BÜTTNER, Maximilian & ERATH, Kirstin
Halle a. d. S.

Einblicke in die Herleitung einer Grundvorstellung zum Tangens

Im Rahmen einer Studie, in der vorstellungsbasierte Zugänge zur Trigonometrie entwickelt und erforscht werden, wurden Lernenden die Bilder in Abbildung 1 gezeigt. Nachdem diese hinsichtlich des dargestellten Anstiegs geordnet werden sollten, wurden die Lernenden aufgefordert ihre Anordnung zu erklären.

Abb. 1: Situationen mit dargestellten Anstiegen; Pixabay-Lizenz

Die folgenden Äußerungen stammen aus verschiedenen Bearbeitungsgruppen und stehen exemplarisch für eine Vielzahl gegebener Antworten:

Phine Das (zeigt auf den Feldweg) sieht so aus, als würde ich am Wochenende spazieren gehen, fünf Minuten, ganz entspannt.

Ronja Man sieht halt einfach wie das hier (fährt mit Finger Rollstuhlaufgang nach) halt hochgeht oder hier (fährt mit Finger die Felsenklippe nach) geht es halt komplett steil runter.

Mara Der ist glaube niedriger, weil das über eine längere Zeit ansteigt, längeren Weg ansteigt, glaube ich.

Leon Weil es halt spitzer zuläuft.

Der Beitrag zeigt, wie diese empirischen Eindrücke in die normative Herleitung einer neuen Grundvorstellung zur Trigonometrie einfließen.

Theoretischer Hintergrund

Damit Lernende tragfähige Konzepte zur Trigonometrie entwickeln, werden individuelle Vorstellungen aufgegriffen und in mathematisch normative Vorstellungen überführt. Diese normativen Vorstellungen stehen im Mittelpunkt der Grundvorstellungstheorie (vom Hofe & Blum, 2016). Grundvorstellungen sollen dabei insbesondere an das Vorwissen der Lernenden anknüpfen, indem sie auf die unmittelbare Lebenswelt der Lernenden Bezug nehmen (primäre Grundvorstellungen) oder an gedankliche Operationen mit mathematischen Darstellungen anknüpfen (sekundäre Grundvorstellungen). Zur Trigonometrie wurden von Salle und Frohn (2017) bereits Grundvorstellungen aufgestellt: die Verhältnisvorstellung, die Projektionsvorstellung und die Oszillationsvorstellung. Diese wurden von Katter (2023) um die Funkti-

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

onsvorstellung, die Referenzdreiecksvorstellung und die Koordinatenvorstellung erweitert. Katter (2023) nutzte für deren Formulierung einen von Salle und Clüver (2021) entwickelten Verfahrensrahmen zur Herleitung von Grundvorstellungen. Mit Bezug auf diesen Verfahrensrahmen wird auch im Folgenden eine neue Grundvorstellung zum Tangens hergeleitet.

Schritte auf dem Weg zur Formulierung einer neuen Grundvorstellung zum Tangens

Für die Herleitung sollen zunächst der Bezugsrahmen und der Gültigkeitsbereich festgelegt werden, innerhalb deren die Grundvorstellung formuliert werden soll. Es schließt eine Sachanalyse an, die den mathematischen Kern offenlegt und Phänomene sowie empirische Ergebnisse einbezieht. Darauf aufbauend wird die konkrete Grundvorstellung formuliert und die didaktische Relevanz eingeschätzt (Salle & Clüver, 2021).

Die curriculare Ausgestaltung der Sekundarstufe I und theoretische Auseinandersetzungen mit dem Lerngegenstand (Büttner & Erath, 2023) zeigen, dass durch die Trigonometrie an zentrale Themen des Mathematikunterrichts angeknüpft wird (z.B. Steigungsdreieck bei linearen Funktionen, Gleichungslehre, Ähnlichkeits- bzw. Strahlensätze). Für die weitere Analyse soll sich der Gültigkeitsbereich auf die symbolische Darstellung $tan(\alpha) = a/b$ und rechtwinklige Dreiecke als grafische Darstellungen beschränken, wobei a bzw. b die Gegen- bzw. Ankathete zum Winkel α ist. Salle und Clüver (2021) betrachten innerhalb ihrer Analyse zur Verhältnisvorstellung zum Sinus das Verhältnis zu einem festen Winkel. Überträgt man diese Sichtweise auf den Tangens, wird dieser strukturell als mathematischer Term gedeutet. Innerhalb des gesetzten Bezugs- und Gültigkeitsrahmens ist aber auch die Definition des Tangens als Funktion relevant, die dem Winkel α das Verhältnis aus seiner Gegen- zur Ankathete zuordnet. Diese Definition stellt insofern eine Ergänzung zu den in Salle und Clüver (2021) diskutierten Definitionen dar, da eine Deutung des Tangens als Zuordnung ermöglicht wird.

Da Grundvorstellungen an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge anknüpfen (vom Hofe & Blum, 2016), ist neben dieser innermathematischen Betrachtung auch eine Analyse auf phänomenologischer Ebene notwendig. Relevante Phänomene, die den Tangens motivieren, sind z.B. der Anstieg von Treppen, Straßen, Schanzen, usw.; die Gleitzahl von Flugzeugen und Vögeln; der Schattenwurf von Bäumen; die Bestimmung von Höhen bzw. von Strecken bei der Landvermessung. Allen Problemstellungen ist gemein, dass man unzugängliche Streckenlängen mithilfe von Winkeln messbar machen oder Winkel mithilfe von Seitenverhältnissen ermitteln will. Zudem lassen sich alle genannten Phänomene mithilfe von Winkeln oder Seitenverhältnissen beschreiben. Das mathematische Konzept, welches sich hinter den genannten Phänomenen verbirgt, ist die Ähnlichkeit (rechtwinkliger) Dreiecke, die man aufgrund der Ähnlichkeitssätze entweder über die Angabe der Innenwinkel oder der Seitenverhältnisse beschreiben kann. Durch diese Betrachtung lässt sich der Tangens auch innermathematisch als Werkzeug deuten, welches bei der Beschreibung der Ähnlichkeit zwischen den beiden Beschreibungsmitteln – Innenwinkel und Verhältnis zugehöriger Gegen- und Ankathete – vermittelt.

Eine solche Interpretation des Tangens als Vermittlungswerkzeug, lässt sich auch aus der historischen Begriffsgenese (ausführliche Beschreibung bei Katter, 2023) ableiten: Wurden bei den alten Ägyptern die Seitenverhältnisse der Kantenlängen der Steine beim Pyramidenbau berücksichtigt, kamen für Entfernungsmessungen bei Thales erstmals Winkel zum Einsatz. Hipparch und auch Ptolemäus entwickelten durch die Sehnentafeln erstmals eine Darstellung, die jedem Winkel ein Seitenverhältnis zuordnet und somit einen Beschreibungswechsel ermöglicht. Die Relevanz dieser Darstellung lässt sich daran festmachen, dass sie bis in die Neuzeit für Berechnungen genutzt und weiterentwickelt wurde.

Auch die vorgestellten empirischen Eindrücke aus der Einleitung zeigen, dass mehrere Beschreibungsmöglichkeiten für Lernende relevant sind: Während für Phine der Begriff des Anstiegs eher durch Erlebnisse und Erfahrungen geprägt ist, findet man bei Ronja Anzeichen dafür, dass Anstiege durch die perzeptuelle Wahrnehmung unterschieden werden. Beide können das Phänomen Steigung zwar wahrnehmen, nutzen aber keine mathematischen Beschreibungsmittel. Die Aussage von Mara deutet darauf hin, dass sie Anstiege durch Seitenverhältnisse beschreibt, während Leon den Fokus auf die Innenwinkel richtet. Beide verwenden also schon Vorformen von mathematisch angemessenen Beschreibungsmitteln. Auch berichten Lehrkräfte aus dem Unterricht von unterschiedlichen Präferenzen hinsichtlich der Beschreibung des Anstiegs (Marxer & Weisshaar, 2013).

Aus den vorangegangenen Analysen lässt sich als neue primäre Grundvorstellung die *Beschreibungswechselvorstellung* (BWV) formulieren: Der Tangens ermöglicht es von der Beschreibung von Anstiegen durch Anstiegswinkel zu einer Beschreibung durch das Verhältnis aus horizontaler zu vertikaler Streckenlänge zu wechseln. Die neue Grundvorstellung lässt sich durch die theoretischen Betrachtungen auch als sekundäre Grundvorstellung formulieren: Der Tangens als Funktion, welche einen Wechsel von der Beschreibung der Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke durch Winkel zu einer Beschreibung durch das Seitenverhältnis aus Gegen- zur Ankathete ermöglicht. Beide Deutungsmöglichkeiten der Beschreibungswechselvorstellung werden in Abbildung 2 dargestellt.

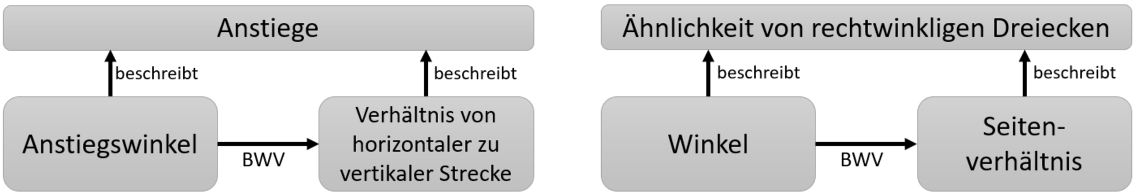

Abb. 2: Primäre und sekundäre Deutung der Beschreibungswechselvorstellung (BWV)

Die didaktische Relevanz der BWV liegt in der Beachtung individueller Konzepte, die in den empirischen Einblicken illustriert wurden. Das Zusammenführen dieser Konzepte steckt im Kern der BWV, weshalb sie für eine tragfähige Begriffsbildung innerhalb der Trigonometrie und für einen gemeinsamen Unterrichtsdiskurs von Bedeutung ist.

Fazit und Ausblick

Fachliche, phänomenologische, historische und empirische Betrachtungen zum Tangens wurden zusammengeführt, um die BWV zu formulieren. Auf sekundärer Ebene lassen sich die Analyseschritte auf alle anderen trigonometrischen Funktionen übertragen. Auf primärer Ebene müssten Phänomene gefunden werden, die eine solche Formulierung rechtfertigen. Zudem bleibt zu untersuchen, inwiefern ein Vorstellungsumbruch bei den periodisch trigonometrischen Funktionen ausbleibt, da eine Interpretation des Tangens als Funktion in dieser Grundvorstellung vorweggenommen wird.

Literatur

Büttner, M., & Erath, K. (2023). Beziehungen zwischen Bedeutungselementen und grafischen Darstellungen in der Trigonometrie. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022* (S. 649–652). WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Katter, V. (2023). *Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-41355-2

Marxer, M., & Weisshaar, S. (2013). Was hat Skifahren mit Trigonometrie zu tun? Verhältnismäßig: viel!. *mathematik lehren, 179*, 28–31.

Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*(2), 553–580. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5

Salle, A., & Frohn, D. (2017). Grundvorstellungen zu Sinus und Cosinus. *mathematik lehren, 204*, 8–12.

vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3