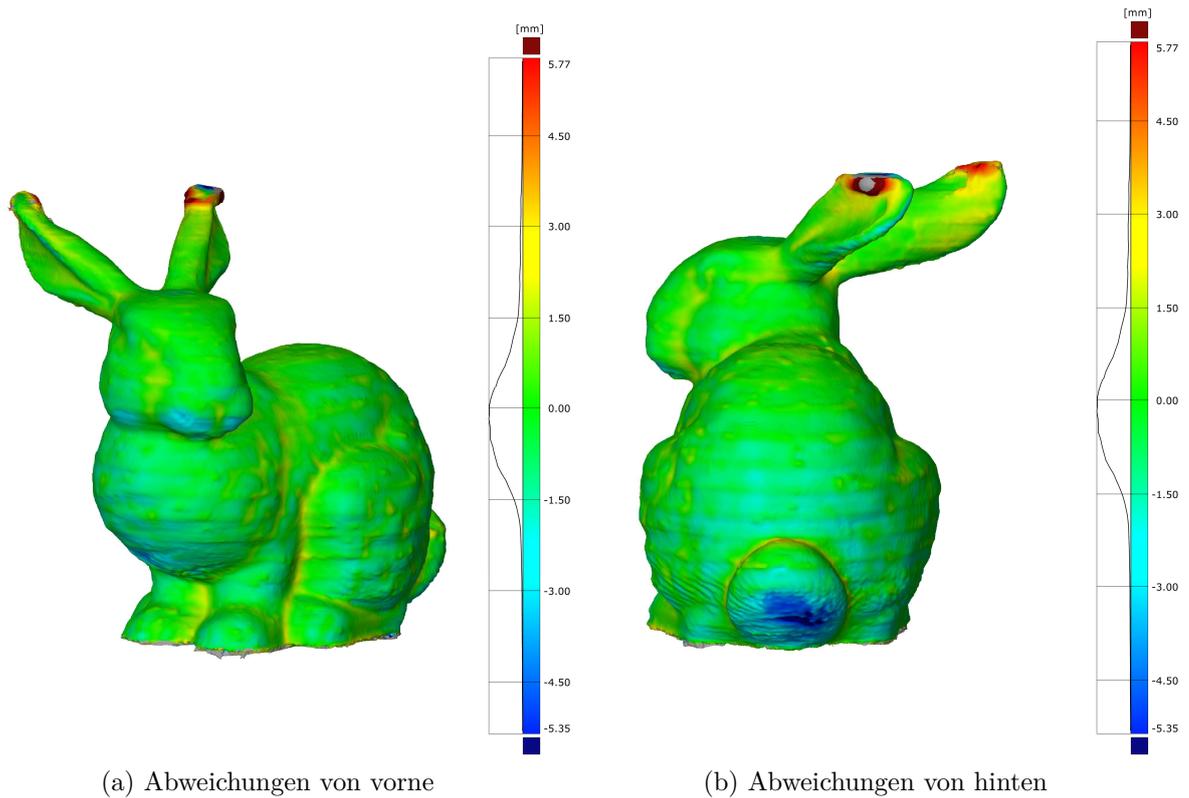


Abbildung 4.8.: Formabweichungen des gedruckten *Stanford Bunny*

größeren Beträgen auf. Die größten negativen Abweichungen mit Beträgen von bis zu 5,35 mm treten an vormals abgestützten Überhängen auf. Je steiler der Überhang, desto stärker sacken die Schichten über der Stützstruktur ab, sodass dort die Schichten nicht aufeinander gepresst werden und sich nicht stabil verbinden. Abgesackte Schichten bleiben bei der Entfernung der Stützstruktur an dieser hängen und werden ebenfalls beseitigt. Die größte negative Abweichung befindet sich daher am steilsten Überhang unterhalb des Kaninchenschwanzes. Die größten positiven Abweichungen werden an den Spitzen der Kaninchenohren detektiert. Nicht abgekühlter Kunststoff wurde beim Druck zu den Seiten weggedrückt, sodass die Konturen verbreitert sind. Das Problem ist an den Ohren aufgetreten, da die Zeit, die jeder Schicht bleibt, um abzukühlen, durch die relativ kleinen Konturen zu kurz wird. Die Druckgeschwindigkeit wurde adaptiv an die geringere Schichtzeit angepasst, jedoch treten bei sehr geringen Massenströmen Dosierungsprobleme auf. Abhilfe kann eventuell ein angepasstes Kühlkonzept mit höherer Leistung und präziserer Fokussierung unter der Düse schaffen.

Bei der Ermittlung der Fertigungsgenauigkeit sind nur Außenkonturen untersucht worden. Noch offen ist die Untersuchung der Fertigungstoleranzen an Innenkonturen, wie z. B. bei Ladungsträgern mit einer Vertiefung im Bauteil. Überhänge sind dort nicht von Interesse, da diese nicht vorkommen, da ansonsten Hinterschnidungen entstehen.

5. Algorithmus zur Generierung eines Ladungsträgers

Zur Verhinderung redundanter Konstruktionstätigkeiten für Ladungsträger wird ein Algorithmus entwickelt, der automatisiert einen passenden Träger aus einer Ladungsgeometrie generiert, und dieser in MATLAB implementiert. Der Algorithmus ist in einer Veröffentlichung [Kni+21] vorgestellt und der MATLAB-Quellcode öffentlich zum Download angeboten worden [KS19b]. Der Algorithmus generiert einen Ladungsträger, in den ein Ladungsgut von oben eingelegt werden kann. Dafür müssen zwei Anforderungen berücksichtigt werden:

1. Spiel zwischen Ladung und Träger
2. keine Hinterschneidungen im Ladungsträger

Das Spiel ist erforderlich, um unvermeidbare Fertigungstoleranzen des Ladungsträgers und Ungenauigkeiten in der Ermittlung der Ladungsgutgeometrie zu kompensieren. Daraus folgt, dass die Oberfläche der Ladungsgeometrie zunächst mindestens um den zu erwartenden Betrag der Ungenauigkeiten nach außen versetzt werden muss.

Hinterschneidungen im Ladungsträger können bei Verwendung Boolescher Operatoren zur Ladungsträgergenerierung auftreten, bei dem die Differenz zwischen einem Quader und der Ladungsgeometrie berechnet wird. Wird die Breite der Ladungsgeometrie parallel zur Grundfläche mit zunehmender Höhe in einem Abschnitt schmaler, so entstehen Hinterschneidungen und das Ladungsgut kann nicht in den Träger gelegt werden. Eine Möglichkeit, Hinterschneidungen zu verhindern, besteht darin, nur das Ladungsgut bis zu einer geeigneten Höhe zu versenken. Durch ein solches Vorgehen kann bei beliebigen Bauteilen jedoch nicht garantiert werden, dass eine ausreichende seitliche Abstützung gegeben ist. Die Differenzbildung ist daher keine geeignete Generierungsmethode. Hinterschneidungen lassen sich sicher vermeiden, wenn eine Methode benutzt wird, die sich an der Modellvorstellung eines Nagelbretts orientiert.

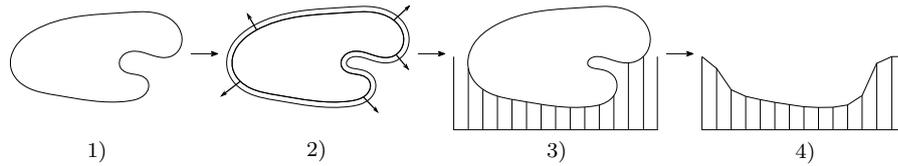


Abbildung 5.1.: Darstellung des Algorithmuskonzepts [Kni+21]

Als Eingangsgröße für den Algorithmus wird zunächst ein Oberflächenmodell des Ladungsguts benötigt. Falls eigene Güter verpackt werden sollen, ist es möglich, ein Modell aus CAD-Daten der Konstruktion zu exportieren. Sollten keine CAD-Daten vorhanden sein, zum einen, weil es sich nicht um ein Gut handelt, das mithilfe von CAD designt wurde, z. B. bei künstlerischen Handarbeiten, oder zum anderen, weil die Konstruktion von Dritten durchgeführt wurde und die Konstruktionsdaten der Geheimhaltung unterliegen, müssen die Geometriedaten anderweitig beschafft werden. Ein geeignetes Mittel ist in einem solchen Fall ein *Reverse Engineering* mit einem 3D-Scanner.

Das Konzept des Algorithmus wird in **Abbildung 5.1** verdeutlicht. Nachdem die Geometriedaten in die Software geladen sind (1), werden die Oberflächen nach außen versetzt (2). Anschließend werden, der Nagelbrettvorstellung folgend, Schnittpunkte zwischen den „Nägeln“ und der versetzten Geometrie bestimmt (3), die schließlich für die Erstellung einer Oberflächenrepräsentation benutzt werden (4).

5.1. Laden der Geometrie

Die Ladungsgeometrie wird aus einer STL-Datei geladen und in eine Form gebracht, die dazu geeignet ist, Modifikationen an den Oberflächen vornehmen zu können. Es wird eine Funktion [Joh11] verwendet, die Mengen von Facetten \mathcal{F} , Eckpunkten (engl.: *vertices*) \mathcal{V} und Normalenvektoren \mathcal{N} zurückgibt. Die Oberflächenrepräsentation besteht aus n_f Facetten mit n_v Eckpunkten, sodass sich eine Matrix \mathbf{F}_c mit den Dimensionen $n_f \times 3$ ergibt. Jede Zeile definiert eine Facette durch die Zuordnung von Indizes in der Eckpunktmatrix \mathbf{V} . Die Eckpunktmatrix \mathbf{V} enthält zeilenweise die Koordinaten eines Punktes in einem kartesischen Koordinatensystem. In der resultierenden $n_v \times 3$ Matrix enthalten die Spalten die Koordinaten in den Achsen x , y und z . Die Redundanzen, die in STL-Dateien vorhanden sind, werden durch die Zuordnung der Eckpunkte zu den Facetten über einen Indexverweis entfernt. Die Matrix \mathbf{N} mit den Dimensionen $n_f \times 3$ enthält zeilenweise die Normaleneinheitsvektoren der Facetten.

5.2. Versetzen der Oberflächen

Die Wahl des Algorithmus zur Versetzung der Ladungsgutoberflächen nach außen findet unter Abwägung der Qualitätsanforderungen und des Rechenaufwands statt. Weil die Anforderungen an die Oberflächenqualität des Ladungsguts nicht hoch sind, ist es nicht sinnvoll, viel Rechenzeit zu investieren, um Rundungen besser abzubilden und Selbstüberschneidungen von Facetten zu verhindern, insbesondere da im Allgemeinen der Versatzbetrag im Vergleich zu den Bauteildimensionen gering ist. Darüber hinaus soll der Versetzungsalgorithmus möglichst keine höheren Anforderungen an die Ladungsträgergeometrie stellen, als für die Ladungsträgererzeugung mit dem Nagelbrettmodell erforderlich sind.

Es ist gewollt, dass Ladungsträger aus unvollständigen Oberflächenmodellen von Ladungsgütern generiert werden können, sodass Versetzungsalgorithmen, die geschlossene Triangulierungen benötigen, nicht infrage kommen. Daher wird die Versetzung durch Verschiebung der Triangulierungseckpunkte ohne Aufteilung durchgeführt, weil das Oberflächenmodell als einzige Zusatzanforderungen korrekt ausgerichtete Facettennormalenvektoren benötigt.

Werden Ladungsgutgeometriedaten aus einer CAD-Konstruktion abgeleitet, können die Facetten stark unterschiedliche Größen haben, sodass ein gewichteter Mittelwert der Facettennormalenvektoren als Verschiebungsrichtung verwendet wird. Durch die Gewichtung wird die Versetzungsrichtung unabhängig von der Triangulierung. Auf eine Variation des Versatzbetrages wird verzichtet, da diese hauptsächlich einen Einfluss auf konkave Strukturen hat, und daher für die Ladungsträgergenerierung uninteressant ist. Aus diesen Gründen wird der Algorithmus nach *Thürmer* und *Wüthrich* [TW98] mit Bestimmung der Versatzrichtung durch Gleichung 2.5 implementiert.

Für die Berechnung der Versatzrichtung muss zunächst die Zuordnung $\mathbf{v} \in \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{f} \in \mathcal{F}$ hergestellt werden. Zunächst wird die Verknüpfungsmatrix \mathbf{F}_c in einen Spaltenvektor $\mathbf{F}_c^{\text{lin}}$ transformiert und anschließend anhand der Eckpunktindizes F_i^{lin} sortiert.

$$\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n_f1} & F_{n_f2} & F_{n_f3} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c^{\text{lin}} &= (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, \dots, F_{n_f3})^T \\ &= (F_1^{\text{lin}}, F_2^{\text{lin}}, F_3^{\text{lin}}, \dots, F_{3 \cdot n_f}^{\text{lin}})^T \end{aligned} \quad (5.2)$$

Neben dem sortierten Vektor $\tilde{\mathbf{F}}_c^{\text{lin}}$ werden zusätzlich die ursprünglichen Indizes im Vektor $\mathbf{F}_c^{\text{idx}}$ gespeichert. Die Anzahl der Wiederholungen eines Indexes in $\tilde{\mathbf{F}}_c^{\text{lin}}$ entspricht der Anzahl an Facetten v_n , die den entsprechenden Eckpunkt enthalten. Die eindimensionalen Indizes (i) in $\mathbf{F}_c^{\text{lin}}$ werden über die Zusammenhänge

$$j = \left\lfloor \frac{1}{3} \left(F_{c\ i}^{\text{idx}} + 2 \right) \right\rfloor \quad (5.3)$$

$$k = \left(F_{c\ i}^{\text{idx}} \bmod 3 \right) + 1 \quad (5.4)$$

in zweidimensionale Indizes (j, k) in \mathbf{F}_c umgerechnet.

Mithilfe der Zeilenindizes j wird eine Konnektivitätsmatrix $\hat{\mathbf{F}}_c$ mit den Dimensionen $3n_f \times 3$ erstellt. Die Matrix enthält nacheinander die Konnektivitätsliste der Facetten, an denen der Punkt \mathbf{v}_i beteiligt ist, wobei i der Zeilenindex des Punkts in der Matrix \mathbf{V} mit $i = 1, \dots, n_v$ ist.

Somit ist die Zuordnung $\mathbf{v} \in \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{f} \in \mathcal{F}$ hergestellt. Analog wird eine Matrix $\hat{\mathbf{N}}$ erzeugt, die in gleicher Art die Normalenvektoren zu den Facetten enthält. Anschließend werden aus den Facetten die Kanten \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_2 extrahiert, die sich am Bezugseckpunkt treffen. Jede Zeile in $\hat{\mathbf{F}}_c$ enthält einmal den Index j des Bezugseckpunkts in der Spalte k . Durch Bildung der Differenz jeweils mit den anderen beiden referenzierten Eckpunkte und dem Punkt \mathbf{v}_i werden die Richtungsvektoren der Kanten berechnet. Nachdem die Richtungsvektoren bekannt sind, wird der Winkel α_d zwischen diesen Vektoren bestimmt

$$\alpha_d = \tan^{-1} \left(\frac{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|}{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2} \right), \quad (5.5)$$

wobei zur Invertierung des Tangens die Funktion `atan2()` verwendet wird.

Nachdem die Winkel α_d zur Gewichtung der Summe in Gleichung 2.5 bekannt sind, kann die Gleichung ausgewertet werden und für jeden Punkt $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ein Verschiebungsrichtungsvektor berechnet werden. Zur Auswertung der Gleichung werden zunächst die Summanden aus den Gewichtungswinkeln und den Normalenvektoren gebildet und diese anschließend effizient mittels einer Zellfunktion aufsummiert. Anschließend werden die berechneten Verschiebungsrichtungsvektoren \mathbf{d}_{off} normiert und in der Matrix \mathbf{D}_{off} gespeichert. Zum Abschluss werden die neuen Eckpunktkoordinaten $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{off}}$ berechnet, indem die ursprünglichen Eckpunkte in der Eckpunktmatrix \mathbf{V} um den Betrag b_{off} entlang des Normalenrichtungsvektors verschoben werden. Die neuen Eckpunktkoordinaten werden in Matrixform mit \mathbf{V}_{off} bezeichnet.

$$\mathbf{V}_{\text{off}} = \mathbf{V} + b_{\text{off}} \cdot \mathbf{D}_{\text{off}} \quad (5.6)$$

5.3. Bestimmung der Schnittpunkte

Das „Nagelbrett“ wird durch eine Dixelstruktur modelliert. Ein Dixel ist ein Pixel mit einer Tiefeninformation und wird insbesondere in der Simulation spanender Fertigungsprozesse eingesetzt [van86]. Die Startpunkte $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ der Dixel werden in einem ebenen Gitter parallel zur xy -Ebene angeordnet. Die z -Koordinaten der Startpunkte z_0 werden entsprechend der Bodendicke t_b des resultierenden Ladungsträgers gewählt. Der Zusammenhang zwischen t_b und z_0 wird beschrieben durch

$$z_0 = \min \{v_z : \forall \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \mathcal{V}_{\text{off}}\} - t_b, \quad (5.7)$$

wobei v_x , v_y und v_z die entsprechenden Koordinaten des Eckpunkts \mathbf{v} in der Menge der Eckpunkte \mathcal{V}_{off} sind. Ein Dixel wird als Gerade parallel zur z -Achse in positive Koordinatenrichtung beschrieben, sodass für jeden Startpunkt $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ folgt:

$${}^p g(t) = \mathbf{p} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t > 0. \quad (5.8)$$

Die z -Komponente des Dixels ${}^p g(t)$ wird mit ${}^p g_z(t)$ bezeichnet.

Ein Dixel kann keine, eine oder mehrere Facetten des Oberflächenmodells schneiden. Wenn nur eine Facette geschnitten wird bedeutet dies, dass das Oberflächenmodell nicht geschlossen ist. Für den entwickelten Algorithmus ist ein defektes Modell, z. B. aus einem 3D-Scan, kein Problem. Es ist daher prinzipiell möglich, dass nur die Unterseite einer Geometrie gescannt wird und trotzdem die Ladungsträgergenerierung nicht behindert wird. Eine nachfolgende Kontaktsimulation ist jedoch nur mit einem vollständigen und intakten Ladungsgutmodell möglich. Die Menge der z -Komponenten der Schnittpunkte eines Dixels ${}^p g(t)$ und der Ladungsgutgeometrie wird definiert durch

$${}^p \mathcal{I}_z = \{{}^p g_z(t_i) : t_i \text{ so, dass } {}^p g(t_i) \text{ in einer Facette } \mathbf{f} \in \mathcal{F} \text{ liegt}\}, \quad (5.9)$$

wobei der Dixel einen Startpunkt $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ hat. Bei einem Dixel mit mehr als einem Schnittpunkt wird die endgültige Tiefe eines Dixels d_p berechnet mit

$$d_p = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\min\{{}^p \mathcal{I}_z\}}{r_z} \right\rfloor r_z & \text{wenn } {}^p \mathcal{I}_z \neq \emptyset \\ \max(d_p) & \text{wenn } {}^p \mathcal{I}_z = \emptyset, \end{cases} \quad (5.10)$$

wobei r_z die Schichtdicke beim AM ist. Wenn also ein Dixel das Oberflächenmodell des Ladungsguts trifft, wird dieser unter Berücksichtigung der Auflösung in der z -Achse beim

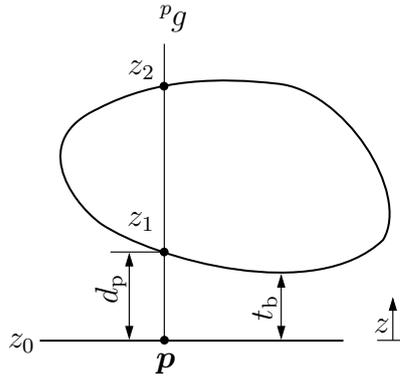


Abbildung 5.2.: Geometrische Größen im Nagelbrettmodell, wobei $\{z_1, z_2\} \in {}^p\mathcal{I}_z$ [Kni+21]

anschließenden Fertigungsprozess möglichst nah unterhalb der Geometrie begrenzt. Ist die Menge der z -Komponenten der Schnittpunkte leer, wird die Tiefe des Dexels auf die größte Tiefe aller Dexel mit Schnittpunkten gesetzt, sodass ein größtmöglicher Seitenhalt gewährleistet wird. Die beschriebenen geometrischen Größen werden in **Abbildung 5.2** illustriert.

Dieses anschauliche Verfahren zur Tiefenberechnung muss für jeden Dexel durchgeführt werden. Eine genaue Abbildung des Ladungsguts durch die Dexelstruktur kann hohe Auflösungen erforderlich machen, sodass sehr viele Berechnungen durchgeführt werden müssen. Es ist daher zwingend erforderlich, das Berechnungsverfahren als effizienten Algorithmus zu implementieren. Im Laufe der Entwicklung des Algorithmus ist es gelungen, die Rechenzeit für einen Beispielladungsträger von mehr als einer halben Stunde auf wenige Sekunden zu reduzieren.

Theoretisch ist es möglich, den Schnittpunkt eines Dexels mit einer Facette zu berechnen, indem zunächst der Schnittpunkt mit der Ebene, in der die Facette liegt, ermittelt wird und anschließend geprüft wird, ob der Schnittpunkt innerhalb der Facette liegt. Wird dieses Vorgehen für die gesamte Dexelstruktur angewendet werden jedoch viele überflüssige Rechenoperationen durchgeführt. Effektiver ist es, erst zu prüfen, ob der Schnittpunkt innerhalb der Facette liegt. Hierfür wird zunächst das dreidimensionale Problem in zwei Dimensionen transformiert, indem die Facetten $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ und die Startpunkte $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ auf die xy -Ebene projiziert werden. Ist $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{xy}$ die Abbildung der Facetten in ebenen Dreiecke \mathcal{F}_{xy} , so kann die Abbildung α rückgängig gemacht werden, indem zuvor die ursprünglichen z -Koordinaten gespeichert werden.

Aus den Dreiecken \mathcal{F}_{xy} wird eine Baumstruktur aus achsenausgerichteten Begrenzungsrahmen (*engl.*: Axis-Aligned Bounding Box) (AABB) erstellt. Ein AABB-Baum ist hierarchisch

aufgebaut und wird in der Kollisionserkennung eingesetzt. Die Baumstruktur einer Geometrie wird durch rekursive Unterteilung in AABBs erstellt, bis eine weitere Unterteilung nicht mehr möglich ist. Anhand der Baumstruktur kann effizient geprüft werden, ob zwei Elemente sich überschneiden, indem zunächst die AABBs auf Überschneidungen geprüft werden. Dabei werden zunächst die größten AABBs geprüft und anschließend wird, im Falle einer Überschneidung, der Ort der Überschneidung genauer lokalisiert, indem die Baumstruktur sukzessiv durchlaufen wird. [van97]

Mithilfe des AABB-Baums wird für jeden projizierten Startpunkt $\mathbf{p}_{xy} \in \mathcal{P}_{xy}$ die Menge der Dreiecke $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_{xy}$ ermittelt, in denen dieser Punkte \mathcal{P}_{xy} liegen. Eine Implementierung in MATLAB liefert [Eng14]. Weiterhin werden die baryzentrischen Koordinaten des Punktes \mathbf{p}_{xy} in den Facetten $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_p$ berechnet. Liegt ein Punkt \mathbf{p}_{xy} in mehreren projizierten Facetten \mathcal{F}_p , so hat der zugehörige Dixel mehrere Schnittpunkte.

Die z -Koordinaten ${}^p g_z$ der Schnittpunkte werden durch baryzentrische Interpolation bestimmt, wobei a_j die baryzentrischen Koordinaten des Schnittpunkts in der xy -Ebene und v_{jz} die z -Koordinate des j ten Eckpunkts einer Facette \mathbf{f} sind.

$${}^p g_z(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^3 v_{jz} a_j, \quad (5.11)$$

Die Kontaktfläche des Ladungsguts mit dem Ladungsträger wird durch die Abbildung $\beta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ bestimmt. Die Kontaktfläche wird zusammengesetzt aus den Facetten des Ladungsguts, die den Schnittpunkten mit minimaler z -Koordinate entsprechen.

$$\beta(\mathbf{p}) = \begin{cases} \alpha^{-1}(\mathbf{f}), & {}^p g_z(\mathbf{f}) \text{ minimal für alle } \mathbf{f} \in \mathcal{F}_p \\ \emptyset, & \mathcal{F}_p = \emptyset \end{cases} \quad (5.12)$$

Es werden keine Anforderungen an die Oberflächenrepräsentation des Ladungsguts gestellt. Daher besteht die Möglichkeit, dass die Abbildung β uneindeutig ist, da zwei Facetten einen identischen Schnittpunkt ${}^p g_z$ mit einem Dixel haben. In einem solchen Fall wird die Facette mit der niedrigeren ID gewählt.

$$\mathbf{S} = \bigcup_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \beta(\mathbf{p}). \quad (5.13)$$

Nachdem die Kontaktfläche \mathbf{S} bestimmt ist, werden die endgültigen Dixeln d_p berechnet. Zunächst wird ein sinnvoller Wert für die Dixel ohne Schnittpunkte ermittelt. Weiterhin ist eine diskrete Auflösung in der z -Achse des Ladungsträgers zu berücksichtigen. Bei Ladungsgütern, die an ihren oberen Bereichen kleine Überhänge haben, kann es zweckmäßig sein, diese nicht abzustützen, wenn die Bauteilstabilität dies nicht erfordert

und der Ladungsträger dadurch stark vergrößert würde. Daher wird der Stützanteil s als ein durch den Benutzer wählbarer Parameter eingeführt. Unter Berücksichtigung von s wird die maximale Höhe des Ladungsträgers berechnet durch

$$h_{\max} = {}^p g_z \left(\tilde{\mathcal{S}} \right)_{[s \cdot \#\tilde{\mathcal{S}}]}, \quad (5.14)$$

wobei $\tilde{\mathcal{S}}$ ein sortierter Vektor ist, sodass die z -Koordinaten der Schnittpunkte ${}^p g_z \left(\tilde{\mathcal{S}} \right)$ in einer aufsteigenden Reihenfolge sind. Die maximale Ladungsträgerhöhe wird so gewählt, dass diese der maximalen Dexeltiefe von dem Anteil s der geschnittenen Dixel entspricht. Ein Anteil von $(1 - s)$ der Dixel haben einen Schnittpunkt mit ${}^p g_z > h_{\max}$.

Um Ladungsgütern, die überhaupt keine Überhänge haben, Rechnung zu tragen, wird ebenfalls eine minimale Ladungsträgerhöhe h_{\min} als wählbarer Parameter eingeführt. Sind keine Überhänge vorhanden, ergibt sich durch den Algorithmus $h_{\max} = t_b$, sodass kein Seitenhalt gegeben ist. Die endgültige Dexeltiefe wird durch eine angepasste Form von Formel 5.10, die h_{\min} und h_{\max} berücksichtigt, berechnet.

$$d_p = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\max\{h_{\min} \cup \min\{{}^p \mathcal{I}_z \cup h_{\max}\}\}}{r_z} \right\rfloor r_z & \text{wenn } {}^p \mathcal{I}_z \neq \emptyset \\ \max\{h_{\min} \cup h_{\max}\} & \text{wenn } {}^p \mathcal{I}_z = \emptyset. \end{cases} \quad (5.15)$$

5.4. Triangulierung der Kontaktfläche

Da unbekannt ist, ob das Modell der Ladungsträgergeometrie Fehlstellen enthält, gilt selbiges für die bestimmte Kontaktfläche \mathcal{S} . Damit ein geschlossenes, eindeutig definiertes Ladungsträgermodell erzeugt werden kann, muss die Kontaktfläche neu trianguliert werden. Die Basis für die neue Triangulierung bilden die Endpunkte der Dixelstruktur.

Die Koordinaten der Startpunkte $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ sind in den $n_x \times n_y$ Matrizen \mathbf{P}_x und \mathbf{P}_y gespeichert. Die Dimensionen n_x und n_y entsprechen der Anzahl der Dixel in der x - bzw. y -Raumrichtung, wobei diese sich aus der projizierten Grundfläche des Ladungsguts zuzüglich der gewählten Ladungsträgerwandstärke geteilt durch die Gitterauflösung r_x und r_y ergibt. Die Dexeltiefen d_p werden analog in der Matrix \mathbf{P}_z gespeichert.

Die Dixelendpunkte bilden eine viereckige Oberflächenvernetzung, wobei die Position der Punkte im Netz durch die Position in der Datenstruktur festgelegt ist. Um dieses Oberflächennetz in das im 3D-Druck übliche Dateiformat STL zu überführen, wird das Vierecksnetz in eine Triangulierung überführt, indem die Vierecke in zwei Dreiecke unterteilt

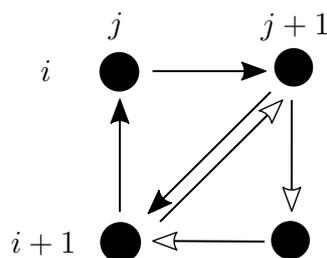


Abbildung 5.3.: Transformation von einer viereckigen in eine dreieckige Oberflächenvernetzung

werden. In MATLAB wird die Transformation der Vernetzung in eine Triangulierung durch ein Skript von *Moerman* [Moe11] implementiert. Ein beliebiges Viereck zwischen Punkten mit den Matrixindizes (i, j) und $(i + 1, j + 1)$ wird unterteilt, sodass sich die Subverknüpfungsmatrix \mathbf{F}_i ergibt. Das Vorgehen wird in **Abbildung 5.3** verdeutlicht.

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} (i, j + 1) & (i + 1, j) & (i, j) \\ (i + 1, j + 1) & (i + 1, j) & (i, j + 1) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Um das Ladungsträgermodell in eine Datenstruktur zu überführen, die dem geladenen Ladungsgutmodell entspricht, werden die Koordinaten der Triangulierungseckpunkte aus den Matrizen \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y und \mathbf{P}_z in eine einzelne $n_f \times 3$ Matrix zusammengeführt. Zusätzlich werden die zweidimensionalen Indizes in der Verknüpfungsmatrix in eindimensionale Indizes transformiert.

Nachdem die Geometrie der Ladungsträgeroberseite generiert wurde, wird die Oberfläche in ein volumetrisches Modell konvertiert. Dazu muss die Oberflächenrepräsentation des Ladungsträgers ein Volumen einschließen. Dafür sind zusätzlich vier Seitenflächen und ein Boden erforderlich. Für die Generierung dieser Flächen wird ein Algorithmus von *Holcombe* [Hol14] verwendet. Für die Triangulierung werden zusätzliche Eckpunkte benötigt. Um diese zu erhalten werden die Eckpunkte auf dem äußeren Rand der Kontaktfläche dupliziert und die z -Koordinaten von h_{\max} zu z_0 geändert. Anschließend werden die Eckpunkte trianguliert und die Matrizen mit den Eckpunktkoordinaten und den Verknüpfungsinformationen zusammengeführt.

5.5. Resultate und Diskussion des Algorithmus

Zur Überprüfung der Funktionalität des Algorithmus werden anhand einiger Beispielgeometrien Ladungsträger erzeugt. Einige übliche Testgeometrien sind im *Stanford 3D Scanning Repository* [Sta94] zu finden. Weit verbreitet ist die Verwendung des *Stanford Bunny* mit den Außenmaßen $335 \times 268 \times 345$ mm. Das Modell besteht aus 69451 Facetten mit 208353 Eckpunkten und hat im Boden fünf Löcher. Da das Modell nicht geschlossen ist, besteht nicht ohne Weiteres die Möglichkeit, mit Booleschen Operatoren einen Ladungsträger zu generieren. Durch eine Reparatur kann das Modell geschlossen werden, jedoch werden weiterhin durch die Differenzbildung Hinterschnidungen erzeugt, sodass ein Einlegen in den Ladungsträger nicht möglich ist. Mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Algorithmus ist jedoch die Erstellung eines hinterschneidungsfreien Ladungsträgers möglich. In **Abbildung 5.4** ist die Testgeometrie und der mit dem zuvor beschriebenen Algorithmus erzeugte Ladungsträger zu sehen. Die gewählte Auflösung der Dixelstruktur beträgt 0,1 mm bei einer Boden- bzw. Wandstärke von 3 mm. Als transparente Hülle ist das um 1,5 mm vergrößerte Modell dargestellt. In diesem Beispiel wird der Stützanteil auf $s = 1$ gesetzt.

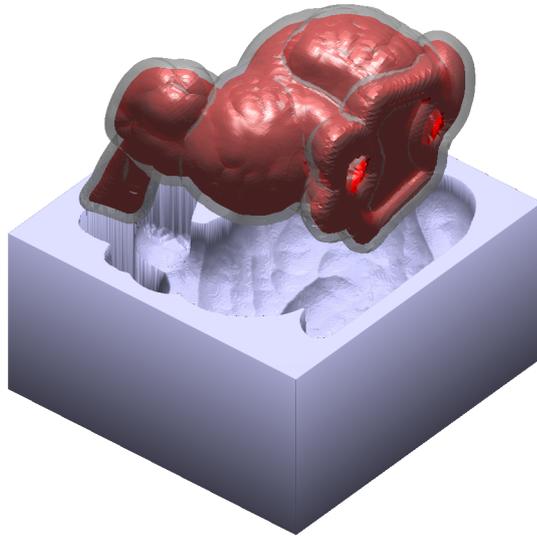


Abbildung 5.4.: Ladungsträger des *Stanford Bunny*

Ein weiteres Beispiel, das die Funktion des Stützanteils verdeutlicht, ist der Ladungsträger für einen PKW-Stoßdämpfer (vgl. **Abbildung 5.5**). Die gezeigten Ladungsträger haben Wand- und Bodenstärken von 5 mm, eine Auflösung von 1 mm in allen Raumrichtungen und der Stoßdämpfer wurde während der Generierung um 5 mm vergrößert. Mit einem Stützanteil von $s = 1$ wird ein Ladungsträger mit einer Höhe bis zum höchsten Punkt des Stoßdämpfers erzeugt, da der Flansch an der Oberkante breiter ist als an der Unterseite,

sodass die verbreiterte Oberkante von Dexeln getroffen wird. Ein solcher Ladungsträger benötigt für die Fertigung viel Material, das je nach Bauteil und Art der Befestigung auf einer Palette nicht erforderlich ist. Im Fall des Stoßdämpferdemonstrators ist der Flansch stabil und wird während des Transports nicht belastet, sodass eine Abstützung nicht notwendig ist. Ein Ladungsträger mit $s = 1$ hat den Vorteil, dass dieser prinzipiell stapelbar ist. Jedoch würde Material an den Ecken ausreichen und zusätzlich ist ein Schutz gegen das Verrutschen nötig.

Wird ein Stoßdämpferladungsträger mit $s = 0,9$ erzeugt, stützt dieser das Bauteil großflächig, mit Ausnahme der Flanschoberseite, ab. Die Ladungsträgerhöhe wird von 190,2 mm auf 88,2 mm reduziert, sodass damit ebenfalls der Materialeinsatz sowie das resultierende Ladungsträgergewicht annähernd halbiert werden. Der Stützanteil kann nicht allgemein festgelegt werden, sondern die Reduzierung auf Werte $s < 1$ muss im Einzelfall geprüft werden.

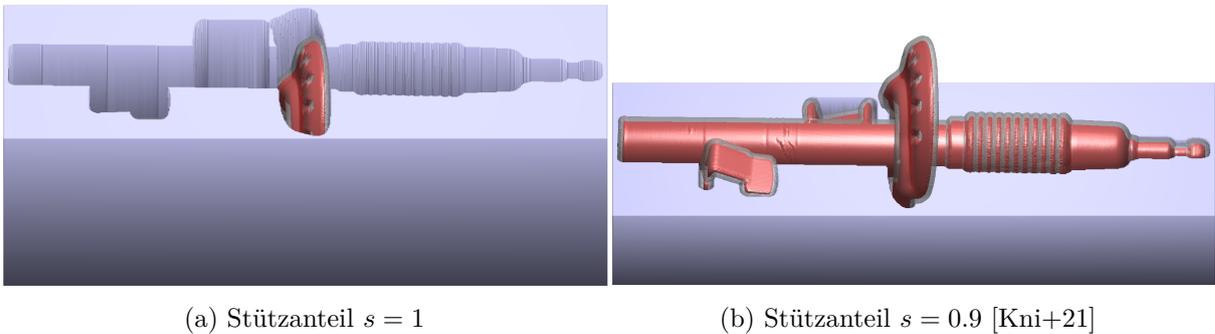


Abbildung 5.5.: Ladungsträger des Stoßdämpfers mit unterschiedlichen Stützanteilen

Zur Beurteilung der Algorithmuseffizienz werden exemplarisch Rechenzeiten ermittelt und diese empirisch untersucht. Die Berechnungen werden mit MATLAB R2021a auf einem PC mit einer Intel Core i9-10900 CPU und 32 GB RAM durchgeführt. Für zuverlässigere Ergebnisse werden alle Rechenzeitbestimmung dreimal durchgeführt und das Ergebnis anschließend gemittelt. Zunächst werden anhand des Stoßdämpferladungsträgers die Anteile der einzelnen Schritte an der Gesamtrechenzeit ermittelt. Es wird der Stoßdämpferladungsträger mit $s = 0,9$ als Beispiel gewählt, da dieser am ehesten dem angestrebten Anwendungsfall entspricht.

Die Berechnung des Ladungsträgers benötigt im Mittel 5,00 s. Die Anteile der einzelnen Algorithmusschritte sind in **Tabelle 5.1** aufgeführt. Die größten Anteile haben das Laden der Geometriedaten, die Vergrößerung der Ladungsgutsgeometrie und die Berechnung der Schnittpunkte. Nachdem die Schnittpunkte ermittelt sind fallen alle weiteren Algo-

Tabelle 5.1.: Mittlere Laufzeiten für die einzelnen Algorithmusschritte bei der Erzeugung des Stoßdämpferladungsträgers

Schritt	Mittlere Dauer [s]	Anteil [%]
STL-Datei Laden	1,86	37
Vergrößern	1,09	22
Schnittpunkte berechnen	1,95	39
Oberfläche triangulieren	0,01	0
Außenflächen erzeugen	0,09	2

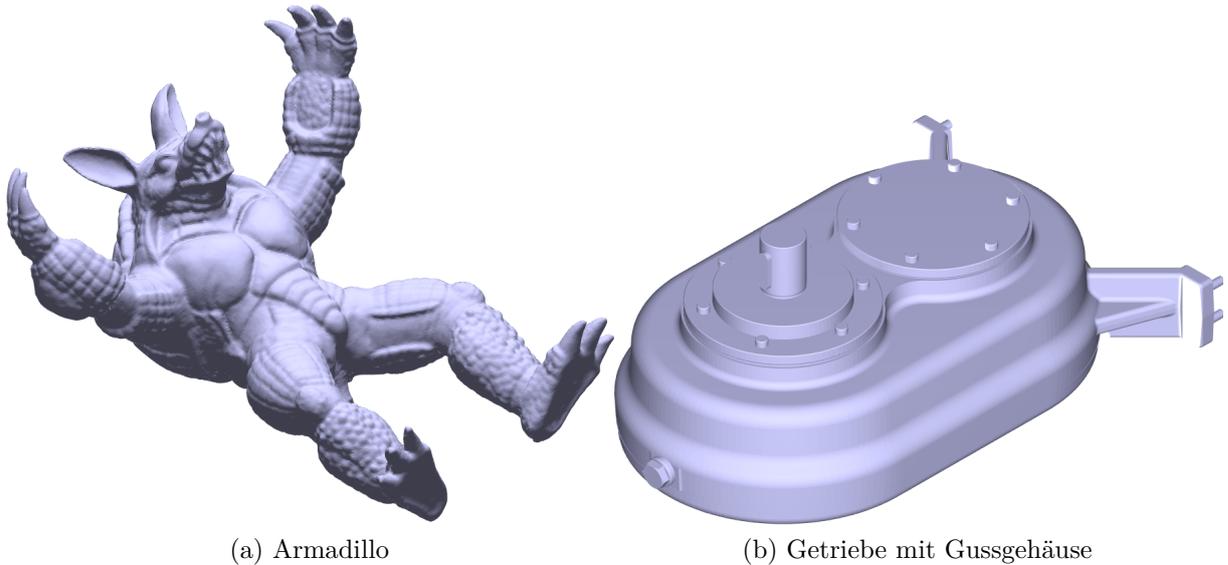


Abbildung 5.6.: Zusätzliche Modelle für die Laufzeituntersuchung

rithmusschritte kaum noch ins Gewicht, wobei der Gesamtanteil an der Rechenzeit 2% beträgt.

Neben den bereits vorgestellten Testmodellen werden zwei weitere Modelle für die Laufzeituntersuchungen verwendet. Eines ist das *Armadillo* aus dem *Stanford 3D Scanning Repository* und das andere ist ein Getriebe mit einem Gussgehäuse (vgl. **Abbildung 5.6**). Im Gegensatz zu den anderen Modellen handelt es sich bei dem Getriebe nicht um einen 3D-Scan, sondern um einem Export einer Baugruppe aus Autodesk Inventor [Ber16]. Daher sind ebene Flächen deutlich gröber vernetzt und die Facettengrößen unterschiedlicher. Bei einem Scan sind die Facettengrößen relativ gleichbleibend und Ebenen bestehen aus vielen kleinen Elementen.

Um eine größere Anzahl unterschiedlich fein vernetzter Geometrien zu erhalten werden die vier Testmodelle jeweils zweimal mit einer MATLAB-Implementierung [Kro10] des von *Shirman* [Shi90] entwickelten Algorithmus verfeinert, wobei die Facettenanzahl jeweils um den Faktor vier größer wird. Die Anzahl der Eckpunkte und Facetten der Modelle sind in **Tabelle 5.2** aufgeführt.

Tabelle 5.2.: Eckpunkt- und Facettenanzahl der untersuchten Modelle

Modell	original		1. Verfeinerung		2. Verfeinerung	
	Eckpunkte	Facetten	Eckpunkte	Facetten	Eckpunkte	Facetten
Bunny	34.834	69.451	139.122	277.804	556.051	1.111.216
Armadillo	172.974	345.944	691.890	1.383.776	2.767.554	5.535.104
Stoßdämpfer	221.776	443.592	887.164	1.774.368	3.548.716	7.097.472
Getriebe	36.854	73.708	147.416	294.832	589.661	1.179.328

Als Größen, die einen großen Einfluss auf die Laufzeit des Algorithmus haben, wurden die Anzahl der Dixel und die Anzahl der Facetten identifiziert. Neben der Facettenanzahl wird daher die Auflösung der Dixelstruktur variiert. Für die Laufzeituntersuchung werden keine absoluten Auflösungen verwendet, sondern die Anzahl der Dixel in Bezug auf die längere Seite der beiden Grundflächenseiten des Ladungsträgers r_{rel} . Da AABB-Bäume verwendet werden, hat die Gesamtanzahl der Facetten der Ladungsgeometrie nur einen geringen Einfluss auf die Laufzeit. Entscheidender ist die Anzahl der Dixel in dem Gitter sowie die durchschnittliche Anzahl der Facettentreffer pro Dixel, sodass für jede der zwölf Eingangsgeometrien die durchschnittliche Anzahl der Facettentreffer je Dixel als standardisiertes Maß für die Anzahl der Facetten herangezogen wird.

Für die Untersuchung wird die Anzahl der Dixel je Seitenlänge festgelegt als $r_{\text{rel}} = \{6.000, 5.000, 4.000, 3.000, 2.000, 1.000, 800, 500, 300\}$. Für die Versuche werden Ladungsträger mit Wand- und Bodenstärken von 3 mm, einem Spiel zwischen Bauteil und Ladungsträger von 1,5 mm und einem Stützanteil von $s = 1$ erzeugt.

Anschließend wird ein Regressionsmodell der Form $f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$ erstellt, wobei $x = n_x \cdot n_y$ die Dixelanzahl und y durchschnittliche Anzahl getroffener Facetten je Dixel ist. Damit lediglich der neu entwickelte Algorithmus untersucht wird, werden die Zeiten, die für das Laden der STL-Dateien erforderlich sind, in der Auswertung nicht berücksichtigt. Die Regression ergibt die Modellgleichung $f(x, y) = 15,00 + 4,029 \cdot 10^{-6} x - 0,2197 y + 1,173 \cdot 10^{-7} xy$ und erreicht ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,94$. Die Ergebnisse sind im Diagramm in **Abbildung 5.7** dargestellt.

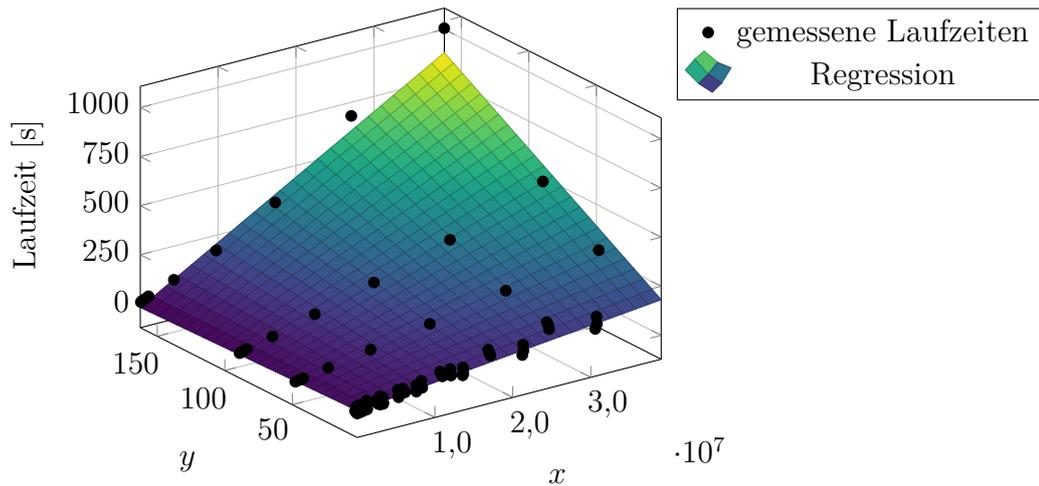


Abbildung 5.7.: Laufzeiten der MATLAB-Implementierung in Abhängigkeit der Dexelanzahl x und der durchschnittlichen Anzahl getroffener Facetten je Dixel y

Es ist zu erkennen, dass die Laufzeit bei einer konstanten Anzahl von durchschnittlich getroffenen Facetten y nahezu linear von der Dexelanzahl x abhängt. Gleiches gilt für eine konstante Dexelanzahl x , wobei die Laufzeit annähernd linear von der Anzahl der durchschnittlich getroffenen Facetten y abhängt. Das Modell bildet die Abhängigkeiten bei Werten von $y < 100$ gut ab, bei größeren Werten von y nimmt die Rechenzeit überproportional zu. Insgesamt ist das Modell geeignet, die benötigten Rechenzeiten für die Erstellung von Ladungsträgern vorherzusagen. Da Werte von $y > 100$ nicht alltäglich sind und erst durch mehrfache Netzverfeinerung hergestellt worden sind, stellt die Abweichung des Modells in diesem Bereich kein Problem dar.

Der entwickelte Algorithmus ist nicht auf ein wasserdichtes Modell angewiesen und kann beliebige im Raum positionierte Flächen als Eingabe verwenden, solange die Normalenvektoren richtig ausgerichtet sind. Durch die Approximation der Schnittstelle zwischen Ladungsgut und -träger durch eine Dixelstruktur ist es unmöglich, dass die erzeugte Triangulierung des Ladungsträgers Fehlstellen aufweist. Nach der Triangulierung der Schnittpunkte zur Bildung des Trägers ist die Konnektivitätsliste der Facetten unabhängig von der Eingangsgeometrie. Da die Oberfläche durch die Schnittpunkte neu trianguliert wird, handelt es sich nur um eine Konturnäherung, die von der Gitterauflösung abhängt. Dies wird jedoch durch die erzielte saubere Triangulierung kompensiert.

Der Oberflächenversatz der Ladungsgeometrie erzeugt Selbstüberschneidungen, welche jedoch keinen Einfluss auf die weitere Ladungsträgererzeugung haben, da die Überschneidungen primär in der Oberflächentextur auftreten und die Außenkontur nur gering beeinflussen. Ein Beispiel ist in **Abbildung 5.8** zu sehen. Für die praktische Anwendung ist die Möglichkeit, mit unvollständigen Ladungsdarstellungen zu arbeiten, ein großer Vorteil.

Eine große Zeitersparnis ergibt sich aus der Möglichkeit, die gewünschte Kontaktfläche zu scannen, ohne dass ein vollständiger detailreicher Scan oder eine Nachbearbeitung des Modells erforderlich ist, die dieses wasserdicht macht.

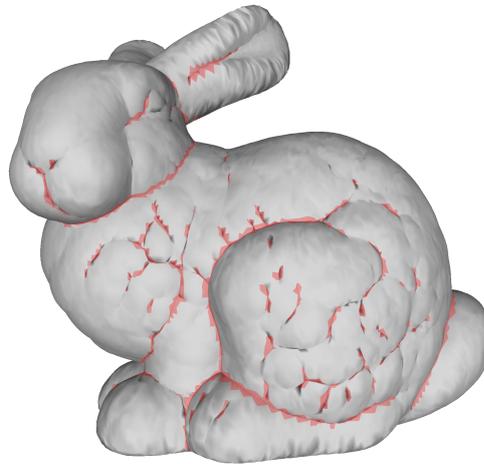


Abbildung 5.8.: Das Modell des *Stanford Bunny* nach einer Vergrößerung um 5 mm. Selbstüberschneidungen sind rot hervorgehoben

6. Fertigung eines unoptimierten Ladungsträgers

In einem Versuch soll überprüft werden, inwieweit es möglich ist, einen Ladungsträger zu generieren und diesen additiv zu fertigen. Für diese Prozessbewertung wird ein Ladungsträger für einen Kfz-Stoßdämpfer (vgl. Abbildung 5.5) hergestellt. Die Geometrie kombiniert runde, eckige und flache Strukturen und würde bei einem mit Booleschen Operationen erstellten Ladungsträger zu Hinterschneidungen führen. Durch Anwendung des beschriebenen Algorithmus (siehe Kapitel 5) mit einem Offset von 8 mm, einer Wandstärke von 10 mm, einer Bodendicke von 5 mm und einer Dixelstrukturauflösung von 1 mm in allen Raumrichtungen wird die Ladungsträgergeometrie erzeugt. Aus der gewählten Auflösung und der Dimension des Ladungsguts in der xy -Ebene ergibt sich ein 611×222 Gitter mit insgesamt 135.642 Dixeln. Das Stützverhältnis wird auf $s = 0,97$ gesetzt, sodass die Oberkante des Flansches nicht gestützt wird.

Im Herstellungsprozess werden Qualitätseinstellungen mit einer Schichthöhe von 1 mm und einer Linienbreite von 3 mm verwendet. Das Verhältnis von Düsendurchmesser zu Schichtbreite beträgt 1. Jede Schicht ist von zwei Perimetern umgeben. Im Inneren wird eine Füllung mit einem Gyroid-Muster und einer Dichte von 15 % verwendet. Außerdem werden eine Bodenschicht und fünf obere Deckschichten verwendet. Um eine Naht zu unterdrücken, wird der Anfangspunkt jeder Lage zufällig aus einer der äußeren Ecken ausgewählt. Es wird eine Druckgeschwindigkeit von 180 mm/s vorgegeben. Der Rückzugsweg beträgt 40 mm bei einer zugehörigen Geschwindigkeit von 4000 mm/s und ist bei Verfahrenswegen von mehr als 25 mm erforderlich. Der Schneckenextruder regelt auf einen Pumpeneingangsdruck von 20 bar, wie er auch für die Ermittlung der Kennlinie verwendet wurde.

Die Fertigungszeit für den Ladungsträger beträgt drei Stunden. Das hergestellte Bauteil besteht aus 115 Schichten und wiegt 5,7 kg. Es ist möglich, den Stoßdämpfer in den Ladungsträger zu legen, jedoch sind einige Fehlstellen sichtbar, die bei der Fertigung entstanden sind. Der Ladungsträger mit eingelegtem Ladungsgut ist in **Abbildung 6.1** zu sehen.



Abbildung 6.1.: Gefertigter Ladungsträger für einen PKW-Stoßdämpfer [Kni+21]

Zur Ermittlung der Fertigungstolerenzen eines Ladungsträgers wird das gefertigte Bauteil (siehe Kapitel 4.2) gescannt und das Bauteilmodell mit dem Ladungsträgermodell aus dem Algorithmus verglichen. Die Oberflächendaten des gefertigten Ladungsträgers werden mit dem *Artec Eva* 3D-Scanner und der dazugehörigen Software *Artec Studio 15* erfasst. Der Geometrievergleich wird mit der Software *Cloudcompare V2.11.3* durchgeführt. Die farbcodierten Abweichungen und die Abweichungsverteilung sind in **Abbildung 6.2** dargestellt.

Aus der Analyse ergibt sich eine mittlere Abweichung von 0,47 mm, wobei 90 % der Abweichungen innerhalb des Intervalls zwischen $-1,500$ mm und $+1,500$ mm liegen. Negative Abweichungen ergeben sich durch fehlendes Material, sodass die gescannte Oberfläche gegenüber dem CAD-Modell zurückgenommen ist. Positive Abweichungen resultieren aus Materialanhäufungen, die über die gewünschte Geometrie herausragen. Die größeren Fehler sind hauptsächlich in den äußeren Ecken konzentriert und in den verschiedenen Schichten unterschiedlich stark ausgeprägt. Die Ecken sind zurückgenommen, wenn sie der Startpunkt einer neuen Schicht sind, was durch die Verzögerung vor Beginn der Materialextrusion verursacht wird. Aufgrund der zufälligen Lokalisierung des Startpunkts in den äußeren Ecken bilden sich unregelmäßige Kanten. Kleinere Materialanhäufungen sind in scharfen Ecken sichtbar, z. B. auf der obersten Schicht an den Rändern, verursacht durch das Zick-Zack-Muster der Deckschicht.

Der gedruckte Prototyp zeigt zwei Dinge. Erstens kann der generierte Ladungsträger in den klassischen AM-Workflow eingebracht werden, indem die Geometrie gesliced und ein GCode erzeugt wird, der zur Steuerung des AM-Systems verwendet wird. Die Fehler des Workflows sind kleiner als 8 mm, sodass die Ladung darin platziert werden kann. Das AM-System ist in der Lage, eine ausreichende Genauigkeit für die Fertigung großvolumiger Ladungsträger zu erreichen. Darüber hinaus sind die Materialkosten durch die Verwendung

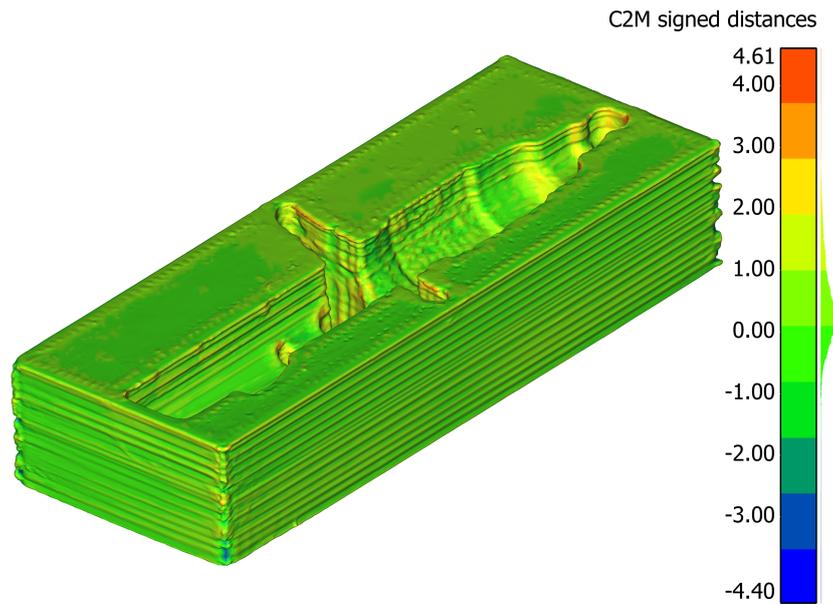


Abbildung 6.2.: Fertigungsabweichungen des Ladungsträgers für einen PKW-Stoßdämpfer [Kni+21]

von Kunststoffgranulat anstelle von Filamenten um den Faktor 2,5 geringer. Um die Herstellungsfehler weiter zu reduzieren, muss die Pumpe nach den Fahrbewegungen zusätzliches Material extrudieren. Um kompliziertere und detailliertere Geometrien herstellen zu können, muss ein kleinerer Düsendurchmesser verwendet und das AM-System weiter verbessert werden, z. B. durch einen steiferen Rahmen.

Der beheizte Schlauch ist eine geeignete Möglichkeit, die Kosten für Rahmen und Motor zu senken. Wegen der großen Heizstrecke darf die Druckgeschwindigkeit nicht zu gering sein, da andernfalls die Verweilzeit zu groß ist und sich das Material zersetzt.

Der Ladungsträger ist stabil, aber schwer. Die Widerstandsfähigkeit des Trägers ergibt sich aus den breiten Ablageraupen, bedingt durch den gewählten Düsendurchmesser. Außerdem wird durch den großen Bahnquerschnitt viel Wärmeenergie gespeichert, sodass die Schichtbindung verbessert wird. Daher ist keine Beschädigung des Trägers durch die Aufnahme der Ladung zu erwarten. Im Vergleich zur Masse des Stoßdämpfers von 4,2kg ist der Träger zu schwer. Es folgen die damit verbundenen Nachteilen eines hohen Materialverbrauchs und einer langen Fertigungszeit. Um die Masse zu reduzieren, könnte bei der Herstellung des Trägers eine Düse mit kleinerem Durchmesser in Kombination mit dünneren Wänden verwendet werden. Darüber hinaus könnte die Form des Trägers angepasst werden, um überflüssige geometrische Teile herauszuschneiden, z. B. durch eine Topologieoptimierung.

7. Topologieoptimierung für den 3D-Druck

Damit die TO ohne Unterbrechungen und Konvertierungen an die Ladungsträgergenerierung anschließen kann, wird eine MATLAB-Implementierung benötigt. Im Unterschied zu den vorhandenen Implementierungen [Sig01; And+11; LT14], die geordnete Quadrat- bzw. Würfelvernetzungen benutzen, wird eine Tetraedervernetzung verwendet. Eine Tetraedervernetzung bildet Geometrien auch bei geringen Auflösungen besser ab als eine geordnete Würfelvernetzung. Eine Alternative wäre eine Vernetzung mit Hexaederelementen, jedoch ist die Vernetzung komplexer als mit Tetraederelementen. Im Vergleich zu Hexaederelementen erfordern lineare Tetraederelemente einen geringeren Rechenaufwand und haben eine schlechtere, aber ausreichende Ergebnisqualität. [RHAL12] Bei der Verwendung von MATLAB ist eine Tetraedervernetzung besonders sinnvoll, da eine Vernetzungsfunktion in MATLAB bereits implementiert ist. Neben einer Anpassung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} wird die MATLAB-Implementierung [LT14] um einen zusätzlichen Grayscalefilter ergänzt, der mittlere Dichten im Designraum unterdrückt. Wie in [Sig01; And+11; LT14] wird die SIMP-Materialinterpolation und die OC-Methode verwendet.

Nach der Implementierung findet ein Vergleich mit der kommerziell verfügbaren Simulationssoftware *Ansys* statt. Anschließend wird die Überhangnebenbedingung für ungeordnete Vernetzungen modifiziert und im Detail untersucht.

7.1. Implementierung der Topologieoptimierung in MATLAB

Die Punkte an den Ecken der finiten Elemente sind in einer Matrix $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_v \times 3}$ enthalten. Die Konnektivitätsmatrix $\mathbf{F}_c \in \mathbb{R}^{n_f \times 4}$ enthält zeilenweise die Indizes der Eckpunkte, die ein Tetraederelement definieren.

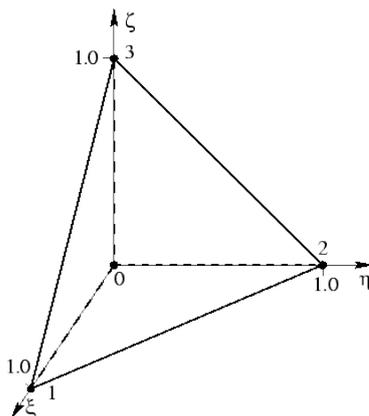


Abbildung 7.1.: Lokales Elementkoordinatensystem eines normierten Tetraeders [Wri02]

Für die TO ist eine FEM-Simulation erforderlich. Es wird eine isoparametrische FEM-Formulierung verwendet, die dadurch gekennzeichnet ist, dass dieselben Ansatzfunktionen für die Interpolation der Knotenkoordinaten und Verschiebungen verwendet werden [Bat14]. Die Interpolationsfunktion hat bei Verwendung von Tetraederelementen die Form [Wri02]

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad (7.1)$$

mit

$$N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta; \quad N_2 = \xi; \quad N_3 = \eta; \quad N_4 = \zeta, \quad (7.2)$$

wobei $\sum_{i=1}^4 N_i = 1$ gilt. ξ, η, ζ sind Positionskoordinaten in einem normierten lokalen Elementkoordinatensystem (vgl. **Abbildung 7.1**) und N_i sind Ansatzfunktionen, die hier linear in den Koordinaten sind. Quadratische Ansatzfunktionen liefern bei gleicher Elementgröße bessere Ergebnisse, jedoch ist der Rechenaufwand und der Speicherbedarf erheblich größer. Das hat zur Folge, dass, wenn detailreiche Bauteile simuliert werden, lineare Elemente verwendet werden, da so eine höhere Elementauflösung möglich ist. [RHAL12]

Das zu lösende Gleichungssystem hat die Form

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (7.3)$$

wobei \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix, \mathbf{U} die Verschiebung und \mathbf{R} die äußeren Kräfte sind. Die Steifigkeitsmatrix wird zunächst elementweise berechnet und anschließend zur globalen Steifigkeitsmatrix zusammengefügt.

$${}^e\mathbf{K} = \iiint_V ({}^e\mathbf{B})^T \mathbf{C} {}^e\mathbf{B} \, dV \quad (7.4)$$

$$\mathbf{K} = \sum_e {}^e\mathbf{K} \quad (7.5)$$

\mathbf{B} ist die sogenannte *Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix* und \mathbf{C}_{mat} ist die Materialmatrix. [RHAL12]

$${}^e\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Um die Ableitungen im globalen Koordinatensystem (x, y, z) in einem allgemeinen Tetraeder zu erhalten werden zunächst die Ableitung im lokalen Koordinatensystem (ξ, η, ζ) in einem normierten Tetraeder berechnet und anschließend über folgende Zusammenhänge transformiert. Die Matrix ${}^e\mathbf{J}$ heißt *Jacobi-Matrix*. [ZT06]

$${}^e\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} = [{}^e\mathbf{J}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Gleichung 7.4 wird über die Jacobi-Determinante von den globalen zu den lokalen Koordinaten transformiert [RHAL12]

$${}^e\mathbf{K} = \int_x \int_y \int_z ({}^e\mathbf{B})^T \mathbf{C}_{\text{mat}} {}^e\mathbf{B} \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ({}^e\mathbf{B})^T \mathbf{C}_{\text{mat}} {}^e\mathbf{B} \det({}^e\mathbf{J}) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \quad (7.9)$$

Bei der TO ist die Steifigkeitsmatrix ebenfalls abhängig von der Materialanordnung im Designraum (vgl. Gleichung 2.8). Es wird die SIMP-Materialinterpolation (Gleichung 2.11) verwendet, um die Steifigkeit eines Elements in Abhängigkeit von der Materialdichte zu berechnen.

Es wird ein räumlicher Spannungszustand berechnet, sodass die Materialmatrix folgende Form hat [Bat14]

$$\mathbf{C}_{\text{mat}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

wobei E der Elastizitätsmodul und ν die Poissonzahl ist.

Das Integral in Gleichung 7.9 kann wegen der Verwendung isoparametrischer Elemente nur numerisch berechnet werden [Wri02]. Daher kommt die Gauß-Legendre-Quadratur zum Einsatz. Die Näherung ist exakt, wenn die Polynome in jede Richtung eine Ordnung kleiner $2n_g$ haben. Die Werte für ξ_i, η_i, ζ_i und w_i können beispielsweise aus [ZT06] entnommen werden.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{k=1}^{n_g} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) w_i w_j w_k \quad (7.11)$$

Für Tetraeder gilt die vereinfachte Formel [RHAL12]

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi d\eta d\zeta \approx \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n_g} w_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i). \quad (7.12)$$

Für lineare Ansatzfunktionen reicht ein Stützpunkt aus, da die integrierte Funktion in Gleichung 7.4 über das Element konstant ist. Es gilt für $n_g = 1$: $w_1 = 1, \xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0, 25$ [RHAL12].

Das lineare Gleichungssystem in Gleichung 7.3 wird durch LU-Zerlegung gelöst [BH74], wobei der Solver bereits in MATLAB implementiert ist.

Bei der Verwendung der SIMP-Interpolation (Gleichung 2.11) wird die Nachgiebigkeit c_e des Elements e durch

$$c_e = \left(\mu_e^{(k)}\right)^p E_0 \mathbf{e}\mathbf{u}^T \mathbf{e}\mathbf{K}_0 \mathbf{e}\mathbf{u} \quad (7.13)$$

berechnet, wobei die $\mathbf{e}\mathbf{u}$ die Verschiebungen der Elementknoten im lokalen Koordinatensystem sind. Die Matrix $\mathbf{e}\mathbf{K}_0$ ist die Steifigkeitsmatrix mit einem Elastizitätsmodul $E = 1$. Für die Optimierung der Materialverteilung wird eine Sensitivitätsanalyse bezüglich der Nachgiebigkeit bei Änderung der Dichte durchgeführt [Sig01]

$$\frac{\partial c_e}{\partial \mu_e^{(k)}} = -p \left(\mu_e^{(k)}\right)^{p-1} \mathbf{e}\mathbf{u}^T \mathbf{e}\mathbf{K}_0 \mathbf{e}\mathbf{u}. \quad (7.14)$$

Damit eine vernetzungsunabhängige Lösung gefunden wird, wird ein Sensitivitätsfilter verwendet, der einem gewichteten Mittelwert der Sensitivität $\widehat{\frac{\partial c_e}{\partial x_e}}$ im Umkreis von R um das Element \mathbf{f}_e bildet. Die Berechnung findet mit [Sig01; And+11]

$$\widehat{\frac{\partial c_e}{\partial x_e}} = \frac{1}{\max(\gamma, x_e) \sum_{i=1}^{n_f} H_{ei}} \sum_{i=1}^{n_f} H_{ei} x_i \frac{\partial c_i}{\partial x_i}, \quad (7.15)$$

statt, wobei $\text{dist}(e, i)$ der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Elemente \mathbf{f}_e und \mathbf{f}_i ist und $\gamma = 10^{-3}$ verhindert, dass der Nenner zu null wird. Die Gewichtungsfaktoren sind proportional zum Abstand der Elemente und nehmen für Abstände größer R den Wert null an

$$H_{ei} = \max(0, R - \text{dist}(e, i)). \quad (7.16)$$

Zusätzlich werden die theoretischen Dichten $\boldsymbol{\mu}$ gefiltert. Die gefilterten Dichten werden mit $\boldsymbol{\rho}$ bezeichnet. [And+11]

$$\rho_e = \frac{1}{\max(\gamma, x_e) \sum_{i=1}^{n_f} H_{ei}} \sum_{i=1}^{n_f} H_{ei} \mu_i. \quad (7.17)$$

Anschließend wird durch die Aktualisierungsregel (Gleichung 2.23) die Materialverteilung für die nächste Iteration berechnet. Dieses Vorgehen wird wiederholt bis die Änderung der Materialdichten in einer Iteration einen Grenzwert unterschreitet. Damit die Konvergenz des Ergebnisses beschleunigt wird und klarere Konturgrenzen erhalten werden, wird ein Grayscalefilter [GE09] verwendet. Der Filter ergänzt die Aktualisierungsregel (Gleichung 2.23) um einen weiteren Exponenten ψ , der zu Beginn der Optimierung den Wert $\psi = 1$ hat und ab einer festgelegten Anzahl an Iterationen jede weitere Iteration um 1 % erhöht wird. Das angepasste Aktualisierungsschema hat die Form

$$x_e^{(k+1)} = \begin{cases} \max\{\mu_{\min}, \mu_e^{(k)} - q\}, & \text{wenn } \mu_e^{(k)} \left((B_e^{(k)})^\varphi \right)^\psi \leq \max\{\mu_{\min}, \mu_e^{(k)} - q\} \\ \mu_e^{(k)} \left((B_e^{(k)})^\varphi \right)^\psi, & \text{wenn } \max\{\mu_{\min}, \mu_e^{(k)} - q\} < \mu_e^{(k)} \left((B_e^{(k)})^\varphi \right)^\psi \\ & < \min\{1, \mu_e^{(k)} + q\} \\ \min\{1, \mu_e^{(k)} + q\}, & \text{wenn } \min\{1, \mu_e^{(k)} + q\} \leq \mu_e^{(k)} \left((B_e^{(k)})^\varphi \right)^\psi. \end{cases} \quad (7.18)$$

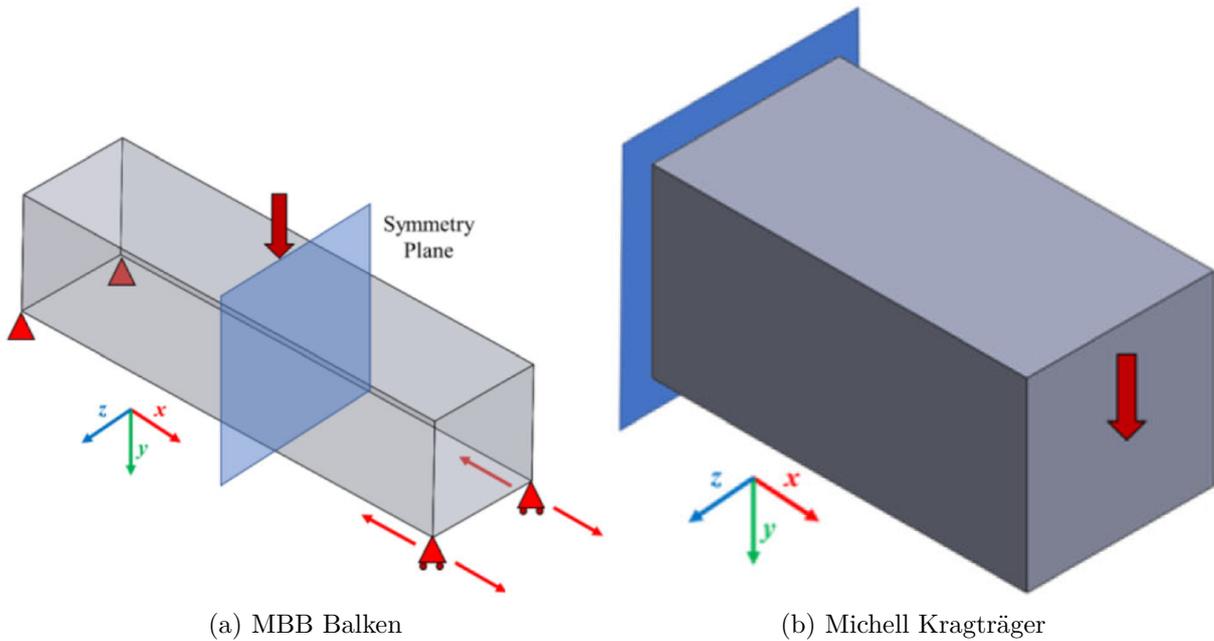


Abbildung 7.2.: Aufbau der TO-Benchmarkprobleme [SK20]

7.2. Vergleich der implementierten Topologieoptimierung und Ansys

Zur Überprüfung der korrekten Implementierung der TO und Erprobung des Geometriexports wird ein Vergleich mit der Software *Ansys* (Version 2019 R2) durchgeführt. Es werden zwei bekannte TO-Probleme betrachtet. Dies sind zum einen der *Messerschmidt-Bölkow-Blohm* (MBB)-Balken und der Michell Kragträger [Roz98]. Es werden dreidimensionale Versionen der Problemstellungen optimiert (siehe **Abbildung 7.2**) [SK20].

Der MBB-Balken wird unter Berücksichtigung einer Symmetrieebene optimiert. Die Dimensionen des vollständigen Balkens sind $400 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ mit einem Längen-Breiten-Verhältnis von 4:1, sodass ein halber Balken ein Längen-Breiten-Verhältnis von 2:1 hat. Der Designraum des Michell Kragträgers entspricht einem halben MBB-Balken. Zur Vernetzung werden lineare Tetraederelemente mit einer maximalen Größe von 5 mm verwendet. Als Materialparameter werden ein E-Modul von 210 GPa und eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,3$ gewählt. Die Grenze für den beizubehaltenden Volumenanteil liegt bei beiden Referenzproblemen bei 15 %. In der MATLAB-Implementierung werden die Einstellungen des Filterradius für den Sensitivitäts- und Dichtefilter $R = 7,5 \text{ mm}$ und die Startiteration für den Grayscalefilter auf 100 festgelegt.

Die Software Ansys verwendet ebenfalls die SIMP-Materialinterpolation. Der Designraum wird, identisch zu MATLAB, über den Import einer STL-Datei definiert. In Ansys muss anschließend die Überführung der Facetten in ein Volumenmodell manuell gestartet werden. Dabei wird die Option der Flächenzusammenführung verwendet. Die Vernetzung wird mit linearen Tetraederelementen und einer Elementgrößenvorgabe von 5 mm durchgeführt. Es werden für die Optimierung die Bausteine „Strukturoptimierung“ und „statische Mechanik“ benutzt. Im Mechanikmodul werden die Kraft- und Verschiebungs-Randbedingungen vorgegeben. Als weitere Einstellungen werden im Strukturoptimierungsmodul die Volumengrenze, als Zielfunktion eine Minimierung der Nachgiebigkeit und eine minimale Strukturgröße von 15 mm ausgewählt.

Nach der TO wird die optimierte Geometrie entsprechend der Symmetrieebenen zu einem vollständigen Balken zusammengefügt. Anschließend wird der MBB-Balken als STL-Datei exportiert. Da die Materialdichten keine exakte 0-1-Verteilung erreichen, müssen die Elementdichten nachträglich binarisiert werden, indem alle Dichten oberhalb eines Grenzwertes auf eins gesetzt werden und alle Dichten unterhalb der Grenze auf null. Der Grenzwert wird so bestimmt, dass die Summe der Volumen mit Material möglichst genau dem gewählten Zielvolumenanteil entspricht. Der Export als STL-Datei ist in Ansys implementiert. In MATLAB muss zunächst aus den finiten Elementen die Außenkontur extrahiert werden, sodass anschließend eine Oberflächenrepräsentation des optimierten Bauteils in Form einer Triangulierung vorliegt. Werden Symmetrieebenen berücksichtigt, werden anschließend die Eckpunkte an diesen Ebenen gespiegelt und die neuen Facetten in der Verknüpfungsmatrix ergänzt. Die Facetten, die in der Symmetrieebene liegen, befinden sich nach der Spiegelung im Inneren der Geometrie und müssen daher vor der Spiegelung entfernt werden. Zur Identifizierung dieser Facetten werden zunächst alle Facetten gesucht, die einen Eckpunkt in der Symmetrieebene haben, wobei eine Toleranz von $1 \cdot 10^{-6}$ mm verwendet wird. Anschließend werden aus dieser Menge an Facetten diejenigen ausgewählt, die einen Normalenvektor senkrecht zur Symmetrieebene haben. Auch in diesem Schritt wird eine geringe Toleranz berücksichtigt. Die nach diesem Vorgehen ausgewählten Facetten werden aus der Verknüpfungsmatrix entfernt. Anschließend werden alle Punkte in der Eckpunktmatrix gelöscht, die keiner Facette zugeordnet sind.

Nachdem die überflüssigen Facetten entfernt sind, werden die Eckpunktmatrix und die Konnektivitätsmatrix kopiert. In der Kopie der Eckpunktmatrix werden die Punkte an der Symmetrieebene gespiegelt. Darüber hinaus muss der Normalenvektor der Facetten in die entgegen gerichtete Richtung zeigen. Dies geschieht, indem die Reihenfolge der Eckpunkte der Facetten in der Konnektivitätsmatrix umgekehrt wird. Anschließend werden die kopierten Matrizen an die ursprünglichen Matrizen angehängt. Die Indizes in

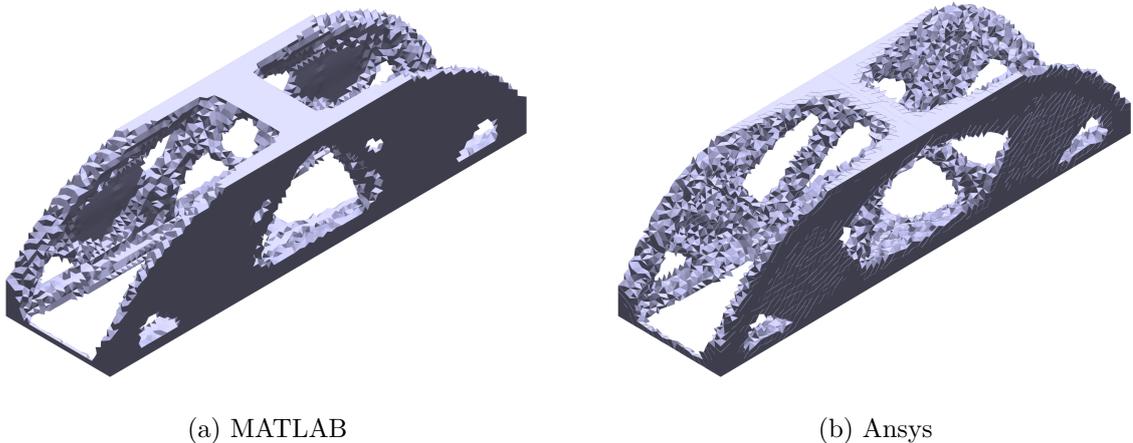


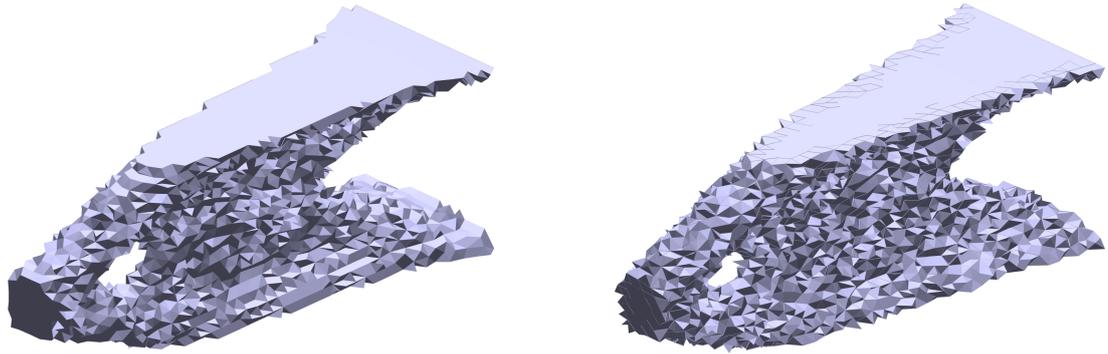
Abbildung 7.3.: Optimierter MBB-Balken ohne Nachbearbeitung

der Konnektivitätsmatrix werden um die Anzahl der Eckpunkte in der ursprünglichen Eckpunktmatrix erhöht, sodass die Punkte korrekt referenziert werden.

Im Anschluss werden Duplikate in der Eckpunktmatrix zusammengeführt. Dieser Schritt ist essenziell, damit ein geschlossenes Oberflächenmodell erzeugt wird. Es wird eine angepasste `patcheslim` [EW11] Funktion verwendet, die Duplikate aus einer Eckpunktliste löscht und die Verknüpfungsmatrix für eine Triangulierung entsprechend anpasst. Diese Funktion ist dafür vorgesehen Redundanzen nach dem Laden einer STL-Datei (vgl. Kapitel 2.3.1) zu entfernen, sodass keine Toleranzen bei der Bestimmung gleicher Punkte berücksichtigt werden. Durch den Ersatz der Matlabfunktion `unique` mit `uniquetol` und einer Toleranz von $1 \cdot 10^{-6}$ mm werden auch nicht perfekt koinzidente Eckpunkte zusammengeführt und durch Anpassung der Konnektivitätsmatrix die Oberflächen geschlossen.

Beim Vergleich der Ergebnisse, die durch MATLAB und Ansys erzeugt werden, ist festzustellen, dass diese nahezu identisch sind. In **Abbildung 7.3** ist der optimierte MBB-Balken und in **Abbildung 7.4** der optimierte Michell Kragträger zu sehen. Unterschiede im optimierten MBB-Balken treten beim Verlauf der Querstreben auf, die im mit Ansys erstellten Bauteil stärker diagonal verlaufen. Im mit MATLAB erstellten Bauteil befindet sich zusätzlich ein kleiner Steg zwischen den Querstreben.

Durch die Gouraud-Schattierung der Bauteile bei der Grafikerstellung zeigen sich Fehler in der STL-Datei durch zusätzliche Kanten. Das Ansys-Bauteil zeigt auf der Oberseite in der Symmetrieebene eine zusätzliche Kante, die daher rührt, dass keine korrekte Zusammenführung der symmetrischen Bereiche stattgefunden hat. In der STL-Datei, die aus Ansys exportiert wurde, befinden sich alle Seitenflächen der finiten Elemente, sodass



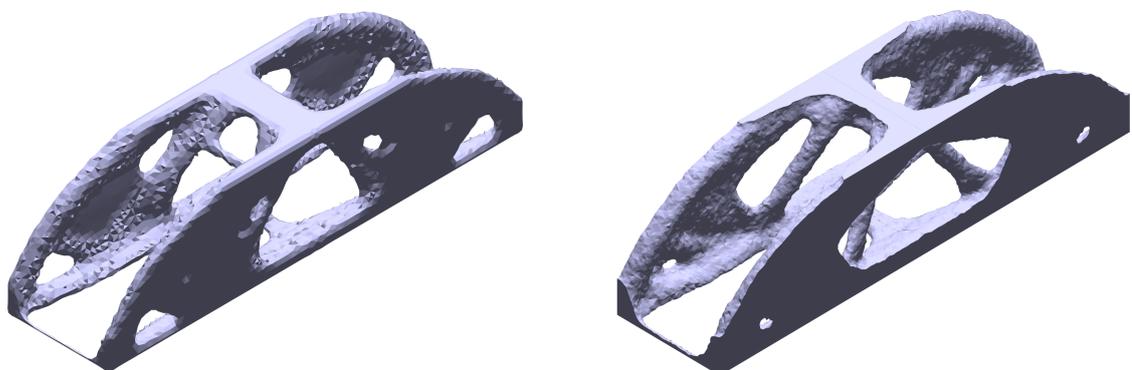
(a) MATLAB

(b) Ansys

Abbildung 7.4.: Optimierter Michell Kragträger ohne Nachbearbeitung

kein einzelnes geschlossenes Volumen modelliert wird und sich viele Facetten im Inneren des Volumenkörpers befinden. Dies führt zu Fehlstellen, die in den Seitenflächen als zusätzliche Kanten zu sehen sind. Beim Vergleich des Mitchell Kragträgers treten keine Unterschiede abgesehen von den Vernetzungsfehlern auf.

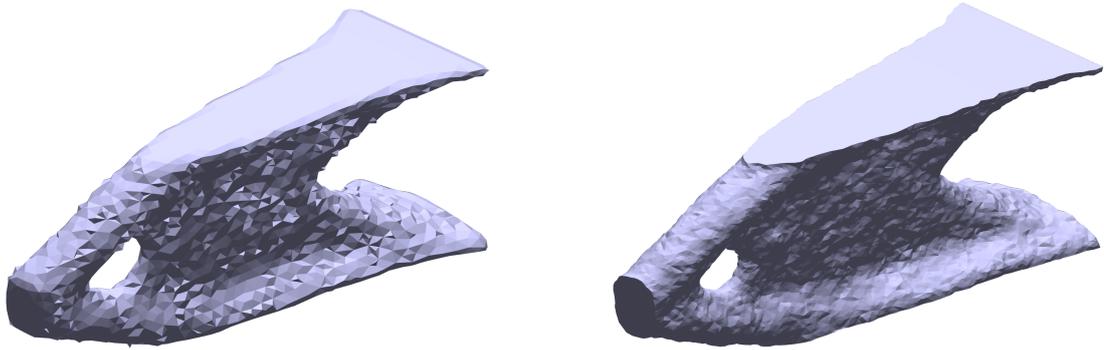
Für eine Fertigung der optimierten Bauteile ist eine Nachbearbeitung erforderlich. Üblich ist eine Glättung des Bauteils. In MATLAB findet die Nachbearbeitung durch eine Laplace-Glättung [Des+99] statt. Als Implementierung für MATLAB wird `smoothpatch` [EW11] verwendet. Die Bauteile werden mit einer Iteration und einem Wert von $\lambda = 1$ geglättet. Eine Laplace-Glättung des Ansys-Bauteils ist durch die Fehlstellen in der STL-Datei nicht möglich.



(a) MATLAB

(b) Ansys

Abbildung 7.5.: Optimierter MBB-Balken mit Nachbearbeitung



(a) MATLAB

(b) Ansys

Abbildung 7.6.: Optimierter Michell Kragträger mit Nachbearbeitung

Auch die nachbearbeiteten Ergebnisse in **Abbildung 7.5** und **Abbildung 7.6** ähneln sich optisch sehr stark, wobei die Unterschiede den nicht nachbearbeiteten Bauteilen entsprechen. Bei dem interpolierten Ansys-Bauteil sind die Facetten im Inneren des Volumens entfernt, jedoch ist die Vernetzung nicht fehlerfrei. Die Facetten haben weiterhin eine Vielzahl an Selbstschneidungen und bilden keine Mannigfaltigkeit. Für eine Verarbeitung in einem Slicer ist ein zusätzlicher Reparaturschritt erforderlich.

7.3. Untersuchung zu Überhangnebenbedingungen in der Topologieoptimierung für die additive Fertigung

Es wird die Implementierung der Überhangnebenbedingung durch einen Filter verwendet. Weil die Min/Max-Formulierung keine Abstützung von Elementen durch Elemente mit mittlerer Dichte erlaubt, wird diese bevorzugt. Allgemeine Bauteile können besser mit einer ungeordneten Tetraedervernetzung approximiert werden, als mit regelmäßig angeordneten Würfeln. Der Filter von *Langelaar* [Lan17; Lan16] erfordert jedoch ein geordnetes Würfel- bzw. Quadratsnetz, sodass der Filter für eine industrielle Anwendung modifiziert werden muss [HGP17]. Dafür wird der Stützbereich eines Elements durch die Elemente gebildet, deren Schwerpunkte unterhalb des Elements in einem Kegel liegen [Tho+19]. Es wird eine modifizierte Implementierung des Filters für ungeordnete Vernetzungen erstellt, welche im Anhang C der Arbeit beigefügt ist. Für die Implementierung wird wie folgt vorgegangen.

Die differenzierbare Approximation der Minimumsfunktion s_{\min} verwendet den Parameter ϵ , um die Krümmung anzupassen. Für $\epsilon = 0$ entspricht s_{\min} der Minimumsfunktion.

Bei steigenden Werten von ϵ steigen die Abweichungen und der Übergang wird stärker geglättet. [Lan17]

$$\text{smin}(x, \Xi) = \frac{1}{2} \left(x + \Xi - \left((x - \Xi)^2 + \epsilon \right)^{1/2} + \sqrt{\epsilon} \right) \quad (7.19)$$

Im Kontext des Filters ist x die Dichte des Elements vor der Filterung und wird von *Langelaar* „blueprint“ Designvariable genannt. Die Variable Ξ ist die maximale bereits gefilterte Dichte im Stützbereich des Elements.

Für die Approximation der Maximumsfunktion wird die P -Norm verwendet und mit smax bezeichnet, die für $P \rightarrow \infty$ der Maximumsnorm entspricht. [Lan17]

$$\text{smax}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\sum_{k=1}^{n_s} \xi_j^P \right)^{1/P} \quad (7.20)$$

Bei der Auswertung von smax ergeben sich Werte, die größer sind als der eigentliche Maximalwert. Um dem entgegenzuwirken, wird daher der Exponent P durch einen Exponenten $Q = P + \frac{\log n_s}{\log \xi_0}$ ersetzt [Lan17]. ξ_0 ist der Grenzwert bis zu dem die smax -Funktion keine zu hohen Funktionswerte zurückgibt. Im Folgenden werden die Parameter zu $\epsilon = 10^{-4}$, $P = 40$ und $\xi_0 = 0,5$ gesetzt und entsprechen damit den in [Lan17] verwendeten Werten.

Für die Berücksichtigung der Nebenbedingung wird das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren verwendet. Für die elementweise Betrachtung müssen die Berechnungen im Filter angepasst und eine modifizierte Datenstruktur verwendet werden. Die Elemente werden zunächst entsprechend der Höhe ihres Schwerpunktes sortiert. Anschließend werden die Bodenelemente aus der Liste entfernt, da diese *a priori* als abgestützt angesehen werden. Die Bodenschicht wird anhand der Höhe der Elementschwerpunkte definiert und es werden alle Elemente zur Bodenschicht gezählt, deren Höhe sich unterhalb der doppelten maximalen Elementgröße der Vernetzung befinden. Sowohl die Reihenfolge der sortierten Elemente als auch die IDs der Elemente im Boden werden als Vektor an die Filterfunktion übergeben. Diese Anpassung ist notwendig, da eine implizite Definition über die Element-IDs wie im geordneten Netz nicht möglich ist. Selbiges gilt für die Übergabe des Stützbereichs. Die Stützbereiche werden als Cell-Array übergeben, das für jedes Element einen Vektor mit den Element-IDs im Stützbereich enthält.

Die angepasste Zielfunktion in elementweiser Betrachtung lautet

$$\tilde{f}_p = f_p(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) + \sum_{i=1}^{n_f} \lambda_i (\text{smin}(x_i, \Xi) - \xi_i), \quad (7.21)$$

wobei f_p die ursprüngliche Zielfunktion ist und \mathbf{x} die ungefilterten bzw. $\boldsymbol{\xi}$ die gefilterten Dichten sind. λ_i sind die Lagrange-Multiplikatoren. Die Summation läuft bis zur Anzahl der Elemente der Vernetzung n_f . Dies ist ein Unterschied zu [Lan17], wo die Formulierung sich die Elementschichten zunutze macht. Die elementweise Betrachtung wird ebenfalls in der Sensitivitätsanalyse verwendet. Die Ableitung erfolgt unter Verwendung der Kettenregel.

$$\frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \quad (7.22)$$

Für die Herleitung der einzelnen Ableitungen sei auf die Ursprungsquelle [Lan17] verwiesen. Die elementweise Berechnung der Ableitungen erfolgt mit

$$\frac{\partial \tilde{f}_p}{\partial x_j} = \lambda_j \frac{\partial \text{smin}(x_j, \Xi_j)}{\partial x_j}. \quad (7.23)$$

Für die Berechnung von λ_j müssen zunächst alle Elemente im Stützbereich des Elements j ausgewertet werden. Die Anzahl der Elemente im Stützbereich des Elements j wird mit n_s bezeichnet.

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \sum_{k=1}^{n_s} \frac{\partial f_p}{\partial \xi_j} + \lambda_k \frac{\partial \text{smin}(x_k, \Xi_k)}{\partial \xi_k}, \text{ für } j = 1, \dots, n_f, \\ \lambda_n &= \frac{\partial f_p}{\partial \xi_n} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Die weiteren benötigten Ableitungen werden anhand der Vorschriften

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{smin}(x, \Xi)}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(1 - (x - \Xi) \left((x - \Xi)^2 + \epsilon \right)^{-1/2} \right), \\ \frac{\partial \text{smin}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \text{smin}}{\partial \Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \text{smin}(x, \Xi)}{\partial \Xi} &= \frac{1}{2} \left(1 + (x - \Xi) \left((x - \Xi)^2 + \epsilon \right)^{-1/2} \right), \\ \frac{\partial \Xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_i} &= \frac{P \xi_i^{P-1}}{Q} \left(\sum_{k=1}^{n_s} \xi_k^P \right)^{1/Q-1} \end{aligned} \quad (7.25)$$

berechnet.

Die Verallgemeinerung auf ungeordnete Netze durch *Thore et al.* erfordert eine sehr feine Vernetzung [Tho+19]. Insbesondere bei der Optimierung von dreidimensionalen Bauteilen bedingt eine feine Vernetzung einen hohen Rechenaufwand. Durch eine neue Definition des Stützbereichs soll es möglich werden, eine gröbere Vernetzung zu verwenden und trotzdem die Überhangnebenbedingung zu erfüllen.

Es ist üblich, neue Algorithmen in der TO zunächst im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 zu untersuchen, da die Formulierung meistens anschaulicher ist und die erforderlichen Rechenzeiten geringer. Eine Übertragung in \mathbb{R}^3 ist im Normalfall ohne viel Aufwand möglich. Im Fall des Filters von *Langelaar* [Lan17] ist außer einer angepassten Definition der Stützbereiche und Bodenschichten keine Änderung erforderlich.

Als Testproblem wird, wie allgemein in der Literatur üblich, der MBB-Balken verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass die Ergebnisse auf beliebige Geometrien und Lastfälle übertragbar sind.

Ein nichtlineares Optimierungsproblem führt zu Konvergenzproblemen mit der OC-Methode, daher wird in allen jüngeren Veröffentlichungen die MMA verwendet. Darüber hinaus muss der Filter nur einmal und nicht in jeder Bisektions-Iteration ausgewertet werden [Lan17]. Bei den Optimierungen mit Überhangnebenbedingung wird auf die zusätzliche Verwendung des Grayscalefilters verzichtet, um Interaktionen zwischen den Filtern zu verhindern. Die Optimierungen ohne Nebenbedingung werden im Folgenden ebenfalls ohne Grayscalefilter durchgeführt, damit eine Vergleichbarkeit gegeben ist.

7.3.1. Definition des Stützbereichs durch Nachbarschaftsbeziehungen

Die Definition des Stützbereichs durch *Thore et al.* [Tho+19] ist vernetzungsunabhängig. Das Verfahren erfordert jedoch, dass mehrere Elemente sich im Stützkegel befinden, ansonsten ergeben sich geringere Grenzwinkel für den Überhang. Werden die Grenzen des Kegels nur durch eine „Schicht“ aus Elementen gebildet, ist der Überhangwinkel durch die Kantenwinkel (z. B. $\Phi = 30^\circ$ bei Elementen in Form von gleichseitigen Dreiecken aufgrund der Kantenwinkel von 60°) vorbestimmt. Auch bezüglich des Rechenaufwands ist die Kegeldefinition bei Vernetzungen mit stark unterschiedlichen Elementgrößen nicht optimal, da immer die größten Elemente berücksichtigt werden müssen, es jedoch in Bereichen mit einer lokal hohen Auflösung zu einer unnötig großen Anzahl an Elementen im Stützbereich kommt.

Um diese Probleme zu lösen wird der Stützbereich nicht durch einen Kegel mit konstanter Größe definiert, sondern es wird die Nachbarschaft der Elemente, gegeben durch die gemeinsame Beteiligung an einem Eckpunkt, betrachtet. Die Definition des Stützbereichs wird in **Abbildung 7.7** dargestellt, wobei die direkte Nachbarschaft eines Elements e mit ${}^e\mathcal{N}_1$ bezeichnet wird. Die weiteren Ebenen der Nachbarschaft ${}^e\mathcal{N}_n$ ergeben sich durch

$${}^e\mathcal{N}_n = {}^e\mathcal{N}_{n-1} \cup {}^{e_{n-1}}\mathcal{N}_1 \text{ für alle } e_{n-1} \in {}^e\mathcal{N}_{n-1}. \quad (7.26)$$

Aus der Nachbarschaft wird der Stützbereich ${}^e\mathcal{S}_n \subset {}^e\mathcal{N}_n$ aus den Elementen gebildet, deren Schwerpunkte sich innerhalb eines unendlich hohen Kegels befindet. Der Kegelwinkel bestimmt auch in diesem Fall den zulässigen kritischen Überhangwinkel Φ_{\max} . In der Bezeichnung des Stützbereichs ${}^e\mathcal{S}_n$ bezieht sich der Index n auf die zugrunde liegende Ebene der Nachbarschaft ${}^e\mathcal{N}_n$.

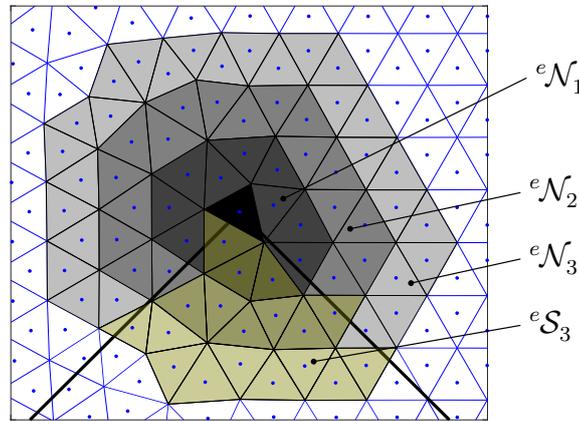


Abbildung 7.7.: Definition des Stützbereichs

7.3.2. Parameterstudie zur Anzahl an Nachbarschaftsebenen

Für die Untersuchungen der Nebenbedingung wird der zweidimensionale MBB-Balken mit den Maßen 120x20 mm verwendet. Es wird die Symmetrie ausgenutzt und nur die rechte Hälfte betrachtet. Die verwendeten Lagerungen und Kräfte sind in **Abbildung 7.8** dargestellt.

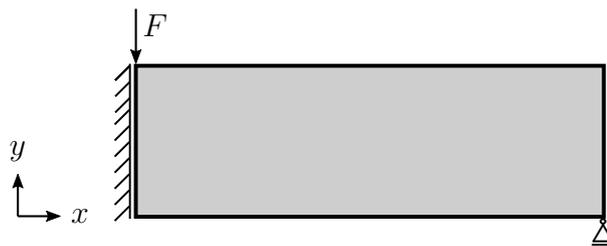


Abbildung 7.8.: Definition MBB-Balkens in 2D

Zur Vernetzung wird die in MATLAB (Version 2021a) implementierte Methode `generateMesh` aus der Partial Differential Equation Toolbox (PDET) verwendet. Im 2D werden bei einfachen Geometrien primär gleichseitige Dreiecke erzeugt. Zur Definition der Elementgröße kann vom Benutzer ein Richtwert für eine obere Grenze der Elementkantenlänge H_{\max} vorgegeben werden. Es werden Vernetzungen mit unterschiedlichen Elementanzahlen n_f verwendet, welche durch die Vorgabe von $H_{\max} = \{0,5; 0,4; 0,3; 0,2\}$ mm erzeugt werden.

Tabelle 7.1.: Kenngrößen der verwendeten PDET-Vernetzungen

H_{\max}	$\min(h_e)$	$\max(h_e)$	$\text{mean}(h_e)$	n_f
0,5 mm	0,3130	0,5163	0,4315	69.362
0,4 mm	0,2504	0,4150	0,3442	30.766
0,3 mm	0,1881	0,3087	0,2584	17.318
0,2 mm	0,1252	0,2076	0,1724	11.014

Eine Übersicht von Kenngrößen der Vernetzungen ist in **Tabelle 7.1** zu finden. Als Definition der Elementgröße h_e wird die minimale Höhe innerhalb eines Elements verwendet. Eine Vernetzung des Designraums ist in **Abbildung 7.9** dargestellt. Wie sowohl anhand der Elementgrößen als auch der grafischen Darstellung zu erkennen, werden Elemente mit relativ geringer Variation der Größe erzeugt. Darüber hinaus sind große Bereiche durch eine regelmäßige Anordnung der Elemente vernetzt.

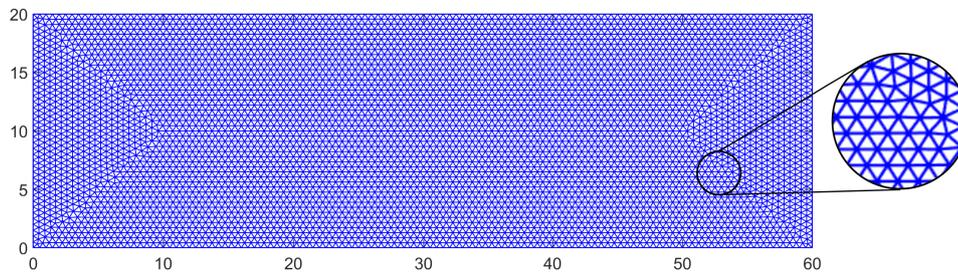


Abbildung 7.9.: Vernetzung des Designraums mit $H_{\max} = 0,5$ mm

Als Referenz wird zunächst der MBB-Balken ohne zusätzliche Überhangnebenbedingungen optimiert. Für diese TO wird, wie in allen folgenden zweidimensionalen Optimierungen in diesem Kapitel, ein maximaler E-Modul $E_0 = 1$, ein minimaler E-Modul $E_{\min} = 0,001$, eine Geometrietiefe $h_z = 1$ mm, ein beizubehaltender Volumenanteil von $V_{\max} = 0,5$ und ein Filtrerradius von $R = 1$ mm verwendet. Die wirkende Kraft hat einen Betrag von 1 N. Als Konvergenzkriterium wird die maximale Änderung der Designvariable innerhalb einer Optimierungsiteration verwendet. Unterschreitet die maximale Änderung eine Toleranz von 0,01, so wird das Ergebnis als konvergiert angesehen. Die Ergebnisse für die Vernetzungen mit $H_{\max} = 0,5$ mm und $H_{\max} = 0,2$ mm sind in **Abbildung 7.10** zu sehen.

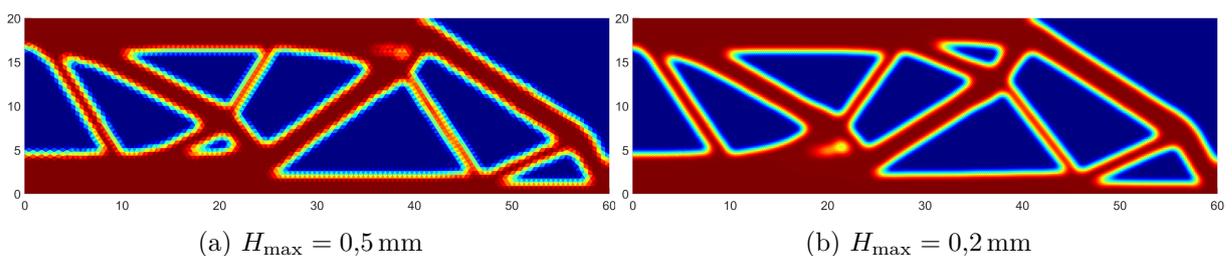


Abbildung 7.10.: MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung

Das Ergebnis ist aufgrund der Filterung nahezu vernetzungsunabhängig. Bis zur Konvergenz des Ergebnisses werden für die Vernetzung mit $H_{\max} = 0,5 \text{ mm}$ 1555 Iterationen benötigt und das optimierte Bauteil hat eine Nachgiebigkeit von $c = 3,92$. Im Fall der Vernetzung mit $H_{\max} = 0,2 \text{ mm}$ werden 3501 Iterationen benötigt und die Zielfunktion ergibt $c = 0.25$.

Zur Analyse der Überhänge wird der Gradient der gefilterten Designvariable $\nabla \xi$ betrachtet. Als Baurichtung wird die positive y -Richtung definiert. Ein Überhang wird durch $\nabla_y \xi > 0,1 \cdot \max(\nabla_y \xi)$ identifiziert. In **Abbildung 7.11** sind die Winkel zwischen der Richtung des Gradienten und der Baurichtung an den Überhängen des MBB-Balkens ohne Überhangnebenbedingung dargestellt. Die Farbskala ist so gewählt, dass Überhänge mit Winkeln $0^\circ < \Phi < 45^\circ$, die selbsttragend sind, blaue bis grüne Farben aufweisen. Überhänge mit Winkeln $\Phi > 45^\circ$, die Stützstrukturen erfordern würden, werden in Rottönen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass einige nicht selbsttragende Überhänge existieren. Insbesondere gibt es Überhänge mit Winkeln von annähernd 90° .

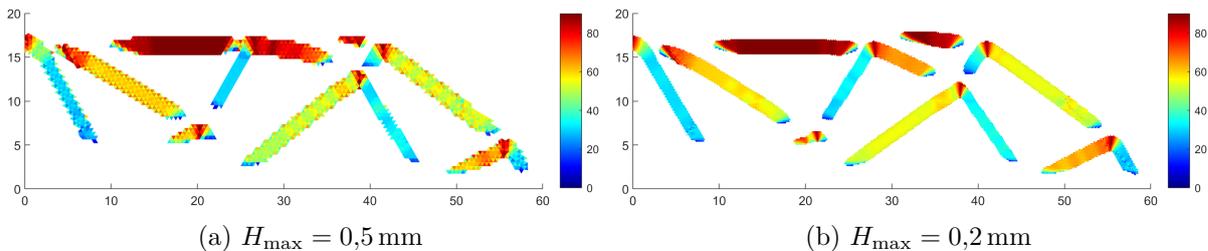


Abbildung 7.11.: Winkel der Überhänge am MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung

Die Definition des Stützbereichs hat zwei Parameter: den Überhangwinkel und die maximal zu berücksichtigende Nachbarschaftsebene. Es wird der Überhangwinkel auf $\Phi_{\max} = 45^\circ$ festgelegt und die Anzahl der Nachbarschaftsebenen variiert.

Ein Stützbereich \mathcal{S}_1 ist nicht sinnvoll, da eine Vielzahl der Elemente nur durch ein einzelnes Element gestützt wird. Mit einem einzelnen Element im Stützbereich kann kein Überhangwinkel festgelegt werden, sodass die Überhangwinkel nur von der Vernetzung abhängen. Wird die Überhangnebenbedingung mithilfe eines Stützbereichs \mathcal{S}_2 gebildet, ergeben sich für die Vernetzungen mit $H_{\max} = 0,5 \text{ mm}$ und $H_{\max} = 0,2 \text{ mm}$ die in **Abbildung 7.12** gezeigten Ergebnisse. Im Vergleich der unterschiedlich feinen Vernetzungen zeigen sich ähnliche Strukturen. In beiden Ergebnissen zeigen sich Streben, die Dreiecke bilden und von weiteren dünneren Streben unterteilt werden. Bei der Vernetzung mit den kleineren Elementen bilden sich feinere Strukturen aus.

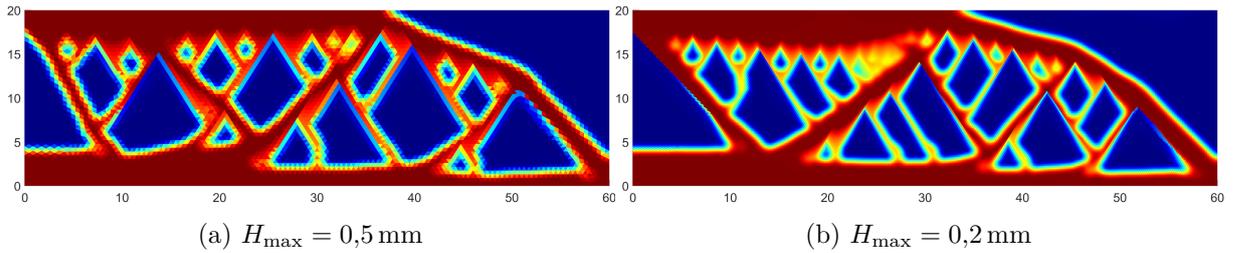


Abbildung 7.12.: MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_2

Werden die Winkel der Überhänge betrachtet (vgl. **Abbildung 7.13**) zeigt sich, dass bei beiden Vernetzungen kritische Überhänge vermieden werden, abgesehen von den Elementen, an denen sich zwei Überhänge treffen, wobei diese großen Winkel ein Effekt der Gradientenberechnung und im Bauteil unkritisch sind. Es fällt jedoch auf, dass nahezu alle Überhänge einen Winkel von etwa 30° aufweisen.

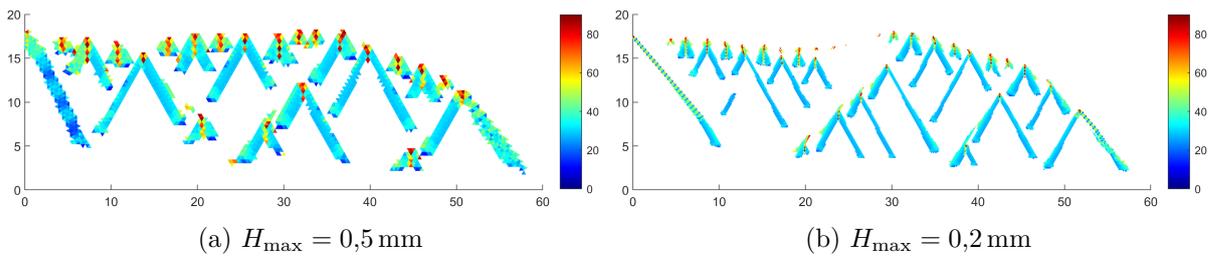


Abbildung 7.13.: Winkel der Überhänge am MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_2

Da der Überhangwinkel stark von der Vorgabe $\Phi_{\max} = 45^\circ$ abweicht, kann geschlossen werden, dass ein Stützbereich \mathcal{S}_2 nicht ausreichend ist, um einen definierten Winkelgrenzwert einzuhalten und weitere Elemente im Stützbereich berücksichtigt werden müssen. In **Abbildung 7.14** sind die Optimierungsergebnisse mit einem Stützbereich \mathcal{S}_3 mit Berücksichtigung der dritten Nachbarschaftsebene zu sehen. Beim Vergleich des Stützbereichs \mathcal{S}_3 mit dem Stützbereich \mathcal{S}_2 zeigt sich, dass die feineren Streben verschwunden und die Strukturen klarer umrissen sind.

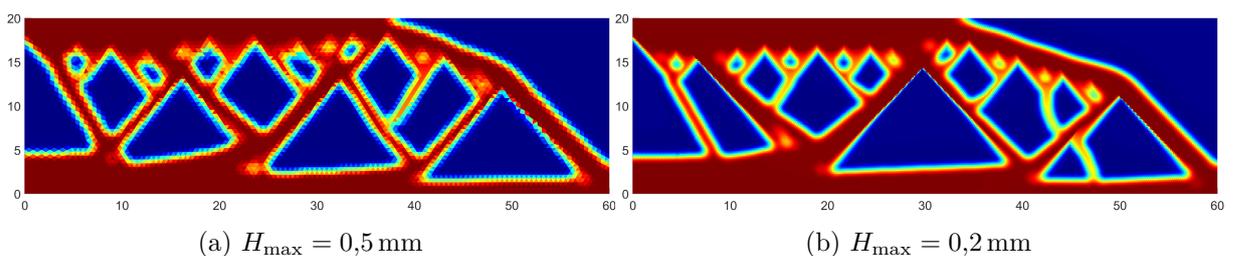


Abbildung 7.14.: MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_3

Bei Betrachtung der Überhangwinkel (vgl. **Abbildung 7.15**) zeigt sich eine deutliche Veränderung. Ein Großteil der Überhänge hat einen Winkel von etwa 40° , sodass diese Winkel in der Nähe des maximal zulässigen Winkels der Überhangnebenbedingung liegen. Das Ergebnis ist sowohl bei der groben als auch bei der feineren Vernetzung ähnlich. Es gibt nur noch wenige Überhänge bzw. Überhangbereiche, die kleinere Winkel aufweisen.

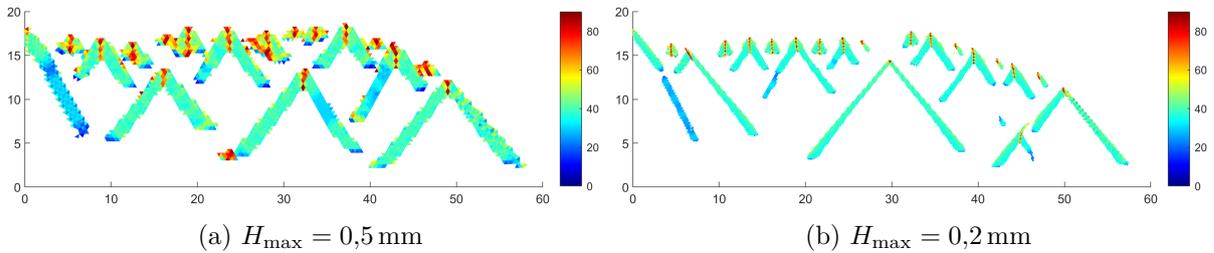


Abbildung 7.15.: Winkel der Überhänge am MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_3

Obwohl die Ergebnisse mit dem Stützbereich \mathcal{S}_3 zufriedenstellend sind, wird geprüft, ob ein \mathcal{S}_4 Vorteile bringt. In **Abbildung 7.16** ist zu sehen, dass sich die Ergebnisse bei beiden Vernetzungen im Vergleich zu **Abbildung 7.14** unterscheiden. Die Winkel der Überhänge weisen jedoch weiterhin ähnliche Winkel auf.

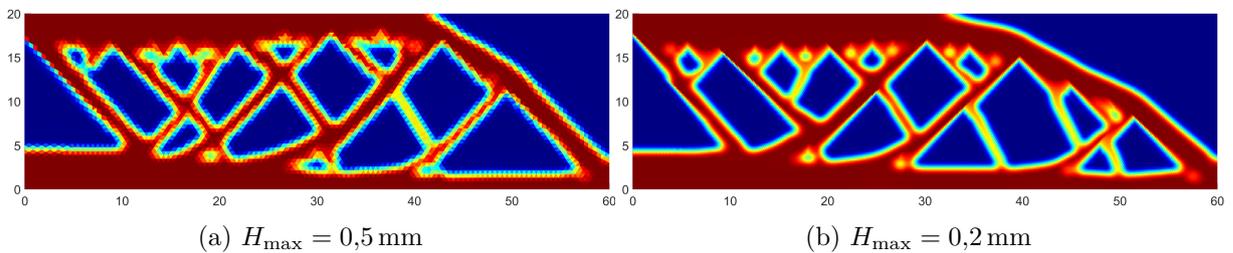


Abbildung 7.16.: MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_4

Die Betrachtung der Überhangwinkel in **Abbildung 7.17** zeigt ebenfalls keine signifikanten Unterschiede. Es ist auszuschließen, dass \mathcal{S}_5 etc. weitere Vorteile bringen.

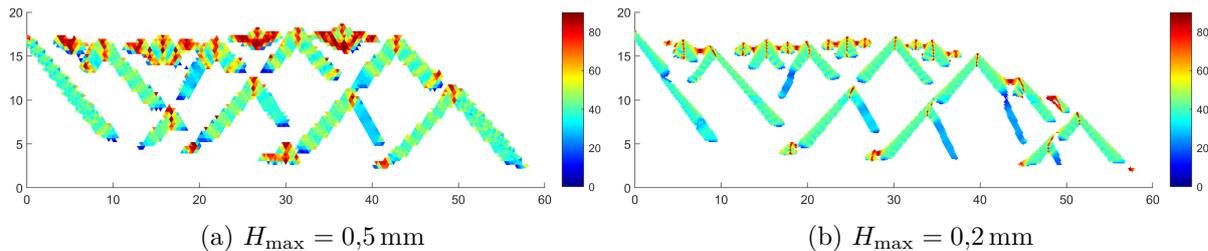


Abbildung 7.17.: Winkel der Überhänge am MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_4

Neben den Überhangwinkeln soll die Qualität der Optimierungsergebnisse miteinander verglichen werden. In **Tabelle 7.2** sind neben der Anzahl der erforderlichen Iterationen, die zum Erreichen des Konvergenzkriteriums benötigt werden, die Nachgiebigkeit c und eine Kenngröße für Existenz von Graubereichen, also Bereichen mit Dichten $\xi_e \neq \{0, 1\}$, M_{nd} (*engl.*: Measure of Non-Discreteness), aufgeführt. Die Kenngröße wird definiert als [Sig07]

$$M_{\text{nd}} = \frac{\sum_{e=1}^{n_f} 4\xi_e(1 - \xi_e)}{n_f}, \quad (7.27)$$

wobei n_f die Anzahl aller Elemente in der Diskretisierung ist. M_{nd} ist maximal, wenn alle Elemente eine Dichte von $\xi_e = 0,5$ haben. Je größer M_{nd} ist, desto mehr „graue“ Elemente gibt es, mit der Folge, dass die Grenzen des optimierten Bauteils unschärfer sind. Für eine Fertigung eines optimierten Bauteils muss eine Entscheidung getroffen werden, welche Elemente weiterhin Bestandteil des Bauteils sind. Dies geschieht in der Regel über die Verwendung eines Dichtengrenzwerts, über dem ein Element als gefüllt angesehen wird. Ein größerer Wert für M_{nd} bedeutet somit, dass das optimierte Bauteil stärker abgeändert werden muss. Die Tabelle enthält die Ergebnisse für alle untersuchten Vernetzungen. Die Optimierung ohne zusätzliche Überhangnebenbedingung wird mit einem Stützbereich „-“ bezeichnet.

Durch die Verwendung der Überhangnebenbedingung steigt die Nachgiebigkeit des optimierten Bauteils im Vergleich zur Optimierung ohne Überhangnebenbedingung. Die Nachgiebigkeit ist beim Stützbereich \mathcal{S}_2 größer als bei den Stützbereichen mit höheren Nachbarschaftsebenen. Auch im Vergleich der Stützbereiche \mathcal{S}_3 und \mathcal{S}_4 sorgen mehr Nachbarschaftsebenen für eine geringere Nachgiebigkeit, jedoch ist der Unterschied geringer als zwischen \mathcal{S}_2 und \mathcal{S}_3 . Sehr ähnliche Tendenzen ergeben sich bei Betrachtung von M_{nd} . Die Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz hat keine eindeutige Abhängigkeit von der verwendeten Überhangnebenbedingung.

Tabelle 7.2.: Optimierungsergebnisse

H_{\max}	Stützbereich	Iterationen	c	M_{nd}
0,2 mm	-	3.501	0,2498	0,2287
0,2 mm	\mathcal{S}_2	2.554	0,2720	0,2792
0,2 mm	\mathcal{S}_3	1.560	0,2629	0,2426
0,2 mm	\mathcal{S}_4	5.000	0,2623	0,2471
0,3 mm	-	1.826	1,2466	0,2178
0,3 mm	\mathcal{S}_2	1.696	1,3653	0,2621
0,3 mm	\mathcal{S}_3	2.314	1,3086	0,2414
0,3 mm	\mathcal{S}_4	1.378	1,3180	0,2602
0,4 mm	-	1.555	3,9192	0,2047
0,4 mm	\mathcal{S}_2	632	4,3801	0,2851
0,4 mm	\mathcal{S}_3	727	4,1700	0,2484
0,4 mm	\mathcal{S}_4	804	4,1233	0,2543
0,5 mm	-	920	9,5926	0,2092
0,5 mm	\mathcal{S}_2	684	10,6434	0,2662
0,5 mm	\mathcal{S}_3	1.155	10,1874	0,2427
0,5 mm	\mathcal{S}_4	454	10,0822	0,2550

Es ist nicht ungewöhnlich, dass der erreichbare Wert der Zielfunktion, in diesem Fall die Nachgiebigkeit c , durch zusätzliche Nebenbedingungen geringer wird, da der Lösungsraum eingegrenzt wird. Es kann jedoch auch nicht davon ausgegangen werden, dass in jedem Fall mit jeder Einschränkung eine Verschlechterung der Zielfunktion einhergeht. Die TO ist ein nicht-konvexes Optimierungsproblem, sodass in der Regel nur ein lokales Optimum erreicht wird. Eine Einschränkung hat als Ergebnis ein anderes lokales Optimum zur Folge, dass jedoch nicht zwangsläufig schlechter sein muss als das des uneingeschränkten Problems. [Lan16]

Durch die Verwendung der Stützbereiche \mathcal{S}_3 oder \mathcal{S}_4 , wird, wie oben gezeigt, ein größerer Winkelbereich der Überhänge zugelassen, sodass die Überhangnebenbedingung weniger restriktiv ist. Die Wahrscheinlichkeit ist damit höher, ein besseres lokales Optimum zu erreichen als bei Stützbereichen mit Berücksichtigung geringerer Nachbarschaftsebenen. Die Vorteile durch die Verwendung von \mathcal{S}_4 sind so gering, dass der zusätzliche Rechenaufwand während der Optimierung nicht gerechtfertigt ist. Zwar werden teilweise weniger Iterationen für die Optimierung benötigt, jedoch sind die Stützbereiche größer, sodass die einzelnen Iterationen rechenaufwendiger sind und mehr Zeit erfordern. Ein Vergleich der mittleren Anzahl der Elemente in den Stützbereichen sowie zwischen den erforderlichen Rechenzeiten

für eine Iteration ist in **Tabelle 7.3** zusammengestellt. Die Rechenzeiten sind für fünf Iterationen gemessen und gemittelt worden.

Die Nachgiebigkeit c wird bei der Berücksichtigung der zusätzlichen Nachbarschaftsebene mit \mathcal{S}_4 im Mittel um 0,4 % reduziert, wobei der Effekt bei den größeren Vernetzungen größer ist. Die Rechenzeit für eine Iteration steigt aber im Mittel um 11,9 % und ist damit im Verhältnis zur Verringerung der Nachgiebigkeit größer.

Tabelle 7.3.: Vergleich der mittleren Anzahl der Elemente in den Stützbereichen und Rechenzeiten für eine Iteration bei \mathcal{S}_3 und \mathcal{S}_4

H_{\max}	Elemente im Stützbereich		Rechenzeit	
	\mathcal{S}_3	\mathcal{S}_4	\mathcal{S}_3	\mathcal{S}_4
0,2 mm	17,6	29,8	3,7678 s	4,2244 s
0,3 mm	17,5	29,4	1,5479 s	1,7370 s
0,4 mm	17,3	29,0	0,9347 s	0,9660 s
0,5 mm	17,1	28,6	0,5624 s	0,6742 s

7.3.3. Vergleich mit Stützbereich nach *Thore et al.*

Im Folgenden wird die Überhangnebenbedingung mit zwei unterschiedlichen Stützbereichdefinitionen für ungeordnete Vernetzungen verglichen. Zum einen wird die neue Nachbarschaftsdefinition, wie sie in Kapitel 7.3.1 beschrieben wird, und zum anderen die Definition über einen konstanten Kegel nach *Thore et al.* (vgl. Kapitel 2.4) verwendet. Der Vergleich findet für PDET-Vernetzungen mit unterschiedlichen Elementanzahlen (vgl. Tabelle 7.1) statt.

Für die Definition des Stützbereichs über Nachbarschaftsverhältnisse wird die dritte Nachbarschaftsebene \mathcal{S}_3 berücksichtigt. *Thore et al.* [Tho+19] haben neben der Verallgemeinerung des Filters für die Überhangnebenbedingung Änderungen an der differenzierbaren Maximumsfunktion eingeführt. Diese sind unabhängig von der Stützbereichsdefinition und werden nicht berücksichtigt. Es wird daher die s_{\max} -Funktion in ihrer ursprünglichen Form [Lan17] verwendet und es werden die zusätzlichen Parameter zur Vermeidung spitzer Innenwinkel vernachlässigt.

Die Nachbarschaftsdefinition ist geeignet, bei PDET-Vernetzungen mit $H_{\max} = \{0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$ mm und einem Filterradius von $R = 1$ mm eine Überhangnebenbedingung zu

realisieren. Im Folgenden wird ein Vergleich mit der Kegeldefinition des Stützbereichs nach *Thore et al.* durchgeführt.

Im Vergleich der Ergebnisse mit $H_{\max} = 0,5 \text{ mm}$, dargestellt in **Abbildung 7.18**, zeigt sich bei beiden Verfahren eine ähnliche Struktur des optimierten Bauteils. Es ist jedoch ersichtlich, dass die Dreieckstrukturen bei der Nachbarschaftsdefinition größere Überhangwinkel aufweisen.

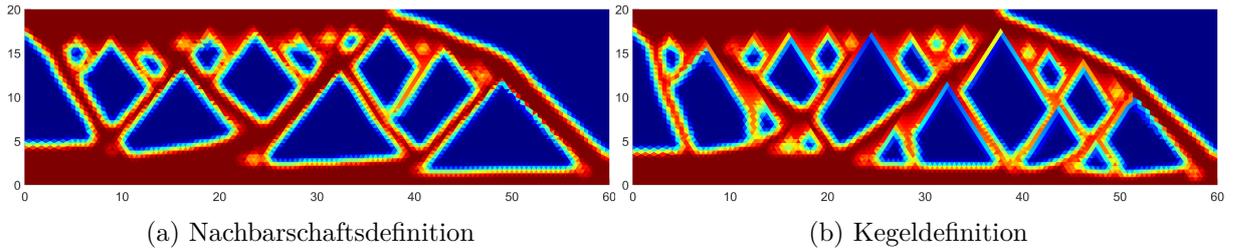


Abbildung 7.18.: Vergleich des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,5 \text{ mm}$

Die Beobachtung wird gestützt durch die Darstellung der Überhangwinkel in **Abbildung 7.19**. Die meisten Überhangwinkel sind bei Verwendung der Nachbarschaftsdefinition grün kodiert, wobei bei der Kegeldefinition die Winkel in der Mehrheit blau koloriert sind. Die Winkel betragen daher ca. 40° bzw. ca. 30° . Es wird somit nicht der vollständige erlaubte Winkelbereich ausgenutzt und die Lösung unnötig stark eingeschränkt. Die Untersuchung der Nachbarschaftsdefinition hat gezeigt, dass für eine volle Ausnutzung des Winkelbereichs eine Mindestanzahl an Elementen im Stützbereich erforderlich ist. Folglich ist die Auflösung der Vernetzung bei Verwendung der Kegeldefinition noch nicht hoch genug.

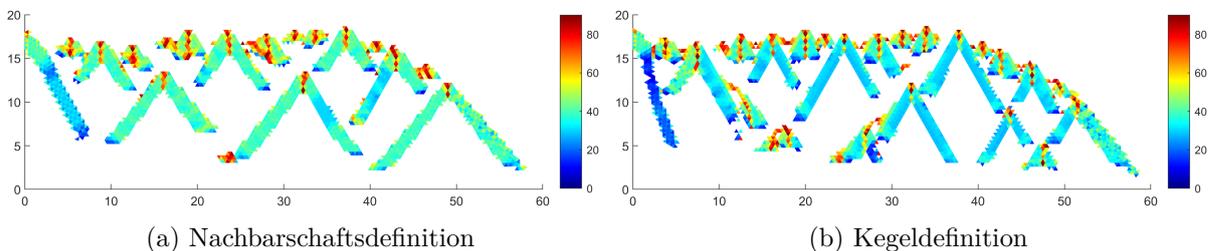


Abbildung 7.19.: Vergleich der Überhangwinkel des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,5 \text{ mm}$

Ein ähnliches Bild liefert der Vergleich bei $H_{\max} = 0,4 \text{ mm}$ (vgl. **Abbildung 7.20**). Ein Unterschied ist, dass die Graubereiche bei der Kegeldefinition weniger geworden sind als bei der Vernetzung mit $H_{\max} = 0,5 \text{ mm}$.

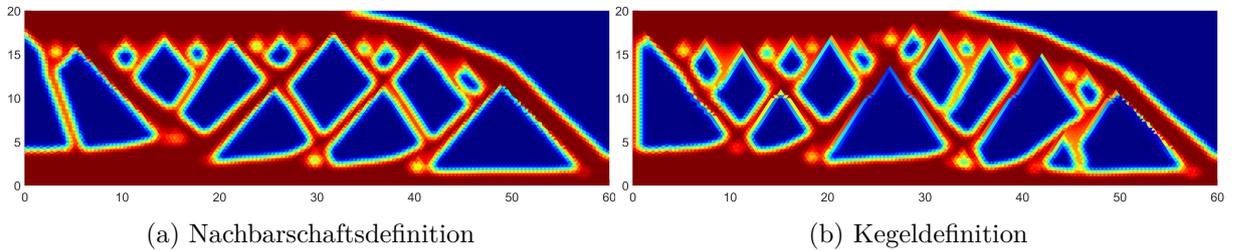


Abbildung 7.20.: Vergleich des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,4 \text{ mm}$

Bei Betrachtung der Überhangwinkel in **Abbildung 7.21** zeigen sich bei beiden Stützbereichdefinitionen im Vergleich zur größeren Vernetzung in **Abbildung 7.19** keine signifikanten Unterschiede.

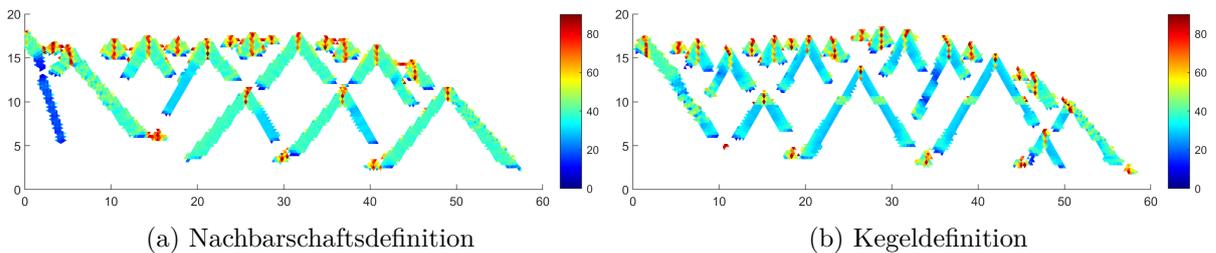


Abbildung 7.21.: Vergleich der Überhangwinkel des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,4 \text{ mm}$

Bei weiterer Verfeinerung der Vernetzung mit $H_{\max} = 0,3 \text{ mm}$ ändert sich das Optimierungsergebnis bei Verwendung der Kegeldefinition (vgl. **Abbildung 7.22**) und ähnelt sehr stark dem Ergebnis mit der Verwendung der Nachbarschaftsdefinition.

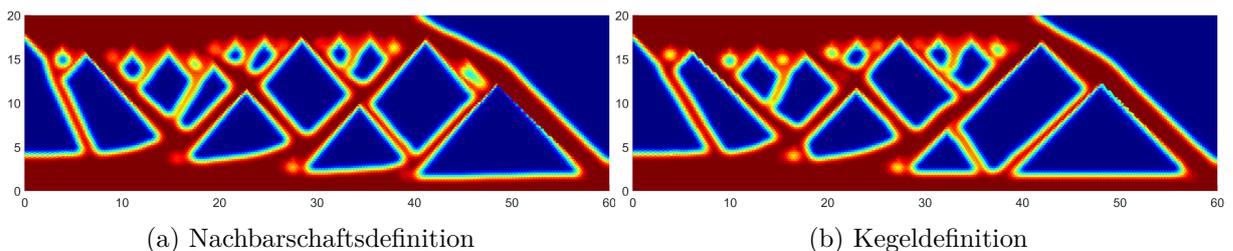


Abbildung 7.22.: Vergleich des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,3 \text{ mm}$

Der Vergleich der Überhangwinkel (vgl. **Abbildung 7.23**) zeigt, dass bei der Vernetzung mit $H_{\max} = 0,3$ mm die Winkel für beide Definition im selben Bereich bei ca. 40° liegen, sodass für das vorliegende Problem und die gewählten Optimierungsparameter dies die maximale Elementgröße ist, ab der die Kegeldefinition des Stützbereichs geeignet ist.

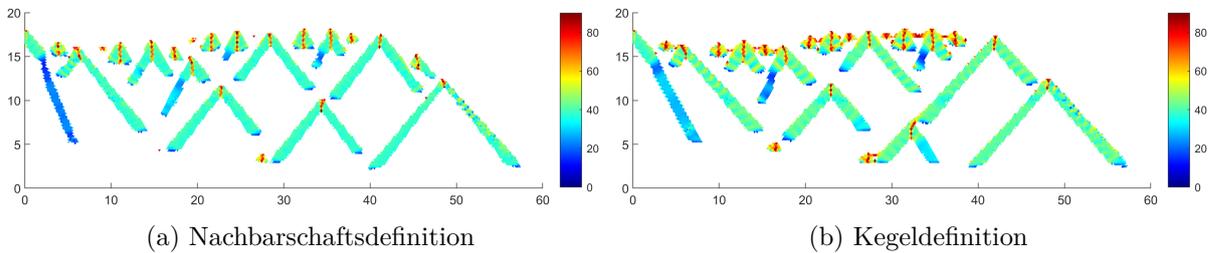


Abbildung 7.23.: Vergleich der Überhangwinkel des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,3$ mm

Eine weitere Verfeinerung führt, wie in **Abbildung 7.24** zu sehen, erneut zu einer Veränderung der Bauteilstruktur. Die in **Abbildung 7.25** dargestellten Winkel der Überhänge ändern sich jedoch nicht.

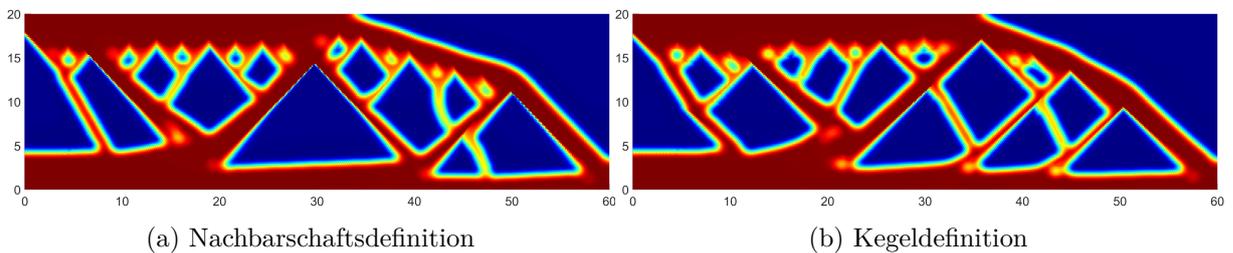


Abbildung 7.24.: Vergleich des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,2$ mm

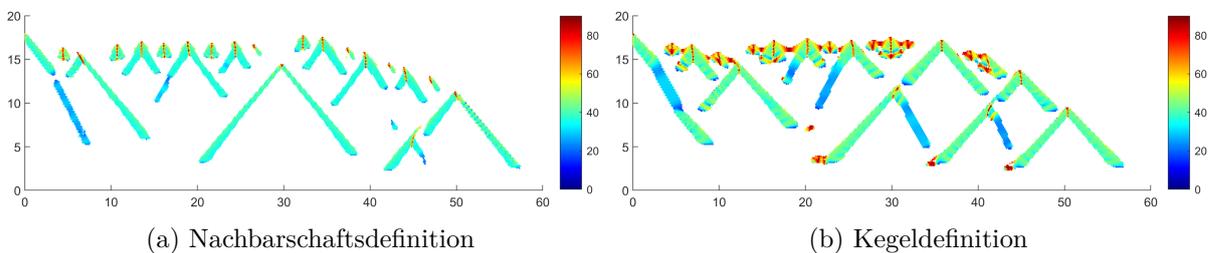


Abbildung 7.25.: Vergleich der Überhangwinkel des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,2$ mm

Bei Betrachtung der Anzahl der Elemente, die zur Abstützung eines Elements berücksichtigt werden, wird deutlich, warum bei den gewählten Parametern eine Vernetzung mit einem

Tabelle 7.4.: Vergleich der Elementanzahl in den Stützbereichen zwischen beiden Definitionen

H_{\max}	Nachbarschaftsdefinition		Kegeldefinition	
	Maximum	Median	Maximum	Median
0,2 mm	24	18	73	63
0,3 mm	24	18	32	28
0,4 mm	23	18	20	15
0,5 mm	23	18	13	10

$H_{\max} \leq 0,3$ mm benötigt wird. In **Tabelle 7.4** wird gezeigt, dass bei der Nachbarschaftsdefinition des Stützbereichs die Anzahl der berücksichtigten Elemente je Element unabhängig von der Elementgröße ist. Bei allen untersuchten Vernetzungen liegt der Medianwert der Elemente im Stützbereich \mathcal{S}_3 bei 18. In Kapitel 7.3.2 wird gezeigt, dass \mathcal{N}_3 die mindestens zu berücksichtigende Nachbarschaftsebene zur Realisierung eines Überhanggrenzwinkels Φ_{\max} ist. Bei der Kegeldefinition steigt die Anzahl der Elemente im Stützbereich bei Verfeinerung der Vernetzung an. Bei den Vernetzungen mit $H_{\max} = \{0,5; 0,4\}$ mm liegt der Median der Elemente im Stützbereich bei 10 bzw. 15 und somit unterhalb dieses Grenzwerts und die Ergebnisse zeigen eine zu strenge Restriktion der Überhangwinkel. Der Grenzwert wird bei einer Vernetzung von $H_{\max} = 0,3$ mm mit einem Median von 28 überschritten und das Optimierungsergebnis hat Überhänge, die in ihren Winkeln annähernd dem geforderten Maximalwinkel von $\Phi_{\max} = 45^\circ$ entsprechen.

Werden die Kennwerte der Optimierungsergebnisse verglichen (vgl. **Tabelle 7.5**), zeigen sich bei Verwendung der erforderlichen Elementanzahl bei den Vernetzungen mit $H_{\max} = \{0,2; 0,3\}$ mm keine signifikanten Unterschiede. Bei beiden Stützbereichsdefinitionen ist die Überhangnebenbedingung funktionsfähig und die Konvergenz ist ähnlich gut. Sowohl bei c als auch bei M_{nd} ergeben sich nur geringe Unterschiede, wobei die Kegeldefinition bei $H_{\max} = 0,3$ mm bei beiden Kenngrößen geringe Vorteile hat. Der maximale Unterschied liegt für c bei 0,7 % und bei M_{nd} bei 3,4 %. Ist die Auflösung der Vernetzung in Relation zum Filterradius R zu gering für die Kegeldefinition, werden nicht nur die Überhangwinkel nicht eingehalten, sondern es steigt auch die Nachgiebigkeit (+2,8 % bzw. +6,1 %) sowie die Anzahl der Elemente mit Dichten im Graubereich (M_{nd} : +7,2 % bzw. +19,1 %). Diese Effekte sind auf die zu starke Restriktion durch die Überhangnebenbedingung zurückzuführen.

Tabelle 7.5.: Vergleich der Ergebnisse bei beiden Stützbereichdefinitionen

H_{\max}	Nachbarschaftsdefinition			Kegeldefinition		
	Iterationen	c	M_{nd}	Iterationen	c	M_{nd}
0,2 mm	1.560	0,2629	0,2426	2.747	0,2611	0,2481
0,3 mm	2.314	1,3086	0,2414	1.232	1,3037	0,2334
0,4 mm	727	4,1700	0,2484	1.221	4,2852	0,2658
0,5 mm	1.155	10,1874	0,2427	737	10,8138	0,2890

7.3.4. Zufallsvernetzung

Bislang wurden die Überhangnebenbedingung sowohl in der Literatur als auch in dieser Arbeit anhand von geordneten oder zumindest regelmäßigen Vernetzungen erprobt. Es ist nicht bekannt welche Effekte stark unterschiedliche Elementgrößen und die komplette Abwesenheit von Ordnung in der Elementanordnung auf das Ergebnis der TO haben. Die Untersuchung einer solchen Vernetzung soll in diesem Kapitel durchgeführt werden. Weiterhin werden das zweidimensionale MBB-Problem betrachtet und Dreieckselemente verwendet.

Für diesen Zweck wird eine Zufallsvernetzung basierend auf zufällig angeordneten Punkten im Designraum erzeugt. Zunächst werden 20.000 Zufallspunkte generiert, wobei der Zufallszahlengenerator für eine Reproduzierbarkeit auf den Startseed von 0 gesetzt wird (`rng('default')`). Anschließend werden aus den Punkten einzigartige Punkte ausgewählt, die innerhalb einer Toleranz von 0,002 m liegen (`uniquetol`). Aus der Punkteauswahl wird eine Delaunay Triangulierung gebildet.

Die Vernetzung muss auf den Kanten des Designraums angepasst werden, ansonsten sind die Elemente in den Randbereichen stark verzerrt. Es wird eine maximale Elementgröße berechnet und es werden Punkte auf den Kanten eingefügt, die den Abstand der maximalen Elementgröße voneinander haben. Abschließend wird unter Einbezug der Punkte auf den Kanten die finale Triangulierung erzeugt.

Die resultierende Vernetzung erhebt nicht den Anspruch, eine sinnvolle Diskretisierung für die praktische Anwendung zu sein. Mithilfe der Zufallsvernetzung soll geprüft werden, inwieweit die Überhangnebenbedingung bei einer gänzlich ungeordneten Diskretisierung mit variablen Elementgrößen funktionsfähig ist. Es werden erneut sowohl die Nachbarschaftsdefinition als auch die Kegeldefinition der Stützbereiche betrachtet und die Ergebnisse bei Verwendung der PDET- und der Zufallsvernetzung miteinander verglichen.

Die Toleranz der einzigartigen Punkte wird so eingestellt, dass in etwa eine mittlere Elementgröße von 0,3mm erreicht wird, sodass entsprechend der Vorergebnisse beide Stützbereichsdefinitionen potenziell funktionsfähig sind. Die generierte Vernetzung enthält 34.850 Elemente mit einer mittleren Elementgröße von 0,3040 mm. Das kleinste Element hat eine Größe von 0,0021 mm und das größte Element eine Größe von 0,9288 mm. Wie in **Abbildung 7.26** zu sehen, folgt die Elementform und -anordnung keiner Regelmäßigkeit.

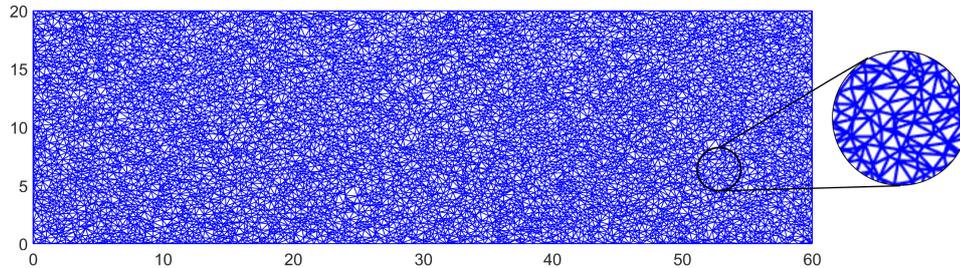


Abbildung 7.26.: Zufallsvernetzung des Designraums

Die resultierenden Elemente haben stark unterschiedliche Elementgrößen, wobei das größte Element 4422 % größer ist als das kleinste Element. Bei den extremen Elementgrößen handelt es sich jedoch um Ausreißer und ein Großteil der Elementgrößen streuen um den Mittelwert. Einen Überblick über die Verteilung der Elementgrößen liefert das Histogramm in **Abbildung 7.27**.

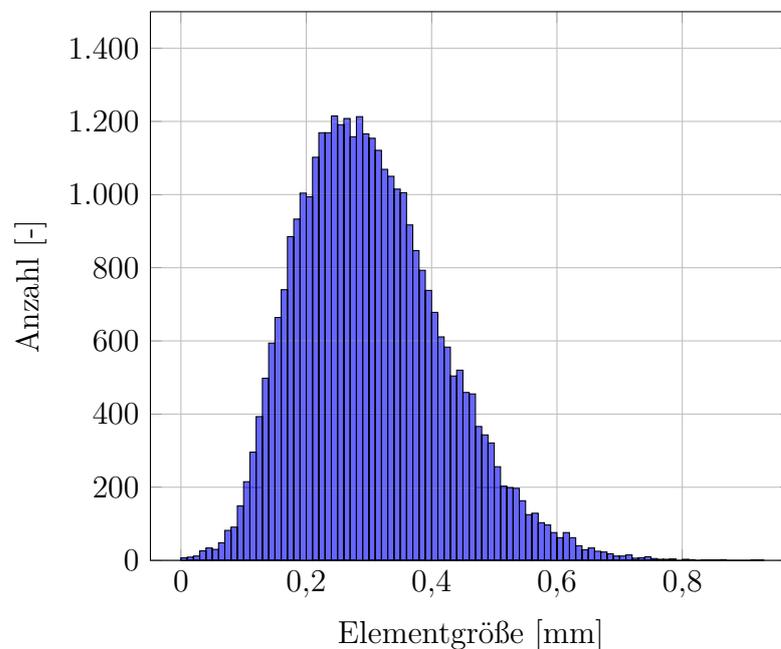


Abbildung 7.27.: Verteilung der Elementgrößen in der Zufallsvernetzung

Der Einfluss der Zufallsvernetzung auf das Optimierungsergebnis ohne Überhangnebenbedingung im Vergleich zur PDET-Vernetzung ist in **Abbildung 7.28** zu sehen. Im Gegensatz zur Änderung der Elementgröße bei Verwendung der PDET-Vernetzung treten durch die Änderung der Vernetzungsmethode deutliche Unterschiede auf. Offensichtlich ist, dass die Graubereiche bei der Zufallsvernetzung ausgeprägter sind. Insgesamt sind die Strukturen feiner und verlaufen weniger gradlinig.

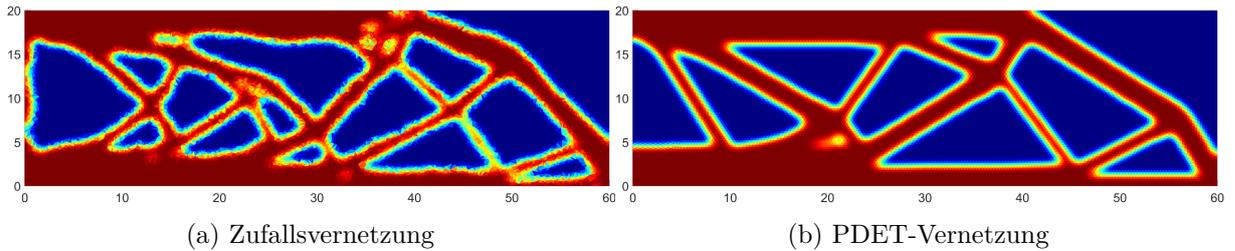


Abbildung 7.28.: MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung

Das Ergebnis bei Verwendung der Überhangnebenbedingung mit der Nachbarschaftsdefinition ist in **Abbildung 7.29** dargestellt. Es gibt eine relativ große Ähnlichkeit des Ergebnisses zu dem Ergebnis bei der PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,3 \text{ mm}$ (vgl. Abbildung 7.22), insbesondere im mittleren Teil der Geometrie. Die Konturen sind jedoch nicht so klar umrissen. Die größten Abweichungen sind am linken Rand ($x = 0$) und zwischen $40 < x < 60$ zu finden. Am linken Rand findet sich, wie auch bei der uneingeschränkten Optimierung, eine vertikale Strebe.

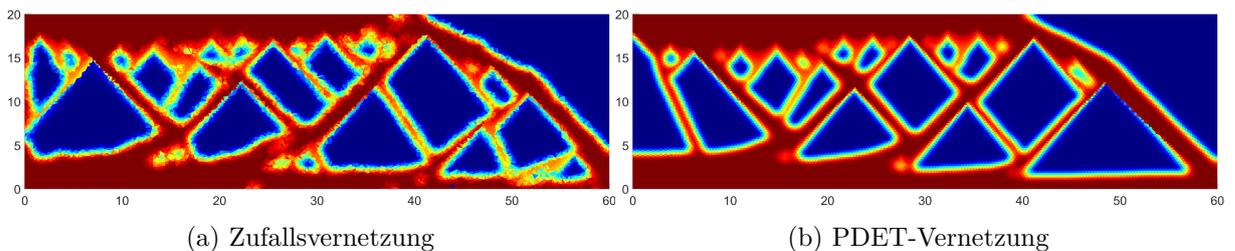


Abbildung 7.29.: MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und Nachbarschaftsdefinition

Die Kegeldefinition (vgl. **Abbildung 7.30**) ist stärker vernetzungsabhängig und es gibt größere Abweichungen zwischen der Zufalls- und PDET-Vernetzung als bei der Nachbarschaftsdefinition, jedoch ähneln sich auch hier die Optimierungsergebnisse. Es gibt jedoch nur sehr wenige Streben, die sich sowohl in dem Ergebnis mit der PDET-Vernetzung als auch in dem Ergebnis mit der Zufallsvernetzung wiederfinden.

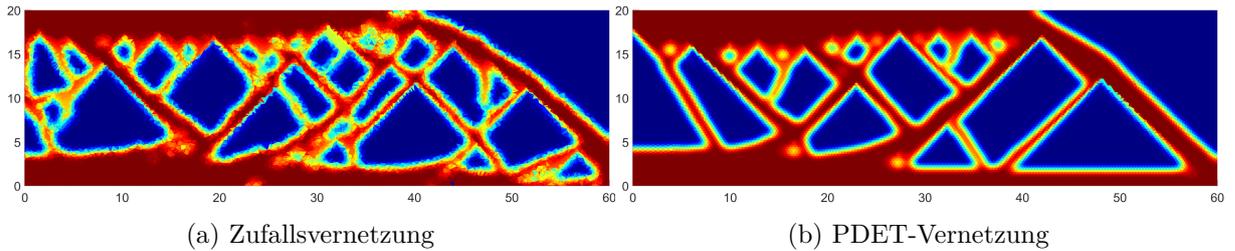


Abbildung 7.30.: MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und Kegeldefinition

Die Vorteile der Nachbarschaftsdefinition bei Verwendung der Zufallsvernetzung zeigen sich auch im Vergleich der Nachgiebigkeit c und der Kenngröße M_{nd} für die Existenz von Graubereichen in **Tabelle 7.6**. Auch ohne Verwendung der Überhangnebenbedingung sinkt die Qualität des Optimierungsergebnisses bei Verwendung der Zufallsvernetzung. Die Nachgiebigkeit bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{max} = 0,3$ mm liegt bei $c = 1,2466$ und steigt bei Verwendung der Zufallsvernetzung auf $c = 1,2795$. Zusätzlich zeigt das Ergebnis mehr Graubereiche, erkennbar daran, dass $M_{nd} = 0,2178$ auf $M_{nd} = 0,2727$ steigt.

Tabelle 7.6.: Vergleich der Optimierungsergebnisse bei beiden Stützbereichen und beiden Vernetzungsstrategien

Stützbereich	Nachbarschaftsdefinition				Kegeldefinition			
	Zufall		PDET		Zufall		PDET	
Vernetzung	c	M_{nd}	c	M_{nd}	c	M_{nd}	c	M_{nd}
	1,3400	0,2866	1,3086	0,2414	1,3759	0,3273	1,3037	0,2334

Es ergeben sich bei Verwendung beider Überhangnebenbedingungen dieselben Tendenzen. Die Kenngrößen für die Qualität des Optimierungsergebnisses unterscheiden sich bei Verwendung der PDET-Vernetzung nur gering, jedoch verschlechtern sich die Kennwerte bei Verwendung der Zufallsvernetzung. Wenn die Zufallsvernetzung verwendet wird, ist das Optimierungsergebnis mit der Nachbarschaftsdefinition des Stützbereichs besser als mit der Kegeldefinition. Sowohl die Nachgiebigkeit c als auch die Kenngröße für Existenz von Graubereichen M_{nd} sind in diesem Fall kleiner.

Neben der Qualität des Optimierungsergebnisses ist zusätzlich der Rechenaufwand bei der Nachbarschaftsdefinition geringer. Es ist in **Tabelle 7.7** zu sehen, dass bei der Nachbarschaftsdefinition weniger Elemente den Stützbereich bilden.

Tabelle 7.7.: Vergleich der Anzahl der Elemente im Stützbereich bei beiden Stützbereichen und beiden Vernetzungsstrategien

Stützbereich	Nachbarschaftsdefinition				Kegeldefinition			
	Zufall		PDET		Zufall		PDET	
Elementanzahl	Max.	Median	Max.	Median	Max.	Median	Max.	Median
	48	20	24	18	60	32	32	28

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Nachbarschaftsdefinition bei einer unregelmäßigen Dreiecksvernetzungen ein klarer umrissenes Optimierungsergebniss zeigt und weniger rechenaufwändig ist als die Kegeldefinition des Stützbereichs. Bei der Verwendung von einer Vernetzung mit Regelmäßigkeiten ist die Nachbarschaftsdefinition weniger darauf angewiesen, dass die Optimierungsparameter aufeinander abgestimmt sind. Darüber hinaus kann eine gröbere Vernetzung verwendet werden als bei der Kegeldefinition mit einer Kegelhöhe von $H = 1,2 \cdot R$, wie sie von *Thore et. al.* [Tho+19] verwendet wird.

7.3.5. Untersuchung eines optimierten MBB-Balkens im \mathbb{R}^3

Im Folgenden wird überprüft, ob die Ergebnisse der TO auf reale additiv gefertigte Bauteile übertragbar sind. Es ist dafür erforderlich, dass Optimierungen im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 durchgeführt werden. Für alle Anwendungsfälle haben sich im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 Vorteile durch die Nachbarschaftsdefinition ergeben, sodass davon ausgegangen wird, dass diese analog im \mathbb{R}^3 vorzufinden sind. Folgend aus den Ergebnissen in Kapitel 7.3.2 wird daher für die Optimierung eines MBB-Balkens im \mathbb{R}^3 der Stützbereich \mathcal{S}_3 verwendet. Der MBB-Balken wird unter Verwendung einer Symmetrieebene (vgl. Abbildung 7.2a) optimiert. Der halbe Balken hat die Außenmaße $20 \times 20 \times 60$ mm.

Zur Diskretisierung des Designraums wird eine PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 1$ mm verwendet. Dies ist größer als bei den zweidimensionalen Optimierungen, da durch die Hinzunahme der dritten Dimension der Speicherbedarf und die Rechenzeiten stark ansteigen. Der Filterradius wird auf $R = 2$ mm gesetzt. Im Anschluss an die Optimierung findet der Export der STL-Datei, wie in Kapitel 7.2 beschrieben, statt.

Anders als bei den vorangegangenen Optimierung des MBB-Balkens wird der beizubehaltende Volumenanteil statt $V_{\max} = 0,5$ auf $V_{\max} = 0,3$ gesetzt. Bei Verwendung von $V_{\max} = 0,5$ ergeben sich optimierte Bauteile, die unabhängig von der Überhangnebenbedingung ähnlich aufgebaut sind. Durch die Verringerung des Volumenanteils ergeben sich mit

und ohne Verwendung der Überhangnebenbedingung Optimierungsergebnisse, die sich in ihrer Struktur deutlich unterscheiden. Das Optimierungsergebnis ohne Überhangnebenbedingung zeigt erwartungsgemäß Überhänge mit Winkeln, die größer als der kritische Winkel von 45° sind. In **Abbildung 7.31** ist zu sehen, dass eine Fertigung ohne Stützstrukturen dazu führt, dass Bahnen absacken. Eine Fertigung des optimierten MBB-Balkens unter Berücksichtigung der Überhangnebenbedingung ist auch ohne Stützstrukturen möglich. In den zwei Ansichten in **Abbildung 7.32** wird das entsprechende Druckergebnis gezeigt.

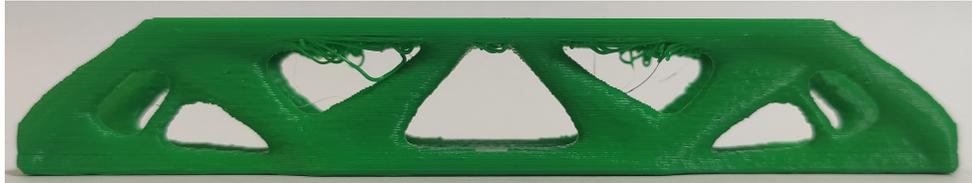


Abbildung 7.31.: Additiv gefertigter MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung



Abbildung 7.32.: Additiv gefertigter MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung

Um den MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung realistisch testen zu können, muss dieser mit Stützstrukturen gefertigt werden. Aufgrund der geringen Bauteilgröße und der Bauteilstruktur besteht die Gefahr, das Bauteil bei mechanischer Entfernung der Stützstrukturen zu beschädigen. Daher werden die Bauteile auf einem *Ultimaker 3* gefertigt. Der *Ultimaker 3* ist ein Multimaterialdrucker, der es ermöglicht, zwei unterschiedliche Materialien in einem Prozess zu verarbeiten. Die Bauteile werden aus PLA (Fa. *Extruder, PLA NX2 hellfire red*) und die Stützstrukturen aus Polyvenylalkohol (PVA) (Fa. *Ultimaker, PVA*) gefertigt. PVA ist wasserlöslich und kann daher durch ein Wasserbad entfernt werden.

Es soll untersucht werden, ob die Überhangnebenbedingung einen signifikanten Einfluss auf die Steifigkeit des optimierten Balkens hat. Nach der Binärisierung des Dichtefelds wird in einer Simulation die Durchbiegung des MBB-Balkens bei Belastung ermittelt. Der optimierte Balken mit Verwendung der Überhangnebenbedingung hat eine um 4 % größere Verschiebung am Ort der Krafteinleitung als der Balken ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung. Die Simulation sagt somit eine etwas größere Nachgiebigkeit durch die Verwendung der Nebenbedingung voraus.

In der additiven Fertigung ist die Verwendung von porösen Innenstrukturen (Infill) etabliert. Es wird untersucht, inwieweit die Verwendung von Infill die Bauteilsteifigkeit beeinflusst. Die untersuchte Fragestellung ist, ob durch die Verwendung von Infill die Steifigkeit des optimierten MBB-Balkens signifikant beeinflusst wird. Für die Biegeversuche wird sich an der Norm DIN EN ISO 178 [DIN13] orientiert, auch wenn die Probengeometrien nicht normgerecht sind. Entsprechend der Norm müssen mindesten fünf Versuchswiederholungen durchgeführt werden. Es werden je fünf Proben des optimierten Balkens nach einer Optimierung mit und ohne die Überhangnebenbedingung hergestellt. Zudem werden diese zehn Proben einmal massiv gefertigt und ein weiteres Mal unter Verwendung von Infill mit einer Dichte von 20 % (Infilltyp *Cubic*). Die Proben mit und ohne Infill werden getrennt gefertigt, wobei die je zehn Proben zufällig auf dem Druckbett angeordnet werden. Die verwendeten Düsen haben einen Durchmesser von 0,4 mm und es wird eine Layerdicke von 0,15 mm verwendet. Bei der Bahngenerierung für die Proben mit Infill werden zwei Perimeter und sieben Deckschichten vorgegeben. Die Verarbeitungstemperatur für das PLA liegt bei 210 °C, für das PVA bei 225 °C und das Druckbett wird auf 60 °C geheizt.

Nach dem Druckprozess werden die Proben für 70 h in ein Wasserbad gelegt. Um eine Gleichbehandlung sicherzustellen, befinden sich auch die Proben ohne Stützstrukturen mit in dem Wasserbad. Die zufällige Anordnung auf dem Druckbett und die Gleichbehandlung sollen systematische Fehler verhindern. Die Stützstrukturen haben sich während der Zeit im Wasserbad vollständig aufgelöst. Nach dem Wasserbad werden die Biegeproben in einem Klimaschrank bei Normklima konditioniert. Entsprechend der Norm DIN EN ISO 291 [DIN08] sollen die Kunststoffproben mindestens 88 h in einer Umgebung bei 23 °C und 50 % relativer Luftfeuchtigkeit gelagert werden. Da die Proben deutlich größere Querschnitte haben als die genormten Proben, wird die Zeit im Klimaschrank erhöht und die Proben erst nach 17 Tagen geprüft.

Die Biegeversuche werden auf einer Universalprüfmaschine der Fa. *Galdabini* vom Typ *Quasar 25* durchgeführt. Der Aufbau entspricht einem Dreipunktbiegeversuch und ist in **Abbildung 7.33** am Beispiel eines optimierten MBB-Balkens ohne Überhangnebenbedingung dargestellt. Die Auflager und die Druckfinne haben Rundungsradien von 5 mm, wie in DIN EN ISO 178 [DIN13] für Proben mit einer Dicke > 3 mm gefordert wird. Der Abstand der Auflager wird auf 114 mm eingestellt, sodass die 120 mm breiten Proben sicher, aber möglichst weit am Rand aufliegen.

Der Versuch wird zu Beginn mit einer Geschwindigkeit von 2 mm min^{-1} durchgeführt und die Prüfgeschwindigkeit nach 10 s auf 5 mm min^{-1} erhöht. Der Biegeversuch wird nach einem Verfahrensweg von 5 mm abgebrochen. Die aufgezeichneten Messkurven sind in

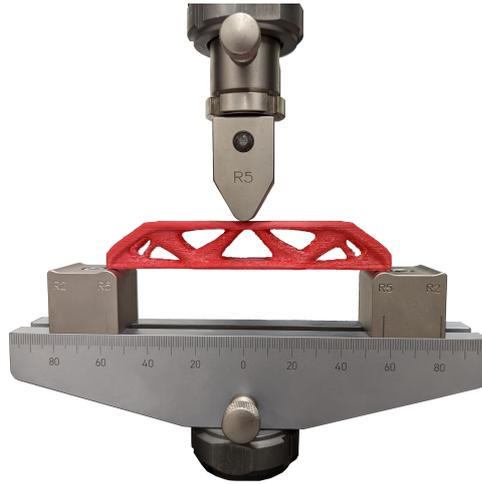


Abbildung 7.33.: Aufbau des Biegeversuchs

Abbildung 7.35 gruppiert nach der Überhangnebenbedingung und in **Abbildung 7.34** gruppiert nach der Infilldichte dargestellt.

Die Auswertung der Versuche findet anhand der Steifigkeit der Proben statt, da diese das Optimierungsziel der TO ist. Die maximalen Kräfte wiederum sind nicht von Interesse, da die Verformung beim Versagen der Balken schon so groß ist, dass die Annahme kleiner Verformungen verletzt ist, die bei der TO getroffen wird. Die Steifigkeit wird durch eine lineare Regression zwischen einer Verformung von 0,5 mm und 1,0 mm bestimmt. Die ermittelten Steifigkeiten der Proben sind in **Tabelle 7.8** aufgelistet.

Bei Betrachtung der Kurven in **Abbildung 7.34** ist kein großer Unterschied der Kurvensteigung zwischen den Proben mit und ohne Überhangnebenbedingung erkennbar. Insbesondere bei einer Infilldichte von 20 % haben die Kurven bis zu einem Weg von 1,5 mm einen annähernd identischen Verlauf. Die Steigungen liegen nahe beieinander und unterscheiden sich zwischen den optimierten Balken mit und ohne Überhangnebenbedingung um $6,7856 \text{ N mm}^{-1}$. Bei den massiven Bauteilen verlaufen die Kurven der Proben ohne Überhangnebenbedingung im Anfangsbereich der Versuche steiler, wobei der Unterschied der Steigung im Mittel $11,7983 \text{ N mm}^{-1}$ beträgt.

Die Gruppierung der Proben anhand der Überhangnebenbedingung in **Abbildung 7.35** zeigt, dass die Steifigkeiten der Proben mit einer Infilldichte von 20 % geringer sind. Es scheint, dass die Infilldichte einen größeren Einfluss auf die Balkensteifigkeit hat als die Verwendung der Überhangnebenbedingung während der Optimierung.

Es wird die Hypothese aufgestellt, dass die Überhangnebenbedingung keinen Einfluss auf die Steifigkeit des optimierten MBB-Balkens hat, im Gegensatz dazu jedoch die Infilldich-

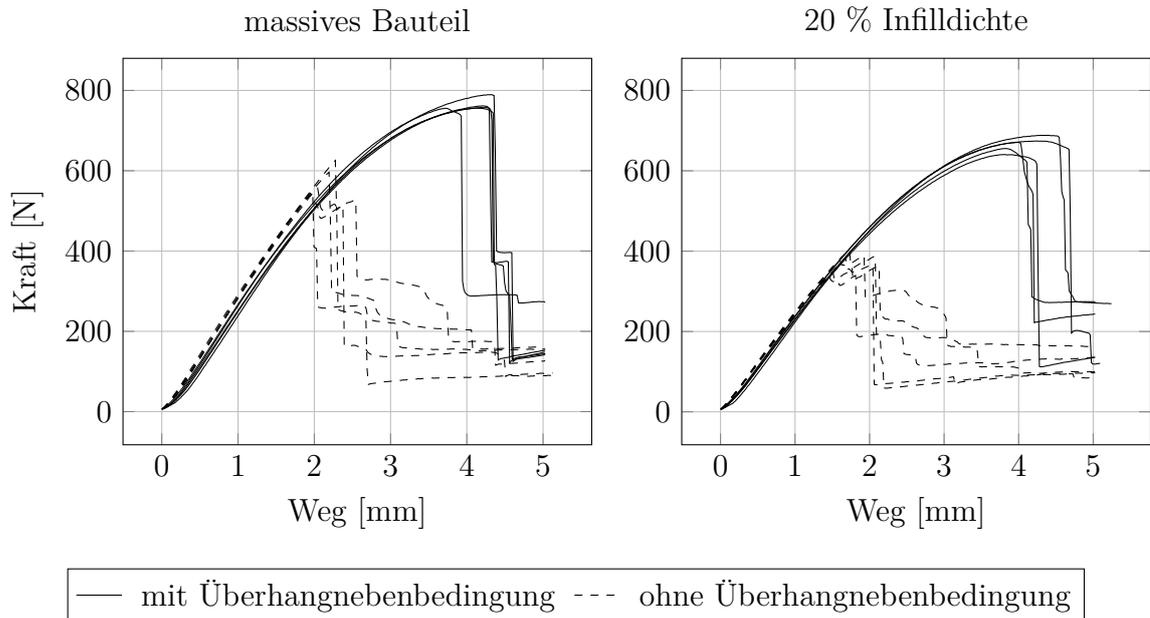


Abbildung 7.34.: Vergleich der Biegeversuche mit Gruppierung nach Infilldichte

Tabelle 7.8.: Aus den Biegeversuchen errechnete Steifigkeiten

Infilldichte [%]	Stützbereich	Steifigkeit [N/mm]
100	-	299,0215
100	-	307,7534
100	-	299,0319
100	-	300,0221
100	-	299,3141
100	\mathcal{S}_3	295,7458
100	\mathcal{S}_3	286,2544
100	\mathcal{S}_3	287,9778
100	\mathcal{S}_3	291,5100
100	\mathcal{S}_3	284,6633
20	-	248,0655
20	-	238,9793
20	-	245,3985
20	-	248,4916
20	-	244,4761
20	\mathcal{S}_3	251,9268
20	\mathcal{S}_3	254,7333
20	\mathcal{S}_3	245,1636
20	\mathcal{S}_3	256,1151
20	\mathcal{S}_3	251,4003

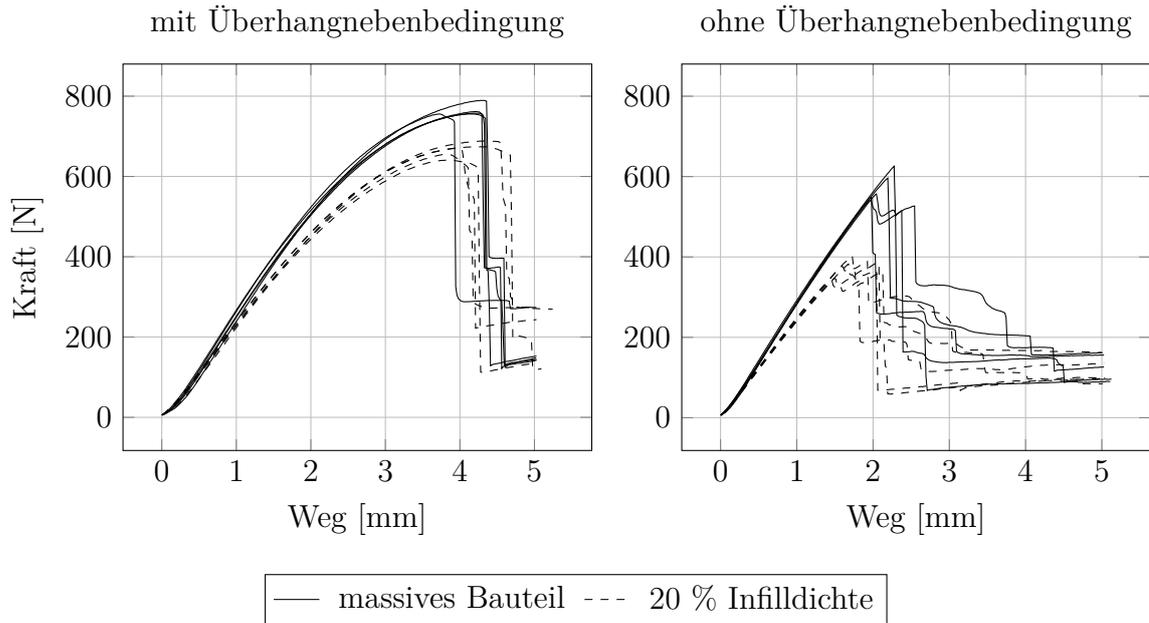


Abbildung 7.35.: Vergleich der Biegeversuche mit Gruppierung nach Überhangnebenbedingung

te die Steifigkeit beeinflusst. Mittels eines t-Tests wird untersucht, ob die Verwendung der Überhangnebenbedingung einen signifikanten Einfluss auf die Steifigkeit des optimierten MBB-Balkens hat. Die Mittelwerte der Steifigkeiten bei einer Infilldichte von 100 % ($295,1295 \text{ N mm}^{-1}$) und eine Infilldichte von 20 % ($248,4750 \text{ N mm}^{-1}$) unterscheiden sich um $46,6545 \text{ N mm}^{-1}$. Es wird von unterschiedlichen Standardabweichungen (unpooled) ausgegangen und diese für jede Infilldichte einzeln berechnet. Mit einem p-Wert von 0,01 ist der Unterschied signifikant. Bei Betrachtung der Steifigkeitsmittelwerte mit ($270,5504 \text{ N mm}^{-1}$) und ohne Überhangnebenbedingung ($273,0554 \text{ N mm}^{-1}$) beträgt der Unterschied lediglich $2,505 \text{ N mm}^{-1}$, sodass bei einem p-Wert von 0,01 kein signifikanter Unterschied der Steifigkeiten vorliegt.

Die Simulation hat einen Unterschied der Steifigkeit von 4 % vorhergesagt, sodass kein signifikanter Unterschied der Steifigkeiten mit den Simulationsergebnissen vereinbar ist. Die Standardabweichung der Steifigkeiten der Balken mit Infill liegt bei $4,95 \text{ N mm}^{-1}$, wobei die Standardabweichung bei den massiv gefertigten Balken bei $6,96 \text{ N mm}^{-1}$ liegt. Die geringere Standardabweichung der Steifigkeit bei Verwendung eines Infills kann ein Hinweis darauf sein, dass in diesem Fall nicht die Steifigkeit des Bauteils, sondern die Steifigkeit des Infills ausschlaggebend ist, da dieses direkt am Ort der Krafteinleitung komprimiert wird. Für die Berücksichtigung von Infill in der TO sind weitere Arbeiten in der Zukunft erforderlich.

8. Ermittlung der Ladungsträgerbelastung

Die Ermittlung der Belastung kann nicht analytisch gelöst werden, da die Kontaktsituation unbekannt ist. Ein solches Problem lässt sich nur numerisch in einer dreidimensionalen mechanischen Simulation lösen. Die Situation beim Ladungstransport ist zeitlich veränderlich. Beim Beschleunigen, Abbremsen oder Fahren durch Kurven wird die Ladung in einem LKW unterschiedlichen Beschleunigungskräften ausgesetzt. Die VDI-Richtlinie 2700 Blatt 16 [VDI09] behandelt die Ladungssicherung bei Kleintransportern mit einer zulässigen Gesamtmasse von 7,5 t. Dort werden die für die Ladungssicherung zu berücksichtigenden Beschleunigungen für Fahrzeuge mit einer zulässigen Gesamtmasse größer als 3,5 t als 0,8 g in Fahrtrichtung, 0,5 g entgegen der Fahrtrichtung und 0,5 g als Querschleunigungen angegeben (siehe auch Abbildung 2.2).

Die Beschleunigungskräfte des Ladungsguts werden als Kontaktkräfte auf den Ladungsträger übertragen. Um die Angriffspunkte, Krafrichtungen und Kraftbeträge zu ermitteln wird eine FEM-Simulation durchgeführt. Da nicht gesichert werden kann, in welcher Richtung das Ladungsgut im LKW während des Transports ausgerichtet ist, wird für alle Querschleunigungen in der Simulation 0,8 g angenommen. Die Simulation enthält zwei Körper: den Ladungsträger und das Ladungsgut. Der Ladungsträger bekommt ein Materialmodell mit einer Dichte von $\rho_g = 1,150 \text{ kg m}^{-3}$ und einem Elastizitätsmodul von $E_g = 0,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$. Diese Werte liegen in der Größenordnung von einem generischen Kunststoffmaterial. Das Ladungsgut wird als Stahlteil angenommen mit einer Dichte von $\rho_b = 7,850 \text{ kg m}^{-3}$ und einem Elastizitätsmodul von $E_b = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$. Für beide Bauteile wird die Querkontraktionszahl zu $\nu = 0,3$ gesetzt. Das Ladungsgut wird mit einer homogenen Massenverteilung und homogenen Materialeigenschaften modelliert. Eventuelle Hohlräume werden nicht berücksichtigt, da nur die Außenkontur bekannt ist. Der Ladungsträger wird durch Randbedingungen an dessen Unterseite in allen Raumrichtungen festgelegt.

Tabelle 8.1.: Lastfälle und die berücksichtigten Beschleunigungen in Achsrichtungen

Lastfall	a_x	a_y	a_z
L1	0 g	0 g	-1 g
L2	0 g	0,8 g	-1 g
L3	0 g	-0,8 g	-1 g
L4	0,8 g	0 g	-1 g
L5	-0,8 g	0 g	-1 g
L6	0,8 g	0,8 g	-1 g
L7	0,8 g	-0,8 g	-1 g
L8	-0,8 g	0,8 g	-1 g
L9	-0,8 g	-0,8 g	-1 g

Die horizontale Ausrichtung der Körper zueinander wird aus der Ladungsträgergenerierung übernommen. Der vertikale Abstand wird auf $1 \cdot 10^{-6}$ m gesetzt. Das Ladungsgut wird nicht durch Verschiebungsrandbedingungen eingeschränkt. Auf beide Körper wirken Beschleunigungen entsprechend der Lastfälle. Insgesamt werden neun Lastfälle untersucht, wobei der erste Lastfall nur die Erdbeschleunigung berücksichtigt. Die restlichen acht Fälle kombinieren zusätzlich Querschleunigungen in x und y Richtung. Alle Lastfälle sind in **Tabelle 8.1** aufgeführt.

Die Körper werden mit Tetraederelementen vernetzt, da die Vernetzung vollautomatisch erfolgen kann. Es wird ein dynamischer Prozess simuliert, der in Sekundenbruchteilen abläuft, daher wird eine explizite Zeitintegration verwendet [Wri02]. Die Kontakte werden in der Penalty-Formulierung implementiert. Für eine numerische Stabilisierung der Simulation wird eine viskose Dämpfung verwendet. Damit das System zur Ruhe kommt, wird zwischen den Körpern Gleitreibung mit einem Reibungskoeffizienten $\mu = 0,5$ simuliert. Dieser Wert entspricht einem experimentell ermittelten Wert für Reibung zwischen PLA und Stahl [Paw18].

Der Kontakt wird als Knoten-Oberflächen-Kontakt implementiert, wobei sich die Kontaktfläche auf dem Ladungsträger und die Kontaktknoten sich auf dem Ladungsgut befinden. Die Kontaktfläche besteht aus den Facetten in der Vertiefung des Ladungsträgers. Auf den Ladungsträgeraußenseiten wird kein Kontakt definiert. Die Kontaktknoten sind die Ladungsgutknoten auf der Oberfläche. Für eine Beschleunigung der Simulation wird nicht jedes mögliche Kontaktpaar bei jeder Iteration auf eine mögliche Penetration des Kontaktknotens in die Kontaktfläche überprüft. Es wird eine Vorauswahl der Kontaktpaare basierend auf den Abstand zum Simulationsbeginn getroffen.

8.1. Implementierung der Kontaktsimulation

Die Simulation der Ladungsträgerbelastung erfordert eine nicht lineare transiente FEM-Simulation. Wegen der sich ändernden Kontaktsituation sind kleine Zeitschritte in der Simulation erforderlich, sodass eine explizite Zeitintegration verwendet wird [Wri02]. Die Grundgleichungen sind Bestandteil des Stands der Technik und werden in MATLAB bzw. C++ umgesetzt. Das Gleichungssystem hat die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{R}, \quad (8.1)$$

wobei $\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{K}\mathbf{U}$ die inneren Kräfte und \mathbf{R} die äußeren Kräfte sind. Die Vernetzung des Ladungsträgers und des Ladungsguts erfolgt mit linearen Tetraederelementen, da eine Vernetzung somit vollautomatisch erfolgen kann. Es wird eine lineare Elementformulierung verwendet, weil eine bessere Approximation durch eine größere Anzahl kleinerer Elemente vorgezogen wird. Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} erfolgt entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 7.1. Als Massenmatrix \mathbf{M} wird eine Matrix mit einer in den Knoten konzentrierten Masse verwendet, da dies die Lösung des Gleichungssystems weniger rechenaufwändig macht, weil eine konzentrierte Massenmatrix eine Diagonalmatrix und somit einfach zu invertieren ist [Wri02]. Die Massenmatrix eines Elements mit einer Elementmasse m_e und n_e Elementknoten wird durch

$${}^e\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{m_e}{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_e}{n_e} \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

berechnet. Die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} wird als Nullmatrix gewählt, da eine Dämpfung der Bewegung des Körpers im Raum nicht gewünscht ist.

Bei der expliziten Zeitintegration erfolgt die Berechnung der Verformung beim Zeitschritt $k + 1$ auf Basis des Zeitschritts k durch die Formel [Wri02]

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right) \mathbf{U}^{(k+1)} = (\Delta t)^2 [\mathbf{R}^{(k)} - \mathbf{F}(\mathbf{U}^{(k)})] + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \mathbf{U}^{(k-1)} + \mathbf{M} (2\mathbf{U}^{(k)} - \mathbf{U}^{(k-1)}) \quad (8.3)$$

Für die Berechnung der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_v^{(k)}$ und der Beschleunigung $\mathbf{a}^{(k)}$ werden zentrale Differenzenquotienten verwendet [Wri02]

$$\mathbf{v}_v^{(k)} = \frac{\mathbf{U}^{(k+1)} - \mathbf{U}^{(k-1)}}{2\Delta t} \quad (8.4)$$

$$\mathbf{a}^{(k)} = \frac{\mathbf{U}^{(k+1)} - 2\mathbf{U}^{(k)} + \mathbf{U}^{(k-1)}}{(2\Delta t)^2}. \quad (8.5)$$

Bei einer Mehrkörpersimulation ist eine der rechenaufwändigsten Aufgaben das Finden von Kontaktpaaren, da Kontakte an unvorhersehbaren Stellen auftreten können. Es ist daher notwendig, in jedem Zeitschritt die Kontaktstellen zu identifizieren. [Wri02]

Vor der Simulation werden der Ladungsträger und das Ladungsgut so ausgerichtet, sodass das Ladungsgut sich mit einem Höhenabstand kleiner als $1 \cdot 10^{-3}$ mm mittig über dem Träger befindet. In dieser Simulation findet die Kontaktlokalisierung so statt, dass zu Beginn der Simulation zunächst plausible Kontaktpaare identifiziert werden, die im Laufe der Simulation auf ihren Kontaktzustand hin überprüft werden. Für jeden Slaveknoten des Ladungsguts werden die Eckpunkte der Masterfacetten innerhalb einer Kugel mit einem Radius von der halben größten Höhe aller Masterfacetten identifiziert. Im Anschluss bilden der Slaveknoten und alle Facetten, die zu den Eckpunkten der Masterfacetten in der Kugel gehören, plausible Kontaktpaare.

Zu jedem Zeitschritt wird der Abstand des Slaveknotens zu den gepaarten Masterfacetten nach der uneingeschränkten Verschiebungssimulation berechnet. Eine Kontaktpaarung gilt als aktiv, wenn ein Slaveknoten innerhalb einer Masterfacette liegt und ein Vorzeichenwechsel des Abstands im Vergleich zur vorherigen Iteration stattgefunden hat oder die Paarung im vorherigen Zeitschritt bereits aktiv war. Die Prüfung, ob ein Slaveknoten innerhalb einer Masterfacette liegt, wird über die Berechnung der barycentrischen Koordinaten des Knotens in Bezug auf die Facette überprüft. Ein Slaveknoten liegt innerhalb der Masterfacette, wenn alle barycentrischen Koordinaten in $0 < a_i < 1$ liegen.

Die Kontaktkraft ist proportional zur Penetrationstiefe D des Slaveknotens in die Masteroberfläche

$$F_D = k_n D. \quad (8.6)$$

Die Kontaktsteifigkeit wird über [HGB85]

$$k_n = \frac{f_{SI} K_M A_i^2}{V_i} \quad (8.7)$$

berechnet, wobei K_M das Kompressionsmodul, A_i die Fläche der Masterfacette im Kontaktpaar und V_i das Volumen des zu der Facette gehörenden Tetraederelements ist. f_{SI} ist ein Skalierungsfaktor der Kontaktsteifigkeit mit einem Standardwert von $f_{SI} = 0,1$, wobei größere Faktoren ohne Anpassung des Zeitschritts Δt zu Instabilitäten führen können. [HGB85] Der Skalierungsfaktor wird für diese Simulation auf $f_{SI} = 0,001$ angepasst, da

die Bewegung des Ladungsguts nicht durch Verschiebungsrandbedingungen begrenzt wird und ansonsten übermäßig große Freikörperbewegungen auftreten.

Da das Bauteil in die Form fällt, entsteht beim Aufprall ein Schock, der durch eine künstliche Viskosität gedämpft wird, um die Lösung zu stabilisieren. In Abhängigkeit der Volumenänderungsrate eines Elements wird ein Gegendruck im Innern q_p nach folgender Formel aufgebaut [Wil80; Das17]

$$q_p = \begin{cases} b_1 \rho c_L L_e \dot{V} + \rho \left(b_2 L_e \dot{V} \right)^2 & \text{wenn } \left(\frac{\dot{V}}{V} \right) < 0, \\ 0 & \text{wenn } \left(\frac{\dot{V}}{V} \right) \geq 0, \end{cases} \quad (8.8)$$

wobei b_1 der lineare Koeffizient der künstlichen Viskosität, b_2 der quadratische Koeffizient der künstlichen Viskosität, ρ die lokale Materialdichte, $L_e = \sqrt[3]{\bar{V}_i}$ die mittlere Elementgröße berechnet aus dem Mittelwert der Kubikwurzeln aller Elementvolumen, c_L die lokale Schallgeschwindigkeit und $\left(\frac{\dot{V}}{V} \right)$ die Rate der Elementvolumenänderung ist. Die hier verwendeten Standardwerte für die Koeffizienten sind $b_1 = 0,06$ und $b_2 = 1,2$ [Das17]. Die lokale longitudinale Schallgeschwindigkeit c_L wird über das Kompressionsmodul K_M , die Materialdichte ρ_{mat} und die Querkontraktionszahl ν berechnet [BCB76]

$$c_L = \sqrt{\frac{3K_M(1-\nu)}{\rho_{\text{mat}}(1+\nu)}}. \quad (8.9)$$

Das Kompressionsmodul eines Materials hängt von dessen Elastizitätsmodul E und dessen Querkontraktionszahl ν ab [Bat14]

$$K_M = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (8.10)$$

Eine andere gebräuchliche Form der Dämpfung in FEM-Simulationen ist die Rayleigh Dämpfung [LG95], die in diesem Fall jedoch ungeeignet ist, weil auch die freie Bewegung des Bauteils gedämpft wird.

Zur Festlegung der Zeitschrittweite Δt wird das Stabilitätskriterium nach *Belytschko et al.* [BCB76] verwendet

$$\Delta t \leq \delta \frac{h}{c_L}, \quad (8.11)$$

wobei c_L die Schallgeschwindigkeit, h die charakteristische Länge des kleinsten Elements und δ ein Reduktionsfaktor ($0,2 < \delta < 0,9$) ist, der empirisch für jedes Problem bestimmt werden muss [Wri02]. δ ist erforderlich wegen der destabilisierenden Effekte von Rundungsfehlern und lokal stark variierenden Materialparametern [BCB76]. In Vorversuchen wird

der Wert für δ bestimmt und ein Wert von $\delta = 0,4$ für eine stabile Lösung ermittelt. Dieser Wert wird für alle weiteren Kontaktsimulationen eingesetzt.

Um dem System Energie zu entziehen, sodass ein statischer Zustand erreicht wird, wird Gleitreibung zwischen dem Ladungsgut und dem Ladungsträger berücksichtigt. Bei den aktiven Kontaktpaaren wird geprüft, ob der Kontakt schon in der vorherigen Iteration aktiv war. Ist dies der Fall, wird die relative Geschwindigkeit zwischen den Kontaktpartnern ermittelt. Die Reibungskraft F_R wird über ein regularisiertes Coulombsches Reibungsgesetz bestimmt. Es wird die Wurzelregularisierung verwendet [Wri02]

$$F_R = -\mu_R \frac{v_T}{\sqrt{v_T^2 + \epsilon}} \|F_N\|, \quad (8.12)$$

wobei μ_R der Reibungskoeffizient, v_T die Tangentialgeschwindigkeit, F_N die Normalkraft und ϵ der Regularisierungskoeffizient ist. Hier wird $\epsilon = 10^{-5}$ verwendet.

Der Gesamt Ablauf der Simulation zur Belastungsberechnung des Ladungsträgers wird durch einen Pseudocode verdeutlicht. Um die erforderliche Rechenzeit zu reduzieren, werden nur einige Initialisierungsschritte in Matlab durchgeführt. Insbesondere die Rechenschritte, die in jedem Zeitschritt durchgeführt werden müssen, sind in ein C++-Programm implementiert, da dort schon ein geringer Rechenzeitvorteil einen großen Einfluss auf die Gesamt rechenzeit hat und ein kompiliertes C++-Programm im Allgemeinen schneller ist als ein MATLAB-Skript. Versuche haben gezeigt, dass durch dieses Vorgehen die Rechenzeit in etwa halbiert werden kann. In MATLAB findet zunächst die Verarbeitung der STL-Dateien mit den inkludierten Funktionen statt. Anschließend wird eine Volumenvernetzung mit Tetraederelementen erzeugt, wobei die Funktion `generateMesh` aus der PDET verwendet wird.

```

1  Laden der STL-Dateien und Vernetzung
2  Masterfacette und Slaveknoten ermitteln
3  %Ausrichtung des Ladungsguts zum Ladungsträger
4  Ladungsgut 30 mm in positive z-Richtung verschieben
5  d = 0
6  shift = 0
7  for p von -3 bis -6 in -1 Schritten
8      steplen = 10^p
9      while kein Kontakt gefunden
10         Ladungsgut um steplen m nach unter verschieben
11         shift = shift + steplen
12         Auf Kontakt zwischen Ladungsträger und Ladungsgut prüfen
13     end while
14     Ladungsgut um steplen in positive z-Richtung verschieben
15     shift = shift - steplen
16 end for
17 plausible Kontaktpaare ermitteln
18 Abspeichern von Vernetzungen, Masterfacetten, Slaveknoten und plausiblen
    Kontaktpaaren

```

Ein weiterer Schritt zur Simulationsvorbereitung, der in MATLAB durchgeführt wird, ist die Festlegung der Masterfacetten und Slaveknoten. Hierfür wird jeweils die implementierte Funktion `freeBoundary` eingesetzt, die die freien Facetten bzw. Knoten der Oberflächenmodelle zurückgibt. Für die Festlegung der Masterfacetten finden anschließend eine Überprüfung der Facettennormalenvektoren statt, um die Ladungsträgeraußenflächen zu exkludieren. Alle Knoten der freien Facetten des Ladungsgutmodells sind zunächst Slaveknoten. Optional kann die Anzahl der Slaveknoten reduziert werden, indem nur Knoten bis zu einer Grenzhöhe berücksichtigt werden. Diese Reduzierung ist sinnvoll, wenn große Teile des Ladungsguts sich oberhalb des Ladungsträgers befinden.

Für die Ausrichtung des Ladungsguts zum Ladungsträger wird nur die Höhe in der z -Achse betrachtet, da durch die Generierung des Ladungsträgers sich das Ladungsgut in der xy -Ebene bereits in der Mitte des Ladungsträgers befindet. Bei der Höhenausrichtung wird das Ladungsgut zunächst um 30 mm in positive z -Richtung verschoben, sodass sichergestellt ist, dass initial kein Kontakt vorhanden ist. Prinzipiell sind Ladungsgut und -träger zu Beginn nicht im Kontakt, jedoch kann es bei einer groben Volumenvernetzung und wenn bei der Ladungsträgergenerierung nur eine geringe Fertigungstoleranz berücksichtigt wird auch an den Initialpositionen zu Modellüberschneidungen kommen.

Das Ladungsgut wird zunächst in 1 mm Schritten nach unten bewegt und nach jedem Schritt auf einen Kontakt hin überprüft. Während der Vorpositionierungen werden noch alle möglichen Kontaktpaare überprüft, da noch keine Vorauswahl getroffen werden kann. Wird ein Kontakt detektiert, wird das Ladungsgut um 1 mm wieder nach oben verschoben. Anschließend wird die Schrittweite um eine Zehnerpotenz verkleinert und das Vorgehen wiederholt. So wird sukzessive ein initialer z -Abstand $< 0,001$ mm eingestellt.

Im Anschluss werden die plausiblen Kontaktpaare ermittelt. Es wird für jeden Slaveknoten der Abstand zu allen Knoten der Masterfacetten berechnet. Ist der Abstand kleiner als die Hälfte der größten Höhe aller Masterfacetten, bilden der Slaveknoten und die Masterfacetten, die zu den Knoten gehören, ein plausibles Kontaktpaar. Die Datenstruktur besteht aus zwei Vektoren \mathbf{v}_c und \mathbf{e}_c , wobei \mathbf{v}_c die IDs aus der Slaveknotenliste enthält und \mathbf{e}_c die IDs aus der Liste der Masterfacette. Die Vektoren haben dieselbe Länge und die Knoten-ID bzw. die Facetten-ID an derselben Position im Vektor bilden ein plausibles Paar.

Zum Abschluss werden die Daten für die weitere Verarbeitung durch ein C++-Programm abgespeichert. Die Speicherung der Daten erfolgt in Textdateien, welche nachfolgend durch das C++-Programm erneut eingelesen werden. Eine Alternative zu diesem Vorgehen ist der Aufruf des C++-Codes als MEX-Funktion.

```

1 Übernahme der Vernetzungen, Masterfacetten, Slaveknoten und plausiblen Kontaktpaare
  aus MATLAB
2 Normalenvektoren der Masterfacetten berechnen
3 Materialmatritzen berechnen
4 Elementsteifigkeitsmatritzen und Elementmassenmatritzen berechnen
5 homogene Verschiebungsrandbedingungen in Matritzen einfügen
6
7 globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und Massenmatrix  $\mathbf{M}$  zusammensetzen
8 Massenmatrix  $\mathbf{M}$  invertieren
9 Zuordnung zwischen Masterfacette und finitem Element in der Ladungsträgervernetzung
  herstellen
10 Zeitschritt  $\Delta t$  berechnen
11
12 Lastfälle definieren
13 for each Lastfall in Lastfälle
14    $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ 
15    $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}^{(k-1)} = \mathbf{0}$ 
16    $\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{U}}^{(k-1)} = \mathbf{a}$ 
17    $\mathbf{U}^{(k-1)} = \mathbf{U} - \Delta t * \dot{\mathbf{U}} + \Delta t^2 / 2 * \ddot{\mathbf{U}}$ 
18    $t = 0$ 
19   while  $E_{\text{kin}} > 1e-5$  und  $t < 0,01$ 
20     aktuelle Normalenvektoren der Masterfacetten berechnen
21     Dämpfungskräfte  $\mathbf{F}_D$  berechnen
22     uneingeschränkte Verschiebungen  $\mathbf{U}_{t+1}$  berechnen
23     aktive Kontaktpaare ermitteln
24     Normalkräfte  $\mathbf{F}_N$  berechnen
25     relative Tangentialgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_T$  berechnen
26     Reibungskräfte  $\mathbf{F}_R$  berechnen
27     Verschiebungen  $\mathbf{U}^{(k+1)}$  inkl. Kontaktkräfte berechnen
28     Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{U}}$  und Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{U}}$  berechnen
29     kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  berechnen
30      $\mathbf{U}^{(k-1)} = \mathbf{U}, \mathbf{U} = \mathbf{U}^{(k+1)}$ 
31      $\dot{\mathbf{U}}^{(k-1)} = \dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}^{(k+1)} = \dot{\mathbf{U}}$ 
32      $t = t + \Delta t$ 
33     alle 5000 Iterationen Verschiebungen  $\mathbf{U}$  und Kontaktkräfte  $\mathbf{F}_C$  an Ergebnisdatei an-
      hängen
34   end while
35   Ergebnis an Ergebnisdatei anhängen
36 end for

```

In dem C++-Programm werden zunächst die Daten aus der MATLAB-Initialisierung geladen und in das richtige Format gebracht. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems wird die Bibliothek *eigen* in der Version 3.4 verwendet, die ihre eigenen Datenformate für Matrizen und Sparse-Matrizen verwendet. Anschließend wird die Kontakttrichtung durch die Normalenvektoren der Masterfacetten bestimmt. Diese werden einmal initialisiert und zu jedem Zeitschritt neu berechnet. Im Anschluss werden die Steifigkeits- und Massenmatrix berechnet. Für die Lösung des Gleichungssystems wird die Inverse der Massenmatrix benötigt, die einmal zu Beginn der Simulation berechnet wird. Die Kontaktsteifigkeit ist abhängig von dem Elementvolumen des Tetraeders, der zu der Masterfacette gehört. Es wird ein Vektor generiert, der jeder Masterfacette das entsprechende finite Element zuordnet. Den Abschluss der Initialisierung bildet die Berechnung des Zeitschritts mit Formel 8.11.

Die einzelnen Lastfälle werden in einer Matrix definiert, in der jede Zeile einem Lastfall mit den entsprechenden Beschleunigungen entspricht (vgl. Tabelle 8.1). Die Lastfälle werden mit einer For-Schleife durchlaufen und die resultierenden Kontaktkräfte auf den Ladungsträger aus den einzelnen Lastfällen für die Verwendung in der TO abgespeichert.

Zu Beginn jeder Lastfall-Simulation werden die Zeit, Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auf die Startwerte initialisiert. Anschließend beginnt die Berechnung der Zeitschritte, solange bis die kinetische Energie kleiner als $1 \cdot 10^{-5}$ J ist. Da das Ladungsgut zunächst in Ruhe ist und erst beschleunigt wird, wird eine Minimalzeit von 0,01 s überprüft.

Anhand der aktuellen Verschiebungen und der Verschiebung zum Zeitpunkt $k - 1$ werden die Dämpfungskräfte berechnet. Anschließend wird der Innendruck durch Gleichung 8.8 berechnet. Der Innendruck resultiert in den Knotenkräften F_D . Unter Berücksichtigung der Beschleunigungs- und Dämpfungskräfte wird die uneingeschränkte Verschiebung $U^{(k+1)}$ über Gleichung 8.3 berechnet. Im Anschluss werden die plausiblen Kontaktpaare überprüft und, im Falle eines aktiven Kontakts, über die Gleichungen 8.6 und 8.7 die Kontaktnormalkraft berechnet. Nachdem die Normalkraft bekannt ist, kann über Gleichung 8.12 die Reibungskraft berechnet werden.

Die endgültige Verschiebung $U^{(k+1)}$ wird unter zusätzlicher Berücksichtigung der Kontaktkräfte berechnet. Zum Abschluss des Zeitschritts werden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen über die zentralen Differenzenquotienten (Gleichungen 8.4 und 8.5) berechnet und der nächste Zeitschritt vorbereitet. Alle 5.000 Zeitschritte wird die aktuelle Verschiebung und die Kontaktnormalkräfte in Textdateien abgespeichert, sodass der Simulationsverlauf nachvollzogen werden kann. Zum Abschluss einer Lastfall-Simulation werden die Verschiebung und Kontaktnormalkräfte als Endergebnis gespeichert. Die Ergebnisse können in MATLAB geladen werden, um die anschließende TO durchzuführen oder das Simulationsergebnis zu visualisieren.

Damit die Rechenzeit geringer ist, wird die Berechnung der Dämpfungskräfte, genauer die Umrechnung der Elementinnendrucke q_p in die resultierenden Knotenkräfte F_D , auf mehrere Prozesse aufgeteilt. Hier werden sechs Prozesse verwendet und die Elemente gleichmäßig für die Berechnung auf die Prozesse aufgeteilt. In jedem Prozess werden für die zugeteilten Elemente die Kräfte F_D berechnet, die nach Abschluss der Berechnungen für das Gesamtsystem zusammengeführt werden. Die Aufteilung und Rekombination der Elemente bzw. Kräfte resultiert in einem Overhead an der erforderlichen Rechenzeit, die die Aufteilung anderer Simulationsschritte auf mehrere Prozesse ineffizient macht, weil der Overhead größer ist als der Rechenzeitvorteil. Andere Simulationsschritte, für die

die Aufteilung erprobt wurde, sind die Ermittlung der aktiven Kontaktpaare sowie die Berechnung der Kontaktkräfte.

Es werden exemplarisch die aus dem Transport resultierenden Kontaktkräfte auf einen Ladungsträger für das *Stanford Bunny* simuliert. Der generierte Ladungsträger hat eine Fertigungstoleranz von 4 mm und eine Wand- und Bodenstärke von 5 mm. Die Auflösung der Dixelstruktur beträgt in x - und y -Richtung jeweils 2 mm. Wenn ein Ladungsträger mit Volumenelementen vernetzt werden soll, ist es sinnvoll, dass keine Einschränkung der Auflösung in z -Richtung stattfindet. Andernfalls gibt es Stufen in der Kontaktoberfläche, die nur mit kleinen Elementen genau modelliert werden können. Ohne eine Auflösungseinschränkung ist die Oberfläche glatter und kann besser approximiert werden.

Für die Rechenzeit ist die Anzahl an Elementen in den Vernetzungen und Anzahl an Kontaktpaaren entscheidend. Es ist daher eine Vernetzung zu wählen, die ausreichend aufgelöst ist, jedoch so wenig Elemente wie möglich enthält. Die Oberflächenmodelle des Ladungsguts und des Ladungsträgers werden vor der Generierung der Volumenvernetzung geglättet, sodass feine Strukturen auf der Oberfläche entfernt werden. Diese Strukturen sind für die Topologieoptimierung weitestgehend uninteressant, aber die minimale Elementgröße im Netz wird größer, sodass ein größerer stabiler Zeitschritt möglich wird. Die erforderliche Elementgröße ist eine Einzelfallentscheidung. Im Fall des Ladungsträgers für das *Stanford Bunny* werden Ladungsgut und Ladungsträger mit einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 15$ mm diskretisiert.

Zu Beginn der Simulation beschleunigt das Ladungsgut bis es zu einem ersten Kontakt mit dem Ladungsträger kommt. Zunächst prallt das Ladungsgut zurück, jedoch ist in **Abbildung 8.1** zu erkennen, dass über die Zeit die kinetische Energie abnimmt und sich ein Zustand einstellt, in dem eine annähernd statische Kontaktkraft wirkt. Die Summe der Kontaktkräfte in z -Richtung beträgt zum Endzeitpunkt 55,55 N. Die wirkende Gewichtskraft des Ladungsguts summiert sich auf 57,33 N, sodass davon ausgegangen werden kann, dass das System noch nicht vollständig in Ruhe ist, jedoch für den Anwendungsfall ausreichend genau ist. Bei einer TO ist die Verteilung und das Verhältnis der äußeren Kräfte entscheidend, aber das Ergebnis ist vom Betrag unabhängig. Ähnliche Diagrammverläufe ergeben sich für die weiteren acht Lastfälle.

Obwohl schon einige Maßnahmen zur Beschleunigung der Simulation getroffen worden sind, ist die erforderliche Rechenzeit weiterhin erheblich. Die Simulation aller neun Lastfälle erfordert auf einem System mit Intel Core i9-10900 CPU und 32 GB RAM ca. 324 h. Das Ergebnis der Simulation der neun Lastfälle ist in **Abbildung 8.2** dargestellt, wobei die Vektoren die Knotenkräfte infolge des Kontaktes darstellen. Eine belastete Facette wird

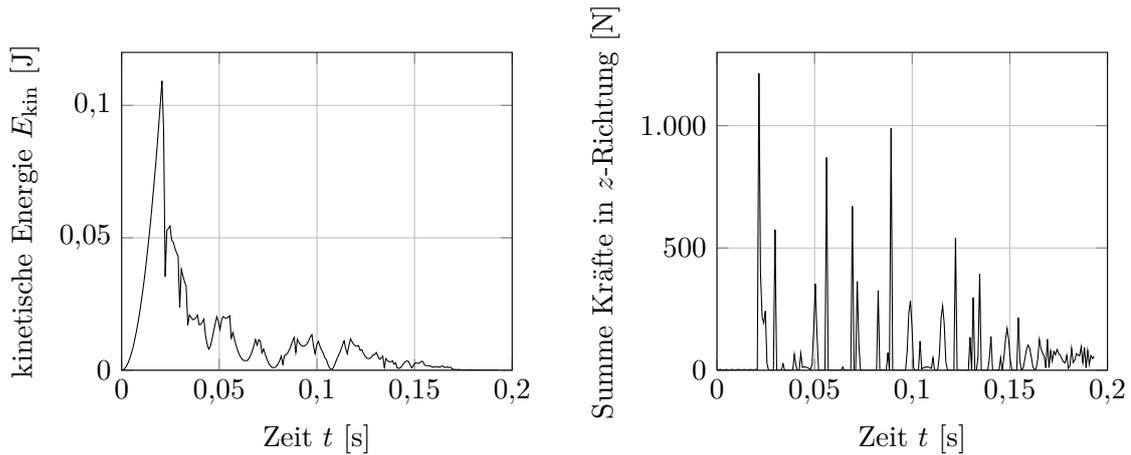


Abbildung 8.1.: Kinetischen Energie E_{kin} und die Summe der Kontaktkräfte in z -Richtung im Zeitverlauf bei der Kontaktsimulation zwischen dem Ladungsträger und dem *Stanford Bunny* im Lastfall L1

somit durch drei Vektoren auf die Eckpunkte der Facette dargestellt, wobei die farbliche Kodierung dem Lastfall entspricht. In den einzelnen Lastfällen werden nur wenige Facetten belastet, wobei am Ende der Simulation eines Lastfalls im Mittel nur vier Facetten einen aktiven Kontakt haben.

Die Ursache liegt in der groben Vernetzung und der geringen Verformung der Kontaktkörper. Weil nur die Beschleunigungskräfte wirken, wird das Ladungsgut nicht in den Ladungsträger gepresst und das Ladungsgut liegt nur an einzelnen äußeren Punkten auf. Durch die Berücksichtigung der unterschiedlichen Lastfälle verteilen sich die Kontaktpunkte über die gesamte Kontaktfläche im Inneren des Ladungsträgers.

8.2. Heuristik zur Ermittlung der Belastung

Die Rechenzeiten für die Simulation der Lastfälle der Ladungsträgerbelastung nimmt mehrere Tage in Anspruch. Weiterhin werden Fertigungstoleranzen bzw. Ungenauigkeiten bei der Ermittlung der Ladungsgutgeometrie nicht berücksichtigt. Weitere Geometrieabweichungen resultieren aus der Überführung der Oberflächenvernetzungen in Volumenvernetzungen. Da angenommen wird, dass nur die äußere Kontur des Ladungsguts bekannt ist und das Ladungsgut eine homogene Massenverteilung hat, wird in der Regel der Schwerpunkt des Ladungsguts in der Simulation vom realen Schwerpunkt abweichen.

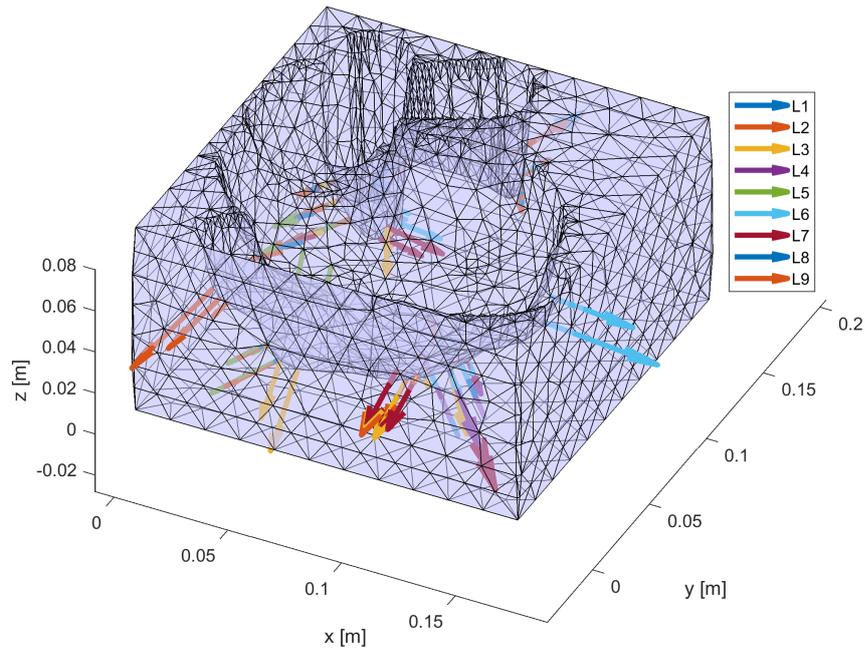


Abbildung 8.2.: Simulierte Kontaktkräfte auf einen Ladungsträger für das *Stanford Bunny*

Schon geringe Abweichungen der Bauteilgeometrien führen zu einer Veränderung der Kontaktsituation. In der Kontaktsimulation treten das Ladungsgut und der Ladungsträger nur an wenigen Punkten in Kontakt. Die Kontaktpunkte können beispielsweise durch Fertigungsungenauigkeiten deutlich in ihrer Position verschoben werden. Aus diesen Gründen ist die rechenaufwändige Kontaktsimulation nicht zwangsläufig anderen heuristischen Ansätzen überlegen, die jedoch den Vorteil einer geringeren Rechenzeit haben. Es wird ein Versuch unternommen, Belastungszustände des Ladungsträgers zu ermitteln, die als Eingangsdaten für die Nachfolgende TO dienen können, ohne eine mechanische Simulation zu verwenden.

Die grundlegende Idee ist die Beschleunigungskräfte, die vom Ladungsgut ausgeübt werden, gleichmäßig und großflächig auf den Ladungsträger zu verteilen. Dies entspricht nicht den in der Realität wirkenden Kräften, welche durch die Kontaktsimulation besser, wenn auch nur näherungsweise, ermittelt werden. Das Ziel liegt jedoch nicht in der Ermittlung der Belastung als Selbstzweck, sondern in der Optimierung eines Ladungsträgers. Da optimierte Ladungsträger nur optimal bezüglich der in der TO verwendeten Randbedingungen inklusive des Belastungszustands sind, ist eine gleichmäßigere Kraftverteilung sicherer. Werden nur wenige Krafteinleitungspunkte berücksichtigt, hat eine Verschiebung des Einleitungsortes einen größeren Einfluss auf das Optimierungsergebnis. Aus den oben genannten Gründen kann es zweckmäßig sein, mehr und flächiger verteilte Belastungskräfte zu berücksichtigen.

Die Fläche, auf die die Kräfte am Ladungsträger wirken, wird aus den Masterfacetten gebildet, wie sie in der Kontaktsimulation definiert werden. Aus der Masteroberfläche werden auf Basis der Lastfälle Teilmengen entsprechend ihrer Normalenvektoren ausgewählt. Für den Lastfall L1 werden alle Facetten belastet, deren Normalenvektoren mit einer Toleranz von $\pm 22,5^\circ$ in positive z -Richtung weisen. Für jeden weiteren Lastfall werden Facetten mit Normalenvektoren entgegen der Beschleunigungsrichtung in der xy -Ebene hinzugefügt. Zum Beispiel wirkt beim Lastfall L2 die Beschleunigung zusätzlich in positive y -Richtung, sodass ergänzend die Facetten betrachtet werden, deren Normalenvektoren mit der Winkeltoleranz $\pm 22,5^\circ$ in der xy -Ebene in Richtung $(0, -1, 0)^T$ zeigen. Auf die ausgewählten Facetten wird ein Druck aufgeprägt, sodass die Summe der resultierenden „Kontakt“-Kräfte in z -Richtung der Gewichtskraft des Ladungsguts entspricht. Hierfür wird der Skalierungsfaktor des Drucks mittels Bisektion bestimmt.

Als Beispiel wird erneut der Ladungsträger für das *Stanford Bunny* (vgl. Kapitel 8.1) herangezogen. Für die Generierung der Belastungskräfte werden ca. 21 s benötigt, wobei nur 0,2 s auf die eigentlich Kraftberechnung zurückzuführen sind. Die restliche Rechenzeit wird für die Vernetzung des Ladungsträgers und die Berechnung der Ladungsgutmasse benötigt. Die Rechenzeit beträgt somit wenige Sekunden und ist damit um mehrere Größenordnungen kleiner als die für die Kontaktsimulation erforderliche Rechenzeit. In **Abbildung 8.3** werden die heuristischen Belastungskräfte auf die Kontaktfacetten des Ladungsträgers dargestellt. Es gibt keine unbelasteten Facetten und im Vergleich zu den Ergebnissen der Kontaktsimulation sind die Belastungskräfte deutlich großflächiger verteilt und ähnlicher in ihrem Betrag.

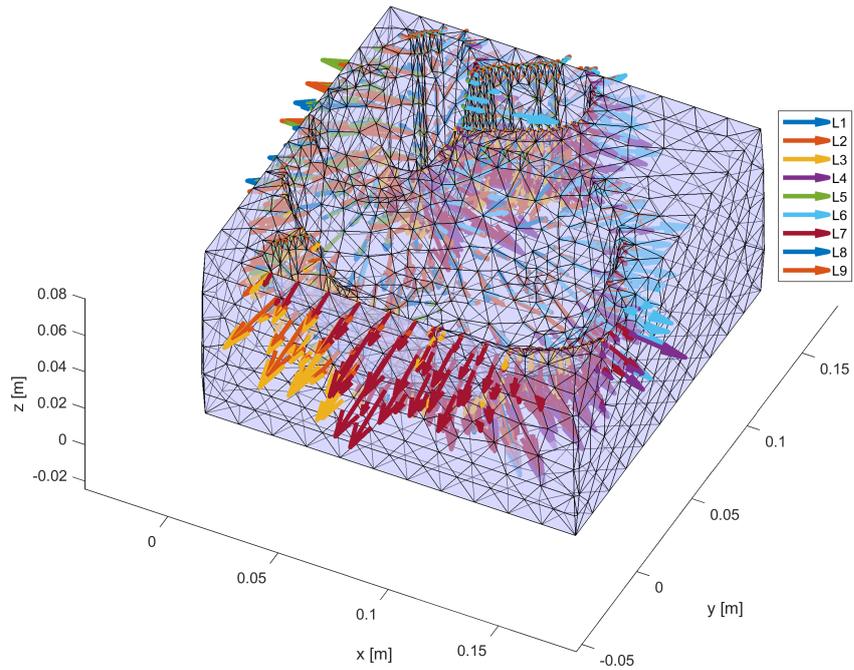


Abbildung 8.3.: Mit der Heuristik ermittelte Belastung auf einen Ladungsträger für das *Stanford Bunny*

Da keine weiteren äußeren Kräfte als die Belastungskräfte in der TO berücksichtigt werden, ist der Betrag der Kräfte nicht entscheidend. Wenn eine Bestimmung der Gewichtskraft des Ladungsguts nicht möglich ist, da die Oberfläche nicht geschlossen ist, kann die Ladungsgutmasse geschätzt werden. Anders als bei der Kontaktsimulation werden durch die Belastungsheuristik keine höheren Anforderungen an das Ladungsgutmodell gestellt, als für die Generierung des Ladungsträgermodells durch den Algorithmus erforderlich ist.

9. Lastoptimierung der Ladungsträger

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Vorarbeiten geleistet, um einen optimierten Ladungsträger herstellen zu können. Zum einen wurde ein geeignetes Fertigungssystem entwickelt und erprobt und zum anderen wurden ein neuer Algorithmus zur Generierung eines Ladungsträgers vorgestellt und Transportkräfte ermittelt. Mit der TO für die additive Fertigung steht ein Werkzeug zur Verfügung, das geeignet ist, die Volumen bzw. den Materialeinsatz und die Fertigungszeit zu reduzieren. In dem folgenden Kapitel werden die Ladungsträgeroptimierung beschrieben und zwei Demonstratoren vorgestellt.

Neben den Belastungskräften werden für die TO Verschiebungsrandbedingungen benötigt. Ein Ladungsträger wird in der Regel durch Spanngurte oder Umreifungsbänder auf einer Palette fixiert, welche zu einer Normalkraft zwischen dem Ladungsträger und der Palette führen. In Folge der Normalkraft wird der Ladungsträger durch Reibung in den Querrichtungen fixiert. Eine mögliche Übertragung in Verschiebungsrandbedingungen des Ladungsträgers ist, dass die Verschiebung der Ladungsträgerunterseite in alle Raumrichtungen verhindert wird. Diese Randbedingung hat jedoch das Problem, dass Bauteile entstehen können, die aus mehreren einzelnen Teilen bestehen, die nicht untereinander verbunden sind. Dies führt dazu, dass die Einzelteile auf der Palette ausgerichtet werden müssen und unter Umständen sich nicht selbst aufrecht halten. Eine Abhilfe kann sein, einen Boden zum Modell wieder hinzuzufügen, der die Einzelteile miteinander verbindet. Dieses Vorgehen ist jedoch mit einem erhöhten Materialeinsatz verbunden.

Durch eine Anpassung der Randbedingung kann begünstigt werden, dass das optimierte Bauteil aus einem einzelnen zusammenhängenden Volumen besteht. Werden die horizontalen Freiheitsgrade nur an den Kanten der Ladungsträgerunterseite fixiert, können die Verschiebungen in diesen Freiheitsgraden in den inneren Bereichen des Ladungsträgers nur an den Kanten aufgenommen werden, sodass dies eine Verknüpfung der Teilbereiche fördert. Ein zusammenhängendes Bauteil kann forciert werden, indem die Freiheitsgrade in x - und y -Richtung nur an den Kanten fixiert werden, die parallel zu der entsprechenden Achse verlaufen. Jedoch wird so erzwungen, dass ein großer Materialanteil entlang den unteren Kanten des Ladungsträgers konzentriert ist und nur geringe Materialmengen für

die Umschließung des Ladungsguts übrig bleiben. Für das weitere Vorgehen werden auf den Kanten beide Freiheitsgrade fixiert.

Im Kapitel 8 werden zwei Möglichkeiten der Belastungskraftermittlung vorgestellt: Eine Kontaktsimulation und eine Heuristik, die allein aufgrund der Ladungsträgergeometrie Belastungskräfte erzeugt. Im Folgenden werden die Ladungsträger, die auf Basis der unterschiedlichen Belastungen optimiert werden, miteinander verglichen. Da die Kontaktsimulation mit einer relativ geringen Vernetzungsaufösung durchgeführt wird, kann auch die TO nicht feiner aufgelöst werden, da dieselbe Vernetzung verwendet werden muss. Für den Ladungsträger des *Stanford Bunny* bedeutet dies die Verwendung einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 15$ mm. Wird, wie auch bei den vorangegangenen dreidimensionalen Topologieoptimierungen, ein beizubehaltender Volumenanteil V_{\max} von 30 % verwendet, resultiert im Ladungsträger eine einzelne Säule in der Mitte. Erst durch eine Erhöhung des Volumenanteils V_{\max} auf 40 % wird diese Säule mit dem restlichen Ladungsträger verbunden.

Die geringe Elementanzahl sorgt auch in der TO für relativ geringe Rechenzeiten. Mit einem Toleranzkriterium von einer maximalen Änderung der Designvariable um 0,01 werden 512 Iterationen benötigt mit einer Gesamtrechenzeit von 14 min. Wie auch bei den anderen TO in dieser Arbeit wird das Optimierungsergebnis vor dem Export geglättet. Durch die geringe Elementanzahl kommt es zu relativ großen Geometrieänderungen. Prinzipiell folgt durch die Glättung eine Vergrößerung des Überhangwinkels, sodass lokal die Überhangnebenbedingung verletzt wird. Fertiungsprozessbedingt sind diese Überhänge an den Scheitelpunkten von Bögen unkritisch, da diese nur eine geringe Länge aufweisen und daher trotzdem im FLM-Prozess gefertigt werden können („bridging“). [HGP17]

Die Rundung der Ladungsträgerstrukturen führt dazu, dass es zwischen dem Ladungsträger und dem Boden nur punktuellen Kontakt gibt. Daher wird die Kontaktfläche zum Boden um 7 mm nach oben in das Bauteil verschoben, sodass ein Flächenkontakt gegeben ist. Die Geometrieänderungen durch die Glättung haben ebenfalls einen Effekt auf die Kontaktsituation zwischen Ladungsgut und Ladungsträger. In **Abbildung 9.1** ist der gefertigte Ladungsträger zu sehen. Legt man ein ebenfalls 3D-gedrucktes *Stanford Bunny* in den Ladungsträger, ist die schlechte Passform offensichtlich. Die Säule ist durch die Glättung so verkürzt, dass sie ihre Funktion verloren hat und das Ladungsgut nicht berührt. Zusätzlich können in der Abbildung Lücken zwischen dem Ladungsträger und dem Bunny an den Ohren und an den Pfoten erkannt werden.



Abbildung 9.1.: Gefertigter optimierter Ladungsträger des *Stanford Bunny* auf Basis simulierter Belastungen

Die Probleme des optimierten Ladungsträgers auf Basis der Kontaktsimulation hängen mit der Vernetzungsauflösung zusammen. Jedoch ist aus Gründen der Praktikabilität eine feinere Vernetzung aufgrund der weiter steigenden Rechenzeit nicht möglich.

Auch die mit dem alternativen heuristischen Ansatz ermittelten Belastungskräfte sind geeignet, einen optimierten Ladungsträger zu erzeugen. Wird die Belastungsheuristik verwendet, ist ein beizubehaltender Volumenanteil von $V_{\max} = 0,3$ ausreichend, um einen zusammenhängenden Ladungsträger zu erhalten. Der optimierte Ladungsträger ist in **Abbildung 9.2** zu sehen. Im Vergleich zu dem Ladungsträger, der mit den Belastungskräften aus der Kontaktsimulation optimiert worden ist, ergibt sich ein umschließender Ladungsträger anstelle eines Ladungsträgers in Form einer Auflage. Beide Ladungsträger haben vor der Glättung dasselbe Volumen, sodass der umschließende Ladungsträger dünnere Wandstärken hat und weniger massiv aufgebaut ist. Es gibt Bereiche, die keinen Kontakt zum Ladungsgut haben und keine Kräfte aufnehmen. Beispiele sind die (Teil-)Brücken oberhalb der Ohren. Die Ursache liegt darin, dass die Heuristik keinen tatsächlichen Kontakt ermittelt, sondern großflächig einen Druck aufprägt. Die Strukturen, die keine Kräfte aufnehmen, können jedoch andere Funktionen erfüllen. So können Stöße von außen, beispielsweise beim Verladen, aufgenommen und das Ladungsgut geschützt werden.

Die Problematik der groben Vernetzungsauflösung in Kombination mit der Glättung im Postprozess bleibt auch bei dieser Art des Ladungsträgers bestehen. Durch die Glättung entstehen scharfe Kanten und die Passform wird negativ beeinflusst. So hat, wie in der Abbildung zu erkennen, die Brust des *Bunny* keinen Kontakt zum Ladungsträger. Durch



Abbildung 9.2.: Gefertigter optimierter Ladungsträger des *Stanford Bunny* auf Basis der Heuristik

den viel geringeren Rechenaufwand für die Ermittlung der Belastungskräfte durch die Heuristik ist aber eine feinere Vernetzungsauflösung möglich.

Es wird ein Ladungsträger für das *Stanford Bunny* mit dem heuristischen Belastungsansatz optimiert, wobei eine feinere PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 5$ mm verwendet wird. Das 3D-gedruckte Ergebnis wird in **Abbildung 9.3** gezeigt. Die grundlegende Struktur des Ladungsträgers ändert sich durch die Änderung der Auflösung nicht, jedoch werden einige Lücken gefüllt und Kanten und Flächen geglättet. Die Passform wird durch die höhere Auflösung ebenfalls positiv beeinflusst. Für die Optimierung sind 1039 Iterationen erforderlich, die im Mittel 91,5s Rechenzeit benötigen, sodass die Gesamtrechenzeit bei 26,4h liegt. Zusätzlich wird ein abschließender Vergleich des Rechenaufwands bei Verwendung des Stützbereichs nach *Thore et al.* [Tho+19] vorgenommen. Bei Optimierung des dreidimensionalen Ladungsträgers mit 131.804 Elementen liegt die erforderliche Rechenzeit für eine Iteration mit der Kegeldefinition des Stützbereichs bei 122,3s und damit 33,7 % höher als bei der Nachbarschaftsdefinition. Darüber hinaus werden 2.163 Iterationen für die Optimierung benötigt. Im Mittel enthalten die Stützbereiche bei der Kegeldefinition 184,7 Elemente und bei der Nachbarschaftsdefinition 128,0 Elemente. Das Optimierungsergebnis ist mit beiden Definition nahezu identisch.

Für einen weiteren Demonstrator wird ein Ladungsträger für eine einfache Welle mit zwei Passfedern erzeugt. Die Welle hat eine Länge von 205 mm und einen maximalen Durchmesser von 55,6 mm. Die Oberflächendaten der Welle stammen in diesem Fall nicht aus einem Scan, sondern werden durch Autodesk Inventor 2022 anhand eines CAD-Modells erzeugt. Der Ladungsträger wird mit einer Auflösung in x - und y -Richtung von 2 mm



Abbildung 9.3.: Gefertigter optimierter Ladungsträger des *Stanford Bunny* auf Basis der Heuristik mit feinerer Vernetzungsaufösung ($H_{\max} = 5 \text{ mm}$)

generiert, wobei das Spiel zwischen Ladungsgut und -träger 4 mm beträgt. Im unoptimierten Ladungsträger haben die Seitenwände und der Boden eine Stärke von 5 mm.

Für die Kontaktsimulation werden die Welle und der Ladungsträger mit einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 7 \text{ mm}$ diskretisiert. Die Welle wird aus 9424 Elementen und der Ladungsträger aus 11258 Elementen modelliert. Es werden 6362 plausible Kontaktpaare identifiziert. Die erforderliche Rechenzeit für die Kontaktsimulation beträgt 456 h. Das Ergebnis der Kontaktsimulation ist in **Abbildung 9.4** dargestellt. Je Lastfall werden im Mittel sechs Facetten belastet.

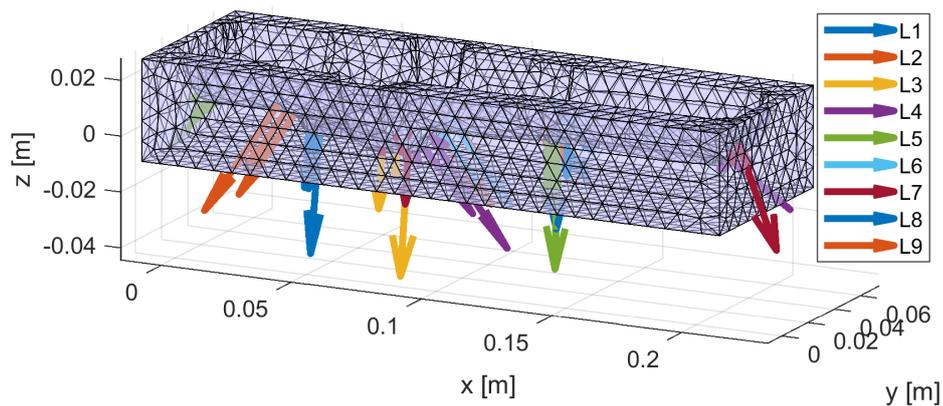


Abbildung 9.4.: Ergebnis der Kontaktsimulation zwischen der Welle und dem dazugehörigen Ladungsträger

Nachfolgend wird eine TO mit einem beizubehaltenden Volumenanteil von $V_{\max} = 0,3$ und einem Filterradius von $R = 15 \text{ mm}$ durchgeführt, jedoch besteht das optimierte Bauteil

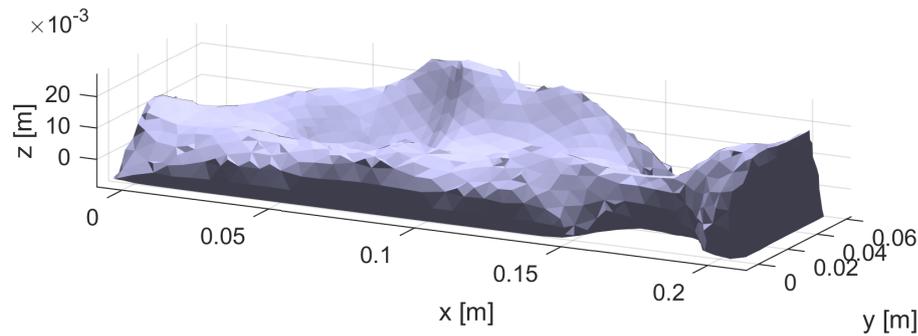


Abbildung 9.5.: Optimierter Ladungsträger für die Welle mit $V_{\max} = 0,6$ auf Basis der Belastung aus der Kontaktsimulation

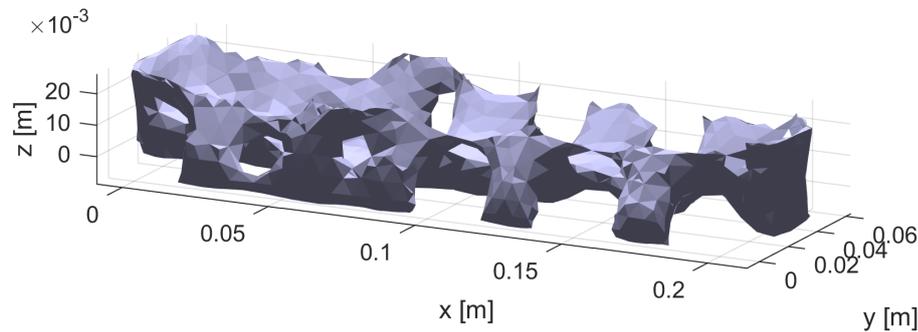


Abbildung 9.6.: Optimierter Ladungsträger für die Welle mit $V_{\max} = 0,4$ auf Basis der Belastungsheuristik

aus zwei Einzelteilen. Der Volumenanteil V_{\max} wird daher in 0,1-Schritten erhöht, bis nach der Optimierung ein zusammenhängendes Bauteil resultiert. Für einen ungetrennten Ladungsträger ist bei Verwendung der Belastung aus der Kontaktsimulation ein beizubehaltender Volumenanteil von $V_{\max} = 0,6$ erforderlich. Der optimierte Ladungsträger ist in **Abbildung 9.5** zu sehen und hat eine kompakte schalenförmige Struktur. Für die Optimierung werden 564 Iterationen mit einer Rechenzeit von je 1,8s benötigt.

Für einen Vergleich wird eine Optimierung mit einer Belastung durch die Heuristik durchgeführt. Auch in diesem Fall reicht ein beizubehaltender Volumenanteil von $V_{\max} = 0,3$ nicht aus, um einen zusammenhängenden Ladungsträger zu erhalten. Es ist jedoch nur eine Erhöhung auf $V_{\max} = 0,4$ erforderlich. Der optimierte Ladungsträger (siehe **Abbildung 9.6**) besteht aus mehreren Segmenten, die über Brücken miteinander verbunden sind. Der Ladungsträger hat eine Struktur, die entfernt an eine Wirbelsäule mit Rippen erinnert. Die Optimierung erfolgt in 391 Iterationen, wobei die Rechenzeit unabhängig von der Wahl des Belastungsverfahrens ist und somit bei ebenfalls 1,8s für eine Iteration liegt.

Bei dem Ladungsträger für das *Stanford Bunny* hat sich bereits gezeigt, dass tendenziell größere Volumenanteile V_{\max} für einen zusammenhängenden Ladungsträger erforderlich



Abbildung 9.7.: Auf der Basis der Heuristik optimierter Ladungsträger für eine Welle ($H_{\max} = 5 \text{ mm}$)

sind, wenn eine grobe Vernetzungsauflösung verwendet wird. Kleinere Elementgrößen erlauben eine genauere Dosierung des Materials durch die zusätzlichen Freiheitsgrade, sodass eine bessere Materialverteilung möglich ist. Zur Überprüfung der Annahme, dass eine höhere Vernetzungsauflösung kleinere Volumenanteile V_{\max} ermöglicht, wird die Vernetzung des Wellenladungsträgers verfeinert ($H_{\max} = 5 \text{ mm}$) und erneut eine Optimierung mit der Belastungsheuristik durchgeführt.

Tatsächlich reicht bei dieser Vernetzung ein beizubehaltender Volumenanteil V_{\max} von 30 % aus, damit das optimierte Bauteil nicht aus mehreren Einzelteilen besteht. In **Abbildung 9.7** sind die Welle und der optimierte Ladungsträger zu sehen. Die einzelnen Segmente sind klarer getrennt und nur noch über die Brücken verbunden, die im Vergleich zu dem Optimierungsergebnis mit $H_{\max} = 7 \text{ mm}$ dünner geworden sind. Bei der feineren Vernetzung sind 979 Iterationen erforderlich mit einer Rechenzeit pro Iteration von 6,7 s.

Auch wenn die Verbindungsbrücken sehr dünn sind, kann die Welle in den Ladungsträger gelegt werden, ohne diesen zu beschädigen (siehe **Abbildung 9.8**). Die Gewichtskraft wird durch die Rippen aufgenommen, sodass die Brücken nur gering belastet werden. Das Ladungsgut kann axial nicht im Ladungsträger verrutschen, jedoch kann die Welle minimale Rollbewegungen ausführen. Dies deutet darauf hin, dass die gewählte Toleranz für das verwendete Fertigungssystem zu groß ist.



Abbildung 9.8.: Welle in dem optimierten Ladungsträger

Der beizubehaltende Volumenanteil V_{\max} ist ein vom Anwender der TO zu wählender Parameter. Dabei ist zu beachten, dass der Volumenanteil nicht zu gering gewählt wird, da sonst ein mehrteiliger Ladungsträger entsteht. Kleinere Volumenanteile sind möglich, wenn die Vernetzungsauflösung feiner ist und der Ladungsträger durch mehr Elemente diskretisiert wird. Zusätzlich hat sich gezeigt, dass wenn die Belastungsheuristik verwendet wird, ebenfalls ein kleinerer Volumenanteil möglich ist als bei Verwendung der Belastung durch die Kontaktsimulation. Ein geringer Volumenanteil ist positiv, da der Materialeinsatz und die Fertigungszeit des Ladungsträger verringer wird, sodass insgesamt die Fertigungskosten geringer sind als bei Ladungsträgern mit einem höheren Volumenanteil. Die Ladungsträger, die mit der Belastungsheuristik optimiert werden, sind dünnwandiger als die auf Basis der Kontaktsimulation optimierten Ladungsträger. Das Material, das keine Transportbelastungen aufnimmt, aber das Ladungsgut umschließt, verringert die mechanische Stabilität des Heuristikladungsträgers. Wie stabil ein 3D-gedruckter Ladungsträger sein muss, sollte Gegenstand von zukünftigen Untersuchungen sein. Die mechanische Belastbarkeit kann durch die Anpassung des beibehaltenden Volumenanteils V_{\max} und die Prozessparameter während der Fertigung beeinflusst werden. Damit eine möglichst allgemeingültige Aussage getroffen werden kann, sollte eine Vielzahl von Ladungsträgern für realistische Ladungsgüter erzeugt werden und die Einflussfaktoren systematisch variiert werden. Zur Kontrolle der ausreichenden Stabilität können Versuche entsprechend der Norm DIN ISO 10531 [DIN00] durchgeführt werden.

Die Verwendungen von Volumenvernetzungen mit einer großen Elementanzahl erhöht die erforderliche Rechenzeit, sodass ein Kompromiss erforderlich ist, der sowohl die Rechenzeit als auch die Fertigungskosten berücksichtigt. Durch die Heuristik wird die erforderliche Rechenzeit für die Belastungskraftermittlung im Vergleich zur erforderlichen Rechenzeit für die TO vernachlässigbar. Dies gilt, obwohl im Rahmen dieser Arbeit schon Verbesserungen an der Implementierung der Überhangnebenbedingung durchgeführt wurden, sodass der Rechenaufwand hier bereits reduziert ist. Die Rechenzeit ist von zwei Faktoren abhängig: Die Rechenzeit für eine einzelne Iteration und die erforderliche Anzahl an Iterationen bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums. Für ein beliebiges Optimierungsproblem ist die erforderliche Anzahl an Iterationen nicht vorhersagbar, aber kann durch Anpassung des Konvergenzkriteriums beeinflusst werden. Wie groß die maximale Änderung der

Designvariable in einer Iteration sein darf, damit ein nutzbarer Ladungsträger entsteht, ist noch zu untersuchen. Es besteht auch die Möglichkeit, ein gänzlich unterschiedliches Konvergenzkriterium zu entwickeln.

Die Grundfunktion „Umschließen“ und „Beschützen“ können durch die optimierten Ladungsträger erfüllt werden. Insbesondere die Heuristikladungsträger umschließen das Ladungsgut. Für die Fixierung des Ladungsguts sind zusätzliche Umreifungsbänder als Packhilfsmittel erforderlich, da ansonsten keine Fixierung in z -Richtung normal zur Palettenebene gegeben ist. Zudem haben die Ladungsträger keine großen ebenen Oberflächen, sodass eine Etikettierung erschwert wird.

PLA als Werkstoff hat einen Vorteil gegenüber Holz, da es weniger Feuchtigkeit aufnimmt. PLA wird erst nach mehrmonatiger Feuchtigkeitsexposition durch Hydrolyse abgebaut [FAL16]. Durch Feuchtigkeit verringern sich jedoch alle mechanische Eigenschaften von Holz [Kha08]. Innerhalb von zwei Tagen mit Wasserkontakt hat Kiefernholz einen Feuchtigkeitsgehalt von 60 % bezogen auf das Trockengewicht [Kha08]. Im selben Zeitraum nehmen 3D-gedruckte Proben aus PLA ca. 1 % ihrer Masse an Wasser auf [Eck+19].

Ein weiterer Vorteil ist, dass PLA recycelt und in eine beliebige neue Form gebracht werden kann. Bei Holz ist dies nicht möglich, jedoch ist Holz leicht biologisch abbaubar. Ein Nachteil von PLA gegenüber Holz ist, dass die Glasübergangstemperatur bei ca. 55 °C liegt [FAL16], sodass das Material ab dieser Temperatur beginnt, weich zu werden. In Containern können jedoch Temperaturen von 58 °C erreicht werden (vgl. Kapitel 2.1).

10. Wirtschaftliche Bedeutung

Die Ergebnisse dieser Arbeit haben wirtschaftliche Relevanz für die Industrie und die Logistikunternehmen. Die Logistik ist branchenübergreifend ein relevanter Kostenfaktor, wobei die Logistikkosten zwischen 3,5-8,7 % des Umsatzes ausmachen können [MTF09]. Insgesamt ist jedoch die Quantifizierung der Logistikkosten schwierig, da unterschiedliche Kostenrechnungssysteme verwendet werden, sodass die Kosten tendenziell unterschätzt werden [Pfo18]. Kostentreiber für die Logistikkosten sind Preise für den Transport, Personalkosten und Energie- bzw. Treibstoffkosten. Weiterhin stehen bei Investitionen in Logistiksysteme die Flexibilität und Modularität im Vordergrund [SP08]. In den für die Ladungsträger, wie sie in dieser Arbeit behandelt werden, relevanten Bereichen sind derzeit Ladungsträger aus Holz üblich. Im Jahr 2019 hat die Branche der Hersteller von Holzverpackungen in Deutschland einen Umsatz von 2,7 Mrd. € gemacht [Sta21]. In jüngerer Vergangenheit sind die Erzeugerpreise für Holzverpackungen stark gestiegen, sodass Alternativen lukrativer werden. Laut einer Erhebung des Statistischen Bundesamts [Sta22] liegen die Erzeugerpreise im Jahr 2021 55,8 % über dem Niveau aus dem Jahr 2015. Noch im Jahr 2020 waren es nur 4 % gegenüber dem Jahr 2015.

Bei einer Befragung 2021 gaben 73 % der befragten Personen an, dass sie Wert auf nachhaltige Verpackungen legen [Sim21a]. 3D-gedruckte Ladungsträger aus PLA erfüllen, anhand einer weiteren Befragung, in großen Teilen die Anforderungen, die an nachhaltige Verpackungen gestellt werden. 55 % der befragten Personen gaben an, dass nachhaltige Verpackungen biologisch abbaubar sein sollen, sowie aus recyclebaren bzw. recycelten Materialien bestehen sollen (46 % bzw. 53 % der Antworten) [Sim21b]. Weitere genannte Kriterien sind faire Produktionsbedingungen, eine ressourcenschonende Herstellung und eine positive CO₂-Bilanz. Diese Bedingungen werden jedoch nur von weniger als 30 % der befragten Personen genannt. Die fairen Produktionsbedingungen werden nicht ausschließlich durch die Materialauswahl beeinflusst, aber die ressourcenschonende Herstellung und eine positive CO₂-Bilanz treffen auf PLA-Verpackungen nicht zu.

Die Logistik wird kontinuierlich automatisiert, wobei dies zumeist die Informationsverarbeitung und die Lagergutbehandlung betrifft [Pfo18]. Ein weiterer Automatisierungsschritt

kann die automatische Herstellung der Verpackung darstellen. Im Rahmen dieser Arbeit ist ein Prozess entwickelt und erprobt worden, der, nachdem das Oberflächenmodell des Ladungsguts beschafft worden ist, bis auf die Wahl von wenigen Parametern vollständig automatisiert ist.

Ladungsträger aus dem 3D-Drucker sind maximal flexibel und geeignet, insbesondere für individuelle Ladungsgüter automatisiert Verpackungen herzustellen. Die manuelle Ladungsträgerfertigung erfordert Fachpersonal, ebenso wie der Betrieb einer additiven Fertigungsanlage. Jedoch ist der 3D-Druck ein automatisierter Fertigungsprozess, der über weite Strecken selbstständig abläuft, sodass der erforderliche Personalaufwand dort geringer ist. Eine Nachbearbeitung der gefertigten Ladungsträger entfällt, da Stützstrukturen erfolgreich vermieden werden. Die Entwicklung des kostengünstigen BAAM-Systems reduziert die erforderlichen Investitionskosten, auch wenn diese weiterhin hoch sind. Jedoch werden im Maschinenbau häufig Produkte, die hochwertige Investitionsgüter sind, versendet, sodass die Logistikkosten eine untergeordnete Rolle spielen, da diese im Verhältnis zum Warenwert gering sind [Pfo18].

Aus diesen Gründen kann davon ausgegangen werden, dass die Nachfrage nach automatisch erzeugten und gefertigten Ladungsträgern aus PLA in den kommenden Jahren gegeben sein wird bzw. steigt.

Bei den gemachten Entwicklungen steht die Effizienz im Mittelpunkt, sodass die Rechen- und Fertigungszeit möglichst gering ist. Das hat auch einen ökologisch positiven Effekt, da so Energie und Material eingespart werden. Der rechenaufwendigste Teil der Herstellung eines lastoptimierten Ladungsträgers ist die Ermittlung der Transportbelastung durch eine FEM-Simulation. Durch die Entwicklung einer Heuristik kann dieser lange und damit kostenintensive Prozess ersetzt werden. Die Überarbeitung der Überhangnebenbedingung für die TO für die additive Fertigung ist ebenfalls auf andere Bauteile als Ladungsträger anwendbar. Auch in anderen Branchen wird AM in Kombination mit TO eingesetzt. Schon seit längerer Zeit sind AM und TO in der Luft- und Raumfahrttechnik vorzufinden [ZZX16]. Somit haben Verbesserungen an der Überhangnebenbedingung ein weitreichendes wirtschaftliches Potenzial.

Ähnliches gilt für die Entwicklung des kostengünstigen BAAM-Systems, das Kunststoffgranulat verarbeitet. Die Verringerung der Investitionskosten eröffnet diesen Technologien einem größeren Nutzerkreis. Die Verwendung von Kunststoffgranulaten erweitert die Materialauswahl und senkt die Materialkosten. Zusätzlich ermöglicht die direkte Verarbeitung von Kunststoffgranulat eine höhere Fertigungsgeschwindigkeit und somit eine höhere Produktivität und Kosteneffizienz.

11. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit sind Ladungsträger in der Logistik betrachtet und die Normbelastungen vorgestellt worden. Holz ist im Maschinenbau ein übliches Verpackungsmaterial, das jedoch anfällig für Feuchtigkeit und den Befall durch Schimmelpilze oder Schädlinge ist. Durch eine Behandlung des Holzes kann das Risiko für die Einschleppung von invasiven Schädlingen minimiert werden. Ein großer ökologischer Vorteil ist, dass Holz ein nachwachsender und biologisch abbaubarer Werkstoff ist.

Folgend sind die Ergebnisse einer Literaturrecherche zu möglichen Verarbeitungsmethoden von Kunststoffgranulaten in der additiven Fertigung vorgestellt worden. Üblich ist die Verwendung eines Schneckenextruders zur Herstellung einer Kunststoffschmelze, jedoch stellt die genaue Dosierung ein Problem dar und bei Mitführung des Schneckenextruders ist die bewegte Masse am Druckkopf hoch. Um eine Kunststoffschmelze genau zu dosieren werden Zahnradpumpen einem Schneckenextruders nachgeschaltet. Im kleinen Maßstab wurde bereits gezeigt, dass eine Entkopplung des Schneckenextruders und der Mechanik des Fertigungssystems die bewegte Masse reduzieren kann und gute Resultate bringt.

Für die Modellierung von Geometrien werden diverse digitale Formate verwendet. In der additiven Fertigung haben sich Oberflächenmodelle im STL-Format durchgesetzt, das die Geometrieoberfläche durch verknüpfte Dreiecksfacetten modelliert. Die Bearbeitung von Oberflächentriangulierungen ist ein breites Forschungsfeld, das sich unter anderem damit beschäftigt, Boolesche Operationen auf Oberflächenmodelle anzuwenden oder einen Versatz der Geometrieoberfläche zu realisieren.

Die Topologieoptimierung ist ein Verfahren der Strukturoptimierung, das Material in einem Designraum hinsichtlich eines Kriteriums optimal anordnet. Für die Fertigung von topologieoptimierten Bauteilen wird häufig auf additive Fertigungsverfahren zurückgegriffen, da diese meist komplexen Bauteile sich aufgrund von Fertigungsrestriktionen nicht durch konventionelle Fertigungsverfahren herstellen lassen. Die additive Fertigung hat primär die Fertigungsrestriktion, dass Bauteilüberhänge, die größer als ein Grenzwinkel Φ_{\max} sind, durch Stützstrukturen abgestützt werden müssen. In der Literatur werden diverse

Verfahren zur Realisierung einer Überhangnebenbedingung in der Topologieoptimierung vorgestellt, die Stützstrukturen vermeiden oder zumindest reduzieren. Der Rechenaufwand für die Realisierung der Nebenbedingung ist groß und setzt zumeist eine geordnete Vernetzung voraus.

Aufgrund dieser Ergebnisse wird es für sinnvoll erachtet, Ladungsträger für die Logistik kostengünstig und automatisiert mit einem 3D-Drucker herzustellen. Um dieses Ziel zu erreichen ist ein geeignetes Fertigungssystem und ein Verfahren erforderlich, das die Ladungsträgergeometrie erzeugt. Das Verfahren soll mit Oberflächendaten des Ladungsguts arbeiten, da diese auch vom Logistiker einfach mit einem 3D-Handscanner erfasst werden können. Um Material bedarfsgerecht einzusetzen, wird eine Lastoptimierung an die Ladungsträgergenerierung angeschlossen.

Es ist ein 3D-Drucker vorgestellt worden, der kostengünstig großvolumige Bauteile aus Kunststoffgranulat herstellen kann. Das System hat einen Arbeitsraum mit einer Grundfläche, die in ihren horizontalen Dimensionen einer EPAL1-Palette entspricht. Die Kunststoffschmelze wird in einem Schneckenextruder vorbereitet und durch einen beheizten Schlauch zum Druckkopf gepumpt, wo eine Zahnradschmelzepumpe die Feindosierung übernimmt. Dieser Aufbau verringert die beschleunigte Masse und somit die Anforderungen an die Antriebe und den Maschinenrahmen. Untersuchungen mit einem Düsendurchmesser von 3 mm haben gezeigt, dass die Bauteilabweichung aufgrund der Fertigungstoleranzen nur in Einzelfällen 1,5 mm übersteigen.

Die Ladungsträger werden durch einen neuen Algorithmus erzeugt, der die Modellidee eines Nagelbretts durch eine Dexelstruktur umsetzt und zur Berücksichtigung von Fertigungstoleranzen das Ladungsgutmodell zunächst vergrößert. Es ist eine effiziente MATLAB-Implementierung umgesetzt worden, deren Rechenzeit primär von der gewählten Auflösung und der Bauteilgröße, und somit der Dexelanzahl und der Anzahl an Facetten, die jeder Dexel schneidet, abhängt. In einem ersten Versuch ist ein Ladungsträger für einen PKW-Stoßdämpfer erfolgreich erzeugt und hergestellt worden.

Damit eine Lastoptimierung durchgeführt werden kann, ist eine MATLAB-Implementierung einer TO erforderlich, die auch mit unstrukturierten Vernetzungen funktioniert. Es ist eine Implementierung für eine lineare Tetraedervernetzung umgesetzt und eine Überhangnebenbedingung auf die Vernetzungsart angepasst worden. Für eine Reduzierung der Rechenzeit und eine bessere Einhaltung der Überhangnebenbedingung wird eine Definition der Elementgruppe, die Material enthalten muss, um eine Abstützung des Elements zu gewährleisten, über Nachbarschaftsbeziehungen eingeführt. Eine Parameterstudie hat ergeben, dass eine Berücksichtigung von drei Nachbarschaftsebenen die Überhangnebenbedingung

erfolgreich bei einem Minimum der Rechenzeit umgesetzt. Anhand eines MBB-Balkens ist gezeigt worden, dass die Nachbarschaftsdefinition im Dreidimensionalen ein optimiertes Bauteil erzeugt, das ohne Stützstrukturen gefertigt werden kann. Biegeversuche zeigten keinen signifikanten Einfluss auf die Steifigkeit des optimierten Balkens durch die Verwendung der Überhangnebenbedingung. Im Gegensatz dazu hat die Verwendung eines Infills mit 20 % Dichte die Steifigkeit sowohl bei einem optimierten Balken mit Berücksichtigung der Überhangnebenbedingung als auch bei einem optimierten Balken ohne Berücksichtigung der Zusatzbedingung die Bauteilsteifigkeit signifikant reduziert. Bei Verwendung des Infills streuen die Steifigkeiten der Balken weniger und die Standardabweichung ist geringer als bei der Untersuchung der massiv gefertigten Bauteile.

Für die Topologieoptimierung des Ladungsträgers ist eine Belastungsdefinition erforderlich. In einem Fall wird diese durch eine Simulation des Ladungsguts im Ladungsträger und der wirkenden Transportbeschleunigungen ermittelt. Da dieses Vorgehen sehr rechenintensiv ist, wird eine alternative Heuristik für die Belastungsermittlung entwickelt, die den Ladungsträger großflächig mit einem Druck beaufschlagt.

Am Beispiel von zwei Demonstratoren sind Ladungsträger generiert, optimiert und gefertigt worden. Es hat ein Vergleich zwischen den Ladungsträgern stattgefunden, die anhand der Belastung aus der Kontaktsimulation bzw. der Heuristik optimiert wurden. Die Optimierung auf Basis der Kontaktsimulation führt zu Ladungsträgern, auf denen das Ladungsgut aufliegt, wobei die Optimierung auf Basis der Heuristik umschließende Ladungsträger erzeugt. Bei der Optimierung eines Ladungsträgers für das *Stanford Bunny* mit 131.804 Elementen wird durch die Verwendung der Kegeldefinition des Stützbereichs eine 33,7 % höhere Rechenzeit als bei Verwendung der Nachbarschaftsdefinition benötigt. Eine feinere Vernetzungsauflösung sowie die Verwendung der Belastungsheuristik ermöglichen die Erzeugung eines zusammenhängenden Ladungsträgers bei einem geringeren beibehaltenen Volumenanteil V_{\max} .

Die optimierten Ladungsträger können das Ladungsgut abstützen und im Fall der Verwendung der Belastungsheuristik auch umschließen. Insgesamt ist die Heuristik vorzuziehen, da der Rechenaufwand um ein Vielfaches geringer ist und durch die Optimierung geeignetere Ladungsträger erzeugt werden. Zusätzlich ist die Möglichkeit gegeben, einen Ladungsträger zu optimieren, ohne ein wasserdichtes Modell des Ladungsguts zu besitzen. Die Verwendung von PLA anstelle von Holz hat den Vorteil, dass die Ladungsträger widerstandsfähiger gegenüber Feuchtigkeit sind. Ein Nachteil kann sein, dass PLA bei Temperaturen $>55\text{ }^{\circ}\text{C}$ weich wird. Ein Vorteil von Holz ist, dass es leichter biologisch abbaubar ist.

Die Hersteller von Holzverpackungen in Deutschland haben einen jährlichen Umsatz von 2,7 Mrd. € (Stand 2019). Das wirtschaftliche Potenzial für alternative 3D-gedruckte Ladungsträger aus PLA ist daher groß, insbesondere da die Logistik bestrebt ist zu automatisieren und nachhaltige Ladungsträger von den Kunden gefragt sind. Die Topologieoptimierung mit Überhangnebenbendingung und ein kostengünstiges Granulat-BAAM-System haben über die Logistik hinaus zusätzliche Anwendungsfelder.

Aus den Ergebnissen dieser Arbeit resultieren einige in Zukunft durchzuführende Entwicklungen und Untersuchungen. Zurzeit ist noch unklar, wie stabil die erzeugten Ladungsträger sind. Es sind Versuche durchzuführen, die die mechanische Belastbarkeit untersuchen, um Auslegungsrichtlinien zu entwickeln. Kritische vom Benutzer zu wählende Parameter sind die Wand- und Bodenstärken des Ladungsträgers sowie der beizubehaltende Volumenanteil nach der Lastoptimierung. Auch der Fertigungsprozess kann bezüglich einer Maximierung der mechanischen Festigkeit optimiert werden. Zu berücksichtigende Faktoren sind unter anderem die Fertigungstemperaturen, die Layerhöhe, die Bahnbreite, die Anzahl der Perimeter und die Infilldichte.

Zur weiteren Erhöhung der Effizienz der Fertigung der Ladungsträger sollte das Fertigungssystem angepasst werden, sodass unterschiedliche Düsendurchmesser verwendet werden können. Das hat den Vorteil, dass die Außenkonturen schnell grob gefertigt werden können und die Fläche, die das Ladungsgut aufnimmt, mit einem kleineren Düsendurchmesser und geringeren Fertigungstoleranzen herstellbar ist.

Die Generierung der Ladungsträgergeometrien sollte weitere Funktionen berücksichtigen. Die Nutzbarkeit der Ladungsträger wird erhöht, wenn eine Stapelbarkeit gewährleistet wird oder empfindliche Bereiche des Ladungsguts nicht durch einen Kontakt mit dem Ladungsträger belastet werden.

Als Konvergenzkriterium der TO wird derzeit die maximale Änderung der Designvariable verwendet. Jedoch sind bis zum Erreichen des Kriteriums teilweise sehr viele Iterationen erforderlich, ohne dass sich die endgültige Kontur nach der Binarisierung des Ergebnisses noch verändert. Durch ein anderes Konvergenzkriterium kann die Rechnung überflüssiger Iterationen vermieden werden.

Für die TO für den 3D-Druck sollten Infillstrukturen berücksichtigt werden, damit große Verformungen nicht direkt am Ort der Krafteinleitung auftreten. Beispielsweise kann eine Mehrmaterialoptimierung durchgeführt werden, die das Infill als Material mit geringerer Steifigkeit berücksichtigt. Weiterhin ist eine weitere Nebenbedingung zu entwickeln, die dafür sorgt, dass das Infill stets von massiven Außenkonturen umschlossen ist.

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Diagramm der Produktions- und Reparaturzahlen von EPAL-Paletten . . .	4
2.2.	Zu berücksichtigende Massenkräfte beim Straßentransport	5
2.3.	Prinzipieller Aufbau eines Kolbenextruders	7
2.4.	Desktop-AM-System mit einem durch einen Heizschlauch entkoppelten Schneckenextruder	10
2.5.	Der Einfluss eines konstanten Versatzbetrags für alle Eckpunkte bei konve- xen bzw. konkaven Geometrien	14
2.6.	Versatz eines Eckpunkts nach dem Verfahren von <i>Qu</i> und <i>Stucker</i>	14
2.7.	Problematik von Schachbrettstrukturen am Beispiel einer biaxial belasteten Platte	22
2.8.	Definition des Überhangwinkels	23
2.9.	Definition des Stützbereichs <i>S</i> durch <i>Langelaar</i>	25
2.10.	Definition des Stützbereichs durch <i>Thore et al.</i>	26
3.1.	Aufbau der Arbeit	30
4.1.	Gesamtansicht des Positioniersystems	32
4.2.	CCD-Versuchsplan zur Ermittlung der Massenstromkennlinie	34
4.3.	Druckkopf ohne Schmelzepumpe	35
4.4.	Ein Bauteil mit Lücken gedruckt ohne Schmelzepumpe	36
4.5.	Druckkopf mit Schmelzepumpe	37
4.6.	Messung des von der Schmelzepumpe geförderten Massenstroms bei einer Temperatur von 200 °C	38
4.7.	Druck des <i>Stanford Bunny</i>	39
4.8.	Formabweichungen des gedruckten <i>Stanford Bunny</i>	40
5.1.	Darstellung des Algorithmuskonzepts	42
5.2.	Geometrische Größen im Nagelbrettmodell	46
5.3.	Transformation von einer viereckigen in eine dreieckige Oberflächenvernetzung	49
5.4.	Ladungsträger des <i>Stanford Bunny</i>	50
5.5.	Ladungsträger des Stoßdämpfers mit unterschiedlichen Stützanteilen	51

5.6.	Zusätzliche Modelle für die Laufzeituntersuchung	52
5.7.	Laufzeiten der MATLAB-Implementierung in Abhängigkeit der Dixelanzahl x und der durchschnittlichen Anzahl getroffener Facetten je Dixel y	54
5.8.	Das Modell des <i>Stanford Bunny</i> nach einer Vergrößerung um 5 mm. Selbstüberschneidungen sind rot hervorgehoben	55
6.1.	Gefertigter Ladungsträger für einen PKW-Stoßdämpfer	57
6.2.	Fertigungsabweichungen eines Ladungsträgers für einen PKW-Stoßdämpfer	58
7.1.	Lokales Elementkoordinatensystem eines normierten Tetraeders	60
7.2.	Aufbau der TO-Benchmarkprobleme	64
7.3.	Optimierter MBB-Balken ohne Nachbearbeitung	66
7.4.	Optimierter Michell Kragträger ohne Nachbearbeitung	67
7.5.	Optimierter MBB-Balken mit Nachbearbeitung	67
7.6.	Optimierter Michell Kragträger mit Nachbearbeitung	68
7.7.	Definition des Stützbereichs	72
7.8.	Definition des MBB-Balkens in 2D	72
7.9.	Vernetzung des Designraums mit $H_{\max} = 0,5$ mm	73
7.10.	MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung	73
7.11.	Winkel der Überhänge am MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung . .	74
7.12.	MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_2	75
7.13.	Winkel der Überhänge am MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_2	75
7.14.	MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_3	75
7.15.	Winkel der Überhänge am MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_3	76
7.16.	MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_4	76
7.17.	Winkel der Überhänge am MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und \mathcal{S}_4	77
7.18.	Vergleich des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,5$ mm	80
7.19.	Vergleich der Überhangwinkel des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinition bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,5$ mm	80
7.20.	Vergleich des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,4$ mm	81
7.21.	Vergleich der Überhangwinkel des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinition bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,4$ mm	81
7.22.	Vergleich des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,3$ mm	81

7.23. Vergleich der Überhangwinkel des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinition bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,3 \text{ mm}$	82
7.24. Vergleich des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinitionen bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,2 \text{ mm}$	82
7.25. Vergleich der Überhangwinkel des MBB-Balkens zwischen den Stützbereichdefinition bei einer PDET-Vernetzung mit $H_{\max} = 0,2 \text{ mm}$	82
7.26. Zufallsvernetzung des Designraums	85
7.27. Verteilung der Elementgrößen in der Zufallsvernetzung	85
7.28. MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung	86
7.29. MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und Nachbarschaftsdefinition .	86
7.30. MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung und Kegeldefinition	87
7.31. Additiv gefertigter MBB-Balken ohne Überhangnebenbedingung	89
7.32. Additiv gefertigter MBB-Balken mit Überhangnebenbedingung	89
7.33. Aufbau des Biegeversuchs	91
7.34. Vergleich der Biegeversuche mit Gruppierung nach Infilldichte	92
7.35. Vergleich der Biegeversuche mit Gruppierung nach Überhangnebenbedingung	93
8.1. Kinetischen Energie E_{kin} und die Summe der Kontaktkräfte in z -Richtung im Zeitverlauf bei der Kontaktsimulation zwischen dem Ladungsträger und dem <i>Stanford Bunny</i> im Lastfall L1	104
8.2. Simulierte Kontaktkräfte auf einen Ladungsträger für das <i>Stanford Bunny</i> .	105
8.3. Mit der Heuristik ermittelte Belastung auf einen Ladungsträger für das <i>Stanford Bunny</i>	107
9.1. Gefertigter optimierter Ladungsträger des <i>Stanford Bunny</i> auf Basis simulierter Belastungen	110
9.2. Gefertigter optimierter Ladungsträger des <i>Stanford Bunny</i> auf Basis der Heuristik	111
9.3. Gefertigter optimierter Ladungsträger des <i>Stanford Bunny</i> auf Basis der Heuristik mit feinerer Vernetzungsauflösung ($H_{\max} = 5 \text{ mm}$)	112
9.4. Ergebnis der Kontaktsimulation zwischen der Welle und dem dazugehörigen Ladungsträger	112
9.5. Optimierter Ladungsträger für die Welle mit $V_{\max} = 0,6$ auf Basis der Belastung aus der Kontaktsimulation	113
9.6. Optimierter Ladungsträger für die Welle mit $V_{\max} = 0,4$ auf Basis der Belastungsheuristik	113
9.7. Auf der Basis der Heuristik optimierter Ladungsträger für eine Welle ($H_{\max} = 5 \text{ mm}$)	114
9.8. Welle in dem optimierten Ladungsträger	115

Tabellenverzeichnis

5.1. Mittlere Laufzeiten für die einzelnen Algorithmusschritte bei der Erzeugung des Stoßdämpferladungsträgers	52
5.2. Eckpunkt- und Facettenanzahl der untersuchten Modelle	53
7.1. Kenngrößen der verwendeten PDET-Vernetzungen	73
7.2. Optimierungsergebnisse	78
7.3. Vergleich der mittleren Anzahl der Elemente in den Stützbereichen und Rechenzeiten für eine Iteration bei \mathcal{S}_3 und \mathcal{S}_4	79
7.4. Vergleich der Elementanzahl in den Stützbereichen zwischen beiden Definitionen	83
7.5. Vergleich der Ergebnisse bei beiden Stützbereichdefinitionen	84
7.6. Vergleich der Optimierungsergebnisse bei beiden Stützbereichen und beiden Vernetzungsstrategien	87
7.7. Vergleich der Anzahl der Elemente im Stützbereich bei beiden Stützbereichen und beiden Vernetzungsstrategien	88
7.8. Aus den Biegeversuchen errechnete Steifigkeiten	92
8.1. Lastfälle und die berücksichtigten Beschleunigungen in Achsrichtungen . .	95

Abkürzungsverzeichnis

AABB	achsenausgerichteter Begrenzungsrahmen (<i>engl.</i> : Axis-Aligned Bounding Box)
AM	Additive Fertigung (<i>engl.</i> : Additive Manufacturing)
BAAM	großvolumige Additive Fertigung (<i>engl.</i> : Big Area Additive Manufacturing)
CAD	Computer Aided Design
CCD	zentral zusammengesetzter Aufbau (<i>engl.</i> : Central Composite Design)
CSG	Constructive Solid Geometry
EPAL	European Pallet Association
FEM	Finite-Elemente-Methode
KKT	<i>Karush-Kuhn-Tucker</i>
MBB	<i>Messerschmidt-Bölkow-Blohm</i>
MEMS	Micro Electro Mechanical Systems
MFR	Schmelzflussrate (<i>engl.</i> : Melt Flow Rate)
MMA	Methode der beweglichen Asymptoten (<i>engl.</i> : Method of Moving Asymptotes)
MMTO	Multi-Material Topologieoptimierung
NC	Numerische Steuerung (<i>engl.</i> : Numerical Control)
OC	Optimalitätskriterium (<i>engl.</i> : Optimality Criteria)
PDET	Partial Differential Equation Toolbox
PLA	Poly lactide
PP	Polypropylen
PTFE	Polytetrafluorethylen
PVA	Polyvenylalkohol
PWM	Pulsweitenmodulation
RAMP	Rationale Approximierung von Materialeigenschaften (<i>engl.</i> : Rational Approximation of Material Properties)
RP	Rapid Prototyping
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalization

SLP	Abfolge von linearen Programmen (<i>engl.</i> : sequence of linear programmes)
SSR	Solid State Relais
TO	Topologieoptimierung
u.d.N.	unter der Nebenbedingung / unter den Nebenbedingungen

Formelzeichenverzeichnis

A_x, C_x, B_x	x -Koordinaten der Punkte \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}
A_y, C_y, B_y	y -Koordinaten der Punkte \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}
A_i	Flächeninhalt der Masterfacette im Kontaktpaar i
$B^{(k)}$	Faktor zur Änderung der Designvariable anhand der OC-Aktualisierungsregel nach der Iteration k
D	Penetrationstiefe
E_0	isotroper Elastizitätstensor
E_e	Elastizitätstensor des Elements e
E	Elastizitätsmodul
F_D	Kontaktkraft
F_R	Reibungskraft
H_R	differenzierbare Heavisidefunktion
H_T	Schwellwert-Heavisidefunktion
H_{\max}	obere Grenze der Elementkantenlänge
H_{ei}	Gewichtungsfaktor des Umkreisfilters für das Element e bezogen auf das Element i
H	höhe des Kegelfilters
K_M	Kompressionsmodul
$L(\mathbf{x})$	Lagrangefunktion
L_e	
$L_j^{(k)}, U_j^{(k)}$	untere bzw. obere Asymptote des j ten Elements bei der MMA bei der Iteration k
M_{nd}	Kenngröße für Existenz von Graubereichen
N_i	Elementansatzfunktionen
P	Parameter der p -Norm
Q	korrigiert Exponent der smax-Funktion
R	Filterradius
V_i	Elementvolumen das zur Masterfacette A_i gehört
V_{\max}	Materialvolumenobergrenze im Designraum
V	Materialvolumen im Designraum

Δt	Zeitschrittweite
Ω_{mat}	Designraum, der Material enthält
Ω	Designraum
α_{d}	Winkel zwischen den Kanten einer Facette
$\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}$	untere bzw. obere Schrittweitenbegrenzung des j ten Elements bei der MMA bei der Iteration k
α	Abbildung $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{xy}}$ der Facetten in ebenen Dreiecke im \mathbb{R}^2
β_{R}	Steigung der differenzierbaren Heavisidefunktion
β_{T}	Steigung der Schwellwert-Heavisidefunktion
β	Die Abbildung $\beta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ ordnet jedem Startpunkt eine Facette \mathbf{f} zu, die durch den Dixel getroffen wird
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	Eckpunkt eines Dreiecks,
\mathbf{C}_{mat}	Materialmatrix
\mathbf{C}	Dämpfungsmatrix
\mathbf{D}	Matrix der Verschiebungsrichtungsvektoren
$\mathbf{F}_{\text{c}}^{\text{idc}}$	ursprünglichen Indizes von $\tilde{\mathbf{F}}_{\text{c}}^{\text{lin}}$ in $\mathbf{F}_{\text{c}}^{\text{lin}}$
$\mathbf{F}_{\text{c}}^{\text{lin}}$	Verknüpfungsmatrix einer Triangulierung transformiert in einen Spaltenvektor
\mathbf{F}_{c}	Verknüpfungsmatrix einer Triangulierung
\mathbf{F}_i	Untermatrix der Verknüpfungsmatrix \mathbf{F}
\mathbf{F}	inneren Kräfte
\mathbf{K}	globale Steifigkeitsmatrix
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{N}	Matrix, die zeilenweise die Normaleneinheitsvektoren einer Triangulierung enthält
$\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y, \mathbf{P}_z$	Matrizen, die die x -, y -, und z -Kooridnaten der Startpunkte der Dixelstruktur \mathbf{p} enthalten
\mathbf{P}	Punkt im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3
\mathbf{R}	externe Kräfte
\mathbf{S}	Kontaktfläche eines Ladungsträgers
\mathbf{U}	Verschiebungsvektor in globalen Koordinaten
\mathbf{V}_{off}	Eckpunktmatrix einer versetzten Triangulierung
\mathbf{V}	Eckpunktmatrix einer Triangulierung
$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Lambda}$	Vektor von Lagrangemultiplikatoren
$\boldsymbol{\mu}^{(k)}$	theoretische Dichte in der Topologieoptimierung nach der Iteration k
$\boldsymbol{\mu}$	theoretische Dichte in der Topologieoptimierung
$\boldsymbol{\rho}$	gefilterte theoretische Dichte

ρ	gefilterte Designvariable \boldsymbol{x}
$\boldsymbol{a}^{(k)}$	Beschleunigung zur Iteration k
$\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2$	Kanten einer Facette
\boldsymbol{e}_c	Vektor, der die Facetten-IDs plausibler Kontaktpaare enthält
\boldsymbol{f}	einzelne Facette
\boldsymbol{n}	Baurichtung der additiven Fertigung
\boldsymbol{p}_{xy}	auf die xy -Ebene projizierte Startpunkte einer Dixelstruktur
\boldsymbol{p}	Startpunkt eines Dixels
\boldsymbol{u}	Verschiebungsvektor in lokalen Koordinaten
$\boldsymbol{v}_v^{(k)}$	Geschwindigkeit zur Iteration k
\boldsymbol{v}_c	Vektor, der die Knoten-IDs plausibler Kontaktpaare enthält
\boldsymbol{v}	einzelner Eckpunkt
$\boldsymbol{x}i$	durch den AM-Filter gefilterte Designvariable
\boldsymbol{x}	Designvariable
δ	Reduktionsfaktor
ϵ	Regularisierungskoeffizient
γ	Konstante im Umkreisfilter
$\hat{\boldsymbol{F}}_c$	Konnektivitätsmatrix \boldsymbol{F}_c mit den Dimensionen $3n_f \times 3$, wobei die Facetten entsprechend der Eckpunkte sortiert sind
$\hat{\boldsymbol{N}}$	Normalenvektormatrix \boldsymbol{N} mit den Dimensionen $3n_f \times 3$, wobei die Normalenvektoren entsprechend der Eckpunkte der Facetten sortiert sind
\hat{f}_i	Grenzwert der Zusatzbedingung $f_i(\boldsymbol{x})$ bei der MMA
$\lambda_u, \Lambda, \lambda^-, \lambda^+$	Einzelner Lagrangemultiplikator
\mathcal{E}_{ad}	Menge aller zulässigen Elastizitätstensoren
\mathcal{F}_p	Menge der projizierten Facetten $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_{xy}$, die die Punkte \mathcal{P}_{xy}
\mathcal{F}_{xy}	Menge der auf die xy -Ebene projizierten Facetten
\mathcal{F}	Menge aller Facetten einer Triangulierung
\mathcal{N}	Menge aller Normaleneinheitsvektoren einer Triangulierung
\mathcal{P}_{xy}	Menge der projizierten auf die xy -Ebene projizierten Startpunkte einer Dixelstruktur
\mathcal{P}	Menge aller Startpunkte einer Dixelstruktur
\mathcal{V}_{off}	Menge der versetzten Eckpunkte einer Triangulierung
\mathcal{V}	Menge aller Eckpunkte einer Triangulierung
μ_R	Reibungskoeffizient
$\mu_e^{(k)}$	theoretische Dichte in der Topologieoptimierung nach der Iteration k im Element e

μ_e	theoretische Dichte in der Topologieoptimierung im Element e
μ_{\min}	minimale theoretische Dichte in der Topologieoptimierung
ν	Poissonzahl, Querkontraktionszahl
$\bar{\mu}_e$	Mittelwert der theoretischen Dichte im Stützbereich des Elements e
ψ	Exponent des Grayscalefilters
ρ_b, ρ_g	Dichte des Ladungsguts bzw. des Ladungsträgers
ρ_{mat}	Materialdichte
ρ_e	gefilterte theoretische Dichte im Element e
${}^e\mathbf{B}$	Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix des Elements e
${}^e\mathbf{J}$	Jacobi-Matrix des Elements e
${}^e\mathbf{K}$	lokale Steifigkeitsmatrix des Elements e
${}^e\mathbf{M}$	Massenmatrix des Elements e
${}^e\mathcal{N}_n$	Nachbarschaft mit Berücksichtigung von n Nachbarschaftsebenen
${}^e\mathcal{S}_n$	Stützbereich auf Basis der Nachbarschaft ${}^e\mathcal{N}_n$
${}^p\mathcal{I}_z$	Menge aller z -Koordinaten der Dexelschnittpunkte
${}^p g_z$	z -Komponente eines Dexelendpunkts
${}^p g$	parametrische Beschreibung eines Dexels
${}^v\alpha_i$	Winkel der Kanten der i -ten Facette, die im Eckpunkt \mathbf{v} koinzident sind
${}^v\mathbf{n}_i$	Normalenvektor der i -ten Facette, die im Eckpunkt \mathbf{v} koinzident sind
${}^v\mathbf{n}$	Resultierender Normalenvektor des Eckpunkts \mathbf{v}
${}^v n$	Anzahl der Facetten, die zum Punkt \mathbf{v} gehören
$\tilde{\mathbf{F}}_c^{\text{lin}}$	Verknüpfungsmatrix einer Triangulierung transformiert in einen Spaltenvektor, aufsteigend sortiert
$\tilde{\mathbf{S}}$	\mathbf{S} sortiert, sodass die z -Koordinaten der Schnittpunkte ${}^p g_z(\tilde{\mathbf{S}})$ in einer aufsteigenden Reihenfolge sind
\tilde{f}_p	Lagrangefunktion der Zielfunktion
Φ_{\max}	maximale erlaubter Überhangswinkel
Φ	Überhangswinkel
Ξ	Maximumm der gefilterten Designvariable im Stützbereich
φ	Dämpfungsexponent
ξ, η, ζ	Positionskorrdinaten im normierten lokalen Elementkoordinatensystem
ξ_0	Grenzwert ohne Überstieg der smax-Funktion
ξ_i, η_i, ζ_i	Koordinaten der Integrationspunkte der Gauß-Legendre-Quadratur
a_1, a_2, a_3	baryzentrische Koordinate
a_x, a_y, a_z	Beschleunigung in Richtung der x -, y -, z -Achse
b_1	lineare Koeffizient der künstlichen Viskosität

b_2	quadratische Koeffizient der künstlichen Viskosität
b_{off}	Verschiebungsbetrag
c_L	longitudinale Schallgeschwindigkeit
c_e	Nachgiebigkeit des Elements e
c	Nachgiebigkeit
d_p	Tiefe eines Dexels
$f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})$	multidimensionale Funktion
f_{SI}	
f_p	Zielfunktion
$f_i(\mathbf{x})$	i te Zusatzbedingung bei der MMA mit $i = 1, \dots, n_c$
$f_i^{(k)}(\mathbf{x})$	Linearisierung der i te Zusatzbedingung bei der MMA bei der Iteration k mit $i = 1, \dots, n_c$
h_z	Geometrietiefe in z -Richtung
h_e	Elementgröße des Elements e
h_{max}	maximale Höhe eines Ladungsträgers
h_{min}	minimale Höhe eines Ladungsträgers
h	charakteristische Länge des kleinsten Elements
i, j, k	Laufvariable
k_n	Kontaktsteifigkeit
m_e	Masse des Elements
n_S	Anzahl der Elemente im Stützbereich
n_c	Anzahl an Zusatzbedingungen
n_e	Anzahl der Knoten in einem Element
n_f	Anzahl der Elemente in einer Vernetzung
n_g	obere Summationsgrnze der Gauß-Legendre-Quadratur
n_v	Anzahl der Eckpunkte in einer Vernetzung
n_x, n_y	Anzahl der Dixel einer Dixelstruktur in x - bzw. y -Raumrichtung
p	Bestrafungsexponent
q_p	Innendruck der künstlichen Viskosität
q	Maximale Änderung der Designvariable in einem Element in einer Iteration
r_{rel}	Anzahl der Dixel in Bezug auf die längere Seite der beiden Grundflächenseiten des Ladungsträgers
r_x, r_y, r_z	Auflösung in x -, y -, und z -Achse
s	Stützanteil
t_b	Bodendicke eines Ladungsträgers
v_x, v_y, v_z	x -, y -, z -Komponente des Punktes \mathbf{v}

w_i	Gewichtungsfaktor der Gauß-Legendre-Quadratur
x_T	Ort des Anstiegs der Schwellwert-Heavisidefunktion
x_e	Wert der Designvariable im Element e
z_0	Minimale z -Koordinate einer Ladungsträgergeometrie
v_{jz}	z -Koordinate des j ten Eckpunkts einer Facette f

Literaturverzeichnis

- [And+11] Erik Andreassen, Anders Clausen, Mattias Schevenels, Boyan S. Lazarov und Ole Sigmund. „Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43.1 (2011), S. 1–16. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-010-0594-7.
- [Art21] Artec 3D. *Artec Eva Lite Technical Specifications*. 2021. URL: <https://www.artec3d.com/portable-3d-scanners/artec-eva-lite#specifications> (eingesehen am 06.12.2021).
- [BGF15] Hichem Barki, Gaël Guennebaud und Sebti Fofou. „Exact, robust, and efficient regularized Booleans on general 3D meshes“. In: *Computers & Mathematics with Applications* 70.6 (2015), S. 1235–1254. ISSN: 08981221. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.06.016.
- [Bat14] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures*. 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2014. ISBN: 9780979004957.
- [BSG05] Anna Bellini, Lauren Shor und Selcuk I. Guceri. „New developments in fused deposition modeling of ceramics“. In: *Rapid Prototyping Journal* 11.4 (2005), S. 214–220. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/13552540510612901.
- [BCB76] T. Belytschko, R. L. Chiapetta und H. D. Bartel. „Efficient large scale non-linear transient analysis by finite elements“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10.3 (1976), S. 579–596. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/nme.1620100308.
- [Ben89] M. P. Bendsøe. „Optimal shape design as a material distribution problem“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 1.4 (1989), S. 193–202. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/BF01650949.
- [BK88] Martin Philip Bendsøe und Noboru Kikuchi. „Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71.2 (1988), S. 197–224. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/0045-7825(88)90086-2.

- [BS04] Martin Philip Bendsøe und Ole Sigmund. *Topology optimization: Theory, methods, and applications*. 2. ed., corr. printing. Engineering online library. Berlin: Springer, 2004. ISBN: 3540429921.
- [Ber16] Tobias Bergmann. „Integration des FLM-Verfahrens in die Konstruktion und Herstellung eines Gussgetriebes“. Masterarbeit. Dortmund: Technische Universität Dortmund, 2016.
- [BAH11] D. Brackett, Ian Ashcroft und Richard Hague. „Topology optimization for additive manufacturing“. In: *22nd Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium - An Additive Manufacturing Conference, SFF 2011*. 2011, S. 348–362.
- [BT01] Tyler E. Bruns und Daniel A. Tortorelli. „Topology optimization of nonlinear elastic structures and compliant mechanisms“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.26-27 (2001), S. 3443–3459. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/S0045-7825(00)00278-4.
- [BH74] James R. Bunch und John E. Hopcroft. „Triangular Factorization and Inversion by Fast Matrix Multiplication“. In: *Mathematics of Computation* 28.125 (1974), S. 231. ISSN: 00255718. DOI: 10.2307/2005828.
- [CS13] Gregory A. Campbell und Mark A. Spalding, Hrsg. *Analyzing and Troubleshooting Single-Screw Extruders*. München: Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2013. ISBN: 978-3-446-41371-9. DOI: 10.3139/9783446432666.
- [CBG12] Ian Campbell, David Bourell und Ian Gibson. „Additive manufacturing: rapid prototyping comes of age“. In: *Rapid Prototyping Journal* 18.4 (2012), S. 255–258. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/13552541211231563.
- [CO81] Keng-Tung Cheng und Niels Olhoff. „An investigation concerning optimal design of solid elastic plates“. In: *International Journal of Solids and Structures* 17.3 (1981), S. 305–323. ISSN: 00207683. DOI: 10.1016/0020-7683(81)90065-2.
- [Che+19] Phillip Chesser u. a. „Extrusion control for high quality printing on Big Area Additive Manufacturing (BAAM) systems“. In: *Additive Manufacturing* 28 (2019), S. 445–455. ISSN: 22148604. DOI: 10.1016/j.addma.2019.05.020.
- [CK09] Peter W. Christensen und Anders Klarbring. *An introduction to structural optimization*. Bd. 153. Solid mechanics and its applications. Dordrecht: Springer, 2009. ISBN: 9781402086656. URL: https://books.google.de/books?id=80IeN_MYI8C&pg=PA2&hl=de&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false.

- [Cru+17] Fabio A. Cruz Sanchez, Hakim Boudaoud, Sandrine Hoppe und Mauricio Camargo. „Polymer recycling in an open-source additive manufacturing context: Mechanical issues“. In: *Additive Manufacturing* 17 (2017), S. 87–105. ISSN: 22148604. DOI: 10.1016/j.addma.2017.05.013.
- [Das+17] Paramita Das, Kunal Mhapsekar, Sushmit Chowdhury, Rutuja Samant und Sam Anand. „Selection of build orientation for optimal support structures and minimum part errors in additive manufacturing“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 14.sup1 (2017), S. 1–13. DOI: 10.1080/16864360.2017.1308074.
- [Das17] Dassault Systèmes. *Abaqus 6.17 Theory Manual: Explicit dynamic analysis*. Vélizy-Villacoublay, 2017. URL: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAETHERefMap/simathe-c-expdynamic.htm> (eingesehen am 02.03.2022).
- [Des+99] Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schröder und Alan H. Barr. „Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow“. In: *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '99*. New York, New York, USA: ACM Press, 1999. DOI: 10.1145/311535.311576.
- [DIN00] DIN Deutsches Institut für Normung e.V. *DIN ISO 10531: Versandfertige Packstücke: Festigkeitsprüfung von Ladeeinheiten*. Berlin, 2000.
- [DIN03] DIN Deutsches Institut für Normung e.V. *DIN EN 13698-1: Produktspezifikation für Paletten: Teil 1: Herstellung von 800 mm x 1200 mm-Flachpaletten aus Holz*. Berlin, 2003.
- [DIN08] DIN Deutsches Institut für Normung e.V. *DIN EN ISO 291: Kunststoffe: Normalklimate für Konditionierung und Prüfung*. Berlin, 2008.
- [DIN13] DIN Deutsches Institut für Normung e.V. *DIN EN ISO 178: Kunststoffe - Bestimmung der Biegeeigenschaften*. Berlin, 2013.
- [DIN14] DIN Deutsches Institut für Normung e.V. *DIN 55405: Verpackung - Terminologie - Begriffe*. Berlin, 2014.
- [DS95] A. Díaz und O. Sigmund. „Checkerboard patterns in layout optimization“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 10.1 (1995), S. 40–45. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/BF01743693.
- [Eck+19] Josef Valentin Ecker u. a. „Mechanical properties and water absorption behaviour of PLA and PLA/wood composites prepared by 3D printing and injection moulding“. In: *Rapid Prototyping Journal* 25.4 (2019), S. 672–678. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/RPJ-06-2018-0149.

- [Elk+97] Kurt Elkins u. a. „Soft elastomers for fused deposition modeling“. In: *1997 International Solid Freeform Fabrication Symposium*. 1997.
- [Eng21] Andrea Engels. *EPAL Palettenproduktion steigt trotz Covid-19-Pandemie*. Düsseldorf, 2021. URL: <https://www.epal-pallets.org/eu-de/news/news/details/article/epal-palettenproduktion-steigt-trotz-covid-19-pandemie> (eingesehen am 21.04.2021).
- [Eng14] Darren Engwirda. *FINDTRIA: Point-In-Simplex Queries in R^d : Spatial queries for collections of triangles, tetrahedrons and general d-simplexes in MATLAB*. 2014. URL: <https://github.com/dengwirda/find-tria> (eingesehen am 21.03.2019).
- [Epl21] Jeff Epler. *LinuxCNC: GitHub repository*. 2021. URL: <https://github.com/LinuxCNC/linuxcnc> (eingesehen am 01.12.2021).
- [Esc07] Richard Eschke. *Technische Verpackungslogistik: Auslegung von Verpackungen für den globalen Versand; mit 25 Tabellen*. 3. Aufl. Bd. 379. Kontakt & Studium. Renningen: expert Verl., 2007. ISBN: 3816926983. URL: http://deposit.d-nb.de/cgi-bin/dokserv?id=2871211&prov=M&dok_var=1&dok_ext=htm.
- [EW11] Francis Esmonde-White. *Patch Slim (patchslim.m): MathWorks File Exchange*. 2011. URL: <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29986-patch-slim-patchslim-m> (eingesehen am 02.08.2019).
- [Eur21] European Pallet Association e.V. *EPAL EUROPALETTE (EPAL1)*. Düsseldorf, 2021. URL: <https://www.epal-pallets.org/eu-de/ladungstraeger/epal-europalette> (eingesehen am 21.04.2021).
- [FAL16] Shady Farah, Daniel G. Anderson und Robert Langer. „Physical and mechanical properties of PLA, and their functions in widespread applications - A comprehensive review“. In: *Advanced drug delivery reviews* 107 (2016), S. 367–392. DOI: 10.1016/j.addr.2016.06.012.
- [FRK11] Reza Zanjirani Farahani, Shabnam Rezapour und Laleh Kardar. *Logistics operations and management: Concepts and models*. 1. Aufl. Elsevier insights. London: Elsevier, 2011. ISBN: 0123852021. URL: <http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10470323>.
- [Gar+18] Alain Garaigordobil, Rubén Ansola, Javier Santamaría und Igor Fernández de Bustos. „A new overhang constraint for topology optimization of self-supporting structures in additive manufacturing“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 58.5 (2018), S. 2003–2017. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-018-2010-7.

- [GG16] Andrew T. Gaynor und James K. Guest. „Topology optimization considering overhang constraints: Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through design“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54.5 (2016), S. 1157–1172. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-016-1551-x.
- [Gay+14] Andrew T. Gaynor, Nicholas A. Meisel, Christopher B. Williams und James K. Guest. „Topology Optimization for Additive Manufacturing: Considering Maximum Overhang Constraint“. In: *15th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014. ISBN: 978-1-62410-283-7. DOI: 10.2514/6.2014-2036.
- [GRS15] Ian Gibson, David Rosen und Brent Stucker. *Additive Manufacturing Technologies*. New York, NY: Springer New York, 2015. ISBN: 978-1-4939-2112-6. DOI: 10.1007/978-1-4939-2113-3.
- [Go+17] Jamison Go, Scott N. Schiffres, Adam G. Stevens und A. John Hart. „Rate limits of additive manufacturing by fused filament fabrication and guidelines for high-throughput system design“. In: *Additive Manufacturing* 16 (2017), S. 1–11. ISSN: 22148604. DOI: 10.1016/j.addma.2017.03.007.
- [Gou71] H. Gouraud. „Continuous Shading of Curved Surfaces“. In: *IEEE Transactions on Computers* C-20.6 (1971), S. 623–629. ISSN: 0018-9340. DOI: 10.1109/T-C.1971.223313.
- [GE09] Albert A. Groenwold und L. F. P. Etman. „A simple heuristic for gray-scale suppression in optimality criterion-based topology optimization“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 39.2 (2009), S. 217–225. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-008-0337-1.
- [GHW18] Dietmar Gross, Werner Hauger und Peter Wriggers. *Technische Mechanik 4*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN: 978-3-662-55693-1. DOI: 10.1007/978-3-662-55694-8.
- [GPB04] J. K. Guest, J. H. Prévost und T. Belytschko. „Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61.2 (2004), S. 238–254. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/nme.1064.
- [GZ12] James K. Guest und Mu Zhu. „Casting and Milling Restrictions in Topology Optimization via Projection-Based Algorithms“. In: *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference - 2012*. New York, NY: ASME, 2012, S. 913–920. ISBN: 978-0-7918-4502-8. DOI: 10.1115/DETC2012-71507.

- [Guo+07] K.-B. Guo, L.-C. Zhang, C.-J. Wang und S.-H. Huang. „Boolean operations of STL models based on loop detection“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 33.5-6 (2007), S. 627–633. DOI: 10.1007/s00170-006-0487-5.
- [GRH07] Bhuvanesh Gupta, Nilesh Revagade und Jöns Hilborn. „Poly(lactic acid) fiber: An overview“. In: *Progress in Polymer Science* 32.4 (2007), S. 455–482. ISSN: 00796700. DOI: 10.1016/j.progpolymsci.2007.01.005.
- [GCP91] E. Levent Gursoz, Young Choi und Friedrich B. Prinz. „Boolean set operations on non-manifold boundary representation objects“. In: *Computer-Aided Design* 23.11 (1991), S. 33–39. ISSN: 00104485. DOI: 10.1016/0010-4485(91)90097-G.
- [HGB85] J. O. Hallquist, G. L. Goudreau und D. J. Benson. „Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51.1-3 (1985), S. 107–137. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/0045-7825(85)90030-1.
- [HB97] Donald Hearn und M. Pauline Baker. *Computer graphics, C version*. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997. ISBN: 0135309247.
- [HGP17] Marcel Hoffarth, Nikolai Gerzen und Claus Pedersen. „ALM overhang constraint in topology optimization for industrial applications“. In: *Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization*. Hrsg. von Thomas Vietor, Sierk Fiebig, Kai-Uwe Bletzinger und Kurt Maute. Cham: Springer, 2017. ISBN: 978-3-319-67987-7.
- [Hol14] Sven Holcombe. *surf2solid - make a solid volume from a surface for 3D printing: MathWorks File Exchange*. 2014. URL: <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/42876-surf2solid-make-a-solid-volume-from-a-surface-for-3d-printing> (eingesehen am 18.06.2019).
- [Hol+13] Chris Holshouser u. a. „Out of bounds additive manufacturing“. In: *Advanced Materials and Processes* 171.3 (2013). ISSN: 0882-7958.
- [HJW15] Kailun Hu, Shuo Jin und Charlie C.L. Wang. „Support slimming for single material based additive manufacturing“. In: *Computer-Aided Design* 65 (2015), S. 1–10. ISSN: 00104485. DOI: 10.1016/j.cad.2015.03.001.
- [Hug14] John F. Hughes. *Computer graphics: Principles and practice*. 3rd ed. Always learning. Upper Saddle River, NJ: Addison-Wesley Pearson Education, 2014. ISBN: 978-0-321-39952-6.
- [Jan+13] Miche Jansen u. a. „Robust topology optimization accounting for misplacement of material“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 47.3 (2013), S. 317–333. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-012-0835-z.

- [JXS18] Jingchao Jiang, Xun Xu und Jonathan Stringer. „Support Structures for Additive Manufacturing: A Review“. In: *Journal of Manufacturing and Materials Processing* 2.4 (2018), S. 64. DOI: 10.3390/jmmp2040064.
- [JXS19] Jingchao Jiang, Xun Xu und Jonathan Stringer. „Effect of Extrusion Temperature on Printable Threshold Overhang in Additive Manufacturing“. In: *Procedia CIRP* 81 (2019), S. 1376–1381. ISSN: 22128271. DOI: 10.1016/j.procir.2019.04.047.
- [Joh11] Eric Johnson. *STL File Reader: MathWorks File Exchange*. 2011. URL: <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22409-stl-file-reader> (eingesehen am 15.06.2019).
- [JSB99] Jacques Jonsmann, Ole Sigmund und Siebe Bouwstra. „Multi Degrees of Freedom Electro-Thermal Microactuators“. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators* (1999), S. 1372–1375. URL: <https://orbit.dtu.dk/en/publications/multi-degrees-of-freedom-electro-thermal-microactuators>.
- [JKP02] Cha-Soo Jun, Dong-Soo Kim und Sehyung Park. „A new curve-based approach to polyhedral machining“. In: *Computer-Aided Design* 34.5 (2002), S. 379–389. ISSN: 00104485. DOI: 10.1016/S0010-4485(01)00110-5.
- [KJM97] Chua Chee Kai, Gan G. K. Jacob und Tong Mei. „Interface between CAD and Rapid Prototyping systems. Part 1: A study of existing interfaces“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 13.8 (1997), S. 566–570. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/BF01176300.
- [Kaß20] Monika Kaßmann. *Grundlagen der Verpackung: Leitfaden für die fächerübergreifende Verpackungsausbildung*. 3rd ed. Beuth Praxis. Berlin: Beuth Verlag, 2020. ISBN: 9783410293798.
- [Kha08] J. Khazaei. „Water absorption characteristics of three wood varieties“. In: *Cercetări Agronomice în Moldova* 134.2 (2008), S. 5–16. URL: http://www.uaiasi.ro/cercet_agromold/ro/fisiere/2008/v2/ca2-08-01.pdf.
- [KS19a] Mohammad Abu Hasan Khondoker und Dan Sameoto. „Direct coupling of fixed screw extruders using flexible heated hoses for FDM printing of extremely soft thermoplastic elastomers“. In: *Progress in Additive Manufacturing* 4.3 (2019), S. 197–209. ISSN: 2363-9512. DOI: 10.1007/s40964-019-00088-4.
- [KLY04] Su-Jin Kim, Dong-Yoon Lee und Min-Yang Yang. „Offset Triangular Mesh Using the Multiple Normal Vectors of a Vertex“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 1.1-4 (2004), S. 285–291. DOI: 10.1080/16864360.2004.10738269.

- [Kle13] Wilhelm Kleppmann. *Versuchsplanung: Produkte und Prozesse optimieren*. 8., überarb. Aufl. Praxisreihe Qualitätswissen. München: Hanser, 2013. ISBN: 9783446437524.
- [Kni+21] Jan Knipschild, Jens Bucher, Dennis Stracke und Bernd Künne. „Process and review of additive manufactured cargo carriers for logistics applications“. In: *International Journal of Modern Manufacturing Technologies* 1.13 (2021), S. 64–72. URL: https://ijmmt.ro/vol13no12021/07_Jan_Knipschild_1.pdf (eingesehen am 30.06.2021).
- [KS19b] Jan Knipschild und Dennis Stracke. *loadcarrier: GitHub repository*. 2019. URL: <https://github.com/janknipschild/loadcarrier> (eingesehen am 28.08.2019).
- [KL02] Bahattin Koc und Yuan-Shin Lee. „Non-uniform offsetting and hollowing objects by using biarcs fitting for rapid prototyping processes“. In: *Computers in Industry* 47.1 (2002), S. 1–23. ISSN: 01663615. DOI: 10.1016/S0166-3615(01)00141-5.
- [KK09] Max Koecher und Aloys Krieg. *Ebene Geometrie*. 3., neu bearb. und erw. Aufl., korr. Nachdr. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2009. ISBN: 9783540493273.
- [KHE15] J. Kranz, D. Herzog und C. Emmelmann. „Design guidelines for laser additive manufacturing of lightweight structures in TiAl6V4“. In: *Journal of Laser Applications* 27.S1 (2015), S14001. ISSN: 1042-346X. DOI: 10.2351/1.4885235.
- [Kro10] Dirk-Jan Kroon. *Triangular Mesh Refinement: MathWorks File Exchange*. 2010. URL: <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/16215-triangular-mesh-refinement> (eingesehen am 27.08.2019).
- [LS99] Douglas M. Lambert und James R. Stock. *Strategic logistics management*. 3rd ed. McGraw-Hill Marketing & Advertising Series. Boston: Irwin und McGraw-Hill, 1999. ISBN: 0256088381.
- [Lan16] Matthijs Langelaar. „Topology optimization of 3D self-supporting structures for additive manufacturing“. In: *Additive Manufacturing* 12 (2016), S. 60–70. ISSN: 22148604. DOI: 10.1016/j.addma.2016.06.010.
- [Lan17] Matthijs Langelaar. „An additive manufacturing filter for topology optimization of print-ready designs“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 55.3 (2017), S. 871–883. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-016-1522-2.
- [Le +88] Le Roscoe u. a. „Stereolithography interface specification“. In: *America-3D Systems Inc* 27.2020 (1988).

- [Lea+14] Martin Leary, Luigi Merli, Federico Torti, Maciej Mazur und Milan Brandt. „Optimal topology for additive manufacture: A method for enabling additive manufacture of support-free optimal structures“. In: *Materials & Design* 63 (2014), S. 678–690. ISSN: 02613069. DOI: 10.1016/j.matdes.2014.06.015.
- [Lee11] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Second edition. Bd. 202. Graduate texts in mathematics. New York u. a.: Springer, 2011. ISBN: 978-1-4419-7940-7. DOI: 10.1007/978-1-4419-7940-7. URL: <http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy1318/2011287064-b.html>.
- [LCN96] K. F. Leong, C. K. Chua und Y. M. Ng. „A study of stereolithography file errors and repair. Part 1. Generic solution“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 12.6 (1996), S. 407–414. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/BF01186929.
- [LT14] Kai Liu und Andrés Tovar. „An efficient 3D topology optimization code written in Matlab“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 50.6 (2014), S. 1175–1196. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-014-1107-x.
- [LG95] Man Liu und D. G. Gorman. „Formulation of Rayleigh damping and its extensions“. In: *Computers & Structures* 57.2 (1995), S. 277–285. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/0045-7949(94)00611-6.
- [LD15] Lonnie J. Love und Chad Duty. *Cincinnati big area additive manufacturing (BAAM)*. Oak Ridge, 2015. DOI: 10.2172/1210140.
- [Lov+15] Lonnie J. Love u. a. *Breaking Barriers in Polymer Additive Manufacturing*. 2015.
- [MPT09] Matteo Malosio, Nicola Pedrocchi und Lorenzo Molinari Tosatti. „Algorithm to Offset and Smooth Tessellated Surfaces“. In: *Computer-Aided Design and Applications* 6.3 (2009), S. 351–363. DOI: 10.3722/cadaps.2009.351-363.
- [MTF09] Stephan H. Mayer, Erik Thiry und Cay-Bernhard Frank. *Supply chain excellence amidst the global economic crisis: 6th European A.T. Kearney/ELA logistics study 2008/2009; summary of study results July 2009*. [Darmstadt]: [Techn. Univ., Inst. für Betriebswirtschaftslehre], 2009. ISBN: 9783924606596.
- [Mer+14] Raya Mertens, Stijn Clijsters, Karolien Kempen und Jean-Pierre Kruth. „Optimization of Scan Strategies in Selective Laser Melting of Aluminum Parts With Downfacing Areas“. In: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 136.6 (2014). ISSN: 1087-1357. DOI: 10.1115/1.4028620.
- [Moe11] Kevin Moerman. *mesh2tri: MathWorks File Exchange*. 2011. URL: <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28327-mesh2tri> (eingesehen am 18.06.2019).

- [MCM18] Daniel Moreno Nieto, Victor Casal López und Sergio Ignacio Molina. „Large-format polymeric pellet-based additive manufacturing for the naval industry“. In: *Additive Manufacturing* 23 (2018), S. 79–85. ISSN: 22148604. DOI: 10.1016/j.addma.2018.07.012.
- [NSA14] Brian N. Turner, Robert Strong und Scott A. Gold. „A review of melt extrusion additive manufacturing processes: I. Process design and modeling“. In: *Rapid Prototyping Journal* 20.3 (2014), S. 192–204. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/RPJ-01-2013-0012.
- [Natnd] NatureWorks LLC. *Ingeo™ Biopolymer 4043D Technical Data Sheet*. n.d. URL: https://www.natureworksllc.com/~media/Files/NatureWorks/Technical-Documents/Technical-Data-Sheets/TechnicalDataSheet_4043D_3D-monofilament_pdf.pdf (eingesehen am 17.09.2019).
- [Paw18] Wojciech Pawlak. „Wear and coefficient of friction of pla-graphite composite in 3D printing technology“. In: *Engineering mechanics 2018*. Hrsg. von Cyril Fischer und Jiří Náprstek. Prague: Institute of Theoretical and Applied Mechanics Academy of Sciences of the Czech Republic, 2018, S. 649–652. ISBN: 978-80-86246-91-8. DOI: 10.21495/91-8-649.
- [PS98] Joakim Petersson und Ole Sigmund. „Slope constrained topology optimization“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41.8 (1998), S. 1417–1434. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19980430)41:8<1417::AID-NME344>3.0.CO;2-N.
- [Pfo18] Hans-Christian Pfohl. *Logistiksysteme*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN: 978-3-662-56227-7. DOI: 10.1007/978-3-662-56228-4.
- [Pos+19] Brian K. Post u. a. „Using Big Area Additive Manufacturing to directly manufacture a boat hull mould“. In: *Virtual and Physical Prototyping* 14.2 (2019), S. 123–129. ISSN: 1745-2759. DOI: 10.1080/17452759.2018.1532798.
- [Pou03] Thomas A. Poulsen. „A new scheme for imposing a minimum length scale in topology optimization“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57.6 (2003), S. 741–760. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/nme.694.
- [Qia17] Xiaoping Qian. „Undercut and overhang angle control in topology optimization: A density gradient based integral approach“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 111.3 (2017), S. 247–272. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/nme.5461.
- [QS03] Xiuzhi Qu und Brent Stucker. „A 3D surface offset method for STL-format models“. In: *Rapid Prototyping Journal* 9.3 (2003), S. 133–141. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/13552540310477436.

- [Que+17] Osvaldo M. Querin, Mariano Victoria, Cristina Alonso Gordo, Rubén Ansola und Pascual Martí. *Topology Design Methods for Structural Optimization*. Saint Louis: Elsevier Science, 2017. ISBN: 9780080999890. URL: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/gbv/detail.action?docID=4942045>.
- [RRG07] B. V. Reddy, N. V. Reddy und A. Ghosh. „Fused deposition modelling using direct extrusion“. In: *Virtual and Physical Prototyping* 2.1 (2007), S. 51–60. ISSN: 1745-2759. DOI: 10.1080/17452750701336486.
- [Req80] Aristides A. G. Requicha. „Representations of rigid solid objects“. In: *Computer Aided Design Modelling, Systems Engineering, CAD-Systems: CREST Advanced Course Darmstadt, 8.-19. September 1980*. Hrsg. von Jose Encarnacao. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1980, S. 1–78. ISBN: 978-3-540-38324-6. DOI: 10.1007/BFb0040158.
- [RHAL12] Frank Rieg, Reinhard Hackenschmidt und Bettina Alber-Laukant. *Finite Elemente Analyse für Ingenieure*. 4. Aufl. s.l.: Carl Hanser Fachbuchverlag, 2012. ISBN: 978-3-446-42776-1. DOI: 10.3139/9783446434691.
- [Roz98] G. I. N. Rozvany. „Exact analytical solutions for some popular benchmark problems in topology optimization“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 15.1 (1998), S. 42–48. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/BF01197436.
- [RZB92] G. I. N. Rozvany, M. Zhou und T. Birker. „Generalized shape optimization without homogenization“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 4.3-4 (1992), S. 250–252. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/BF01742754.
- [RK19] Luke Ryan und Il Yong Kim. „A multiobjective topology optimization approach for cost and time minimization in additive manufacturing“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 118.7 (2019), S. 371–394. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/nme.6017.
- [Saa+15] M. Saari u. a. „Additive manufacturing of soft and composite parts from thermoplastic elastomers“. In: *Solid Freeform Fabrication Symposium*. 2015, S. 949–958.
- [SK20] Graeme Sabiston und Il Yong Kim. „3D topology optimization for cost and time minimization in additive manufacturing“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 61.2 (2020), S. 731–748. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-019-02392-7.
- [SM+08] Christoph F. Schauwecker, Jeffrey J. Morrell u. a. „Ability of pressure treatment with wood preservatives to kill or limit emergence of invasive insects using *Arhopalus productus* as a model species“. In: *Forest products journal* 58.10 (2008), S. 56.

- [Shi90] Leon A. Shirman. „Construction of Smooth Curves and Surfaces from Polyhedral Models“. Diss. EECS Department, University of California, Berkeley, 1990. URL: <http://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1990/5342.html>.
- [Sig01] O. Sigmund. „A 99 line topology optimization code written in Matlab“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21.2 (2001), S. 120–127. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s001580050176.
- [Sig98] Ole Sigmund. „Systematic design of microactuators using topology optimization“. In: *Smart Structures and Materials 1998: Smart Electronics and MEMS*. Hrsg. von Vijay K. Varadan, Paul J. McWhorter, Richard A. Singer und Michael J. Vellekoop. SPIE Proceedings. SPIE, 1998, S. 23–31. DOI: 10.1117/12.320179.
- [Sig07] Ole Sigmund. „Morphology-based black and white filters for topology optimization“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33.4-5 (2007), S. 401–424. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-006-0087-x.
- [Sim21a] Simon-Kucher & Partners. *Legen Sie Wert auf nachhaltige Verpackungen?* Statista, 2021. URL: <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1227610/umfrage/umfrage-zur-bedeutung-von-nachhaltigen-verpackungen-in-deutschland/> (eingesehen am 23. 12. 2022).
- [Sim21b] Simon-Kucher & Partners. *Welche Eigenschaften zeichnen für Sie eine "nachhaltige" Verpackung aus?* Statista, 2021. URL: <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1227614/umfrage/umfrage-zu-den-eigenschaften-von-nachhaltigen-verpackungen-in-deutschland/> (eingesehen am 23. 12. 2022).
- [SB97] Stephen M. Smith und J. Michael Brady. „SUSAN—A New Approach to Low Level Image Processing“. In: *International Journal of Computer Vision* 23.1 (1997), S. 45–78. ISSN: 09205691. DOI: 10.1023/A:1007963824710.
- [Sta94] Stanford Computer Graphics Laboratory. *The Stanford 3D Scanning Repository: The Stanford Models*. Stanford, 1994. URL: <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/> (eingesehen am 12. 06. 2019).
- [Sta21] Statistisches Bundesamt. *Umsatz der Branche Herstellung von Verpackungen aus Holz in Deutschland von 2012 bis 2019 und Prognose bis zum Jahr 2025*. Statista, 2021. URL: <https://de.statista.com/prognosen/313695/herstellung-von-verpackungen-aus-holz-umsatz-in-deutschland> (eingesehen am 23. 12. 2022).

- [Sta22] Statistisches Bundesamt. *Erzeugerpreisindex von Verpackungen in Deutschland in den Jahren 2011 bis 2021*. Statista, 2022. URL: <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/692737/umfrage/erzeugerpreisindex-von-verpackungen-in-deutschland/> (eingesehen am 23. 12. 2022).
- [SC95] M. J. Stevens und J. A. Covas. *Extruder Principles and Operation*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995. ISBN: 978-94-010-4247-5.
- [SS01] M. Stolpe und K. Svanberg. „An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 22.2 (2001), S. 116–124. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s001580100129.
- [SK86] Gilbert Strang und Robert V. Kohn. „Optimal design in elasticity and plasticity“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22.1 (1986), S. 183–188. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/nme.1620220113.
- [SP08] Frank Straube und Hans-Christian Pfohl, Hrsg. *Trends und Strategien in der Logistik: Globale Netzwerke im Wandel ; Umwelt, Sicherheit, Internationalisierung, Menschen*. Hamburg: DVV Media Group Dt. Verkehrs-Verl., 2008. ISBN: 978-3-87154-388-3.
- [Sud+16] Zeke Sudbury u. a. „Characterizing Material Transition for Functionally Graded Material Using Big Area Additive Manufacturing“. In: *27th Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium*. 2016.
- [Sva87] Krister Svanberg. „The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24.2 (1987), S. 359–373. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/nme.1620240207.
- [Sva07] Krister Svanberg. *MMA and GCMMA Matlab code*. 2007. URL: <http://www.smoptit.se/> (eingesehen am 02. 08. 2022).
- [SNM03] M. Szilvsi-Nagy und Gy. Mátyási. „Analysis of STL files“. In: *Mathematical and Computer Modelling* 38.7-9 (2003), S. 945–960. ISSN: 0895-7177. DOI: 10.1016/S0895-7177(03)90079-3.
- [Sâ15] Sâm Landier. „Boolean Operations on Arbitrary Polyhedral Meshes“. In: *Procedia Engineering* 124 (2015), S. 200–212. ISSN: 1877-7058. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.10.133.
- [TSB18] Ghanshyam Tejani, Vimal Savsani und Sujin Bureerat. *Truss Topology Optimization: A review: Past, present, and future*. 1. Auflage. Saarbrücken: Scholars’ Press, 2018. ISBN: 9786202313704.

- [Tho+19] C.-J. Thore, H. Alm Grundström, B. Torstenfelt und A. Klarbring. „Penalty regulation of overhang in topology optimization for additive manufacturing“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 60.1 (2019), S. 59–67. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-019-02194-x.
- [TW98] Grit Thürmer und Charles A. Wüthrich. „Computing vertex normals from polygonal facets“. In: *Journal of graphics tools* 3.1 (1998), S. 43–46.
- [UU12] Michael Ulbrich und Stefan Ulbrich. *Nichtlineare Optimierung*. Basel: Springer Basel, 2012. ISBN: 978-3-0346-0142-9. DOI: 10.1007/978-3-0346-0654-7.
- [van97] Gino van den Bergen. „Efficient Collision Detection of Complex Deformable Models using AABB Trees“. In: *Journal of graphics tools* 2.4 (1997), S. 1–13. DOI: 10.1080/10867651.1997.10487480.
- [van86] Tim van Hook. „Real-Time Shaded NC Milling Display“. In: *Proceedings of the 13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. SIGGRAPH '86. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1986, S. 15–20. ISBN: 0897911962. DOI: 10.1145/15922.15887.
- [VDI04] VDI Verein Deutscher Ingenieure e.V. *VDI 2700: Ladungssicherung auf Straßenfahrzeugen*. 2004.
- [VDI09] VDI Verein Deutscher Ingenieure e.V. *VDI 2700 Blatt 16: Ladungssicherung auf Straßenfahrzeugen: Ladungssicherung bei Transportern bis 7,5 t zulässiger Gesamtmasse (zGM)*. 2009.
- [VDI13] VDI Verein Deutscher Ingenieure e.V. *VDI 3968 Blatt 1: Sicherung von Ladeeinheiten: Anforderungsprofil*. 2013.
- [Ven+00] N. Venkataraman u. a. „Feedstock material property – process relationships in fused deposition of ceramics (FDC)“. In: *Rapid Prototyping Journal* 6.4 (2000), S. 244–253. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/13552540010373344.
- [Vol+15] N. Volpato, D. Kretschek, J. A. Foggiatto und C. M. Gomez da Silva Cruz. „Experimental analysis of an extrusion system for additive manufacturing based on polymer pellets“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 81.9-12 (2015), S. 1519–1531. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-015-7300-2.
- [Wan+13] Di Wang, Yongqiang Yang, Ziheng Yi und Xubin Su. „Research on the fabricating quality optimization of the overhanging surface in SLM process“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 65.9-12 (2013), S. 1471–1484. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-012-4271-4.

- [Wil80] Mark L. Wilkins. „Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculations“. In: *Journal of Computational Physics* 36.3 (1980), S. 281–303. ISSN: 00219991. DOI: 10.1016/0021-9991(80)90161-8.
- [Woe+18a] Aubrey L. Woern, Joseph R. McCaslin, Adam M. Pringle und Joshua M. Pearce. „RepRapable Recyclebot: Open source 3-D printable extruder for converting plastic to 3-D printing filament“. In: *HardwareX* 4 (2018), e00026. ISSN: 24680672. DOI: 10.1016/j.ohx.2018.e00026.
- [Woe+18b] Aubrey L. Woern u. a. „Fused Particle Fabrication 3-D Printing: Recycled Materials’ Optimization and Mechanical Properties“. In: *Materials (Basel, Switzerland)* 11.8 (2018). ISSN: 1996-1944. DOI: 10.3390/ma11081413.
- [Wri02] Peter Wriggers. *Computational contact mechanics*. Chichester: Wiley, 2002. ISBN: 0471496804.
- [Xu+12] Changxue Xu, Wenxuan Chai, Yong Huang und Roger R. Markwald. „Scaffold-free inkjet printing of three-dimensional zigzag cellular tubes“. In: *Biotechnology and bioengineering* 109.12 (2012), S. 3152–3160. DOI: 10.1002/bit.24591.
- [Zha+18] Hai-ming Zhao, Yong He, Jian-zhong Fu und Jing-jiang Qiu. „Inclined layer printing for fused deposition modeling without assisted supporting structure“. In: *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 51 (2018), S. 1–13. ISSN: 07365845. DOI: 10.1016/j.rcim.2017.11.011.
- [ZZX16] Ji-Hong Zhu, Wei-Hong Zhang und Liang Xia. „Topology Optimization in Aircraft and Aerospace Structures Design“. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 23.4 (2016), S. 595–622. ISSN: 1134-3060. DOI: 10.1007/s11831-015-9151-2.
- [ZT06] Olgierd C. Zienkiewicz und Robert L. Taylor. *The finite element method*. 6. ed., repr. Amsterdam: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. ISBN: 0750663219. URL: <http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10378853>.
- [Zsi18] Helmut E. Zsifkovits. *Logistik*. 2., verbesserte Auflage. Bd. 3733. UTB. Konstanz und München: UVK Verlagsgesellschaft mbH mit UVK/Lucius, 2018. ISBN: 978-3-8385-4926-2.
- [Zuo+06] Kong-Tian Zuo, Li-Ping Chen, Yun-Qing Zhang und Jingzhou Yang. „Manufacturing- and machining-based topology optimization“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 27.5-6 (2006), S. 531–536. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-004-2210-8.

- [ZS17] Wenjie Zuo und Kazuhiro Saitou. „Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 55.2 (2017), S. 477–491. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-016-1513-3.

A. Massenstrommessungen zur Kennlinienbestimmung des Schneckenextruders

Düsentemperatur [°C]	Druck [bar]	Massenstrom [g s ⁻¹]
190	15	1,264284
190	15	1,271412
190	15	1,261249
190	15	1,15914
190	15	1,117367
190	15	1,11263
193	11,5	0,729115
193	11,5	0,747193
193	11,5	0,755874
193	11,5	0,731642
193	11,5	0,783072
193	11,5	0,797973
193	18,5	1,893495
193	18,5	1,230672
193	18,5	1,28599
193	18,5	1,167883
193	18,5	1,203065
193	18,5	1,062313
200	10	0,3994
200	10	0,529929
200	10	0,495201
200	10	0,452743
200	10	0,479158
200	10	0,472858
200	15	0,983568

200	15	0,936146
200	15	0,94378
200	15	0,92175
200	15	0,885911
200	15	0,879549
200	15	0,863453
200	15	0,867884
200	15	0,866493
200	15	0,865856
200	15	0,853849
200	15	0,850546
200	15	0,842803
200	15	0,835889
200	15	0,833667
200	15	0,837998
200	15	0,85443
200	15	0,84469
200	15	0,825447
200	15	0,829918
200	15	0,84044
200	15	0,826782
200	15	0,838108
200	15	0,810838
200	15	0,84447
200	15	0,86119
200	15	0,843747
200	15	0,853382
200	15	0,869594
200	15	0,865189
200	15	0,856353
200	15	0,844634
200	15	0,863436
200	15	0,852489
200	15	0,864206
200	15	0,860466
200	15	0,861609
200	15	0,871564
200	15	0,864856
200	15	0,863757

200	15	0,872897
200	15	0,851489
200	15	0,868928
200	15	0,860914
200	15	0,848491
200	15	0,857248
200	15	0,857209
200	20	1,335533
200	20	1,306231
200	20	1,258208
200	20	1,260583
200	20	1,234626
200	20	1,228888
207	11,5	0,60292
207	11,5	0,658535
207	11,5	0,645495
207	11,5	0,658758
207	11,5	0,666622
207	11,5	0,667844
207	18,5	1,192722
207	18,5	1,179371
207	18,5	1,201026
207	18,5	1,170376
207	18,5	1,181215
207	18,5	1,170099
210	15	0,938562
210	15	0,941259
210	15	0,924056
210	15	0,930837
210	15	0,922052
210	15	0,975675

Vorhersagefunktion:

$$\begin{aligned}
 \dot{m} = & 1,8111481007 - 0,010643745 \cdot T + (T - 200) \cdot ((T - 200) \cdot 0,00200991669) \\
 & + 0,0789196027 \cdot p + (p - 15) \cdot ((p - 15) \cdot 0,0005127845) \\
 & + (T - 200) \cdot ((p - 15) \cdot -0,000176724)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

B. Massenstrommessungen zur Kennlinienbestimmung der Zahnradpumpe

Pumpendrehzahl [s ⁻¹]	Massenstrom [g s ⁻¹]
0,05	0,276906172
0,1	0,546281382
0,15	0,808731404
0,2	1,074209929
0,25	1,326184129

Vorhersagefunktion:

$$\dot{m} = 5,252968924 \cdot n + 0,018517265 \quad (\text{B.1})$$

C. MATLAB-Skripte

Das nachfolgende MATLAB-Skript implementiert eine Überhangnebenbedingung in einer Topologieoptimierung. Der Code basiert auf dem Skript von *Matthijs Langelaar* [Lan17], der den Filter für geordnete Vernetzungen entwickelt hat. Dieses Skript ist modifiziert für ungeordnete Vernetzungen.

Skript C.1: Filter für eine Überhangnebenbedingung in einer Topologieoptimierung für ungeordnete Vernetzungen

```
1 function [ xi, varargout ] = AMfilter_unstructured( x, ids_base,
    support_region, ids_f_sorted_height, baseplate, varargin )
2 %AMFILTER Applies a virtual additive manufacturing process to a
3 %      2D blueprint design input. Modified for an unstructured mesh
4 % Possible uses:
5 % xi = AMfilter(x)                design transformation, default
    orientation
6 % xi = AMfilter(x, baseplate)    idem, with baseplate orientation
    specified
7 % [xi, df1dx, df2dx,...] = AMfilter(x, baseplate, df1dxi, df2dxi, ...)
8 %      This includes also the transformation of design sensitivities
9 % where
10 % x : blueprint design (2D array), 0 <= x(i,j) <= 1
11 % xi: printed design (2D array)
12 % baseplate: character indicating baseplate orientation: 'S' or 'X'
13 %      for 'X', the filter is inactive and just returns the
    input.
14 % df1dx, df1dxi etc.: design sensitivity (2D arrays)
15
16 %INTERNAL SETTINGS
17 P = 40; ep = 1e-4; xi_0 = 0.5; % parameters for smooth max/min functions
18
19 %INPUT CHECKS
20 if nargin==4, baseplate='S'; end
21 if upper(baseplate)=='X'
22     % bypass option: filter does not modify the blueprint design
23     xi = x;
24     varargout = varargin;
25     return;
```

```

26 end
27 nSens=max(0,nargin-5);
28 %AM FILTER =====
29 SHIFT = 100*realmin^(1/P); % small shift to prevent division by 0
30 Xi=zeros(size(x)); keep=zeros(size(x)); sq=zeros(size(x));
31 % baselin
32 xi(ids_base,:)=x(ids_base,:); % copy base row as-is
33 for i=1:numel(ids_f_sorted_height)
34     Q=P+log(numel(support_region{ids_f_sorted_height(i)}))/log(xi_0);
35     BACKSHIFT = 0.95*numel(support_region{ids_f_sorted_height(i)})^(1/Q)
36         *SHIFT^(P/Q);
37     % get max in support_region
38     cbr = xi(support_region{ids_f_sorted_height(i)}) + SHIFT;
39     keep(ids_f_sorted_height(i)) = sum(cbr.^P);
40     Xi(ids_f_sorted_height(i))= keep(ids_f_sorted_height(i))^(1/Q) -
41         BACKSHIFT;
42     sq(ids_f_sorted_height(i)) = sqrt((x(ids_f_sorted_height(i))-Xi(
43         ids_f_sorted_height(i))).^2 + ep);
44     xi(ids_f_sorted_height(i)) = 0.5*((x(ids_f_sorted_height(i))+Xi(
45         ids_f_sorted_height(i))) - sq(ids_f_sorted_height(i)) + sqrt(ep))
46     ;
47 end
48
49 %SENSITIVITIES
50 ids_f_sorted_height_inverse = flip(ids_f_sorted_height);
51 if nSens
52     dfdx=varargin; dfdx=varargin;
53     lambda_dsmindx=zeros(numel(x),nSens);
54     % from top to bottom element:
55 for i=1:numel(ids_f_sorted_height_inverse)
56     Ns = numel(support_region{ids_f_sorted_height_inverse(i)});
57     Q=P+log(Ns)/log(xi_0);
58     dsmindx = .5*(1-(x(ids_f_sorted_height_inverse(i))-Xi(
59         ids_f_sorted_height_inverse(i)))./sq(ids_f_sorted_height_inverse(
60         i)));
61     %dsminDXi = .5*(1+(x(i,:)-Xi(i,:))./sq(i,:));
62     dsminDXi = 1-dsmindx;
63
64     % smax sensitivity terms
65     % current support_region
66     cbr_id = support_region{ids_f_sorted_height_inverse(i)};
67     % densities in support_region
68     cbr = xi(cbr_id) + SHIFT;
69     % differentiation dXi/dxi
70     dmx=zeros(numel(cbr),1);
71     for j=1:numel(cbr)

```

```
65     dmX(j) = (P/Q)*keep(ids_f_sorted_height_inverse(i)).^(1/Q-1).*
        cbr(j).^(P-1);
66 end
67 for k=1:nSens
68     dfdx{k}(ids_f_sorted_height_inverse(i)) = (dfdxi{k}(
        ids_f_sorted_height_inverse(i)) + lambda_dsmindx(
        ids_f_sorted_height_inverse(i),k))*dsmindx;
69     for j=1: numel(cbr)
70         lambda_dsmindx(cbr_id(j),k) = lambda_dsmindx(cbr_id(j),k) +
            ((dfdxi{k}(ids_f_sorted_height_inverse(i)) +
            lambda_dsmindx(ids_f_sorted_height_inverse(i),k))*
            dsmindx) * dmX(j);
71     end
72 end
73 % base layer:
74 for k=1:nSens
75     dfdx{k}(ids_base) = dfdxi{k}(ids_base)+lambda_dsmindx(ids_base ,
        k)';
76 end
77 end
78
79 end
80
81 for s=1:nSens
82     varargout{s}=dfdx{s};
83 end
84
85 end
```